NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

22

LUIZ MONTEIRO

Axiomes indépendants pour les Algèbres de Lukasiewicz trivalentes

1964
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

Nº 22

ISSN 0078-2017

AXIOMES INDEPENDANTS POUR LES ALGEBRES DE LUKASIEWICZ TRIVALENTES

par

Luiz F.T. Monteiro

1964

Instituto de Matemática

Universidad Nacional del Sur

Bahía Blanca

AXIOMES INDEPENDANTS POUR LES
ALGEBRES DE LUKASIEWICZ TRIVALENTES

par

Luiz F.T. Monteiro

La théorie des algèbres de Lukasiewicz trivalentes a été fondée et développée par Gr.C. Moisil (1940, 1941, 1960).

A. Monteiro a montré que la définition suivante est équivalente à celles qui ont été indiquées par Gr.C. Moisil.

DEFINITION [1]: Un système $(A, 1, \sim, \nabla, \wedge, \vee)$ formé par: 1º) un ensemble, non vide, A; 2º) un élément 1 de A; 3º) deux opérations unaires, $\sim$, ∇, définies sur A; 4º) deux opérations binaires, $\wedge$,

---

[1] Cette définition a été indiquée par A. Monteiro dans son cours sur les algèbres de Lukasiewicz trivalentes (premier semestre 1963), où il a posé le problème d'étudier l'indépendance des axiomes L1,....,L8.

<u>$\vee$, définies sur A, sera dit une algèbre de Lukasiewicz trivalente si les axiomes suivants sont vérifiés (pour tout x,y,z de A)</u>.

L1) $x \vee 1 = 1$

L2) $x \wedge (x \vee y) = x$

L3) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

L4) $\sim \sim x = x$

L5) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

L6) $\sim x \vee \nabla x = 1$

L7) $x \wedge \sim x = \sim x \wedge \nabla x$

L8) $\nabla (x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$

Des axiomes L1, L2 et L3, on déduit, d'après M. Sholander (1951), que le système $(A, 1, \wedge, \vee)$ est un réticulé distributif ayant 1 par dernier élément. D'après les cinq premiers axiomes le système $(A, 1, \sim, \wedge, \vee)$ est une algèbre de Morgan (A. Monteiro, 1960) et par conséquent $o = \sim 1$ est le premier élément du réticulé A.

Nous allons démontrer L1 à partir des autres axiomes et montrer que chacun des axiomes Li($i = 2, \ldots, 8$) est indépendant des restants. Dans ces conditions L2,L3,L4,L5,L6,L7, et L8 sont des axiomes indépendants pour la notion d'algèbre de Lukasiewicz trivalente.

<u>Dépendance de l'axiome L1</u>. En remplaçant dans L6, x par $\sim x$, et en tenant compte de l'axiome L4 nous avons

(i) $x \vee \nabla \sim x = 1$. D'un autre côté dans tout réticulé sont valables les égalités suivantes:

(ii) $x \vee x = x$; (iii) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.

Alors, en utilisant successivement (i), (iii), (ii) et (i) nous avons: $x \vee 1 = x \vee (x \vee \nabla \sim x) = (x \vee x) \vee \nabla \sim x =$
$= x \vee \nabla \sim x = 1$.

Indépendance de l'axiome L2. Soit M un ensemble contenant au moins deux éléments distincts o et 1. Considérons les quatre opérations définies, sur M, de la manière suivante:

i) $\sim x = x$, $\nabla x = 1$ pour tout x de M

ii) $x \wedge y = 1$, $x \vee y = 1$ pour tout x,y de M

On vérifie facilement que les axiomes L1, L3,....,L8 sont valables tandis que L2 ne l'est pas car:

$$o \wedge (o \vee 1) = 1 \neq o$$

Indépendance de l'axiome L3. Soit A le réticulé dont le diagramme de Hasse est indiqué dans la figure 1, et posons: 1º) $\nabla x = x$ pour tout x de A. 2º) $\sim o = 1$; $\sim a = b$; $\sim b = a$; $\sim c = d$; $\sim d = c$; $\sim 1 = o$. Alors les axiomes L1,L2,L4,....,L8 sont valables, et L3 ne l'est pas car: $a \wedge (c \vee d) = a$ tandis que $(d \wedge a) \vee (c \wedge a) = o$

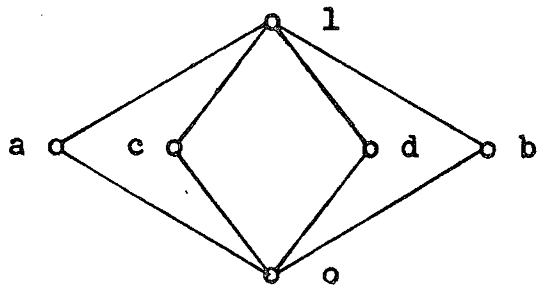

Fig. 1

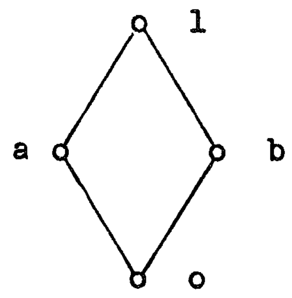

Fig. 2

<u>Indépendance de l'axiome L4</u>. Soit T le réticulé distributif dont le diagramme de Hasse est indiqué dans la figure 2, et posons: 1º) $\sim x = 1$ pour tout x de T. 2º) $\nabla x = x$ pour tout x de T. Alors les axiomes L1,L2,L3, L5,...,L8 sont valables tandis que L4 ne l'est pas car: $\sim\sim o = 1 \neq o$

<u>Indépendance de l'axiome L5</u>. Soit T le réticulé distributif indiqué dans la figure 2, et posons: 1º) $\sim x = x$ pour tout x de T. 2º) $\nabla x = 1$ pour tout x de T. Alors les axiomes L1,...,L4,L6,L7,L8 sont vérifiés tandis que L5 ne l'est pas car: $\sim(o \wedge a) = \sim o = o$ tandis que $\sim o \vee \sim a = o \vee a = a$

<u>Indépendance de l'axiome L6</u>. Soit T le réticulé distributif indiqué dans la figure 2, et posons: 1º) $\sim o = 1$; $\sim a = a$; $\sim b = b$; $\sim 1 = o$. 2º) $\nabla x = x$ pour tout x de T.

Alors les axiomes L1,....,L5,L7,L8 sont vérifiés tandis que L6 ne l'est pas car: $\sim b \vee \nabla b = b \vee b = b \neq 1$.

Indépendance de l'axiome L7. Soit T le réticulé distributif indiqué dans la figure 2, et posons: 1º) $\sim o = 1; \sim a = a; \sim b = b; \sim 1 = o$. 2º) $\nabla o = o; \nabla a = b; \nabla b = a; \nabla 1 = 1$. Alors les axiomes L1,....,L6,L8 sont vérifiés et L7 n'est pas valable car: $a \wedge \sim a = a \wedge a = a$ tandis que $\sim a \wedge \nabla a = a \wedge b = o$.

Indépendance de l'axiome L8. Soit T le réticulé distributif indiqué dans la figure 2, et posons: 1º) $\sim o = 1; \sim a = a; \sim b = b; \sim 1 = o$, 2º) $\nabla o = o$ et $\nabla x = 1$ pour tout x de T distinct de o. Alors les axiomes L1,.. ..,L7 sont vérifiés et L8 n'est pas valable car: $\nabla(a \wedge b) = \nabla o = o$ tandis que $\nabla a \wedge \nabla b = 1 \wedge 1 = 1$.

R. Maronna ([2]) a démontré qu'un système $(A, \sim, \wedge, \vee)$ vérifiant les axiomes L2-L5 peut être défini comme un système $(A, \sim, \wedge)$ vérifiant les axiomes:

([2]) R. Maronna "A characterisation of Morgan lattices" (à paraître).

M1) $x = x \wedge \sim(\sim x \wedge \sim y)$

M2) $x \wedge \sim(\sim y \wedge \sim z) = \sim(\sim(z \wedge x) \wedge \sim(y \wedge x))$

à condition de poser par définition

D) $x \vee y = \sim(\sim x \wedge \sim y)$

A. Monteiro nous a fait remarquer que ce résultat permet immédiatement de définir une algèbre de Lukasiewicz trivalente comme un système $(A, 1, \nabla, \sim, \wedge)$ vérifiant les axiomes M1), M2) et

M3) $\sim(x \wedge \sim\nabla x) = 1$

M4) $x \wedge \sim x = \sim x \wedge \nabla x$

M5) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$

à condition d'adopter la définition D).

Les axiomes M1) - M5), ainsi obtenus, sont encore indépendants, comme le montre les exemples indiqués pour établir, respectivement, l'indépendance de L2, L3, L6, L7, L8. Pour voir qu'il en est ainsi il suffit de remarquer que l'égalité d) est vérifiée dans tous ces exemples.

Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca - Argentina

BIBLIOGRAPHIE

MOISIL (Gr.C.)

(1940) Recherches sur les logiques non-chrysippiennes. Annales Scientifiques de l'Université de Jassy. 26 (1940), pp.431-466.

(1941) Notes sur les logiques non-chrysippiennes. Annales Scientifiques de l'Université de Jassy. 27 (1941), pp.86-98.

(1960) Sur les idéaux des algèbres Lukasiewicziennes Trivalentes. Analele Universitatii C.I.Parhon. Seria Acta Logica. 3 (1960), pp. 83-95.

MONTEIRO (Antonio)

(1960) Matrices de Morgan Caractéristiques pour le Calcul Propositionnel Classique. Anais da Academia Brasileira de Ciências. 52 (1960), pp. 1-7.

SHOLANDER (Marlow)

(1951) Postulates for distributive lattices. Canadian Journal of Mathematics. 3 (1951), pp.28-30.