NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

20

DIANA BRIGNOLE et ANTONIO MONTEIRO

Caractérisation des Algèbres de Nelson par des égalités

1964
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

Nº 20

CARACTERISATION DES ALGEBRES DE NELSON PAR DES EGALITES

par

Diana Brignole et Antonio Monteiro

1964

Instituto de Matemática

Universidad Nacional del Sur

Bahía Blanca

Los resultados contenidos en este trabajo han sido presentados en las Jornadas de la Unión Matemática Argentina realizadas del 21 al 23 de Septiembre de 1961. (Revista de la Unión Matemática Argentina, 19(1962), p.361

Les résultats contenus dans ce travail ont été présentés à l'occasion des "Jornadas de la Unión Matemática Argentina" réalisées du 21 au 23 Septembre 1961. (Revista de la Unión Matemática Argentina, 19(1962), p.361.

CARACTERISATION DES ALGEBRES DE NELSON PAR DES EGALITES

par

Diana Brignole et Antonio Monteiro

1. INTRODUCTION

La notion de N-lattice, introduite par Helena Rasiowa, [13] , [14] , joue un rôle fondamental dans l'étude de la logique constructive avec négation forte considérée par David Nelson [12] , et A. Markov [8] . Le calcul propositionnel correspondant a été aussi étudié par N. Vorobiev, [16] , [17] .

Ce rôle est analogue à celui qui joue la notion d'algèbre de Boole (de Heyting) dans l'étude du calcul propositionnel classique (intuitionniste).

Les axiomes indiqués par Helena Rasiowa pour caractériser les N-Lattices, auxquelles nous donnerons dans cette note le nom d'algèbres de Nelson, sont assez nombreux, et en outre ils ne sont pas tous des égalités.

Nous nous proposons d'indiquer une caractérisation des algèbres de Nelson par des égalités, au moyen d'un nombre assez réduit d'axiomes.

Nous supposerons connus les résultats indiqués dans [11].

2. LA DEFINITION DE H. RASIOWA

Rappelons tout d'abord la définition suivante:

2.1. DEFINITION: Un système $(A, 1, \sim, \wedge, \vee)$ formé par 1º) un ensemble, non vide, A; 2º) un élément $1 \in A$; 3º) un opérateur monaire $\sim$ défini sur A; 4º) deux opérations binaires $\wedge$ et $\vee$ définies sur A, sera dit une algèbre de Morgan, ou une algèbre quasi-booléenne, si les conditions suivantes sont vérifiées:

N1) $x \vee 1 = 1$

N2) $x \wedge (x \vee y) = x$

N3) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

N4) $\sim \sim x = x$

N5) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

Un système $(A, \wedge, \vee)$ vérifiant les axiomes N2), N3) est, d'après M. Sholander [15], un réticulé distributif. De N1) on déduit que 1 est le dernier élément de A. On démontre immédiatement que

N5') $\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$

et que $0 = \sim 1$ est le premier élément de A. A propos de cette notion voir [1], [2], [4], [7], [10].

Rappelons maintenant la définition de N-lattice introduite par H. Rasiowa [14].

<u>2.2. DEFINITION: Un système $(A, 1, \sim, \neg, \rightarrow, \wedge, \vee)$ formé par: 1º) un ensemble non vide A; 2º) un élément $1 \in A$; 3º) deux opérations monaires $\sim, \neg$ définies sur A; 4º) trois opérations binaires $\rightarrow$, $\wedge, \vee$, définies sur A, sera dit une Algèbre de Nelson si les axiomes suivants sont vérifiés:</u>

<u>Axiome 1</u>: Si nous posons $a \prec b$ pour indiquer que $a \rightarrow b = 1$ alors:

1a) $a \prec a$

1b) Si $a \prec b$ et $b \prec c$ alors $a \prec c$

<u>Axiome 2</u>: Le système $(A, 1, \sim, \wedge, \vee)$ est une algèbre de Morgan et en outre la relation $\leq$ définie par l'équivalence

E) <u>$a \leq b$ si et seulement si $a \prec b$ et $\sim b \prec \sim a$</u>

coïncide avec la relation d'ordre du réticulé A.

<u>Axiome 3</u>: Si $a \prec c$ et $b \prec c$ alors $(a \vee b) \prec c$

<u>Axiome 4</u>: Si $c \prec a$ et $c \prec b$ alors $c \prec (a \wedge b)$

<u>Axiome 5</u>: $\sim (a \rightarrow b) \prec (a \wedge \sim b)$

<u>Axiome 6</u>: $(a \wedge \sim b) \prec \sim (a \rightarrow b)$

<u>Axiome 7</u>: $a \prec \sim \neg a$

<u>Axiome 8</u>: $\sim \neg a \prec a$

<u>Axiome 9</u>: $(a \wedge \sim a) \rightarrow b = 1$

<u>Axiome 10</u>: $a \to (b \to c) = 1$ si et seulement si

$$(a \wedge b) \to c = 1$$

<u>Axiome 11</u>: $\neg a = a \to 0$ (où $0 = \sim 1$)

Dans cette définition figurent, en réalité, plus de 11 axiomes. Si nous utilisons la définition 2.1 d'Algèbre de Morgan; l'<u>axiome 2</u> est une façon abrégée d'indiquer 7 axiomes.

D'un autre côté, l'axiome 11 peut être considéré comme une définition de l'opération $\neg$.

Rappelons encore que, d'après H. Rasiowa [14]

<u>2.3. LEMME: Dans une algèbre de Nelson nous avons:</u>
<u>N6) $x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y$ quels que soient $x, y \in A$.</u>

La condition N6) est vérifiée dans le calcul propositionnel considéré par S.C. Kleene [5], p.153,[6] p.334.

<u>2.4. DEFINITION: Une algèbre de Morgan qui vérifie la condition N6) sera dite une algèbre de Kleene.</u>

Cette notion a été considérée et étudiée par J.Kalmann [4], sous un autre nom.

3. <u>L'IMPLICATION INTUITIONNISTE</u>

Un ensemble ordonné A sera dit réticulé inférieurement si chaque couple ordonné (a,b) d'éléments de A a une borne inférieure a $\wedge b$. Rappelons la définition suivante: (qui a un sens dans les ensembles réticulés inférieurement A est qui est bien connue)

3.1. DEFINITION: Nous dirons qu'il existe l'implication intuitionniste du couple ordonné (a, b) d'éléments de A, s'il existe un élément c de A tel que:

I1) $a \wedge c \leq b$

I2) Si x est tel que $a \wedge x \leq b$ alors $x \leq c$. Pour indiquer l'élément c nous écrirons $c = a \Rightarrow b$ [3].

On voit de suite que si l'élément $a \Rightarrow b$ existe il est univoquement déterminé.

Nous ne savons pas si dans les algèbres de Nelson A $x \Rightarrow y$ existe pour tout couple ordonné (x, y) d'éléments de A. En tout cas on peut démontrer que

3.2. THEOREME: Dans une algèbre de Nelson l'élément $a \Rightarrow (\sim a \vee b)$ existe pour tout couple ordonné (a, b) d'éléments de A et en outre $a \rightarrow b = a \Rightarrow (\sim a \vee b)$ [11].

Rappelons les résultats suivants que nous aurons à utiliser par la suite et qui sont valables dans tout ensemble réticulé inférieurement A.

3.3. LEMME: Si A contient un dernier élément 1 alors

<u>les deux conditions suivantes sont équivalentes:</u>

<u>(1) $a \leq b$ (2) $a \Rightarrow b$ existe et $a \Rightarrow b = 1$</u>

<u>3.4. LEMME: Si $a \Rightarrow b$ existe alors</u>

$$a \wedge (a \Rightarrow b) = a \wedge b; \quad (a \Rightarrow b) \wedge b = b$$

<u>3.5. LEMME: Si $a \Rightarrow b$ et $a \Rightarrow c$ existent alors $a \Rightarrow (b \wedge c)$ existe et en outre</u>

$$a \Rightarrow (b \wedge c) = (a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c)$$

Démontrons maintenant que

<u>3.6. LEMME: Si A est une algèbre de Kleene dans laquelle $a \Rightarrow (\sim a \vee b)$ existe pour tout couple ordonné (a, b) d'éléments de A, et si nous posons $a \rightarrow b = a \Rightarrow$ $\Rightarrow (\sim a \vee b)$, alors les égalités suivantes sont vérifiées:</u>

N7) $a \rightarrow a = 1$

N8) $(a \rightarrow b) \wedge (\sim a \vee b) = \sim a \vee b$

N9) $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge (\sim a \vee b)$

N10) $a \rightarrow (b \wedge c) = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$

I) $a \rightarrow (a \rightarrow b) = a \rightarrow b$

DEMONSTRATION:

N7) De $a \leq \sim a \vee a$ et de 3.3 on déduit $1 = a \Rightarrow (\sim a \vee a) =$ $= a \rightarrow a$.

N8) Par 3.4 nous avons $\sim a \vee b \leq a \Rightarrow (\sim a \vee b) = a \rightarrow b$ d'où l'on déduit N8.

N9) Comme $a \Rightarrow (\sim a \vee b)$ existe, N9 est une conséquence de 3.4.

N10) Par hypothèse

$a \rightarrow (b \wedge c) = a \Rightarrow (\sim a \vee (b \wedge c)) = a \Rightarrow ((\sim a \vee b) \wedge (\sim a \vee c))$

Comme $a \Rightarrow (\sim a \vee b) = a \rightarrow b$ et $a \Rightarrow (\sim a \vee c) = a \rightarrow c$ existent nous pouvons écrire d'après 3.5

$$a \rightarrow (b \wedge c) = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$$

Montrons finalement

I) $a \rightarrow (a \rightarrow b) = a \rightarrow b$

D'après N8)

$$\sim a \vee (a \rightarrow b) \leq a \rightarrow (a \rightarrow b)$$

et comme $a \rightarrow b \leq \sim a \vee (a \rightarrow b)$, nous pouvons écrire

$$\text{I'}) \quad a \rightarrow b \leq a \rightarrow (a \rightarrow b)$$

Il nous reste donc à démontrer que

$$\text{II'}) \quad a \rightarrow (a \rightarrow b) \leq a \rightarrow b$$

Par N9) nous avons:

$a \wedge (a \rightarrow (a \rightarrow b)) = a \wedge (\sim a \vee (a \rightarrow b)) =$

$= (a \wedge \sim a) \vee (a \wedge (a \rightarrow b)) =$

$= (a \wedge \sim a) \vee (a \wedge (\sim a \vee b)) = a \wedge (\sim a \vee b) \leq \sim a \vee b$

c'est-à-dire

$$(1) \quad a \wedge (a \rightarrow (a \rightarrow b)) \leq \sim a \vee b$$

et comme $a \Rightarrow (\sim a \vee b) = a \rightarrow b$ existe par hypothèse, de la condition I2 (Déf. 3.1) et de (1) on déduit: $a \to (a \to b) \leq a \to b$ et la démonstration est terminée.

Comme conséquence immédiate de 3.2 et 3.6 nous pouvons affirmer que

3.7. COROLLAIRE: Les égalités N7)-N10) et I) sont valables dans toute algèbre de Nelson.

4. CARACTERISATION DES ALGEBRES DE NELSON PAR DES EGALITES

Les résultats précédents nous conduisent à étudier les systèmes $(A, 1, \sim, \to, \wedge, \vee)$ que vérifient les égalités N1)-N10) et I.

4.1. LEMME: Si le système $(A, 1, \sim, \to, \wedge, \vee)$ est tel que les égalités N1)-N10) et I) sont vérifiées alors $a \Rightarrow (\sim a \vee b)$ existe pour tout couple ordonné (a, b) d'éléments de A et en outre $a \to b = a \Rightarrow (\sim a \vee b)$.

DEMONSTRATION: Démontrons tout d'abord que

M) Si $b \leq c$ alors $a \to b \leq a \to c$

Supposons que $b \leq c$ c'est-à-dire que $b = b \wedge c$ alors en utilisant N10), nous aurons

$$a \to b = a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$$

c'est-à-dire $a \to b \leq a \to c$ et M est démontrée.

Pour démontrer que $a \Rightarrow (\sim a \vee b) = a \rightarrow b$ nous avons à démontrer d'après 3.1 que

I1) $a \wedge (a \rightarrow b) \leq \sim a \vee b$

I2) Si $a \wedge x \leq \sim a \vee b$ alors $x \leq a \rightarrow b$

I1) est une conséquence immédiate de N9)

Pour démontrer I2) supposons que

$$a \wedge x \leq \sim a \vee b$$

En tenant compte de N8) nous pouvons écrire

$$a \wedge x \leq (\sim a \vee b) \wedge (a \rightarrow b) \leq a \rightarrow b$$

d'où par (M)

$$a \rightarrow (a \wedge x) \leq a \rightarrow (a \rightarrow b)$$

C'est-à-dire, d'après N10) et I)

$$(a \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow x) \leq a \rightarrow b$$

ou encore d'après N7)

$$(1) \quad a \rightarrow x \leq a \rightarrow b$$

D'autre part d'après N8):

$$(2) \quad x \leq \sim a \vee x \leq a \rightarrow x$$

De (1) et (2) on déduit $x \leq a \rightarrow b$; ce qu'il fallait démontrer.

Rappelons maintenant le résultat suivant:

4.2. THEOREME: Si $(A, 1, \sim, \wedge, \vee)$ est une algèbre de Kleene dans laquelle $a \Rightarrow (\sim a \vee b)$ existe pour tout couple ordonné (a, b) d'éléments de A et si nous po-

<u>sons $a \to b = a \Rightarrow (\sim a \vee b)$ et $\neg a = a \to 0$ alors le système $(A, 1, \sim, \neg, \to, \wedge, \vee)$ vérifie les axiomes (1)-(9) de la définition 2.2. Pour que l'axiome 10) soit aussi vérifié il faut et il suffit que:</u>

N11) $a \to (b \to c) = (a \wedge b) \to c$ [11].

Des résultats précédents on déduit immédiatement (en remarquant que I) est une conséquence de l'axiome N11):

<u>4.3. THEOREME: (1) Pour que le système $(A, 1, \sim, \to, \wedge, \vee)$ soit une algèbre de Nelson il faut et il suffit que les égalités suivantes</u>

N1) $x \vee 1 = x$

N2) $x \wedge (x \vee y) = x$

N3) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (z \wedge y)$

N4) $\sim \sim x = x$

N5) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

N6) $x \wedge \sim x = (x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y)$

N7) $x \to x = 1$

N8) $(\sim x \vee y) \wedge (x \to y) = \sim x \vee y$

N9) $x \wedge (x \to y) = x \wedge (\sim x \vee y)$

N10) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$

---

(1) Ce résultat a été présenté à l' Unión Matemática Argentina le 22 Septembre 1961 (Revista de la Unión Matemática Argentina, 19, nº5(1962), p.361).

$$\text{N11)}\quad x \to (y \to z) = (x \wedge y) \to z$$

<u>soient vérifiées et que l'on pose par définition</u>
<u>$\neg x = x \to 0$ (où $0 = \sim 1$).</u>

On voit de suite que la notion d'algèbre de Boole est un cas particulier de celle d'algèbre de Nelson.

Le choix des axiomes N7)-N10) a son origine dans le fait que les ensembles A réticulés inférieurement dans lesquels $a \Rightarrow b$ existe pour tout couple ordonné (a, b) d'éléments de A, peuvent être caractérisés [9] par les égalités:

A1) $x \Rightarrow x = y \Rightarrow y$

A2) $(x \Rightarrow y) \wedge y = y$

A3) $x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y$

A4) $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow z) \wedge (x \Rightarrow y)$

Il était alors indiqué de postuler les égalités N7-N10.

La démonstration du théorème 4.3 puise fortement sur les résultats indiqués dans [11], dans la démonstration desquels on a fait intervenir l'induction transfinie. Postérieurement à la rédaction de cette note, Diana Brignole a obtenu une démonstration de 4.3 que n'utilise pas ces résultats et qui sera publiée ailleurs.

Luiz Monteiro a démontré que l'axiome N1) est une conséquence de N2), N3), N7) et N9) et en outre que chacun des axiomes N2), N4), N7), N9) et N11) est indépendant des restants. A. Monteiro a démontré l'indépendance des axiomes

N3) et N6). L'indépendance des axiomes N5), N8), N10) reste une question ouverte.

Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca - Argentina

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIALYNICKI-BIRULA (A.) - Remarks on quasi-Boolean algebras. Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, classe III, 5(1957), 615-619.

[2] BIALYNICKI-BIRULA (A.) and RASIOWA (H.) - On the representation of quasi-Boolean algebras. Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe III, 5(1957), 259-261.

[3] BIRKHOFF (Garrett) - Lattice theory. Revised edition. Am.Math.Soc.Colloquium Publications, 25(1948), Xiii + 283 p.

[4] KALMAN (J.A.) - Lattices with involution. Trans. Am. Math. Soc., 87(1958), 485-491.

[5] KLEENE (Stephen Cole) - On notation for ordinal numbers. Journal of Symbolic Logic, 3(1938), 150-155.

[6] KLEENE (Stephen Cole) - Introduction to Metamathematics. North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1952).

[7] MOISIL (Gr.C.) - Recherches sur l'algèbre de la logique. Annales Scientifiques de l'Université de Jassy, 22(1935), 1-117.

[8] MARKOV (A.A.) - A constructive Logic. Uspehi Matematiceskih Nauk (N.S.), 5(1950), 187-188.

[9] MONTEIRO (Antonio) - Axiomes indépendants pour les algèbres de Brouwer. Revista de la Unión Matemática Argentina, 17(1955), 149-160.

[10] MONTEIRO (Antonio) - Matrices de Morgan Caractéristiques pour le Calcul Propositionnel Classique. Anais da Academia Brasileira de Ciências, 52(1960), 1-7.

[11] MONTEIRO (Antonio) - Construction des algèbres de Nelson finies. Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, 11(1963), 359-362.

[12] NELSON (David) - Constructible falsity. Journal of Symbolic Logic, 14(1949), 16-26.

[13] RASIOWA (Helena) - Algebraic Charakterisierung Intuitionistischen Logik mit Starker negation. Constructivity in Mathematics. (Proceedings of the Colloquium

held at Amsterdam, 1957) edited by A. Heyting. Studies in Logic and the Foundation of Mathematics. Amsterdam, 1959.

[14] RASIOWA (Helena) - N-lattices and constructive logic with strong negation. Fundamenta Mathematicae, 46 (1958), 61-80.

[15] SHOLANDER (Marlow) - Postulates for distributive lattices. Canad. J. Math., 3(1951), 28-30.

[16] VOROBIEV (N.N.) - A constructive propositional calculus with strong negation. Dokl. Akad. Nauk. SSSR., 85(1952), 465-468.

[17] VOROBIEV (N.N.) - The problem of deducibility in the constructive propositional calculus with strong negation. Dokl. Akad. Nauk SSSR., 85(1952), 689-692.