

A. I. BENEDEK, E. R. MURPHY, R. PANZONE

## CUESTIONES DEL ANALISIS DE FOURIER

### Convergencia en Media de Algunas Series Ortogonales

1976

INMABB - CONICET  
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR  
BAHIA BLANCA - ARGENTINA

**NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS** es una colección destinada principalmente a reunir los trabajos de investigación, notas de curso, conferencias, seminarios, realizados en la Universidad Nacional del Sur en el campo del Algebra y del Análisis.

Esta publicación no tendrá un carácter periódico. Los fascículos —cada uno de los cuales contendrá en general un solo trabajo— serán numerados en forma continuada.

Las Universidades, Academias, Sociedades Científicas y los Editores de Revistas de Matemática quedan invitados a canjear sus publicaciones por las del Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur.

Toda la correspondencia relativa a esta colección deberá ser dirigida a:

**SERVICIO DE CANJE  
INSTITUTO DE MATEMATICA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR  
BAHIA BLANCA - ARGENTINA**

**NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS** est une collection destinée principalement à réunir les travaux de recherches, notes de cours, conférences, séminaires, réalisés dans l'Université Nationale du Sud dans le domaine de l'Algèbre et de l'Analyse.

Cette publication n'aura pas un caractère périodique. Les fascicules —chacun desquels aura en général un seul travail— seront numérotés d'une façon continuée.

Les Universités, les Académies, les Sociétés savantes et les Editeurs de Revues de Mathématiques sont instamment priés d'échanger leurs publications contre celles de l'Institut de Mathématique de l'Université Nationale du Sud.

Toute la correspondance relative à cette collection doit être adressée à:

**SERVICIO DE CANJE  
INSTITUTO DE MATEMATICA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR  
BAHIA BLANCA - ARGENTINA**

NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS (\*)

Nº 5

**CUESTIONES DEL  
ANALISIS DE FOURIER**

CONVERGENCIA EN MEDIA  
DE ALGUNAS SERIES ORTOGONALES

AGNES ILONA **BENEDEK**

EDUARDO RAMON **MURPHY**

RAFAEL **PANZONE**

**INMABB - CONICET**

**1976**

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

**BAHIA BLANCA - ARGENTINA**

] La publicación de este volumen ha sido subsidiada por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.



## PREFACIO

La presente obra se divide en dos partes. La primera de ellas es relativamente elemental y está destinada a un público más vasto que el destinatario de la segunda, más especial. Para ser más precisos, digamos que la primera parte presenta con trazo rápido algunos tópicos esenciales para el estudio del Análisis Armónico, a saber, interpolación de operadores, aproximaciones asintóticas, bases en  $L^p$  y operadores de Hilbert, el sistema trigonométrico y los polinomios de Legendre. En la segunda parte se hace una presentación más acabada de la teoría de interpolación, y se pasa luego a un estudio bastante completo de las series de Jacobi, Bessel y Dini.

Sin embargo, no hemos pensado en este libro como en un texto acerca de dichas materias, sino que se trata, más bien, de "notas de curso" redactadas por dos de los autores entre 1970 y el año pasado (1975), a lo largo de varios cursos y seminarios desarrollados en el Instituto de Matemática y en el Departamento de Matemática de la U.N.S., y a las que dio su redacción presente el tercer autor.

Hay que añadir aquí que parte de estas notas fue usada en cursillos dados por uno de nosotros en el Departamento de Matemática de la Universidad de Campinas (Brasil) y en el Instituto de Matemática de la Universidad de Erlangen-Nürnberg (República Federal de Alemania).

Quien lea la obra encontrará que el estilo es algo informal, en el sentido de que aparecen algunos abusos de notación. Ojalá ninguno de ellos resulte más desagradable para el lector comprensivo que la complicación de escritura que de otro modo se habría producido.-

En definitiva, confiamos en haber elaborado un libro útil como guía para el joven matemático que desee introducirse en estas cuestiones del Análisis de Fourier. Sólo resta agradecer aquí a la señora Beby Ladousse por la suprema paciencia y el cuidado con que mecanografió los originales.-

A.B. y R.P.  
Pehuen-co, junio de 1976.



# INDICE ANALITICO

## PRIMERA PARTE

### CAPITULO I.

TEOREMAS DE INTERPOLACION.....(1)

1.(1) Operadores de tipo  $p$ . Un teorema de interpolación. Enunciados de dos teoremas de interpolación (Riesz, Riesz-Thorin) y de un corolario. Operadores de tipo  $(p,q)$  y de tipo débil  $p$ .

2.(2) Un teorema de Marcinkiewicz.

3.(4) Demostración del teorema de Marcinkiewicz.

4.(5) Un teorema de Marcinkiewicz-Zygmund (enunciado).

BIBLIOGRAFIA (5)

### CAPITULO II.

TEOREMAS DE INTERPOLACION (cont.)..... (6)

1.(6) Operadores de tipo restringido. Teorema de Stein-Weiss,

BIBLIOGRAFIA (8)

### CAPITULO III.

TEOREMA GENERAL DE INTERPOLACION DE OPERADORES LINEALES..... (8)

1.(8) Funciones holomorfas a valores en un espacio de Banach. Propiedades. Espacios binormados. Criterio de consistencia para normas de un espacio binormado. Una versión del teorema de Phragmén-Lindelöf.

2.(11). El teorema general. Teorema de M.Riesz y Thorin.

3.(13) Demostración del teorema general.

BIBLIOGRAFIA (13)

### CAPITULO IV.

APROXIMACIONES ASINTOTICAS..... (14)

1.(14) Introducción.

2.(14) La notación  $O, o$ . Sucesiones asintóticas. Desarrollos asintóticos: definición y propiedades.

3.(16) El Lema de Watson. Corolario.

4.(17) Desarrollo de la función Gamma.

5.(20) El método de máxima pendiente. Presentación.

6.(22) Desarrollo de la recíproca de la función Gamma.

7.(23) El método de máxima pendiente (continuación).

8.(25) Los desarrollos de las funciones de Bessel.

9.(30) Fórmula del punto de ensilladura.

10.(31) Desarrollo de los polinomios de Legendre.

BIBLIOGRAFIA (33)

CAPITULO V.

BASES ORTONORMALES EN  $L^p$  ..... (34)

1.(34) Ideas previas.

2.(35) Teorema 1: Una condición para que un sistema dado sea base ortonormal.

3.(37) Notas al teorema 1. Teorema 2: Una ampliación del teorema 1.

BIBLIOGRAFIA (38)

CAPITULO VI.

EL OPERADOR DE HILBERT..... (38)

1.(38) Definición. Propiedades. Operadores  $H_g$ .

2.(42) Prosigue la demostración de las propiedades.

3.(43) Idem.

BIBLIOGRAFIA (44)

CAPITULO VII.

OPERADORES DE HILBERT CON PESO..... (44)

1.(44) Teoremas principales.

2.(45) Demostraciones.

3.(48) Idem.

4.(50) Idem.

5.(51) Un teorema más.

BIBLIOGRAFIA (53)

CAPITULO VIII.

EL SISTEMA TRIGONOMETRICO..... (53)

1.(53) Introducción.

2.(54) Teorema principal (M.Riesz).

3.(55) Si  $p = 1$  o  $p = \infty$ , los operadores  $S_N$  no son uniformemente continuos.

BIBLIOGRAFIA (56)

CAPITULO IX.

POLINOMIOS ORTOGONALES. POLINOMIOS DE LEGENDRE..... (56)

1.(56) Polinomios ortogonales. Fórmula de Chistoffel-Darboux. Fórmula de recurrencia.

2.(57) Polinomios de Legendre. Fórmula de Rodríguez. Teorema (Pollard, Newman, Rudin).

3.(58) Una fórmula de Pollard para el núcleo de Dirichlet.

4.(60) Demostración de una parte del teorema del párrafo 2.

BIBLIOGRAFIA (61)

## SEGUNDA PARTE

### CAPITULO X.

- TEORIA DE INTERPOLACION DE OPERADORES.....(63)
- 1.(63) Funciones de distribución. Reordenada no creciente de una función. Propiedades. Espacios de Lorentz.
  - 2.(65) Algunas desigualdades de Hardy.
  - 3.(66) Métrica para  $L_{p,q}$ .
  - 4.(70) Teorema de Calderón-Hunt.
  - 5.(71) Comentarios previos a la demostración. Condiciones de Kolmogoroff.
  - 6.(79) Demostración del teorema de Calderón-Hunt.
  - 7.(82) Complementos al teorema.
  - 8.(85) Un teorema a la Riesz-Thorin para operadores semilineales.

BIBLIOGRAFIA (93)

### CAPITULO XI.

- SERIES DE JACOBI ..... (94)
- 1.(94) Polinomios de Jacobi. Propiedades principales y estimaciones.
  - 2.(95) Teorema de Muckenhoupt y un resultado complementario.
  - 3.(96) Una expresión del núcleo de Dirichlet.
  - 4.(98) Demostración del teorema.
  - 5.(101) Demostración del resultado complementario.

BIBLIOGRAFIA (104)

### CAPITULO XII.

- COMPLETIDAD DE LOS SISTEMAS DE BESSEL Y DINI..... (105)
- 1.(105) Preliminares.
  - 2.(107) Teoremas principales (Convergencia en  $L^2$  y en  $L^2_x$ ).
  - 3.(108) Resultados útiles.
  - 4.(111) Demostraciones de los teoremas principales.

BIBLIOGRAFIA (116)

### CAPITULO XIII.

- CONVERGENCIA EN MEDIA EN  $L^P$  DE LAS SERIES DE BESSEL Y DE DINI ..... (116)
- 1.(116) Teoremas principales (Convergencia en  $L^P$ ).
  - 2.(117) Demostraciones.
  - 3.(121) Idem.
  - 4.(121) Idem.
  - 5.(121) Excursus.
  - 6.(122) Los teoremas principales son no mejorables.

BIBLIOGRAFIA (125).

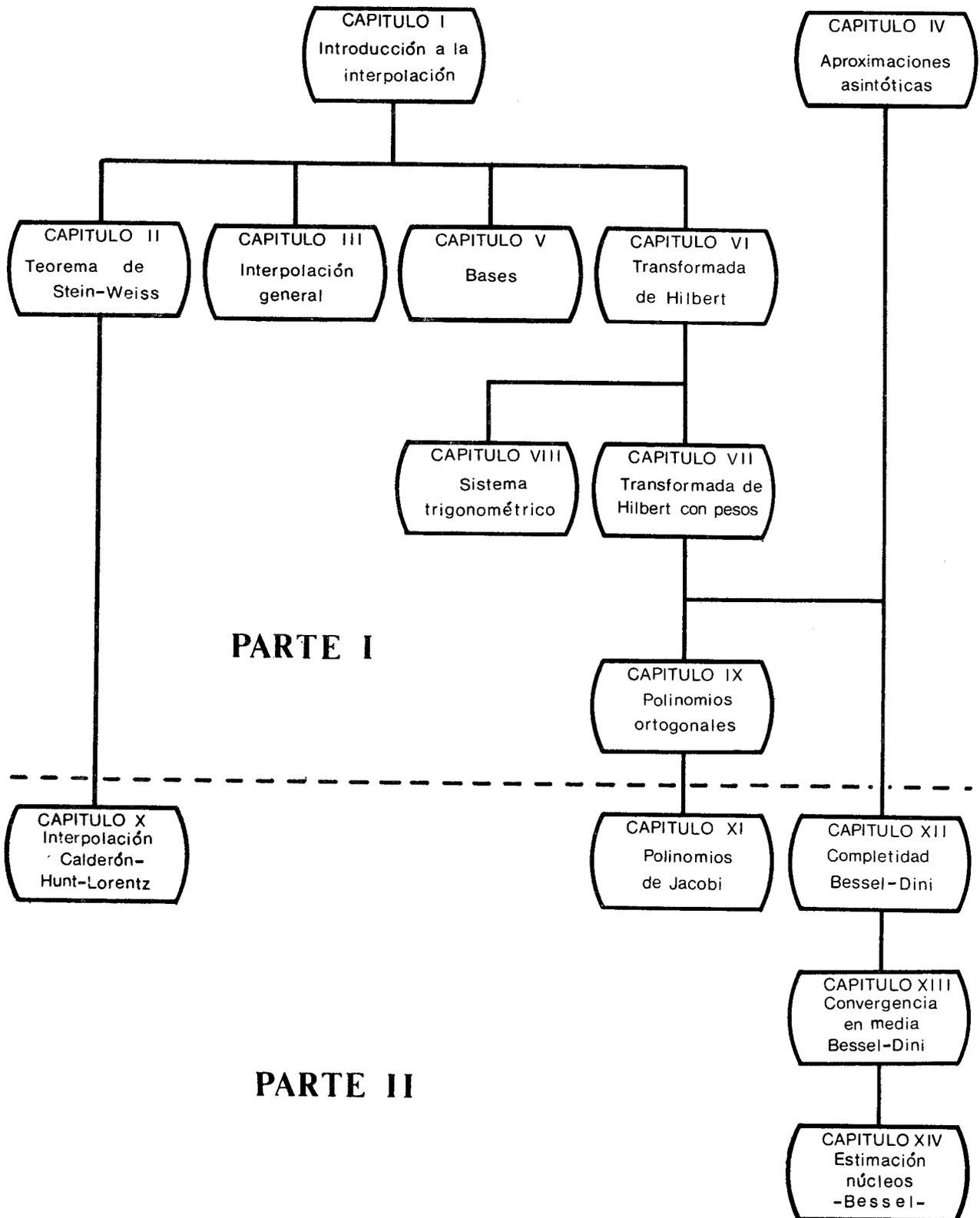
### CAPITULO XIV.

- COMPLETACION DE RESULTADOS. ESTIMACION DEL NUCLEO DE DIRICHLET DE LAS SERIES DE FOURIER-BESSEL..... (125)

BIBLIOGRAFIA (131)

- INDICE ALFABETICO..... (132)

# ORDEN LOGICO DE LA OBRA



## PRIMERA PARTE

### CAPITULO I

#### TEOREMAS DE INTERPOLACION

1. Sea  $S$  el conjunto de las funciones (reales) simples definidas en un espacio de medida  $\Omega$ ,  $\sigma$ -finito. (esto es:  $\Omega$  es unión numerable de conjuntos de medida finita). Es decir, cada uno de los elementos de  $S$  es una función medible, a valores reales, que toma sólo un número finito de valores distintos y que se anula fuera de algún conjunto de medida finita.

Se dice que un operador  $T$ , definido en  $S$ , es de tipo  $p$  si, para cada  $f \in S$ ,

$$(1) \quad \|Tf\|_p \leq M \|f\|_p,$$

donde  $M$  es una constante. Aquí,  $1 \leq p \leq \infty$  y  $Tf$  es una función real medible definida en  $\Omega$  o en otro espacio de medida.

Recordemos de paso, que a la mínima constante  $M$  que verifique la propiedad (1) se la llama *norma* de  $T$ .

Cuando  $1 \leq p < \infty$ ,  $S$  es denso en  $L^p$  y entonces  $T$  puede extenderse a todo el espacio  $L^p$ . Además, la extensión también verificará (1).

En este capítulo nos ocuparemos de teoremas que apuntan a lo siguiente: dadas ciertas condiciones de continuidad para un operador  $T$  en  $L^p$  y en  $L^r$ , averiguar si son suficientes para asegurar que  $T$  sea de tipo  $s$ , para  $s$  entre  $p$  y  $r$ .

El siguiente resultado es un caso particular de un teorema debido a M. Riesz. Obsérvese que en él se da una estimación de la norma de  $T$  en  $L^s$  como combinación elemental de las normas de  $T$  en  $L^p$  y en  $L^r$ .

TEOREMA 1. Sean  $\Omega_i$ ,  $i=1,2$ , dos espacios de medida  $\sigma$ -finitos cuyas medidas son  $\mu_i$ , y sea  $T$  un operador lineal definido en  $S_1$  (la familia de funciones simples de  $\Omega_1$ ) con valores en el conjunto de funciones medibles de  $\Omega_2$ . Si  $p_i \in [1, \infty]$ ,  $i=1,2$ , y  $T$  es de tipo  $p_i$  con norma  $M_i$ , entonces  $T$  es de tipo  $p$ , donde

$$(2) \quad \frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}, \quad \|Tf\|_p \leq M_1^\theta M_2^{1-\theta} \|f\|_p, \quad 0 < \theta < 1.$$

No probaremos este teorema. (véase [1],[2],[4] ó [5]), sino un corolario.

Pero antes enunciaremos un resultado más general, debido a Thorin en lo que respecta al caso complejo. Con él, Thorin extendió el resultado antes demostrado para el caso real por M. Riesz.

TEOREMA DE RIESZ-THORIN. Sean  $\Omega_i$ ,  $i=1,2$ , dos espacios de medida  $\sigma$ -finitos cuyas medidas son  $\mu_i$ , y  $T$  un operador lineal definido en  $S_1$  (la familia de funciones simples, reales o complejas, de  $\Omega_1$ ) con valores en el conjunto de fun-

ciones medibles de  $\Omega_2$ .

Si  $p_i, q_i \in [1, \infty]$ ,  $i=1,2$ , y  $T$  es de tipo  $(p_i, q_i)$  con norma  $M_i$  (véase la aclaración siguiente a este enunciado), entonces  $T$  es de tipo  $(p, q)$ , donde

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_2}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Así, que hay una constante  $M$  tal que

$$\|Tf\|_q \leq M \|f\|_p.$$

Si  $S_1$  es la familia de funciones reales simples y  $q_i \geq p_i$ ,  $i=1,2$ , entonces  $M \leq M_1^\theta M_2^{1-\theta}$ . Si  $S_1$  es la familia de funciones complejas simples entonces  $M \leq M_1^\theta M_2^{1-\theta}$ . En el caso real, esta última desigualdad no es válida en el triángulo superior (ver figura).

ACLARACION. Que  $T$  sea de tipo  $(p, q)$  significa, precisamente, que hay una constante  $M$  tal que

$$\|Tf\|_q \leq M \|f\|_p$$

para toda  $f \in S_1$ .

Veamos ahora el corolario que anunciáramos.

COROLARIO. Sea  $T$  un operador lineal como el del teorema 1; si  $T$  es de tipo  $p_1$  y  $p_2$ ,  $1 \leq p_1, p_2 < \infty$ , entonces  $T$  es de tipo  $p$  para todo  $p$  entre  $p_1$  y  $p_2$ .

Ante todo, obsérvese que, si  $T$  es de tipo  $p$  con norma  $M$ , es

$$\lambda^p \mu_2 \{ \omega : |Tf(\omega)| > \lambda \} \leq \int_{\Omega_2} |Tf(\omega)|^p d\mu_2(\omega) \leq M^p \int_{\Omega_1} |f(y)|^p d\mu_1(y),$$

es decir,

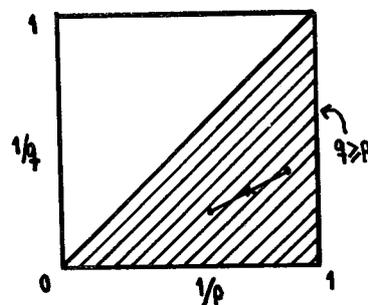
$$(3) \quad \mu_2 \{ |Tf| > \lambda \} \leq \left( \frac{M \|f\|_p}{\lambda} \right)^p, \quad \text{siempre que } 1 \leq p < \infty.$$

Si, para algún  $p \in [1, \infty)$ , un operador lineal  $T$  definido en  $S$  verifica (3), diremos que es de tipo débil  $p$  (en  $S$ ). Según acabamos de mostrar, tipo  $p$  implica tipo débil  $p$ ; la recíproca es falsa.

2. Para probar el corolario que nos ocupa, será suficiente que establezcamos el siguiente teorema (debido a Marcinkiewicz); recordemos que cuando se dice que  $T$  es sub-lineal en  $S$ , se ha de entender que  $|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg|$  c.d. cualesquiera sean  $f$  y  $g$  en  $S$ .

TEOREMA 2. Si  $T$  es un operador sub-lineal de tipo débil  $p_i$ ,  $i=1,2$ ,  $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$ , en  $S$ , entonces es de tipo  $p$  para todo  $p \in (p_1, p_2)$ .

Comencemos por algunos resultados auxiliares.



Supongamos que  $0 \leq f < \infty$ ,  $f$  medible, y sea  $D_f(a) = \mu\{x: x \in \Omega, f(x) > a\}$  para cada  $a \geq 0$ . Supongamos también que  $D_f(a) < \infty$  para cada  $a > 0$ . Esto último es válido si  $f \in L^p$  para algún  $p \in [1, \infty)$ . Ahora bien, la función  $f: \Omega \rightarrow L = [0, \infty)$  induce una medida sobre  $L$  definida por  $\mu\{f^{-1}(\cdot)\}$ , que, como puede comprobarse fácilmente, coincide sobre los borelianos con la medida Lebesgue-Stieltjes inducida por la función monótona no decreciente  $-D_f(\lambda)$ . Por consiguiente, observando que  $f$  es una aplicación medible del espacio  $L$  en  $\Omega$ , tenemos:

$$(4) \quad \int_{\Omega} f \, d\mu = \int_L \lambda \, d\mu \circ f^{-1} = \int_L \lambda \, d\{-D_f(\lambda)\} = - \int_L \lambda \, dD_f(\lambda) .$$

Supongamos ahora que  $f$  pertenece a  $L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , y que es una función no negativa. De (4) obtenemos, entonces:

$$\int_{\Omega} f^p \, d\mu = - \int_L \lambda^p \, dD(\lambda) = \lim_{\substack{A \rightarrow \infty \\ a \rightarrow 0}} [-A^p D(A) + a^p D(a) + p \int_a^A \lambda^{p-1} D(\lambda) \, d\lambda]$$

donde  $D \equiv D_f$ , (se ha usado que  $D_{f^p}(\lambda) = D_f(\lambda^{1/p})$ ).

Por otra parte, tenemos que (permitiéndonos un ligero exceso de brevedad en la notación)

$$A^p D(A) \leq \int_{\{f > A\}} f^p \, d\mu \rightarrow 0 \quad (A \rightarrow \infty)$$

debido a la continuidad absoluta de la integral de  $f^p$ , al ser  $f^p \in L^1$ .

Ahora, consideremos la función  $f(a, x) = f(x)$  donde  $0 \leq f \leq a$ , e igual a  $a$  para los demás valores de  $x$ . El teorema de la convergencia dominada implica que

$$\int f^p(a, x) \, d\mu(x) \rightarrow 0 \quad \text{para } a \rightarrow 0$$

y ésto, a su vez, implica que  $a^p D(a) \rightarrow 0$  cuando  $a \rightarrow 0$ .

Luego,

$$(5) \quad \int_{\Omega} f^p \, d\mu = p \int_0^{\infty} \lambda^{p-1} D_f(\lambda) \, d\lambda .$$

(En realidad, (5) vale para todo  $p \in (0, \infty)$  con sólo suponer  $f \geq 0$ , como puede uno comprobar fácilmente. Aquí va ahora una demostración alternativa de (5), someramente bosquejada ( $\chi_E$  denota a la función característica del conjunto  $E$ ):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f|^p \, d\mu &= \int_{\Omega} \left( \int_0^{|f|} p y^{p-1} \, dy \right) d\mu = \int_{\Omega} \left( \int_0^{\infty} \chi_{[0, |f(\omega)|)}(y) p y^{p-1} \, dy \right) d\mu(\omega) = \\ &= \int_0^{\infty} y^{p-1} \cdot p \left( \int_{\Omega} \chi_{[0, |f(\omega)|)}(y) \, d\mu(\omega) \right) dy = \int_0^{\infty} y^{p-1} \cdot p \, dy \cdot \int_{\Omega} \chi_{\{\omega: |f(\omega)| > y\}} \, d\mu(\omega) = \\ &= p \int_0^{\infty} y^{p-1} \, dD_{|f|}(y) . \end{aligned}$$

Otro resultado que nos será útil es el siguiente. Supongamos que  $f \leq g+h$  y que las tres funciones son no negativas. Entonces, para  $\lambda \geq 0$ , es

$$\{f > \lambda\} \subseteq \{g > \frac{\lambda}{2}\} \cup \{h > \frac{\lambda}{2}\} ,$$

y

$$(6) \quad D_f(\lambda) \leq D_g(\lambda/2) + D_h(\lambda/2) .$$

3. *Demostración del teorema 2.* Supongamos que  $f$  es una función simple no negativa, y sea

$a > 0$ .  ${}^a f(x)$  denotará a la función igual a  $f$  en  $\{f > a\}$  y nula fuera de este conjunto.  ${}_a f$  denotará a la función  $f - {}^a f$ . Usando las hipótesis y (6), tendremos:

$$(7) \quad \int_{\Omega_2} |Tf|^p d\mu_2 = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} D_{|Tf|}(\lambda) d\lambda \leq p \int_0^\infty \lambda^{p-1} [D_{|T({}_a f)|}(\lambda/2) + D_{|T({}_a f)|}(\lambda/2)] d\lambda .$$

$$\leq 2^{p_1} \cdot p \int_0^\infty \lambda^{p-1} [ \| \lambda f \|_{p_1}^{p_1} / \lambda ]^{p_1} d\lambda +$$

$$+ 2^{p_2} \cdot p \int_0^\infty \lambda^{p-1} [ \| \lambda f \|_{p_2}^{p_2} / \lambda ]^{p_2} d\lambda$$

(obsérvese que  ${}^\lambda f(x)$  es medible en  $x, \lambda$ ; y también  ${}_\lambda f(x)$ ).

Pero, por otra parte,

$$(8) \quad \int_0^\infty \lambda^{p-p_1-1} \cdot \| \lambda f \|_{p_1}^{p_1} d\lambda = \int_0^\infty \int_{\Omega_1} \lambda^{p-p_1-1} \cdot |{}^\lambda f(x)|^{p_1} d\mu_1(x) d\lambda =$$

$$= \int_{\Omega_1} d\mu_1(x) \int_0^{f(x)} \lambda^{p-p_1-1} \cdot |f(x)|^{p_1} d\lambda = \int_{\Omega_1} \frac{|f|^p}{p-p_1} d\mu_1(x)$$

y, análogamente,

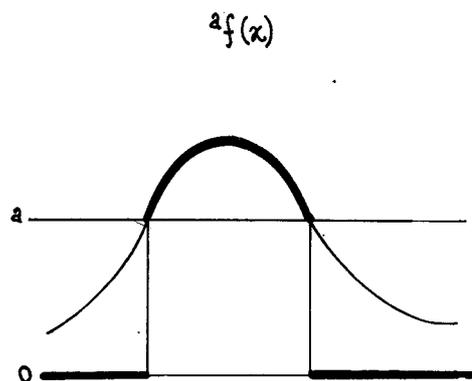
$$(9) \quad \int_0^\infty \lambda^{p-p_2-1} \| \lambda f \|_{p_2}^{p_2} d\lambda = \frac{\int_{\Omega_1} |f|^p d\mu_1(x)}{p_2-p}$$

(7), (8) y (9) implican que

$$\int_{\Omega_2} |Tf|^p d\mu_2 \leq C_p \int_{\Omega_1} |f|^p d\mu_1 , \quad \text{con } C_p = \frac{2^{p_1} \cdot p}{p-p_1} + \frac{2^{p_2} \cdot p}{p_2-p} .$$

Esto es lo que queríamos demostrar.

En forma análoga a como definimos operador de tipo débil  $p$ , definamos ahora operador de tipo débil  $(p, q)$  como aquel operador  $T$  para el cual exista una constante  $A > 0$  tal que  $\|Tf\|_\infty \leq A \cdot \|f\|_p$  si  $q = \infty$  y si  $q < \infty$



$$(10) \quad D_{|Tf|}(y) \leq \left[ \frac{A}{y} \|f\|_p \right]^q \quad \text{para } y > 0 \text{ y toda función simple } f.$$

Nuevamente, tipo  $(p,q)$  implica tipo débil  $(p,q)$ .

4. Cerraremos este capítulo con el enunciado de un teorema de Marcinkiewicz y Zygmund, para el cual debe tenerse en cuenta que un operador  $T$  se dice casi-lineal si hay una constante real  $K$  tal que

$$(11) \quad |T(f+g)| \leq K(|Tf| + |Tg|) \quad \text{c.d.}$$

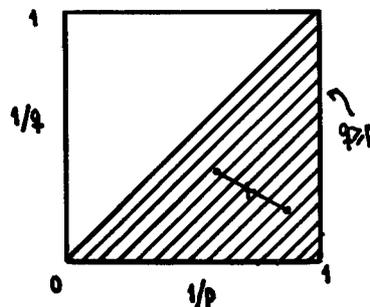
cualesquiera sean las funciones  $f$  y  $g$  del dominio de  $T$ .

[ (Obsérvese que, si  $K=1$ ,  $T$  resulta entonces sub-lineal) ].

TEOREMA DE MARCINKIEWICZ-ZYGMUND. Sea  $T$  un operador casi-lineal de tipo débil  $(p_i, q_i)$ ,  $i=1,2$ ,  $1 \leq p_i \leq q_i \leq \infty$ ,  $q_1 \neq q_2$ ; suponemos que  $T$  está definido para las funciones reales simples de un espacio de medida  $\sigma$ -finito, y toma valores en la clase de las funciones reales medibles de otro espacio  $\sigma$ -finito. Entonces,  $T$  es de tipo  $(p,q)$ , si

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_2}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Además,  $\|Tf\|_q \leq R M_1^\theta M_2^{1-\theta} \|f\|_p$ , donde  $R$  está acotada en cada intervalo interior a  $0 < \theta < 1$ , y  $M_1, M_2$  son las constantes que aparecen según la hipótesis en el lugar de  $A$  de la condición (10). El resultado es falso cuando  $q_1 = q_2$  o cuando los puntos  $(\frac{1}{p_i}, \frac{1}{q_i})$  están en el triángulo superior (ver figura).



En vez del teorema de Marcinkiewicz-Zygmund, probaremos un resultado debido a E.Stein y G.Weiss, para lo que nos remitimos al capítulo siguiente.

#### REFERENCIAS

- [ 1 ] P.L.BUTZER und K.SCHERER, *Approximationsprozesse und Interpolationsmethoden*, Bibliog.Inst., (1968).
- [ 2 ] M.COTLAR, *Condiciones de continuidad de operadores potenciales y de Hilbert*, Univ. Nac. de Bs. As., (1959).
- [ 3 ] P.HALMOS, *Measure Theory*, D.Van Nostrand Co., Inc., (1950).
- [ 4 ] E.M.STEIN and G.WEISS, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton, (1971).
- [ 5 ] A.ZYGMUND, *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, (1959).

CAPITULO II

1. Este capítulo se desarrolla en el mismo contexto que el anterior.

Comenzaremos por dar dos definiciones (el símbolo  $\chi_E$  denota, en lo que sigue, a la función característica del conjunto  $E$ ):

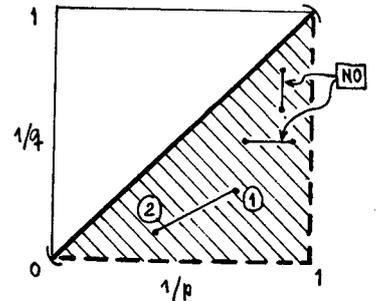
(i) Un operador  $T$  es de tipo restringido  $(p,q)$  si hay una constante positiva  $A$  tal que  $\|T\chi_E\|_q \leq A \cdot \|\chi_E\|_p$  siempre que  $E$  sea un conjunto de medida finita contenido en  $\Omega_1$ .

(ii) Un operador  $T$  es de tipo débil restringido  $(p,q)$  si hay una constante positiva  $A$  tal que  $\mu_2\{|T\chi_E| > y\} = D_{|T\chi_E|}(y) \leq \left(\frac{A}{y} \cdot \|\chi_E\|_p\right)^q = \left(\frac{A}{y} \cdot [\mu_1(E)]^{1/p}\right)^q$  siempre que  $E$  sea un conjunto de medida finita contenido en  $\Omega_1$ .

Lema. Todo operador de tipo restringido  $(p,q)$  es de tipo débil restringido  $(p,q)$ . La demostración es como la que dimos para operadores de tipo  $y$  y tipo débil en el capítulo anterior.

TEOREMA DE STEIN-WEISS. Si  $T$  es un operador de tipo débil restringido  $(p_i, q_i)$ , siendo  $1 < p_i \leq q_i < \infty$  ( $i=1,2$ ),  $p_2 \neq p_1$ ,  $q_2 \neq q_1$ , y si  $\frac{1}{p} = \frac{\vartheta}{p_1} + \frac{1-\vartheta}{p_2}$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{\vartheta}{q_1} + \frac{1-\vartheta}{q_2}$  ( $0 < \vartheta < 1$ ), entonces  $T$  es de tipo  $(p,q)$ .

Demostración. Haremos la demostración en varios pasos. Para los tres primeros supondremos  $\mu(\Omega_1) < +\infty$ .  
 Primer paso. Veamos que si  $T$  es de tipo débil restringido  $(p_i, q_i)$  entonces es de tipo restringido  $(p,q)$ .  
 No se pierde generalidad suponiendo  $q_1 < q < q_2$ .



$$\begin{aligned} \text{Entonces } (1) \quad & \int_{\Omega_2} |T\chi_E|^q d\mu_2 = q \int_0^\infty y^{q-1} D_{|T\chi_E|}(y) dy = \\ & = q \int_0^c y^{q-1} D(y) dy + q \int_c^\infty y^{q-1} D(y) dy \leq q \int_0^c y^{q-1} \left(\frac{A_1}{y} [\mu_1(E)]^{1/p}\right)^q dy + \\ & + q \int_c^\infty y^{q-1} \left(\frac{A_2}{y} [\mu_1(E)]^{1/p_2}\right)^{q_2} dy = [q \cdot \frac{A_1^{q_1}}{q-q_1}] \cdot [\mu_1(E)]^{q_1/p_1} C^{q-q_1} + \\ & + [q \cdot \frac{A_2^{q_2}}{q_2-q} ] \cdot [\mu_1(E)]^{q_2/p_2} \cdot C^{q-q_2} . \end{aligned}$$

Ahora bien: La recta que pasa por  $(x_1, y_1) = (\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1})$  y por  $(x, y) = (\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$

debe contener también a  $(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{p_2}, \frac{1}{q_2}\right)$ . Por lo tanto  $\frac{y_2 - y}{y_1 - y} = \frac{xy_2 - x_2 y}{xy_1 - x_1 y}$

así que (\*)  $\frac{q^{-q_2}}{q^{-q_1}} = \frac{\frac{q}{p} - \frac{q_2}{p_2}}{\frac{q}{p} - \frac{q_1}{p_1}}$ . Si llamamos  $s$  al  $n^\circ \frac{1}{q^{-q_1}} \cdot \left(\frac{q}{p} - \frac{q_1}{p_1}\right)$ , se deduce de

$$(*) \text{ entonces que } s = \frac{1}{q^{-q_2}} \left(\frac{q}{p} - \frac{q_2}{p_2}\right).$$

Poniendo  $C = [\mu_1(E)]^s$ , obtenemos ahora  $\mu_1(E)^{q_1/p_1} \cdot C^{q^{-q_1}} = \mu_1(E)^{q/p} = \mu_1(E)^{q_2/p_2} \cdot C^{q^{-q_1}}$ . Entonces, lo que señalamos con (1) implica:

$$\int_{\Omega_2} |T\chi_E|^q d\mu_2 \leq A^q \cdot \mu_1(E)^{q/p} = A^q \|\chi_E\|_p^q, \text{ completando el primer paso.}$$

Segundo paso. Sea  $f \in L^{q'}(\Omega_2)$ , con  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$  y definamos  $\gamma(E) = \int_{\Omega_2} (T\chi_E) \cdot f d\mu_2$ .

Como  $T$  es de tipo restringido,  $\gamma$  será  $\sigma$ -aditiva y absolutamente continua con respecto a  $\mu_1$ . Entonces, el teorema de Radon-Nikodym asegura que existe una

$$\text{única función } h \text{ tal que } \gamma(E) = \int_E h d\mu_1 = \int_{\Omega_1} h\chi_E d\mu_1.$$

Ahora definamos  $T^*f = h$  para cada  $f \in L^{q'}(\Omega_2)$ . Así las cosas,  $T^*$  será lineal y,

$$\text{por consiguiente, si } f \text{ y } s \text{ son funciones simples, (**)} \int_{\Omega_2} (Ts)f d\mu_2 = \int_{\Omega_1} s (T^*f) d\mu_1.$$

Probaremos entonces el siguiente lema: Si  $T$  es lineal y de tipo restringido

$(p, q)$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $1 \leq q < \infty$ , entonces  $T^*$  es de tipo débil  $(q', p')$ . Lo demostraremos hallando un número positivo  $B$ , independiente de  $f \in L^{q'}$ , tal que

$$(***) D_{|h|}(y) \leq \left(\frac{B}{y} \|f\|_{q'}\right)^{p'}$$

para todo  $y > 0$ . En realidad, será suficiente que probemos (\*\*\*) para  $f$  simple. Podemos suponer además  $h = h^+ - h^-$  y

la función  $h^-$  puede ser tratada en forma similar). Se tiene

$$y \cdot D_{h^+}(y) = y \int_{[h^+ > y]} d\mu_1 \leq \int_{\Omega_1} h \cdot d\mu_1 = \int_{\Omega_1} \chi_{[h^+ > y]} \cdot T^*f \cdot d\mu_1 =$$

$$= \int_{\Omega_2} T\chi_{[h^+ > y]} \cdot f \cdot d\mu_2 \leq \|T\chi\|_q \|f\|_{q'} \leq A \|\chi_{[h^+ > y]}\|_p \|f\|_{q'} =$$

$$= A \mu_2[h^+ > y]^{1/p} \cdot \|f\|_{q'} = A \cdot D_{h^+}(y)^{1/p} \cdot \|f\|_{q'}, \text{ así que}$$

$$y \cdot D_{|h|}(y) \leq 2A \cdot D_{|h|}(y)^{1/p} \cdot \|f\|_{q'}, \text{ y } y \cdot D_{|h|}(y)^{1/p'} \leq 2A \|f\|_{q'}, \text{ es decir,}$$

$$D_{|h|}(y) \leq \left(\frac{2A}{y} \cdot \|f\|_{q'}\right)^{p'}, \text{ y el lema está demostrado, concluyendo el segundo paso.}$$

Tercer paso. Como  $T$  es de tipo débil restringido  $(p_i, q_i)$ , será entonces de tipo restringido  $(p, q)$ ; luego,  $T^*$  será de tipo débil  $(q', p')$ . El teorema de Marcinkiewicz implica entonces (ya que  $p'_1 \neq p'_2$ ) que  $T^*$  es de tipo  $(q', p')$  siempre

que  $(p,q)$  satisfaga nuestras hipótesis. Por lo tanto,  $T^*$  es un operador continuo [es decir, de tipo  $(q',p')$ ] y entonces  $T^{**}$  es continuo y precisamente de tipo  $(p,q)$ . Pero  $(**)$  significa que  $T^{**}=T$  sobre el conjunto de las funciones simples, y por consiguiente  $T^{**}=T$  sobre todo el espacio.

Cuarto paso. Ya completada la demostración del teorema si  $\mu_1(\Omega_1) < +\infty$ , eliminemos ahora esta hipótesis. Será entonces  $\Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n$ , y como  $T$  es de tipo  $(p,q)$  sobre cada  $\Omega_n$  con constantes independientes de  $n$ , será también  $T$  de tipo  $(p,q)$  sobre  $\Omega$ . Q.E.D.

#### REFERENCIAS

- [1] MOZZOCHI, Ch.J., *On the pointwise convergence of Fourier Series*, Lecture Notes in Math., N°199, Springer-Verlag.
- [2] STEIN, E.M. and WEISS, G., *An extension of a theorem of Marcinkiewicz and some of its applications*, J.Math.Mech. 8 (1.959), 263 - 284.

### CAPITULO III

#### TEOREMA GENERAL DE INTERPOLACION DE OPERADORES LINEALES.

1. Sea  $B$  un espacio normado. Una función  $F(z)$  definida en una región  $\Omega_0$  del plano complejo y que tome valores en  $B$  se dice holomorfa si, para cada  $\mu \in B^*$ , la función  $h(z) = \langle F(z), \mu \rangle$  es holomorfa en  $\Omega_0$ . [ $B^*$  denota al dual de  $B$ , es decir, al espacio normado de las funcionales lineales continuas definidas en  $B$ ;  $\langle a, \mu \rangle$  es el valor de  $\mu$  en el punto  $a \in B$ .] Puede verse en [2] que una función holomorfa a valores en un espacio de Banach goza de las siguientes propiedades:

1) Existe  $x'(z) \in B$ ,  $z \in \Omega_0$ , tal que  $\| \frac{x(z+h) - x(z)}{h} - x'(z) \| \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow 0$  uniformemente respecto  $z$ , si éste varía en un compacto;  $x'$  es también holomorfa,

2)  $x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z-z_0)^n$  en  $|z-z_0| < R$ , donde  $R$  es el radio del mayor círculo contenido en  $\Omega_0$  y de centro  $z_0$ .

La convergencia de la serie es uniforme en todo círculo interior y  $x^{(n)}$  denota la  $n$ -ésima derivada que existe por lo indicado en 1).

- 3)  $x(z) \equiv y(z)$  en un conjunto infinito con un punto de acumulación implica, si ambas son holomorfas, que son idénticamente iguales.
- 4)  $\|x(z)\|$  no puede alcanzar su máximo en el recinto sin ser constante. (Esto no vale para el mínimo).

Supongamos ahora que  $B$  es binormado, es decir, que sobre él tenemos definidas dos normas, denotadas  $\|\cdot\|_0$  y  $\|\cdot\|_1$ , y llamemos  $\Omega$  a la franja del plano complejo definida por  $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ . Sea entonces  $\mathcal{B}$  la familia de las funciones a valores en  $B$  que sean holomorfas y acotadas, en algún entorno simplemente conexo de  $\bar{\Omega}$ , con respecto a ambas normas ( $\bar{\Omega}$  denota a la clausura de  $\Omega$ ). Como es usual,  $\partial\Omega$  denotará a la frontera de  $\Omega$ . En nuestro caso,  $\partial\Omega = \bar{\Omega} - \Omega$ .

Lema 1. Sea  $F \in \mathcal{B}$ . Si  $F=0$  en  $\partial\Omega$ , entonces  $F \equiv 0$ .

En efecto, cualquiera sea  $\mu \in B^*$ , será  $\langle F(iy), \mu \rangle = \langle F(1+iy), \mu \rangle = 0$  para todo  $y$  real, así que la función holomorfa  $h(z) = \langle F(z), \mu \rangle$  es idénticamente nula en  $\bar{\Omega}$  (en realidad, lo es en todo su dominio, que es el de  $F$ ). De esto se deduce que  $F$  debe ser idénticamente nula, Q.E.D.

Definamos ahora una norma en el espacio vectorial  $\mathcal{B}$ , del siguiente modo:

$$\|F\| = \sup_{-\infty < y < +\infty} \{ \|F(iy)\|_0, \|F(1+iy)\|_1 \}$$
 para cada  $F \in \mathcal{B}$ . Es inmediato que, entonces,  $\|\lambda F\| = |\lambda| \cdot \|F\|$  y  $\|F+G\| \leq \|F\| + \|G\|$ . Además,  $F=0$  implica  $\|F\|=0$ . Por otra parte, si  $\|F\|=0$  será  $F(iy)=F(1+iy)=0$  para todo  $y$  real y  $F$  será entonces nula, de acuerdo al lema 1. Luego,  $\|\cdot\|$  es una norma en  $\mathcal{B}$ . Ahora es tiempo de introducir una vinculación entre  $\|\cdot\|_0$  y  $\|\cdot\|_1$ : diremos que  $\|\cdot\|_0$  y  $\|\cdot\|_1$  son consistentes si, para cada  $\alpha \in (0,1)$ ,  $\mathcal{B}_\alpha$  es un subespacio cerrado de  $\mathcal{B}$ , donde  $\mathcal{B}_\alpha = \{F \in \mathcal{B} : F(\alpha) = 0\}$ . En tal caso,  $\mathcal{B}/\mathcal{B}_\alpha$  es algebraicamente isomorfo a  $B$  mediante la aplicación  $F \mapsto F(\alpha) = f \in B$ . Como  $\mathcal{B}_\alpha$  es cerrado,  $\mathcal{B}/\mathcal{B}_\alpha$  es un espacio normado con la norma cociente:  $\|f\|_\alpha = \inf\{\|F\| : F(\alpha) = f, F \in \mathcal{B}\}$ . Esta se llama norma- $\alpha$  de interpolación.

Lema 2 (Criterio de consistencia). Si, para todo  $f$  no nulo en  $B$ , hay un

$\mu \in B_0^* \cap B_1^*$  tal que  $\langle f, \mu \rangle \neq 0$ , entonces  $\|\cdot\|_0$  y  $\|\cdot\|_1$  son consistentes. [Aquí hay que aclarar que denotamos, por brevedad,  $B_0$  al espacio normado  $(B, \|\cdot\|_0)$  y  $B_1$  al espacio normado  $(B, \|\cdot\|_1)$ .]

Demostración. Supongamos que  $F_n$  tiende en  $\mathcal{B}$  a  $F$  y que  $F_n(\alpha) = 0$  ( $n=1,2,3,\dots$ )

pero  $F(\alpha) \neq 0$ . Entonces, por hipótesis, habrá un  $\mu \in B_0^* \cap B_1^*$  tal que  $\langle F(\alpha), \mu \rangle \neq 0$ . Como las funciones holomorfas  $\langle F_n(z), \mu \rangle$  son acotadas en  $\bar{\Omega}$  y tienden a  $\langle F(z), \mu \rangle$  uniformemente en  $\partial\Omega$ , se deduce por el teorema de Phragmen-Lindelöf que  $\langle F_n(z), \mu \rangle$  converge puntualmente a  $\langle F(z), \mu \rangle$ . Luego, en particular,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle F_n(\alpha), \mu \rangle = \langle F(\alpha), \mu \rangle$  y llegamos así a una contradicción, Q.E.D.

Nos parece conveniente intercalar aquí una versión del teorema de Phragmén-Lindelöf, tal como aparece en [4], p.93:

TEOREMA. Supongamos que  $f(z)$ ,  $z=x+iy$ , es continua y acotada en la franja cerrada  $B: \alpha \leq x \leq \beta$ ,

y regular en el interior de  $B$ . Si  $|f(z)| \leq M$  sobre las rectas  $x=\alpha$  y  $x=\beta$ , entonces  $|f(z)| \leq M$  también en el interior de  $B$ . Si, además,  $|f(z_0)| = M$  en un punto  $z_0$  interior a  $B$ , entonces  $f(z)$  es constante.

Demostración. Supongamos primero que

$$(A) \quad f(x + iy) \rightarrow 0$$

cuando  $y \rightarrow \pm\infty$ , uniformemente en  $\alpha \leq x \leq \beta$ . Si  $z_0 = x_0 + iy_0$  es interior a  $B$ , la desigualdad  $|f(z_0)| \leq M$  es válida como consecuencia del Principio del Máximo clásico, aplicado a  $f$  en el rectángulo  $\alpha \leq x \leq \beta$ ,  $|y| \leq \eta$ , donde  $\eta$  es tan grande como para que  $\eta > |y_0|$  y  $|f(x+i\eta)| \leq M$  para  $\alpha \leq x \leq \beta$ .

Si la condición (A) no vale, consideramos la función

$$f_n(z) = f(z) \cdot e^{z^2/n} = f(z) \cdot e^{(x^2 - y^2)/n} \cdot e^{2ixy/n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

que verifica (A), y que sobre las rectas  $x=\alpha$  y  $x=\beta$  no supera a  $Me^{\gamma^2/n}$ , donde  $\gamma = \max(|\alpha|, |\beta|)$ . Entonces

$$|f_n(z_0)| \leq Me^{\gamma^2/n},$$

y cuando  $n \rightarrow \infty$  obtenemos  $|f(z_0)| \leq M$ .

Si  $|f(z_0)| = M$ , entonces  $f$  es constante, pues de lo contrario habría puntos  $z$  cercanos a  $z_0$  tales que  $|f(z)| > |f(z_0)| = M$  lo cual es imposible. Q.E.D.

En forma análoga se prueba lo siguiente: si  $f(z)$  es regular y acotada en  $\text{Re}(z) \in (\alpha, \beta)$  y si  $\overline{\lim} |f(z)| \leq M$  cuando  $z$  tiende a puntos propios del borde, entonces  $|f(z)| \leq M$  en el recinto indicado.

Corolario.  $f(z) = 0$  en  $\text{Re}(z) = \alpha$ ,  $\text{Re}(z) = \beta$ , implica  $f(z) \equiv 0$ .  $f_n(z) \rightarrow 0$  uniformemente en el borde implica  $f_n(z) \rightarrow 0$  uniformemente en toda la franja.

Retomamos ahora el hilo de nuestro capítulo, con la siguiente Proposición.

Proposición. Si existe una norma (denotémosla  $\|\cdot\|_2$ ) tal que  $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_0 \wedge \|\cdot\|_1$ , entonces para cada  $f \neq 0$  en  $B$  hay una  $\mu \in B_0^* \cap B_1^*$  tal que  $\langle f, \mu \rangle \neq 0$ .

Demostración. Ya que el teorema de Hahn-Banach asegura la existencia de una  $\mu \in B_2^*$  tal que  $\langle f, \mu \rangle \neq 0$ , será suficiente que probemos la inclusión  $B_2^* \subset B_1^* \cap B_0^*$ .

Pero ésta es consecuencia inmediata de :

$$|\langle f, \mu \rangle| \leq \|\mu\|_2 \cdot \|f\|_2 \leq \|\mu\|_2 \cdot \|f\|_i \quad i=0,1 \quad \text{Q.E.D.}$$

2. Ahora, vamos al primer teorema de éste capítulo. Supondremos: que  $(X, dx)$  es un espacio de medida  $\sigma$ -finito; que  $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ ; y que  $B$  está contenido en  $L^0 \cap L^1$ , pero contiene el espacio  $\Sigma$  de las funciones simples de  $X$ .

TEOREMA 1.  $\|\cdot\|_{p_0}$  y  $\|\cdot\|_{p_1}$  son consistentes en  $B$ ; además,  $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_{p_\alpha}$ , donde  $\frac{1}{p_\alpha} = \frac{1-\alpha}{p_0} + \frac{\alpha}{p_1}$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

(El lector sabrá disculpar el pequeño abuso de notación que se ha cometido con las normas. A poco que se observe, el contexto eliminará la ambigüedad posible.)

Demostración. Consistencia: Tómese  $g \in L^1 \cap L^\infty$  tal que  $fg > 0$  para  $f \neq 0$ , y defínase  $\langle f, \mu \rangle = \int_X fg dx$ . Caracterización de la norma- $\alpha$  de interpolación: quedará establecida si demostramos que, cualquiera sea  $f \in \Sigma$ : (a)  $\|f\|_{p_\alpha} \leq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|f\|_\alpha \leq 1; \text{ y (b) } \|f\|_{p_\alpha} > 1 \Rightarrow \|f\|_\alpha \geq 1. \text{ En efecto, supongamos probados}$$

(a) y (b), y sea  $f \in B$ . Habrá una sucesión  $\{f_n\}$  de funciones simples tal que  $\|f - f_n\|_{p_\alpha} \rightarrow 0$ ,  $\|f - f_n\|_{p_0} \rightarrow 0$  y  $\|f - f_n\|_{p_1} \rightarrow 0$  (aun si  $p_1 = \infty$ , ya que  $p_0 < \infty$ ). Entonces, se tiene:

$$\|f - f_n\|_\alpha = \inf\{\|F\| : F(\alpha) = f - f_n\} = \inf_{\{F : F(\alpha) = f - f_n\}} \sup\{\|F(iy)\|_0, \|F(1+iy)\|_1\} \leq$$

$$\leq \|f - f_n\|_0 \vee \|f - f_n\|_1 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (\text{la última desigualdad se justifica considerando } F \equiv f - f_n).$$

Por consiguiente,  $\|f_n\|_\alpha \rightarrow \|f\|_\alpha$ . Pero además,

$$\|f_n\|_{p_\alpha} \rightarrow \|f\|_{p_\alpha}, \text{ así que } \|f\|_\alpha = \|f\|_{p_\alpha}.$$

Comencemos, pues, por demostrar (a). Sea  $f \in \Sigma$  tal que  $\|f\|_{p_\alpha} \leq 1$ . Consideremos  $F(z) = |f|^{a(z-\alpha)+1} \cdot e^{i\varphi}$ , a real, siendo  $f = |f| \cdot e^{i\varphi}$ . Es evidente que  $F \in \mathcal{B}$  y que  $F(\alpha) = f$ . Luego,  $F \in f + \mathcal{B}_\alpha$ . Dado que  $p_\alpha = \frac{p_0 p_1}{p_0 \alpha + p_1 (1-\alpha)}$

$$\left( = \frac{p_0}{1-\alpha} \text{ si } p_1 = \infty \right), \text{ si tomamos } a = \frac{p_0 - p_1}{p_0 \alpha + p_1 (1-\alpha)} \left( = \frac{-1}{1-\alpha} \text{ si } p_1 = \infty \right)$$

tendremos  $a(z-\alpha)+1 = \frac{p_\alpha}{p_z}$ , así que  $\|F(iy)\|_{p_0} = \left[ \int_X |f|^{p_\alpha} dx \right]^{1/p_0} =$

$= \|f\|_{p_\alpha}^{p_\alpha/p_0} \leq 1$ , y una estimación similar valdrá para  $\|F(1+iy)\|_{p_1}$  si  $p_1 < \infty$ .

Si  $p_1 = \infty$ , se comprueba directamente que  $\|F(1+iy)\|_{p_1} \leq 1$ . En definitiva, será  $\|F\| \leq 1$  y por lo tanto  $\|f\|_\alpha \leq 1$ , con lo que (a) queda probado.

[Obsérvese que sólo se ha usado al demostrar (a) que  $p_0 \neq p_1$ , no que  $p_0 < p_1$ ; luego, el resultado valdrá también para  $q_0, q_1$  con  $q_0 > q_1$ .]

Veamos ahora cómo se demuestra (b). Sean  $q_0, q_1$  los exponentes conjugados de  $p_0$  y  $p_1$ . El exponente conjugado de  $p_\alpha$  es  $q_\alpha = \frac{q_0 q_1}{q_0 \alpha + q_1 (1-\alpha)}$

( $= \frac{q_1}{\alpha}$  si  $q_0 = \infty$ ). Si  $f \in \Sigma$  y  $\|f\|_{p_\alpha} > 1$ , existirá  $g \in \Sigma$  tal que  $\|g\|_{q_\alpha} < 1$  y  $\int_X f \cdot g dx > 1$ . De la demostración de (a) se deduce que existe entonces  $G \in \mathcal{B}$  tal que  $G(\alpha) = g$  y  $\|G\| \leq 1$  (desde luego, con  $p_0, p_1$  reemplazados allí por  $q_1, q_0$ ).

Sea  $F \in \mathcal{B}$  tal que  $F(\alpha) = f$ . Ent.  $h(z) = \int_X F(z) \cdot G(z) dx$  es holomorfa y acotada en el dominio común a  $F$  y  $G$ , y  $h(\alpha) > 1$ . [Que  $h(z)$  es holomorfa se comprueba razonando como sigue: sean  $F$  y  $G$  a valores en  $B$  y holomorfas en  $\Omega_0$ ;

entonces  $\int_X F(z) \cdot G(z) dx = \int_X \sum_n a_n (z-z_0)^n \cdot \sum_m b_m (z-z_0)^m dx =$   
 $= \sum_N (z-z_0)^N \cdot \int_X \sum_{n+m=N} a_n b_m dx$ , pues  $\sum \|a_n\|_{p_i} |z-z_0|^n < \infty$  y  $\sum \|b_m\|_{q_i} |z-z_0|^m < \infty$

implican  $\sum_N |z-z_0|^N \cdot \left( \sum_{m+n=N} \|a_n\|_{p_i} \cdot \|b_m\|_{q_i} \right) < \infty$  y por consiguiente

$h(z) = \int_X F(z) \cdot G(z) dx$  define una función holomorfa.]

Pero:  $|h(iy)| \leq \|F(iy)\|_{p_0} \cdot \|G(iy)\|_{q_0} \leq \|F\| \cdot \|G\| \leq \|F\|$ , y  $|h(1+iy)| \leq \|F\|$ ,

así que  $|h(z)| \leq \|F\|$  y por lo tanto  $\|F\| > 1$ . Esto implica que  $\|f\|_\alpha \geq 1$ , Q.E.D.

**TEOREMA GENERAL.** Sea  $B$  (resp.  $B'$ ) un espacio binormado con normas  $\|\cdot\|_0$  y  $\|\cdot\|_1$  (resp.  $\|\cdot\|'_0$  y  $\|\cdot\|'_1$ ) consistentes. Denotemos con  $\|\cdot\|_\alpha$  (resp.  $\|\cdot\|'_\alpha$ ) la norma- $\alpha$  de interpolación, para  $0 < \alpha < 1$ .

Sea una transformación lineal  $T: B \rightarrow B'$ , continua como transformación de  $B_1$  en  $B'_1$  y como transformación de  $B_0$  en  $B'_0$ . Entonces,  $T$  es continua como transformación de  $B_\alpha$  en  $B'_\alpha$ , y  $\|T\|_\alpha \leq \|T\|_0^{1-\alpha} \|T\|_1^\alpha$ .

Antes de la demostración, mencionaremos que del teorema 1 y éste se obtiene

el siguiente resultado:

TEOREMA DE M. RIESZ Y THORIN. Sean  $(X, dx)$  e  $(Y, dy)$  espacios de medida  $\sigma$ -finitos  $B \subset L^{p_0} \cap L^{p_1}$ ,  $B' \subset L^{p'_0} \cap L^{p'_1}$ , con  $\Sigma_X \subset B$ ,  $\Sigma_Y \subset B'$ . Supongamos que  $T$  es un operador lineal de  $B$  en  $B'$ , continuo como transformación de  $B_j$  en  $B'_j$ ,  $j=0,1$ . Entonces  $T$  es continuo también como operador de  $B_\alpha$  en  $B'_\alpha$ , donde  $B_\alpha$  es  $B$  normado

con  $\|\cdot\|_{p_\alpha}$ ,  $\frac{1}{p_\alpha} = \frac{1-\alpha}{p_0} + \frac{\alpha}{p_1}$  y  $B'_\alpha$  es  $B'$  normado con  $\|\cdot\|_{p'_\alpha}$ ,  $\frac{1}{p'_\alpha} = \frac{1-\alpha}{p'_0} + \frac{\alpha}{p'_1}$ .

3. Demostración del teorema general. La aplicación  $T: B_j \rightarrow B'_j$  ( $j=0,1$ ) puede extenderse a una aplicación  $T: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$  (esperamos que la notación no precise a clarificación). En efecto, definamos  $(TF)(z) = T(F(z))$ . Entonces, para  $\mu \in B_0^* \cup B_1^*$  es,  $T^*\mu \in B_0^* \cup B_1^*$  y  $\langle (TF)(z), \mu \rangle = \langle T(F(z)), \mu \rangle = \langle F(z), T^*\mu \rangle$  así que  $TF$  es una función holomorfa y acotada con respecto a ambas normas  $\|\cdot\|'_0$  y  $\|\cdot\|'_1$ . Ahora, sea  $f \in B$  tal que  $\|f\|_\alpha = 1$ . Entonces, existe  $F \in \mathcal{B}$  tal que  $F(\alpha) = f$  y  $\|F\| < 1 + \epsilon$ , y, por lo tanto:  $\|Tf\|'_\alpha \leq \inf\{\|G\|'_1 : G(\alpha) = Tf\} \leq \|T(e^{a(z-\alpha)} \cdot F(z))\|'_1$ ; la función entre barras está en  $\mathcal{B}'$  y vale  $Tf$  en  $z = \alpha$ , así que esto último es menor o igual que

$$\begin{aligned} & \sup_y \{e^{-a\alpha} \cdot \|TF(iy)\|'_0, e^{a(1-\alpha)} \|TF(1+iy)\|'_1\} \leq \\ & \leq \sup_y \{e^{-a\alpha} \cdot \|T\|_0 \cdot \|F(iy)\|_0, e^{a(1-\alpha)} \cdot \|T\|_1 \cdot \|F(1+iy)\|_1\} \leq \\ & \leq \sup_y \{e^{-a\alpha} \cdot \|T\|_0 \cdot \|F\|, e^{a(1-\alpha)} \cdot \|T\|_1 \cdot \|F\|\}. \end{aligned}$$

Luego,  $\|Tf\|'_\alpha \leq \|F\| \cdot \{e^{-a\alpha} \|T\|_0 \vee e^{a(1-\alpha)} \|T\|_1\}$ . Eligiendo ahora  $e^a = \frac{\|T\|_0}{\|T\|_1}$ , tendremos  $\|Tf\|'_\alpha \leq (1+\epsilon) \cdot \|T\|_0^{1-\alpha} \cdot \|T\|_1^\alpha$ , así que  $\|Tf\|'_\alpha \leq \|T\|_0^{1-\alpha} \cdot \|T\|_1^\alpha$ .

Entonces, para todo  $f \in B$ ,  $\|Tf\|'_\alpha \leq \|T\|_0^{1-\alpha} \cdot \|T\|_1^\alpha \|f\|_\alpha$ , Q.E.D.

La misma demostración sirve para probar que  $\|f\|_\alpha \leq \|f\|_0^{1-\alpha} \cdot \|f\|_1^\alpha$ .

#### REFERENCIAS

- [1] CALDERON, A.P., *Intermediate spaces and interpolation*, Studia Math., XXIV, (1964), 113-190.
- [2] HILLE, E., and PHILLIPS, R.S., *Functional Analysis and semigroups*, A.M.S., Coll. Publ. XXXI, (1957).
- [3] KATZNELSON, Y., *An Introduction to Harmonic Analysis*, New York, (1968).
- [4] ZYGMUND, A., *Trigonometric Series, II*, Cambridge, (1959).

## CAPITULO IV

### APROXIMACIONES ASINTOTICAS

1. El propósito de este capítulo es presentar algunos elementos de la teoría de desarrollos asintóticos. No serán más que los necesarios para comprender el significado de expresiones como las siguientes:

$$(1) \quad \Gamma(z) \sim e^{-z} \cdot z^z \cdot \left(\frac{2\pi}{z}\right)^{1/2} \left[ 1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} + \dots \right], \quad |\arg z| < \pi - \delta;$$

$$(2) \quad J_\nu(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left[ \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(\nu, 2r)}{(2z)^{2r}} - \right. \\ \left. - \sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(\nu, 2r+1)}{(2z)^{2r+1}} \right],$$

$$\text{donde } \nu > -1, \quad (\nu, 0) = 1, \quad (\nu, r) = \frac{(4\nu^2 - 1) \cdot (4\nu^2 - 3^2) \cdot \dots \cdot (4\nu^2 - (2r-1)^2)}{2^{2r} \cdot r!},$$

$$|\arg z| < \pi - \delta;$$

$$(3) \quad P_n(\cos \vartheta) = \left(\frac{2}{n\pi \sin \vartheta}\right)^{1/2} \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\vartheta - \frac{\pi}{4}\right] + O(n^{-3/2}),$$

$$0 < \epsilon \leq \vartheta \leq \pi - \epsilon.$$

(1), (2) y (3) son desarrollos asintóticos que reflejan, respectivamente, el comportamiento de la función gamma para valores grandes de la variable independiente, el de la función de Bessel,  $J_\nu$ , de primera clase y orden  $\nu$ , también para valores grandes de la variable independiente, y el de los polinomios de Legendre,  $P_n$ , para valores grandes del parámetro  $n$ . Vamos, ahora, a las definiciones primeras.

2. Ante todo, convengamos en una notación que es muy útil en todo este asunto. Si  $f$  y  $g$  son funciones definidas en  $R$  (una región del plano complejo), escribiremos  $f=O(g)$  si  $|f(z)| \leq A \cdot |g(z)|$  para todo  $z \in R$ , donde  $A$  es una constante. Si  $z_0$  es un punto de acumulación de  $R$ , finito o no, escribiremos  $f=o(g)$  para  $z \rightarrow z_0$  si, para todo  $\epsilon > 0$ , existe un entorno  $U$  de  $z_0$  tal que  $|f(z)| \leq \epsilon |g(z)|$  para todo  $z \in U \cap R$ . Por último,  $f=O(g)$  para  $z \rightarrow z_0$  significará que la acotación de  $|f|$  por  $|g|$  vale en un entorno de  $z_0$ .

En los casos (1) y (2) mencionados en el párrafo anterior, la región  $R$  es un sector del plano complejo, con vértice cero, y  $z_0 = \infty$ .

Diremos que una sucesión  $\{\varphi_n(z): n=1,2,3,\dots\}$  de funciones es asintótica si, para todo  $n$ , es  $\varphi_n = o(\varphi_{n-1})$  para  $z \rightarrow z_0$ ,  $z \in R$ . Naturalmente, estamos suponiendo que  $z_0 \in R$ . En tal situación, definimos

$$f(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(z) \quad \text{para } z \rightarrow z_0$$

(cosa que leemos "f(z) es asintóticamente igual a la serie tal"). Si, para todo

$m \geq 1$ , se verifica:  $f(z) - \sum_{j=1}^m a_j \varphi_j(z) = o(\varphi_m)$ ,  $z \rightarrow z_0$ .

Si tal es el caso, resulta  $f - \sum_{j=1}^{m-1} a_j \varphi_j = O(\varphi_m)$  para  $z \rightarrow z_0$ . Recíprocamente, si esto último vale para todo  $m \geq 1$ , basta observar que  $O(\varphi_m) =$

$= o(\varphi_{m-1})$  para sacar como consecuencia la condición original. Además, como

$$f - \sum_{j=1}^{m-1} a_j \varphi_j = O(\varphi_m), \quad m \geq 1, \quad z \rightarrow z_0, \quad \text{es equivalente a}$$

$f - \sum_{j=1}^m a_j \varphi_j = O(\varphi_m)$ ,  $z \rightarrow z_0$ , resulta que en la definición original puede usarse tanto  $O$  como  $o$ .

Los casos que se presentarán en este capítulo corresponden a  $z_0 = 0$  o  $z_0 = \infty$ , y en ellos,  $R$  será un sector del plano complejo, con vértice en el origen, o un intervalo con extremo cero, o el conjunto de los números naturales. En dichos casos, además, fuera de un entorno cualquiera  $U$  de  $z_0$  y siendo  $C_{U,m}$  una constante adecuada, se verificará que

$$C_{U,m} |\varphi_m| \geq |\varphi_{m-1}| \quad \text{si } z \text{ se mantiene en un entorno fijo } V,$$

de modo que en la  $O$  de la definición no será necesario aclarar  $z \rightarrow z_0$ , pues con un eventual cambio de las constantes que aparecen en la  $O$  las estimaciones serán válidas en un entorno fijo.

Si dos funciones son desarrollables asintóticamente con respecto a una misma sucesión, entonces la suma de desarrollos es desarrollo de la suma, y multiplicando un desarrollo de  $f$  por una constante  $c$  se obtiene un desarrollo de  $cf$ .

Si suponemos además, como es usual, que ninguna  $\varphi_j$  se anula idénticamente en un entorno de  $z_0$ , entonces el desarrollo de una función es único. En efecto,

en caso contrario la función cero tendría un desarrollo no trivial, mientras que de la definición y la relación  $\varphi_n = \sigma(\varphi_{n-1})$  se deduce que esto no es posible. Sin embargo, dos funciones pueden tener un mismo desarrollo. Por ejemplo,  $z^{-1}$  y  $z^{-1} + e^{-z}$ , en  $-\pi/4 < \arg z < \pi/4$  tienen el mismo desarrollo  $1/z$  en  $z_0 = \infty$  respecto a la sucesión asintótica  $\varphi_j(z) = z^{-j}$ .

Cuando  $z_0 = 0$ ,  $\{z^{r+sn} : s > 0, r \text{ real}, n = 0, 1, 2, \dots\}$  define una sucesión asintótica. Si  $f(z)$  es holomorfa en el origen, su desarrollo de Taylor coincide con su desarrollo asintótico con respecto a la sucesión cuyos parámetros son  $s=1, r=0$ .

3. Hay diversos métodos para obtener desarrollos asintóticos: el método de la fase estacionaria, el de integración por partes, el de Laplace, etc... En esta presentación nos concentraremos en sólo dos de ellos: el método de máxima pendiente (en inglés, "steepest descent"), y el del punto de ensilladura (en inglés, "saddle-point").

Antes, probaremos un lema de singular importancia, debido a G.N. Watson, que es útil para calcular desarrollos de funciones expresables en forma de una transformada de Laplace, por ejemplo, la función gamma.

Lema de Watson. Sea  $f(t) \sim \sum_{r=1}^{\infty} a_r t^{r/m-1}$  para  $t \rightarrow 0$ ,  $t$  real y  $m > 0$ , tal que en  $(\epsilon, \infty)$ ,  $|f(t)| \leq Me^{bt}$ , con  $b$  fijo para cada  $\epsilon > 0$ . Entonces

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f(t) dt \sim \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_r}{p^{r/m}} \cdot \Gamma\left(\frac{r}{m}\right),$$

para  $p \rightarrow \infty$ ,  $|\arg pl| \leq \frac{\pi}{2} - \delta < \frac{\pi}{2}$ ,  $\epsilon > 0$ .

(Aquí,  $\delta$  es positivo y fijo, pero por lo demás arbitrario.)

Demostración. El significado del lema es, simplemente, que bajo las hipótesis apuntadas el desarrollo de  $\mathcal{L}(f)$  en  $\infty$  se obtiene transformando por Laplace al desarrollo de  $f$  en 0 término a término. Para probarlo, observemos que, como

$$f(t) - \sum_1^N a_r t^{r/m-1} = O(t^{(N+1)/m-1}) \text{ para } t \text{ pequeño,}$$

será entonces

$$(4) \quad f(t) - \sum_1^N a_r t^{r/m-1} = O(1) \cdot t^{(N+1)/m-1} \cdot e^{bt} = R_N(t) \text{ para cierto } b \text{ y}$$

todo  $t > 0$ .

$$(5') \Gamma(p) e^p p^{-p} = \int_0^1 (x_1 e^{1-x_1})^p dx_1 + \int_1^\infty (x_2 e^{1-x_2})^p dx_2 =$$

(ahora ponemos  $e^{-t^2} = x_i e^{1-x_i}$ )

$$= \int_\infty^0 e^{-t^2} p \frac{dx_1}{dt} dt + \int_0^\infty e^{-t^2} p \frac{dx_2}{dt} dt .$$

Por lo tanto ,

$$(6) \quad \frac{\Gamma(p) \cdot e^p}{p^p} = \int_0^\infty e^{-t^2} p \left( \frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right) dt$$

vale para todo  $p$  con parte real positiva. Aquí,  $0 \leq x_1 \leq 1$  ,  $1 \leq x_2 < \infty$  ,

$$t^2 = x_1 - 1 - \ln x_1 = x_2 - 1 - \ln x_2 .$$

Ahora bien , si  $x-1 = \xi$  , tendremos

$$w^2 = x - 1 - \ln x = \xi - \ln(1+\xi) = \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} + \dots = \frac{\xi^2}{2} \cdot (1 - \frac{2}{3}\xi + \dots) .$$

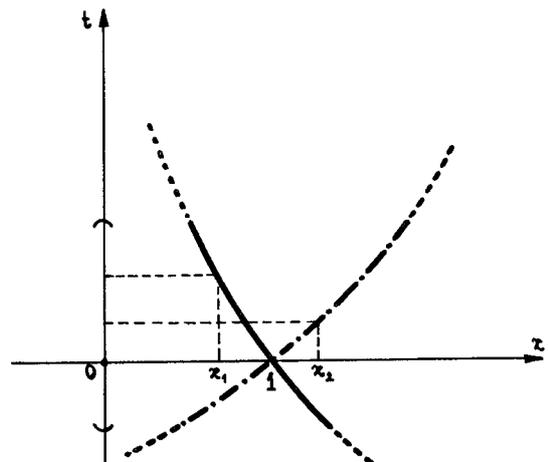
Luego , en un entorno de  $\xi=0$  valdrá

$$(7) \quad w^2 = \left[ \frac{\xi}{\sqrt{2}} (1 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots) \right]^2 = \left[ F(\xi) \right]^2 ,$$

de modo que  $F(\xi) = \pm w$  y , despejando  $\xi$  ,  $\xi_{1,2} = G(\pm w)$  . (Obsérvese que  $F'(0) = 2^{-1/2}$ ) . Para  $w=t > 0$  , pues , será  $x_{1,2} = 1 + G(\pm t)$  .

Si  $G(w) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$  en un entorno de  $w=0$  , resulta entonces

$$(8) \quad \begin{cases} x_1 = 1 - b_1 t + b_2 t^2 - \dots \\ x_2 = 1 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots \end{cases} , b_1 > 0 .$$



Es decir,  $x_2$  es una función analítica de  $t$  en un entorno de  $t = 0$  , que

Por lo tanto

$$\mathcal{L}(f)(p) = \sum_1^N a_r p^{-r/m} \cdot \Gamma\left(\frac{r}{m}\right) + \mathcal{L}(R_N)(p).$$

Pero, si  $p = \xi + i\eta$ , es

$$|\mathcal{L}(R_N)(p)| \leq \int_0^\infty |R_N(t)| e^{-\xi t} dt = O(1) \cdot \int_0^\infty t^{(N+1-m)/m} \cdot e^{(b-\xi)t} dt.$$

Dado  $\delta > 0$ , si  $p$  es tal que  $|\arg p| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ , entonces para  $|p| > p_0$  es  $(\xi-b) \leq |p| \leq C \cdot (\xi-b)$ , donde  $C$  es una constante. Luego,

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(R_N)(p)| &= O(1) \cdot (\xi-b)^{-(N+1)/m} \cdot \int_0^\infty t^{(N+1-m)/m} \cdot e^{-t} dt = \frac{O(1) \cdot \Gamma\left(\frac{N+1}{m}\right)}{(\xi-b)^{(N+1)/m}} = \\ &= O(1) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{m}\right)}{p^{(N+1)/m}} = O\left(\frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{m}\right)}{p^{(N+1)/m}}\right), \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Corolario. Si  $g(t) \sim \sum_{r=0}^\infty b_r t^r$  para  $t \rightarrow 0$ , y  $|g(t)| \leq M e^{bt^m}$ ,  $m > 0$  en  $(0, \infty)$ , entonces

$$(5) \quad \int_0^\infty e^{-pt^m} \cdot g(t) dt \sim \sum_{r=0}^\infty \frac{b_r}{p^{(r+1)/m}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{m}\right)}{m}, \quad \text{para } p \rightarrow \infty \text{ y } |\arg p| \leq \frac{\pi}{2} - \delta.$$

En efecto,  $g(\tau^{1/m}) \cdot \tau^{1/m} = f(\tau) \sim \sum_{r=0}^\infty b_r \cdot \tau^{(r+1)/m - 1}$ . Como

$$\int_0^\infty e^{-pt^m} \cdot g(t) dt = m^{-1} \cdot \int_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau) d\tau,$$

aplicando entonces el lema de Watson obtenemos (5), Q.E.D.

4. Comenzaremos con la función gamma. Sea  $p > 0$ . Entonces,

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} \cdot e^{-t} dt = \frac{\Gamma(p+1)}{p} = p^{-1} \cdot \int_0^\infty t^p e^{-t} dt =$$

(poniendo  $t=px$ )

$$= p^p \cdot \int_0^\infty x^p e^{-px} dx = e^{-p} \cdot p^p \int_0^\infty (xe^{-x+1})^p dx.$$

(El cambio de variable efectuado traslada el máximo del integrando de  $p$  a  $1$ , haciéndolo así independiente de  $p$ . La función  $xe^{1-x}$  crece de  $0$  a  $1$  en  $(0,1)$  y decrece de  $1$  a  $0$  en  $(1, \infty)$ .)

Luego,

coincide, para  $t > 0$ , con la definida por  $e^{-t^2} = x_2 e^{1-x_2}$  ( $x_2 > 1$ ),  
y otro tanto vale para  $x_1$  cuando  $x_1 < 1$ .

Como, para  $\text{Re } p \rightarrow \infty$ , la parte dominante en las integrales  $\int_0^1$  y  $\int_1^\infty$  en (5') es la que se obtiene al integrar en un entorno de 1, es razonable pensar que bastará conocer el comportamiento de  $x_1$  y  $x_2$  en un entorno de  $t=0$ . Pero esto es lo que precisamente dice el lema de Watson (véase (5)). Veamos:

De  $t^2 = \xi_2(t) - \ln(1 + \xi_2(t))$ , resulta

$$(9) \quad 2t = \xi_2' \left[ 1 - \frac{1}{1 + \xi_2(t)} \right] = \frac{\xi_2' \cdot \xi_2}{1 + \xi_2}, \quad \text{así que}$$

$$\begin{aligned} 2t + 2t \xi_2 &= 2t + \sum_{i=1}^{\infty} 2b_i t^{i+1} = \xi_2 \cdot \xi_2' = \left( \sum_{i=1}^{\infty} b_i t^i \right) \left( \sum_{i=1}^{\infty} i b_i t^{i-1} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cdot \left[ \sum_{h=0}^{n-1} b_{n-h} \cdot (h+1) b_{h+1} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cdot \left[ \sum_{h=0}^{n-1} b_{h+1} \cdot (n-h) b_{n-h} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \sum_{h=0}^{n-1} b_{n-h} \cdot b_{h+1} \end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$(10) \quad b_1^2 = 2, \quad \sum_{h=0}^{n-1} b_{n-h} \cdot b_{h+1} \cdot \frac{n+1}{2} = 2b_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

Así, por ejemplo,  $b_1 = \sqrt{2}$ ,  $b_2 = 2/3$ ,  $b_3 = \sqrt{2}/18$ , ...

Por otra parte,  $x_2' - x_1' = \sum_{i=0}^{\infty} 2b_{2i+1} \cdot (2i+1) t^{2i}$ , mientras que, en virtud de (9),  $x_2' = \xi_2' = 2t/(1 - 1/x_2)$  y, análogamente,  $x_1' = 2t/(1 - 1/x_1)$ . Estas dos últimas igualdades implican que, para  $t > \epsilon > 0$ ,  $x_i' = O(t)$ .

Entonces podemos usar (5) con  $m=2$ ,  $g \equiv x_2' - x_1'$ , y deducir de (b) :

$$(11) \quad \frac{\Gamma(p)}{e^{-p} \cdot p^p} \sim \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_{2i+1} \cdot (2i+1) \cdot \Gamma\left(\frac{2i+1}{2}\right)}{p^{(2i+1)/2}}.$$

O sea que, por ejemplo, como  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ , tendremos

$$(12) \quad \Gamma(p) \sim e^{-p} \cdot p^p \cdot \left[ \sqrt{\frac{2\pi}{p}} + O\left(\frac{1}{p^{3/2}}\right) \right],$$

así que, en particular,  $\Gamma(n) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{p}} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  (es decir, el cociente entre ambos

miembros tiende a uno) y de aquí resulta la fórmula de Stirling:

$$(13) \quad n! \sim 2\pi n \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Hemos demostrado la validez del desarrollo asintótico (11) para  $|\arg p| < \frac{\pi}{2} - \delta$ . Puede demostrarse que vale aun para  $|\arg p| < \pi - \delta$  (tal como aseveramos al comenzar este capítulo). Para completar esa demostración, el lector puede consultar [1], cap. IX, de la bibliografía que damos al final de este capítulo. La expresión asintótica es la misma para distintos valores positivos de  $\delta$ , pero cambian, naturalmente, las estimaciones de las "0" que aparecen en la definición de desarrollo asintótico.

#### 5. El método de máxima pendiente. Presentación.

Sea  $\varphi$  una función analítica en un recinto  $D$ , y no constante allí. Si, en un punto  $\xi \in D$ , tal que  $\varphi(\xi) \neq 0$ , se anulan  $\frac{\partial |\varphi|}{\partial x}$  y  $\frac{\partial |\varphi|}{\partial y}$  (para lo cual basta que  $|\varphi|$  tenga derivadas nulas en dos direcciones distintas), también se anularán las derivadas direccionales de  $\ln |\varphi| = \operatorname{Re}(\ln \varphi)$ . Como  $\ln |\varphi|$  es armónica no constante, debe pues tener en  $\xi$  un punto de ensilladura. Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann podemos concluir que también serán nulas las derivadas direccionales, en  $\xi$ , de la armónica conjugada de  $\ln |\varphi|$ . Por lo tanto

$$(14) \quad \frac{\varphi'}{\varphi}(\xi) = \frac{\partial}{\partial z} (\ln \varphi)(\xi) = 0.$$

Recíprocamente, si (14) se verifica,  $\ln |\varphi|$  tiene un punto de ensilladura, y  $\frac{\partial |\varphi|}{\partial x} = \frac{\partial |\varphi|}{\partial y} = 0$ , en  $\xi$ .

Sea  $\gamma$  un camino en  $D$  que pase por  $\xi$  y ortogonal a las curvas de nivel  $|\varphi|$ . Supongamos  $|\varphi| > 0$  sobre  $\gamma$ . Como las curvas de nivel de  $|\varphi|$  y de  $\ln |\varphi|$  coinciden,  $\gamma$  será entonces una curva de nivel de la armónica conjugada de  $\ln |\varphi|$ , a saber,  $\arg \varphi$ . Además,  $\gamma$  será de pendiente máxima para  $\ln |\varphi|$  y, por lo tanto, para  $|\varphi|$ . Como  $\arg \varphi = \text{cte.}$  en  $\gamma$ ,  $\varphi(z)/\varphi(\xi)$  será allí real y positiva.

Supongamos ahora que queremos estimar

$$(15) \quad \int_a^b \varphi^N(z) \cdot f(z) dz, \quad N > 0,$$

con  $\varphi(z)$  y  $f(z)$  analíticas en  $D$ , para  $N \rightarrow \infty$ , siendo  $a$  y  $b$  los extremos de

un arco  $\gamma$  contenido en  $D$ . Supongamos también que se pueda deformar el arco  $\gamma$  en  $D$ , lo cual no cambia la integral, de manera tal que se verifiquen las siguientes condiciones:

- i)  $\gamma$  pasa por un punto de ensilladura,  $\xi$ , de  $\ln |\varphi|$ ;
- ii)  $\gamma$  es de máxima pendiente para  $|\varphi|$ ;
- iii)  $|\varphi(z)|$  crece cuando  $z$  recorre  $\gamma$  de  $a$  a  $\xi$ , y decrece cuando  $z$  va de  $\xi$  a  $b$ .

Entonces, sobre  $\gamma$ , es  $\frac{\varphi(z)}{\varphi(\xi)} = \left| \frac{\varphi(z)}{\varphi(\xi)} \right|$ , y podemos efectuar el cambio de variables  $e^{-\tau^2} = \frac{\varphi(z)}{\varphi(\xi)}$ . Esto definirá una reparametrización de  $\gamma$  en la que la variable real  $\tau$  variará de  $-\tau_1$  a  $\tau_2$  cuando  $z$  varíe de  $a$  a  $b$ . Luego

$$(16) \quad \int_{\gamma} \varphi^N(z) f(z) dz = \varphi^N(\xi) \int_{-\tau_1}^{\tau_2} e^{-\tau^2 N} \left[ f(z(\tau)) \cdot \frac{dz}{d\tau} \right] d\tau$$

Si  $f(z(\tau)) \cdot \frac{dz}{d\tau}$  fuera analítica en un entorno de  $\tau = 0$ , sería posible aplicar el lema de Watson a la integral en el segundo miembro de (16) y estimar así (15) para valores grandes de  $N$ . La analiticidad de  $f(z(\tau)) \cdot \frac{dz}{d\tau}$  se deduce de

la de  $z=z(\tau)$ , pero ésta no siempre se logra con la reparametrización indicada. Como veremos en el párrafo 7, habrá que acudir a reparametrizaciones de la forma

ma  $\frac{\varphi(z)}{\varphi(\xi)} = e^{-\tau^m}$  para conseguir que  $z(\tau)$  sea analítica en un caso general.

Para buscar caminos  $\gamma$  que verifiquen las condiciones i), ii) y iii), se procede a hallar primero los ceros,  $\xi$ , de  $\varphi'(z)$ . Una vez hallados éstos, hay que seleccionar los caminos de máxima pendiente que pasen por ellos, sobre los cuales  $|\varphi|$  tenga máximos relativos en  $\xi$ , y ver si algunos de estos caminos es deformación del camino original dado.

Según E.T.Copson, cuando sólo un entorno del punto de ensilladura entra en consideración, el método se llama "del punto de ensilladura", y fue ya utilizado por B.Riemann. Cuando se usa todo un camino de máxima pendiente, el método se llama "de máxima pendiente", y fue utilizado por primera vez por P.Debye (1909 - 1910). Ambos métodos se basan en la misma idea y, excepto por un rasgo

de carácter secundario, son indistinguibles. Bien podrían ambos reunirse bajo la única denominación "método de máxima pendiente".

6. Apliquemos lo expuesto en el párrafo anterior a la obtención de un desarrollo para la recíproca de la función gamma.

Observemos que la fórmula

$$\frac{1}{j!} = \frac{1}{\Gamma(j+1)} = \text{Res}_{z=0} \frac{e^z}{z^{j+1}} = \int_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z^{j+1}} \cdot \frac{dz}{2\pi i}, \quad \mathcal{C} = \text{circunferencia}$$

de centro 0, admite ser generalizada para  $j$  no entero, a saber:

$$(17) \quad \frac{1}{\Gamma(p)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z^p} dz.$$

Esta es, precisamente, la fórmula de Hankel. En ella, el camino de integración puede describirse así:  $\{-\infty < z < -\epsilon\} \cup \{\epsilon \cdot e^{i\vartheta}\} \cup \{-\infty < z < -\epsilon\}$  recorrido en sentido contrario al de las agujas del reloj ([1]). Si  $p$  es real positivo y  $z = tp$ , obtenemos

$$\frac{1}{\Gamma(p)} = \frac{1}{2\pi i} \cdot p^{-p+1} \int_{\mathcal{C}} e^{pt} \cdot t^{-p} dt = \frac{p^{-p+1}}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \varphi(z)^p dz.$$

$\varphi(z) = e^z/z$  es tal que  $\varphi'(z)$  se anula solamente en  $z=1$ . Por lo tanto, 1 es el único punto de ensilladura de  $|\varphi|$ . Como  $\ln \varphi(z) = z - \ln z = u + iv - \ln \sqrt{u^2 + v^2} - i \text{arc tg } \frac{v}{u}$ , resulta que las curvas de nivel de  $\ln |\varphi(z)|$  estarán dadas por  $\text{Re}(\ln \varphi(z)) = u - \frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2) = c$ .

Las curvas de máxima pendiente que pasan por  $z = 1$  son :

$\text{Im}(\ln \varphi(z)) = v - \text{arc tg } \frac{v}{u} = \text{Im}(\ln \varphi(1)) = 0$ , o sea  $\frac{v}{u} = \text{tg } v$ . Una de ellas es  $v = 0$ , sobre la cual, en  $z = 1$ ,  $\ln |\varphi(z)|$  tiene un mínimo.

La otra solución es  $u = v/\text{tg } v$ . Cuando  $v \rightarrow \pi$ ,  $u \rightarrow -\infty$ , y cuando  $v \rightarrow -\pi$ ,  $u \rightarrow -\infty$ . Más aun, a lo largo de la curva  $u = v/\text{tg } v$ ,  $\ln |\varphi(z)|$  tiene un máximo en  $v = 0$ , es decir, en  $z = u = 1$ . Estamos entonces en la situación del párrafo precedente, pues la curva encontrada sirve de camino de integración en la fórmula de Hankel y es de pendiente máxima. Haciendo

$$e^{-\tau^2} = \frac{\varphi(z)}{\varphi(1)}, \quad \text{obtenemos}$$

$$(18) \quad z - \ln z = 1 - \tau^2, \quad -\infty < \tau < \infty \quad \text{en} \quad \text{Im}(z - \ln z) = 0.$$

Si  $z = 1 + \zeta$ , tenemos  $\zeta - \ln(1+\zeta) = -\tau^2 = (i\tau)^2$ . Ya vimos en el párrafo 4, (8), que esta ecuación es satisfecha por dos funciones  $\zeta(\tau)$ , analíticas en un entorno de cero. Corresponden a las dos elecciones de signo en la serie

$$z - 1 = \zeta = \sum_{j=1}^{\infty} b_j (\pm i\tau)^j \quad (\text{los } b_j \text{ son los de (8)}).$$

Para que, cuando  $\tau$  varía de  $-\infty$  a  $+\infty$ ,  $z$  recorra el camino en sentido contrario al de las agujas del reloj, debe elegirse aquel signo que a  $\tau > 0$  haga corresponder  $\text{Im}(z) > 0$ , o sea el signo  $+$  (pues  $b_1 > 0$ ). Entonces

$$(19) \quad \frac{1}{\Gamma(p)} = \frac{p^{-p+1}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{p(1-\tau^2)} \frac{dz}{d\tau} d\tau = \frac{p^{-p+1} e^p}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-ps^2} \left[ \frac{dz}{d\tau}(s) + \frac{dz}{d\tau}(-s) \right] ds,$$

$$\frac{dz}{d\tau}(s) + \frac{dz}{d\tau}(-s) = 2i \sum_{h=0}^{\infty} (2h+1) b_{2h+1} (-1)^h s^{2h}.$$

Aplicando el lema de Watson (véase (5)), obtenemos finalmente

$$(20) \quad \frac{1}{\Gamma(p)} \sim \frac{p^{1/2}}{2\pi} \cdot \left(\frac{e}{p}\right)^p \cdot \sum_{h=0}^{\infty} b_{2h+1} (2h+1) (-1)^h \Gamma\left(h + \frac{1}{2}\right) / p^h$$

válido en  $|\arg p| < \frac{\pi}{2} - \delta$ .

Puede demostrarse (rotando el camino de integración) que (20) vale, en realidad para  $|\arg p| < \pi - \delta$ . Por lo tanto,

$$\frac{1}{\Gamma(p)} \sim e^p p^{-p} \left(\frac{p}{2\pi}\right)^{1/2} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{12p} + \frac{1}{288p^2} - \dots \right\}.$$

Esta expresión asintótica de  $1/\Gamma(p)$  podría haberse obtenido también mediante división, usando la expresión asintótica (11) para  $\Gamma(p)$  (y recíprocamente), pero los cálculos de los coeficientes hubieran sido más extensos.

#### 7. El método de máxima pendiente. (Continuación.)

Consideremos, como en el párrafo 5, integrales de la forma

$$\int_{\gamma} \varphi^p(z) \cdot f(z) dz, \quad p \text{ real,}$$

donde el camino de integración  $\gamma$  verifica las condiciones i), ii) y iii) de di-

cho párrafo. Más precisamente, sea  $\gamma$  una mitad de un tal camino:  $(\xi, a)$  o  $(\xi, b)$ . Veremos aquí cómo puede ser parametrizado  $\gamma$  para poder aplicar el lema de Watson a la integral resultante.

Sea  $w(z) = \ln \varphi(z)$ , y sea

$$(21) \quad I(p) = \int_{\Gamma} e^{pw(z)} \cdot f(z) dz, \quad p > 0,$$

donde  $\Gamma$  es un arco por el que el descenso es más empinado ( $\text{Im} w(z) = \text{cte. sobre } \Gamma$ ) y, partiendo de  $z_0$ ,  $w'(z_0) = 0$ . Supongamos que  $w(z) = w(z_0) + (z - z_0)^m F(z)$ , con  $F(z_0) \neq 0$ . En un entorno de  $z_0$  estará entonces definida una función analítica  $G(z)$ , tal que  $G^m(z) = F(z)$  (en realidad, habrá  $m$  funciones tales, y serán de la forma  $e^{2\pi i h/m} \cdot G(z)$ ,  $h=0, 1, \dots, m-1$ ). De modo que  $\Delta w = w(z) - w(z_0) = [(z - z_0) G(z)]^m$ . Sea  $W = (z - z_0) G(z)$ , con lo que  $\Delta w = W^m$  y  $W'(z_0) = G(z_0) \neq 0$ . Entonces,  $z \rightarrow W$  establece una correspondencia biunívoca y analítica, con inversa analítica, entre un entorno de  $z = z_0$  y un entorno de  $W = 0$ . Dicha inversa puede escribirse así:

$$(22) \quad z = z_0 + \sum_{j=1}^{\infty} B_j W^j, \quad \text{con } B_1 \neq 0, \quad \text{en un entorno de } W=0.$$

Consideremos una curva de nivel de  $\text{Re } w(z)$  que pase por  $z_0$ . Sobre ella  $\text{Re}(w(z) - w(z_0)) = 0$ , de manera que, en el plano  $W$ , será  $\text{Re } W^m = \rho^m \cdot \cos m\vartheta = 0$  (si  $W = \rho e^{i\vartheta}$ ). Debe ser entonces  $\vartheta = \frac{2k+1}{2m} \pi$ . Las curvas de pendiente máxima están dadas por  $\text{Im}(\Delta w) = \text{Im}(W^m) = 0$ , es decir,  $\rho^m \sin m\vartheta = 0$ , o bien  $\vartheta = \frac{k\pi}{m}$ . Así que, en el plano  $W$ , las curvas de pendiente máxima de  $\text{Re}(w)$  que salen de cero son las semirrectas  $W = \rho e^{ik\pi/m}$ ,  $\rho > 0$ . En consecuencia,  $w(z) - w(z_0) = \text{Re}(w(z) - w(z_0)) = e^{ik\pi} \cdot \rho^m = (-1)^k \rho^m$  a lo largo de ellas. Luego, sobre las semirrectas que corresponden a  $k$  impar,  $\text{Re}(w(z))$  decrece al crecer  $\rho$ , de la "cumbre", en  $z_0$ , a los "valles", y son curvas que corresponden a las de descenso más empinado. En vista de (22), su ecuación en el plano  $z$  viene dada por

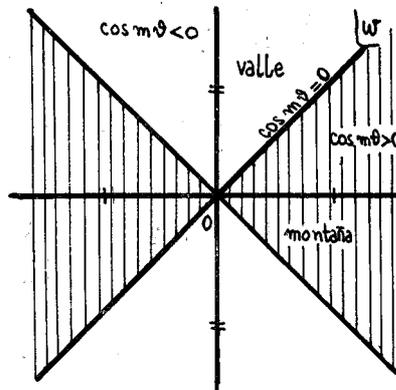
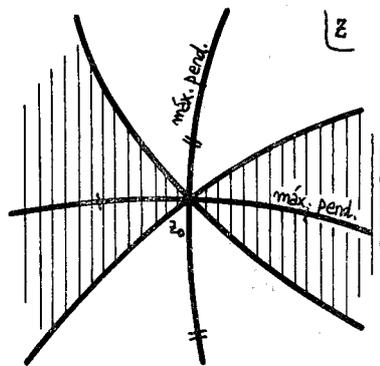
$$z = z_0 + \sum_{j=1}^{\infty} B_j (e^{k\pi i/m} \rho)^j, \quad k = 1, 3, \dots$$

Es decir, es posible parametrizar las curvas (descendentes) de pendiente máxima mediante un parámetro  $\rho$ , real y no negativo, de manera tal que  $z = z(\rho)$

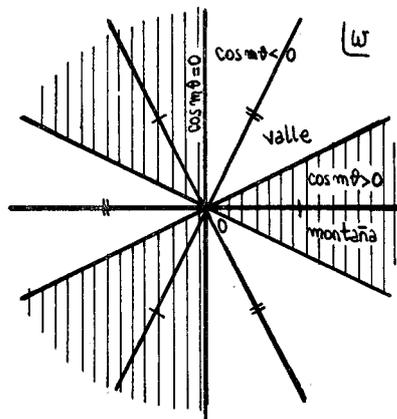
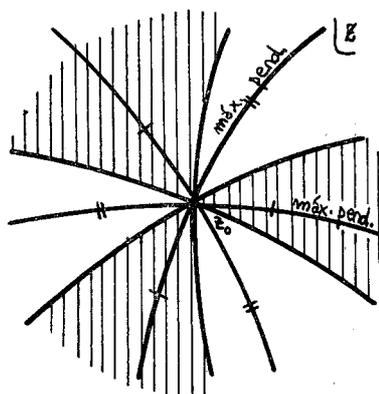
sea función analítica de  $\rho$  y que

$$w(z) - w(z_0) = -\rho^m, \text{ sobre } \Gamma,$$

(en el párrafo b hemos considerado ya un caso en el que  $m = 2$ ).



El caso  $m=2$



El caso  $m=3$

Lograda la parametrización de  $\Gamma$ , y asegurada la analiticidad de  $z(\rho)$ , puede aplicarse el lema de Watson a:

$$I(p) = e^{pw(z_0)} \int_0^\rho e^{-p\rho^m} \left[ f(z(\rho)) \frac{dz}{d\rho} \right] d\rho.$$

Si bien, en un principio, el  $N$  del párrafo 5 y el  $p$  de éste son reales positivos, la aplicación del lema de Watson asegura finalmente que estos parámetros (que se llaman  $z$  en las fórmulas (1) y (2)) puedan tomar valores complejos.

### 8. Los desarrollos de las funciones de Bessel.

Sea  $\nu > -1$ , y sea  $J_\nu$  la función de Bessel de orden  $\nu$ :

$$(23) \quad J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2/4)^n}{n! \Gamma(n+\nu+1)} =$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-x^2}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z^{n+\nu+1}} dz.$$

(La segunda igualdad se obtiene usando la fórmula de Hankel.)

Si  $x > 0$ , entonces

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{x}{2z}\right)^\nu \cdot \frac{e^z}{z} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-x^2}{4z}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \right] dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{x}{2z}\right)^\nu \cdot e^{z-x^2/4z} \cdot \frac{dz}{z} =$$

(tomamos  $\xi = 2z/x$ )

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \xi^{-\nu} \cdot e^{(x/2)(\xi-1/\xi)} \cdot \frac{d\xi}{\xi} = \quad (\text{tomamos } \xi = e^t)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_S e^{-t\nu+x \operatorname{senh} t} dt.$$

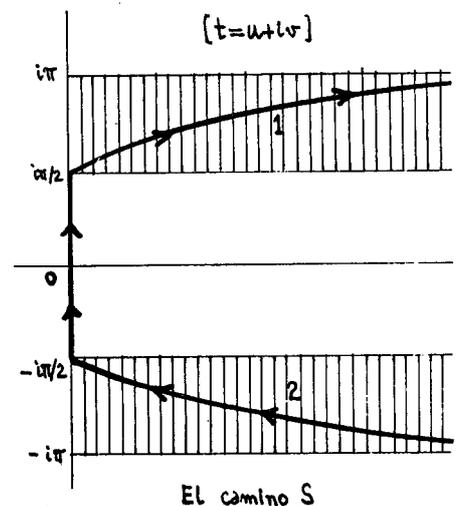
El camino de integración, en la fórmula de Hankel, es cualquiera de la forma  $\operatorname{Im}(z) = -|a|$ , seguido de semicírculo con centro en el origen y radio  $|a|$  en  $\operatorname{Re}(z) > 0$ , seguido de  $\operatorname{Im}(z) = |a|$ , como se ve usando el teorema de Cauchy. Así, tanto  $z$  como  $\xi$  pueden considerarse recorriendo un mismo camino  $\mathcal{C}$  de la forma descripta.

Sin embargo,  $t$  debe recorrer  $s$  y, como  $e^t = \xi$ , si  $a=1$ ,  $S$  deberá contener el segmento  $[-i\pi/2, i\pi/2]$ .

Además,  $\operatorname{Im}(\xi) = |\xi| \cdot \operatorname{sen} \operatorname{Im}(t)$ , así que, si  $\operatorname{Im}(\xi) = \text{cte.}$  con  $|\xi| \rightarrow \infty$ , necesariamente  $\operatorname{Im}(t)$  deberá pasar de  $\pi/2$  a  $\pi$ , o de  $-\pi/2$  a  $-\pi$ . Luego  $S$  es de la forma que indica la figura.

De la expresión

$$(24) \quad J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_S e^{-t\nu+x \operatorname{senh} t} dt, \quad x > 0,$$



se deduce, teniendo en cuenta la identidad

$$\operatorname{senh}(u+iv) = \operatorname{senh} u \cdot \cos v + i \cosh u \cdot \operatorname{sen} v ,$$

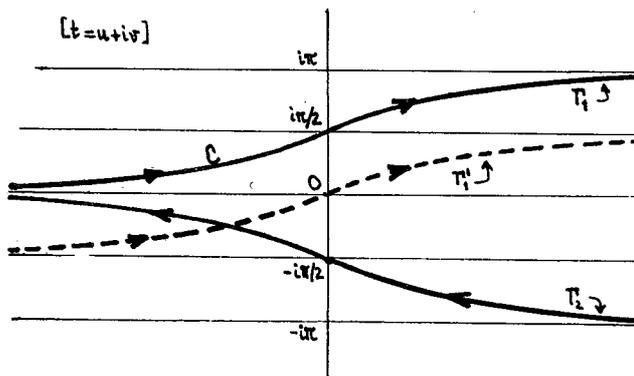
que será suficiente que  $S$  tienda a  $\infty$ , en ambas ramas, manteniéndose su parte imaginaria lejos de  $i\pi/2$  y de  $-i\pi/2$ , respectivamente, pero dentro de la zona rayada. Fijado  $S$ , como ambos miembros definen funciones analíticas en  $\operatorname{Re}(x) > 0$ , la fórmula (24) vale en esa región. Ahora,  $x$  juega el papel que  $p$  hacía en la fórmula (21), y  $w(z) = \operatorname{senh} z$ ,  $f(z) = e^{-\nu z}$ . Observando que  $w'(z) = \cosh z$  se anula en  $z = (k + 1/2)\pi i$ , se ve que  $S$  pasa por dos puntos de ensilladura de  $\operatorname{Re}(w)$ , a saber,  $i\pi/2$  y  $-i\pi/2$ . Las curvas de nivel vienen dadas aquí por  $\operatorname{Re} w = \operatorname{senh} u \cdot \cos v = \text{cte.}$ , mientras que las de máxima pendiente que pasan por  $i\pi/2$  y  $-i\pi/2$ , a las que designaremos, respectivamente, con  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , están definidas por

$$(25) \begin{cases} \Gamma_1 : \operatorname{Im}(\operatorname{senh} t) = \cosh u \cdot \operatorname{sen} v = 1 \\ \Gamma_2 : \operatorname{Im}(\operatorname{senh} t) = \cosh u \cdot \operatorname{sen} v = -1 \end{cases}$$

Así que  $\Gamma_1$  puede ser considerada como la rama  $i$  de  $S$  en  $\operatorname{Re} t > 0$ . Supuestos los sentidos de recorrido

que muestra el gráfico, es fácil ver

que, llamando  $C$  al camino descrito por  $\{\operatorname{Re}(\Gamma_1) < 0\} \cup [i\pi/2, -i\pi/2] \cup \{\operatorname{Re}(\Gamma_2) < 0\}$ , vale la fórmula siguiente:



$$\int_C e^{-z\nu} \cdot e^x \operatorname{senh} z dz = 0, \quad \operatorname{Re} x > 0 .$$

Por lo tanto, si llamamos

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_1} e^x \operatorname{senh} t - \nu t dt, \quad H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_2} e^x \operatorname{senh} t - \nu t dt$$

(que son las funciones de Hankel de orden  $\nu$ ),

$$\text{tendremos : } \frac{H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)}{2} = J_\nu(x), \quad \operatorname{Re} x > 0 .$$

Consideremos  $H_\nu^{(1)}$ .

El cambio de variables  $t = \pi i/2 + \tau$  permite escribir:

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi i} \cdot \int_{\Gamma_1'} e^{ix \cosh \tau - \nu \tau - \nu \pi i/2} d\tau.$$

Sean, ahora,  $\Gamma_1'' = \Gamma_1' \cap \{\operatorname{Re}(\tau) > 0\}$ ,  $\Gamma_1''' = \Gamma_1' \cap \{\operatorname{Re}(\tau) < 0\}$ . Entonces,

$$\int_{\Gamma_1'''} e^{ix \cosh \tau - \nu \tau} d\tau = \int_{\Gamma_1''} e^{ix \cosh \tau + \nu \tau} d\tau$$

y por consiguiente,

$$(26) \quad H_\nu^{(1)}(x) = \frac{2 e^{-\nu \pi i/2}}{\pi i} \int_{\Gamma_1''} e^{ix \cosh \tau} \cdot \cosh \nu \tau d\tau.$$

Ahora bien:  $\operatorname{Re} w(\tau) = \operatorname{Re}(i \cosh \tau)$  tiene en el origen un punto de ensilladura, y  $\Gamma_1''$  es un camino de pendiente máxima, descendente desde cero, para  $\operatorname{Re} w(\tau)$ .

Su ecuación es  $\operatorname{Im}(i \cosh \tau) = \operatorname{Im}(i \cosh 0) = 1$ . Luego, la integral en (26) es de las consideradas en el párrafo 7. Además, el desarrollo de Taylor de  $\cosh \tau$  nos muestra que el valor de  $m$  (notación de párrafo 7) es, en este caso, 2. Así que parametrizaremos a  $\Gamma_1''$  en función de  $\rho > 0$  de la siguiente manera:

$$(27) \quad i \cosh \tau - i = -\rho^2,$$

con lo cual, poniendo

$$H(x) = \frac{\pi i}{2} \cdot e^{\nu \pi i/2} \cdot H_\nu^{(1)}(x),$$

tendremos

$$(27') \quad H(x) = \int_0^\infty e^{x(i-\rho^2)} \cdot \left( \cosh \nu \tau \cdot \frac{d\tau}{d\rho} \right) d\rho = \int_0^\infty e^{x(i-\rho^2)} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \frac{d(\sinh \nu \tau)}{d\rho} d\rho.$$

Pero  $\frac{d}{d\rho} \sinh \nu \tau$  crece a lo sumo como una potencia de  $\rho$ . En efecto, según (27),  $\cosh \tau \sim \rho^2$  y  $\sinh \tau = \sqrt{\cosh^2 \tau - 1} \sim \rho^2$ , sobre  $\Gamma_1''$ , así que  $e^{\pm \tau} = O(\rho^2)$  y  $\cosh \nu \tau = O(\rho^{2|\nu|})$  allí. Además, derivando (27) se ve que  $\frac{d\tau}{d\rho} = \frac{2i\rho}{\sinh \tau} = O\left(\frac{1}{\rho}\right)$ .

Por lo tanto,

$$\frac{d}{d\rho} \sinh \nu \tau = O(\rho^{2|\nu|-1})$$

y entonces la integral en (27') verifica las hipótesis del corolario del lema

de Watson.

Por lo tanto, demostraremos al final de este párrafo que  $\sinh \nu \tau$  es una función analítica de  $\sinh \frac{\tau}{2}$  de la forma siguiente:

$$(28) \quad \sinh \nu \tau = 2\nu \cdot \sinh \frac{\tau}{2} \left[ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(1/2-\nu)_r (1/2+\nu)_r (-4)^r}{(2r+1)!} \left( \sinh \frac{\tau}{2} \right)^{2r} \right],$$

donde  $(\alpha)_r = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+r-1)$ .

Ahora observemos que de la parametrización de  $\Gamma_1''$ ,  $\cosh \tau - 1 = i\rho^2$ , se deduce

$\sinh(\tau/2) = e^{i\pi/4} \rho/\sqrt{2}$ . Combinando esto con (28), pues, tendremos

$$\frac{1}{\nu} \cdot \frac{d}{d\rho} \sinh \nu \tau = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} + \sum_{r=1}^{\infty} A_{2r} \rho^{2r}, \quad \text{con } A_{2r} = \frac{e^{i\pi/4} (1/2-\nu)_r (1/2+\nu)_r (-2i)^r}{\sqrt{2} \cdot (2r)!}.$$

Aplicamos entonces (5) y obtenemos

$$H(x) = e^{ix} \int_0^{\infty} e^{-x\rho^2} \frac{d \sinh \nu \tau}{\nu d\rho} d\rho \sim e^{ix} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{2k} \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)}{x^{(2k+1)/2}}.$$

En consecuencia, para  $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \delta$ , será

$$(29) \quad H_{\nu}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot e^{i(z-\nu\pi/2 - \pi/4)} \cdot \left[ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(1/2-\nu)_r (1/2+\nu)_r}{r! (2iz)^r} \right].$$

Aquí se ha usado la fórmula de duplicación de Legendre para la función Gamma:

$$\Gamma(2k+1)/2 = \Gamma(2k) \cdot 2^{-2k+1} \cdot \sqrt{\pi}/\Gamma(k) = (2k)! \cdot 2^{-2k} \cdot \sqrt{\pi}/k!.$$

Las funciones de Hankel tienen un punto de ramificación en el origen. Sin embargo, puede demostrarse que la fórmula (29) vale aun para  $-\pi+\delta < \arg z < 2\pi-\delta$ .

El desarrollo asintótico de  $H_{\nu}^{(2)}(z)$  se obtiene en forma análoga (o usando la fórmula  $H_{\nu}^{(2)}(z) = -e^{\nu\pi i} \cdot H_{\nu}^{(1)}(ze^{\pi i})$ ), y resulta para  $-2\pi+\delta < \arg z < \pi-\delta$ ,

$$(30) \quad H_{\nu}^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z-\nu\pi/2-\pi/4)} \cdot \left[ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(1/2-\nu)_r (1/2+\nu)_r}{r! (-2iz)^r} \right].$$

Por fin, combinando (29) y (30) se obtiene (2), sin más que recordar la relación  $H_{\nu}^{(1)}(z) + H_{\nu}^{(2)}(z) = 2J_{\nu}(z)$ .

Concluiremos este párrafo con la prueba (que dejáramos pendiente) de que  $\sinh \nu \tau$

es función analítica de  $u = \sinh(\tau/2)$ .

De  $e^\tau = (e^{\tau/2})^2 = 1 + 2u \cdot e^{\tau/2}$ , obtenemos  $e^{\tau/2} = u \pm \sqrt{1+u^2}$ . Como  $\tau > 0$  implica  $u > 0$ , debemos elegir el signo positivo. Entonces

$$2 \sinh \nu \tau = (u + \sqrt{1+u^2})^{2\nu} - (-u + \sqrt{1+u^2})^{2\nu} = 2F(u),$$

donde  $F(u)$  es una función analítica en un entorno de  $u = 0$ . Sea  $g(u)$

Sea  $g(u) = (u + \sqrt{1+u^2})^{2\nu}$ . Resulta  $g'(u) = 2\nu g(u) / \sqrt{1+u^2}$  y

$g''(u) \cdot (1+u^2) = (2\nu)^2 \cdot g(u) - g'(u) \cdot u$ . Por su parte, la función  $(-u + \sqrt{1+u^2})^{2\nu}$

verifica las mismas relaciones, así que la función impar  $F$  satisface a

$$(31) \quad F'' \cdot (1+u^2) = (2\nu)^2 F - u \cdot F' ..$$

Ensayando  $F(u) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1} u^{2k+1}$ , en (31), obtenemos

$$(32) \quad B_{2k+1} [(2k+1)^2 - (2\nu)^2] = -B_{2k+3} (2k+3) (2k+2),$$

relación que determina los coeficientes del desarrollo de  $F$ .

Entonces,  $\sinh \nu \tau = F\left(\sinh \frac{\tau}{2}\right)$ , Q.E.D.

### 9. Fórmula del punto de ensilladura.

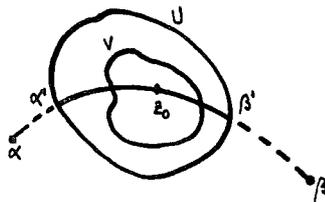
Consideremos otra vez la integral  $I(p)$  del párrafo 7:

$$(33) \quad \int_{\alpha}^{\beta} e^{pW(z)} \cdot f(z) \cdot dz, \quad w'(z_0) = 0, \quad p > 0, \quad \alpha \text{ y } \beta \text{ números complejos,}$$

donde el camino que une  $\alpha$  con  $\beta$  pasa por el punto  $z_0$  y está en una región donde  $w$  y  $f$  son analíticas.  $\Gamma$  no es necesariamente de máxima pendiente, pero existe un entorno  $U$  de  $z_0$  tal que  $\Gamma \cap U$  sí lo es. Supongamos, además, que vale

$$(34) \quad \max_{z \in \Gamma \cap U} \operatorname{Re} w(z) < \operatorname{Re} w(z_0).$$

En esta situación, tendremos



$$(35) \quad \left| \int_{\Gamma \cap U} e^{pW(z)} \cdot f(z) dz \right| \leq \left| e^{pW(z_0)} \right| \cdot \int_{\Gamma \cap U} e^{p \cdot \operatorname{Re}[w(z) - w(z_0)]} \cdot |f(z)| |dz| \leq M \cdot \left| e^{pW(z_0)} \right| \cdot e^{-\epsilon p},$$

para cierto  $\epsilon > 0$ .

Para hacer las cosas más sencillas, agregaremos la hipótesis  $w''(z_0) \neq 0$ , y demostraremos entonces la siguiente fórmula del punto de ensilladura:

$$(36) \quad I(p) \sim e^{pW(z_0)} \cdot \left[ f(z_0) \cdot \left( 2\pi / (-p \cdot w''(z_0)) \right)^{1/2} + O\left(p^{-3/2}\right) \right],$$

para una adecuada elección del signo de la raíz cuadrada.

De (35) se deduce entonces el siguiente hecho: vale el desarrollo asintótico (36) si y sólo si éste es el desarrollo asintótico de la integral (33) con  $\alpha, \beta$  remplazados por  $\alpha', \beta'$  (ver figura).  $U$  puede ser remplazado por cualquier entorno  $V$  contenido en él, pues, por ser  $\Gamma \cap U$  de máxima pendiente, también valdrá (34) (y por lo tanto (35)) en  $\Gamma-V$ .

Ahora bien, sobre  $\Gamma$ , es

$$\Delta w = \frac{w''(z_0)}{2} \cdot (z-z_0)^2 [1 + A_1(z-z_0) + \dots] = -\rho^2,$$

así que, en cierto  $V \subseteq U$ , será

$$\rho = \sqrt{\frac{-w''(z_0)}{2}} \cdot (z-z_0) [1 + B_1(z-z_0) + \dots].$$

La elección del signo de la raíz da el sentido de recorrido del arco  $\Gamma \cap V$ . Fijemos el signo de manera que el arco sea recorrido de  $\alpha'$  a  $\beta'$ , y considere - mos ahora la integral

$$(37) \quad \int_{-\delta}^{\delta} e^{p[w(z_0) - \rho^2]} \cdot \left\{ f(z(\rho)) \frac{dz}{d\rho} \right\} d\rho = e^{pw(z_0)} \cdot J(p),$$

la cual, por lo que hemos dicho, deberá tener el mismo desarrollo asintótico que  $I(p)$ . Sea, además,

$$f(z(\rho)) \frac{dz}{d\rho} = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots$$

Entonces, del lema de Watson obtenemos:

$$(38) \quad J(p) = 2 \cdot \int_0^{\delta} e^{-p\rho^2} (a_0 + a_2\rho^2 + a_4\rho^4 + \dots) d\rho \sim \frac{a_0 \Gamma(1/2)}{p^{1/2}} + O\left(\frac{1}{p^{3/2}}\right),$$

$|\arg p| < \pi - \eta$ .

Como  $a_0 = \sqrt{\frac{-2}{w''(z_0)}} \cdot f(z_0)$ , resulta así (36).

#### 10. Desarrollo de los polinomios de Legendre.

Sea  $-1 < x < 1$ , y sea  $P_n(x)$  el  $n$ -ésimo polinomio de Legendre, definido por la fórmula de Schläfli:

$$(39) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1} \cdot \pi i} \int_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz ,$$

en la que C es una circunferencia, recorrida en sentido positivo, con centro en  $x = \cos \vartheta$ ,  $0 < \vartheta < \pi$ . Podemos suponer que C se ha deformado hasta ser una curva que pasa por -1 y +1 y es simétrica con respecto al eje real. Como el integrando de (39) verifica  $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$ , vemos que

$$(40) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot \pi} \cdot \text{Im} \int_{\Gamma} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz ,$$

donde  $\Gamma = C \cap \{\text{Im } z > 0\}$  es recorrida de 1 a -1.

La integral precedente es de la forma (33), con  $w(z) = \ln \frac{z^2-1}{z-x}$ ,  $P=n$  y  $f(z) = 1/(z-x)$ .

Ahora bien,  $w'(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-\cos \vartheta}$ , de manera que  $w'(z) = 0$  si y sólo

si  $z^2 - 2(\cos \vartheta)z + 1 = 0$ , ecuación ésta cuyas únicas soluciones son  $e^{\pm i\vartheta}$ .

Además, en estos puntos es  $w''(z) = 2/(z^2-1)$  y, en consecuencia,  $w''(e^{i\vartheta}) = \frac{e^{-i\vartheta}}{i \sin \vartheta}$ .

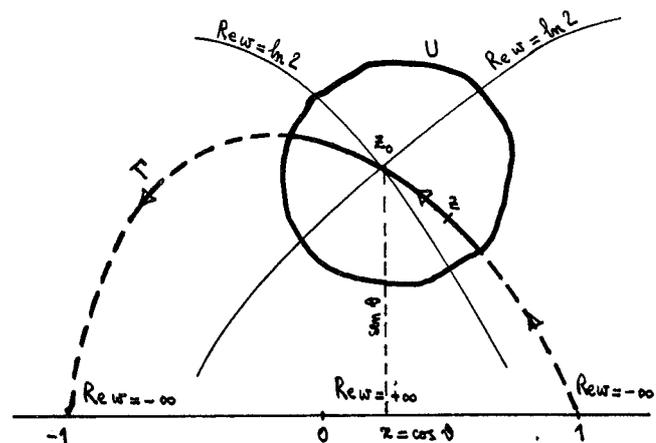
Por otra parte, tenemos:  $\text{Re } w(e^{i\vartheta}) = \text{Re } w(e^{-i\vartheta}) = \ln 2$ ,  $\text{Re } w(1) = \text{Re } w(-1) = -\infty$ ,  $\text{Re } w(x) = +\infty$ .

Luego, -1 y 1 se encuentran en "valles" y  $e^{i\vartheta}$  es un punto de mayor nivel, para  $\text{Re } w(z)$ , que -1 y 1. Podremos entonces encontrar un camino  $\Gamma$  que, en un entorno U de  $e^{i\vartheta}$ , sea de pendiente máxima, y tal que, fuera de U pero sobre  $\Gamma$ , se verifique  $\text{Re } w(z) < \ln 2$ .

Falta solamente determinar el signo de la raíz cuadrada en la fórmula del punto de ensilladura. Necesitamos que  $\rho$  vaya de menor a mayor cuando  $\Gamma$  sea recorrido de +1 a -1.

Se tiene :

$$\left(-1/w''(z_0)\right)^{1/2} = \pm e^{i(\vartheta+3\pi/2)/2} \sin^{1/2} \vartheta$$



Por otro lado, como

$$P_n(z) = \sum_{r=0}^h \frac{(-1)^r (2n-2r)!}{2^n \cdot r! (n-r)! (n-2r)!} \cdot z^{n-2r}$$

(con  $h=n/2$  o  $h=(n-1)/2$  según  $n$  sea par o impar), vemos que  $P_n$  es siempre par o impar, por lo que podemos suponer, para nuestra aproximación asintótica, que  $\vartheta \in (0, \pi/2)$ . Entonces, en la raíz precedente deberá ser  $\sqrt{\text{sen } \vartheta} > 0$ , y la exponencial se encontrará en el 2º cuadrante si elegimos el signo +. Por lo tanto, si  $\rho$  pasa de - a +,  $z-z_0 = \rho \cdot [2/(-w''(z_0))]^{1/2} + \dots$ , pasará del 4º cuadrante al 2º (en un entorno de  $\rho=0$ ), y la elección del signo es, pues, la correcta. Luego

$$f(z) \cdot e^{nw(z_0)} = e^{in\vartheta} \cdot 2^n / i \cdot \text{sen } \vartheta, \text{ y}$$

$$\frac{1}{2^n \pi} \int_{\Gamma} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz = \frac{e^{in\vartheta}}{i\pi \text{sen } \vartheta} \cdot e^{i(\vartheta+3\pi/2)/2} \sqrt{\text{sen } \vartheta} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

Finalmente tenemos, para  $0 \leq x = \cos \vartheta < 1 - \epsilon$ :

$$(41) \quad P_n(x) = P_n(\cos \vartheta) = \left( \frac{2}{n\pi \text{sen } \vartheta} \right)^{1/2} \cdot \text{Im} e^{i[\vartheta(n+1/2) + \pi/4]} \cdot \left[ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] =$$

$$= \text{sen} [\vartheta(n+1/2) + \pi/4] \cdot \left( \frac{2}{n\pi \text{sen } \vartheta} \right)^{1/2} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

El punto  $-x$  se obtiene reemplazando  $\vartheta$  por  $\pi-\vartheta$ , y se ve fácilmente que en este caso también vale la expresión (41). También puede verificarse que, si  $x$  pertenece a un intervalo cerrado interior a  $(-1, 1)$ , los "0" que aparecen en (41) son uniformes en  $x$  (o en  $\vartheta \in (-\epsilon, \pi-\epsilon)$ ).

Queda así probado el desarrollo asintótico (3).

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] COPSON E.T., *An introduction to the theory of functions of a complex variable*, Oxford, (1935).
- [2] COPSON E.T. *Asymptotic expansions*, Cambridge, (1965).
- [3] DE BRUIJN, N.G., *Asymptotic methods in Analysis*, Amsterdam, (1958).
- [4] ERDELYI, A., *Asymptotic expansions*, New York, (1956).

## CAPITULO V

### BASES ORTONORMALES EN $L^p$

1. Usualmente, una sucesión  $\{x_n\}$  de elementos de un espacio de Banach separable  $X$  es llamada una base de  $X$  si a cada elemento  $x \in X$  puede asociársele una única sucesión  $\{a_n\}$  de escalares tal que  $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ . Adoptaremos aquí, en cambio, la definición que sigue. Sea  $1 < p < \infty$ , y sea  $q$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Llamaremos base ortonormal en  $L^p$  a todo sistema  $\{\varphi_n\}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), ortonormal y completo en  $L^2$ , que verifique además las siguientes propiedades: (a) para cada  $n$ ,  $\varphi_n \in L^p \cap L^q$ , y (b) para cada  $f \in L^p$ , existe una única sucesión numérica  $\{a_n\}$  tal que  $S_N f \rightarrow f$  ( $N \rightarrow \infty$ ) en  $L^p$ , donde  $S_N f = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n$ . (Suponemos dado un espacio de medida  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  con  $\mu(\Omega) < \infty$ . Sin pérdida de generalidad, puede tomarse  $\mu(\Omega) = 1$ . Las funciones  $\varphi_n$  antedichas son a valores reales.)

Merecen ser tenidas en cuenta las siguientes observaciones (" $\langle a, b \rangle$ " denotará aquí al "producto escalar"  $\int_{\Omega} abd\mu$ , para  $a \in L^p$ ,  $b \in L^q$ ):

(1) Si  $\{\varphi_n\}$  es un sistema, ortonormal en  $L^2$ , de funciones de  $L^p \cap L^q$ , y

$$S_N f = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n \rightarrow f \text{ en } L^p, \text{ entonces } \langle S_N f, \varphi_n \rangle = a_n \text{ si } N \geq n,$$

así que  $\langle f, \varphi_n \rangle = a_n = a_n(f) = n$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $f$  con respecto al sistema  $\{\varphi_n\}$ . De aquí en adelante, pues,  $S_N f$  será igual a  $\sum_{n=1}^N a_n \varphi_n$ , donde  $a_n = \langle f, \varphi_n \rangle$ , para cada  $f$ .

(2) Sea  $f \in L^p$ . Como  $S_N f \rightarrow f$  ( $N \rightarrow \infty$ ) en  $L^p$ , deberá ser  $\|S_N f\|_p \leq K$ , donde  $K$  no depende de  $N$  (aunque pueda depender de  $f$ ). Esto significa que las  $S_N$ ,  $N = 1, 2, 3, \dots$  (que son transformaciones lineales continuas de  $L^p$  en  $L^p$ ), forman una familia puntualmente acotada en  $L^p$ . Luego, por el teorema de Banach-Steinhaus, estarán también uniformemente acotadas en  $L^p$ , es decir, será  $\|S_N\| \leq M$  para todo  $N$  y alguna constante real  $M$ . O sea que

(\*)  $\|S_N f\|_p \leq M \cdot \|f\|_p$  para todo  $N$  y toda  $f \in L^p$ , con  $M = M(p)$  independiente de  $N$  y de  $f$ .

(3) Si la propiedad (\*) de la observación precedente vale para un  $p \in (1, \infty)$ , entonces es válida también para  $q = \frac{p}{p-1}$ .

En efecto, se tiene, para cada  $g \in L^q$ ,

$$\|S_N g\|_q = \sup_{\|f\|_p \leq 1} |\langle f, S_N g \rangle| = \sup_{\|f\|_p \leq 1} |\langle S_N f, g \rangle| \leq \sup_{\|f\|_p \leq 1} \|S_N f\|_p \cdot \|g\|_q =$$

$= \|S_N\| \cdot \|g\|_q$ , donde se ha hecho uso, sucesivamente, de que la norma- $q$  de  $S_N g$  coincide con la de la funcional lineal  $f \rightarrow \langle f, S_N g \rangle$  de  $L^p$ ; de que  $\langle S_N f, g \rangle = \langle f, S_N g \rangle$  ya que ambos miembros son iguales a  $\sum_1^N a_n(f) \cdot a_n(g)$ ;

y, por fin, de que  $|\langle S_N f, g \rangle| \leq \|S_N f\|_p \cdot \|g\|_q$  por la desigualdad de Holder.

2. El primer teorema de este capítulo muestra que vale la recíproca de la observación (2) precedente.

TEOREMA 1. Sea  $\{\varphi_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) un sistema ortonormal y completo en  $L^2$  de funciones (a valores reales) en  $L^p \cap L^q$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Si vale

(\*)  $\|S_N f\|_p \leq M \cdot \|f\|_p$  para todo  $N$  y toda  $f \in L^p$ , con  $M = M(p)$  real e independiente de  $N$  y  $f$ , entonces  $\{\varphi_n\}$  es una base ortonormal en  $L^r$  para todo  $r \in [p \wedge q, p \vee q]$ .

("p $\wedge$ q" denota al ínfimo entre  $p$  y  $q$ ; "p $\vee$ q", al supremo.)

Demostración. De la observación (3) se deduce que podemos suponer  $p < q$  sin perder generalidad. En tal caso, tenemos  $r \in [p, q]$ . Además, supondremos  $p \neq 2$  (si  $p = 2$ , no hay nada que probar). Así que  $p < 2 < q$ ,  $p \leq r \leq q$ . Veamos, ante todo, que  $\varphi_n \in L^r$  para todo  $n$ , usando para esto la desigualdad de Holder: como  $r \in [p, q]$ , será  $r = ap + (1-a)q$ ,  $0 \leq a \leq 1$ , así que

$$\|\varphi_n\|_r^r = \int_{\Omega} |\varphi_n|^r d\mu = \int_{\Omega} |\varphi_n|^{ap} \cdot |\varphi_n|^{(1-a)q} d\mu \leq \left( \int_{\Omega} |\varphi_n|^p d\mu \right)^a \cdot \left( \int_{\Omega} |\varphi_n|^q d\mu \right)^{1-a} =$$

$$= \|\varphi_n\|_p^{ap} \cdot \|\varphi_n\|_q^{(1-a)q} < \infty.$$

Es decir,  $\varphi_n \in L^r$  para todo  $r \in [p, q]$ , así que en realidad  $\varphi_n \in L^r \cap L^{r^*}$

para todos esos  $r$ , donde  $r^* = \frac{r}{r-1}$ .

Consideremos separadamente los casos  $p \leq r < 2$  y  $2 < r \leq q$ .

Supongamos  $p \leq r < 2$ . Es sabido que entonces  $L^2 \subseteq L^r$  y que  $L^2$  es denso en  $L^r$ .

Sea  $f \in L^2$ .

Como  $\|S_N f - f\|_2 \rightarrow 0$  para  $N \rightarrow \infty$  y  $\|S_N f - f\|_r \leq \|S_N f - f\|_2$  ya que el espacio es de medida finita, resulta probada la tesis para las  $f \in L^2$ . Sea, ahora,  $f \in L^r - L^2$ . Entonces, dado  $\epsilon > 0$ , hay una  $g \in L^2$  tal que  $\|f-g\|_r < \epsilon$ , así que  $\|S_N f - f\|_r \leq \|S_N f - S_N g\|_r + \|S_N g - g\|_r + \|g - f\|_r \leq \|S_N(f-g)\|_r + \|S_N g - g\|_r + \epsilon < (M+2)\epsilon$  para  $N$  suficientemente grande. Luego,  $S_N f \rightarrow f$  en  $L^r$ . La observación (1) previa aporta la unicidad del desarrollo, y queda completa la demostración para estos  $r$ .

Ahora el caso  $2 < r \leq q$ . La validez de la tesis para estos valores de  $r$  resulta de que, si  $\{\varphi_n\}$  es una base ortonormal en  $L^r$ , entonces también lo es en  $L^{r^*}$ . Esto último es consecuencia de la siguiente proposición. Q.E.D.

Proposición. Sea  $1 < p < \infty$ . Si  $S_N f \rightarrow \tilde{f} \neq 0$  débilmente para cada  $f \in L^p, f \neq 0$ , entonces  $S_N g \rightarrow g$  en  $L^q$  para cada  $g \in L^q, (q = p^*)$ .

Demostración. Sea  $f \neq 0$  ( $f \in L^p$ ). Por hipótesis, como  $\langle S_N f, g \rangle = \langle f, S_N g \rangle$ , tenemos que  $\langle f, S_N g \rangle \rightarrow \langle \tilde{f}, g \rangle$  ( $N \rightarrow \infty$ ) para toda  $g \in L^q$ . Es decir, para cada  $g \in L^q$  las funcionales lineales en  $L^p$ ,  $f \rightarrow \langle f, S_N g \rangle$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , están puntualmente acotadas, así que del teorema de Banach-Steinhaus se deduce que  $\|S_N g\|_q \leq K$ , donde  $K$  no depende de  $N$ , para cada  $g \in L^q$ . Así que las transformaciones lineales  $g \rightarrow S_N g$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) de  $L^q$  en  $L^q$  están puntualmente acotadas, y otra aplicación de Banach - Steinhaus implica que  $\|S_N g\|_q \leq M \cdot \|g\|_q$ , donde  $M$  es independiente de  $N$  y de  $g \in L^q$ .

Por otra parte, veamos que la cápsula lineal de  $\{\varphi_n\}$  es densa en  $L^q$ . Si no fuera así, existiría una funcional lineal  $\psi \neq 0$  en  $L^q$  que se anularía en la clausura de la cápsula lineal de  $\{\varphi_n\}$ , según el teorema de Hahn - Banach. Es decir, habría una  $f \in L^p, f \neq 0$ , tal que  $\langle f, \varphi_n \rangle = 0$  para todo  $n$ , así que también sería  $S_N f = 0$  para todo  $N$ , y esto implicaría  $S_N f \rightarrow 0$  contradiciendo la hipótesis.

Ahora, sea por fin  $g \in L^q$ , y probemos que  $S_N g \rightarrow g$  en  $L^q$ . Según lo que acabamos de mostrar sobre la cápsula de las  $\{\varphi_n\}$ , existirá una sucesión  $\{\sigma_n\}$  de combinaciones lineales de las  $\varphi_n$  convergente a  $g$  en  $L^q$ . Puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que cada  $\sigma_n$  es combinación lineal de sólo los primeros  $n$  miembros de  $\{\varphi_n\}$ , es decir, que  $S_n(\sigma_n) = \sigma_n$ . Entonces, por una parte,  $\|S_N g - \sigma_n\|_q = \|S_N(g - \sigma_n)\|_q \leq M \cdot \|g - \sigma_n\|_q$  y, por otra,

$\|\sigma_N - g\|_q \rightarrow 0$  para  $N \rightarrow \infty$ . Así que

$\|S_N g - g\|_q \leq \|S_N g - \sigma_N\|_q + \|\sigma_N - g\|_q \leq (M + 1)\|\sigma_N - g\|_q \rightarrow 0$  ( $N \rightarrow \infty$ ) como se quería demostrar.

3. Nota 1. Si  $\{\varphi_n\}$  es una base en  $L^p$  ( $1 < p < \infty$ ), entonces  $\|\varphi_n\|_p \cdot \|\varphi_n\|_q = O(1)$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Esto se obtiene aplicando dos veces el teorema de Banach - Steinhaus. pero no lo haremos aquí.

Nota 2. La sola desigualdad (\*) no es suficiente para probar que el sistema en cuestión es una base, sino que necesitamos también la completitud en  $L^2$ . Pero ésta es una hipótesis cómoda, ya que en muchos casos se sabe que el sistema a examinar es completo en  $L^2$ . Además, al analizar un sistema ortonormal dado, uno trata de averiguar ante todo si es completo en  $L^2$ , pues, para espacios de Hilbert separables, este hecho equivale a que el sistema sea una base. Pero, al suponer válida (\*), lo que realmente importa es que la cápsula lineal es entonces densa en  $L^p$ , es decir, que  $\{\varphi_n\}$  es total en  $L^p$ . Esto es lo que se pone de relieve en el siguiente teorema.

TEOREMA 2. Sean  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  y  $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$  dos espacios de medida finita, y  $\{\varphi_n\}$  un sistema ortonormal con respecto a  $\mu$  de funciones en  $L^p(\nu)$ , que es total en este espacio.

(i) Si  $S_N f \rightarrow f$  en  $L^p(\nu)$  implica  $\langle S_N f, \varphi_n \rangle_\mu \rightarrow \langle f, \varphi_n \rangle_\mu$  para todo  $n$  y  $f$ , siendo  $S_N f = \sum_1^N a_n(f) \varphi_n$ , entonces  $a_n(f) = \int_\Omega f \varphi_n d\mu = \langle f, \varphi_n \rangle_\mu = n$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $f$  con respecto a  $\{\varphi_n\}$  y  $\mu$ .

(ii) Supongamos que (a)  $S_N f = \sum_1^N \varphi_n \int_\Omega f \varphi_n d\mu = \sum_1^N a_n \varphi_n$  está bien definido para cada  $N$  y cada  $f$  en  $L^p(\nu)$ . Entonces, si

$$(b) \quad \|S_N f\|_{p,\nu} = \left\{ \int_\Omega |S_N f|^p d\nu \right\}^{1/p} \leq K \|f\|_{p,\nu} \quad \text{con } K \text{ independiente de } N \text{ y}$$

$f$ , será también  $\|S_N f - f\|_{p,\nu} \rightarrow 0$  para  $N \rightarrow \infty$ .

Demostración. (i) es enteramente análoga a la observación (1) al principio de este capítulo, y sirve para mostrar que  $S_N f$ , tal como se toma en (ii), es el único que puede verificar (b).

En cuanto a (ii), sea  $g$  una combinación lineal de  $\varphi_n^i$ s tal que  $\|g-f\|_{p,\nu} < \epsilon$ .

Entonces, para  $N$  suficientemente grande tendremos:

$$\begin{aligned} \|S_N f - f\|_{p,\nu} &\leq \|S_N f - g\|_{p,\nu} + \|f - g\|_{p,\nu} = \|S_N(f-g)\|_{p,\nu} + \|f-g\|_{p,\nu} \leq \\ &\leq (K+1)\|f-g\|_{p,\nu} < (K+1)\epsilon, \end{aligned}$$

donde el primer término después del "=" se obtiene usando (a), y a él se le aplica luego (b). Q.E.D.

#### REFERENCIAS

- [1] S.KACZMARZ, and H.STEINHAUS, *Theorie der Orthogonalreihen*, Chelsea, (1951).
- [2] J.T.MARTI, *Introduction to the theory of bases*, Springer (1969).

### CAPITULO VI

#### EL OPERADOR DE HILBERT.

1. Llamaremos operador de Hilbert al definido en  $L^p(-\infty, +\infty)$  por la expresión

$$Hf(x) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt.$$

También escribiremos  $Hf = \tilde{f} = f_* \text{v.p.} \frac{1}{x}$ .

("v.p." significa "valor principal". Una notación equivalente que usaremos es " $\int$ ". La siguiente observación recuerda cómo está definido este concepto.)

Observación. Según la definición dada. será

$$Hf(x) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t)}{t} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|t| > \epsilon} \frac{f(x-t)}{t} dt.$$

El punto (1) del teorema

siguiente muestra que este límite tiene sentido en casi todo punto  $x \in (-\infty, +\infty)$ , mientras que el resto del teorema describe las principales propiedades del operador de Hilbert. Antes de enunciarlo, conviene definir los operadores  $H_\epsilon$ ,  $0 < \epsilon < 1$ , mediante la fórmula

$$\tilde{f}_\epsilon(x) = H_\epsilon f(x) = \int_{|t| > \epsilon} \frac{f(x-t)}{t} dt.$$

TEOREMA . Sea  $1 < p < \infty$  , sea  $f \in L^p$  y sea  $q = \frac{p}{p-1}$  .Entonces :

(1)  $H_\epsilon f(x)$  está bien definido para todo  $x \in (-\infty, +\infty)$  y converge, para  $\epsilon \rightarrow 0+$  , en casi todo punto  $x \in (-\infty, +\infty)$  .[PRIVALOFF-PLESSNER] .

(Así que, si  $f \in L^p$  ,  $Hf$  es una función que en casi todo punto de la recta toma valores finitos.)

(2)  $H_\epsilon f \rightarrow Hf$  en  $L^p$  para  $\epsilon \rightarrow 0+$  . (Así que  $Hf \in L^p$ )

(3)  $\|Hf\|_p \leq C \cdot \|f\|_p$  , donde  $C = C(p)$  es independiente de  $f \in L^p$  [M.RIESZ]

(Es decir,  $H$  es continuo en  $L^p$  .)

(4)  $\|H_\epsilon f\|_p \leq K \cdot \|f\|_p$  , con  $K = K(p)$  independiente de  $f \in L^p$  y de  $\epsilon \in (0,1)$  .

(5) Definamos el operador maximal,  $M$ , de la siguiente manera :

$$Mf = \sup_{0 < \epsilon < 1} |H_\epsilon f| .$$

Entonces,  $M$  es continuo en  $L^p$  y de semitipo 1 [TITCHMARSH-ZYGMUND.]

(6)  $H^{-1} = -\frac{H}{\pi^2}$  . (Más precisamente,  $H$  es biunívoco y sobre, y vale esta fórmula.)

(7) En  $L^2$  ,  $\frac{H}{\pi}$  es unitario, es decir:  $\|f\|_2 = \|\frac{H}{\pi} f\|_2$  [TITCHMARSH.]

(8) Si  $g \in C_0^1(-\infty, +\infty)$  , entonces  $Hg(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} H_\epsilon g(x)$  existe para todo  $x$ , y vale la desigualdad  $|H_\epsilon g(x)| \leq \frac{K_0}{|x|+1}$  , donde  $K_0 = K_0(g)$  es independiente

de  $\epsilon \in (0,1)$  .

[ $C_0^1$  es la clase de las funciones de soporte compacto con primera derivada continua en  $(-\infty, +\infty)$  .]

Demostración. Comenzaremos por demostrar (4) (siguiendo a [1] de la bibliografía al final de este capítulo). Será suficiente demostrarlo para funciones no negativas. Más aun, bastará que hagamos la demostración para funciones no negativas de soporte compacto, ya que una vez logrado eso, llamando  $I_n$  a la función característica del intervalo  $[-n, n]$  , tendremos

$H_\epsilon (f I_n) \rightarrow \tilde{f}_\epsilon = H_\epsilon f$  ( $n \rightarrow \infty$ ) en todo punto , y por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}_\epsilon|^p dx \leq \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_\epsilon(fI_n)|^p dx \leq \frac{1}{n} K \int_{-\infty}^{+\infty} |fI_n|^p dx = K \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^p dx, \text{ que es}$$

lo que se busca.

Supongamos, pues, que  $f \geq 0$  es de soporte compacto y no se anula en casi todo punto. El parecido formal entre el núcleo de Hilbert y el de Cauchy invita a analizar la siguiente integral:

$$F(z) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{z-t} dt, \quad x > 0, \quad z = x + iy.$$

$F(z)$  es holomorfa en el semiplano superior, y además

$$\operatorname{Re} F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t) \cdot y}{(x-t)^2 + y^2} dt = f(x) * \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Luego, de acuerdo a la desigualdad de Young, será

$$(i) \quad \|\operatorname{Re} F\|_p \leq \left\| \frac{y}{x^2 + y^2} \right\|_1 \cdot \|f\|_p = \pi \cdot \|f\|_p, \quad y > 0.$$

Por otra parte,  $-\pi/2 < \varphi = \operatorname{Arg} F(z) < \pi/2$  porque  $\operatorname{Re} F(z) > 0$ . Sea  $M = M(x,y) = |F(z)|$ , y sea  $F^p(z) = M^p \cdot e^{ip\varphi}$ .  $F^p$  es una función holomorfa en el semiplano superior (obsérvese que está bien definida porque  $\operatorname{Re} F > 0$ ). Llamemos  $L$  al segmento de longitud  $2a$ , paralelo al eje real y centrado en  $iy$ , y  $C$ , a la semicircunferencia superior de radio  $a$  y centro  $iy$ . Entonces,

$$\int_{LUC} F^p(z) dz = 0.$$

$$\text{Como } M \sim \frac{\text{cte.}}{|z|} \quad (z \rightarrow \infty), \quad \int_C F^p dz \rightarrow 0 \quad \text{cuando } a \rightarrow +\infty.$$

$$\text{Por lo tanto, } \int_{-\infty+iy}^{+\infty+iy} F(z)^p dz = 0, \quad \text{i.e.,}$$

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} M^p \cos p\varphi dx = \int_{-\infty}^{+\infty} M^p \sin p\varphi dx = 0$$

Ahora bien: si  $p$  es cualquier número positivo pero no un entero impar, se puede hallar un  $d > 0$  tal que, para  $\varphi$  variando en  $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + d\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} - d, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\cos p\varphi$  no se anula ni cambia signo. Además,  $\cos \varphi \geq \delta > 0$  cuando  $\varphi$  varía en  $\left[-\frac{\pi}{2} + d, \frac{\pi}{2} - d\right]$  y es no negativo sobre  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Así que habrá constantes  $A$ ,  $B$ , tales que

$$(iii) \quad |\operatorname{sen} \varphi|^p \leq A \cos p\varphi + B \cos^p \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Luego, usando (ii) y (iii):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\operatorname{Im} F|^p dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} M^p |\operatorname{sen} \varphi|^p dx \leq A \int_{-\infty}^{+\infty} M^p \cos p\varphi dx + B \int_{-\infty}^{+\infty} M^p \cos^p \varphi dx = \\ &= B \int_{-\infty}^{+\infty} |\operatorname{Re} F|^p dx. \end{aligned}$$

Hemos probado así que para  $z = x + iy$ , con  $y > 0$  fijo,

$$\|\operatorname{Im} F\|_p \leq B^{1/p} \cdot \|\operatorname{Re} F\|_p \leq \pi B^{1/p} \cdot \|f\|_p,$$

donde también hemos tenido en cuenta (i).

Observemos ahora que la diferencia  $\operatorname{Im} F(x, \epsilon) - \tilde{f}_\epsilon(x) =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-t)f(t)}{(x-t)^2 + \epsilon^2} dt - \tilde{f}_\epsilon(x) \text{ es la convolución de } f \text{ con la función } g_\epsilon(x),$$

definida por  $x/(x^2 + \epsilon^2)$  para  $|x| \leq \epsilon$  y por  $x/(x^2 + \epsilon^2) - 1/x$  para  $|x| > \epsilon$ .

$$\text{Entonces, } |g_\epsilon(x)| \leq \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \text{ y } \|g_\epsilon * f\|_p \leq \pi \|f\|_p.$$

Así vemos que

$$\|\tilde{f}_\epsilon\|_p \leq \|\operatorname{Im} F(x, \epsilon)\|_p + \|\operatorname{Im} F(x, \epsilon) - \tilde{f}_\epsilon\|_p \leq K_p \cdot \|f\|_p,$$

es decir, queda probado (4) cuando  $p$  no es entero impar. En virtud del Corolario del teorema 1 del capítulo I, (4) será válido también para  $p$  entero impar y  $f$  simple. Por fin, si  $f$  es cualquiera en  $L^p$ , es suficiente observar que  $\tilde{f}_\epsilon$  es límite puntual de una sucesión  $\{(\tilde{f}_n)_\epsilon\}$  en la que cada  $f_n$  es

simple, y aplicando el lema de Fatou queda probado completamente (4).

2. Con el objeto de probar (1), (2), (3) y (8), consideremos primero el conjunto  $C_0^1$  de las funciones a soporte acotado y continuamente derivables. Veremos, ante todo, que (1) y (2) valen para cualquier  $g \in C_0^1$ . En efecto, sea  $g \in C_0^1$  y tomemos  $h \in C_0^1$ ,  $h$  par y tal que  $h(0) = 1$ .

Entonces  $\int_{|x-t|>\epsilon} \frac{h(x-t)}{x-t} dt = 0$ , y hay una constante  $M$  tal que

$|g(t) - g(x)h(x-t)| \leq M|x-t|$  cualesquiera sean  $x$  y  $t$  (pues  $g(t)$  es el valor de  $g(x)h(x-t)$  cuando  $x=t$ ), así que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{|x-t|>\epsilon} \frac{g(t)}{x-t} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{|x-t|>\epsilon} \frac{g(t) - g(x)h(x-t)}{x-t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(t) - g(x)h(x-t)}{x-t} dt = \tilde{g}(x)$$

Es decir,  $\tilde{g}_\epsilon(x) \rightarrow \tilde{g}(x)$  para todo  $x$ , cuando  $\epsilon \rightarrow 0+$ .

Ahora, como  $\tilde{g}_\epsilon(x)$  está acotada por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{g(t) - g(x)h(x-t)}{x-t} \right| dt,$$

habrá una constante  $K_0$ , independiente de  $\epsilon$ , tal que

$$|\tilde{g}_\epsilon(x)| \leq \frac{K_0}{|x|+1} \quad (\text{véase más adelante}),$$

así que, usando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, resulta que  $\tilde{g}_\epsilon \rightarrow \tilde{g}$  en  $L^p$  ( $\epsilon \rightarrow 0+$ ).

(La última desigualdad puede probarse del modo siguiente. Denotemos con  $\text{sop}(g)$  al soporte de  $g$ .

(a) Supongamos  $N$  fijo pero suficientemente grande como para que

$$|x-t| \geq \frac{1}{2}(|x|+1) \quad \text{si } t \in \text{sop}(g) \text{ y } |x| > N. \text{ Entonces } \text{sop}(g) \subseteq (-N, N) \text{ y}$$

si  $|x| > N$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{g(t) - g(x)h(x-t)}{x-t} \right| dt = \int_{\text{sop}(g)} \frac{|g(t)|}{|x-t|} dt \leq \int_{\text{sop}(g)} \frac{M_0}{|x-t|} dt \leq \frac{4M_0 N}{|x|+1}.$$

b) Supongamos  $|x| \leq N$ . Entonces,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{g(t) - g(x) h(x-t)}{x-t} \right| dt \leq \int_{-(N+\delta)}^{N+\delta} \frac{M |x-t|}{|x-t|} dt \leq \text{const. } M, \text{ donde } \delta = \text{diámetro}$$

del sop (h.)

Así quedan probados (1) y (2) para todas las  $g \in C_0^1$ , y (8), completamente.

Ahora, sea  $f \in L^p$ , y sea  $g \in C_0^1$  tal que  $\|g-f\|_p < \gamma$ . Como  $C_0^1$  es denso en  $L^p$ , una tal  $g$  puede hallarse cualquiera sea  $\gamma$ . En vista de lo que acabamos de probar, si  $\epsilon$  y  $\eta$  son suficientemente pequeños tendremos  $\|\tilde{g}_\epsilon - \tilde{g}_\eta\|_p < \gamma$ .

Entonces, (2) se deduce de las siguientes desigualdades (en las que se usa (4), ya probado) y de la propiedad (1):

$$\|\tilde{f}_\epsilon - \tilde{f}_\eta\|_p \leq \|\tilde{f}_\epsilon - \tilde{g}_\epsilon\|_p + \|\tilde{g}_\epsilon - \tilde{g}_\eta\|_p + \|\tilde{g}_\eta - \tilde{f}_\eta\|_p \leq 2K \|f-g\|_p + \|\tilde{g}_\epsilon - \tilde{g}_\eta\|_p \leq (2K+1)\gamma.$$

Así queda completa la demostración de (2) para toda  $f \in L^p$ .

En cuanto a (1), la hemos probado sólo para funciones en  $C_0^1$ . Además, cualquiera sea  $g \in C_0^1$ ,  $\{\tilde{g}_\epsilon\}$  es uniformemente de Cauchy ( $\epsilon \rightarrow 0+$ ).

No es difícil probar que este hecho y (5) implican la validez de (1), pero aquí no nos extenderemos sobre esta cuestión ni sobre la demostración de (5).

El lector interesado puede consultar [2] de la Bibliografía dada al final de este capítulo.

La propiedad (3) es consecuencia de (4) y del hecho de que  $\{\tilde{f}_\epsilon\}$  sea de Cauchy ( $\epsilon \rightarrow 0+$ ).

3. Finalmente, de (6) y (7) esbozaremos una demostración que se entiende mejor desde el punto de vista de la teoría de distribuciones. Supóngase que  $\hat{f}$  denota a la transformada de Fourier de  $f$ . Entonces, si  $f$  es indefinidamente diferenciable de soporte compacto  $\hat{H}f = \widehat{\text{vp} \frac{1}{x}} \cdot \hat{f}$ .

$$\text{Pero } \widehat{\text{vp} \frac{1}{x}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{v.p.} \int_{-N}^N \frac{e^{-2\pi ixy}}{x} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} (-2i) \int_0^{2N\pi y} \frac{\text{sen } u}{u} du = -\pi i \text{sgn } y,$$

de donde  $\hat{H}f(y) = -\pi i \text{sgn } y \cdot \hat{f}(y)$ , para  $f$  como arriba, y por aproximación por estas, para  $f \in L^2$ . Luego  $\widehat{H^2 f} = (-\pi i \text{sgn } y)^2 \hat{f}(y) = -\pi^2 \hat{f}$ , de donde  $H^2 f = -\pi^2 f$ .

Entonces, si  $g = \frac{H}{\pi} f$ , es  $f = -\frac{H}{\pi} g$ , es decir,  $-\frac{H}{\pi} = \left(\frac{H}{\pi}\right)^{-1}$  con lo que se prueba (6).

Además,  $\left(\frac{H}{\pi}\right)^* = -\frac{H}{\pi}$ , de modo que  $\frac{H}{\pi}$  es unitario en  $L^2$ , y así se tiene

$$\left\| \frac{H}{\pi} f \right\|_2 = \|f\|_2, \text{ que es la propiedad (7) (véase [5] de la Bibliografía que}$$

damos a continuación).

#### BIBLIOGRAFIA

- [ 1 ] CALDERON, A.P., *Integrales singulares y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales hiperbólicas*, U.N.B.A. (1960).
- [ 2 ] COTLAR, M. ; *Condiciones de continuidad de operadores potenciales y de Hilbert*, U.N.B.A. (1959)
- [ 3 ] COTLAR M. and CIGNOLI R., *An introduction to Functional Analysis*, North-Holland Pub.Co., (1974).
- [ 4 ] STEIN E.M. , *Singular integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ.Press, (1970).
- [ 5 ] TITCHMARSH , E.C., *An introduction to Fourier transform*.
- [ 6 ] CALDERON, A.P. and ZYGMUND, A., *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. 88 (1952), 85-139.
- [ 7 ] CALDERON, A.P., and ZYGMUND, A., *On singular integrals*, Amer.J.Math.,18 (1956) , 289-309.

### CAPITULO VII

#### OPERADORES DE HILBERT CON PESO

1. El objeto de este capítulo es demostrar los tres teoremas siguientes.

TEOREMA 1. Sea

$$K_{a,A;b,B} f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t} \frac{|x|^b}{|t|^B} \frac{(1+x)^{a-b}}{(1+t)^{A-B}} dt, \quad ,$$

donde  $\int$  denota al valor principal de la integral. Entonces,  $K_{a,A;b,B}$  es un operador continuo en  $L^p(-\infty, +\infty)$  si p verifica las siguientes condiciones

$$(1) \quad 1 < p < \infty ; \quad -\frac{1}{p} < b \wedge A ; \quad \frac{1}{q} > a \vee B ; \quad b \geq B, a \leq A .$$

Lo mismo vale si en lugar de  $x-t$  se escribe  $x+t$ .

( $a, A, b, B$  son números reales ;  $q = p/(p-1)$  y " $\wedge$ ", " $\vee$ ", son inf y sup, respectivamente).

Véase además el teorema 5, hacia el final de este capítulo.

TEOREMA 2. Sea

$$Uf(x) = \int_0^1 \frac{x^s y^t}{2-x-y} f(y) dy, \quad \text{donde } 0 < x < 1 \text{ y } -\infty < s, t < +\infty.$$

Entonces,  $U$  es un operador continuo en  $L^p(0,1)$  si  $(-s) \vee 0 < \frac{1}{p} < (t+1) \wedge 1$ .

Los teoremas 3 y 4 son resultados auxiliares para la demostración del teorema 1.

TEOREMA 3. Sea  $w$  una función medible en la recta real, y supongamos que, para algún  $p \in (1, \infty)$ , exista una función  $r(x,t)$ , positiva y medible en el plano, tal que :

$$(I) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{w(t)}{w(x)} - 1 \right| \cdot \frac{r^q(x,t)}{|x-t|} dt \leq M < \infty \quad \text{para casi todo } x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(II) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{w(t)}{w(x)} - 1 \right| \cdot \frac{r^{-p}(x,t)}{|x-t|} dx \leq M < \infty \quad \text{para casi todo } t \in (-\infty, +\infty).$$

Entonces, el operador

$$H_w f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w(t)}{w(x)} \cdot \frac{f(t)}{x-t} dt$$

está bien definido y es continuo en  $L^p(-\infty, +\infty)$ .

TEOREMA 4. Sea

$$K_{a,b} f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t} \cdot \frac{|x|^b}{|t|^b} \left( \frac{1+|x|}{1+|t|} \right)^{a-b} dt.$$

Entonces,  $K_{a,b}$  es un operador lineal continuo en  $L^p(-\infty, +\infty)$  si  $p$  verifica las condiciones  $1 < p < \infty$ ,  $-\frac{1}{p} < a, b < \frac{1}{q}$ .

2. Demostración del teorema 1 a partir del teorema 4. Las condiciones dadas

permiten elegir números  $\alpha, \beta$ , tales que  $-\frac{1}{p} < \alpha, \beta < \frac{1}{q}$  y  $B \leq \beta \leq b$ ,

$a \leq \alpha \leq A$ . Es fácil comprobar que entonces las funciones

$$\varphi(x) = |x|^{b-\beta} \cdot (1+|x|)^{a-\alpha-(b-\beta)}$$

$$\text{y } \psi(x) = |x|^{\beta-B} \cdot (1+|x|)^{B-\beta-(A-\alpha)}$$

son acotadas en  $(-\infty, +\infty)$ , y que

$$K_{a,A;b,B} f(x) = \varphi(x) \cdot K_{\alpha,\alpha;\beta,\beta} (f \cdot \psi)(x) .$$

Luego, si vale el teorema 4, será

$$\|K_{a,A;b,B} f\|_p = \|\varphi\|_\infty \cdot \|K_{\alpha,\alpha;\beta,\beta} (f \cdot \psi)\|_p \leq M_1 \|K_{\alpha,\beta}\| \|f \cdot \psi\|_p \leq M \|K_{\alpha,\beta}\| \cdot \|f\|_p \text{ Q.E.D.}$$

Antes de demostrar el teorema 4, probaremos el 3 y un lema auxiliar.

Demostración del teorema 3. Sea  $f \in L^p$ . Tenemos

$$H_w f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{w(t)}{w(x)} - 1 \right] \cdot \frac{f(t)}{x-t} dt$$

y, como el primer sumando es la transformada de Hilbert de  $f$ , está bien definido y es continuo para  $1 < p < \infty$ , de acuerdo al capítulo anterior, así que bastará probar que otro tanto ocurre con el segundo sumando, es decir, que el operador  $T$  definido por

$$Tf(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{w(t)}{w(x)} - 1 \right] \frac{f(t)}{x-t} dt$$

está bien definido y es continuo en  $L^p$  si vale (I) y (II) del teorema 3.

Para abreviar, escribiremos  $A = \left[ \frac{w(t)}{w(x)} - 1 \right] \cdot \frac{1}{x-t}$ . Todas las integrales que

siguen son entre  $-\infty$  y  $+\infty$ .

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &\leq \int |A| \cdot |f(t)| dt = \int \frac{|A|^{1/p} \cdot |f(t)|}{r(x,t)} \cdot |A|^{1/q} r(x,t) dt \leq \\ &\leq \left\{ \int \frac{|A| \cdot |f(t)|^p}{r^p(x,t)} dt \right\}^{1/p} \cdot \left\{ \int |A| r^q(x,t) dt \right\}^{1/q} \leq M^{1/q} \left\{ \int \frac{|A| \cdot |f(t)|^p}{r^p(x,t)} dt \right\}^{1/p} , \end{aligned}$$

por la desigualdad de Holder y (I). Luego,

$$|Tf(x)|^p \leq M^{p/q} \int |A| \cdot \frac{|f(t)|^p}{r^p(x,t)} dt .$$

Integrando ahora con respecto a  $x$  y usando el teorema de Fubini y la condición (II), resulta:

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p^p &= \int |Tf(x)|^p dx \leq M^{p/q} \cdot \int \left\{ \int |A| \cdot \frac{|f(t)|^p}{r^p(x,t)} dt \right\} dx = \\ &= M^{p/q} \cdot \int |f(t)|^p \left\{ \int \frac{|A|}{r^p(x,t)} dx \right\} dt \leq M^{1+p/q} \cdot \int |f(t)|^p dt , \end{aligned}$$

así que  $\|Tf\|_p \leq M \|f\|_p$ , Q.E.D.

Observación: Atendiendo a esta última demostración, resulta claro que el operador  $T$  queda bien definido aun sin tomar valor principal en la integral correspondiente.

LEMA AUXILIAR. Sea  $u > 0$ ,  $v > 0$ ,  $a, b$ , reales cualesquiera. Entonces

$$(2) \quad v^{-a} \wedge v^{-b} \leq \left( \frac{1+u}{1+uv} \right)^{a-b} \cdot v^{-b} \leq v^{-a} \vee v^{-b} ;$$

$$(3) \quad \left| \left( \frac{1+u}{1+uv} \right)^{a-b} \cdot v^{-b} - 1 \right| \leq C \cdot |v - 1| \text{ uniformemente para } v \text{ cercano a } 1 .$$

Demostración. Como la derivada de  $\frac{1+u}{1+uv}$  con respecto a  $u$  es  $\frac{1-v}{(1+uv)^2}$ , re-

resulta que, cuando  $u$  varía desde cero hacia  $+\infty$ ,  $\frac{1+u}{1+uv}$  crece desde 1 hacia

$1/v$ , si  $v < 1$ , y decrece desde 1 hacia  $1/v$  si  $v > 1$ .

Esto justifica la desigualdad

$$1 \wedge \frac{1}{v} \leq \frac{1+u}{1+uv} \leq 1 \vee \frac{1}{v} ,$$

y de ésta salen fácilmente, cada una a partir de la anterior, las siguientes:

$$1 \wedge \frac{1}{v^{a-b}} \leq \left( \frac{1+u}{1+uv} \right)^{a-b} \leq 1 \vee \frac{1}{v^{a-b}}$$

(conviene separar los casos  $a-b > 0$ ,  $a-b < 0$ ),

$$v^{-a} \wedge v^{-b} \leq \left( \frac{1+u}{1+uv} \right)^{a-b} \cdot v^{-b} \leq v^{-a} \vee v^{-b} \quad (\text{que es (2)}) ,$$

$$(v^{-a} \wedge v^{-b}) - 1 \leq \left( \frac{1+u}{1+uv} \right)^{a-b} \cdot v^{-b} - 1 \leq (v^{-a} \vee v^{-b}) - 1 ,$$

$$(4) \quad \left| \left( \frac{1+u}{1+uv} \right)^{a-b} v^{-b} - 1 \right| \leq \left| (v^{-a} \wedge v^{-b}) - 1 \right| \vee \left| (v^{-a} \vee v^{-b}) - 1 \right| .$$

Ahora, de la serie binómica:  $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$  ( $|x| < 1$ )

válida para  $\alpha$  cualquiera, obtenemos, poniendo  $v = x+1$  ,

$$v^\alpha - 1 = \alpha(v-1) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} (v-1)^2 + \dots = (v-1) \varphi(v) , \quad \varphi(v) \rightarrow \alpha \quad \text{para } v \rightarrow 1 .$$

Luego,  $|v^\alpha - 1| \leq C |v-1|$ , donde  $C$  depende sólo de  $\alpha$  con tal de que  $v$  esté suficientemente cerca de 1. Como una acotación similar vale para cada exponente, el segundo miembro de (4) deberá admitir también una, y así se obtiene (3).

Q.É.D.

3. Demostración del teorema 4. Se tiene

$$K_{a,b} f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t) \cdot w(t)}{x-t} \cdot \frac{w(x)}{w(x)} dt ,$$

donde  $w(t) = |t|^{-b} \cdot (1+|t|)^{b-a}$ . Luego, de acuerdo al teorema 3,  $K_{a,b}$  será continuo en  $L^p$  si existe una función  $r(x,t)$ , positiva y medible en el plano, tal que se verifiquen las condiciones (I) y (II) de dicho teorema. En este caso, será suficiente elegir  $r(x,t) = \left| \frac{x}{t} \right|^{1/pq}$ , y nos dedicaremos ahora a comprobarlo. Es decir, probaremos que

$$(I) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \left| \frac{x}{t} \right|^b \left( \frac{1+|x|}{1+|t|} \right)^{a-b} - 1 \right| \cdot \left| \frac{x}{t} \right|^{1/p} \cdot \frac{dt}{|x-t|} \leq M < \infty \quad \text{para casi todo } x \in (-\infty, +\infty) ;$$

$$(II) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \left| \frac{x}{t} \right|^b \left( \frac{1+|x|}{1+|t|} \right)^{a-b} - 1 \right| \cdot \left| \frac{x}{t} \right|^{-1/q} \cdot \frac{dx}{|x-t|} \leq M < \infty \quad \text{para casi todo } t \in (-\infty, +\infty) ;$$

ambas si

$$(5) \quad 1 < p < \infty \quad \text{y} \quad -\frac{1}{p} < a, b < \frac{1}{q} .$$

Supongamos probado que (5) implica (I). Entonces, si

$$(6) \quad 1 < q < \infty ; \quad -\frac{1}{q} < -a, -b < \frac{1}{p} ,$$

vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \left| \frac{t}{x} \right|^{-b} \left( \frac{1+|t|}{1+|x|} \right)^{b-a} - 1 \right| \left| \frac{t}{x} \right|^{1/q} \frac{dx}{|x-t|} \leq M < \infty \quad \text{para casi todo } t \in (-\infty, \infty) .$$

Pero ésta es la condición(II). Por otra parte (6) es (5) escrita de otra forma. Queda probado así que basta demostrar (I).

Consideremos, pues, la integral en (I). Para  $x \neq 0$ , podemos hacer el cambio de variable  $t=xy$ , con lo que dicha integral se convierte en

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{|y|^b} \cdot \left[ \frac{1+|x|}{1+|xy|} \right]^{a-b} - 1 \right| \frac{1}{|y|^{1/p}} \frac{1}{|1-y|} dy$$

Así que (I) queda:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left| \left( \frac{1+|x|}{1+|x||y|} \right)^{a-b} \cdot |y|^{-b} - 1 \right|}{|y-1|} \cdot |y|^{-1/p} dy \leq M < \infty \quad \text{para casi todo } x \in (-\infty, +\infty)$$

(El cambio de variable quedará justificado por la integrabilidad de este integrando).

Ante todo, observemos que el  $|y-1|$  del denominador en el integrando es "neutralizado" por el correspondiente numerador de manera que el cociente resulta uniformemente acotado, en un entorno de  $y=1$ , en virtud de (2) del lema auxiliar precedente. Luego, la convergencia de la integral sólo dependerá del comportamiento del integrando en el origen y en  $\pm\infty$ . Ahora bien: el cociente

$$\frac{\left| \left( \frac{1+|x|}{1+|xy|} \right)^{a-b} |y|^{-b} - 1 \right|}{|y-1|} ,$$

fuera de dicho entorno de  $y=1$ , puede acortarse, a menos de un factor constante, por

$$\frac{\left[ \frac{1+|x|}{1+|xy|} \right]^{a-b} \cdot |y|^{-b} + 1}{1 + |y|} .$$

En definitiva, la integral en (I) será acotada si otro tanto ocurre con la siguiente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[ \frac{1+|x|}{1+|xy|} \right]^{a-b} |y|^{-b} + 1}{1+|y|} \cdot |y|^{-1/p} dy .$$

Como ahora el integrando es par, bastará acotar esta:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\left[ \frac{1+|x|}{1+|xy|} \right]^{a-b} \cdot y^{-b} + 1}{1+y} \cdot y^{-1/p} dy ,$$

que está acotada por

$$\int_0^{+\infty} \frac{(y^{-a} \vee y^{-b}) \cdot y^{-1/p} + y^{-1/p}}{1+y} dy ,$$

gracias a (2) del lema auxiliar . Esta última integral no depende de  $x$  y es

convergente, en lo que respecta al extremo 0, si  $-1/p > -1$  ,  $-a - \frac{1}{p} > -1$  y

$-b - \frac{1}{p} > -1$  y , en lo que respecta al extremo  $+\infty$  , si  $-1 - \frac{1}{p} < -1$  ,

$-a - 1 - \frac{1}{p} < -1$  y  $-b - 1 - \frac{1}{p} < -1$  . Es decir, por fin, que (I) valdrá si se ve-

rifican simultáneamente las relaciones:

$$p > 1 , \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} > a , \frac{1}{q} > b , q > 1 , a > -\frac{1}{p} , b > -\frac{1}{p} ,$$

que son, sencillamente,  $1 < p < \infty$  y  $-\frac{1}{p} < a, b < \frac{1}{q}$  , Q.E.D.

4. Demostración del teorema 2. Examinemos el núcleo  $\frac{x^s y^t}{2-x-y}$  ,  $0 < x < 1$  ,

$$0 < y < 1 .$$

Si  $x < \frac{1}{2}$  o  $y < \frac{1}{2}$  , entonces  $\frac{1}{2-x-y} < 2$  . Si  $x \geq \frac{1}{2}$  e  $y \geq \frac{1}{2}$  , en-

tonces  $x^s y^t \leq 2^{|s|+|t|}$  , según puede verificarse. Luego,

$$0 < \frac{x^s y^t}{2-x-y} < 2x^s y^t + \frac{2^{|s|+|t|}}{2-x-y} < C (x^s y^t + \frac{1}{2-x-y}) , \text{ donde } C \text{ es constante}$$

(p.ej.,  $C = 2^{|s|+|t|+1}$  ) , para  $0 < x, y < 1$  .

Así que  $U$  será continuo si lo son los operadores:

$$U_1 f(x) = x^s \cdot \int_0^1 f(y) y^t dy, \quad U_2 f(x) = \int_0^1 \frac{f(y)}{2-x-y} dy.$$

Pero  $U_2$  es continuo en  $L^p$  si  $1 < p < \infty$ , pues se reduce a la transformada de Hilbert mediante un cambio de variable. Por otra parte,  $U_1$  será continuo en  $L^p$  si  $x^s$  está en  $L^p$  y la integral  $\int_0^1 f(y) y^t dy$  converge para toda  $f \in L^p$ .

Ahora bien,  $x^s$  estará en  $L^p$  si  $sp > -1$ , i.e., si  $-s < \frac{1}{p}$ . Y la integral  $\int_0^1 f(y) y^t dy$  será convergente para toda  $f \in L^p$  si  $y^t \in L^{p^*}$ , es decir, si  $t+1 > \frac{1}{p}$ . Como todas estas condiciones para  $U_1$  y  $U_2$  están implícitas en la hipótesis, queda probado el teorema.

5. TEOREMA 5. Si  $1 \leq p \leq \infty$ , las condiciones (1) del teorema 1 son también necesarias para que el operador  $\tilde{K} = K_{a,A;b,B}$  sea continuo en  $L^p(-\infty, +\infty)$ .

Demostración. Sea  $I$  la función característica del intervalo  $(u,v)$ .

La transformada de Hilbert de  $I$  es  $H(I) = \ln \left| \frac{x-u}{x-v} \right|$ .

Como  $\tilde{K}f(x) = \varphi(x) \cdot H\left(\frac{f}{\psi}\right)(x)$ , con

$$(7) \quad \begin{cases} \psi(t) = |t|^B (1 + |t|)^{A-B} \\ \varphi(x) = |x|^b (1 + |x|)^{a-b} \end{cases},$$

resulta que, para

$$(8) \quad f(x) = I(x) \cdot \psi(x),$$

es  $\tilde{K}f = \varphi(x) \cdot \ln \left| \frac{x-u}{x-v} \right|$ . Si  $0 < u < v$ , entonces  $f \in L^\infty$  pero  $\tilde{K}f \notin L^\infty$ .

Luego, la restricción  $p < \infty$  es necesaria cualquiera sean  $A, B, a, b$ .

Por otro lado, si  $f$  y  $g$  son funciones acotadas de soporte compacto lejos de cero, entonces

$$(9) \quad \left\langle K_{a,A;b,B} f, g \right\rangle = \left\langle f, -K_{-A,-a;-B,-b} g \right\rangle.$$

Si  $K$  fuera continuo en  $L^1$ , tendríamos  $\sup_{\|f\|_1=1} |\langle Kf, g \rangle| \leq M \|g\|_\infty$ .

Usando (9), resultará entonces

$$\sup_{\|f\|_1=1} |\langle f, K_{-A, -a; -B, -b} g \rangle| = \|K_{-A, -a; -B, -b}\|_\infty \leq M \|g\|_\infty,$$

para toda  $g$  acotada de soporte compacto lejos de cero. Como esto es falso según lo ya visto, la condición  $p > 1$  también es necesaria.

Sea, pues,  $1 < p < \infty$ . Si  $K_{a, A; b, B}$  fuera continuo en  $L^p$ , tendríamos, a partir de (8),

$$(10) \quad \|Kf\|_p^p = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^p(x) \cdot \left| \ln \left| \frac{x-v}{x-u} \right| \right|^p dx \leq C \cdot \int_u^v \psi^p(t) dt, \text{ con } C \text{ independiente de}$$

$u$  y  $v$ . Observando que, si  $0 < u < v$ ,

$$(11) \quad \frac{v-x}{u-x} > \frac{v}{u} \text{ para } x \in (0, u),$$

se deduce de (10):

$$(12) \quad \int_0^u \varphi^p(x) \cdot \left( \ln \frac{v}{u} \right)^p dx \leq C \cdot \int_u^v \psi^p(t) dt.$$

En particular,  $\varphi^p(x)$  debe ser integrable en el cero, así que  $bp > -1$ .

Poniendo  $u=1$  en (12) resulta, además,

$$0 < \ln^p v \cdot \int_0^1 \varphi^p(x) dx \leq C \cdot \int_1^v \psi^p(t) dt,$$

por lo que debe ser  $Ap > -1$  (Pues, para  $Ap \leq -1$ , es  $\int_1^v \psi^p dt = o(1) \cdot \ln v$ ).

La necesidad de las condiciones  $a \leq A$  y  $b \geq B$  también será consecuencia de (12), tomando  $u$  grande en un caso y  $v$  pequeño en el otro. El detalle es como sigue.

Sea, en (12),  $v=2u$ . Si achicamos el intervalo de integración del primer miembro resulta a fortiori:

$$(\ln 2)^p \int_{u/2}^u \varphi^p(x) dx \leq C \cdot \int_u^{2u} \psi^p(t) dt. \text{ De aquí, mediante un cambio}$$

de variables, obtenemos

$$(13) \quad (\ln 2)^p \int_{1/2}^1 \varphi^p(ux) dx \leq C \cdot \int_1^2 \psi^p(ut) dt.$$

Dividiendo ambos miembros por  $u^{Ap}$  y haciendo tender  $u$  a  $\infty$ , el lema de Fatou nos dará

$$(\ln 2)^p \int_{1/2}^1 \lim_{u \rightarrow \infty} \left( \frac{\varphi(ux)}{u^A} \right)^p dx < C. \int_1^2 t^{Ap} dt < \infty,$$

de donde se deduce que  $a \leq A$ .

Análogamente, dividiendo ambos miembros por  $u^{Bp}$  y haciendo tender  $u$  a 0, una nueva aplicación del lema de Fatou nos dará

$$(\ln 2)^p \int_{1/2}^1 \lim_{u \rightarrow 0} \left( \frac{\varphi(ux)}{u^B} \right)^p dx < C. \int_1^2 t^{Bp} dt,$$

de donde sale  $b \geq B$ .

Por último, si  $K_{a,A;b,B}$  es continuo en  $L^p$ , entonces  $K_{-A,-a;-B,-b}$  será continuo en  $L^q$ ,  $q=p^*$ , de acuerdo a (9).

Luego, en virtud de lo ya probado, debe ser  $(-B)q > -1$  y  $(-a)q > -1$ .

Es decir, todas las condiciones son necesarias. Q.E.D.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] HARDY, G.H. and LITTLEWOOD, J., *Some more theorems concerning Fourier series and Fourier power series*, Duke Math. Journal, 2 (1936), 354-382.
- [2] MUCKENHOUPT, B., *Mean convergence of Jacobi series*, Proc. of the A.M.S., 23 (1969), 306 - 310
- [3] OKIKIOLU, G.O., *On certain extensions of the Hilbert operator*, Mat. Ann., 169 (1967), 315-327.
- [4] OKIKIOLU, G.O., *Aspects of the Theory of Bounded Integral Operators in  $L^p$ -Spaces*, Academic Press (1971).
- [5] BENEDEK, A. and PANZONE, R., *Mean convergence of series of Bessel functions*, Rev. U.M.A., vol 26 (1972), 42-61.

#### CAPITULO VIII

##### EL SISTEMA TRIGONOMETRICO

1. En este capítulo estudiaremos el sistema trigonométrico:

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, -\pi \leq x \leq \pi, \quad d\mu = dx.$$

Es bien sabido que este sistema es ortogonal en  $(-\pi, \pi)$  y que, dada  $f$  en  $L^1$ , la serie de Fourier asociada a ella es:

$$(1) \quad f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) ,$$

$$\text{donde } a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt , \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt , \quad n=0,1,2,\dots$$

Por consiguiente ,

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_1^N (\cos nx \cdot \cos nt + \sin nx \cdot \sin nt) \right\} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \left\{ \frac{1}{2} + \sum_1^N \cos n(x-y) \right\} dt . \end{aligned}$$

Pero ,

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2} + \sum_1^N \cos ny \right) \cdot \sin \frac{y}{2} &= \frac{1}{2} \left\{ \sin \frac{y}{2} + \sum_1^N \left[ \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) y - \sin \left( n - \frac{1}{2} \right) y \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \sin \left( N + \frac{1}{2} \right) y , \end{aligned}$$

Así que

$$(2) \quad S_N f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \frac{\sin \left( N + \frac{1}{2} \right) (x-t)}{2 \sin \left[ \frac{(x-t)}{2} \right]} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot D_N(x-t) dt ,$$

donde  $D_N(t)$  es el núcleo de Dirichlet.

2. TEOREMA 1. *El sistema trigonométrico es una base en  $L^p$  cuando  $1 < p < \infty$*   
(M. Riesz)

Demostración. Observemos primero que dicho sistema es una base en  $L^2$ . En efecto, es ortogonal y total, como se deduce del teorema de aproximación de Weierstrass, y, por lo tanto, es completo en  $L^2$ . En consecuencia, falta sólo probar que se verifica la condición (\*) del teorema 1 del capítulo V.

Ahora bien, la continuidad uniforme de (2) es equivalente a la continuidad de

$$(3) \quad Tf(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \left[ \sin \frac{x-t}{2} \right]^{-1} dt ,$$

ya que  $[\sin \left( N + \frac{1}{2} \right) (x-t)] / (2\pi)$  es suma de productos de funciones acotadas de  $x$  por funciones acotadas de  $t$ .

Por su parte , la función

$$(4) \quad B(y) = \frac{1}{2 \operatorname{sen}(y/2)} - \frac{1}{y} - \frac{1}{2\pi - y} - \frac{1}{-2\pi - y}$$

es acotada en  $(-2\pi, 2\pi)$ , así que el operador  $Uf = f * B$  es continuo en  $L^p$ . Luego,  $T$  será continuo si la convolución de  $f$  con cada uno de los tres últimos términos en (4) es un operador continuo en  $L^p$ . Pero esto es cierto, porque tales convoluciones son transformadas de Hilbert o traslaciones de transformadas de Hilbert. Q.E.D.

3. Si  $p=1$  o  $p=\infty$ , los operadores  $S_N$  no son uniformemente continuos. En efecto, la norma de  $S_N$  como operador de  $L^1$  en  $L^1$  coincide con su norma como operador de  $L^\infty$  en  $L^\infty$ , y es igual a:

$$\sup \int_{-\pi}^{\pi} (S_N f) \cdot g \, dx = \sup \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot S_N g \, dx,$$

donde ambos supremos se toman para  $\|f\|_1 = 1$  y  $\|g\|_\infty = 1$ .

Sea, ahora,

$$h(x) = \operatorname{sgn} \left\{ \frac{\operatorname{sen} (N+1/2)x}{\operatorname{sen} (x/2)} \right\}.$$

Entonces,  $\|h\|_\infty = 1$  y

$$S_N h(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(y) D_N(x-y) \, dy$$

es una función continua tal que  $S_N h(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(y)| \, dy = L_N =$  constante de

Lebesgue.

Pero,  $L_N \sim \frac{4}{\pi} \ln n$  (véase [1], I), así que  $\|S_N h\|_\infty \rightarrow \infty$  ( $N \rightarrow \infty$ ),

lo que prueba que en  $L^\infty$  los operadores  $S_N$  no son uniformemente continuos, y por lo tanto tampoco lo serán en  $L^1$ , Q.E.D.

En particular, esto implica que el sistema trigonométrico no es una base en  $L^1$ . Tampoco es una base en  $L^\infty$ , pues este espacio no es separable. Entonces, como la continuidad uniforme de los operadores  $S_N$  equivale a la continuidad del operador de Hilbert, podemos afirmar que éste no es continuo en  $L^1$  ni en  $L^\infty$  (ni en  $C$ , pues las normas de los  $S_N$  como operadores de  $L^1$  en  $L^1$  o de  $C$  en  $C$  son los números de Lebesgue, y por lo tanto son del orden de  $\ln N$  para  $N \rightarrow \infty$ ).

BIBLIOGRAFIA

[1] ZYGMUND , *Trigonometric Series* , Cambridge University Press (1959),I,II.

CAPITULO IX

POLINOMIOS ORTOGONALES. POLINOMIOS DE LEGENDRE.

1. Sea  $\alpha(x)$  una función creciente definida sobre un intervalo finito  $[a,b]$  y con infinitos puntos de crecimiento en dicho intervalo.

Ortonormalizando a la sucesión  $1, x, x^2, \dots$ , obtenemos un conjunto de polinomios:  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x), \dots$ , tales que

i) grado de  $p_j(x) = j$  ;

$$\text{ii) } \int_a^b p_n p_m d\alpha = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ 1 & (n = m) \end{cases} .$$

Además, los coeficientes principales pueden tomarse positivos, es decir ,  $p_n(x) = k_n x^n + \dots$ , con  $k_n > 0$  .

Entonces, el teorema de Weierstrass sobre aproximación de funciones continuas por polinomios implica que  $\{p_n\}$  es completo en  $L^2$ , el espacio de funciones de cuadrado integrable con respecto a  $d\alpha$ .

Hay una expresión muy simple para el núcleo de Dirichlet,

$$D_n(x,y) = \sum_{i=0}^n p_i(x) p_i(y) , \text{ debida a Christoffel y también llamada } \underline{\text{fórmula de}}$$

Christoffel-Darboux, que usaremos en lo que sigue.(ver [6]).

Pasamos a enunciarla:

TEOREMA 1.

$$(1) \quad D_n(x,y) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \cdot \frac{p_{n+1}(x) p_n(y) - p_n(x) \cdot p_{n+1}(y)}{x - y} .$$

Demostración. Necesitaremos aquí la siguiente fórmula de recurrencia entre tres polinomios consecutivos:

$$(2) \quad p_n(x) = (A_n x + B_n) \cdot p_{n-1}(x) - C_n p_{n-2}(x) ,$$

donde  $A_n = k_n/k_{n-1} > 0$  ,  $C_n = A_n/A_{n-1} = k_n k_{n-2}/k_{n-1}^2 > 0$  .

Para obtener (2), elijamos una constante  $A_n$  tal que  $p_n - A_n x p_{n-1}$  sea un polinomio de grado  $n-1$  y por lo tanto igual a  $\lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_{n-1} p_{n-1}$  . En virtud de la ortogonalidad de los polinomios  $p_j$  , será  $\lambda_j = 0$  si  $j < n-2$ . Luego

$$p_n(x) = A_n x p_{n-1}(x) + B_n p_{n-1}(x) - C_n p_{n-2}(x) \quad , \quad A_n = k_n/k_{n-1} .$$

Además ,

$$\begin{aligned} 0 &= \int p_n p_{n-2} \, d\alpha = A_n \int x p_{n-1} p_{n-2} \, d\alpha - C_n = A_n \int p_{n-1} (k_{n-2} x^{n-1} + \dots) d\alpha - C_n = \\ &= A_n \int p_{n-1} \left( \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} p_{n-1} + \dots \right) d\alpha - C_n = -C_n + A_n \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} . \end{aligned}$$

$$\text{Así que} \quad C_n = A_n \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} = \frac{k_n k_{n-2}}{k_{n-1}^2} = \frac{A_n}{A_{n-1}} .$$

Reemplazando , en la expresión  $\Delta_n(x,y) = p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)$ , a  $p_{n+1}$  por su igual según (2) , se tiene

$$\Delta_n(x,y) = A_{n+1}(x-y)p_n(x)p_n(y) + C_{n+1} \{p_n(x) \cdot p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x) \cdot p_n(y)\}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{k_n}{k_{n+1}} \cdot \frac{\Delta_n(x,y)}{x-y} &= p_n(x) \cdot p_n(y) + \frac{k_{n-1}}{k_n} \cdot \frac{\Delta_{n-1}(x,y)}{x-y} = p_n(x) \cdot p_n(y) + p_{n-1}(x)p_{n-1}(y) + \\ &+ \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} \cdot \frac{\Delta_{n-2}(x,y)}{x-y} = \dots = \sum_1^n p_j(x) \cdot p_j(y) + \frac{k_0}{k_1} \cdot \frac{\Delta_0(x,y)}{x-y} . \end{aligned}$$

$$\text{Pero,} \quad \Delta_0 = p_1(x) \cdot p_0(y) - p_0(x) \cdot p_1(y) = k_0 (p_1(x) - p_1(y)) = k_0 \cdot k_1 \cdot (x-y) ,$$

$$\text{de modo que} \quad \frac{k_0}{k_1} \cdot \frac{\Delta_0}{x-y} = p_0(x) \cdot p_0(y) = k_0^2 . \quad \text{Q.E.D.}$$

2. Introduciremos ahora los polinomios de Legendre. La ecuación diferencial de Legendre es

$$(3) \quad (1-z^2)w'' - 2zw' + n(n+1)w \equiv [(1-z^2)w']' + n(n+1)w = 0 \quad ,$$

donde  $-1 < z < 1$  y  $n = 0, 1, 2, \dots$  (ver [6]) .

El polinomio de Legendre

$$(4) \quad P_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \cdot \frac{(z-1)^k}{(k!)^2 2^k}$$

es una solución de (3) acotada en 1 y en -1. Toda otra solución acotada en ambos extremos coincidirá con (4) salvo por un factor constante.

Además,  $P_n$  posee  $n$  ceros reales y distintos en  $(-1,1)$  y verifica la fórmula siguiente, debida a Rodrigues:

$$(5) \quad P_n(z) = \frac{1}{2^n (n!)} \cdot \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n .$$

Usando la fórmula de Rodrigues e integrando por partes obtenemos:

$$\int_{-1}^1 z^k \cdot P_n(z) dz = 0 \quad (k = 0, \dots, n-1) .$$

Luego ,

$$(6) \quad \int_{-1}^1 P_n(z) \cdot P_m(z) dz = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{2}{2n+1} & (m=n) . \end{cases}$$

Así que el sistema  $\left\{ p_n(z) = P_n(z) \cdot \sqrt{\frac{2n+1}{2}} ; n=0,1,2,\dots \right\}$  es ortonormal y completo (esto último es consecuencia inmediata del teorema de aproximación de Weierstrass).

Por otra parte, valen las siguientes estimaciones:

$$(7) \quad \begin{aligned} (1-x^2)^{1/4} \cdot \sqrt{n+1} \cdot |P_n(x)| &\leq A , \quad -1 < x < 1 , \\ (1-x^2)^{-1/4} \cdot \sqrt{n+1} \cdot |P_n(x) - P_{n+2}(x)| &\leq A , \quad A \text{ independiente de } n . \end{aligned}$$

El lector interesado puede consultar el libro de Szegő sobre polinomios ortogonales. Nuestro objetivo es ahora demostrar el siguiente teorema.

TEOREMA 2 . i) Los polinomios de Legendre forman una base en  $L^p$  ,  $-1 < x < 1$ , cuando  $4/3 < p < 4$  ;

ii) el resultado i) no es válido cuando  $p=4$  o  $p=4/3$  .

La primera parte del teorema se debe a Pollard, y la segunda, a Newman y Rudin.

3. Siguiendo a Pollard, obtendremos primero una fórmula útil para el núcleo de

Dirichlet.

Lema 1. 
$$D_N(x,y) = \sum_0^n P_n(x)P_n(y) = A_1(x,y) + A_2(x,y) - A_3(x,y),$$

donde

$$A_1(x,y) = \frac{(N+2)(N+1)}{2(2N+3)} P_{N+1}(x) \frac{P_N(y) - P_{N+2}(y)}{x-y},$$

$$A_2(x,y) = \frac{(N+2)(N+1)}{2(2N+3)} \cdot [P_{N+2}(x) - P_N(x)] \frac{P_{N+1}(y)}{x-y} = A_1(y,x),$$

$$A_3(x,y) = \frac{N+1}{2} \cdot P_{N+1}(x) \cdot P_{N+1}(y).$$

Demostración. Teniendo en cuenta que

$$P_n = P_n \cdot \sqrt{\frac{2n+1}{2}}, \quad k_n = \frac{(2n)! \sqrt{n+1/2}}{2^n (n!)^2},$$

la fórmula de Christoffel nos da

$$D_N(x,y) = \frac{N+1}{2} \cdot \frac{P_{N+1}(x) P_N(y) - P_N(x) \cdot P_{N+1}(y)}{x-y}$$

Pero ,

$$D_N(x,y) + D_{N+1}(x,y) = \frac{N+1}{2} \cdot P_{N+1}(x) \cdot \frac{P_N(y) - P_{N+2}(y)}{x-y} +$$

$$+ \frac{N+1}{2} \cdot P_{N+1}(y) \cdot \frac{P_{N+2}(x) - P_N(x)}{x-y} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{P_{N+2}(x) \cdot P_{N+1}(y) - P_{N+1}(x) \cdot P_{N+2}(y)}{x-y} \right\}$$

Ahora bien, la expresión entre llaves es igual a  $2D_{N+1}(x,y)/(N+2)$  , así que

$$(8) \quad D_N(x,y) + \left(1 - \frac{1}{N+2}\right) D_{N+1}(x,y) = \frac{N+1}{2} \cdot P_{N+1}(x) \cdot \frac{P_N(y) - P_{N+2}(y)}{x-y} +$$

$$+ \frac{N+1}{2} \cdot P_{N+1}(y) \cdot \frac{P_{N+2}(x) - P_N(x)}{x-y}$$

Como  $D_{N+1}(x,y) = D_N(x,y) + \left(N + \frac{3}{2}\right) P_{N+1}(x) P_{N+1}(y)$  , tenemos

$$(9) \quad D_N(x,y) + \left(1 - \frac{1}{N+2}\right) \cdot D_{N+1}(x,y) = \left(2 - \frac{1}{N+2}\right) \cdot D_N(x,y) + \frac{N+1}{N+2} \left(N + \frac{3}{2}\right) P_{N+1}(x) \cdot P_{N+1}(y)$$

Finalmente , (8) y (9) implican

$$(10) \quad D_N(x,y) = A_1(x,y) + A_2(x,y) - A_3(x,y) . \quad \text{Q.E.D.}$$

4. El teorema 2 es un caso particular de los resultados que presentaremos en el capítulo XI sobre polinomios de Jacobi. Sin embargo, demostraremos ahora la parte i) de dicho teorema, porque a esta altura la prueba no es muy larga y prepara el terreno para lo que seguirá.

Consideremos los siguientes operadores en  $L^p$ :

$$(11) \quad T_i f(x) = \text{v.p.} \int_{-1}^1 A_i(x,y) f(y) dy \quad , \quad i = 1, 2, 3.$$

La continuidad, uniforme en  $N$ , de estos tres operadores es suficiente para probar el teorema 2, como ya hemos puesto de manifiesto. Estudiemos primero a  $T_3$ . A partir de la definición de  $A_3$  y de (7) obtenemos la siguiente estimación, en la que  $C$  es una constante independiente de  $n$ :

$$(12) \quad |A_3(x,y)| \leq C \cdot (1-x^2)^{-1/4} \cdot (1-y^2)^{-1/4}$$

Como  $(1-x^2)^{-1/4} \in L^p \cap L^{p^*}$ ,  $-1 < x < 1$ , cuando y sólo cuando  $p \cdot p^* < 4$ , es decir, cuando y sólo cuando  $4/3 < p < 4$ , sólo falta ahora estudiar a  $T_1$  y  $T_2$ .

Teniendo en cuenta que

$$\frac{2N+3}{N+2} T_1 f(x) = \text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{N+1}{2} P_{N+1}(x) \cdot \frac{P_N(y) - P_{N+2}(y)}{x-y} \cdot f(y) dy ,$$

se ve que la continuidad uniforme de  $T_1$  queda reducida a la del siguiente operador

$$(13) \quad \text{v.p.} \int_{-1}^1 \alpha(x) \cdot \beta(y) \cdot \left( \frac{1-y^2}{1-x^2} \right)^{1/4} \frac{f(y)}{x-y} dy ,$$

donde  $\alpha(x) = (N+2)^{1/2} P_{N+1}(x) \cdot (1-x^2)^{1/4}$ ,  $\beta(y) = (N+1)^{1/2} \cdot (1-y^2)^{-1/4} \cdot (P_N(y) - P_{N+2}(y))$ .

Ahora bien,  $\alpha$  y  $\beta$  están acotadas en  $(-1,1)$ , cf (7), de modo que la continuidad uniforme de (13) es implicada por la continuidad del operador:

$$(14) \quad \text{v.p.} \int_{-1}^1 \left( \frac{1-y^2}{1-x^2} \right)^{1/4} \frac{f(y)}{x-y} dy .$$

$T_2$  puede ser analizado de la misma manera y entonces se obtiene, en lugar de (14), el operador definido por (15):

$$(15) \quad \text{v.p.} \int_{-1}^1 \left( \frac{1-x^2}{1-y^2} \right)^{1/4} \frac{f(y)}{x-y} dy .$$

Pero el estudio de uno de los operadores precedentes puede ser reducido al del otro, ya que (15) es el adjunto de (14). Nos ocuparemos de (14).

Por simetría es claro que, en lugar de (14), será suficiente considerar

$$(16) \quad \text{v.p.} \int_{-1}^1 \left( \frac{1-y^2}{1-x^2} \right)^{1/4} \frac{f(y)}{x \pm y} dy , \quad 0 \leq x \leq 1 .$$

Cambiando variables en (16) ( $1-x = X$ ,  $1-y = Y$ ) y omitiendo factores acotados en  $X$  o en  $Y$ , obtendremos, respectivamente para "+" y "-":

$$(18) \quad \text{v.p.} \int_0^1 \left( \frac{Y}{X} \right)^{1/4} \cdot \frac{f(1-Y)}{Y-X} dY \quad \text{y} \quad \text{v.p.} \int_0^1 \left( \frac{Y}{X} \right)^{1/4} \cdot \frac{f(1-Y)}{2-X-Y} dY .$$

Y en virtud de lo expuesto en el capítulo VII, resulta por fin que los operadores en (18) serán continuos cuando  $-1/p < -1/4 < 1/p^*$ . Esto implica la continuidad de (14) para los mismos valores de  $p$  y, por lo tanto, (15) será continuo cuando  $-1/p < 1/4 < 1/p^*$ . O sea que, si  $4/3 < p < 4$ , ambos operadores son continuos. Q.E.D.

#### BIBLIOGRAFIA

- [ 1 ] ASKEY R. y WAINGER S., *Norm inequalities for some orthogonal series*, Bull. A.M.S., Vol.72, N°5 (1966) 808-823.
- [ 2 ] NEWMAN J. y RUDIN W., *On mean convergence of orthogonal series*, Proc. of the A.M.S., 3 (1952), 219-222.
- [ 3 ] POLLARD H., *The mean convergence of orthogonal series*, I, Trans.A.M.S., 62 (1947), 387-403.
- [ 4 ] POLLARD H., *The mean convergence of orthogonal series*, II, Trans.A.M.S., 63 (1948), 355-367.
- [ 5 ] POLLARD H., *The mean convergence of orthogonal series*, III, Duke Math. Journal, 16 (1949), 189-191.
- [ 6 ] SZEGÖ G., *Orthogonal polynomials*, (1967), A.M.S. Colloquium publications, vol. XXIII.

Para el caso de las series de Laguerre ( $0 \leq x < \infty$ ) y de Hermite ( $-\infty < x < +\infty$ ),

que no son tratadas en este curso, puede consultarse:

- [ 7 ] ASKEY R. y WAINGER S., *Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series* , Am. J. of Math., Vol. LXXXVII, N°3 (1965), 695-708.
- [ 8 ] MUCKENHOUPPT B., *Mean convergence of Hermite and Laguerre series*, I, II, Trans. A.M.S., Vol.147 (1970) , 419 - 460.

*Messer Lodovico, dove avete  
mai trovate tante fanfaluche ?*

## SEGUNDA PARTE

### CAPITULO X

#### TEORIA DE INTERPOLACION DE OPERADORES (CONTINUACION).

1. En este capítulo mostraremos cómo la teoría de los espacios de Lorentz se presta para la formulación general y demostración simple de teoremas de interpolación semejantes al de Marcinkiewicz y al de Riesz-Thorin.

Sea  $\mathcal{M}$  un espacio de medida totalmente  $\sigma$ -finita  $m$ . (Es decir, para todo  $A$  medible  $m(A) \geq 0$  y  $\mathcal{M} = \bigcup_1^\infty A_j$ ,  $m(A_j) < \infty$ .) Designemos con  $\mathcal{F}$  a la familia de funciones medibles  $f$  definidas sobre  $\mathcal{M}$  a valores complejos (finitas c.d.) tales que para cierto número  $y$ ,  $y=y(f)$ ,  $m\{x \in \mathcal{M}: |f(x)| > y\} < \infty$ .  $\mathcal{F}$  es un subespacio de la familia de funciones medibles.

Definición 1. Sea  $f \in \mathcal{F}$ ,  $0 < y$ ,  $t < \infty$ .

$$i) \quad f_*(y) = m\{x \in \mathcal{M}: |f(x)| > y\}.$$

$$ii) \quad f^*(t) = \inf\{y : f_*(y) \leq t\}.$$

Es fácil ver que  $f_*(y)$  y  $f^*(t)$  son funciones no crecientes, continuas a derecha definidas en  $(0, \infty)$ . Si calculamos  $(f^*)_*$  usando en lugar de  $m$  la medida de Lebesgue, resulta:

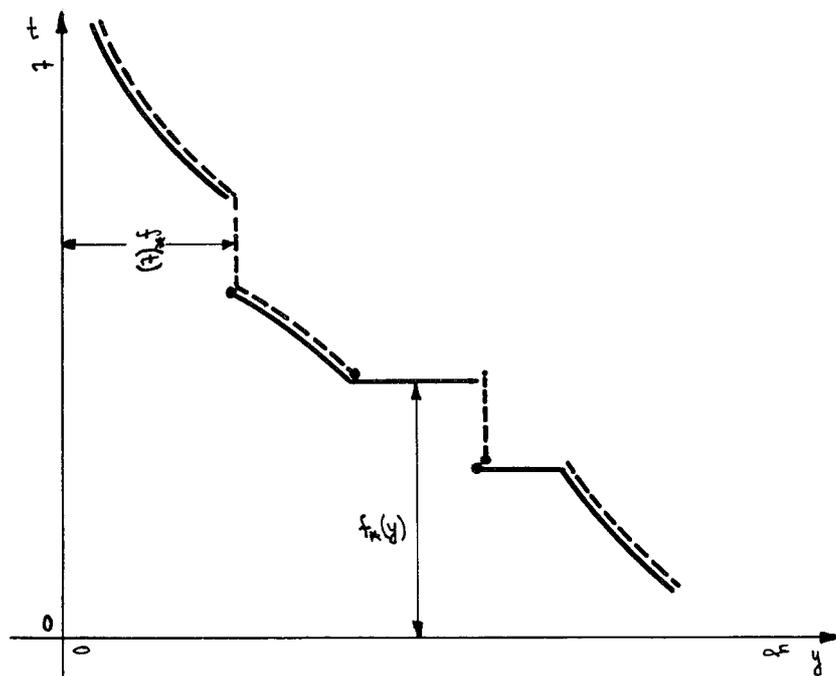
$$(1) \quad (f^*)_*(y) = f_*(y), \quad \forall y \in (0, \infty).$$

$f_*$  se denomina la *función de distribución* de  $f$  y la igualdad precedente dice que  $f$  y  $f^*$  tienen la misma función de distribución. Por eso a  $f^*(t)$  se la llama la reordenada no creciente de  $f$ .

Es muy fácil verificar las siguientes desigualdades (válidas donde  $f^*$  y  $f_*$  están definidas):

$$(2) \quad \begin{cases} f^*(f_*(t)) \leq t & ; & f_*(f^*(z)) \leq z, \\ f^*(f_*(t) - \epsilon) > t & ; & f_*(f^*(t) - \epsilon) > t, \quad \epsilon > 0. \end{cases}$$

Más precisamente, vale el signo = en las dos primeras, excepto cuando la función que entra en la composición en segundo lugar tiene un salto en el valor tomado por la otra función en  $t$ . Es decir, que esencialmente una es la inversa de la otra.



Definición 2. Sean  $p, q > 0$ , y  $f \in \mathcal{F}$ . Definimos  $\|f\|_{p,q}^*$  por :

$$\left[ \frac{q}{p} \int_0^\infty \left( f^*(t) t^{1/p} \right)^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q} \quad \text{si } q < \infty, \quad p < \infty,$$

$$\text{Sup.}_{0 < t < \infty} \left( f^*(t) t^{1/p} \right) \quad \text{si } q = \infty, \quad p \leq \infty.$$

El caso  $q < \infty, p = \infty$  será excluido pues para  $f$  igual a la función característica de un conjunto de medida finita positiva tendríamos  $\|f\|_{\infty, q}^* = \infty$ , hecho que no se verifica en todos los otros casos. Es decir, en la definición:  $p = \infty$  implica  $q = \infty$ .

Los espacios de Lorentz  $L_{p,q}$  se definen ahora como

$$L_{p,q} = \{ f \in \mathcal{F} : \|f\|_{p,q}^* < \infty \}.$$

$$\text{Si } p=q, \quad \|f\|_{p,q}^* = \left( \int_0^\infty |f^*(t)|^p dt \right)^{1/p} = \left( \int_{\mathcal{M}} |f(x)|^p dm \right)^{1/p} =$$

$$= \|f\|_p, \quad \text{así que } L_{p,p} = L^p.$$

La funcional  $\|\cdot\|_{p,q}^*$  no es en general una norma, pues no siempre vale la desi-

gualdad triangular. Sin embargo, pronto veremos que se pueden introducir métricas en  $L_{pq}$  respecto a las cuales este espacio es de Fréchet o de Banach y donde  $\{ f: \|f\|_{p,q}^* < 1/n \}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , es una base de entornos del origen. Por ejemplo,  $L_{pq}$  con la distancia  $\rho$  definida por  $\rho(f,g) = (\|f-g\|_{pq}^*)^{p\tau/(p+\tau)}$ ,  $\tau = q \wedge 1$ , es un espacio de Fréchet.

2. Antes de seguir adelante demostraremos desigualdades debidas a Hardy que necesitaremos enseguida.

TEOREMA 1. Sean  $Q \geq 1$ ,  $R > 0$ ,  $f \geq 0$ . Entonces:

$$\left[ \int_0^\infty \left( \int_0^t f(y) dy \right)^Q t^{-R-1} dt \right]^{1/Q} \leq \frac{Q}{R} \left[ \int_0^\infty \left( y \cdot f(y) \right)^Q y^{-R-1} dy \right]^{1/Q},$$

$$\left[ \int_0^\infty \left( \int_t^\infty f(y) dy \right)^Q t^{R-1} dt \right]^{1/Q} \leq \frac{Q}{R} \left[ \int_0^\infty \left( y \cdot f(y) \right)^Q y^{R-1} dy \right]^{1/Q}.$$

Demostración. Demostraremos solamente la primera desigualdad pues la otra se obtiene en forma totalmente análoga.

Por la desigualdad de Hölder:

$$\left( \int_0^t f(y) dy \right)^Q \leq \int_0^t f(y)^Q \cdot y^{\alpha Q} dy \left( \int_0^t y^{-\alpha Q'} dy \right)^{Q/Q'} = \frac{t^{(Q/Q') - \alpha Q}}{(1 - \alpha Q')^{Q-1}} \cdot \int_0^t f(y)^Q y^{\alpha Q} dy, \quad 1/Q + 1/Q' = 1,$$

donde  $\alpha$  es un número real tal que  $\alpha Q' < 1$  y que luego fijaremos más precisamente. Entonces, utilizando esta estimación en el primer miembro de la desigualdad a demostrar:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{-R-1} \left( \int_0^t f(y) dy \right)^Q dt &\leq \int_0^\infty \frac{t^{-R+Q(1-\alpha)-2}}{(1-\alpha Q')^{Q-1}} \left( \int_0^t f(y)^Q y^{\alpha Q} dy \right) dt = \\ &= \frac{1}{(1-\alpha Q')^{Q-1}} \int_0^\infty f(y)^Q y^{\alpha Q} \left( \int_y^\infty t^{-R-2+Q(1-\alpha)} dt \right) dy = \\ &= \frac{1}{(1-\alpha Q')^{Q-1} (\alpha Q + R + 1 - Q)} \int_0^\infty f(y)^Q y^{Q-R-1} dy. \end{aligned}$$

El último paso se obtuvo suponiendo  $\alpha Q + R + 1 - Q > 0$ , que se logra, por

ejemplo, con  $\alpha$  tal que  $0 < 1 - \alpha Q' = \alpha Q + R + 1 - Q$ , es decir,  $\alpha = (Q-R)/QQ'$ .

Resulta así:

$$\int_0^{\infty} t^{-R-1} \left( \int_0^t f(y) dy \right)^Q dt \leq \left( \frac{Q}{R} \right)^Q \int_0^{\infty} f(y)^Q y^{Q-R-1} dy,$$

que es la desigualdad a probar.

Observación 1. La elección de la constante  $\alpha$  podría haberse obtenido minimizando la constante  $C(\alpha) = 1/(1-\alpha Q')^{Q-1} (Q(\alpha-1) + R + 1)$ . Esto suministra una constante más pequeña que  $(Q/R)^Q$  (mejorando así la desigualdad final) pero más complicada.

3. Supondremos en lo que sigue que  $\mathcal{M}$  es un espacio de medida no atómico con  $m(\mathcal{M}) = \infty$ . Esto no es una restricción esencial y evita complicaciones que son innecesarias frente a los objetivos perseguidos. Si  $\mathcal{M}$  tiene átomos, éstos pueden sustituirse por segmentos con la medida de Lebesgue y de longitud igual a la medida del átomo, y si  $\mathcal{M}$  no tiene medida infinita puede agregarse una semirrecta. Así, pasamos de  $(\mathcal{M}, m)$  a  $(\mathcal{M}', m')$ , este último satisfaciendo las condiciones que exigimos. La familia  $\mathcal{F}(\mathcal{M}, m)$  es identificable con un subespacio de  $\mathcal{F}(\mathcal{M}', m')$ .

Definición 3. Sean  $f \in \mathcal{F}$ ,  $r \in (0, \infty)$  y  $f^{**}(t) = \left[ \frac{1}{t} \int_0^t (f^*(s))^r ds \right]^{1/r}$ .

Definamos  $\|f\|_{p,q}$  de la misma manera que en la definición 2 pero con  $f^*$  reemplazada por  $f^{**}$ :

$$\|f\|_{p,q} = \left[ \frac{q}{p} \int_0^{\infty} (f^{**}(t) t^{1/p})^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q} = \left[ \int_0^{\infty} (f^{**}(t))^q dt^{q/p} \right]^{1/q}$$

si  $0 < q < \infty$ ,  $0 < p < \infty$ ,

$$\|f\|_{p,\infty} = \sup_{0 < t < \infty} f^{**}(t) t^{1/p}, \quad \text{si } 0 < p \leq \infty.$$

En la definición de  $\|\cdot\|_{p,q}$  aparece un  $r \in (0, \infty)$  que no incluiremos en general como sub o superíndice pero que no debe olvidarse, y que eventualmente cambia de un contexto a otro.

TEOREMA 2. i) Sean  $0 < r < \infty$ ,  $\infty \geq q \geq r$ ,  $\infty \geq p > r$ . Entonces, si  $f \in \mathcal{F}$ :

$$\|f\|_{p,q}^* \leq \|f\|_{p,q} \leq \frac{p^{1/r}}{(p-r)^{1/r}} \|f\|_{p,q}^* .$$

ii) Sean  $\infty \geq q \geq r > 0$  ,  $r \in (0,1)$ . Entonces

$$\|f+g\|_{p,q}^r \leq \|f\|_{p,q}^r + \|g\|_{p,q}^r , \text{ para } f,g \in \mathcal{F}.$$

iii) Bajo las hipótesis ii) tenemos:

$$\|f+g\|_{p,q} \leq 2^{\frac{1}{r}-1} [\|f\|_{p,q} + \|g\|_{p,q}] .$$

Demostración. i) Como  $f^*$  es no creciente,  $f^{**}(t) \geq f^*(t)$  y la primera desigualdad es obvia. Por otra parte,  $f^*(t) \leq \|f\|_{p,\infty}^* \cdot t^{-1/p}$  y entonces

$$f^{**}(t) \leq \|f\|_{p,\infty}^* \left( t^{-1} \int_0^t s^{r/p} ds \right)^{1/r} = \frac{\|f\|_{p,\infty}^* \cdot t^{-1/p}}{(1-r/p)^{1/r}} \text{ implica}$$

$$\|f\|_{p,\infty} \leq (1-r/p)^{-1/r} \|f\|_{p,\infty}^* .$$

Sea  $q < \infty$ . Aplicando la primera desigualdad de Hardy a:

$$\|f\|_{p,q}^r = \left( \frac{q}{p} \int_0^\infty \left[ \int_0^t f^{*r}(s) ds \right]^{q/r} t^{-\frac{q}{r} + \frac{q}{p} - 1} dt \right)^{r/q} , \text{ resulta}$$

$$\|f\|_{p,q}^r \leq \frac{1}{1-r/p} \left[ \frac{q}{p} \int_0^\infty f^*(t)^q \cdot t^{\frac{q}{p} - 1} dt \right]^{r/q} = \frac{1}{1-r/p} \|f\|_{p,q}^{*r} .$$

ii) Como  $\mathcal{M}$  es un espacio de medida no atómico, vemos directamente de la definición de  $f^{**}$  que:

$$(3) \quad f^{**}(t)^r = \sup_{E: m(E) \geq t} \left( \frac{1}{m(E)} \int_E |f(s)|^r m(ds) \right) .$$

Como  $0 < r \leq 1$  ,

$$\frac{1}{m(E)} \int_E |f+g|^r m(ds) \leq \frac{1}{m(E)} \int_E (|f|^r + |g|^r) m(ds) ,$$

y por lo tanto ,

$$(4) \quad [(f+g)^{**}(t)]^r \leq [f^{**}(t)]^r + [g^{**}(t)]^r .$$

Entonces, si  $q < \infty$ , de (4) obtenemos:

$$\|f+g\|_{p,q}^r = \left[ \int_0^\infty \left\{ \left( (f+g)^{**}(t) \right)^r dt^{q/p} \right\}^{r/q} \right]^{r/q} \leq \left[ \int_0^\infty \left( f^{**}(t)^r + g^{**}(t)^r \right)^{q/r} dt^{q/p} \right]^{r/q} \leq \|f\|_{p,q}^r + \|g\|_{p,q}^r,$$

y si  $q = \infty$ , usando nuevamente (4):

$$\|f+g\|_{p,\infty}^r = \sup_t (f+g)^{**}(t)^r \cdot t^{-r/p} \leq \|f\|_{p,\infty}^r + \|g\|_{p,\infty}^r.$$

iii) Sean  $a$  y  $b$  números no negativos. Usando la desigualdad de Hölder con el exponente  $1/r$  obtenemos:

$$(5) \quad a^r + b^r = a^r \cdot 1 + b^r \cdot 1 \leq (a+b)^r \cdot 2^{1-r}.$$

Tomando  $a = \|f\|_{p,q}$  y  $b = \|g\|_{p,q}$  de ii) resulta:

$$\|f+g\|_{p,q}^r \leq 2^{1-r} \left[ \|f\|_{p,q} + \|g\|_{p,q} \right]^r. \quad \text{Q.E.D.}$$

Es decir, si  $0 < r \leq 1$ ,  $r \leq q \leq \infty$ ,  $r < p \leq \infty$ , entonces,  $\|f\|_{p,q}$  y  $\|f\|_{p,q}^*$  definen bases de entornos de 0 equivalentes, y  $d(f,g) = \|f-g\|_{p,q}^r$  define una métrica en  $L_{p,q}$ . Si  $p > 1$ ,  $q \geq 1$  se puede tomar  $r=1$  y la métrica es inducida por la norma  $\|\cdot\|_{p,q}$ .

Corolario. Si  $p > 1$  y  $q \geq 1$ , entonces  $L_{p,q}$  es un espacio normado con norma  $\|\cdot\|_{p,q}$  definida con  $r=1$ .

TEOREMA 3.  $L_{p,q}$  es completo respecto a la métrica  $d(f,g) = \|f-g\|_{p,q}^r$  cuando  $0 < r \leq 1$ ,  $r \leq q$ ,  $r < p$  y las funciones simples son densas en él si  $q \neq \infty$ . (cf. [8]).

A este teorema no lo demostraremos porque no será utilizado en lo que sigue. Sin embargo, nos asegura la validez del siguiente.

Corolario.  $p > 1$  y  $q \geq 1$  implican que si  $r=1$ ,  $\{L_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q}\}$  es un espacio de Banach, y en todo caso  $L_{p,q}$  es un espacio de Fréchet con la métrica  $d$ .

TEOREMA 4. i) Si  $q_2 > q_1$  entonces  $L_{p,q_2} \supset L_{p,q_1}$  y  $\|f\|_{p,q_1} \geq \|f\|_{p,q_2}$ ,  $\|f\|_{p,q_1}^* \geq \|f\|_{p,q_2}^*$ .

$$y \quad \|f\|_{p,q_1}^* \geq \|f\|_{p,q_2}^* .$$

$$\text{ii) Si } f, g \in L_{p,q} \text{ entonces } \|f+g\|_{p,q}^* \leq C_{p,q} \{ \|f\|_{p,q}^* + \|g\|_{p,q}^* \}$$

$$\text{con } C_{p,q} = 2^{1/p + 1/q' - 1}, \quad q' = q \wedge 1$$

iii) Si  $f$  y  $g \in \mathcal{F}$  y  $t_1, t_2 > 0$  entonces:

$$(f+g)^*(t_1+t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2).$$

Demostración. i) Sea  $U(x)$  igual a la función característica  $\chi_{(0,a)}$  del inter-

valo  $(0,a)$  y  $\gamma > 0, R > 1$ . Entonces:

$$(6) \quad \left( \int_0^\infty U(x)^R dx^\gamma \right)^{1/R} \leq \int_0^\infty U(x) dx^{\gamma/R} .$$

Si  $U(x) = \sum_1^N C_i \chi_{(0,d_i)}(x)$ ,  $C_i > 0$ , entonces el primer miembro de (6) es

menor o igual que:

$$\sum_1^N C_i \left( \int_0^\infty \chi_{(0,d_i)}^R dx^\gamma \right)^{1/R} \leq \sum_1^N C_i \int_0^\infty \chi_{(0,d_i)} dx^{\gamma/R} = \int_1^N U(x) dx^{\gamma/R} .$$

Luego, (6) vale para funciones simples no crecientes, y por aproximación por éstas, para toda función no creciente definida en  $(0, \infty)$ .

Si  $q_2 < \infty$ , i) sigue de (6) tomando  $R = q_2/q_1, \gamma = q_2/p$ :

$$\|f\|_{p,q_1}^{q_1} = \int_0^\infty f^{**}(t)^{q_1} dt^{q_1/p} \geq \left( \int_0^\infty f^{**}(t)^{q_2} dt^{q_2/p} \right)^{q_1/q_2} .$$

Si  $q_2 = \infty$ ,  $\|f\|_{p,q_1}^{q_1} = \int_0^\infty f^{**}(t)^{q_1} dt^{q_1/p} \geq f^{**}(t)^{q_1} \cdot t^{q_1/p}$  por ser  $f^{**}$  no

creciente. Luego,  $\|f\|_{p,q_1} \geq f^{**}(t) \cdot t^{1/p}$ , para todo  $t$ .

(La misma demostración sirve para las funcionales  $\|\cdot\|_{p,q}^*$  pues de  $f^{**}(t)$  sólo se usó el hecho que es no creciente y por lo tanto reemplazable por  $f^*(t)$ ).

iii) Sea  $\mu = f^*(t_1) + g^*(t_2)$ . Entonces

$$\{x; |f+g| > \mu\} \subset \{x; |f| > f^*(t_1)\} \cup \{x; |g| > g^*(t_2)\} ,$$

$$\text{implica } (f+g)_*(\mu) \leq f_*(f^*(t_1)) + g_*(g^*(t_2)) \leq (\text{por (2)}) \leq t_1 + t_2 .$$

De (2) y la monotonía de  $(f+g)^*$  resulta finalmente:

$$\mu \geq (f+g)^*((f+g)_*(\mu)) \geq (f+g)^*(t_1+t_2).$$

ii) Es sugerida por una combinación de i) y iii) del Teorema 2. Esto sin embargo da una constante  $c_{p,q}$  más grande que la indicada. Una demostración directa se obtiene usando la desigualdad recién demostrada:

$(f+g)^*(t) \leq f^*\left(\frac{t}{2}\right) + g^*\left(\frac{t}{2}\right)$ . De aquí, si  $q < \infty$ :

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{p,q}^* &\leq \left\{ \int_0^\infty \left[ f^*\left(\frac{t}{2}\right) + g^*\left(\frac{t}{2}\right) \right]^q dt^{q/p} \right\}^{1/q} = \\ &= 2^{1/p} \left\{ \int_0^\infty \left[ f^*(t) + g^*(t) \right]^q dt^{q/p} \right\}^{1/q}. \text{ Esto es} \\ &\leq 2^{1/p} \left( \|f\|_{p,q}^* + \|g\|_{p,q}^* \right), \text{ si } q \geq 1. \text{ Y si } q < 1 \end{aligned}$$

$$\text{es } \leq 2^{1/p} \left( \|f\|_{p,q}^* + \|g\|_{p,q}^* \right)^{1/q} \leq (\text{por (5)}) \leq 2^{1/p + 1/q - 1} \left( \|f\|_{p,q}^* + \|g\|_{p,q}^* \right).$$

Recolectando resultados tenemos la tesis para  $\infty > q > 1$ .

Más sencillo es el caso  $q = \infty$  que se deja al lector. Q.E.D.

4. Sea  $T$  una transformación definida sobre las funciones simples de  $(\mathcal{N}, m)$  a valores en el subespacio  $\mathcal{F}$  de la familia de funciones medibles definidas en otro espacio semejante  $(\mathcal{N}', m')$ . Diremos que  $T$  es casi lineal si existe una constante  $K$  tal que para  $f$  y  $g$  simples vale:

$$|T(f+g)| \leq K(|Tf| + |Tg|), \text{ c.d.}$$

Nuestro próximo objetivo es demostrar (cf. [8]) el siguiente resultado:

TEOREMA 5. (Calderón-Hunt). Sean  $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$ ,  $p'_0 \neq p'_1$ ,  $0 < q_i \leq \infty$  y  $p, p'$  definidos por:

$$\frac{1}{p} = \frac{\vartheta}{p_1} + \frac{1-\vartheta}{p_0}, \quad \frac{1}{p'} = \frac{\vartheta}{p'_1} + \frac{1-\vartheta}{p'_0}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Si  $T$  es un operador casi lineal y

$$(6) \quad \begin{cases} \|Tf\|_{p_0, \infty}^* \leq B_0 \|f\|_{p_0, q_0}^* \\ \|Tf\|_{p_1, \infty}^* \leq B_1 \|f\|_{p_1, q_1}^* \end{cases}, \quad \text{para toda } f \text{ simple, entonces:}$$

$$(7) \quad \|Tf\|_{p, \sigma}^* \leq B_\vartheta \|f\|_{p, \tau}^*, \quad \text{cuando } \sigma \geq \tau,$$

Además  $B_\vartheta = O(1) \cdot \vartheta^{-1/r} (1-\vartheta)^{-1/r} B_0^{1-\vartheta} B_1^\vartheta$ , donde  $r(> 0)$  y  $O(1)$  dependen de

$p_i, q_i, p'_i, K, \tau$  y  $\vartheta$ .

5. Antes de pasar a la demostración del teorema trataremos de examinar más detenidamente los resultados sobre interpolación citados en estas notas para poder ubicar entre ellos al teorema 5.

a) Es fácil ver que el operador lineal  $Tf(x) = \int_0^1 f(y) dy/\sqrt{x}$ ,  $0 < x < 1$ ,  $f$  simple, es de tipo débil  $(r, 2)$  para todo  $r \in [1, \infty)$  pero no de tipo  $(r, 2)$  para  $r \geq 1$  alguno.

b) El operador  $T$  tiene por adjunto a  $T^* g(x) = \int_0^1 \frac{g(y)}{y} dy$ .

Este operador es de tipo restringido  $(2, p)$ , para todo  $p \in [1, \infty]$ . En efecto, si  $\chi$  es la función característica del conjunto  $E \subset (0, 1)$ :

$$\|T^*\chi\|_p = \|T^*\chi\| = \int_E y^{-1/2} dy \leq \int_0^{|E|} y^{-1/2} dy = 2|E|^{1/2} = 2\|\chi\|_2.$$

$T^*$  no es de tipo  $(2, p)$  para ningún  $p \in (1, \infty)$ . En efecto, si lo fuera sería  $T$  de tipo  $(p^*, 2)$ .

c) Esto prueba que el teorema de Marcinkiewicz no vale en segmentos horizontales y que el de Stein y Weiss no vale en segmentos verticales ni horizontales.

d) En [6] (y [2]) se exhiben ejemplos que muestran que el teorema de Marcinkiewicz no vale en el triángulo superior ni aún excluyendo horizontales.

Sin embargo siempre vale sobre verticales. En efecto, supongamos que

$$D_{Tf}(\lambda) \leq \left( \frac{M_i \|f\|_p}{\lambda} \right)^{q_i}, \quad i = 1, 2. \quad \text{Entonces,}$$

$$\int_0^{\infty} D_{Tf}(\lambda) \lambda^{q-1} d\lambda \leq \int_0^r (M_1 \|f\|_p)^{q_1} \lambda^{q-q_1} \frac{d\lambda}{\lambda} + \int_r^{\infty} (M_2 \|f\|_p)^{q_2} \lambda^{q-q_2} \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Si  $q_1 < q < q_2$  y  $r = \|f\|_p$ , obtenemos:  $\int |Tf|^q dx \leq C(q_1, q_2, q) \|f\|_p^q$ .

Siguiendo el mismo orden de ideas observamos que el teorema de M. Riesz sobre verticales se reduce a la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned} \int |Tf|^q dx &= \int |Tf|^{\alpha q_1} |Tf|^{(1-\alpha)q_2} dx \leq \left( \int |Tf|^{q_1} dx \right)^{\alpha} \cdot \left( \int |Tf|^{q_2} dx \right)^{1-\alpha} \\ &\leq M_1^{\alpha q_1/q} \cdot M_2^{(1-\alpha)q_2/q} \cdot \left( \int |f|^p dx \right)^{q/p} = M_1^{\vartheta} M_2^{1-\vartheta} \|f\|_p^q \quad \text{donde } \vartheta/q_1 + (1-\vartheta)/q_2 = q^{-1}. \end{aligned}$$

e) Sin embargo y a pesar de los contraejemplos citados en d) no es difícil ver que el tipo débil resulta de interpolar tipos débiles aun fuera del triángulo inferior de tipos. Para convencernos veamos el siguiente resultado (cf. [16], p. 193).

*Proposición 1. Si  $1 \leq p_i \leq \infty$ ,  $1 < s_i \leq \infty$  y  $T$  es lineal de tipo débil  $(p_1, s_1)$  y  $(p_2, s_2)$  entonces  $T$  es de tipo débil  $(p, s)$  donde  $\vartheta/p_1 + (1-\vartheta)/p_2 = 1/p$ ,  $\vartheta/s_1 + (1-\vartheta)/s_2 = 1/s$ .*

Para demostrar la proposición 1 haremos uso de una caracterización del tipo débil  $(p, s)$ .

Sea  $1 \leq s < \infty$ . Si  $\forall s'$  tal que  $0 < s' < s < \infty$ , para toda  $f \in S$  y todo  $X \subset \Omega_2$  con  $\mu_2(X) < \infty$  vale:

$$(8) \quad \left( \int_X |Tf|^{s'} d\mu_2 \right)^{1/s'} \leq \left[ M \left( \frac{s}{s-s'} \right)^{1/s'} \right] \mu_2(X)^{1/s' - 1/s} \|f\|_p,$$

diremos que  $T$  satisface la condición de Kolmogoroff  $(p, s)$ .

Si existe un  $s' < s$ ,  $s' > 0$  tal que  $\forall f \in S$  y  $\forall X \subset \Omega_2$  de medida finita vale (8) con el corchete reemplazado por una constante  $K$ , diremos que  $T$  satisface una condición débil de Kolmogoroff  $(p, s)$ , ([16], p.109).

*Proposición 2. a) Sea  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $1 \leq s < \infty$ . Si  $T$  es de tipo débil  $(p, s)$  entonces  $T$  satisface la condición de Kolmogoroff  $(p, s)$  donde  $M$  es la "nor-*

ma" de tipo débil.

$\beta$ ). Si  $T$  satisface una condición débil de Kolmogoroff  $(p, s)$  entonces  $T$  es de tipo débil  $(p, s)$  con norma  $\leq K$ .

$\gamma$ ) Estas proposiciones valen para  $s = \infty$  si convenimos en que en este caso  $s/(s-s') = 1$ .

En efecto, veamos  $\beta$ ). Sea  $X \subset \{|Tf| > \lambda\}$ .

$$\lambda^{s'} \cdot \mu_2(X) \leq \int_X |Tf|^{s'} d\mu_2 \leq K^{s'} \cdot \mu_2(X)^{1-s'/s} \cdot \|f\|_p^{s'}$$

implica:  $\mu_2(X) \leq \left(\frac{K}{\lambda} \|f\|_p\right)^s$ . El caso  $s = \infty$  lo dejamos al lector. Veamos

ahora  $\alpha$ ) y otra vez con  $s < \infty$ . Sea  $\tilde{D}(\lambda)$  la función de distribución de  $Tf$  en  $X$ . Entonces  $\mu_2(X) \geq \tilde{D}(\lambda) \leq D_{Tf}(\lambda) \leq (M \|f\|_p / \lambda)^s$ ;

$$\begin{aligned} \int_X |Tf|^{s'} d\mu_2 &= s' \int_0^\infty \lambda^{s'-1} \tilde{D}(\lambda) d\lambda = s' \left( \int_0^N \lambda^{s'-1} \tilde{D}(\lambda) d\lambda + \int_N^\infty \lambda^{s'-1} \tilde{D}(\lambda) d\lambda \right) \leq \\ &\leq s' \left( \int_0^N \lambda^{s'-1} \mu_2(X) d\lambda + \int_N^\infty \lambda^{s'-1} \left( \frac{M \|f\|_p}{\lambda} \right)^s d\lambda \right) = \\ &= N^{s'} \mu_2(X) + \frac{s'}{s-s'} (M \|f\|_p)^s N^{s'-s}. \end{aligned}$$

El último miembro es minimizado con  $N = M \|f\|_p \mu_2(X)^{-1/s}$ , y con ese valor de  $N$ , obtenemos (8).

Demostración de Proposición 1:

Si  $t$  es de tipo débil  $(p_i, s_i)$ ,  $i=0,1$ , con  $s_i > 1$ , entonces satisface condiciones de Kolmogoroff (8), en particular con  $s'_i = 1$ :

$$\int_X |Tf| d\mu_2 \leq M_i \frac{s_i}{s_i - 1} \mu_2(X)^{\left(1 - \frac{1}{s_i}\right)} \|f\|_{p_i} \text{ para toda } f \in S.$$

El teorema de Riesz-Thorin asegura que entonces vale:

$$\int_X |Tf| d\mu_2 \leq M_0^{1-\vartheta} M_1^\vartheta \left(\frac{s_0}{1-s_0}\right)^{1-\vartheta} \left(\frac{s_1}{1-s_1}\right)^\vartheta \mu_2(X)^{1-\frac{1}{s}} \|f\|_p$$

donde  $\frac{1}{p} = \frac{\vartheta}{p_1} + \frac{1-\vartheta}{p_0}$  ,  $\frac{1}{s} = \frac{\vartheta}{s_1} + \frac{1-\vartheta}{s_0}$  .

Pero ésta es la condición débil de Kolmogoroff (p,s) ,  $s'_i = 1$ . En consecuencia T es de tipo débil (p,s) con "norma" no mayor que

$$(9) \quad M_1^\vartheta M_0^{1-\vartheta} \left( \frac{s_1}{s_1-1} \right)^\vartheta \left( \frac{s_0}{s_0-1} \right)^{1-\vartheta} \quad \text{Q.E.D.}$$

El resultado precedente sugiere que si bien el teorema de Marcinkiewicz no vale en todo el cuadrado de tipos, debe tener algún sustituto. Como veremos en g) este rol lo desempeña ampliamente el teorema de Calderón-Hunt que no sólo generaliza al de Marcinkiewicz sino que también extiende al de Stein y Weiss con una ligera excepción (cf.[1]).

f) Estos autores en el trabajo ya mencionado muestran que, si  $1 < p < \infty$ ,  $1 \leq q < \infty$ , entonces: tipo débil restringido (p,q)  $\not\Rightarrow$  tipo débil (p,q)  $\not\Rightarrow$  tipo (p,q)

El tipo débil es consecuencia del tipo débil restringido en una clase muy amplia de transformaciones si  $p=1$ . Precisamente, si  $p=1$ ,  $1 < q < \infty$  y T es de tipo débil restringido (1,q) entonces es de tipo débil (1,q) ([8],[12],[5]). Esta proposición es un corolario del siguiente resultado como veremos más adelante (en h)).

g) Proposición 3. Sea T un operador lineal definido sobre las funciones simples de un espacio  $(\mathcal{N}, m)$  a valores en un espacio de Banach. Si sobre las funciones características  $\chi$  de conjuntos de medida finita vale:  $\|T\chi\|_B \leq C \|\chi\|_{p1}^*$  con C independiente de  $\chi$ ,  $1 \leq p < \infty$ , entonces una desigualdad semejante vale para toda función simple:  $\|Tf\|_B \leq 2C \|f\|_{p1}^*$  .

Demostración. Supongamos que  $f \geq 0$  es una función simple

$$\sum_1^N C_j \chi_{E_j} \quad , \quad E_j \cap E_k = \emptyset \quad \text{si } j \neq k \quad , \quad C_j > 0 \quad . \quad f \text{ puede escribirse como}$$

$$\sum_1^N d_j \chi_{F_j} \quad \text{con } d_j \geq 0 \quad , \quad F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_N \quad . \quad \text{Por lo tanto ,}$$

$$f^*(t) = \sum_1^N (d_j \chi_{F_j})^*(t) = \sum_1^N d_j \chi_{F_j}^*(t) \quad . \quad \text{Luego}$$

$$\begin{aligned} \|Tf\|_B &= \|T(\sum d_j \chi_{F_j})\|_B \leq \sum_1^N \|T(d_j \chi_{F_j})\|_B \leq \sum_1^N d_j \|T(\chi_{F_j})\|_B \leq \\ &\leq c \sum_1^N d_j \int_0^\infty \chi_{F_j}^* dt^{1/p} \leq C \sum_1^N \int_0^\infty (d_j \chi_{F_j})^* dt^{1/p} = \\ &= C \int_0^\infty f^*(t) dt^{1/p} = C \|f\|_{p,1}^* , \text{ Q.E.D.} \end{aligned}$$

Nota. Observemos que si B, en lugar de ser un espacio de Banach, fuera un espacio lineal con una funcional no negativa, monótona, homogénea,  $\|\cdot\|$ , que verificara para  $f_i \geq 0$  :  $\|\sum_1^n f_i\|_B \leq \alpha \sum_1^n \|f_i\|_B$  con  $\alpha$  independiente de n, y si T fuera semilineal (es decir,  $|T(cf)| = |c| \cdot |T(f)| \forall f \in S$  y casi lineal con  $K = 1$ ) entonces obtendríamos:

$$\|T\chi\|_B \leq C \|\chi\|_{p,1} \implies \|Tf\|_B \leq 2\alpha C \|f\|_{p,1} .$$

Veamos ahora cómo pueden representarse las acotaciones de tipo débil restringido en términos de las funcionales de Lorentz.

Proposición 4. i) Sea g medible, y  $0 < q < \infty$ . Entonces vale

$$(10) \quad \sup_{0 < t < \infty} t^{1/q} g^*(t) = \sup_{0 < \lambda < \infty} g_*^{1/q}(\lambda) \cdot \lambda , \text{ siempre que uno de los supremos sea finito.}$$

los supremos sea finito.

ii) T es de tipo débil  $(p,q)$ ,  $0 < q \leq \infty$ , si y solo si

$$(11) \quad \|Tf\|_{q,\infty}^* \leq M \cdot \|f\|_p .$$

Demostración. i) La hipótesis de que alguno de los supremos sea finito, implica que  $g^*(t)$  y  $g_*(t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$ . De (2) se sigue entonces que

$$(12) \quad \lambda g_*^{1/q}(\lambda) \leq g^*(g_*(\lambda) - \epsilon) \cdot g_*^{1/q}(\lambda) \text{ si } 0 < \epsilon < g_*(\lambda).$$

Llamando  $t = g_*(\lambda) - \epsilon$  y  $\epsilon' = \frac{\epsilon}{g_*(\lambda)}$ , obtenemos de (12)

$$\lambda g_*^{1/q}(\lambda) \leq \frac{g^*(t) t^{1/q}}{(1-\epsilon')^{1/q}} \leq \frac{1}{(1-\epsilon')^{1/q}} \cdot \sup_t (g^*(t) \cdot t^{1/q})$$

y como  $\epsilon'$  es arbitrario mientras  $0 < \epsilon' < 1$ , resulta

$$\sup_{0 < \lambda < \infty} (\lambda g_*^{1/q}(\lambda)) \leq \sup_{0 < t < \infty} (t^{1/q} g^*(t)).$$

Como la relación entre  $g_*$  y  $g^*$  es

recíproca, la desigualdad precedente vale también en sentido contrario.

ii) Si  $q = \infty$ , no hay nada que demostrar. Si  $q < \infty$ ,  $T$  de tipo débil  $(p, q)$ , significa  $(Tf)_* (\lambda)^{1/q} \lambda \leq M \|f\|_p$ , que, en vista de i) equivale a (11).

Q.E.D.

Proposición 5. Sea  $T$  semilineal definido en  $S$ . Si  $T$  es de tipo débil restringido  $(p, q)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $1 < q \leq \infty$  (es decir, si vale (11) para funciones características de conjuntos de medida finita) entonces

$$\|Tf\|_{q, \infty}^* \leq M' \|f\|_{p, 1} \text{ para toda } f \in S, \quad M' = C(q) M.$$

Recíprocamente, esta desigualdad implica tipo débil restringido con "norma" no mayor que  $M'$ .

Demostración. Por lo visto en la demostración de la proposición 4, sabemos que la condición de tipo débil restringido equivale a:

$$\|Tx\|_{q, \infty}^* \leq M \|x\|_p = M \|x\|_{p, 1}.$$

Del teorema 2, y su corolario, resulta:

$$\begin{aligned} \|T(\sum_1^N f_i)\|_{q, \infty}^* &\leq \|T(\sum f_i)\|_{q, \infty} \leq \|\sum |T(f_i)|\|_{q, \infty} \leq \\ &\leq \sum \|Tf_i\|_{q, \infty} \leq C(q) \sum_1^N \|Tf_i\|_{q, \infty}^*. \end{aligned}$$

Es decir,  $T$  y  $\|\cdot\|_{q, \infty}^*$  verifican las hipótesis de la nota a la proposición 3, (o, si se quiere, hágase  $f_i = c_i \chi_i$  y repítase el argumento de esa proposición), y, por lo tanto obtenemos:

$$\|Tf\|_{q, \infty}^* \leq C(q) M \|f\|_{p, 1}. \quad \text{Q.E.D.}$$

Sea  $T$  un operador definido en  $S$  tal que  $\|Tf\|_{rs}^* \leq C \|f\|_{uv}^*$ . Escribiremos para representar esta situación:  $T: L_{uv} \rightarrow L_{rs}$ . Sin pretensiones de precisión podemos anunciar ahora los teoremas de Riesz-Thorin, Marcinkiewicz y Stein-Weiss así (recordar que  $L_{p, p} = L^p$ ):

$$[R-Th] \quad T: L_{p_i, p_i} \rightarrow L_{q_i, q_i} \Rightarrow T: L_{p, p} \rightarrow L_{q, q}$$

$$[M] \quad T: L_{p_i, p_i} \rightarrow L_{q_i, \infty}, \quad p_i \leq q_i \Rightarrow T: L_{p, p} \rightarrow L_{q, q}$$

$$[S-W] \quad T: L_{p_i, 1} \rightarrow L_{q_i, \infty}, \quad p_i \leq q_i \Rightarrow T: L_{p, p} \rightarrow L_{q, q}$$

La proposición 1 se lee ahora:  $T: L_{p_i, p_i} \rightarrow L_{q_i, \infty} \Rightarrow T: L_{p, p} \rightarrow L_{q, \infty}$ .

h) Corolario. Sea  $q \in (1, \infty)$  y  $T$  de tipo débil restringido  $(1, q)$  y semilineal, Entonces  $T$  es de tipo débil  $(1, q)$ .

En efecto, por hipótesis tenemos  $\|Tx\|_{q, \infty}^* \leq M \|x\|_{1, 1}$ . De la proposición 5 se sigue que  $\|Tf\|_{q, \infty}^* \leq M' \|f\|_1$ , y de la Proposición 4 que  $T$  es de tipo débil  $(1, q)$ .

En [10] se muestra que si  $S_n$  es una sucesión de operadores en  $L^1(\mathbb{R}^m)$  de la forma  $S_n f = f * g_n$ , donde  $g_n \in L^1(\mathbb{R}^m)$  y  $Tf(x) = \sup_{n \geq 1} |S_n f(x)|$ , entonces  $T$  es de tipo débil restringido  $(1, 1)$  si y sólo si  $T$  es de tipo débil  $(1, 1)$ .

Veamos ahora un ejemplo de un operador lineal de tipo débil restringido  $(1, 1)$  y no de tipo débil  $(1, 1)$ , ([1]).

Sea  $u^{(n)}$  la función definida en  $(0, 1)$  que vale  $\frac{n^2}{k}$  en  $\left(\frac{k-1}{n^2}, \frac{k}{n^2}\right]$ . Más generalmente, si  $\pi$  es una permutación cíclica de  $(1, 2, \dots, n^2)$  designaremos con  $u_{\pi}^{(n)}$  la función definida en  $(0, 1)$  que vale  $n^2/\pi(k)$  en el intervalo  $\left(\frac{k-1}{n^2}, \frac{k}{n^2}\right]$ .

Sea  $N$  el conjunto de los enteros positivos con una medida sobre él que asigne a  $\{i\}$ , el peso  $c_i \geq 1$ . El operador  $T$  hará corresponder a funciones simples definidas en  $N$ , funciones medibles sobre  $(0, 1)$ . Precisamente a  $\chi_i$ , la función característica de  $\{1, 2, \dots, i\}$ , le corresponderá la función  $C_i u_{\pi_{i-a}}^{(p+1)}$

donde  $a = \sum_{s=0}^p s^2 < i \leq \sum_{s=0}^{p+1} s^2 = b$  y  $\pi_{i-a}$  recorre todas las permutaciones cíclicas de  $\{1, 2, \dots, (p+1)^2\}$ , cuando  $i$  pasa de  $a+1$  a  $b$ .

Elegiremos ahora los  $c_i$  de manera que

$$(13) \quad \sum_{i=1}^{N-1} C_i \max_{0 < x < 1} u_{\pi_{i-a}}^{(p+1)}(x) < C_N.$$

Esto implica en particular que

$C_N > \sum_1^{N-1} C_i$ , y por lo tanto tenemos:

$$(14) \quad C_i \leq \|x_i\|_1 \leq 2C_i.$$

Si definimos  $T(x_i) = C_i u_{\pi_{i-a}}^{(p+1)}$ , entonces:

$$(15) \quad \|Tx_i\|_{1,\infty}^* = C_i \|u_{\pi_{i-a}}^{(p+1)}\|_{1,\infty}^* = C_i.$$

Toda función característica  $\chi$  de un subconjunto finito de  $N$  es una combinación lineal de funciones  $x_i$ , y única, pues éstas son linealmente independientes.

Si  $\chi = \sum \lambda_i x_i$ , definimos  $T\chi = \sum \lambda_i T x_i$  y el operador queda definido sobre toda función característica.

Sea  $f$  simple,  $f = \sum \lambda_h \chi_{\{h\}}$ .  $Tf = \sum \lambda_h T\chi_{\{h\}}$  extiende el operador linealmente a la familia de funciones simples.

Sea  $p$  fijo, arbitrario y sea  $a = \sum s^2$ ,  $b = a + (p+1)^2$ .

Si  $f = \sum_{a+1}^b \frac{x_i}{c_i}$ , entonces  $Tf = \sum_{a+1}^b u_{\pi_{i-a}}^{(p+1)}$  es constante en  $(0,1)$ , y es fácil estimar  $\|Tf\|_{1,\infty}^*$ :

Tenemos, usando (14):

$$(16) \quad \begin{aligned} \|Tf\|_{1,\infty}^* &= (p+1)^2 \sum_{k=1}^{(p+1)^2} \frac{1}{k} \geq (p+1)^2 \ln(p+1)^2 \geq \\ &\geq \frac{\ln(p+1)^2}{2} \sum_{i=a+1}^b \frac{\|x_i\|_1}{c_i} \ln(p+1) \|f\|_1. \end{aligned}$$

La proposición 4 y (16) implican que  $T$  no es de tipo débil(1,1).

Por otro lado si  $\chi$  es la fcn. característica de  $a = \{i_1, \dots, i_s\}$  entonces

$$\chi = \sum_{k \in A} (x_k - x_{k-1}) \quad \text{y} \quad T\chi = \sum_{k \in A} (Tx_k - Tx_{k-1}).$$

Luego,  $|Tx| \leq |Tx_{i_s}| + \sum_{k < i_s} |Tx_k|$ . Usando (13) se sigue que  $|Tx| \leq Tx_{i_s} + C_{i_s} \leq 2(Tx_{i_s})$ , de donde se concluye, usando (15), que

$$\|Tx\|_{1,\infty}^* \leq 2 \|Tx_{i_s}\|_{1,\infty}^* = 2C_{i_s} \leq 2\|x\|_1.$$

Usando nuevamente la proposición 4 concluimos que  $T$  es de tipo débil restringido (1,1).

i) La condición de Kolmogoroff tiene expresión sencilla en términos de las funcionales de Lorentz.

Obsérvese que fijado  $t > 0$ , como el espacio no tiene átomos y es de medida in-

finita:

$$\sup_{\mu(X)=t} \left( \int_X |Tf|^{s'} d\mu \right)^{1/s'} = \left( \int_0^t (Tf)^{*s'}(\tau) d\tau \right)^{1/s'}$$

de modo que la condición (8) se lee

$$t^{1/s} \left( \frac{1}{t} \int_0^t (Tf)^{*s'}(\tau) d\tau \right)^{1/s'} \leq M \left( \frac{s}{s-s'} \right)^{1/s'} \|f\|_p, \text{ para todo } t.$$

Por esto, (8) es equivalente a:

$$(17)' \quad \|Tf\|_{s,\infty} \leq M \left( \frac{s}{s-s'} \right)^{1/s'} \|f\|_p,$$

donde  $\|\cdot\|_{s,\infty}$  está definida como en la Def.3, con  $r=s'$ .

Entonces tenemos:

i) T satisface cond. de Kolmogoroff  $(p,s) \Leftrightarrow \|Tf\|_{s,\infty} \leq M \left( \frac{s}{s-s'} \right)^{1/s'} \|f\|_p$  para todo  $s' < s$ ,  $r=s'$ .

ii) T satisface cond. débil de Kolmogoroff  $(p,s) \Leftrightarrow \|Tf\|_{s,\infty} \leq K \|f\|_p$  para algún  $r = s' < s$ .

iii) T satisface tipo débil  $(p,s) \Leftrightarrow \|Tf\|_{s,\infty}^* \leq M \|f\|_p$ .

iii) sigue de la proposición 4. i) e ii) siguen de (17)'.

Se puede ahora redemostrar fácilmente la proposición 2 por medio de las relaciones entre las normas  $\|\cdot\|_{p,q}$ ,  $\|\cdot\|_{p,q}^*$  dadas en Teorema 2, i). Dejamos esto como ejercicio para el lector.

6. Demostración del teorema 5. Del teorema 4 se deduce que basta demostrar el teorema 5 con  $\sigma = r$  y del complemento 1 en § 7 de este Capítulo, que es suficiente considerar el caso  $B_0 = B_1 = 1$ . Demostraremos entonces que, si

$$0 < p_0 < p_1 \leq \infty, p_0' \neq p_1', 0 < q_i \leq \infty \text{ y } 0 < \vartheta < 1,$$

$$1/p = \vartheta/p_1 + (1-\vartheta)/p_0, 1/p' = \vartheta/p_1' + (1-\vartheta)/p_0', \text{ entonces}$$

$$(17) \quad \|Tf\|_{p_i'}^* \leq \|f\|_{p_i q_i}^*, i = 0, 1, f \text{ simple, implica para } 0 < r \leq \infty \text{ y cierto}$$

$$r \leq q_0 \wedge q_1$$

$$(18) \|Tf\|_{p', \tau}^* \leq B \|f\|_{p, \tau}^* \text{ con } B_\phi = 0 \quad (\phi^{-1/r} (1-\phi)^{-1/r}),$$

La única razón por la cual no se pide directamente, en (17),  $q_i = \epsilon$ ,  $0 < \epsilon \leq 1$ , es no excluir el caso  $p_i = \infty$  que exige  $q_i = \infty$ . Llamemos  $\gamma$  a

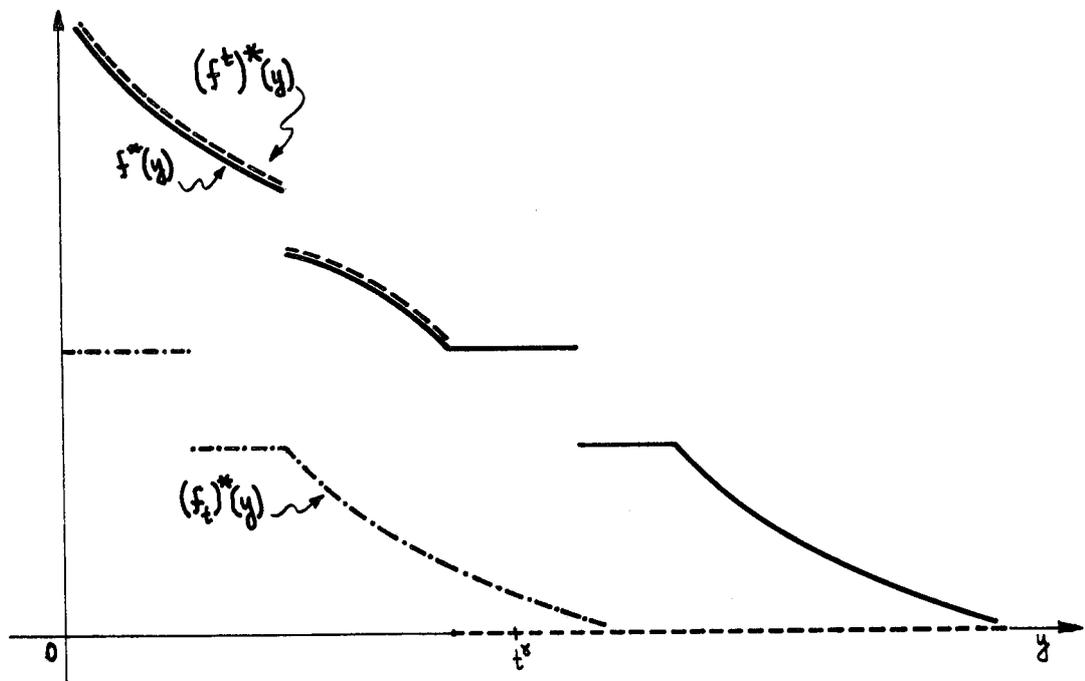
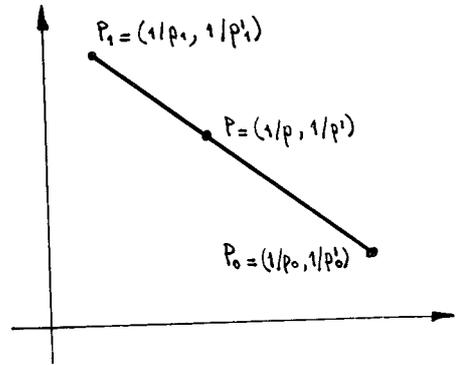
$$(19) \gamma = \frac{\frac{1}{p_0'} - \frac{1}{p_1'}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}} = \frac{\frac{1}{p_0'} - \frac{1}{p_1'}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}} = \frac{\frac{1}{p_1'} - \frac{1}{p_0'}}{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}}.$$

Es decir,  $\gamma$  es la pendiente del segmento  $(P_0, P_1)$ . Dado  $t > 0$ , definamos:

$f^t(x) = f(x)$  si  $|f(x)| > f^*(t^\gamma)$ , 0 en caso contrario,  $f_t(x) = f(x) - f^t(x)$ .

Es fácil verificar que:

$$(20) \quad (f^t)^*(y) \leq \begin{cases} f^*(y) & , y < t^\gamma \\ 0 & , y \geq t^\gamma \end{cases} ; (f_t)^*(y) \leq \begin{cases} f^*(t^\gamma) & , 0 < y < t^\gamma \\ f^*(y) & , y \geq t^\gamma \end{cases}$$



De la definición de casi linealidad y iii) del teorema 4 obtenemos, para todo  $\alpha \in (0,1)$ :

$$(Tf)^*(y) \leq [K(|Tf^t| + |Tf_t|)]^*(y) \leq K [(Tf^t)^*(\alpha y) + (Tf_t)^*((1-\alpha)y)] .$$

Haciendo  $y=t$  y usando (17) resulta:

$$(Tf)^*(t) \cdot t^{1/p'} \leq K \alpha^{-\frac{1}{p_0'}} t^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p_0'}} \|f^t\|_{p_0, q_0}^* + K(1-\alpha)^{-\frac{1}{p_1'}} t^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p_1'}} \|f_t\|_{p_1, q_1}^* .$$

Eligiendo  $\alpha$  de manera que:  $\alpha^{-1/p_0'} = (1-\alpha)^{-1/p_1'} = C = C(p_0', p_1')$ , se obtiene

$$(21) (TF)^*(t) \cdot t^{1/p'} \leq KC \left[ t^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p_0'}} \|f^t\|_{p_0, q_0}^* + t^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p_1'}} \|f_t\|_{p_1, q_1}^* \right] = \\ = KC [F_0(t) + F_1(t)] .$$

Mostraremos a continuación el teorema en el caso  $p_1 < \infty$ ,  $\tau < \infty$ . Los otros casos:  $p_1 < \infty$ ,  $\tau = \infty$ ;  $p_1 = \infty$ ,  $\tau < \infty$ ;  $p_1 = \infty$ ,  $\tau = \infty$ , se prueban en forma análoga. Usando (19) y (20) se logran las siguiente mayoraciones:

$$(22) \quad F_0(t) \leq t^{\gamma(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0})} \left( \int_0^t f^*(s)^{q_0} ds^{q_0/p_0} \right)^{1/q_0}$$

$$(23) \quad F_1(t) \leq t^{\gamma(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1})} \left( \int_{t^\gamma}^\infty f^*(s)^{q_1} ds^{q_1/p_1} + f^*(t^\gamma)^{q_1} \cdot (t^\gamma)^{q_1/p_1} \right)^{1/q_1} .$$

Como las desigualdades (17) valen para todo  $q_i$  suficientemente pequeño (pues  $p_0 < p_1 < \infty$ ) dado  $\tau$  puede suponerse que  $\tau \geq q_0 \vee q_1$ . De (22), y un cambio de variables, sigue que:

$$I_0 = \int_0^\infty F_0^\tau(t) \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{|\gamma|} \int_0^\infty t^{\tau(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0})} \left( \int_0^t f^*(s)^{q_0} ds^{q_0/p_0} \right)^{\tau/q_0} \frac{dt}{t} .$$

Aplicando la primera desigualdad de Hardy con  $Q = \tau/q_0$ ,  $R = \tau(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p})$ , obtenemos:

$$(24) \quad I_0 \leq \frac{1}{|\gamma|} \left( \frac{q_0}{p_0} \right)^{\tau/p_0} \left( \frac{1/q_0}{1/p_0 - 1/p} \right)^{\tau/q_0} \int_0^\infty f^*(s)^\tau s^{\frac{\tau}{p} - 1} ds = \frac{1}{|\gamma|} \left( \frac{p}{p-p_0} \right)^{\tau/q_0} \frac{p}{\tau} \|f\|_{p, \tau}^{\tau} .$$

Análogamente, de (23) y usando la desigualdad de Minkowski obtenemos:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^\infty F_1^\tau(t) \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{|\gamma|} \int_0^\infty t^{\tau\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}\right)} \left[ \int_t^\infty f^*(s)^{q_1} ds \right]^{\tau/q_1} + t^{\tau/q_1} \left[ \int_t^\infty f^*(s)^{q_1} ds \right]^{\tau/q_1} \frac{dt}{t} \leq \\
 &\leq \frac{1}{|\gamma|} \left\{ \left[ \int_0^\infty t^{\tau\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}\right)} \left( \int_t^\infty f^*(s)^{q_1} ds \right)^{\tau/q_1} \frac{dt}{t} \right]^{q_1/\tau} + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \int_0^\infty t^{\tau/p} f^*(t) \frac{dt}{t} \right]^{q_1/\tau} \right\}^{\tau/q_1}.
 \end{aligned}$$

Aplicando la segunda desigualdad de Hardy con  $\tau/q_1 = Q, R = \tau\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}\right)$  a la primera integral del último miembro, obtenemos

$$(25) \quad I_1 \leq \frac{1}{|\gamma|} \left\{ \frac{p}{p_1 - p} + 1 \right\}^{\tau/q_1} \frac{p}{\tau} \|f\|_{p,\tau}^*.$$

$$(21) \text{ implica : } \|Tf\|_{p',\tau}^* \leq K C \left( \frac{\tau}{p'} \int_0^\infty (F_0(t) + F_1(t))^\tau \frac{dt}{t} \right)^{1/\tau}.$$

Aplicando ahora la desigualdad de Minkowski o su sustituto y utilizando las mayoraciones (24) y (25), resulta:

$$\begin{aligned}
 (26) \quad \|Tf\|_{p',\tau}^* &\leq KC 2^{\left(\frac{1}{\tau} - 1\right) \vee 0} \left( \frac{p}{p'|\gamma|} \right)^{1/\tau} \cdot \left[ \left( \frac{p}{p-p_0} \right)^{1/q_0} + \left( \frac{p_1}{p_1-p} \right)^{1/q_1} \right] \cdot \|f\|_{p\tau}^* = \\
 &= O(1) \cdot \left[ \left( 1 - \frac{p_0}{p} \right)^{-\frac{1}{q_0}} + \left( 1 - \frac{p}{p_1} \right)^{-\frac{1}{q_1}} \right] \cdot \|f\|_{p\tau}^* = O(1) \cdot \theta^{-\frac{1}{q_0}} (1-\theta)^{-\frac{1}{q_1}} \cdot \|f\|_{p\tau}^* \quad \text{Q.E.D.}
 \end{aligned}$$

7. Complemento 1 al teorema 5. La constante  $B_\theta$  en (7) depende de  $B_0$  y  $B_1$  de la siguiente manera. Si  $p_i, p'_i, q_i, \tau, r$  y  $\theta$  están fijados entonces

$$(27) \quad B_\theta(B_0, B_1) = B_0^{1-\theta} \cdot B_1^\theta \cdot B_\theta(1,1).$$

$(B_\theta(B_0, B_1))$  es la menor constante que verifica (7) supuesto (6), y como vimos  $B_\theta(1,1)$  es de la forma  $O(1)\theta^{-1/r}(1-\theta)^{-1/r}$ .

En efecto, consideremos en el espacio de medida  $\mathcal{M}$ , junto con la medida  $m$ , la medida  $km$  donde  $k$  es una constante positiva. Si  $f$  es una función medible en  $(\mathcal{M}, m)$  denotaremos por  $f_k$  la misma función pero considerada en  $(\mathcal{M}, km)$ ; se ve-

rifica inmediatamente que:

$$(28) \quad f^*(t) = f_k^*(kt) \quad , \quad \|f_k\|_{p,\tau}^* = k^{1/p} \|f\|_{p,\tau}^* \text{, cualesquiera sean } p,\tau.$$

Elijamos  $k$  de manera que  $B_0 k^{-1/p_0}$  sea igual a  $B_1 k^{-1/p_1}$  ( $B_0$  y  $B_1$  son positivos) y definamos  $B = B_0 k^{-1/p_0} = B_1 k^{-1/p_1}$ .

Definamos ahora un operador  $T_k$  sobre funciones definidas en  $(\mathcal{M}, km)$ :

$$T_k(f_k) = B^{-1} T(f). \text{ Entonces (6) se reduce a:}$$

$$(29) \quad \|Tf\|_{p_i'}^* \leq B \|f_k\|_{p_i, q_i}^* \quad , \quad i=0,1 \quad ,$$

y por lo tanto, considerando a  $T_k f_k$  como función definida en  $(\mathcal{M}', m')$  obtenemos:

$$(30) \quad \|T_k f_k\|_{p_i'}^* \leq \|f_k\|_{p_i, q_i}^* .$$

$$\text{Luego, } \|Tf\|_{p_i'}^* / B = \|T_k f_k\|_{p_i'}^* \leq B_\theta(1,1) \|f_k\|_{p_i, q_i}^* = B_\theta(1,1) k^{1/p} \|f\|_{p_i, q_i}^*$$

y de aquí:  $B \cdot B_\theta(1,1) k^{1/p} = B_\theta(B_0, B_1)$ . Como  $B k^{1/p} = B_0^{1-\theta} \cdot B_1^\theta$ , resulta la tesis. Q.E.D.

Complemento 2. En este complemento consideramos el caso  $p_0 = p_1 = p \in (0, \infty]$  que no fue incluido en el teorema 5.

Supongamos  $\infty \geq p_1' > p_0'$ . Si, para todo  $f \in S$ , vale

$$(31) \quad \|Tf\|_{p_i'}^* \leq B_i \|f\|_{p, \epsilon_i}^*$$

entonces para  $\epsilon = \epsilon_1 \wedge \epsilon_0$ ,  $0 < \theta < 1$ , vale

$$(32) \quad \begin{cases} \|Tf\|_{p_i', \sigma}^* \leq B_0^{1-\theta} B_1^\theta \left\{ \left| \frac{p'}{p_0'} - \frac{p'}{p_1'} \right| \theta(1-\theta) \right\}^{-1/\sigma} \cdot \|f\|_{p, \epsilon}^* \quad , \quad p_i' < \infty \\ \|Tf\|_{p_i', \sigma}^* \leq B_0^{1-\theta} B_1^\theta \cdot \theta^{-1/\sigma} \cdot \|f\|_{p, \epsilon}^* \quad , \quad p_i' = \infty . \end{cases}$$

Demostración. Sea  $\infty > p_1' > p_0'$ ,  $\infty > \sigma$ . Vale entonces la siguiente desigualdad para  $1/p = \theta/p_1 + (1-\theta)/p_0$ :

$$(33) \quad \|F\|_{p, \sigma}^* \leq \left\{ \left| \frac{p}{p_0} - \frac{p}{p_1} \right| \theta(1-\theta) \right\}^{-1/\sigma} \cdot \|F\|_{p_1, \infty}^{*\theta} \|F\|_{p_0, \infty}^{*(1-\theta)}$$

Llamemos  $c_i = \|F\|_{p_i, \infty}^*$ . Entonces  $F^*(t) \leq c_i t^{-1/p_i}$  implica:

$$(34) \quad F^*(t) \leq \begin{cases} c_0 t^{-1/p_0} & \text{si } t > a \\ c_1 t^{-1/p_1} & \text{si } t \leq a \end{cases} \quad \text{donde } c_1 a^{-1/p_1} = c_0 a^{-1/p_0}.$$

Luego:

$$\begin{aligned} \|F\|_{p,\sigma}^{*\sigma} &= \int_0^\infty F^*(t)^\sigma dt^{\sigma/p} \leq \int_0^a (c_1 t^{-1/p_1})^\sigma dt^{\sigma/p} + \int_a^\infty (c_0 t^{-1/p_0})^\sigma dt^{\sigma/p} = \\ &= c_1^\sigma \int_0^a t^{-p/p_1} dt + c_0^\sigma \int_a^\infty t^{-p/p_0} dt = \frac{c_1^\sigma a^{-\sigma/p_1 + \sigma/p}}{1 - p/p_1} + \frac{c_0^\sigma a^{-\sigma/p_0 + \sigma/p}}{p/p_0 - 1} \\ &= \left[ \left( \frac{p}{p_0} - \frac{p}{p_1} \right) \theta (1-\theta) \right]^{-1} C_0^{(1-\theta)\sigma} C_1^{\theta\sigma}. \end{aligned}$$

De (33) sigue (32) para  $\infty > p'_1$ ,  $\infty \geq \sigma$ . Supongamos ahora  $\infty = p_1 > p_0$ ,  $\sigma < \infty$ . En lugar de (33) obtenemos:

$$(35) \quad \|F\|_{p,\sigma}^* \leq \theta^{-1/\sigma} \|F\|_{p_1,\infty}^{*\theta} \|F\|_{p_0,\infty}^{*(1-\theta)},$$

y de aquí (32) para  $p'_1 = \infty$ ,  $\infty \geq \sigma$ . Q.E.D.

Complemento 3. El caso tratado aquí es aquel para el cual  $p'_3 = p'_1 = p'$ . Vale ( $p_0 < p < p_1 \leq \infty$ ):

$$\|Tf\|_{p',\infty}^* \leq B_i \|f\|_{p_i,q_i}^* \Rightarrow \|Tf\|_{p',\infty}^* \leq C B_0^{1-\theta} B_1^\theta \|f\|_{p,\infty}^*.$$

Demostración. Sea  $a > 0$  y  $f^a(x) = f(x)$  si  $|f(x)| \geq f^*(a)$ , 0 en caso contrario;  $f_a(x) = f(x) - f^a(x)$ . Entonces, como en (20), obtenemos:

$$(36) \quad f^{a*}(t) \leq \begin{cases} f^*(t) & t \leq a \\ 0 & t > a \end{cases}; \quad f_a^*(t) \leq \begin{cases} f^*(a) & t \leq a \\ f^*(t) & t > a \end{cases}.$$

De (36) y  $f^*(t) \leq \|f\|_{p,\infty}^* t^{-1/p}$  se sigue:

$$\|f^a\|_{p_0,q_0}^{*q_0} \leq \int_0^a f^*(t)^{q_0} dt^{q_0/p_0} \leq \|f\|_{p,\infty}^{*q_0} \int_0^a t^{-q_0/p} dt^{q_0/p_0}.$$

Por lo tanto, si  $0 < q_0 \leq \infty$ ,

$$(37) \quad \|f^a\|_{p_0,q_0}^* \leq \|f\|_{p,\infty}^* a^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}} / p_0^{1/q_0} \left( \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p} \right)^{1/q_0}.$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} \|f_a\|_{p_1, q_1}^* &\leq \int_0^a f^*(a) dt^{q_1/p_1} + \int_a^\infty f^*(t) dt^{q_1/p_1} \leq \\ &\leq \|f\|_{p, \infty}^* a^{q_1(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p})} + \|f\|_{p, \infty}^* \int_a^\infty t^{-q_1/p} dt^{q_1/p_1}. \end{aligned}$$

De aquí obtenemos:

$$(38) \quad \|f_a\|_{p_1, q_1}^* \leq \|f\|_{p, \infty}^* a^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p}} \left[ 1 + \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1} \right)^{-1} \right]^{1/q_1}$$

válida para  $q_1 \leq \infty$ .

Entonces, del teorema 2, la hipótesis, (37) y (38), será

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{p', \infty}^* &\leq C \left[ \|Tf_a\|_{p', \infty}^* + \|Tf^a\|_{p', \infty}^* \right] \leq \\ &\leq C' (B_1 \|f_a\|_{p_1, q_1} + B_0 \|f^a\|_{p_0, q_0}) \leq \\ &\leq C'' \|f\|_{p, \infty}^* \left( B_1 a^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p}} + B_0 a^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}} \right). \end{aligned}$$

Tomando el  $a$  que minimice esta última expresión tendremos la tesis. Q.E.D.

8. A continuación demostraremos un teorema de interpolación a la Riesz-Thorin para operadores semilineales [ como ya dijimos estos son operadores tales que

$|T(cf)| = |c| \cdot |Tf|$  ,  $|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg|$  , c.d., cualesquiera sean  $f, g$  simples a valores complejos.]

TEOREMA 6. Sea  $T$  semilineal. Si  $0 < p_i, q_i, p'_i, q'_i \leq \infty$  ,

$$1/p = \theta/p_1 + (1-\theta)/p_0 \quad , \quad 1/p' = \theta/p'_1 + (1-\theta)/p'_0$$

$$1/q = \theta/q_1 + (1-\theta)/q_0 \quad , \quad 1/q' = \theta/q'_1 + (1-\theta)/q'_0 \quad , \text{ entonces}$$

$$\|Tf\|_{p'_i, q'_i} \leq B_i \|f\|_{p_i, q_i}^* \quad , \quad i = 0, 1, \quad \text{implica}$$

$$\|Tf\|_{p', q'} \leq B B_1^\theta B_0^{1-\theta} \|f\|_{p, q} \quad ,$$

donde  $B = B(p_i, q_i, p'_i, q'_i)$ .

Dividiremos la demostración en varios lemas, en que supondremos  $p_i, q_i, p'_i, q'_i < \infty$ .

Lema 1. Sea  $f$  simple. Existen dos funciones simples  $G_0$  y  $G_1$  tales que

$$|f(x)| = G_0^{1-\theta} G_1^\theta(x) \quad y$$

$$\|G_i\|_{p_i, q_i}^* \leq B \cdot \|f\|_{p, q}^{q/q_i}, \quad i = 0, 1.$$

Demostración. Sea  $r = \min(p_i, q_i, q'_i, 1)$  y  $f^{**}$  calculada con este  $r$ . Escribamos:

$$f^{**}(t) = \left[ f^{**}(t)^{q/q_1} \cdot t^{\frac{1}{q_1}(\frac{q}{p} - \frac{q_1}{p_1})} \right]^\theta \cdot \left[ f^{**}(t)^{q/q_0} \cdot t^{\frac{1}{q_0}(\frac{q}{p} - \frac{q_0}{p_0})} \right]^{1-\theta} = h_1(t) \cdot h_0^{1-\theta}(t).$$

Es fácil verificar que:

$$(39) \quad \int_0^\infty h_i(t)^{q_i} dt^{q_i/p_i} = \frac{q_i p}{p_i q} \int_0^\infty f^{**}(t)^q dt^{q/p} = \frac{q_i p}{p_i q} \|f\|_{p, q}^q.$$

Sea  $S$  el operador definido por :

$$(Sg)(u) = \left( \int_u^\infty |g(t)|^r \frac{dt}{t} \right)^{1/r}.$$

Entonces:

$$(40) \quad (Sf^{**})(u) = \left( \int_u^\infty \frac{dt}{t^2} \int_0^t f^{**r}(s) ds \right)^{1/r} = \left( \int_0^\infty \left[ f^{**r}(s) \int_{uVs}^\infty \frac{dt}{t^2} \right] ds \right)^{1/r} = \\ = \left( \int_0^\infty \frac{f^{**r}(s)}{uVs} ds \right)^{1/r} \geq \left( \int_0^u f^{**r}(s) \frac{ds}{u} \right)^{1/r} = f^*(u).$$

El operador  $S$  tiene la virtud de transformar funciones cualesquiera en funciones monótonas decrecientes, y, como terminamos de ver, con la propiedad adicional:  $Sf^{**} \geq f^*$ .

Por otro lado:

$$(Sf^{**})^r(u) = \int_u^\infty h_1^{r\theta} h_0^{r(1-\theta)} \frac{dt}{t} \leq \left( \int_u^\infty h_1^r(t) \frac{dt}{t} \right)^\theta \left( \int_u^\infty h_0^r(t) \frac{dt}{t} \right)^{1-\theta} = \\ = S(h_1)^{r\theta} \cdot S(h_0)^{r(1-\theta)}.$$

Es decir  $f^{**} = h_1^\theta \cdot h_0^{1-\theta}$  implica  $Sf^{**} = S(h_1^\theta \cdot h_0^{1-\theta}) \leq S(h_1)^\theta S(h_0)^{1-\theta}$ .

De aquí y (40) obtenemos:

$$(41) \quad f^*(u) \leq S(h_1)^\theta \cdot S(h_0)^{1-\theta}.$$

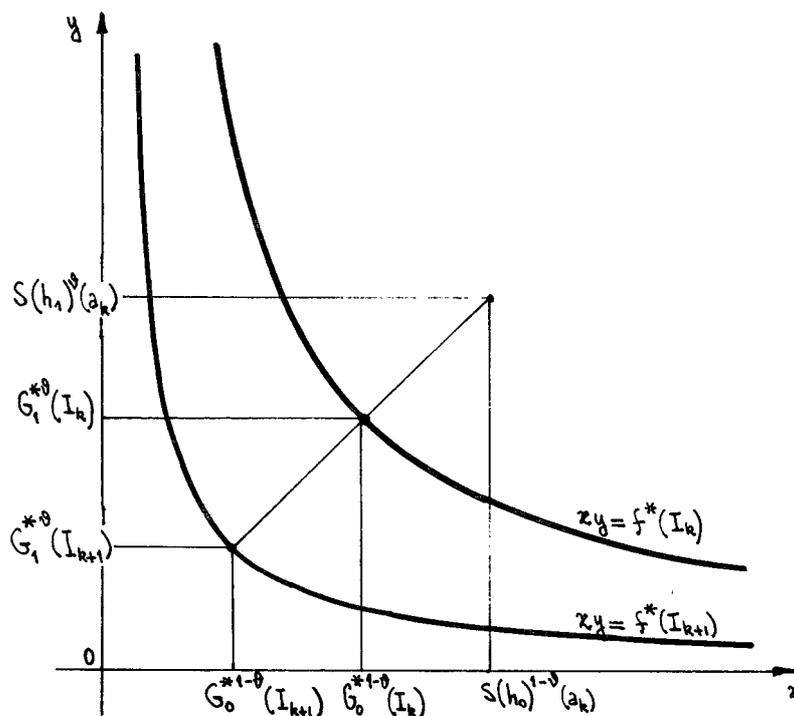
Como las  $S(h_i)$  son funciones continuas y monótonas decrecientes y  $f^*(u)$  es una función simple existen dos funciones simples decrecientes,  $G_1^*$ ,  $G_0^*$ , con los mismos intervalos de constancia que  $f^*(u)$  tales que:

$$(42) \quad \begin{cases} G_i^*(u) \leq (Sh_i)(u) \\ f^*(u) = (G_1^*(u))^\theta (G_0^*(u))^{1-\theta}. \end{cases}$$

(Para ver esto se procede así: sean  $I_1 = (0, a_1)$ ,  $I_2 = [a_1, a_2)$ , ...,

$I_n = [a_{n-1}, a_n)$ , los intervalos de constancia de  $f^*(z)$  donde  $a_n = \infty$ .

$f^*(I_n) = 0$ . Definimos ahora  $G_i^*(t)$  por inducción finita, constante en  $I_k$  y de manera que  $G_i^*(I_n) = 0$ .



Supongamos definida  $G_i^*$  en  $I_{k+1}$ ; elegimos entonces el valor de  $G_i^*(I_k)$  verificando:

$$(43) \quad \begin{cases} G_i^*(I_{k+1}) \leq G_i^*(I_k) \leq \inf_{u \in I_k} S(h_i)(u) = S(h_i)(a_k) \\ f^*(I_k) = [G_1^*(I_k)]^\theta [G_0^*(I_k)]^{1-\theta}. \end{cases}$$

Tal elección es siempre posible pues,

$$G_0^{* 1-\theta} (I_{k+1}) \cdot G_1^{* \theta} (I_{k+1}) = f^* (I_{k+1}) \leq f^* (I_k) \leq \left( S(h_0)^{1-\theta} \cdot S(h_1)^\theta \right) (a_k) ,$$

donde la última desigualdad se sigue de (41)).

Las funciones  $G_i^*(u)$  son las reordenadas no crecientes de funciones  $G_i(x)$  tales que:

$$|f(x)| = G_1^\theta(x) \cdot G_0^{1-\theta}(x)$$

definidas por  $G_i(x) = G_i^*(I_k)$  si  $|f(x)| = f^*(I_k)$ .

Por otro lado, usando (42) logramos:

$$\|G_i\|_{p_i, q_i}^{* q_i} = \int_0^\infty G_i^{* q_i}(u) du^{q_i/p_i} \leq \int_0^\infty (Sh_i)^{q_i} du^{q_i/p_i} = \int_0^\infty \left( \int_u^\infty h_i^r(t) \frac{dt}{t} \right)^{q_i/r} du^{q_i/p_i} .$$

Una aplicación de la segunda desigualdad de Hardy del teorema 1 muestra que la última expresión no supera a:

$$\left( \frac{p_i}{r} \right)^{q_i/r} \int_0^\infty (h_i^r(t))^{q_i/r} dt^{q_i/p_i} = \text{por (39)} = \left( \frac{p_i}{r} \right)^{q_i/r} \frac{q_i p}{p_i q} \|f\|_{p, q}^q . \text{ Q.E.D.}$$

Observación al lema 1. Cuando  $p_i = q_i$  la demostración del lema 1 es más simple y la tesis puede precisarse de la siguiente manera: existen  $G_0(x)$ ,  $G_1(x)$  tales que  $|f(x)| = G_0^{1-\theta}(x) G_1^\theta(x)$ ,  $\|G_i\|_{p_i, q_i}^* = \|f\|_{p, q}^{* q/q_i}$ .

En efecto, en este caso basta tomar  $G_i^*(u) = f^{*q/q_i}(u)$ . En el caso general precedente la situación se complica pues si tomáramos:

$$G_i^*(t) = f^*(t)^{q/q_i} \cdot t^{(q/p - q_i/p_i)/q_i}$$

no resulta  $G_i^*$  necesariamente decreciente.

Lema 2. Sean  $f$ ,  $G_0$  y  $G_1$  como en la proposición 1,  $T$  semilineal

$$F(x, z) = \text{sgn } f(x) \cdot G_0^{1-z}(x) \cdot G_1^z(x) \text{ y } (TF)(y, z) = T(F(\cdot, z))(y) .$$

Entonces,  $|TF|$  es, para casi todo  $y$ , una función continua de  $z$ .

En efecto,  $F(x, z) = \sum_{i=1}^n a_i(z) \chi_i(x)$  con  $a_i(z)$  función entera de  $z$  y  $\chi_i(x)$

función característica de un conjunto medible. Entonces, si  $T$  es lineal, tenemos:

$$(TF)(y, z) = \sum_{i=1}^n a_i(z) (TX_i)(y) .$$

Como  $(TX_i)(y)$  es finita en casi todo punto,  $TF(y, z)$  es continua en  $z$  para casi todo  $y$ .

Los detalles necesarios para el caso general de  $T$  sublineal pueden verse en [ 8 ], pag. 267. Q.E.D.

Lema 3. Si  $h(z)$  es armónica real en una región  $\mathcal{D}$  entonces  $e^{h(z)} |TF(y, z)|$  es subarmónica allí, c.d.y.

En efecto, sea  $H(z)$  una función analítica tal que  $\text{Re } H(z) = h(z)$ . Entonces

$$e^{H(z)} F(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{H(z+re^{i\theta})} F(x, z+re^{i\theta}) d\theta$$

$z \in \mathcal{D}$  y  $r$  es suficientemente pequeño. De  $|T(\sum_i U_i)| \leq \sum_i |T(U_i)|$  se deduce que

$$|T(\int U d\theta)| \leq \int |TU| d\theta . \text{ Luego}$$

$$|T(e^{H(z)} F(x, z))| = e^{h(z)} |T(F(x, z))| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{h(z+re^{i\theta})} |T(F(x, z+re^{i\theta}))| d\theta .$$

Q.E.D.

Lema 4.  $\ln |TF(y, z)|$  es subarmónica en el plano complejo, c.d.y.

En efecto, si  $h(z)$  es armónica en el círculo  $B$  y  $\ln |TF(y, z)| \leq h(z)$  en  $\partial B$ ,

entonces  $e^{-h(z)} |TF(y, z)| \leq 1$  en  $\partial B$ .

De la proposición precedente resulta que esta desigualdad vale en todo  $B$ , y por lo tanto que  $\ln |TF(y, z)| \leq h(z)$  en  $B$ , QED.

Lema 5. Si  $\ln |\Phi(z)|$  es subarmónica en  $\{0 \leq \text{Re}(z) \leq 1\}$  y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\ln |\Phi(it)|| e^{-\pi |t|} dt < \infty , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\ln |\Phi(1+it)|| e^{-\pi |t|} dt < \infty$$

entonces  $\ln |\Phi(\theta)| \leq (1-\theta) \int_{-\infty}^{+\infty} P_0(\theta, t) \ln |\Phi(0+it)| dt +$

$$+ \theta \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(\theta, t) \ln |\Phi(1+it)| dt , \quad 0 < \theta < 1 .$$

Aquí  $P_0$  y  $P_1$  son ciertas funciones reales, no negativas, de integral uno, de las cuales no se requiere conocer más que estas propiedades. La demostración de este lema puede verse en [18] y no será incluida en estas notas.

Lema 6. Si para casi todo  $x$ ,  $\ln |\Phi(x,z)|$  verifica las hipótesis del lema 5 y  $r > 0$ , entonces vale, para los mismos  $x$ :

$$|\Phi(x,\theta)|^r \leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x,1+it)|^r P_1(\theta,t) dt \right)^\theta \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x,it)|^r P_0(\theta,t) dt \right)^{1-\theta}.$$

En efecto, del lema 5 y la desigualdad de Jensen resulta:

$$\begin{aligned} |\Phi(x,\theta)|^r &\leq e^{r((1-\theta)\int \dots + \theta \int \dots)} = \left( e^{r\int \dots} \right)^{1-\theta} \left( e^{r\int \dots} \right)^\theta \leq \\ &\leq \left( \int |\Phi|^r P_1 dt \right)^{1-\theta} \cdot \left( \int |\Phi|^r P_0 dt \right)^\theta. \end{aligned}$$

(La desigualdad de Jensen, cuya demostración puede verse en [17], p. 67, afirma que si  $\varphi$  es convexa en  $(\alpha,\beta)$  y si  $f(t): [a,b] \rightarrow (\alpha,\beta)$  es medible

$$\text{entonces } \varphi \left( \int_a^b f p dt \right) \leq \int_a^b \varphi(f) p dt, \text{ si } p \geq 0, \int p dt = 1)$$

Lema 7. Bajo las hipótesis del lema 6, si  $0 < r \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} \Phi^{**}(u,\theta) &\leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} P_0(\theta,t) \Phi^{**r}(u,it) dt \right)^{(1-\theta)/r} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(\theta,t) \Phi^{**r}(u,1+it) dt \right)^{\theta/r} = \\ &= H_0^{1-\theta} \cdot H_1^\theta. \end{aligned}$$

En efecto, si  $E$  es un conjunto medible,  $m(E) \geq u$ , de la desigualdad de Hölder obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m(E)} \int_E |\Phi(x,\theta)|^r dm(x) &\leq \left( \frac{1}{m(E)} \int_E dm(x) \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x,1+it)|^r P_1(\theta,t) dt \right)^\theta \cdot \\ &\cdot \left( \frac{1}{m(E)} \int_E dm(x) \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x,it)|^r P_0(\theta,t) dt \right)^{1-\theta} \leq (\text{por (3)}) \leq \\ &\leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{**r}(u,1+it) P_1(\theta,t) dt \right)^\theta \cdot \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{**r}(u,it) P_0(\theta,t) dt \right)^{1-\theta}. \end{aligned}$$

Usando nuevamente (3) Obtenemos el lema 7. Q.E.D.

Lema 8. Bajo las hipótesis del lema 6,

$$\|\Phi(\cdot, \theta)\|_{p', q'} \leq M \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \|\Phi(\cdot, it)\|_{p'_0, q'_0} P_0(\theta, t) dt \right)^{1-\theta} \cdot \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \|\Phi(\cdot, 1+it)\|_{p'_1, q'_1} P_1(t) dt \right)^\theta$$

$$\text{con } M \leq (q'/p')^{1/q'} (p'_0/q'_0)^{(1-\theta)/q'_0} (p'_1/q'_1)^{\theta/q'_1}.$$

En efecto, del lema 7 obtenemos:

$$\|\Phi(\cdot, \theta)\|_{p', q'}^{q'} = \int_0^\infty \Phi^{**q'}(u, \theta) du^{q'/p'} \leq \frac{q'}{p'} \int_0^\infty H_0^{q'(1-\theta)} H_1^{q'\theta} u^{q' \left[ \frac{1-\theta}{p'_0} + \frac{\theta}{p'_1} \right]} \frac{du}{u}.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder con  $s = \frac{q'_0}{q'(1-\theta)}$ ,  $s^* = \frac{q'_1}{q'\theta}$ :

$$(44) \|\Phi(\cdot, \theta)\|_{p', q'}^{q'} \leq \frac{q'}{p'} \left( \int_0^\infty H_0^{q'_0} u^{q'_0/p'_0} \frac{du}{u} \right)^{\frac{q'(1-\theta)}{q'_0}} \left( \int_0^\infty H_1^{q'_1} u^{q'_1/p'_1} \frac{du}{u} \right)^{\frac{q'\theta}{q'_1}}.$$

De la desigualdad integral de Minkowski obtenemos ( $k=0,1$ ):

$$\begin{aligned} \left( \int_0^\infty H_k^{q'_k}(u, \theta) u^{q'_k/p'_k} \frac{du}{u} \right)^{r/q'_k} &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} P_k(\theta, t) \left( \int_0^\infty \Phi^{**}(u, k+it) u^{q'_k/p'_k} \frac{du}{u} \right)^{r/q'_k} dt = \\ &= \left( \frac{p'_k}{q'_k} \right)^{r/q'_k} \int_{-\infty}^{+\infty} P_k(\theta, t) \|\Phi(\cdot, k+it)\|_{p'_k, q'_k}^r dt. \end{aligned}$$

Combinando estas desigualdades con (44), se sigue que:

$$\begin{aligned} \|\Phi(\cdot, \theta)\|_{p', q'} &\leq \left( \frac{q'}{p'} \right)^{1/q'} \cdot \left( \frac{p'_0}{q'_0} \right)^{\frac{1-\theta}{q'_0}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} P_0(\theta, t) \|\Phi(\cdot, it)\|_{p'_0, q'_0}^r dt \right)^{\frac{1-\theta}{r}} \\ &\cdot \left( \frac{p'_1}{q'_1} \right)^{\frac{\theta}{q'_1}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(\theta, t) \|\Phi(\cdot, 1+it)\|_{p'_1, q'_1}^r dt \right)^{\theta/r}. \end{aligned}$$

El lema 8 sigue ahora a una aplicación de la desigualdad de Hölder. Q.E.D.

Demostración del teorema 6. La función  $\Phi(x, z) = (TF)(x, z)$  verifica c.d. y las hipótesis del lema 6. En efecto, del lema 4 sabemos que  $\ln |TF(y, z)|$  es, c.d. y, subarmónica en todo el plano complejo y la siguiente acotación ( $c_1$ ,

$d_i$  son números reales):

$$|\Phi(x, z)| \leq \sum_{i=1}^n |a_i(z)| |T(x_i)(x)|, \quad a_i(z) = c_i^{1-z} \cdot d_i^z,$$

asegura que podemos aplicar el lema 5.

Observemos que  $(TF)(x, \theta) = (Tf)(x)$ . Aplicando el lema 8 y la hipótesis obtenemos:

$$\begin{aligned} \|TF\|_{p', q'} &\leq M \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \|TF(\cdot, it)\|_{p'_0, q'_0} P_0(\theta, t) dt \right]^{1-\theta} \\ &\quad \cdot \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \|TF(\cdot, 1+it)\|_{p'_1, q'_1} P_1(\theta, t) dt \right]^{\theta} \leq \\ &\leq M \left[ \int_{-\infty}^{\infty} B_1 \|F(\cdot, 1+it)\|_{p_1, q_1}^* P_1(\theta, t) dt \right]^{\theta} \\ &\quad \cdot \left[ \int_{-\infty}^{\infty} B_0 \|F(\cdot, it)\|_{p_0, q_0}^* P_0(\theta, t) dt \right]^{1-\theta} \leq \\ &\leq \left[ \sup_{\theta} M \right] \cdot B_1^{\theta} B_0^{1-\theta} \cdot \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \|G_1\|_{p_1, q_1}^* P_1 dt \right]^{\theta} \cdot \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \|G_0\|_{p_0, q_0}^* P_0 dt \right]^{1-\theta}. \end{aligned}$$

Aplicando a esta última expresión el lema 1 resulta:

$$\|Tf\|_{p', q'} \leq C \cdot B_1^{\theta} B_0^{1-\theta} \|f\|_{p, q}.$$

(Si  $p'_i = q'_i$ ,  $p_i = q_i$ , entonces  $C=1$ . Además en vista de la observación al lema 1, en lugar de  $B\|f\|_{p, q}$  puede escribirse  $\|f\|_{p, q}^*$ ). En la presente demostración se supuso  $q_0, q_1 < \infty$ . Los casos restantes de la hipótesis del teorema 6 se dejan al lector. Q.E.D.

BIBLIOGRAFIA

- [ 1 ] BENEDEK, A. and PANZONE, R., *A Counterexample in the Theory of Interpolation of Operators*, Boll.U.M.I., (4) 8 (1973), 110-116.
- [ 2 ] BERENSTEIN, C.A., COTLAR, M., KERZMAN, N. and KREE, P., *Some remarks on the Marcinkiewicz convexity theorem in the upper triangle*, Studia Math., T.XXIX, (1967), 79-95.
- [ 3 ] BUTZER, P.L. and BERENS, H., *Semigroups of operators and approximation*, Springer, Berlin, (1967).
- [ 4 ] CALDERON, A.P., *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, Studia Math., T.XXIV, (1964), 113-190.
- [ 5 ] CALDERON, A.P., *Spaces between  $L^1$  and  $L^\infty$  and the theorem of Marcinkiewicz*, Studia Math., T.XXVI, (1966), 273-299.
- [ 6 ] HUNT, R.A., *An extension of the Marcinkiewicz interpolation Theorem to Lorentz spaces*, Bull.A.M.S., vol 70, (1964), 803-807.
- [ 7 ] HUNT, R.A. and WEISS G., *The Marcinkiewicz interpolation theorem*, Proc. A.M.S., Vol.15, (1964), 996-998.
- [ 8 ] HUNT, R.A., *On  $L(p,q)$  Spaces*, L'Enseignement math., T.XII, (1966), 249-276.
- [ 9 ] KREIN, S.G. and SEMENOV, E. M., *On a space scale*, Soviet Math.Dokl., 2 (1961). 706-710.
- [ 10 ] MOON, K.H., *On restricted weak type (1,1)*, Proc.A.M.S., Vol.42, (1974), 148-152.
- [ 11 ] MIRANDA, C., *Sul teorema di Riesz-Thorin*, Ann.di Mat.pura et appl., LXXXIV, (1970), 61-71.
- [ 12 ] OKLANDER, E.T.,  *$L_{pq}$  interpolators and the theorem of Marcinkiewicz*, Bull. A.M.S., 72, (1966), 49-53.
- [ 13 ] OKLANDER, E.T., *Interpolación, espacios de Lorentz y Teorema de Marcinkiewicz* Univ. de Buenos Aires, (1965).
- [ 14 ] O'NEIL, R., *Integral transforms and tensor products on Orlicz spaces and  $L(p,q)$  spaces*, (1968), J.d'Analyse Math., XXI, (1968), 1-276.
- [ 15 ] PEETRE, J., *On the connection between the theory of interpolation spaces and approximation theory*, Proc. of the Conference on Constructive Theory of Functions, Akadémiai Kiadó, Budapest, (1971).
- [ 16 ] COTLAR, M., *Condiciones de continuidad de operadores potenciales y de Hilbert*, Cursos y seminarios de Matemática, Univ.de Bs.As. (1959).
- [ 17 ] ZYGMUND, A., *Trigonometrical series*, Dover, (1955).
- [ 18 ] HIRSCHMAN, I.I.Jr., *A convexity theorem for certain groups of transformations*, J.Analyse, (2) (1952), 209-218.
- [ 19 ] RIVIERE, N.M. and SAGHER, Y., *Interpolation between  $L^\infty$  and  $H^1$ , the real method*, J.Func.Anal. 14 (1973) 401-409.

## CAPITULO XI

### SERIES DE JACOBI

1. Los polinomios de Jacobi,  $P_n^{\alpha \beta}(x)$ ,  $\alpha > -1$ ,  $\beta > -1$ ,  $-1 < x < 1$ , son aquellos que se obtienen por ortogonalización de  $1, x, x^2, \dots$ , con respecto a la medida  $w dx$ , donde  $w(x) = (1-x)^\alpha \cdot (1+x)^\beta$ , de tal modo que el grado de  $P_n^{\alpha \beta}$  sea  $n$ .

Es fácil ver que

$$(1) \quad P_n^{\alpha \beta}(x) = (-1)^n P_n^{\beta \alpha}(-x).$$

Además los polinomios de Jacobi satisfacen la siguiente ecuación diferencial (véase [4], p.67):

$$y'' + \frac{\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x}{1 - x^2} y' + \frac{n(n + \alpha + \beta + 1)}{1 - x^2} y = 0.$$

Normalizados, los polinomios en cuestión se convierten en (véase [4], p.68):

$$(2) \quad p_n^{\alpha \beta}(x) = P_n^{\alpha \beta}(x) / \sqrt{h_n^{\alpha \beta}}, \quad \text{donde } h_n^{\alpha \beta} = \frac{2^{\alpha + \beta + 1}}{2n + \alpha + \beta + 1} \cdot \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \cdot \Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + 1) \cdot \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}$$

así que, usando la fórmula de Stirling

$$(3) \quad \Gamma(s) \sim \sqrt{2\pi} \cdot s^{s-1/2} e^{-s},$$

obtenemos

$$(4) \quad h_n^{\alpha \beta} \sim \frac{2^{\alpha + \beta}}{n}.$$

Cuando  $\alpha = \beta = 0$ , resultan los polinomios de Legendre. Por otra parte, la fórmula de Rodrigues asume la forma siguiente, aplicada a los polinomios de Jacobi:

$$(5) \quad (1-x)^\alpha \cdot (1+x)^\beta \cdot P_n^{\alpha \beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ (1-x)^{n+\alpha} \cdot (1+x)^{n+\beta} \right\}$$

Derivando a esta expresión de acuerdo a la Regla de Leibnitz,

$$(6) \quad P_n^{\alpha \beta}(x) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n+\alpha}{n-\nu} \binom{n+\beta}{\nu} \left(\frac{x-1}{2}\right)^\nu \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-\nu},$$

de manera que, si  $p_n(x) = k_n x^n + \dots$ , deberá ser

$$(7) \quad k_n \sim \sum_{\nu=0}^n \frac{1}{2^n} \cdot \sqrt{\frac{n}{2^{\alpha+\beta}}} \binom{n+\alpha}{n-\nu} \binom{n+\beta}{\nu} = \binom{2n+\alpha+\beta}{n} \frac{1}{2^n} \sqrt{\frac{n}{2^{\alpha+\beta}}}.$$

Usando nuevamente la fórmula de Stirling, entonces, como

$$(8) \quad \binom{2n + \alpha + \beta}{n} = \frac{\Gamma(2n + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(n+1) \cdot \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \sim \frac{2^{\alpha+\beta}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}},$$

vemos que

$$(9) \quad k_n \sim \frac{2^{(\alpha+\beta)/2}}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^n.$$

Añadamos que, según se prueba en la página 169 de [4], son válidas las estimaciones siguientes

$$(10) \quad P_n^{\alpha, \beta}(\cos \nu) = \begin{cases} \nu^{-\alpha-1/2} \cdot O(n^{-1/2}) & , c/n \leq \nu \leq \pi/2, \\ O(n^\alpha) & , 0 \leq \nu \leq c/n, \end{cases}$$

en las que  $c$  es un número positivo fijo.

Si escribimos  $x = \cos \nu$ , tendremos, para  $x$  cercano a 1, que  $x \sim 1 - \frac{\nu^2}{2}$ ,

es decir, que  $\sqrt{2(1-x)} \sim \nu$ . Reemplazando en (10), y con valores adecuados de  $c$  (por ejemplo,  $c=1$  para la primera estimación y  $c = \sqrt{3}$  para la segunda), obtenemos:

$$(11) \quad P_n^{\alpha, \beta}(x) = \begin{cases} (1-x)^{-(\alpha/2 + 1/4)} \cdot O(n^{-1/2}) & , 0 \leq x \leq 1 - 1/n^2, \\ O(n^\alpha) & , 1 - 1/n^2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(11) puede expresarse también en la siguiente forma:

$$(12) \quad \sqrt{n} \cdot |P_n^{\alpha, \beta}(x)| \leq K \cdot \left(1 - x + \frac{1}{n^2}\right)^{-(\alpha/2 + 1/4)}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad K \text{ constante.}$$

Finalmente, digamos que, de (1) y (12) es posible deducir que

$$(13) \quad \sqrt{n} \cdot |P_n^{\alpha, \beta}(x)| \leq K \cdot (1 + x + 1/n^2)^{-(\beta/2 + 1/4)}, \quad -1 \leq x \leq 0.$$

Así concluimos esta breve reseña.

2. Nuestro objetivo primordial es ahora el siguiente teorema (cf. T.2, Cap. V).

TEOREMA 1. *Supongamos que  $\alpha, \beta > -1$ , y  $a$  y  $b$ , son números reales.*

*Si  $1 < p < \infty$  y*

$$(15) \quad \left| a - \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{p} \right| < \frac{1}{4} \wedge \frac{\alpha+1}{2}, \quad \left| b - \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{1}{p} \right| < \frac{1}{4} \wedge \frac{\beta+1}{2},$$

entonces los polinomios de Jacobi, verifican la siguiente propiedad: si  $S_n^{\alpha, \beta} f$  denota la suma parcial  $n$ -ésima del desarrollo de  $f$  en términos de los polinomios de Jacobi, será

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_n^{\alpha, \beta} f = \sum_{m=0}^n c_m \cdot P_m^{\alpha, \beta} \quad , \quad c_j = \frac{\int_{-1}^1 f(x) \cdot P_j^{\alpha, \beta}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx}{\int_{-1}^1 |P_j^{\alpha, \beta}(x)|^2 \cdot (1-x)^\alpha \cdot (1+x)^\beta dx} \quad , \quad y \\ \|S_n^{\alpha, \beta} f - f\|_p^p = \int_{-1}^1 \left| \sum_{m=0}^n c_m \cdot P_m^{\alpha, \beta}(x) - f(x) \right|^p (1-x)^{\alpha p} \cdot (1+x)^{\beta p} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{array} \right.$$

Este resultado se debe a Muckenhoupt y nosotros seguiremos a [1] para su demostración. En él están contenidos, como casos particulares, un resultado de Pollard ( $\alpha \geq -1/2, \beta \geq -1/2, a = \alpha/p, b = \beta/p$ , véase [2],[3]), y otro de Wing ( $\alpha \geq -1/2, \beta \geq -1/2, a = \alpha/2, b = \beta/2$ , véase [5]). El teorema 1 se complementa con:

TEOREMA 2. *Supongamos que  $\alpha, \beta > -1, 1 < p < \infty$ . Si  $a$  o  $b$  no verifican (15), entonces la conclusión del teorema 1 es falsa.*

3. Para demostrar los teoremas enunciados, necesitaremos una expresión adecuada del núcleo de Dirichlet, análoga a la obtenida en el párrafo 3 del Capítulo IX para los polinomios de Legendre. A eso vamos con el lema que sigue.

Lema 1. *Existen constantes  $a_n, b_n$ , tales que*

$$D_n^{\alpha, \beta}(x, y) = a_n H_1 + b_n H_2 + b_n H_3,$$

$$\text{donde : } H_1 = H_1(n, x, y) = n \cdot P_n^{\alpha, \beta}(x) \cdot P_n^{\alpha, \beta}(y),$$

$$H_2 = H_2(n, x, y) = n(1-y^2) \cdot P_n^{\alpha, \beta}(x) \cdot P_{n-1}^{\alpha+1, \beta+1}(y) / (x-y),$$

$$H_3 = H_3(n, x, y) = H_2(m, y, x),$$

y donde  $a_n$  y  $b_n$  están acotadas por una constante que depende sólo de  $\alpha$  y  $\beta$ .

Demostración. Usando la fórmula de Christoffel y (2) obtenemos, para los polinomios de Jacobi:

$$(17) \quad D_n^{\alpha, \beta}(x, y) = \rho_n \cdot \frac{P_{n+1}^{\alpha, \beta}(x) P_n^{\alpha, \beta}(y) - P_n^{\alpha, \beta}(x) \cdot P_{n+1}^{\alpha, \beta}(y)}{x - y},$$

$$\rho_n = \frac{2^{-\alpha-\beta} \Gamma(n+2) \cdot \Gamma(n+\alpha + \beta + 2)}{(2n + \alpha + \beta + 2) \cdot \Gamma(n+\alpha+1) \cdot \Gamma(n+\beta+1)}.$$

Por otra parte, de [5], p. 72, fórmula (4.5.5), se deduce

$$(18) \quad D \cdot (1-x^2) \cdot P_{n-1}^{\alpha+1, \beta+1}(x) = A \cdot P_{n-1}^{\alpha, \beta}(x) + B \cdot P_n^{\alpha, \beta}(x) + C \cdot P_{n+1}^{\alpha, \beta}(x),$$

$$\text{donde} \quad A = \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}, \quad C = -\frac{2n(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)},$$

$$B = (\alpha - \beta) \cdot \frac{2n(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta) \cdot (2n+\alpha+\beta+2)}, \quad D = \frac{n+\alpha+\beta+1}{2}.$$

Si reemplazamos  $P_{n+1}^{\alpha, \beta}$ , en (17) por su expresión según (18), el numerador en (17) se convertirá en

$$(19) \quad -\frac{D}{C} (1-y^2) \cdot P_n^{\alpha, \beta}(x) \cdot P_{n-1}^{\alpha+1, \beta+1}(y) + \frac{D}{C} \cdot (1-x^2) \cdot P_n^{\alpha, \beta}(y) \cdot P_{n-1}^{\alpha+1, \beta+1}(x) -$$

$$-\frac{A}{C} \left\{ P_{n-1}^{\alpha, \beta}(x) \cdot P_n^{\alpha, \beta}(y) - P_n^{\alpha, \beta}(x) \cdot P_{n-1}^{\alpha, \beta}(y) \right\}.$$

Finalmente, como  $D_n^{\alpha, \beta}(x, y) = D_{n-1}^{\alpha, \beta}(x, y) + P_n^{\alpha, \beta}(x) \cdot P_n^{\alpha, \beta}(y) / h_n^{\alpha, \beta}$ , se sigue de (19) y (17) :

$$D_n^{\alpha, \beta}(x, y) = \frac{-D \cdot \rho_n}{C \cdot (1+A \rho_n / C \rho_{n-1})} \cdot \left\{ (1-y^2) \cdot \frac{P_n^{\alpha, \beta}(x) \cdot P_{n-1}^{\alpha+1, \beta+1}(y)}{x - y} + \right.$$

$$\left. + (1-x^2) \cdot \frac{P_n^{\alpha, \beta}(y) \cdot P_{n-1}^{\alpha+1, \beta+1}(x)}{x - y} \right\} + \frac{A \cdot \rho_n}{C \rho_{n-1} (1+A \cdot \rho_n / C \cdot \rho_{n-1})} \cdot$$

$$\cdot \frac{P_n^{\alpha, \beta}(x) \cdot P_n^{\alpha, \beta}(y)}{h_n^{\alpha, \beta}}.$$

Pero  $R_n/n$ ,  $D/C$ ,  $A/C$ ,  $\rho_n/\rho_{n-1}$  y  $h_n^{\alpha,\beta}$  son todos asintóticamente iguales a constantes, en virtud de (4), (9) y (18). De este hecho y la última fórmula se sigue el Lema 1. Q.E.D.

4. Demostración del Teorema 1. De acuerdo al teorema 2 del Capítulo V, con  $\Omega = (-1,1)$ ,  $\mathcal{A}$  = los borelianos de  $\Omega$ ,  $d\nu = (1-x)^{ap} (1+x)^{bp} dx$  y  $d\mu = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx$ , para probar que los polinomios de Jacobi satisfacen (16) será suficiente demostrar que

$$(20) \quad \int_{-1}^1 |S_n^{\alpha,\beta} f(x) \cdot (1-x)^a \cdot (1+x)^b|^p dx \leq C \cdot \int_{-1}^1 |f(x) \cdot (1-x)^a \cdot (1+x)^b|^p dx .$$

En efecto, a causa de las hipótesis hechas acerca de  $\alpha, \beta$ ,  $a$  y  $b$ ,  $\mu$  y  $\nu$  son medidas finitas, y las combinaciones lineales de polinomios de Jacobi son densas en  $L_\nu^p$  si  $p < \infty$ . (La existencia de los coeficientes de Fourier  $\forall f \in L_\nu^p$  sigue de (21) o (22)).

Más aún, bastará que probemos (20) para funciones a soporte en  $(-1,0)$  y  $(0,1)$ . Y se ve, a partir de (1) y de la simetría de las condiciones (15), que será suficiente mostrar que (20) vale para funciones a soporte en  $(0,1)$ . Además, alcanzará con que veamos que para estas funciones vale:

$$(21) \quad \int_{-1}^1 \left| \int_0^1 f(y) \cdot H_i(n,x,y) (1-y)^\alpha (1-x)^a (1+x)^b dy \right|^p dx \leq \\ \leq C \cdot \int_0^1 |f(y) \cdot (1-y)^a|^p dy, \quad i=1,2,3.$$

Supongamos  $i = 1$ . Aplicando la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$(22) \quad \int_{-1}^1 \left\{ \int_0^1 |f(y) \cdot \sqrt{n} \cdot P_n^{\alpha,\beta}(y) \sqrt{n} P_n^{\alpha,\beta}(x) (1-y)^\alpha \cdot (1-x)^a (1+x)^b dy \right\}^p dx \leq \\ \leq \int_{-1}^1 \left\{ \int_0^1 |f(y) \cdot (1-y)^a|^p dy \right\} \cdot \left\{ \int_0^1 |\sqrt{n} \cdot P_n^{\alpha,\beta}(y) (1-y)^{\alpha-a}|^q dy \right\}^{p/q} \cdot \\ \cdot \int_{-1}^1 |\sqrt{n} P_n^{\alpha,\beta}(x)|^p (1-x)^{ap} (1+x)^{bp} dx \leq$$

$$\leq C \cdot \int_0^1 |f(y)(1-y)^a|^p dy \cdot \left\{ \int_{-1}^1 \left| \left(1-y + \frac{1}{n^2}\right)^{-(\alpha/2 + 1/4)} (1-y)^{\alpha-a} \right|^q dy \right\}^{p/q} \cdot \int_{-1}^1 |\sqrt{n} P_n^{\alpha,\beta}(x)(1-x)^a(1+x)^b|^p dx .$$

Si  $\alpha \geq -1/2$ , la segunda integral en el último miembro es convergente y uniformemente acotada si  $-1 < (\alpha/2 - a - 1/4)q$ . Como esta condición equivale a  $a - \alpha/2 - 1/2 + 1/p < 1/4$ , que es válida por hipótesis, podemos reemplazar esa integral por una constante.

Si  $\alpha < -1/2$ , la integral en cuestión es uniformemente acotada si  $-1 < (\alpha-a)q$ , condición ésta equivalente a  $a - \alpha/2 - 1/2 + 1/p < \alpha/2 + 1/2$  que también vale por hipótesis.

La tercera integral también es uniformemente acotada. En realidad, en vista de (13), es suficiente mostrar que las siguientes integrales son uniformemente acotadas:

$$(23) \quad \int_0^1 \left(1 - x + \frac{1}{n^2}\right)^{-(\alpha/2+1/4)} \cdot (1-x)^{ap} dx < \infty ,$$

$$(24) \quad \int_0^1 \left(1 - x + \frac{1}{n^2}\right)^{-(\beta/2 + 1/4)} \cdot (1-x)^{bp} dx < \infty .$$

Analizaremos la (23) ((24) puede analizarse del mismo modo).

Si  $\alpha \geq -1/2$ , está acotada por  $\int_0^1 (1-x)^{(a-\alpha/2 - 1/4)p} dx$ , y, si  $\alpha < -1/2$ ,

por  $\int_0^1 (1-x)^{ap} dx$ . Como  $(a - \alpha/2 - 1/4)p > -1$  y  $ap > -1$ , (23) está uniformemente acotada.

Para  $i=2,3$ , el primer miembro de (21) está acotado (salvo por un factor constante) por la suma de (25) y (26):

$$(25) \quad \int_{-1}^{-1/2} \left[ \int_0^1 |f(y) H_i(n,x,y) (1-y)^\alpha (1+x)^b dy \right]^p dx ,$$

$$(26) \quad \int_{-1/2}^1 \left| \int_0^1 f(y) H_i(n, x, y) (1-y)^\alpha (1-x)^a dy \right|^p dx .$$

Consideremos primero la integral (25) para  $i=2$  o  $3$ . Está dominada por

$$(27) \quad \int_{-1}^{-1/2} \left[ 2 \int_0^1 |f(y) \sqrt{n} P_n^{\alpha, \beta}(x) \cdot \sqrt{n} P_{n-1}^{\alpha+1, \beta+1}(y) \cdot (1-y^2) (1-y)^\alpha (1+x)^b dy \right]^p dx ,$$

o por

$$(28) \quad \int_{-1}^{-1/2} \left[ 2 \int_0^1 |f(y) \sqrt{n} P_n^{\alpha, \beta}(y) \cdot \sqrt{n} P_{n-1}^{\alpha+1, \beta+1}(x)| \cdot (1-x^2) (1-y)^\alpha (1+x)^b dy \right]^p dx .$$

(28) es muy similar al primer miembro de (22) y está acotada también por el segundo miembro de (21). En efecto, para  $-1 < x < -1/2$  ,  $\beta > -1$  ,

$$\left| \sqrt{n} P_{n-1}^{\alpha+1, \beta+1}(x) \right| \leq K \left( 1 + x + \frac{1}{(n-1)^2} \right)^{-(\beta+1)/2 - 1/4}$$

y la estimación se reduce a probar la acotación de

$$(29) \quad \int_0^1 (1-x)^{-[(\beta+1)/2 + 1/4]p + bp + p} dx .$$

Pero ésta es acotada si y sólo si  $-1/2 + b - \beta/2 + 1/p > -1/4$  , y ésto se verifica por hipótesis.

En forma análoga se demuestra que (27) está acotada por el segundo miembro de (21).

En segundo lugar, consideremos la integral (26) para  $i=2$ . Usando (12), se ve que (26) es igual a

$$(30) \quad \int_{-1/2}^1 \left| \int_0^1 \frac{(1-y)^{\alpha+1} (1-x)^a \varphi(x, n) \psi(y, n) f(y)}{\left(1-y + \frac{1}{n^2}\right)^{\alpha/2+3/4} \left(1-x + \frac{1}{n^2}\right)^{\alpha/2+1/4} (x-y)} dy \right|^p dx ,$$

donde  $\varphi$  y  $\psi$  dependen también de  $\alpha$  y  $\beta$  y están uniformemente acotadas para  $\alpha$  y  $\beta$  fijos. Por lo tanto, será suficiente probar que (30), con  $\varphi$  y  $\psi$  reemplazadas por 1 , está acotada por el segundo miembro de (21) para concluir que otro tanto ocurre con la propia (30).

Practicando el cambio de variable  $X = n^2(1-x)$  ,  $Y = n^2(1-y)$  , y suponiendo  $\varphi = \psi = 1$  , obtenemos

$$(31) \quad n^{-2ap-2} \int_0^{3n^2/2} \left| \int_0^{n^2} \frac{Y^{\alpha+1-a}}{(1+Y)^{\alpha/2+3/4}} \cdot \frac{X^a}{(1+X)^{\alpha/2+1/4}} \cdot \frac{Y^a \cdot f(y)}{X-Y} dY \right|^p dX .$$

De lo visto en el Capítulo VII deducimos que (31) está acotada por

$$(32) \quad n^{-2ap-2} \int_0^{n^2} |Y^a \cdot f(y)|^p dY ,$$

si  $-1/p < a < 1/q$ . Como es fácil ver, esta condición es consecuencia de la hipótesis. Luego, volviendo a las variables originales obtenemos, en vez de (32)

$$(33) \quad \int_0^1 |f(y)|^p (1-y)^{ap} dy ,$$

y esto implica la desigualdad buscada.

En tercer lugar, consideremos la integral (26) para  $i=3$ . En este caso, (30) y (31) son, respectivamente,

$$(34) \quad \int_{-1/2}^1 \left| \int_0^1 \frac{(1-x)^{a+1} \cdot (1-y)^\alpha f(y) dy}{(1-y+1/n^2)^{\alpha/2+1/4} (1-x+1/n^2)^{\alpha/2+3/4} (x-y)} \right|^p dx ,$$

$$(35) \quad n^{-2ap-2} \int_0^{3n^2/2} \left| \int_0^{n^2} \frac{X^{a+1}}{Y^{a-\alpha}} \cdot \frac{(1+X)^{-\alpha/2-3/4}}{(1+Y)^{\alpha/2+1/4}} f(y) Y^a dY \right|^p dX .$$

Usando nuevamente el teorema principal del Capítulo VII, se deduce que la integral (26), para  $i=3$ , está acotada por el segundo miembro de (21). Q.E.D.

5. Demostración del teorema 2. Dada la validez del teorema 1, y siendo  $C_n$  el  $n$ -ésimo coeficiente de la serie de Jacobi de  $f$ , tendremos

$$(36) \quad \int_{-1}^1 \left| C_n P_n^{\alpha, \beta}(x) (1-x)^a (1+x)^b \right|^p dx \leq M \cdot \int_{-1}^1 \left| f(x) \cdot (1-x)^a (1+x)^b \right|^p dx .$$

En base a (2) y (4), se concluye que

$$\|P_n^{\alpha, \beta}\|_2^2 = \int_{-1}^1 |P_n^{\alpha, \beta}|^2 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \sim \frac{\text{constante}}{M} ,$$

y por lo tanto, cuando  $f$  sea una función a soporte contenido en  $(0,1)$ , valdrá:

$$(37) \quad \int_0^1 \left| \sqrt{n} P_n^{\alpha, \beta}(x) \cdot (1-x)^a \right|^p dx \cdot \left| \int_0^1 f(y) \sqrt{n} P_n^{\alpha, \beta}(y) \cdot (1-y)^\alpha dy \right|^p \leq \\ \leq M \int_0^1 |f(y) (1-y)^a|^p dy.$$

La recíproca de la desigualdad de Hölder nos permite entonces asegurar que

$$(38) \quad \int_0^1 \left| \sqrt{n} P_n^{\alpha, \beta}(x) (1-x)^a \right|^p dx \cdot \left[ \int_0^1 \left| \sqrt{n} P_n^{\alpha, \beta}(y) (1-y)^{\alpha-a} \right|^q dy \right]^{p/q} \leq M.$$

Probaremos el teorema mostrando que (38) no se verifica si  $a$  o  $b$  no verifican (15). En virtud del teorema 8.21.12, p.197 del libro de Szegő, sabemos que, si  $\alpha > -1$ ,

$$(39) \quad \left| \sqrt{n} P_n^{\alpha, \beta}(\cos \vartheta) \right| \geq \begin{cases} C_1 \frac{|\sqrt{N\vartheta} \cdot J_\alpha(N\vartheta)|}{\vartheta^{\alpha+1/2}} - C_2 \frac{\vartheta^{-\alpha+1/2}}{n} & \text{si } \frac{\pi}{2} \geq \vartheta \geq \frac{1}{n} \\ C_1 \frac{|\sqrt{N\vartheta} \cdot J_\alpha(N\vartheta)|}{\vartheta^{\alpha+1/2}} - C_2 \vartheta^2 n^{\alpha+1/2} & \text{si } 0 < \vartheta \leq 1/n \end{cases}$$

donde  $N = n + (\alpha + \beta + 1)/2$ .

Usando la fórmula asintótica para  $J_\alpha(x)$  se deduce de (39) que, si  $\epsilon$  es un número suficientemente pequeño:

$$(40) \quad \left| n \cdot P_n^{\alpha, \beta}(\cos \vartheta) \right| \geq \begin{cases} C [\cos(N\vartheta + x) - \delta(\epsilon)] / \vartheta^{\alpha+1/2}, & \frac{\pi}{2} \geq \vartheta \geq \frac{1}{n\epsilon} \\ C \cdot n^{\alpha+1/2}, & 0 < \vartheta \leq \epsilon/n \end{cases}$$

Aquí,  $x = -\alpha\pi/2 - \pi/4$  y  $\delta(\epsilon) \rightarrow 0$  para  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Ahora, estimemos las integrales que aparecen en (38):

$$(41) \quad \int_0^1 \left| \sqrt{n} P_n^{\alpha, \beta}(x) (1-x)^a \right|^p dx = \int_0^{\pi/2} \left| \sqrt{n} P_n^{\alpha, \beta}(\cos \vartheta) \frac{\sin^{2a} \vartheta}{(1+x)^a} \right|^p \sin \vartheta d\vartheta \sim \\ \int_0^{\pi/2} \left| \sqrt{n} P_n^{\alpha, \beta}(\cos \vartheta) \right|^p \cdot \vartheta^{2ap+1} d\vartheta \geq \quad (\text{por (30)})$$

$$\begin{aligned} &\geq C \int_0^{\epsilon/n} n^{(\alpha+1/2)p} \vartheta^{2ap+1} d\vartheta + C \int_{1/\epsilon n}^{\pi/2} |\cos(N\vartheta+x)|^p \vartheta^{(2a-\alpha-1/2)p+1} d\vartheta \\ &\quad - C \delta(\epsilon) \int_{1/\epsilon n}^{\pi/2} \vartheta^{(2a-\alpha-1/2)p+1} d\vartheta . \end{aligned}$$

Y observemos que, cuando  $A > 1/n$ ,

$$\begin{aligned} (42) \quad \int_A^{A+2\pi/N} |\cos(N\vartheta+x)|^p \vartheta^\gamma d\vartheta &\geq \inf_{A < \vartheta < A+2\pi/N} \vartheta^\gamma \int_0^{2\pi/N} |\cos N\vartheta|^p d\vartheta \geq \\ &\geq \sup_{A < \vartheta < A+2\pi/N} \vartheta^\gamma \cdot (1+2\pi/NA)^{-|\gamma|} \cdot C_p/N \geq C_{p,\gamma} \int_A^{A+2\pi/N} \vartheta^\gamma d\vartheta , \end{aligned}$$

donde  $C_p$  y  $C_{p,\gamma}$  son constantes.

Entonces, en la penúltima integral que aparece en (41) podemos omitir el factor  $|\cos(N\vartheta+x)|^p$ . Como la última, por otra parte, es pequeña comparada con aquella si  $\delta(\epsilon)$  es suficientemente chico, tendremos que, para cierto  $\epsilon$  fijo ( $0 < \epsilon < 1$ ),

$$(43) \quad \int_0^1 |\sqrt{n} \cdot P_n(x) (1-x)^a|^p dx \geq C \cdot \left[ \int_0^{\epsilon/n} n^{(\alpha+1/2)p} \vartheta^{2ap+1} d\vartheta + \int_{1/\epsilon n}^{\pi/2} \vartheta^{(2a-\alpha-1/2)p+1} d\vartheta \right]$$

De manera análoga se obtiene

$$\begin{aligned} (44) \quad \int_0^1 |\sqrt{n} P_n^{\alpha,\beta}(x) (1-x)^{\alpha-a}|^q dx &\geq C \cdot \left[ \int_0^{\epsilon/n} n^{(\alpha+1/2)q} \vartheta^{2(\alpha-a)q+1} d\vartheta + \right. \\ &\quad \left. + \int_{1/\epsilon n}^{\pi/2} \vartheta^{(\alpha-2a-1/2)q+1} d\vartheta \right] . \end{aligned}$$

Las últimas integrales en (43) y (44) están acotadas por abajo por una constante positiva. Luego, los primeros miembros de (43) y (44) están acotados por abajo por una constante positiva (independiente de  $n$ ). Además, de esto y (38) se sigue que dichos primeros miembros están acotados por arriba por una cons-

tante independiente de  $n$ . Sin embargo, si

$a \leq a_1 = -\inf\{1/4, (\alpha+1)/2\} + (\alpha+1)/2 - 1/p = \sup\{\alpha/2 + 1/4, 0\} - 1/p$ , entonces se ve, por (43), que

$$\int_0^1 |\sqrt{n} \cdot P_n^{\alpha, \beta}(x)(1-x)^a|^p dx \geq \int_0^1 |\sqrt{n} \cdot P_n^{\alpha, \beta}(x)(1-x)^{a_1}|^p dx \geq$$

$$C. \int_0^{\epsilon/n} n^{(\alpha+1/2)p} \vartheta^{2p \cdot \sup\{0, \alpha/2+1/4\}-1} d\vartheta +$$

$$+ C. \int_{1/\epsilon n}^{\pi/2} \vartheta^{p \cdot \sup\{0, -\alpha-1/2\}-1} d\vartheta .$$

La última integral tiende a infinito con  $n$  cuando  $\alpha/2 + 1/4 > 0$ , y la penúltima diverge para  $\alpha/2 + 1/4 \leq 0$ .

Análogamente, si

$a \geq a_2 = \inf\{1/4, (\alpha+1)/2\} + (\alpha+1)/2 - 1/p = \alpha + \inf\{-\alpha/2 - 1/4, 0\} + 1/q$ , entonces de (44) se deduce que

$$\int_0^1 |\sqrt{n} \cdot P_n^{\alpha, \beta}(x)(1-x)^{a-a_2}|^q dx \geq C. \int_0^{\epsilon/n} n^{(\alpha+1/2)q} \vartheta^{2q \cdot \sup\{0, \alpha/2+1/4\}-1} d\vartheta +$$

$$+ C. \int_{1/\epsilon n}^{\pi/2} \vartheta^{2q \cdot \sup\{0, -\alpha/2-1/4\}-1} d\vartheta ,$$

y aquí, la primera integral del segundo miembro diverge cuando  $\alpha/2 + 1/4 \leq 0$ , y la segunda tiende a infinito con  $n$  cuando  $\alpha/2 + 1/4 > 0$ . Esto prueba el teorema 2. Q.E.D.

#### BIBLIOGRAFIA

- [ 1 ] MUCKENHOUP, B., Mean convergence of Jacobi Series. Proc. Am. Math. Soc., 23 (1969), 306-310.
- [ 2 ] POLLARD, H., The mean convergence of orthogonal series, II, Trans. A.M.S., 63 (1948), 355-367.
- [ 3 ] POLLARD, H., The mean convergence of orthogonal series, III, Duke Math. J.,

16 (1949), 189-191.

- [4] SZEGÖ, G., *Orthogonal polynomials*, Am. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 23, third edition (1967).
- [5] WING, G.M., *The mean convergence of orthogonal series*, Amer. J. of Math., 72 (1950), 792-807.
- [6] MERLO, J.C., *On orthogonal polynomials and second-order differential operators*, An. Pol. Math., XIX (1967), 69-79.

## CAPITULO XII

### COMPLETIDAD DE LOS SISTEMAS DE BESSEL Y DINI.

1. La función de Bessel de orden  $\nu \neq -1, -2, \dots, J_\nu(x)$ , está definida por

$$(1) \quad J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (x/2)^{2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}$$

y es una solución de la ecuación de Bessel:  $y'' + y'/x + (1-\nu^2/x^2)y = 0$ , es decir, de la ecuación:

$$(2) \quad (xy')' + (x-\nu^2/x)y = 0, \quad 0 < x < 1.$$

Partiendo de las conocidas fórmulas siguientes, que se deben a Lommel,

$$(\alpha^2 - \beta^2) \int_0^x t J_\nu(\alpha t) J_\nu(\beta t) dt = x \cdot \left\{ J_\nu(\alpha x) \frac{dJ_\nu(\beta x)}{dx} - J_\nu(\beta x) \cdot \frac{dJ_\nu(\alpha x)}{dx} \right\}, (\alpha^2 \neq \beta^2),$$

$$2\alpha^2 \cdot \int_0^x t J_\nu^2(\alpha t) dt = (\alpha^2 x^2 - \nu^2) \cdot J_\nu^2(\alpha x) + x^2 \left( \frac{dJ_\nu(\alpha x)}{dx} \right)^2, \quad \nu > -1,$$

se deduce, para  $\nu > -1$ :

$$(3) \quad \begin{cases} \int_0^1 t J_\nu(\alpha t) J_\nu(\beta t) dt = 0 & \text{si } \alpha^2 \neq \beta^2 \text{ y } J_\nu(\alpha) = J_\nu(\beta) = 0, \\ \int_0^1 t J_\nu^2(\alpha t) dt = J_{\nu+1}^2(\alpha)/2 & \text{si } 0 < \alpha, \quad J_\nu(\alpha) = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, cuando  $\nu > -1$ , el sistema  $\left\{ \sqrt{x} \cdot J_\nu(\alpha x) : \alpha \text{ cero positivo de } J_\nu \right\}$  es ortogonal en  $0 < x < 1$ .

La ortogonalidad puesta de manifiesto en (3) se debe, esencialmente, al hecho de que las funciones  $y(t) = J_\nu(\alpha t)$  satisfacen a un problema de Sturm-Liouville, a saber,

$$\begin{cases} (ty')' + (\alpha^2 t - \nu^2/t)y = 0 & , \quad 0 < t < 1 , \\ y(1) = 0 & , \text{ y cierto comportamiento asintótico en } t = 0 . \end{cases}$$

Así que, llamando  $s_n$  al  $n$ -ésimo cero positivo de  $J_\nu$ , y

$\Phi_n(x) = \sqrt{2x} \cdot J_\nu(xs_n) / |J_{\nu+1}(s_n)|$ , resulta que  $\left\{ \Phi_n(x); n=1,2,3,\dots \right\}$  es un sistema ortonormal en  $(0,1)$ .

Llamaremos desarrollo de Fourier-Bessel de una función  $f$  a la serie :

$$(4) \quad f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n \Phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sqrt{x} \cdot J_\nu(xs_n) \quad , \text{ donde}$$

$$B_n(f) = \frac{|J_{\nu+1}(s_n)|}{\sqrt{2}} \cdot b_n = \int_0^1 f \Phi_n dx .$$

Por otra parte, llamaremos desarrollo de Bessel de  $f$  al que se obtiene según la familia  $\{J_\nu(s_n x) : J_\nu(s_n) = 0\}$ , ortogonal con respecto a la medida  $x dx$ :

$$(5) \quad f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_\nu(s_n x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \Phi_n(x) / \sqrt{x} \quad , \text{ donde}$$

$$A_n(f) = \frac{|J_{\nu+1}(s_n)|}{\sqrt{2}} \cdot a_n = \frac{\sqrt{2}}{|J_{\nu+1}(s_n)|} \cdot \int_0^1 f(t) \cdot J_\nu(s_n t) \cdot t dt .$$

Es decir,  $A_n(f) = B_n(\sqrt{x} \cdot f)$ .

Consideremos, por fin, la familia de  $\left\{ J_\nu(k_n x) : n=1,2,3,\dots \right\}$ , donde los

números  $k_n$  son las soluciones reales positivas de la ecuación

$k \cdot J'_\nu(k) + H \cdot J_\nu(k) = 0$ , en la que  $H$  es un número real fijo. Esta familia surge también de un problema de Sturm-Liouville, y es ortogonal con respecto a la

medida  $x \, dx$  (este hecho se deduce también de la fórmula de Lommel).

Por ahora, llamaremos, a la serie

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot J_{\nu}(k_n x) \quad , \quad a_n = \frac{1}{\int_0^1 J_{\nu}^2(k_n x) x \, dx} \cdot \int_0^1 f(x) \cdot J_{\nu}(k_n x) x \, dx \quad ,$$

serie de Dini de  $f$  , y, a la serie

$$(7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sqrt{x} \cdot J_{\nu}(k_n x) \quad , \quad b_n = \frac{1}{\int_0^1 J_{\nu}^2(k_n x) x \, dx} \cdot \int_0^1 f(x) \cdot J_{\nu}(k_n x) \sqrt{x} \, dx \quad ,$$

serie de Fourier-Dini de  $f$  (más adelante, veremos que es necesario un término adicional para que las series (6) , (7) sean convergentes a  $f$ ).

Para referencia ulterior mencionamos el siguiente resultado ([2]):

$$(8) \quad \begin{cases} \int_0^x t^{\nu/2} \cdot J_{\nu}(\sqrt{t}) \, dt = 2x^{(\nu+1)/2} \cdot J_{\nu+1}(\sqrt{x}) \quad , \quad \nu > -1 \quad , \\ \int_0^x t^{-(\nu+1)/2} \cdot J_{\nu+1}(\sqrt{t}) \, dt = 2 \left\{ \frac{1}{2^{\nu} \cdot \Gamma(\nu+1)} - x^{-\nu/2} \cdot J_{\nu}(\sqrt{x}) \right\} \quad , \quad \nu > -1 \quad . \end{cases}$$

2. Nuestro propósito es estudiar la completitud en  $L^2$  de los sistemas mencionados en el párrafo anterior. Vale el siguiente

TEOREMA 1. i) *El sistema de Fourier-Bessel es completo en  $L^2(0,1)$  si  $\nu > -1$ .*

ii) *El sistema de Bessel es completo en  $L_x^2(0,1)$  si  $\nu > -1$ .*

( $L_x^2$  denota aquí al espacio de las funciones de cuadrado integrable con respecto a la medida  $x \, dx$ .)

Sin embargo, cuando  $\nu + H \leq 0$  , el sistema de Dini no es completo, y debe añadirse entonces una función ortogonal a las funciones de Bessel. Esto es consecuencia ([4] , Ch.XVIII) de que la ecuación

$$z^{-\nu} (z \cdot J_{\nu}'(z) + H \cdot J_{\nu}(z)) = 0 \quad , \quad \nu > -1 \quad ,$$

que tiene sólo a  $\pm k_1$  ,  $\pm k_2$  , ... , como raíces cuando  $\nu + H > 0$  , admite además la raíz  $z=0$  cuando  $\nu + H = 0$  , y, cuando  $\nu + H < 0$  , posee también un par de raíces complejas conjugadas  $\pm i\lambda_0$  .

Entonces (véase [4]) es necesario agregar una función ortogonal a los sistemas de Dini y Fourier-Dini cuando  $\nu + H \leq 0$ . Dicha función, para el sistema de Fourier-Dini, es

$$\begin{cases} x^{\nu+1/2} & \text{si } \nu + H = 0 \\ \sqrt{x} \cdot I_{\nu}(\lambda_0 x) & \text{si } \nu + H < 0. \end{cases}$$

( $I_{\nu}(x)$  es la "función de Bessel modificada", véase p.ej. el tratado de Watson). Por consiguiente, de ahora en adelante llamaremos *serie de Fourier-Dini* de  $f$  a la serie definida mediante (7), más el término adicional:

$$(9) \quad \mathcal{G}_0(x) = \int_0^1 \mathcal{A}_0(x,t) f(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu+H > 0, \\ (2\nu+1)x^{\nu+1/2} \int_0^1 t^{\nu+1/2} \cdot f(t) dt & \text{si } \nu+H=0, \\ \frac{\sqrt{x} \cdot I_{\nu}(\lambda_0 x) \cdot \int_0^1 \sqrt{t} \cdot f(t) \cdot I_{\nu}(\lambda_0 t) dt}{\int_0^1 x I^2(\lambda_0 x) dx} & \text{si } \nu + H < 0. \end{cases}$$

Análogamente, llamaremos desde ahora *serie de Dini* de  $f$  a la serie definida en (6), más el término adicional  $\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{x}} \mathcal{A}_0(x,t) \cdot f(t) dt$ .

Así las cosas vale el teorema que sigue.

TEOREMA 2. j) El sistema de Fourier-Dini es completo en  $L^2$  si  $\nu > -1$ .

jj) El sistema de Dini es completo en  $L_x^2$  si  $\nu > -1$ .

3. El siguiente resultado nos será necesario para probar los teoremas 1 y 2.

Lema 1. i) Si  $f$  es una función continua definida en  $(0,1)$  y nula en un entorno de cero y de uno, y  $\nu \geq -1/2$ , entonces para cada  $n$  existe  $N(n)$  no decreciente con  $n$ , tal que la suma parcial  $n$ -ésima del desarrollo de Fourier-Dini de  $f$  difiere de la suma parcial  $N(n)$ -ésima del desarrollo de Fourier-Bessel de  $f$  en una función que tiende uniformemente a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ .

ii) Sea  $f_0$  una función escalera (es decir, una función que toma sólo un número finito de valores, cada uno en un número finito de intervalos), nula en un entorno de cero y de uno, y sea  $-1 < \nu < -1/2$ . Entonces, para cada  $n$  existe  $N(n)$  no decreciente con  $n$ , tal que la suma parcial  $n$ -ésima del desarrollo de Fourier-Dini de  $f = f_0(t) \cdot t^{\nu+1/2}$  difiere de la suma parcial  $N(n)$ -ésima del desarrollo de Fourier-Bessel de  $f$  en una función  $g_n$  tal que  $\|g_n\|_2 \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

iii) La diferencia entre el  $n$ -ésimo núcleo de Dirichlet del sistema de Fourier-Dini y el  $N(n)$ -ésimo núcleo de Dirichlet del sistema de Fourier-Bessel es, en módulo, menor o igual que

$$\frac{M \cdot x^{(\nu+1/2) \wedge 0} \cdot t^{(\nu+1/2) \wedge 0}}{2 - x - t},$$

donde  $M$  es una constante independiente de  $n$ . Aquí es  $\nu > -1$ .

Demostración. i) está demostrado en el tratado de Watson sobre funciones de Bessel, Ch.XVIII.

ii) y iii) Supongamos primero que  $\nu > -1$ . Sea  $R(x, t, H)$  igual a

$$(10) \quad \sum_{m=1}^N \frac{2J_\nu(s_m x) \cdot J_\nu(s_m t) \sqrt{xt}}{J_{\nu+1}^2(s_m)} - J_0(x, t) - \sum_{m=1}^n \frac{2 \cdot k_m^2 \cdot J_\nu(k_m x) \cdot J_\nu(k_m t) \cdot \sqrt{xt}}{(k_m^2 - \nu^2) \cdot J_\nu^2(k_m) + k_m^2 \cdot J_\nu'^2(k_m)}.$$

Es decir,  $R_n$  es la diferencia entre el núcleo de Dirichlet  $N$ -ésimo del sistema de Fourier-Bessel y el núcleo de Dirichlet  $n$ -ésimo del sistema de Fourier-Dini donde  $N$  y  $n$  están relacionados como en pag. 598 del tratado de Watson. (Para nosotros será suficiente saber que  $n_1 \geq n_2 \Rightarrow N(n_1) \geq N(n_2)$ , y que  $s_N$  es el último  $s_j$  tal que  $s_j < D_n$ , siendo  $D_n$  un número perteneciente a  $(k_n, k_{n+1})$  cuya distancia a cualquier  $k_j$  y cualquier  $s_i$  es por lo menos  $\pi/8$ . Para  $n$  suficientemente grande tal número existe.) Entonces vale lo siguiente (véase [4], §18.31):

$$(11) \quad R_n(x, t, H) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{D_n - i\infty}^{D_n + i\infty} \frac{\sqrt{xt} \cdot 2w \cdot J_\nu(xw) \cdot J_\nu(tw)}{J_\nu(w) \cdot [wJ_\nu'(w) + H \cdot J_\nu(w)]} dw.$$

Para  $w \in (D_n - i\infty, D_n + i\infty)$  obtenemos, usando las fórmulas asintóticas:

$$(12) \quad \begin{cases} |\sqrt{wx} J_\nu(xw)| \leq M(1+|xw|)^{(\nu+1/2) \wedge 0} e^{x|\eta|}, & \eta = \operatorname{Im} w, \\ |\sqrt{w} J_\nu(w)| \geq M' \cdot e^{|\eta|}, & \end{cases}$$

y a partir de  $-J_{\nu+1}(w) + J_{\nu-1}(w) = 2J'_\nu(w)$  obtenemos, nuevamente mediante las fórmulas asintóticas:

$$(13) \quad |\sqrt{w} \cdot J'_\nu(w) + H J_\nu(w)/w| \geq M'' \cdot e^{|\eta|}.$$

Aplicando estas desigualdades a (11), resulta:

$$(14) \quad \begin{aligned} |R_n(x,t,H)| &\leq M \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x+t-2)|\eta|} \cdot \left[1 + (xD_n)^{(\nu+1/2) \wedge 0}\right] \cdot \left[1 + (tD_n)^{(\nu+1/2) \wedge 0}\right] d\eta \\ &\leq \frac{M \cdot x^{(\nu+1/2) \wedge 0} \cdot t^{(\nu+1/2) \wedge 0}}{2 - t - x}, \quad \nu > -1. \end{aligned}$$

Supongamos ahora  $\nu \in (-1, -1/2)$ . Partiendo de [4], §18.31, pag.599, se tiene:

$$(15) \quad \int_0^\tau t^{\nu+1/2} R_n(x,t,H) dt = \frac{\tau^{\nu+1} \cdot x^{1/2}}{2\pi i} \int_{D_n - i\infty}^{D_n + i\infty} \frac{2 J_\nu(xw) \cdot J_{\nu+1}(tw)}{J_\nu(w) \cdot [w \cdot J'_\nu(w) + H \cdot J_\nu(w)]} dw,$$

y por lo tanto, ya que  $|\sqrt{tw} J_{\nu+1}(tw)| \leq M \cdot e^{t|\eta|}$ ,

$$(16) \quad \left| \int_0^\tau t^{\nu+1/2} R_n(x,t,H) dt \right| \leq M \cdot \frac{\tau^{\nu+1/2} [1 + (D_n x)^{\nu+1/2}]}{(2-x-\tau)D_n}.$$

Sea  $f_0$  la función característica de un intervalo  $[a,b] \subset (0,1)$ , y sea  $f = f_0 \cdot t^{\nu+1/2}$ . Será suficiente que probemos el Lema para esta clase de funciones. Tendremos, entonces,

$$(17) \quad \left| \int_0^1 R_n(x,t,H) f(t) dt \right| = \left| \int_0^b t^{\nu+1/2} R_n dt - \int_0^a t^{\nu+1/2} R_n dt \right| \leq$$

$$\leq M. \frac{a^{\nu+1/2} [1+(xD_n)^{\nu+1/2}]}{(2-x-a)D_n} + M. \frac{b^{\nu+1/2} [1+(xD_n)^{\nu+1/2}]}{(2-x-b)D_n} \leq$$

$$\leq 2M. \frac{a^{\nu+1/2} \cdot [1+(xD_n)^{\nu+1/2}]}{(1-b)D_n}.$$

Luego ,

$$\left\| \int_0^1 R_n f dt \right\|_2^2 \leq M_1 \cdot \frac{a^{2\nu+1} \int_0^1 (1+x)^{\nu+1/2} dx}{(1-b)^2 D_n^2} \leq M_2 \cdot \frac{a^{2\nu+1}}{(1-b)^2 D_n^2},$$

así que  $\left\| \int_0^1 R_n f dt \right\|_2 \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$ . Q.E.D.

Observación. También se deduce de (17) que, si  $p(\nu+1/2) > -1$ ,

$$\left\| \int_0^1 R_n f dt \right\|_p \rightarrow 0 \text{ para } n \rightarrow \infty.$$

#### 4. Demostración de los teoremas 1 y 2.

Supondremos probados los resultados siguientes, que aparecen, por ejemplo, en el libro de Tolstov, Ch. 8.

( $\alpha$ ) Si  $f$  es dos veces continuamente derivable y se anula en un entorno de 0 y 1, entonces, para  $\nu > -1$ , es

$$\left| a_m \right| = \left| \frac{\int_0^1 x f(x) J_\nu(s_m x) dx}{\int_0^1 x J_\nu^2(s_m x) dx} \right| \leq \frac{C}{s_m^{3/2}}, \quad C = C(f).$$

( $\beta$ ) Existen dos constantes positivas dependientes de  $\nu$  ( $\nu > -1$ ) tales que

$$\frac{K}{s_m} \leq \int_0^1 J_\nu^2(s_m t) t dt \leq \frac{M}{s_m} \text{ para todo } m.$$

Del tratado de Watson extraemos el siguiente (Ch. XVIII):

( $\gamma$ ) Suponiendo  $\nu \geq -1/2$  y las demás hipótesis de ( $\alpha$ ):  $\sum_{m=1}^{\infty} a_m J_\nu(s_m x) = f(x)$ ,  $0 < x < 1$ .

( $\gamma$ ) es válida aun para  $\nu > -1$ , y el conocimiento de este hecho haría nuestra demostración más corta. Sin embargo, parece más sencillo probar primero los teoremas 1 y 2, y luego completar ( $\gamma$ ) en el sentido de cubrir todo el rango  $\nu > -1$ . A ese efecto incluiremos una nota al fin de este capítulo.

I. En primer lugar, veamos que i) y ii) del teorema 1 son equivalentes. En realidad, si  $\{J_\nu(s_m x)\}$  es completa en  $L_x^2$ , entonces, cuando  $g \in L_x^2$ ,

$\int_0^1 g J_\nu(s_m x) x dx = 0$  para todo  $m$  implica  $g=0$  c.d. Por otra parte,  $g \in L_x^2$  si y solo si  $h=g\sqrt{x} \in L^2$ . Por consiguiente, de  $h \in L^2$  y  $\int_0^1 h\sqrt{x} J_\nu(s_m x) dx = 0$  para todo  $m$  se deduce  $h=0$  c.d. Es decir,  $\{\sqrt{x} J_\nu(s_m x)\}$  es completa en  $L^2$ . Así hemos probado que ii) implica i), y análogamente se ve que i) implica ii).

II. Sea  $f$  como en ( $\alpha$ ). Se sigue de ( $\alpha$ ) y ( $\beta$ ) fácilmente que  $\sum a_m J_\nu(s_m x)$  converge entonces en  $L_x^2$  y, de ( $\gamma$ ), que debe converger a  $f$ . Ya que las funciones como  $f$  son densas en  $L_x^2$ , obtenemos ii) para  $\nu \geq -1/2$  y, por lo tanto, i) para  $\nu \geq -1/2$ .

III. Cuando  $\nu \geq -1/2$ , i) implica j). Esto es consecuencia inmediata de i) del Lema 1. En virtud de I, pues, jj) es también válida cuando  $\nu \geq -1/2$ .

IV. i) vale para  $-1 < \nu < -1/2$ . Para demostrar esto necesitaremos algunos resultados auxiliares que son interesantes por sí mismos. Según hemos dicho en el párrafo 2 de este capítulo y III, el sistema  $\{J_\nu(k_m \sqrt{z})\}$ ,  $\nu \geq 0$ , es completo en  $L^2$  si  $\nu+H > 0$  y  $k_m J_\nu'(k_m) + H J_\nu(k_m) = 0$ . El desarrollo de  $z^{\nu/2}$  con respecto a este sistema es:

$$\sum_1^\infty c_n J_\nu(k_n \sqrt{z}), \quad c_n = \frac{\int_0^1 z^{\nu/2} J_\nu(k_n \sqrt{z}) dz}{\int_0^1 J_\nu^2(k_n \sqrt{z}) dz}.$$

El numerador, en este cociente, es igual a:

$$\left(\frac{2}{k_n^{2+\nu}}\right) \int_0^{k_n} t^{\nu+1} J_\nu(t) dt = \frac{2}{k_n^{2+\nu}} \cdot k_n^{\nu+1} J_{\nu+1}(k_n) = \frac{2}{k_n} \cdot J_{\nu+1}(k_n).$$

$$J_{\nu+1}(k_n) = \frac{\nu}{k_n} J_{\nu}(k_n) - J_{\nu}'(k_n),$$

es

$$\frac{2}{k_n} J_{\nu+1}(k_n) = \frac{2\nu}{k_n^2} J_{\nu}(k_n) - \frac{2 J_{\nu}'(k_n)}{k_n} = \frac{2\nu}{k_n} J_{\nu}(k_n) + \frac{2H}{k_n} J_{\nu}(k_n).$$

Luego ,

$$(18) \quad c_n = \frac{2(\nu+H)}{k_n^2} \cdot \frac{J_{\nu}(k_n)}{\int_0^1 J_{\nu}^2(k_n \sqrt{z}) dz} = C_n \cdot (\nu+H) \cdot J_{\nu}(k_n) / k_n^2.$$

Como  $C_n = O(k_n)$  ,  $k_n \sim n\pi$  ,  $J_{\nu}(k_n) = O(1/\sqrt{k_n})$  y  $J_{\nu}(k_n \sqrt{z})$  es uniformemente acotada, vemos que el desarrollo de  $z^{\nu/2}$  converge uniformemente, y, por lo tanto a  $z^{\nu/2}$ :

$$(19) \quad z^{\nu/2} \doteq (\nu+H) \cdot \sum_1^{\infty} (c_n / k_n^2) J_{\nu}(k_n) J_{\nu}(k_n \sqrt{z}) \quad , \quad \nu \geq 0 \quad , \quad \nu+H > 0 .$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por  $z^{\nu/2}$  , integrando término a término de 0 a z , y usando (8) , se sigue que

$$(20) \quad z^{\nu+1} \doteq 2(\nu+1)(\nu+H) \cdot z^{(\nu+1)/2} \cdot \sum_1^{\infty} \frac{C_n}{k_n^3} \cdot J_{\nu+1}(k_n \sqrt{z}) \cdot J_{\nu}(k_n).$$

Ahora multiplicamos ésta por  $z^{-(\nu+1)}$  , integramos desde algún  $\epsilon$  fijo hasta z ,  $0 < \epsilon < 1$  , y usamos la segunda fórmula en (8) , para obtener así

$$z = \delta - 4(\nu+1)(\nu+H) \cdot \sum_1^{\infty} \frac{C_n}{k_n^4} J_{\nu}(k_n) \cdot J_{\nu}(k_n \sqrt{z}) \cdot z^{-\nu/2} \quad ,$$

donde  $\delta$  es una cierta constante. Por lo tanto, vale

$$(21) \quad z^{\nu/2+1} \doteq A_0(1) \cdot z^{\nu/2} + \sum_1^{\infty} a_n(1) \cdot J_{\nu}(k_n \sqrt{z}) \quad ,$$

donde  $A_0(1)$  es una constante y  $a_n(1) = O(k_n^{-3})$ .

Reiterando este procedimiento, obtenemos, para p entero positivo:

$$(22) \quad z^{\nu/2+p} \doteq A_0(p) z^{\nu/2} + \dots + A_{p-1}(p) z^{\nu/2+p-1} + \sum_1^{\infty} a_n(p) \cdot J_{\nu}(k_n \sqrt{z}) \quad ,$$

donde  $A_i(p)$  es una constante y  $a_n(p) = O(k_n^{-3})$ .

Podemos resumir estos resultados en el siguiente lema.

Lema 2. Cuando  $\nu \geq 0$ ,  $\nu+H > 0$ , los desarrollos (19) y (22) son válidos uniformemente para  $0 < z < 1$ . Aquí,  $k_n J'_\nu(k_n) + H J_\nu(k_n) = 0$ ,  $k_n > 0$ . (Young, [6]).

Supongamos ahora que  $\nu \in (-1, 0)$ .

Derivando ambos miembros de la primera ecuación en (8), se obtiene

$$(23) \quad J_\nu(k_n) = 0, \quad k_n > 0 \quad \text{si y sólo si} \quad k_n J'_{\nu+1}(k_n) + (\nu+1) J_{\nu+1}(k_n) = 0.$$

Y reemplazamos, en el Lema 2,  $\nu$  y  $H$  por  $\nu+1$ , para tener el siguiente Lema.

Lema 3. Cuando  $\nu \in (-1, 0)$ , valen los siguientes desarrollos uniformemente para  $0 < z < 1$ :

$$(24) \quad z^{(\nu+1)/2} = \sum_1^\infty a_n(0) \cdot J_{\nu+1}(s_n \sqrt{z}), \quad a_n(0) = \frac{4(\nu+1) J_{\nu+1}(s_n)}{s_n^2 \int_0^1 J_{\nu+1}^2(s_n \sqrt{z}) dz};$$

$$(25) \quad z^{(\nu+1)/2+p} = b_0(p) z^{(\nu+1)/2} + \dots + b_{p-1}(p) z^{(\nu+1)/2+p-1} + \sum_1^\infty a_n(p) J_{\nu+1}(s_n \sqrt{z});$$

donde  $p > 1$  es entero,  $a_n(p) = O(s_n^{-3})$ ,  $s_n > 0$ ,  $J_\nu(s_n) = 0$ .

Multiplicando (24) y (25) por  $z^{(\nu+1)/2}$ , obtenemos ciertos desarrollos uniformes de  $z^{\nu+q}$ , donde  $q = 1, 2, 3, \dots$ . Derivando luego término a término estos desarrollos y usando (8) se sigue, formalmente:

$$(26) \quad z^\nu = z^{\nu/2} \cdot \sum_1^\infty \tilde{a}_n(0) s_n \cdot J_\nu(s_n \sqrt{z}),$$

$$(27) \quad z^{\nu+p} = \tilde{b}_0(p) z^\nu + \dots + \tilde{b}_{p-1}(p) z^{\nu+p-1} + z^{\nu/2} \cdot \sum_1^\infty \tilde{a}_n(p) \cdot s_n J_\nu(s_n \sqrt{z}), \quad p > 1.$$

donde los coeficientes  $\tilde{a}_m(j)$ ,  $\tilde{b}_r(j)$ , difieren de  $a_m(j)$ ,  $b_r(j)$ , en un factor constante que depende sólo de  $j$ . Para que (26) y (27) sean igualdades en el sentido de  $L^1$  es suficiente probar que las series convergen en  $L^2$ . En realidad en tal caso los segundos miembros convergen en  $L^1$  y podemos integrar término a término desde cero hasta  $z$  para concluir que los mismos son iguales a los respectivos primeros miembros c.d.. Luego, éstos son los límites en  $L^1$ .

La serie en (27) converge en  $L^2$ , según se ve fácilmente teniendo en cuenta que  $\tilde{a}_n = O(s_n^{-3})$ ,  $s_n \sim n\pi$ .

Veamos ahora que la serie en (26) converge en  $L^2$ . De (8) se deduce que

$\int_0^1 z^{\nu/2} J_\nu(s_n \sqrt{z}) dz = 2J_{\nu+1}(s_n)/s_n$  y, por ende, que el n-ésimo coeficiente de Fourier de  $z^{\nu/2}$  con respecto al sistema ortogonal  $\{J_\nu(s_n \sqrt{z})\}$  es igual a  $\tilde{a}_n(0)s_n$ . Como  $z^{\nu/2} \in L^2$ , la serie  $\sum \tilde{a}_n(0)s_n J_\nu(s_n \sqrt{z})$  converge, entonces, en  $L^2$ .

Resumimos estos resultados en el siguiente:

**Lema 4.** Cuando  $-1 < \nu < 0$  y  $\{s_n\}$  son los ceros positivos de  $J_\nu$ , valen los siguientes desarrollos en  $L^2$ :

$$(28) \quad z^{\nu/2} = \sum_1^{\infty} \tilde{a}_n(0) \cdot s_n \cdot J_\nu(s_n \sqrt{z}),$$

$$(29) \quad z^{\nu/2+p} = \tilde{b}_0(p) z^{\nu/2} + \dots + \tilde{b}_{p-1}(p) z^{\nu/2+p-1} + \sum_1^{\infty} \tilde{a}_n(p) s_n J_\nu(s_n \sqrt{z}).$$

Supongamos ahora que una función  $h(x) = f(x)\sqrt{x}$  está en  $L^2$  y que

$$\int_0^1 h(x) J_\nu(s_n x) \sqrt{x} dx = 0 \text{ para todo } n. \text{ Entonces, } f(\sqrt{x}) \in L^2 \text{ y}$$

$$\int_0^1 f(\sqrt{x}) J_\nu(s_n \sqrt{x}) dx = 0 \text{ para todo } n.$$

De (28) y (29) obtenemos, en esta situación, al menos cuando  $-1 < \nu < -1/2$ ,

$$(30) \quad \int_0^1 f(\sqrt{x}) x^{\nu/2+p} dx = 0, \quad p=0,1,2, \dots$$

Esto implica que  $f(\sqrt{x})x^{\nu/2}$  (que está en  $L^1$ ) es cero c.d. y, por lo tanto, que  $h=0$  c.d.. Así, hemos probado IV.

V. Cuando  $-1 < \nu < -1/2$ , i) implica j). En efecto, esto se sigue de IV y ii) del lema 1, como fácilmente puede verificar el lector. Así concluye la demostración de los teoremas 1 y 2. Q.E.D.

**Nota.** Si  $f$  es dos veces continuamente derivable y se anula en un entorno de 0 y 1, y si  $\nu > -1$ , entonces (véase §4 de este capítulo)  $|a_m(f)| \leq C s_m^{-3/2}$ , siendo  $s_m > 0$ ,  $J_\nu(s_m) = 0$  y  $C$  una constante. Ya que  $|J_\nu(s_m x)| \leq M_1 (s_m x)^{-1/2}$  si  $s_m x > 1$ , y  $|J_\nu(s_m x)| \leq M_2 (s_m x)^\nu$  si  $s_m x < 1$ , resulta que, para  $\nu \in (-1, -1/2)$ ,  $x \in (0,1)$  y cualquier  $m$ ,  $|J_\nu(s_m x)| \leq M x^\nu s_m^{-1/2}$ , donde  $M$  es una constante que depende sólo de  $\nu$ . Por lo tanto,

(31)  $|a_m J_\nu(s_m x)| \leq Cx^\nu s_m^{-2}$ ,  $C=C(\nu)$ ,  $-1 < \nu < -1/2$ ,  
y  $\sum a_m J_\nu(s_m x)$  converge absolutamente. Como, por otra parte, converge a  $f$  en  $L_x^2$ ,  
deberá ser

$$f(x) = \sum a_m J_\nu(s_m x)$$

para  $0 < x < 1$  (véase (31)). Es decir,  $(\gamma)$  del §4 es válida también cualquiera  
sea  $\nu > -1$ .

#### BIBLIOGRAFIA

- [ 1 ] BENEDEK A. and PANZONE R., *Mean convergence of series of Bessel functions*,  
Rev. UMA, (1972), 42-61.
- [ 2 ] LUKE Y.L., *Integrals of Bessel functions*, Mc Graw-Hill, New York (1962).
- [ 3 ] TOLSTOV G.P., *Fourier Series*, Prentice-Hall (1962).
- [ 4 ] WATSON G.N., *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge (1944).
- [ 5 ] WHITTAKER E.T. and WATSON G.N., *A course in modern analysis*, Cambridge  
(1947).
- [ 6 ] YOUNG W.H., *On series of Bessel functions*, Proc. of the London Math. Soc.,  
ser. (2), 18 (1920), pp.163-200.

#### CAPITULO XIII

##### CONVERGENCIA EN MEDIA EN $L^p$ DE LAS SERIES DE BESSEL Y DE DINI

1. Nuestro objetivo en este Capítulo es probar los siguientes teoremas:

TEOREMA 1. Sea  $\nu > -1$ . El sistema de Fourier-Bessel es una base en  $L^p$  si

$$(1) \quad \frac{1}{[\nu \wedge (-\frac{1}{2})] + \frac{3}{2}} < p < \frac{1}{-[\nu \wedge (-\frac{1}{2})] - \frac{1}{2}}$$

TEOREMA 2. Sea  $\nu > -1$ . El sistema de Bessel es una base en  $L_x^p$  si

$$(2) \quad \frac{2}{[\nu \wedge (-\frac{1}{2})] + 2} < p < \frac{2}{-[\nu \wedge (-\frac{1}{2})]}$$

TEOREMA 3. Si  $p$  verifica (1) y  $\nu > -1$ , entonces el sistema de Fourier-Dini es una base en  $L^p$ .

TEOREMA 4. Si  $p$  verifica (2) y  $\nu > -1$ , entonces el sistema de Dini es una base en  $L^p_x$ .

Para la demostración de estos teoremas necesitaremos una estimación de los núcleos de Dirichlet. Sea  $\Phi_n(x) = \sqrt{2x} \cdot J_\nu(s_n x) / |J_{\nu+1}(s_n)|$ , donde  $s_n$  crece con  $n$  y recorre todo el conjunto de los ceros positivos de  $J_\nu$ . Entonces, si  $0 < r < 1$ ,  $0 < x < 1$ ,  $D_n(x, r) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(r) \Phi_j(x)$  es el  $n$ -ésimo núcleo de Dirichlet asociado al sistema de Fourier-Bessel. Escribamos ( $\nu > -1$ ):

$$(3) \quad K(M_n, x, r) = J_\nu(xM_n) \cdot J_{\nu+1}(rM_n) \cdot \frac{M_n \sqrt{xr}}{2(r-x)},$$

$$(4) \quad H(M_n, x, r) = J_\nu(xM_n) \cdot J_{\nu+1}(rM_n) \cdot \frac{M_n \sqrt{xr}}{2(r+x)}, \quad M_n = \frac{s_n + s_{n+1}}{2}$$

entonces es válida la siguiente estimación ( $0 < x, r < 1$ ):

$$(5) \quad |D_n(x, r) - K(M_n, x, r) - K(M_n, r, x) - H(M_n, x, r) - H(M_n, r, x)| \leq \\ \leq C \cdot \frac{1}{2-x-r} + (xr)^{\nu+1/2}, \quad C = C(\nu) \text{ independiente de } n.$$

Esta estimación será probada en el Capítulo XIV.

2. Demostración de los teoremas 1 y 2. La idea de la demostración es una que ya vimos, a saber, mostrar que, si  $D_n$  denota al núcleo de Dirichlet del sistema considerado y  $\|\cdot\|$  a la norma del espacio  $L^p$  según la medida  $\mu$  que corresponde, entonces los operadores

$$(6) \quad \int_0^1 D_n(x, r) f(r) d\mu \quad \text{son uniformemente continuos en } L^p.$$

Distinguiremos cuatro casos: i) teorema 1 para  $\nu \geq -1/2$ ;

ii) teorema 1 para  $-1 < \nu < -1/2$ ; iii) teorema 2 para  $\nu \geq -1/2$ ;

iv) teorema 2 para  $-1 < \nu < -1/2$ .

Como i) y iii) pueden ser demostrados de maneras análogas, nos limitaremos a la prueba de i). Otro tanto ocurre con ii) y iv), así que de éstos sólo pro-

baremos iv).

i) Como  $\sqrt{z} J_\nu(z)$  está acotada en  $(0, \infty)$ , los numeradores de (3) y (4) están uniformemente acotados, de modo que los núcleos K y H son uniformemente continuos al menos en aquellos espacios  $L^p$  en que es continuo el operador de Hilbert, es decir, para  $1 < p < \infty$ . Luego, como es fácil ver, (6) vale en cualquier  $L^p$ ,  $p \in (1, \infty)$ , en que sean continuos los siguiente operadores:

$$(7) \quad \int_0^1 \frac{f(t)}{2-x-t} dt ,$$

$$(8) \quad x^{\nu+1/2} \int_0^1 t^{\nu+1/2} \cdot f(t) dt .$$

Pero está claro que tal cosa ocurre en todos esos  $L^p$ , pues (7) es esencialmente un operador de Hilbert, mientras que, al ser  $\nu \geq -1/2$ ,  $x^{\nu+1/2}$  está acotada. Así probamos i).

iv) Sea  $\psi_n(x) = \Phi_n(x)/\sqrt{x}$ , y sea  $d_N(x,r) = \sum_1^N \psi_j(x)\psi_j(r) = D_N(x,r)/\sqrt{xr}$ .

Denotando, con k y h, a  $K/\sqrt{xr}$  y  $H/\sqrt{xr}$ , respectivamente, tendremos  $d_n(x,r) = k(M_n, x, r) + k(M_n, r, x) + h(M_n, x, r) + h(M_n, r, x) + O(1) \cdot (xr)^\nu + O(1)/[(xr)^{1/2} \cdot (2-x-r)]$ .

Veamos, pues. El operador

$$(9) \quad x^\nu \int_0^1 t^\nu f(t) t dt$$

es continuo en  $L_t^p$  cuando  $2/(2+\nu) < p < -2/\nu$ , según se deduce con facilidad mediante la desigualdad de Hölder.

Por su parte, el operador

$$(10) \quad \int_0^1 \frac{f(t)}{(xt)^{1/2} (2-x-t)} t \cdot dt$$

es continuo en  $L_t^p$  si  $2/(2+\nu) < p < -2/\nu$ . En efecto, se sigue del teorema 2 del capítulo VII

$$\int_0^1 \left| \int_0^1 \frac{F(t) t^{1/2-1/p}}{(2-x-t) x^{1/2-1/p}} dt \right|^p dx \leq C_p \int_0^1 |F(t)|^p dt ,$$

siempre que  $4/3 < p < 4$ . Como  $-2/\nu < 4$ , esto implica la continuidad de (10) en  $L_t^p$ .

Para probar el teorema falta entonces, solamente, establecer que los núcleos  $k$  y  $h$  definen operadores continuos en  $L_t^p$  si  $2/(2+\nu) < p < -2/\nu$ . Y está claro que bastará hacerlo para los núcleos  $k$ . Consideremos, pues, los operadores

$$(11) \quad \mathcal{Z}_M f(x) = v.p. \int_0^\infty k(M,x,r) f(r) r dr = v.p. \int_0^\infty \frac{M \cdot J_\nu(xM) J_{\nu+1}(rM)}{2(r-x)} f(r) r dr,$$

$$(12) \quad \mathcal{Z}_M^* f(x) = v.p. \int_0^\infty k(M,r,x) f(r) \cdot r dr.$$

Será suficiente mostrar que los operadores (11) y (12) poseen normas uniformemente acotadas. Sea  $f$  una función continua, nula en un entorno de 0 y de  $\infty$ .

Ya que

$$\mathcal{Z}_M f(x) = v.p. \int_0^\infty \frac{J_\nu(xM) J_{\nu+1}(t)}{2(t-Mx)} f\left(\frac{t}{M}\right) t dt = \left( \mathcal{Z}_1 \left[ f\left(\frac{\cdot}{M}\right) \right] \right) (Mx),$$

vemos que, si  $\|\cdot\|$  denota a la norma del espacio  $L_t^p$ , y  $g(x) = f(x/M)$ , es

$$\frac{\|\mathcal{Z}_M f\|}{\|f\|} = \frac{\|(\mathcal{Z}_1 g)(xM)\|}{\|f\|} = \frac{\|(\mathcal{Z}_1 g)(x)\|}{\|g\|}.$$

Luego, para probar la continuidad uniforme de los operadores (11), será suficiente comprobar que el operador  $\mathcal{Z}_1$  es continuo en el espacio en cuestión.

(El mismo argumento es válido para  $\mathcal{Z}_M^*$  y  $\mathcal{Z}_1^*$ ).

Pero,

$$\int_0^\infty \left| v.p. \int_0^\infty k(1,x,r) \cdot f(r) \cdot r dr \right|^p x dx \leq C_p \cdot \int_0^\infty |f|^p r dr$$

si y sólo si

$$\int_0^\infty \left| v.p. \int_0^\infty k(1,x,r) \cdot F(r) r^{1/q} \cdot x^{1/p} dr \right|^p dx \leq C_p \cdot \int_0^\infty |F(r)|^p dr,$$

es decir, si y sólo si

$$(13) \quad \int_0^\infty \left| v.p. \int_0^\infty K(1,x,t) \cdot (x/t)^{1/2 - 1/q} \cdot F(t) dt \right|^p dx \leq C_p \cdot \int_0^\infty |F|^p dx .$$

Por otro lado , tenemos:

$$(14) \quad \begin{cases} |\sqrt{x} \cdot J_\nu(x)| \leq 1 + |x|^{\nu+1/2} , & 0 < x < \infty , \\ |\sqrt{x} \cdot J_{\nu+1}(x)| \leq \frac{0(1) \cdot |x|^{\nu+3/2}}{1 + |x|^{\nu+3/2}} = \frac{0(1)}{1 + |x|^{\nu+1/2}} , & 0 < x < \infty . \end{cases}$$

Por lo tanto ,

$$K(1,x,t) = \frac{1 + |x|^{\nu+1/2}}{1 + |t|^{\nu+1/2}} \cdot \frac{\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(t)}{x-t} = \mathfrak{K}(x,t) \cdot \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(t) ,$$

donde  $\varphi_1(x)$  ,  $\varphi_2(t)$  son funciones acotadas en  $(0, \infty)$ .

Así que, en vez de (13) bastará probar:

$$(15) \quad \int_0^\infty \left| v.p. \int_0^\infty \frac{(1+x)^{-(1/2+\nu)}}{(1+t)^{-(1/2+\nu)}} \left(\frac{x}{t}\right)^{\nu+1/p} \frac{F(t)}{x-t} dt \right|^p dx \leq C_p \cdot \int_0^\infty |F|^p dx .$$

En virtud del teorema 4 del Capítulo VII, (15) vale si

$$(16) \quad -1/p < 1/p - 1/2 \quad , \quad 1/p + \nu < 1/q .$$

Como  $1/p - 1/2 > 1/p + \nu$  , las desigualdades (16) se reducen a

$$(17) \quad 1/p - 1/q < 1/2 \quad , \quad -2/p < \nu .$$

La primera de éstas equivale a  $4/3 < p$ . La segunda, a  $-2/\nu > p$ .

Luego, (15) vale si  $-2/\nu > p > 4/3$ .

Ahora, si en lugar del operador  $K(1,x,t)$  consideráramos  $K(1,t,x)$  , obtendríamos  $\mathfrak{K}(t,x)$  en lugar de  $\mathfrak{K}(x,t)$  y (15) quedaría reemplazada por

$$(18) \quad \int_0^\infty \left| v.p. \int_0^\infty \left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{-\nu-1/2} \left(\frac{x}{t}\right)^{-\nu-1/q} \frac{F(t)}{t-x} dt \right|^p dx \leq C_p \cdot \int_0^\infty |F(x)|^p dx .$$

Repitiendo el razonamiento anterior, concluimos que (18) vale si

$$-1/p < 1/2 - 1/q \quad , \quad -1/q - \nu < 1/q \quad ,$$

es decir , si  $2/(2+\nu) < p < 4$  .

Por consiguiente , cuando  $2/(2+\nu) < p < -2/\nu$  , (18) y (15) son ambas válidas, y los operadores (9) y (10) son continuos en  $L_t^p$  . Q.E.D.

3. Demostración del teorema 3. A partir de la fórmula (14) del capítulo XII, y del teorema 1, vemos que los núcleos de Dirichlet del sistema de Fourier-Dini definen operadores uniformemente continuos en  $L^p$  , cuando p verifica (17) y el operador I definido por el núcleo

$$\frac{x^{\nu+1/2} \cdot t^{\nu+1/2}}{2 - x - t}$$

es continuo en  $L^p$  . Pero, por el Teorema 2 Cap. VII , I es continuo en  $L^p$  ,  $1 < p < \infty$  , cuando  $\nu \geq -1/2$  , y , si  $-1 < \nu < -1/2$  , I será continuo en  $L^p$  para  $1/(\nu+3/2) < p < -1/(\nu+1/2)$  .

En virtud de la completitud del sistema en  $L^2$  , el teorema queda probado. Q.E.D.

4. Demostración del teorema 4. De (14) y el teorema 2 , se sigue que los núcleos de Dirichlet del sistema de Dini definen operadores uniformemente continuos en  $L_t^p$  , si p verifica (2) y el operador definido mediante el núcleo

$$\frac{x^\nu t^\nu}{2 - x - t} ,$$

con respecto a la medida  $t dt$  , es continuo en  $L_t^p$  . Pero,

$$\left[ \int_0^1 \left| \int_0^1 \frac{x^\nu y^\nu}{2-x-y} f(y) \cdot y dy \right|^p x dx \right]^{1/p} \leq K \cdot \left[ \int_0^1 |f(y)|^p \cdot y dy \right]^{1/p}$$

es equivalente a

$$\left[ \int_0^1 \left| \int_0^1 \frac{x^{\nu+1/p} \cdot y^{\nu+1/q}}{2-x-y} \cdot F(y) dy \right|^p dx \right]^{1/p} \leq K \cdot \left[ \int_0^1 |F(y)|^p dy \right]^{1/p} ,$$

y esta última desigualdad vale, con K independiente de F. Q.E.D.

5. EXCURSUS . Supongamos que, para toda  $f \in L_\nu^p(0,1)$  , es decir, todo elemento

del espacio  $\left\{ f: \int_0^1 |f|^p d\nu < \infty \right\}$  , la serie

$$\sum a_n \varphi_n , \quad a_n = \int_0^1 \varphi_n(x) f(x) d\nu \Big/ \int_0^1 \varphi_n^2(x) d\nu ,$$

converja en el espacio  $L_{\mu}^p(0,1)$ , siendo  $\mu$  y  $\nu$  medidas finitas. Esto significa que la sucesión de funcionales lineales

$$L_n(f) = a_n \|\varphi_n\|_{p,\mu}$$

es acotada para toda  $f$  y, por lo tanto, uniformemente acotada:

$$\|L_n\| = \sup_{\|f\|_{p,\nu} = 1} |L_n(f)| \leq M.$$

Por consiguiente,

$$\sup_{\|f\|_{p,\nu} = 1} \left| \int_0^1 f \varphi_n d\nu \right| \leq M \cdot \|\varphi_n\|_{2,\nu}^2 / \|\varphi_n\|_{p,\mu}.$$

Esto implica que

$$(19) \quad \|\varphi_n\|_{q,\nu} \|\varphi_n\|_{p,\mu} \leq M \cdot \|\varphi_n\|_{2,\nu}^2 \leq M \cdot \|\varphi_n\|_{p,\nu} \|\varphi_n\|_{q,\nu}.$$

6. El propósito en esta sección es mostrar que los resultados enunciados en los teoremas 1 y 2 son los mejores posibles, dejando el caso de las series de Dini a la consideración del lector.

Ante todo, el problema de la convergencia de las series de Fourier-Bessel en  $L^p$ , carece de sentido para  $\nu < -1$  y no entero, ya que entonces  $\sqrt{x} J_{\nu}(x)$  no está en  $L^2$ . Cuando  $\nu$  es igual a un entero negativo  $m$ , la relación  $J_{-m} = (-1)^m J_m$  reduce el problema al caso  $\nu \geq 0$ . El mismo argumento vale para series de Bessel y los espacios  $L_t^p$ .

Por el teorema de M. Riesz, los  $p$  para los cuales se verifica (6) - y por lo tanto, valen las tesis de los teoremas 1 y 2 - forman un conjunto convexo en  $[1, \infty]$ . Queda entonces por ver solamente que los teoremas no valen para los extremos de los intervalos (1) y (2).

Supongamos ahora  $-1 < \nu < -1/2$ . Como  $\sqrt{x} J_{\nu}(s_n x) \sim C_0 x^{\nu+1/2}$  en el origen, esta función no pertenece a  $L^p$  si  $p(\nu+1/2) \leq -1$ . Por lo tanto, el sistema de Fourier-Bessel no puede ser una base en  $L^p$ , para  $p$  un extremo del intervalo definido por (1). Análogamente, como  $J_{\nu}(s_n x) \sim C_0 x^{\nu}$ , la primera no pertenecerá a  $L_t^p$  cuando  $1+p\nu \leq -1$ , en particular, cuando  $p = -2/\nu$ . Esto quiere decir que el sistema de Bessel no es una base en  $L_t^p$ , si  $p$  es un extremo de (2).

Consideremos ahora el sistema de Fourier-Bessel con  $\nu \geq -1/2$ .

Para probar que dicho sistema no es una base en  $L^p$ , es suficiente mostrar que (6) no define una sucesión de operadores uniformemente continuos en  $L^p$  o en  $L^q$ ,  $1/p + 1/q = 1$  (ya que  $\int D_n f \cdot g = \int f \cdot D_n g$ ). En realidad, para demostrar que el teorema 1 es falso en los extremos de (1), veremos que (6) no define una sucesión de operadores uniformemente continuos para  $p=\infty$ . Y para esto, bastará que mostremos que

$$L_n = \int_0^1 |D_n(1/2, y)| dy \rightarrow \infty.$$

[Sea  $f(y) = \text{sgn } D_n(1/2, y)$ ; entonces,  $S_n f(x) = \int_0^1 f(y) D_n(x, y) dy$  es continuo y  $S_n f(1/2) = L_n$ ].

Pero, si  $y \geq 1/2 + 1/M_n$ ,

$$\begin{aligned} D_n(1/2, y) &= M_n \sqrt{y/2} \cdot \frac{J_\nu(M_n y) J_{\nu+1}(M_n/2) - J_\nu(M_n/2) \cdot J_{\nu+1}(M_n y)}{y - 1/2} + 0(1) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left[ \cos(M_n y - \nu\pi/2 - \pi/4) \cdot \cos(M_n/2 - (\nu+1)\pi/2 - \pi/4) - \right. \\ &\quad \left. - \cos(M_n/2 - \nu\pi/2 - \pi/4) \cdot \cos(M_n y - (\nu+1)\pi/2 - \pi/4) \right] \cdot \frac{1}{y-1/2} + \\ &\quad + \frac{1}{y-1/2} \cdot 0(1/M_n) + 0(1) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\text{sen}[M_n(1/2 - y)]}{y - 1/2} + 0(1). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\int_{1/2 + 1/M_n}^1 |D_n(1/2, y)| dy = \int_{1/2 + 1/M_n}^1 \left| \frac{\text{sen } M_n(y - 1/2)}{y - 1/2} \right| dy + 0(1) =$$

$$\int_1^{M_n/2} \left| \frac{\text{sen } x}{x} \right| dx + 0(1) = c \cdot \ln M_n + 0(1), \quad c > 0.$$

Luego ,  $L_n \geq C \cdot \ln M_n + o(1) \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

De acuerdo a (19) quedará establecido que, cuando  $\nu \geq -1/2$ , el teorema 2 falla en los extremos de (2), con sólo mostrar que

$$(20) \quad \frac{\|\Phi_n\|_4 \|\Phi_n\|_{4/3}}{\|\Phi_n\|_2^2} \neq o(1) ,$$

donde  $\Phi_n = J_\nu(s_n x)$  y las normas se toman con respecto a la medida  $x dx$ . Usaremos el resultado siguiente: si  $\int_1^\infty G(x) dx = \infty$ ,  $G \geq 0$ ,  $G$  y  $F$  son localmente integrables, y  $\frac{F(x)}{G(x)} \rightarrow 1$  ( $x \rightarrow \infty$ ), entonces

$$\int_1^n F(x) dx / \int_1^n G(x) dx \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Se tiene:

$$(21) \quad \|\Phi_n\|_2^2 = \frac{1}{s_n^2} \int_0^{s_n} J_\nu^2(x) \cdot x dx \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{s_n^2} \int_1^{s_n} \cos^2(x - \nu\pi/2 - \pi/4) dx \approx c_1 \cdot \frac{1}{s_n} ,$$

$$(22) \quad \|\Phi_n\|_4^4 = \frac{1}{s_n^2} \int_0^{s_n} J_\nu^4(x) \cdot x dx \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{s_n^2} \int_1^{s_n} \cos^4(x - \nu\pi/2 - \pi/4) \frac{dx}{x} \approx c_2 \cdot \frac{\ln s_n}{s_n} ,$$

$$(23) \quad \|\Phi_n\|_{4/3}^{4/3} = \frac{1}{s_n^2} \int_0^{s_n} J_\nu^{4/3}(x) \cdot x dx \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{s_n^2} \int_1^{s_n} |\cos(x - \nu\pi/2 - \pi/4)|^{4/3} x^{1/3} dx \approx c_3 \cdot \frac{s_n^{4/3}}{s_n^2} .$$

Luego, el primer miembro de (20) es asintóticamente igual a  $C \cdot (\ln s_n)^{1/4}$ ,  $C > 0$ .

Q.E.D.

BIBLIOGRAFIA

- [ 1 ] a) BENEDEK A. y PANZONE R., *On mean convergence of Fourier-Bessel series of negative order*, *Studies in App. Math.*, Vol.L, (1971), 281-292.  
 b) \_\_\_\_\_, *Mean convergence of series of Bessel functions*, *Rev. UMA*, Vol.26, (1972), 42-61.
- [ 2 ] J.NEWMAN y RUDIN W., *Mean convergence of orthogonal series*, *Proc.A.M.S.* 3 (1952), 219-222.
- [ 3 ] WING G.M., *The mean convergence of orthogonal series*, *American J. of Math.*, LXXII (1950), 792-808.

CAPITULO XIV

COMPLETACION DE RESULTADOS. ESTIMACION DEL NUCLEO DE DIRICHLET DE LAS SERIES DE FOURIER-BESSEL.

En este capítulo haremos uso de las siguientes, bien conocidas, estimaciones de las funciones de Bessel:

$$(1) \quad \begin{cases} J_\nu(z) = O(|z|^\nu) & \text{para } |z| < 1, \\ J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z - \nu\pi/2 - \pi/4) + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{|z|^{3/2}}\right), & |z| > 1 \text{ y} \\ |\operatorname{Im}(\log z)| < \pi - \epsilon, & \epsilon > 0. \end{cases}$$

Como antes, escribiremos:

$$(2) \quad \begin{cases} K(M,x,r) = J_\nu(xM) \cdot J_{\nu+1}(rM) \cdot \frac{\sqrt{Mx} \sqrt{Mr}}{2(r-x)}, \\ H(M,x,r) = J_\nu(xM) \cdot J_{\nu+1}(rM) \cdot \frac{\sqrt{Mx} \sqrt{Mr}}{2(r+x)}, \\ D_n(x,r) = \frac{\sum_{j=1}^n \sqrt{xr} \cdot J_\nu(s_j x) \cdot J_\nu(s_j r)}{J_{\nu+1}^2(s_j)/2}, \end{cases}$$

donde  $s_j$  recorre todos los ceros positivos de  $J_\nu$  monótonamente.

Nuestro objetivo es aquí probar el siguiente teorema. Nos guiamos por [ 3 ],

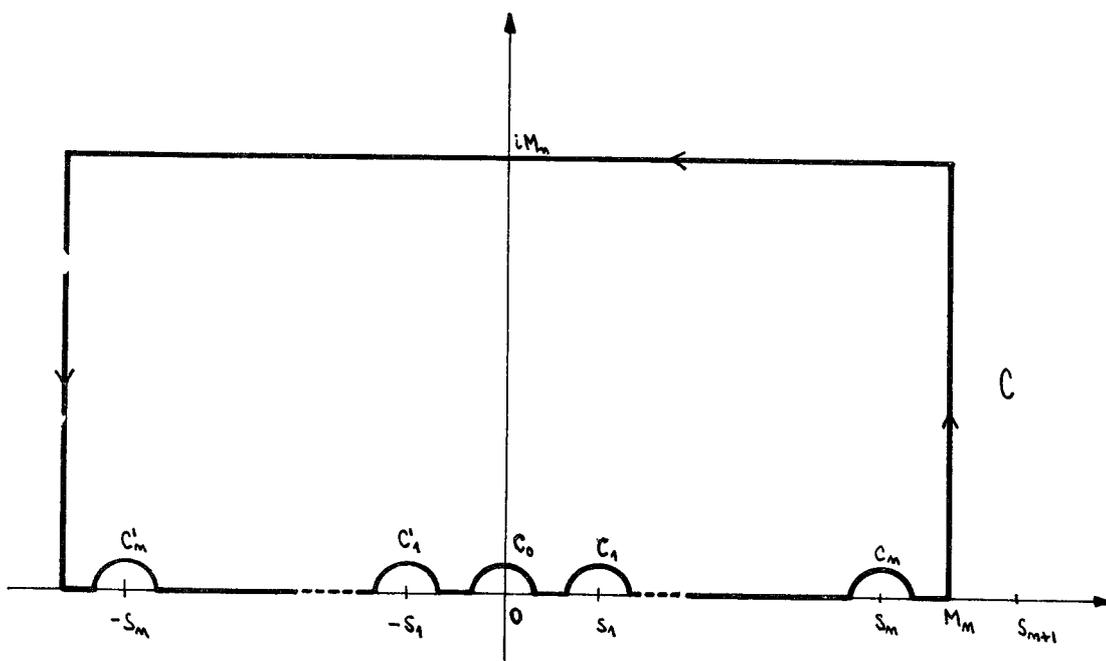
donde se trata el caso  $\nu \geq -1/2$ .

TEOREMA 1. Supongamos que  $M_n = (s_n + s_{n+1})/2$  y  $\nu > -1$ . Entonces, existe una constante  $C = C(\nu)$  tal que, para  $x$  y  $r$  cualesquiera en el intervalo  $(0,1)$ , es válida la estimación siguiente

$$(3) \quad |D_n(x,r) - K(M_n,x,r) - K(M_n,r,x) - H(M_n,x,r) - H(M_n,r,x)| \leq \\ \leq C \cdot \{(2-x-r)^{-1} + (xr)^{\nu+1/2}\} .$$

$C$  está acotada en cualquier intervalo de valores de  $\nu$ , cerrado y contenido en  $(-1, \infty)$ .

Demostración. Supongamos primero que  $\nu$  no es entero,  $H_\nu(z)$  denotará a la primera función de Hankel:  $H_\nu^{(1)}(z)$ . Sea  $C$  el contorno indicado por la figura,



y consideremos la integral

$$(4) \quad \int_C \frac{z H_\nu(z) J_\nu(zx) J_\nu(zr)}{J_\nu(z)} dz = 0, \quad 0 < x, r < 1 .$$

Como, para  $\nu$  no entero,  $H_\nu(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z) = \frac{-J_\nu(z) e^{-i\nu\pi} + J_{-\nu}(z)}{i \sin \nu \pi}$ ,

la integral (4), restringida a  $C_0$ , tiende a cero cuando el radio tiende a cero. A lo largo de las semicircunferencias  $C_j$  y  $C_j'$ ,  $j=1, \dots, n$ , la integral tiende a

$$(5) \quad I_1 = -2\pi i \cdot \sum_{j=1}^n s_j H_\nu(s_j) \cdot J_\nu(s_j x) \cdot J_\nu(s_j r) / J_\nu'(s_j) ,$$

cuando los radios tienden a cero. Esto es porque los residuos en  $s_j$  y  $-s_j$  son iguales. En efecto, cuando  $\alpha > 0$ ,

$J_\nu(-\alpha) = e^{i\nu\pi} \cdot J_\nu(\alpha)$  y, por lo tanto,  $J_\nu'(z) = -J_{\nu+1}(z) + \nu J_\nu(z)/z$ , lo que implica  $J_\nu'(-\alpha) = e^{i(\nu+1)\pi} \cdot J_\nu'(\alpha)$ . Además, observemos que sólo es necesario considerar el término  $J_{-\nu}/i \operatorname{sen} \nu\pi$  en la expresión de  $H_\nu$ , pues el otro, multiplicado por  $z \cdot J_\nu(zx) \cdot J_\nu(zr) / J_\nu(z)$  e integrado a lo largo de  $C_j$  o  $C_j'$ , tiende a cero junto con el radio. Pero  $J_{-\nu}(-s_j) = J_{-\nu}(s_j) \cdot e^{-i\nu\pi}$ , y de esto y lo que precede se deduce que los residuos en  $s_j$  y  $-s_j$  coinciden. Por [4], p.76, sabemos que  $(-J_\nu' H_\nu + J_\nu H_\nu')(z) = 2i/\pi z$ , así que

$$s_j H_\nu(s_j) = -2i/\pi J_\nu'(s_j) , \quad y$$

$$(6) \quad I_1 = -4 \sum_{j=1}^n J_\nu(s_j x) \cdot J_\nu(s_j r) / J_\nu'^2(s_j) = -2 D_n(x, r) / \sqrt{xr}.$$

Completemos ahora la estimación de la integral a lo largo de la base del contorno de  $C$ :

$$(7) \quad \begin{aligned} I_2 &= \text{v.p.} \int_{-M_n}^{M_n} \frac{z H_\nu(z) J_\nu(zx) J_\nu(zr)}{J_\nu(z)} dz = \\ &= \text{v.p.} \int_{-M_n}^{M_n} \frac{z (-J_\nu e^{-i\nu\pi} + J_{-\nu})(z) J_\nu(zx) J_\nu(zr)}{J_\nu(z) \cdot i \operatorname{sen} \nu\pi} dz \\ &= \frac{i \cdot e^{-\nu\pi}}{\operatorname{sen} \nu\pi} \cdot \int_{-M_n}^{M_n} z \cdot J_\nu(zx) \cdot J_\nu(zr) dz , \end{aligned}$$

ya que  $\frac{J_{-\nu}(z)}{J_\nu(z)} J_\nu(zx) J_\nu(zr)$  es una función par de  $z$ .

Teniendo en cuenta que

$$\int_{-M_n}^0 z J_\nu(zx) J_\nu(zr) dz = -e^{2i\nu\pi} \int_0^{M_n} z J_\nu(zx) J_\nu(zr) dz ,$$

vemos que

$$I_2 = 2 \int_0^{M_n} z J_\nu(zx) J_\nu(zr) dz .$$

Así que, usando una conocida fórmula de Lommel ([4], p.381),

$$(8) \quad I_2 = \frac{2}{r^2 - x^2} \left\{ x M_n J_\nu(rM_n) J'_\nu(xM_n) - r M_n J_\nu(xM_n) J'_\nu(rM_n) \right\} .$$

Combinando (8), (6) y (4), resulta

$$(9) \quad D_n(x,r) = \frac{\sqrt{xr}}{r^2 - x^2} \cdot \left\{ x M_n J_\nu(rM_n) J'_\nu(xM_n) - r M_n J_\nu(xM_n) J'_\nu(rM_n) \right\} + \\ + \frac{\sqrt{xr}}{2} \cdot \int_S \frac{z H_\nu(z) J_\nu(zx) J_\nu(zr)}{J_\nu(z)} dz ,$$

donde S es la parte del contorno C formada por los segmentos laterales y el superior. Llamemos ahora  $I_3$  a la última integral. Mediante la fórmula de recurrencia

$$J'_\nu(z) = -J_{\nu+1}(z) + \nu J_\nu(z)/z ,$$

vemos que

$$(10) \quad D_n(x,r) = K(M_n, x, r) + K(M_n, r, x) + H(M_n, x, r) + H(M_n, r, x) + \\ + \frac{\sqrt{xr}}{2} \cdot I_3 ,$$

de modo que, para probar el teorema, debemos estimar  $I_3$ .

A partir de los desarrollos asintóticos y del hecho que

$$J_\nu(-z) = e^{i\nu\pi} \cdot J_\nu(z) \quad \text{cuando } |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} ,$$

se obtiene la estimación siguiente:

$$(11) \quad |J_\nu(z)| \leq C_0 (|z|^\nu + |z|^{-1/2}) \cdot e^{|\operatorname{Im} z|} , \quad |z| > 0 , \quad -1 < \nu < -1/2 ,$$

donde  $C_0 = C_0(\nu)$ . Por lo tanto, sobre S, vale

$$(12) \quad |J_\nu(zx)| \leq 2 \cdot C_0 \cdot M_n^{-1/2} x^\nu \cdot e^{|\operatorname{Im} z| x}, \quad M_n > 1, \quad -1 < \nu < -1/2.$$

Pero, también sobre S:

$$(13) \quad \left| \frac{H_\nu(z)}{J_\nu(z)} \right| \leq C_1 \cdot e^{-2|\operatorname{Im} z|}, \quad |z| > 1, \quad C_1 = C_1(\nu), \nu > -1,$$

ya que  $H_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot e^{i(z-\nu\pi/2-\pi/4)} \cdot \left[ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r (\nu, r)}{(2iz)^r} \right],$

donde  $(\nu, r) = \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2) \dots (4\nu^2 - (2r-1)^2)}{2^{2r} \cdot r!}$

Entonces, por (12) y (13),

$$(14) \quad |I_3| \leq \frac{12 C_0^2 \cdot C_1 \cdot (xr)^\nu}{2-x-r}, \quad \nu \in (-1, -1/2).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \int_S |z \cdot \frac{H_\nu(z)}{J_\nu(z)} \cdot J_\nu(zx) \cdot J_\nu(zr)| \cdot |dz| \\ &\leq 4 \cdot C_0^2 \cdot C_1 \cdot (xr)^\nu \cdot \int_S e^{(x+r-2)|\operatorname{Im} z|} |dz| \leq \\ &\leq 4 C_0^2 \cdot C_1 (xr)^\nu \left[ 2 \int_0^{M_n} e^{(x+r-2)t} dt + M_n \cdot e^{(x+r-2)M_n} \right] \leq \\ &\leq 4 \cdot C_0^2 \cdot C_1 (xr)^\nu \left[ \frac{2}{2-x-r} + \frac{\sup \{te^{-t} : t > 0\}}{2-x-r} \right] \leq \\ &\leq 12 C_0^2 \cdot C_1 (xr)^\nu / (2-x-r). \end{aligned}$$

Cuando  $\nu \geq -1/2$ , en vez de (11) usamos la siguiente desigualdad:

$$(15) \quad |J_\nu(z)| \leq C_0 e^{|\operatorname{Im} z|} / |z|^{1/2}, \quad |z| > 0,$$

para obtener, repitiendo el razonamiento precedente ,

$$(16) \quad |I_3| \leq \frac{2C_0^2 C_1}{\sqrt{xr}} \cdot \int_S e^{-|\operatorname{Im} z| |2-x-r|} |dz| \leq \frac{6C_0^2 C_1}{\sqrt{xr} \cdot (2-x-r)} .$$

En conclusión ,

$$(17) \quad \begin{cases} \sqrt{xr} \cdot |I_3| / 2 \leq 6 C_0^2 C_1 (xr)^{\nu+1/2} / (2-x-r) & , \quad -1 < \nu < -1/2 \\ \sqrt{xr} \cdot |I_3| / 2 \leq 3 C_0^2 C_1 / (2-x-r) & , \quad -1/2 \leq \nu < \infty \end{cases} .$$

Como, en la primera de estas desigualdades , es

$$\frac{(xr)^{\nu+1/2}}{2-x-r} \leq 2 \cdot \left[ (xr)^{\nu+1/2} + \frac{1}{2-x-r} \right] ,$$

resulta, para cualquier  $\nu > -1$ ,  $\nu \neq$  entero:

$$(18) \quad |I_3| \sqrt{xr} / 2 \leq 12 C_0^2 C_1 (2-x-r)^{-1} + 12 C_0^2 C_1 (xr)^{\nu+1/2} .$$

Analicemos ahora el comportamiento de  $C_0$  y  $C_1$  en función de  $\nu$ .

$C_0$  depende del desarrollo de  $J_\nu$  , y está acotada para  $-1+\epsilon \leq \nu \leq 1/\epsilon$  ,

$\epsilon > 0$  , porque: i) en este intervalo de valores de  $\nu$  los coeficientes del desarrollo de  $J_\nu$  , están uniformemente acotados por los de una función entera, y

ii) los términos  $O(\cdot)$  en las fórmulas (1) están uniformemente acotados, para tales  $\nu$  y  $|\arg z| \leq \pi/2$  [véase (11)] . En efecto, i) es fácil de verificar,

mientras ii) depende de estimaciones que aparecen, por ejemplo , en la demostración del lema de Watson. Siguiendo las demostraciones que da Copson, Pgs.

218-219 y 331-336, (o las del capítulo sobre aproximaciones asintóticas de estas notas) vemos que  $O(e^{|\operatorname{Im} z|} / |z|^{3/2})$  es uniforme cuando  $\nu \in [-1+\epsilon, 1/\epsilon]$

con tal de que  $|\arg z| < \pi - \eta$  ,  $\eta$  fijo y positivo.  $C_1$  aparece en la estimación (13) . Hay una constante  $k$ , independiente del antedicho intervalo de valores de  $\nu$ , tal que

$$|J_\nu(z)| \geq k \cdot \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{|z|^{1/2}} - \left| O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{|z|^{3/2}}\right) \right| \text{ sobre } S .$$

En realidad, cuando  $|\operatorname{Im} z| > \epsilon$  , esto es consecuencia de

$$|\cos z| \geq \left| \frac{|e^{iz}| - |e^{-iz}|}{2} \right| ,$$

mientras que, si  $|\operatorname{Im} z| \leq \epsilon$ , la periodicidad de  $\cos z$  implica que, si  $|\cos z| \geq \eta$  en un entorno de un punto, otro tanto vale para  $z+2\pi$ .

Como  $|\arg z| \leq \pi/2$  implica  $J_\nu(-z) = e^{i\nu\pi} J_\nu(z)$ , las consideraciones precedentes conducen a

$$(19) \quad |J_\nu(z)| \geq K.e^{|\operatorname{Im} z|} / |z|^{1/2}, \quad z \in S,$$

donde  $|z|$  es suficientemente grande y  $K$  vale para cualquier  $\nu$  en el intervalo en cuestión.

Esto demuestra que (3) es válida para  $\nu$  no entero y que la constante  $C$  está acotada sobre intervalos de la forma  $[-1+\epsilon, 1/\epsilon]$ . Pasando al límite para  $\nu \rightarrow$  entero, obtenemos por fin (3) para cualquier  $\nu > -1$ . Q.E.D.

#### BIBLIOGRAFIA

- [ 1 ] BENEDEK A. y PANZONE R., *On mean convergence of Fourier-Bessel series of negative order*, Studies in App.Math., (1971), 281-292.
- [ 2 ] COPSON E.T., *An introduction to the theory of functions of a complex variable*, Oxford (1955).
- [ 3 ] MAC ROBERT T.M., *Asymptotic expressions for the Bessel functions and the Fourier-Bessel expansion*. Proc. of the Edinburgh Math.Soc., vol. 39 (1921), 13-20.
- [ 4 ] WATSON G.N., *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge (1944).
- [ 5 ] WING G.M., *The mean convergence of orthogonal series*, Amer.J. of Math., LXXII (1950), 792-808.

*Señores, vámonos poco a poco, pues ya en los nidos de antaño no hay pájaros hogaño.*

Alonso Quijano el Bueno.

INDICE ALFABETICO

- Base ortonormal en  $L^p$ , 34
- Bessel, desarrollo de, 106
- ecuación diferencial de 105
- funciones de,
- definición (1a. clase), 105
- desarrollos asintóticos - cos, 14, 25
- Calderón-Hunt, 70
- Christoffel-Darboux, fórmula de, 56
- Copson, E.T., 21
- Debye, P., 21
- Desarrollo asintótico, 15
- de la función de Bessel  $J_\nu(z)$ , 14, 25
- de la función Gamma, 14, 17
- del polinomio de Legendre  $P_n(\cos \vartheta)$ , 14, 31
- Dini, desarrollo de, 107, 108
- Dirichlet, núcleo de,
- para el sistema trigonométrico, 54
- para polinomios de Jacobi, 96
- para polinomios de Legendre, 59
- para polinomios ortogonales, 56
- para series de Bessel y Dini, 109, 117, 125
- Espacios de Lorentz, 64
- Fourier-Bessel, desarrollos de, 106
- Fourier-Dini, desarrollos de, 107, 108
- Función, de Bessel, ver "Bessel"
- de Hankel, ver "Hankel"
- Gamma, ver "Gamma"
- holomorfa a valores en un espacio normado, 8
- Funciones de distribución, 63
- Gamma, función, desarrollo asintótico, 14
- fórmula de duplicación de Legendre, 29
- Hankel, fórmula de, 22
- funciones de, 27
- desarrollos asintóticos - cos, 27
- Hardy, 65
- Hilbert, operador de, 38
- con peso, 44
- Jacobi, polinomios de, 94
- Jensen, desigualdad de, 90
- Kolmogoroff, condiciones de, 72
- Legendre, ecuación diferencial de, 57
- fórmula de duplicación de, 29
- polinomios de, 57
- desarrollo asintótico, 14, 31
- Lommel, fórmulas de, 105
- Lorentz, espacios de, 64
- Marcinkiewicz, 2
- Marcinkiewicz-Zygmund, teorema de, 5
- Máxima pendiente, método de, 20, 23
- Muckenhoupt, 96
- Newman, 58
- Norma- $\alpha$  de interpolación 9
- Normas consistentes, 9
- Núcleo de Dirichlet, ver "Dirichlet"
- 0,0 (notación), 14
- Operador, casi lineal, 70
- de Hilbert, 38
- con peso, 44
- de tipo débil  $p, 2$
- (p,q), 4
- restringido, 6
- de tipo  $p, 1$
- (p,q), 2
- restringido, 6
- semilineal, 85
- sub-lineal, 2
- Phragmén-Lindelöf, teorema de, 10
- Polinomios, de Jacobi, 94
- de Legendre, 57
- fórmula de Schläfli, 31
- desarrollo asintótico, 14, 31
- ortogonales, 56
- Pollard, 58, 96
- Privaloff-Plessner, 39
- Punto de ensilladura, método del, 21
- fórmula del, 30
- Reordenada no creciente, 63
- Riemann, B., 21
- Riesz, M., 1, 39, 54
- Riesz-Thorin, teorema de, 1, 13
- Rodrigues, fórmula de, 58
- para polinomios de Jacobi, 94
- Rudin, 58
- Schläfli, fórmula de, 31
- Sistema trigonométrico, 53
- Stein-Weiss, teorema de 6
- Stirling, fórmula de, 20
- Sucesión asintótica, 15
- Teorema general de interpolación de operadores lineales, 12
- Titchmarsh, 39
- Titchmarsh-Zygmund, 39
- Watson, lema de, 16