NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

13

HORACIO PORTA

Sur un théorème de Skolem

1964
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

Nº 13

SUR UN THEOREME DE SKOLEM

par

Horacio Porta

1964

Instituto de Matemática

Universidad Nacional del Sur

Bahía Blanca

El trabajo que se reproduce en este número ha sido publicado en Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Tome 256 (1963), pp. 5262-5264.

Le travail reproduit dans ce numéro a été publié dans Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Tome 256 (1963), pp.5262-5264.

SUR UN THEOREME DE SKOLEM

par

Horacio Porta

1. La notion de <u>modèle implicatif</u> introduite par L. Henkin ([1]) - qu'on appelle aussi une algèbre implicative de Hilbert ou plus simplement une algèbre implicative ou même une algèbre de Hilbert - joue dans l'étude du calcul propositionnel implicatif positif (1) un rôle analogue à celui des algèbres de Boole dans le calcul propositionnel classique. Nous pouvons la définir, d'après A. Diego ([2]), de la manière suivante:

([1]) Voir la liste bibliographique à la fin de cette note.

<u>1.1 DEFINITION: Une algèbre de Hilbert est un système $(A, \to)$ formé par un ensemble A non vide et une fonction $\to$ de AxA dans A (nomée opération d'implication) vérifiant les égalités suivantes:</u>

D_1 $\quad a \to a = b \to b$

D_2 $\quad (a \to a) \to a = a$

D_3 $\quad a \to (b \to c) = (a \to b) \to (a \to c)$

D_4 $\quad (a \to b) \to ((b \to a) \to a) = (b \to a) \to ((a \to b) \to b)$

<u>quels que soient a,b,c dans A.</u>

Contrairement à la définition de Henkin dans celle-ci ne figurent que des égalités.L'élément fixe $a \to a$ sera noté 1. Nous écrirons $a \leq b$ pour indiquer que $a \to b = 1$; la relation $\leq$ ainsi définie est une relation d'ordre sur A ayant 1 pour dernier élément.

Les notions d'homomorphisme, isomorphisme, produit cartésien, etc. se définissent à la manière habituelle.

Si $\mathcal{O}$ est la famille des ensembles ouverts d'un espace topologique et si pour chaque couple ordonné d'ensembles ouverts (x,y) nous représentons par $x \to y$ l'intérieur de l'ensemble $\complement x \cup y$, alors il est bien connu que le système $(\mathcal{O}, \to)$ est une algèbre de Hilbert; il s'agit de l'exemple le plus important, car A. Diego (2) a montré que toute algèbre de Hilbert est isomorphe à une sous-algèbre d'une algèbre de cette nature.

Rappellons que:

<u>1.2 DEFINITION: Un système déductif de l'algèbre de Hilbert A est une partie D de A telle que: 1º) $1 \in D$; 2º) si a, $a \to b \in D$ alors $b \in D$ (modus ponens). Le système déductif engendré par une partie X de A est l'intersection de tous les systèmes déductifs que contiennent X.</u>

La notion d'algèbre de Hilbert libre se définit à la manière habituelle:

<u>1.3 DEFINITION: Etant donné un nombre cardinal c on appelle Algèbre de Hilbert libre avec c générateurs libres toute algèbre de Hilbert $\pounds_c$ ayant une famille G de générateurs de puissance c telle que pour chaque application f de G dans une algèbre de Hilbert A, il existe un homomorphisme $\bar{f}$ de $\pounds_c$ dans A qui est une extension de f.</u>

L'existence des algèbres de Hilbert libres a été démontrée par L. Henkin (1).

Remarquons maintenant qu'une algèbre de Hilbert n'est pas, en général, un ensemble réticulé inférieurement.

<u>1.4 DEFINITION: Si une algèbre de Hilbert $(A,\to)$ est un ensemble réticulé inférieurement par rapport à la relation d'ordre $\leq$, nous dirons que A est une algèbre de Hertz</u>.

Une algèbre de Hertz peut être définie comme un système $(A,\to,\wedge)$ où A est un ensemble sur lequel sont définies les deux opérations binaires $\to$ et $\wedge$, telles que (3):

$$M_1 \quad a\to a = b\to b$$
$$M_2 \quad (a\to b)\wedge b = b$$
$$M_3 \quad a\to(b\wedge c) = (a\to c)\wedge(a\to b)$$
$$M_4 \quad a\wedge(a\to b) = a\wedge b$$

La notion d'algèbre de Hertz libre se définit à la manière habituelle.

Considérons maintenant la définition suivante:

<u>1.5 DEFINITION: On appelle algèbre de Hertz libre sur une algèbre de Hilbert donnée A à tout système</u> (A,f_A,H_A) <u>tel que</u>:

L_1) H_A est une algèbre de Hertz.

L_2) f_A est une injection de A dans H_A tel que
$f_A(x\to y) = f_A(x)\to f_A(y)$

L_3) H_A est l'algèbre de Hertz engendrée par $f_A(A)$.

L4) Etant donné une algèbre de Hertz H et une application h de A dans H telle que $h(x\rightarrow y) = h(x)\rightarrow h(y)$, alors il existe un homomorphisme $\bar{h}$ de l'algèbre de Hertz H_A dans l'algèbre de Hertz H tel que $\bar{h}\circ f_A = h$; nous dirons que $\bar{h}$ est l'homomorphisme induit par h.

Pour abréger, nous dirons aussi que H_A est l'algèbre de Hertz libre sur A.

<u>1.6 THEOREME: Pour chaque algèbre de Hilbert A il existe une algèbre de Hertz libre sur A qui est unique au moins d'un isomorphisme.</u>

Indiquons la démonstration dans ses lignes générales. Soit A l'algèbre de Hilbert donnée et $\mathcal{F}$ la famille des parties finies, non vides, de A et posons $I = \{1\}$. Si $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$ et $Y = \{y_1,\ldots,y_n\}$ sont deux éléments de $\mathcal{F}$ posons

$$X\rightarrow Y = \bigcup_{j=1}^{m}\{(x_1\rightarrow(x_2\rightarrow \ldots\ldots\rightarrow(x_n\rightarrow y_j)\ldots)\}$$

$$X\wedge Y = X\cup Y.$$

Nous avons alors un système $(\mathcal{F},\rightarrow,\wedge)$ formé par un ensemble $\mathcal{F}$ et deux opérations binaires $\rightarrow$ et $\wedge$ définies sur $\mathcal{F}$.

Posons $X\equiv Y$ pour indiquer que $X\rightarrow Y = I$ et $Y\rightarrow X = I$.

Dans ces conditions $\equiv$ est une relation de congruence définie sur $\mathcal{F}$ compatible avec les opérations binaires $\rightarrow$ et $\wedge$. L'algèbre quotient correspondante $H_A = \mathcal{F}/\equiv$ est une algèbre de Hertz. Si pour chaque $a \in A$ nous représentons par $f_A(a)$ la classe de congruence modulo $\equiv$ que contient l'élément $\{a\}$, alors le système (A, f_A, H_A) est une algèbre de Hertz libre sur A. L'unicité de H_A au moins d'un isomorphisme résulte de L_4.

2. Nous nous proposons maintenant d'indiquer les premières propriétés de H_A.

2.1 DEFINITION: Si f est un homomorphisme de l'algèbre de Hilbert A dans l'algèbre de Hilbert B et si f_B est l'homomorphisme injectif de B dans H_B, nous représenterons par H_f l'homomorphisme de H_A dans H_B induit par $f_B \circ f$.

2.2 THEOREME: La correspondance $A \rightarrow H_A$, $f \rightarrow H_f$ est un foncteur covariant commutant avec les produits finis que renvoie les algèbres de Hilbert finies (resp. libres avec c générateurs) dans les algèbres de Hertz finies (resp. libres avec c générateurs). Si A est une algèbre de Hertz, alors

<u>H_A est isomorphe (au moyen de f_A) à A</u>.

En utilisant un résultat de A. Diego (2) d'après lequel les algèbres de Hilbert libres avec un nombre fini de générateurs sont finies, nous pouvons affirmer que:

<u>2.3 COROLLAIRE: Toute algèbre de Hertz libre avec un nombre fini de générateurs est finie</u>.

Th. Skolem a démontré (4) que le calcul propositionnel intuitioniste avec implication et conjonction (5) est une extension conservative du calcul propositionnel implicatif positif. Si £' et £ représentent les algèbres de Lindenbaum correspondantes, nous voyons d'après 2.2 que £' est l'algèbre de Hertz libre sur £, et ce résultat est une version algébrique du théorème de Skolem.

BIBLIOGRAPHIE

(1) L. Henkin. Fund. Math. 37 (1950) pp. 63-74.

(2) A. Diego. Revista de la U.M.A. 20 (1962) pp. 310-311; voir aussi la thèse de cet auteur (1961) présentée à l'Université de Buenos Aires.

(3) A. Monteiro. Revista de la U.M.A., 17 (1955) pp. 149-160. (Voir aussi H. Curry, Leçons de Logique Algébrique, Paris, 1952, p. 67).

(4) Th. Skolem. Revista Mat. Hispano Americana (4) 12 (1952).

(5) Hilbert-Bernays. Grundlagen der Mathematik, Berlin (1939).