NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

21

ANTONIO MONTEIRO

Sur la définition des Algèbres de Lukasiewicz trivalentes

1964
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

Nº 21

SUR LA DEFINITION DES ALGEBRES DE LUKASIEWICZ TRIVALENTES

par

Antonio Monteiro

1964

Instituto de Matemática

Universidad Nacional del Sur

Bahía Blanca

SUR LA DEFINITION DES ALGEBRES

DE LUKASIEWICZ TRIVALENTES

par

Antonio Monteiro

1. INTRODUCTION

La notion d'algèbre de Lukasiewicz (trivalente) introduite par Gr. Moisil ([8],[9],[10]) (1) joue dans le calcul propositionnel trivalent de Lukasiewicz ([5],[6])

---

(1) Voir la liste bibliographique à la fin de cette note.

un rôle analogue à celui des algèbres de Boole dans le calcul propositionnel classique. Pour voir qu'il en est ainsi il suffit de remarquer que l'algèbre de Lindenbaum du calcul propositionnel trivalent de Lukasiewicz est l'algèbre de Lukasiewicz ayant autant de générateurs libres qu'il y a de variables propositionnelles.

Nous nous proposons dans cette note d'indiquer une définition des algèbres de Lukasiewicz au moyen d'axiomes moins nombreux que ceux qui figurent dans les diverses définitions indiquées par Moisil, tout en conservant les opérations primitives choisies par cet auteur.

2. LES ALGEBRES DE MORGAN

Les réticulés distributifs ont été définis par M. Sholander [14] comme les systèmes $(A, \wedge, \vee)$ formés par un ensemble, non vide, A sur lequel sont définies deux opérations binaires $\wedge$ et $\vee$ qui vérifient les axiomes:

S1) $a \wedge (a \vee b) = a$

S2) $a \wedge (b \vee c) = (c \wedge a) \vee (b \wedge a)$

La démonstration de ce résultat est assez longue et nous la supposons connue.

Si A contient un élément 1 tel que:

$$1 \vee x = 1, \text{ quel que soit } x \in A$$

nous dirons que 1 est le dernier élément de A.

2.1. DEFINITION: Un système $(A, 1, \sim, \wedge, \vee)$ formé par: 1º) un ensemble, non vide, A, 2º) un élément $1 \in A$; 3º) une opération monaire $\sim$ et deux opérations binaires $\wedge$ et $\vee$ définies sur A; sera dit une algèbre de Morgan si les axiomes suivants sont vérifiés:

Axiome 1: $1 \vee x = 1$

Axiome 2: $x \wedge (y \vee x) = x$

Axiome 3: $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

Axiome 4: $x = \sim\sim x$

Axiome 5: $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

Cette notion a été étudiée par A. Bialynicki-Birula et H. Rasiowa [1] sous le nom d'algèbre quasi-Booléenne. Si nous supprimons l'axiome 1 nous aurons affaire à un réticulé de Morgan, notion considérée par Gr. C. Moisil ([7] , page 91) et étudiée par J. Kalman [2] sous le nom de "distributive i-lattice"). Nous adoptons ici la terminologie que nous avons introduite dans [11].

On démontre de suite que dans les réticulés de Morgan nous avons $\sim(a \vee b) = \sim a \wedge \sim b$, et que dans une algèbre de Morgan $0 = \sim 1$ est le premier élément de A.

Un réticulé de Morgan A sera dit <u>normal</u> [2] , ou <u>linéaire</u> [11] si la condition:

(K) $x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y$

est vérifiée. C'est ce qui a lieu dans les algèbres de Boole et dans les groupes réticulés.

Les algèbres de Morgan que vérifient la condition (K) seront dites des algèbres de Kleene([3] page 153, [4] , p. 334).

Les N-lattices de Helena Rasiowa [13] qui jouent un rôle fondamental dans le calcul propositionnel constructif avec négation forte sont des exemples particuliers d'algèbres de Kleene et nous verrons plus loin qu'il en est de même pour les algèbres de Lukasiewicz trivalentes.

Dans un autre travail nous montrerons que la notion d'algèbre de Lukasiewicz est un cas particulier de celle de N-lattice

3. <u>DEFINITION DES ALGEBRES DE LUKASIEWICZ TRIVALENTES</u>

Nous nous proposons maintenant d'indiquer une définition des algèbres de Lukasiewicz (trivalentes) équivalente à celles qui ont été indiquées par Gr. C. Moisil.

<u>3.1. DEFINITION: Un système $(A, 1, \sim, \nabla, \wedge, \vee)$ formé par: 1º) un ensemble, non vide, A; 2º) un élément $1 \in A$; 3º) deux opérations monaires $\sim$ et ∇ définies sur A; 4º) deux opérations binaires $\wedge$ et $\vee$ définies sur A; sera dit une algèbre de Lukasiewicz trivalente, si les axiomes suivants sont vérifiés:</u>

<u>A1)</u> $1 \vee x = 1$

<u>A2)</u> $x \wedge (y \vee x) = x$

<u>A3)</u> $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

<u>A4)</u> $x = \sim\sim x$

<u>A5)</u> $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

<u>A6)</u> $\sim x \vee \nabla x = 1$

<u>A7)</u> $x \wedge \sim x = \sim x \wedge \nabla x$

<u>A8)</u> $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$

<u>Pour simplifier le langage nous dirons aussi que A est</u>

<u>une algèbre de Lukasiewicz</u>.

Nous pouvons affirmer d'après les axiomes A1-A5 que A est une algèbre de Morgan. Si nous posons $o = \sim 1$, alors o est le premier élément de A.

Nous supposerons connues les règles de calcul valables dans une algèbre de Morgan. Démontrons maintenant des règles de calcul valables dans les algèbres de Lukasiewicz, où intervient l'opération ∇.

<u>A9) $x \leq \nabla x$</u>

En tenant compte de A1), A6) et A7) nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} x &= x \wedge 1 = x \wedge (\sim x \vee \nabla x) \\ &= (x \wedge \sim x) \vee (x \wedge \nabla x) \\ &= (\sim x \wedge \nabla x) \vee (x \wedge \nabla x) \\ &= (\sim x \vee x) \wedge \nabla x \leq \nabla x \end{aligned}$$

<u>A10) $\nabla 1 = 1$</u>

En effet nous avons $\nabla 1 \leq 1$ et, d'après A9), $1 \leq \nabla 1$ donc $\nabla 1 = 1$.

<u>A11) $\nabla o = o$</u>

En utilisant A1) et A7) nous pouvons écrire:

$$o = o \wedge 1 = o \wedge \sim o = \sim o \wedge \nabla o = 1 \wedge \nabla o = \nabla o$$

<u>A12) Si $x \leq y$ alors $\nabla x \leq \nabla y$.</u>

De $x \leq y$ on déduit $x = x \wedge y$ d'où, d'après A8):
$\nabla x = \nabla x \wedge \nabla y$ c'est-à-dire $\nabla x \leq \nabla y$.

<u>A13) $x \vee \nabla \sim x = 1$</u>

En remplaçant x par $\sim x$ dans A6 nous aurons $\sim \sim x \vee \nabla \sim x = 1$, d'où l'on déduit la formule A13) (en tenant compte de A4).

<u>A14) $\nabla \sim \nabla \sim x \leq x$</u>

En appliquant l'opération $\sim$ aux deux membres de l'égalité A13) nous aurons:

$$(a) \quad \sim x \wedge \sim \nabla \sim x = o$$

En tenant compte de A11), (a) et A8) nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned}(b) \quad o = \nabla o &= \nabla(\sim x \wedge \sim \nabla \sim x) \\ &= \nabla \sim x \wedge \nabla \sim \nabla \sim x\end{aligned}$$

En utilisant (b), A13), A6) et A1) nous aurons:

$$\begin{aligned} x = x \vee o &= x \vee (\nabla \sim x \wedge \nabla \sim \nabla \sim x) \\ &= (x \vee \nabla \sim x) \wedge (x \vee \nabla \sim \nabla \sim x) \\ &= 1 \wedge (x \vee \nabla \sim \nabla \sim x) = x \vee \nabla \sim \nabla \sim x \end{aligned}$$

et cette égalité montre bien que A14) est vérifiée.

<u>A15) $\nabla \sim \nabla \sim \nabla \sim x = \nabla \sim x$</u>

De A14) on déduit:

$$\sim x \leq \sim \nabla \sim \nabla \sim x$$

d'où par A12)

(a) $\nabla\sim x \leq \nabla\sim\nabla\sim\nabla\sim x$

D'un autre côté en remplacant x par $\nabla\sim x$ dans A13) nous aurons:

(b) $\nabla\sim\nabla\sim\nabla\sim x \leq \nabla\sim x$

De (a) et (b) on déduit A15).

<u>A16) $\nabla\sim\nabla x$ est le complément booléen de ∇x</u>.

En remplaçant dans A13) x par ∇x nous avons

(a) $\nabla x \vee \nabla\sim\nabla x = 1$

De A6) on déduit $x \wedge \sim\nabla x = o$ donc

(b) $o = \nabla o = \nabla(x \wedge \sim\nabla x) = \nabla x \wedge \nabla\sim\nabla x$

De (a) et (b) on déduit A16).

<u>A17) $\sim\nabla x$ est le complément booléen de ∇x</u>

En remplaçant dans A9) x par $\sim\nabla x$ nous aurons:

$\sim\nabla x \leq \nabla\sim\nabla x$ d'où

$\nabla x \wedge \sim\nabla x \leq \nabla x \wedge \nabla\sim\nabla x$

et alors par (16): $\nabla x \wedge \sim\nabla x \leq o$, c'est-à-dire:

(a) $\nabla x \wedge \sim\nabla x = o$. En prenant la négation des deux membres de (a) nous pouvons écrire:

(b) $\nabla x \vee \sim\nabla x = 1$.

De (a) et (b) on déduit A17).

<u>A18) $\nabla\sim\nabla x = \sim\nabla x$</u>

Dans un réticulé distributif chaque élément a un seul complément booléen; donc A18) résulte de A16) et A17).

<u>A19) $\nabla \sim \nabla \sim x = \sim \nabla \sim x$</u>

On obtient cette formule en remplaçant x par $\sim x$ dans A18).

<u>A20) $\nabla \nabla x = \nabla x$</u>

De A18) on déduit

$\sim \nabla \sim \nabla x = \sim \sim \nabla x = \nabla x$

d'où

$$(1) \quad \nabla \sim \nabla \sim \nabla x = \nabla \nabla x$$

D'un autre côté, en remplaçant x par $\sim x$ dans A15) nous avons:

$$(2) \quad \nabla \sim \nabla \sim \nabla x = \nabla x$$

et A20) est une conséquence de (1) et (2)

<u>3.2. DEFINITION: Un élément $c \in A$ sera dit constant ou invariant si $\nabla c = c$. L'ensemble de toutes les constantes de A sera représenté par K.</u>

Montrons maintenant que:

<u>A21) K contient les éléments 0 et 1 et est invariant par rapport aux opérations $\sim, \nabla, \wedge, \vee$.</u>

DEMONSTRATION: D'après les égalités A10) et A11) on peut affirmer que $0, 1 \in K$. Montrons maintenant que

a) <u>Si $a, b \in K$ alors $a \wedge b \in K$</u>

En effet si $a, b \in K$ nous aurons $\nabla(a \wedge b) = \nabla a \wedge \nabla b = a \wedge b$ donc $a \wedge b \in K$

b) <u>Si $a \in K$ alors $\sim a \in K$</u>

Supposons que $\nabla a = a$ alors, par A18), nous pouvons écrire $\nabla \sim a = \nabla \sim \nabla a = \sim \nabla a = \sim a$ c'est-à-dire $\sim a \in K$.

c) <u>Si $a \in K$ alors $\nabla a \in K$.</u>

C'est une conséquence immédiate de A20).

d) <u>Si $a, b \in K$ alors $a \vee b \in K$</u>

Si $a, b \in K$ par (b): $\sim a, \sim b \in K$ d'où par a): $\sim a \wedge \sim b \in K$ et alors par (b) $\sim(\sim a \wedge \sim b) = a \vee b \in K$.

<u>A22) $\nabla(x \vee y) = \nabla x \vee \nabla y$</u>.

Des relations $x \leq x \vee y$, $y \leq x \vee y$ on déduit par A12):

(1) $\nabla x \leq \nabla(x \vee y)$

(2) $\nabla y \leq \nabla(x \vee y)$

d'où

(3) $\nabla x \vee \nabla y \leq \nabla(x \vee y)$

D'un autre côté par A9): $x \leq \nabla x$, $y \leq \nabla y$ d'où

(4) $x \vee y \leq \nabla x \vee \nabla y$

En tenant compte de la règle A12), de (4) on déduit:

(5) $\nabla(x \vee y) \leq \nabla(\nabla x \vee \nabla y)$

Comme d'après A20), ∇x, $\nabla y \in K$ nous pouvons affirmer, d'après A21),

(6) $\nabla(\nabla x \vee \nabla y) = \nabla x \vee \nabla y$

De (5) et (6) il résulte

(7) $\nabla(x \vee y) \leq \nabla x \vee \nabla y$

et A22) est une conséquence de (3) et (7)

<u>A23) $\sim \nabla \sim x \vee (\nabla x \wedge \nabla \sim x) \vee \sim \nabla x = 1$</u>

En tenant compte des règles déjà démontrées et en particulier de A17) nous pouvons écrire

$$\sim \nabla \sim x \vee (\nabla x \wedge \nabla \sim x) \vee \sim \nabla x = (\sim \nabla \sim x \vee \nabla x \vee \sim \nabla x) \wedge$$
$$\wedge (\sim \nabla \sim x \vee \nabla \sim x \vee \sim \nabla x) = (\sim \nabla \sim x \vee (\nabla x \vee \sim \nabla x)) \wedge$$
$$\wedge ((\sim \nabla \sim x \vee \nabla \sim x) \vee \sim \nabla x) = (\sim \nabla \sim x \vee 1) \wedge (1 \vee \sim \nabla x) =$$
$$= 1 \wedge 1 = 1$$

L. Monteiro [12] a montré que, à l'exception de A1, chacun des axiomes que figurent dans la définition 3.1 est indépendant des restants; donc, d'après cet auteur, les axiomes A2) - A8) sont des axiomes indépendants pour les algèbres de Lukasiewicz.

Remarquons que l'opération ∇ (définie sur le réticulé distributif (A) a des propriétés analogues à celles de l'opération de <u>fermeture</u> dans les espaces topologiques, c'est-à-dire, nous avons:

1) $\nabla o = o$

2) $x \leq \nabla x$

3) $\nabla(x \vee y) = \nabla x \vee \nabla y$

4) $\nabla\nabla x = \nabla x$

Cela nous conduit par analogie avec la définition d'<u>intérieur</u>, à poser:

<u>3.3. DEFINITION: $\Delta x = \sim\nabla\sim x$</u>

Dans les algèbres de Lukasiewicz il existe un principe de dualité qui peut être exprimé par la <u>table de dualité</u> suivante:

0	1
$\sim$	$\sim$
∇	Δ
$\vee$	$\wedge$

<u>3.6. DEFINITION: Etant donné une propriété relative aux algèbres de Lukasiewicz nous appellerons propriété duale de P la propriété P' qu'on obtient en remplaçant dans l'énoncé P chacun des symboles $0, 1, \nabla, \Delta, \vee, \wedge$, respectivement par $1, 0, \Delta, \nabla, \wedge, \vee$.</u>

Pour montrer que:

3.7. THEOREME DE LA DUALITE: Si une propriété P est valable dans toutes les algèbres de Lukasiewicz, alors la propriété duale P' est aussi valable.

Il suffit de démontrer que les règles de calcul suivantes sont vérifiées:

A6') $\sim x \wedge \Delta x = 0$

En effet en utilisant la Déf. 3.3, A5), A6):

$$\sim x \wedge \Delta x = \sim x \wedge \sim\nabla\sim x = \sim(x \vee \nabla\sim x) = \sim 1 = 0$$

A7') $x \vee \sim x = \sim x \vee \Delta x$

Car d'après la Déf. 3.3, A5), A7), A5) et A4)

$$\sim x \vee \Delta x = \sim x \vee \sim\nabla\sim x = \sim(x \wedge \nabla\sim x)$$
$$= \sim(x \wedge \sim x) = \sim x \vee x$$

A8') $\Delta(x \vee y) = \Delta x \vee \Delta y$

Il est clair aussi que:

$$\Delta(x \vee y) = \sim\nabla\sim(x \vee y) = \sim\nabla(\sim x \wedge \sim y) =$$
$$= \sim(\nabla\sim x \wedge \nabla\sim y) = \sim\nabla\sim x \sim\sim\nabla\sim y$$
$$= \Delta x \vee \nabla y$$

4. LA DEFINITION DE MOISIL

Parmi les définitions d'algèbre de Lukasiewicz trivalente indiquées par Gr. Moisil ([7], [8], [9]) nous allons choisir le système II, indiqué dans [10] en remplaçant le symbole μ par ∇. Moisil considère un système $(A, 0, 1, \sim, \nabla, \wedge, \vee)$ formé par: 1º) un ensemble non vide A; 2º) deux éléments $0, 1 \in A$; 3º) deux opérations monaires $\sim$ et ∇ et deux opérations binaires $\wedge, \vee$ définies sur A.

Il suppose tout d'abord que le système $(A, 0, 1, \wedge, \vee)$ est un réticulé distributif ayant un premier 0 et un dernier élément 1. Nous pouvons exprimer cette hypothèse, sous une forme abrégée, en profitant des résultats de M. Sholander [14] , au moyen des axiomes suivants:

M0) $o \wedge x = o$

M1) $1 \vee x = 1$

M2) $a \wedge (a \vee b) = a$

M3) $a \wedge (b \vee c) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b)$

En outre Moisil suppose que les axiomes suivants sont vérifiés:

M4) $\sim(x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$

M5) $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

M6) $\sim\sim x = x$

M7) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$

M8) $\nabla(x \vee y) = \nabla x \vee \nabla y$

M9) $x \wedge \nabla x = x$

M10) $\nabla \nabla x = \nabla x$

M11) $\sim \nabla \sim \nabla x = \nabla x$

M12) $x \wedge \sim x = \sim x \wedge \nabla x$

M13) $\sim \nabla \sim x \vee (\nabla x \wedge \nabla \sim x) \vee \sim \nabla x = 1$

Nous allons maintenant montrer que cette définition est équivalente à celle que nous avons indiquée au paragraphe précédent.

Tout d'abord les propriétés M0 - M13 sont des conséquences de A1 - A8 comme nous l'avons montré aux § 2 et 3, en supposant connue la démonstration du théorème de Sholander [14] .

Pour démontrer la réciproque il suffit de montrer, avec Moisil, que l'axiome

A6) $\sim x \vee \nabla x = 1$

est une conséquence de M0 - M13. Démontrons successivement que:

1º) <u>Si $x \leq y$ alors $\sim y \leq \sim x$</u>

Soit $x \leq y$, c'est-à-dire $x = x \wedge y$: alors par M5) nous pouvons écrire $\sim x = \sim x \vee \sim y$ donc $\sim y \leq \sim x$.

2º) $\underline{\sim\nabla\sim x \leq x}$

Par M9) nous pouvons écrire $x \leq \nabla x$ et en particulier $\sim x \leq \nabla\sim x$, d'où par 1º) et M6):

$\sim\nabla\sim x \leq \sim\sim x = x$

3º) $\underline{\sim x \vee (\nabla\sim x \wedge \nabla x) \vee \sim\nabla\sim x = 1}$

En effet de M13) et 2º) on déduit

$x \vee (\nabla\sim x \wedge \nabla x) \vee \sim\nabla x = 1$

d'où l'on déduit 3º) en remplaçant x par $\sim x$ et en tenant compte de M6).

Mais A étant un réticulé distributif, la formule 3º) peut s'écrire sous la forme:

$(\sim x \vee \nabla\sim x \vee\sim\nabla\sim x) \wedge (\sim x \vee \nabla x \vee \sim\nabla\sim x) = 1$

d'où l'on déduit en particulier que

4º) $\underline{\sim x \vee \nabla x \vee\sim\nabla\sim x = 1}$

D'un autre côté par 2º) et M9) nous pouvons écrire

$\sim\nabla\sim x \leq x \leq \nabla x$

donc

5º) $\underline{\sim\nabla\sim x \vee \nabla x = \nabla x}$

et alors par 4º) et 5º) nous avons

$\sim x \vee \nabla x = 1$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons que d'après les notations de Moisil

$\nabla = \mu$ et $\Delta = \nu$

mais nous préférons les notations que nous avons adoptées car le symbole Δ apparaît comme le dual de ∇.

Indiquons une des propriétés les plus importantes des algèbres de Lukasiewicz:

<u>4.1. PRINCIPE DE DETERMINATION DE MOISIL: Pour que $x = y$ il faut et il suffit que $\Delta x = \Delta y$ et $\nabla x = \nabla y$</u> ([8], [9], [10])

que fournit une méthode puissante pour démontrer des égalités. De ce principe on déduit le:

<u>4.2. COROLLAIRE: Pour que $x \leq y$ il faut et il suffit que $\Delta x \leq \Delta y$ et $\nabla x \leq \nabla y$.</u>

Comme application démontrons que:

<u>4.3. THEOREME: $x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y$ quels que soient x et y.</u>

DEMONSTRATION: Remarquons tout d'abord que

$1 = \sim x \vee \nabla x \leq \nabla \sim x \vee \nabla x = \nabla(\sim x \vee x)$

donc

(1) $\nabla(\sim x \vee x) = 1$

et par dualité nous avons aussi

(1') $\Delta(\sim x \wedge x) = o$

De (1') on déduit

(I) $o = \Delta(\sim x \wedge x) \leqq \Delta(\sim y \vee y)$

Par (1) nous pouvons écrire

(II) $\nabla(x \wedge \sim x) \leqq 1 = \nabla(y \vee \sim y)$

De (I) et (II) par 4.2 on déduit:

$$x \wedge \sim x \leqq y \vee \sim y$$

pour tout x et tout y.

Nous voyons ainsi que les algèbres de Lukasiewicz sont des algèbres de Kleene.

Cette circonstance joue un rôle important dans la théorie de la représentation des algèbres de Lukasiewicz par des ensembles que nous développons ailleurs.

Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca - Argentina

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIALYNICKI - BIRULA (A.) and RASIOWA (H.) - On the representation of quasi-boolean algebras. Bull. Acad. Polonaise Sci. Cl.III, 5(1957), 259-261.

[2] KALMAN (J.A.) - Lattices with involution. Trans. Am. Math. Soc., 87 (1958), 485-491.

[3] KLEENE (Stephen Cole) - On notation for ordinal numbers. Journal of Symbolic Logic. 3(1938), 150-155.

[4] KLEENE (Stephen Cole) - Introduction to Methamathematics. North-Holland Publishing Co. Amsterdam (1952).

[5] LUKASIEWICZ (Jan) - O logike trojwartosciowej. Ruch Filozoficzny 5 (1920), 170.

[6] LUKASIEWICZ (Jan) - Elementy logiki matematycznej. Warsawa (1929).

[7] MOISIL (Gr.C.) - Recherches sur l'algèbre de la logique. Ann.Sci.Univ.Jassy. 22(1935), 1-117.

[8] MOISIL (Gr.C.) - Recherches sur les logiques non-chrysippiennes. Annales Scientifiques de l'Université de Jassy. 26(1940), 431-466.

[9] MOISIL (Gr.C.) - Notes sur les logiques non-chrysippiennes. Ann.Sci.Univ.Jassy. 27(1941), 86-98.

[10] MOISIL (Gr.C.) - Sur les idéaux des algèbres Lukasiewicziennes trivalentes. Analele Universitatii C.I. Parhon. Seria Acta Logica. 3(1960), 83-95.

[11] MONTEIRO (Antonio) - Matrices de Morgan Caractéristiques pour le Calcul Propositionnel Classique. Anais da Academia Brasileira de Ciências, 52(1960), 1-7.

[12] MONTEIRO (Luiz) - Axiomes indépendants pour les algèbres de Lukasiewicz trivalentes. (A publier).

[13] RASIOWA (Helena) - N-lattices and constructive logic with strong negation. Fundamenta Mathematicae. 46 (1958), 61-80.

[14] SHOLANDER (Marlow) - Postulates for distributive lattices. Canadian Journal of Mathematics. 3(1951), 28-30.