14

LUIZ MONTEIRO et DARIO PICCO

ISSN [illegible]

Les réticulés de Morgan et l'opération de Sheffer

1964
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

Nº 14

ISSN 0078-2

LES RETICULES DE MORGAN ET L'OPERATION DE SHEFFER

par

Luiz Monteiro et Dario Picco

1964

Instituto de Matemática

Universidad Nacional del Sur

Bahía Blanca

El trabajo que se reproduce en este número ha sido publicado en Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, 11(1963), pp. 355-358.

Le travail reproduit dans ce numéro a été publié dans le Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, 11(1963), pp. 355-358.

LES RETICULES DE MORGAN ET L'OPERATION DE SHEFFER

par

Luiz Monteiro et Dario Picco

1 - INTRODUCTION. H. M. Sheffer (1913)[1] a démontré que les algèbres de Boole peuvent être caractérisés au moyen de l'opération binaire $a|b = -a \wedge -b$. Nous nous proposons, dans cette note, de montrer, d'après une suggestion de A. Monteiro, que ce résultat peut s'étendre aux réticulés de Morgan.-

2 - RETICULES DE MORGAN. Un réticulé distributif peut être défini, d'après M. Sholander (1951)[2], comme un système $(M,\wedge,\vee)$ formé par une ensemble M, non vide, sur lequel sont définies deux opérations binaires $\wedge$ et $\vee$ que vérifient les axiomes:

S1) $a \wedge (a \vee b) = a$

S2) $a \wedge (b \vee c) = (c \wedge a) \vee (b \wedge a)$

(1) Voir la liste bibliographique a la fin de cette note.

(2) Dans une première redaction de ce travail nous avons utilisé d'autres axiomes pour les réticulés distributifs; l'axiomatique de Sholander nous a permis de reduire considerablement l'extension de cette note.

DEFINITION 1: <u>Un système $(M, \wedge, \vee, -)$ formé par un ensemble M, non vide, sur lequel sont définies les deux opérations binaires $\wedge$ et $\vee$ et l'opération unaire $-$</u>, <u>sera dit un réticulé de Morgan si les conditions S1) et S2) sont vérifiées et en outre</u>:

$$M1) \quad - - a = a$$

$$M2) \quad -(a \vee b) = -a \wedge -b$$

Cette notion a été considérée, en particulier, par Gr. C. Moisil (1935), page 91, et étudiée par J. Kalman (1958) sous le nom de "distributive i-lattice". Nous empruntons la terminologie à A. Monteiro (1960).

En général M n'a pas de premier élément o. C'est ce qui a lieu, par exemple, dans l'ensemble M des nombres réels (qui est un réticulé distributif par rapport à son ordre naturel), si $-a$ représente le symétrique de a, alors nous avons affaire à un réticulé de Morgan. Si le réticulé de Morgan a un premier élément $\underline{o}$ nous dirons que M est une Algèbre de Morgan. Cette notion a été considérée par A. Bialynicki-Birula et H. Rasiowa (1957) sous le nom d'<u>algèbre quasi-booléenne</u>.

Dans un réticulé de Morgan nous avons aussi:

$$M3) \quad -(a \wedge b) = -a \vee -b$$

En effet, en utilisant successivement M1, M2, et M1, nous avons:

$$-a \vee -b = - -(-a \vee -b) = -(--a \wedge --b) = -(a \wedge b)$$

DEFINITION 2: <u>Dans un réticulé de Morgan, nous donnerons le nom d'opération de Sheffer à l'opération binaire définie par la formule $a|b = -a \wedge -b$. Nous écrirons, pour simplifier l'écriture: $a|b = a.b = ab$.</u>

Commençons par démontrer que dans un réticulé de Morgan les opérations $\wedge$, $\vee$, $-$, peuvent s'exprimer au moyen de l'opération de Sheffer.

PROPOSITION 1: <u>Dans un réticulé de Morgan nous avons: I) $-a = a^2$; II) $a \wedge b = a^2b^2$; III) $a \vee b = (ab)^2$</u>

<u>DEM</u>.: I) $a^2 = aa = -a \wedge -a = -a$; II) $a^2b^2 = (-a)(-b) = --a \wedge --b = a \wedge b$; III) $(ab)^2 = -(ab) = -(-a \wedge -b) = a \vee b$

Indiquons maintenant des propriétés de l'opération de Sheffer, que nous aurons à utiliser par la suite.

PROPOSITION 2.: <u>Dans un réticulé de Morgan nous avons: A) $a^2(ab) = a$; B) $(a(bc))^2 = (b^2a)(c^2a)$.</u>

<u>DEM</u>.: A) $a^2(ab) = (-a)(ab) = -(-a) \wedge -(ab) =$

$= a \wedge -(-a \wedge -b) = a \wedge (a \vee b) = a.$

B) $(a(bc))^2 = -(a(bc)) = -(-a \wedge -(bc)) = a \vee (bc) =$

$= a \vee (-b \wedge -c) = (a \vee -b) \wedge (a \vee -c) =$

$= (-b \vee a) \wedge (-c \vee a) = (b^2 \vee a) \wedge (c^2 \vee a) =$

$= (b^2 \vee a)^2 (c^2 \vee a)^2 = ((b^2 a)^2)^2 \; ((c^2 a)^2)^2 = (b^2 a)(c^2 a).$

3 - CARACTERISATION DES RETICULES DE MORGAN AU MOYEN DE L'OPERATION DE SHEFFER. Démontrons maintenant le théorème que nous avons en vue.

THEOREME: Soit (M,.) un système formé par un ensemble non vide M sur lequel est définie une opération binaire (.) que vérifie les axiomes:

Axiome A: $a^2(ab) = a$

Axiome B: $(a(bc))^2 = (b^2 a)(c^2 a)$

et posons, par définition:

I) $-a = a^2$

II) $a \wedge b = a^2 b^2$

III) $a \vee b = (ab)^2$

alors le système $(M, \wedge, \vee, -)$ est un réticulé de Morgan et en outre

IV) $ab = -a \wedge -b$

DEM.: Démontrons tout d'abord les formules suivantes:

$$(1)\quad a^2a^2 = a$$

Il suffit de remplacer b par a dans l'axiome A;

$$(2)\quad (ab)^2 = (ba)^2$$

En utilisant successivement (1), (B) et (1), nous pouvons écrire:

$$(ab)^2 = (a(b^2b^2))^2 = ((b^2)^2a)((b^2)^2a) = (ba)(ba) = $$
$$= (ba)^2$$

$$(3)\quad ab = ba$$

En utilisant successivement (1), (2) et (1), nous avons:

$$ab = (ab)^2(ab)^2 = (ba)^2(ba)^2 = ba$$

Démontrons maintenant que:

(S1) $\underline{a \wedge (a \vee b) = a}$

En effet, en utilisant les définitions II et III, la formule (1) et l'axiome (A), nous avons:

$$a \wedge (a \vee b) = a^2(a \vee b)^2 = a^2((ab)^2)^2 = a^2(ab) =$$
$$= a.$$

(S2) $\underline{a \wedge (b \vee c) = (c \wedge a) \vee (b \wedge a)}$

En effet, en utilisant l'axiome (B), les définitions II et III, et les formules (1) et (3), nous avons:

$$(c \wedge a) \vee (b \wedge a) = ((c^2a^2)(b^2a^2))^2 =$$
$$= ((b^2a^2)(c^2a^2))^2 = ((a^2(bc))^2)^2 = a^2(bc) = a^2((bc)^2)^2 =$$

$= a \wedge (b \vee c)$.

(M1) $\underline{- - a = a}$.

En effet, en utilisant la définition I et la formule (1), nous avons:

$$- - a = - a^2 = (a^2)^2 = a$$

(M2) $\underline{-(a \vee b) = -a \wedge -b}$

En utilisant les définitions I,II,III et (1), nous aurons:

$$-(a \vee b) = -(ab)^2 = ((ab)^2)^2 = ab = (a^2)^2(b^2)^2 = a^2 \wedge b^2 =$$
$$= -a \wedge -b$$

Les formules S1,S2,M1,M2, montrent que le système $(M, \wedge, \vee, -)$ est un réticulé de Morgan, d'après la définition 1. Démontrons finalement que:

$$\text{IV)}\ ab = -a \wedge -b$$

En effet, par (1), (II) et (I), nous aurons:

$$ab = (a^2)^2(b^2)^2 = a^2 \wedge b^2 = -a \wedge -b$$

et cela termine la démonstration.

4 - INDEPENDANCE DES AXIOMES (A) ET (B). Démontrons que les axiomes (A) et (B) sont indépendants. Soit M un ensemble contenant tout au moins deux éléments distincts 0 et 1. Considérons les deux opérations binaires définies, sur M, de la manière suivante:

i) $ab = a \qquad$ pour tout $a, b \in M$

ii) $ab = \begin{cases} 0 & \text{si } a = b \\ 1 & \text{si } a \neq b \end{cases}$

La première de ces opérations vérifie l'axiome A sans vérifier l'axiome B, et la seconde vérifie l'axiome B sans vérifier A.

Remarquons encore que l'opération binaire , définie sur l'ensemble des nombres rationnels (Sheffer (1913))

$$ab = -\frac{a+b}{2}$$

vérifie l'axiome B sans vérifier A.

Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca - Argentina

BIBLIOGRAPHIE

BYALINICKI-BIRULA (A) and RASIOWA (H): On the representation of quasi-boolean algebras. Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe III. 5 (1957), pag 259-261.

KALMAN (J.A.): Lattices with involution. Trans. of the American Mathematical Society, 87 (1958), pag 485-491.

MOISIL (Gr.C.): Recherches sur l'algèbre de la logique. Annales Scientifiques de l'Université de Jassy. 22(1935), pag 1-117.

MONTEIRO (António): Matrices de Morgan caractéristiques pour le Calcul Propositionnel Classique. Anais da Academia Brasileira de Ciencias. 32 (1960), 1-7.

SHEFFER (Henry Maurice): A set of five independents postulates for Boolean Algebras, with applications to logical constants. Trans. of the Am. Math. Society. 14 (1913), pag 481-488.

SHOLANDER(Marlow): Postulates for distributive lattices. Canadian Journal of Mathematics. 3 (1951), pag 28-30.