ISSN 0078-2009

NOTAS DE ÁLGEBRA Y ANÁLISIS

24

A. Benedek y R. Panzone

LA DISTRIBUCIÓN DE LOS AUTOVALORES DEL PROBLEMA DE DIRICHLET DEL OPERADOR DIFERENCIAL BIDIMENSIONAL DE STURM-LIOUVILLE, III

TEOREMAS de LARS GÅRDING

2015

INSTITUTO DE MATEMATICA (INMABB)

CONICET / UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHÍA BLANCA - ARGENTINA

ABSTRACT.

The present work is a continuation of [BP]-[BPII]:

[BP] BENEDEK A., PANZONE R., La distribución de los autovalores del problema de Dirichlet del operador diferencial bidimensional de Sturm-Liouville, Teoremas asintóticos de Hermann Weyl y de Torsten Carleman, Notas de Álgebra y Análisis #22, INMABB, Univ. Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, (2011), http://inmabb-conicet.gob.ar/publicaciones/naa/naa-22.pdf, MR2849990, Zbl1234.35002,

contains Chapters 0-3 of the whole work and is continued by

[BPII] BENEDEK A., PANZONE R., La distribución de los autovalores del problema de Dirichlet del operador diferencial bidimensional de Sturm-Liouville, II, Algunas series de Dirichlet asociadas, Notas de Álgebra y Análisis #23, INMABB, Univ. Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, (2013), http://inmabb-conicet.gob.ar/publicaciones/naa/naa-23.pdf, MR3185139, Zbl1296.35002,

which is its Chapter 4.

In §4.10 [BPII] we deduced for the operator $\frac{-1}{k(x)}\Delta_x$, following L. Gårding, Weyl's asymptotic formula,

(W) $$\frac{N(t)}{t} \sim A = \frac{1}{4\pi}\int_S k(p)dp \neq 0, \quad t = \chi^2 \uparrow \infty,\ \chi \geq \chi_0 > 0,$$

from the limit formula:

(G) $$\lim \sum_1^\infty t(\lambda_m + t)^{-2} = (4\pi)^{-1}\int_S k(p)dp.$$

The present paper adds Chapters 5 and 6 and contains a demonstration of (G) which is included in Chapter 6. The proof of this interesting fact needs some preparation which is a part of Chapter 5.

There we study the operator

(O) $$b(D_x) = \left(\frac{-1}{tk(x)}\Delta_x + 1\right)^2,$$

$x \in S$, a bounded open plane set, looking for its fundamental solution Γ and its inverse $\left(\frac{-1}{tk(x)}\Delta_x + 1\right)^{-2}$.

We assume that $S, \dot{S}$ are bounded open sets, $\bar{S} \subset \dot{S}$, and that $k(x) \in C_+^\infty(S)$ is extendable to $\dot{S}$ with the same properties (written $k(x) \in C_+^\infty(S, \dot{S})$).

The fundamental solution is such that $D_x^\alpha \Gamma(\chi; z, x)$, $|\alpha| \leq 1$, is a continuous bounded function on $S \times S$ and if $T = (S \times S) \setminus \{z = x\}$ then $\forall \alpha\ D_x^\alpha \Gamma(\chi; z, x) \in C(T)$.

$\left\{\frac{1}{\lambda_m + t}\right\}$ is the family of proper values of the operator $\mathfrak{G}_{t,S} \equiv \mathfrak{G}_t := \left(\frac{-1}{k(x)}\Delta_x + t\right)^{-1}$ which is a compact integral operator with an L^2-kernel $\mathfrak{Q}_t$ which is a perturbation of $\mathfrak{Q}_0$. This last kernel coincides with the generalized Green function when S is also connected.

The Hilbert-Schmidt norm of $\mathfrak{G}_t$, $\mathbf{N}(\mathfrak{G}_t)$, because of (W) and (G) verifies

(HS) $$\mathbf{N}(\mathfrak{G}_t) = \sqrt{\int_{S\times S} \mathfrak{Q}_t^2(x,y)\, k(x)k(y)dxdy} \sim \sqrt{\frac{A}{t}} = \sqrt{\frac{\int k(x)dx}{4\pi t}}.$$

$(\mathfrak{G}_t)^2 = \left(t^2 b(D_x)\right)^{-1}$ is an integral operator "better" than $\mathfrak{G}_t$ that we use to construct a bilinear functional associated to $\left(\frac{-1}{tk(x)}\Delta_x + 1\right)^2$ which is defined below.

We say that a real bilinear functional $C\{f,g\}$ on $C_0^\infty(S) \times C_0^\infty(S)$ is associated to the operator $b = b(D_x)$, if for $\vartheta, \phi \in C_0^\infty(S)$ it satisfies

(BF) $$C\{b\phi, \vartheta\} = C\{\phi, b^*\vartheta\} = (\phi, \vartheta)$$

and there exists a real kernel $\tilde{\sigma}(\chi;\cdot,\cdot) \in L^2(S\times S)$ such that

(RK) $$C\{\phi,\vartheta\} = \iint \vartheta(y)\tilde{\sigma}(\chi;y,x)\phi(x)dxdy.$$

We prove for the associated bilinear functional $C_{\mathfrak{G}}\{f,g\} := \left(t^2\mathfrak{G}_{t,S}^2 f, g\right)$, with kernel $\sigma_{\mathfrak{G}}$ which we exhibit, the bilinear functional theorem due to Gårding, that is,

THEOREM. If $k(x) \in C_+^\infty(S,\dot{S})$ then $\sigma_{\mathfrak{G}}(\chi;y,x)$ is equal a.e. to a non negative bounded continuous function $\sigma(\chi;\cdot,\cdot)$ that verifies $\sigma(\chi;y,x) = O(\chi^2)$, $0 \le \sigma(\chi;x,x)$, and

(L) $$\lim_{\chi\to\infty}\frac{\sigma(\chi;y,x)}{\chi^2} = \frac{k(x)}{4\pi} \text{ if } x = y, \quad \lim_{\chi\to\infty}\frac{\sigma(\chi;y,x)}{\chi^2} = 0 \text{ if } x \ne y.$$

This kernel σ verifies on $S\times S$, $\sigma(\chi;\cdot,\cdot) = \Gamma(\chi;\cdot,\cdot) + r(\chi;\cdot,\cdot)$, where Γ is the fundamental solution of the operator on S and r is a bounded continuous function. From (L) and properties of the special nature of $\sigma_{\mathfrak{G}}$ one obtains Gårding's limit formula (G).

The constant A can also be found *via* the normalized eigenfunctions when S is a finitely connected Jordan region, (Carleman):

(C) $$\forall p \in S \;\; \frac{\sum_1^M \phi_n^2(p)}{M} \to \frac{1}{4\pi A}.$$

Chapter 6 ends with an optional appendix where we show some bounds and estimations of the function $H_k^w(p,q;\lambda)$, (see §**4.15**). For example,

$$\iint_{D\times D}|H_k^w(p,q;-\chi^2)|dpdq \le \frac{c}{\chi^2}, \quad |H_k^w(p,q;\lambda)| \le \frac{1}{2\pi}K_0(\chi\sqrt{m}|p-q|),$$

$H_k^{\sqrt{m}} \ge H_k^w \ge H_k^{\sqrt{M}}$, where the region $D \in \boldsymbol{B} \cap \mathbb{S}$, D is finitely connected and $k(p) \in Lip_+(D,\dot{S})$, $m = \inf k$, $M = \sup k$.

Bahía Blanca, April 2015.

CAPÍTULO 5.

Estudio del operador $\left(\frac{-1}{k(x)}\Delta_x + t\right)^2$.

Introducción. El teorema 3 del §**4.9**, [BPII], dice que si S y $\dot{S}$ son abiertos acotados, $\dot{S} \supset \bar{S},\ t \geq 0$, $k \in Lip_+(S,\dot{S})$ y

(1) $\mathfrak{G}_t = \left(-\frac{1}{k}\Delta + t\right)^{-1},\ (-\frac{1}{k}\Delta + t)\mathfrak{f}_n = (\lambda_n + t)\mathfrak{f}_n = \mu_n^{-1}\mathfrak{f}_n,\ (\lambda_n > 0),$

entonces $\sum_1^\infty \frac{1}{(\lambda_n+t)^2} < \infty$ y la serie $\sum_1^\infty \frac{\mathfrak{f}_n(x)\mathfrak{f}_n(y)}{\lambda_n+t}$ converge en $L^2(S \times S; K)$ donde $K(x,y) = k(x)k(y)$.

$\mathfrak{Q}_t(x,y) \coloneqq \sum_1^\infty \frac{\mathfrak{f}_n(x)\mathfrak{f}_n(y)}{\lambda_n+t}$ es el núcleo de $\mathfrak{G}_t$ como operador integral con peso $k(y)$,

$$(\mathfrak{G}_t h)(x) = \int_S \mathfrak{Q}_t(x,y)h(y)\, k(y)dy.$$

$\mathfrak{G}_t$ es un operador integral Hilbert-Schmidt tal que $\mathfrak{G}_t\mathfrak{f}_n = \mu_n\mathfrak{f}_n$ y vale

(2) $$\mu_1 = \|\mathfrak{G}_t\| \leq \|\mathfrak{Q}_t\|_{2,K} = \sqrt{\sum \mu_n^2} < \infty.$$

En el Capítulo 6 continuamos el estudio del núcleo $\mathfrak{Q}_t$ de $\mathfrak{G}_t$ junto con el de $\mathfrak{G}_t{}^\circ\, \mathfrak{G}_t$.

En el §**4.10** [BPII] se prueba que si $A = \frac{1}{4\pi}\int_S\ kdp\ (\neq 0)$ y para $t \uparrow \infty$

(3) $$t\|\mathfrak{Q}_t\|_{2,K}^2 \sim A\ ,$$

entonces

(4) $$\frac{N(t)}{t} \sim A\ .$$

Para analizar el comportamiento asintótico (3) necesitaremos de algunos resultados previos que consideraremos a continuación. Nos apoyaremos en el trabajo [G] de L. Gårding en el tratamiento del tema.

Recurriremos a la NOTACIÓN:

$\chi = \sqrt{t}, t = -\lambda > 0$, y si $j = 1,2,\ D_j \equiv D_{x_j} \coloneqq \frac{\partial}{\partial x_j}$. Si $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2),\ |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ también escribiremos $D_x^\alpha \equiv D^\alpha \coloneqq \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}}$.

Utilizaremos la transformada de Fourier definida por $(\mathcal{F}f)(y) = \int_{R^2} e^{-i\langle y,x\rangle} f(x)dx$. También denotaremos con $\hat{f}(y)$ a la transformada de Fourier de f. Por tanto,

(5) $$\widehat{\left(\frac{D_J}{\iota}\varphi\right)}(y) = y_j\hat{\varphi}(y),\quad \widehat{\left(\frac{x_J}{\iota}\varphi\right)}(y) = D_j\hat{\varphi}(y).$$

Si $g(y) = \hat{f}(y) \in L^1(R^2)$ entonces $f(x) = (\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{R^2} g(y)\, e^{i\langle x,y\rangle}dy.$

La función B. Para nuestros fines bastará con suponer $t \geq 1$. Sea $z \in S$ fijo. Para obtener buena parte de los resultados basta la hipótesis $k \in C_+^\infty(S)$, (cf. NOTA 4 del Apéndice 2 del Cap. 5). Sin embargo, por comodidad, supondremos $k \in C_+^\infty(S, \dot{S})$.

Para $x = (x_1, x_2) \in R^2$ definimos,

(6) $$b_z(D_x) := \frac{1}{t^2}\left(-\frac{1}{k(z)}\Delta_x + t\right)^2, \qquad b(D_x) \equiv b_x(D_x).$$

$B_z(x) \equiv B(\chi; z, x)$ será la distribución temperada solución de la ecuación

(7) $$b_z(D_x)B(\chi; z, x) = \delta_z(x) \quad \text{en } D'(x \in R^2).$$

Transformando Fourier la ecuación (7), se obtiene

(8) $$\left(\frac{|y|^2}{tk(z)} + 1\right)^2 \widehat{B_z}(y) = e^{-i\langle y,z\rangle}.$$

Vale $\widehat{B_z}(y) = \frac{e^{-i\langle y,z\rangle}}{\left(\frac{|y|^2}{tk(z)}+1\right)^2} \in L^1(R^2)$. Luego,

(9) $$B(\chi; z, x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{R^2} \frac{e^{i\langle x-z,y\rangle}}{\left(\frac{|y|^2}{\chi^2 k(z)}+1\right)^2} dy = \frac{\chi^2 k(z)}{(2\pi)^2}\int_{R^2} \frac{e^{i\langle x-z,\chi\sqrt{k(z)}y\rangle}}{(|y|^2+1)^2} dy =$$

$$= \frac{tk(z)}{4\pi^2}\int_{R^2} \frac{e^{i\langle (x-z)\sqrt{t}\sqrt{k(z)},y\rangle}}{(|y|^2+1)^2} dy.$$

Sigue que $B_z(x)$ es real y continua y valen,

$$\frac{B(\chi;x,x)}{\chi^2} = \frac{k(x)}{4\pi} \text{ si } x = z, \quad \lim_{\chi\to\infty}\frac{B(\chi;z,x)}{\chi^2} = 0 \text{ si } x \neq z.$$

Luego obtenemos, donde $\delta_{z,x}$ es la delta de Kronecker,

(10) $$\lim_{t\to\infty}\frac{B(\sqrt{t};z,x)}{t} = \frac{\delta_{z,x}k(z)}{4\pi^2}\int_{R^2}\frac{1}{(|y|^2+1)^2}dy = \frac{\delta_{z,x}k(z)}{4\pi}.$$

Fijado z, $B(\chi; z, x)$ es una *solución fundamental* para el operador $b_z(D_x)$ a coeficientes constantes. Su determinación es un paso previo para hallar una solución fundamental $\Gamma(\chi; z, x)$ del operador $b_x(D_x), x \in S$. Es decir, que verifique

(11) $$b(D_x)\Gamma(\chi; z, x) = \delta_z(x) = \delta(x - z) \quad \text{en } D'(x \in S), \forall z \in S.$$

Esto es, $\langle b(D_x)\Gamma(\chi; z, x), \varphi(x)\rangle = \varphi(z)$ para todo $\varphi \in C_0^\infty(x \in S), \forall z \in S$.

Estimación de $B(\chi; z, .)$ y sus derivadas. De (9) obtuvimos $B(\chi; z, .) \in C(R^2)$ y si $|\alpha| = 1$, $D_x^\alpha B(\chi; z, x) \in C(x \in R^2)$.

Mejores resultados se obtienen aplicando el Teorema 1 del Apéndice 1 a $p(y) = \left(1 + |y|^2\right)^2$. Entonces, como $\mu = 4$,

(12) $$e_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } |\alpha| \leq 1 \\ |x|^{2-|\alpha|-\varepsilon} & \text{si } |\alpha| \geq 2 \end{cases}$$

Luego, si $M_0 = 4\pi^2/k(z)\chi^2$, por ser B real obtenemos,

$$B(\chi; z, x) = \frac{1}{M_0} P\left((z-x)\chi\sqrt{k(z)}\right) = O(1)\chi^2 P\left((z-x)\chi\sqrt{k(z)}\right)$$

y por Teoremas 1 y 2, Apéndice 1,

(13) $$B(\chi; z, \cdot) \in L^1(R^2) \cap C^\infty(R^2 \setminus \{z\}),$$

(14) $$D_x^\alpha B(\chi; z, x) = O(1)\chi^2 \left(1 + \chi\sqrt{k(z)}|x-z|\right)^{-N} e_\alpha(\chi\sqrt{k(z)}(x-z)),$$

para $x \in R^2 \setminus \{z\}$, con $O(1) =$ función de $\alpha, N, k, \varepsilon$.

Dado que $N \geq 1, \chi = \sqrt{t} \geq 1$, vale para $|\alpha| \leq 4$,

(15) $$D_x^\alpha B(\chi; z, x) = \begin{cases} O(1)\chi^2(1+\chi|x-z|)^{-N} & \text{si } |\alpha| < 2 \\ O(1)\chi^2(1+\chi|x-z|)^{-N}(\chi|x-z|)^{2-|\alpha|-\varepsilon} & \text{si } |\alpha| \geq 2 \end{cases}$$

O sea, si $|\alpha| = 0, 1$, de la primera igualdad en (15) obtenemos con $O(1) =$ función de $\alpha, N, k, \varepsilon$,

(16) $$D_x^\alpha B(\chi; z, x) = O(1)\chi^2(1+\chi|x-z|)^{-N},$$

y si $|\alpha| = 2, 3, 4$ y $h = |\alpha| - 2 \geq 0$,

(17) $$D_x^\alpha B(\chi; z, x) = O(1)\chi^{4-|\alpha|-\varepsilon}(1+\chi|x-z|)^{-N}|x-z|^{-h-\varepsilon}.$$

5.1. Según nuestra hipótesis sobre k, (6) define un operador diferencial con coeficientes funciones indefinidamente diferenciables definidas en S, por lo que podemos tratar a $b_x(D_x)$ en el marco de la Teoría de Distribuciones, (véase Nota 1, Apéndice 2).

Regularidad de $B(\chi;\cdot,\cdot)$. La función *continua*

(1) $$\Phi(c, x) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} \frac{e^{i<x,y>}}{(|y|^2/c+1)^2} dy, \; c \in R^+, x \in R^2,$$

resuelve la ecuación $(-\Delta_x/c+1)^2 \Phi(c, x) = \delta_0$, (cf. (9) Introducción). Como el operador diferencial en cuestión es elíptico, la solución fundamental $\Phi(c, x)$ es una función analítica en $x \in R^2 \setminus \{0\}$, (cf. [Ho], p. 114). Fijado x, es una función analítica en $c > 0$, por lo que es analítica en $(c, x) \in R^+ \times (R^2 \setminus \{0\})$. Por otra parte, la transformación

(2) $(S \times R^2) \setminus \{z = x\} \to R^+ \times (R^2 \setminus \{0\})$ *definida por* $(z, x) \to (tk(z), x - z)$,

es indefinidamente diferenciable. Por tanto, $\Phi(tk(z), x-z)$ es indefinidamente diferenciable en $x, z \in S$, $x \neq z$.

Luego, de $\Phi(tk(z), x-z) = B(\chi; z, x)$ siguen 1) y 2) de la Proposición siguiente, donde

$$T := (S \times S) \setminus \{x = z\}.$$

PROPOSICIÓN 1. 1) $B(\chi; z, x) \in C(S \times S)$, $|B| = O(\chi^2)$.

2) $B(\chi; z, x) \in C^\infty(T)$.

3) Valen $\partial B/\partial x_i \in C(S \times S) \cap C^\infty(T)$ y $|\partial B/\partial x_i| = O(\chi^2)$.

4) Si $|\alpha| \leq 3$ la función $D_x^\alpha B(\chi; z, x) \in L^1(x \in S)$ y coincide con $D_x^\alpha B$ en $D'(x \in S)$.

DEMOSTRACIÓN. 3) sigue de la misma manera, observando que

(3) $$\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi(c, x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{R^2}\frac{e^{i\langle x,y\rangle} i y_i}{\left(\frac{|y|^2}{c}+1\right)^2}dy\ ;$$

4) es una aplicación directa del Teorema 2 del Apéndice 1. QED.

5.2. Método para la determinación de la solución fundamental *Γ*. Sea ahora

(1) $$b(D_x) = b_x(D_x) = \left(\frac{-\Delta_x}{tk(x)} + 1\right)^2$$

(2) $$b(D_x)u = \frac{1}{t^2}\frac{\Delta}{k}\left(\frac{\Delta u}{k}\right) - \frac{2}{t}\frac{\Delta u}{k} + u$$

(3) $$b(D_x)u = \frac{1}{(tk(x))^2}\Delta^2 u + \frac{2}{t^2 k(x)}\,\mathrm{grad}\ \Delta u \times \mathrm{grad}\frac{1}{k(x)} + \frac{1}{t^2 k(x)}\left(\Delta\frac{1}{k(x)}\right)\Delta u - \frac{2\Delta u}{tk(x)} + u$$

Pasamos a describir el procedimiento con el que obtendremos una solución de la siguiente ecuación,

(4) $$b(D_x)\Gamma(\chi; z, x) = \delta_z(x) = \delta(x - z) \qquad \text{en } D'(S)\ \forall z \in S.$$

La distribución error *β*. Supongamos que para $z \in S$ fijo, β_z sea la distribución

(5) $$\beta_z(\chi; x) = \big(b_z(D_x) - b_x(D_x)\big)B(\chi; z, x), \qquad \text{en } D'(x \in S).$$

En otras palabras, para *z* fijo en S tenemos,

(5’) $$b(D_x)B(\chi; z, x) = \delta_z - \beta_z(\chi; x) \qquad \text{en } D'(S).$$

Por lo visto $\beta_z(\chi; x)$ es una función C^∞ en $S\backslash\{z\}$, (cf. §**5.1**). En $S \times S$ *definimos*:

$$\beta(\chi; z, x) := \beta_z(\chi; x) \ \text{ si } x \neq z,\ \beta(\chi; x, x) := 0.$$

Veremos más adelante que la función $\beta(\chi; z, x) \in L^1(S \times S)$ y existe $R < \infty$ tal que $\|\beta(\chi; z, \cdot)\|_1 \leq R$, $\|\beta(\chi; \cdot, x)\|_1 \leq R$, (Proposición 1§**5.3**).

Probaremos en §**5.5** que la distribución β_z es igual en S a la función $\beta(\chi; z, \cdot)$. Entonces (5’) significa que para toda $\phi(x) \in C_0^\infty(S)$ vale

(5”) $$\langle\beta_z, \phi\rangle = \int \beta(\chi; z, x)\phi(x)dx = \phi(z) - \int_S B(\chi; z, x)\big(b^*(D_x)\phi(x)\big)dx.$$

Esto sugiere que es posible que encontremos Γ bajo la forma

(6) $$\Gamma(\chi; z, x) = B(\chi; z, x) + V(\chi; z, x),$$

donde *V* debe ser entonces solución de

(7) $$b(D_x)V(\chi;z,x) = \beta(\chi;z,x) \text{ en } D'(S).$$

Para resolver (7) téngase en cuenta la estimación en T:

$$\beta(\chi;z,x) = O(1)|x-z|^{-1-\varepsilon}, \varepsilon \in (0,1),$$

que se demuestra más adelante, (cf. (6) §**5.3**).

Observemos que para $u(y) \in L^1(y \in S)$, $\phi \in C_0^\infty(S)$, vale, (cf. Prop. 1 §**5.1**),

(8) $$\int_S \left(\int_S B(\chi;y,x)u(y)dy\right) b^*(D_x)\phi(x)dx =$$

$$= \int_S u(y)\left(\int_S B(\chi;y,x)\, b^*(D_x)\phi(x)dx\right) dy = \text{por (5")} =$$

$$= \int_S u(y)\left(\phi(y) - \int_S \beta(\chi;y,x)\,\phi(x)dx\right) dy =$$

$$= \int_S \phi(x)\left(u(x) - \int_S \beta(\chi;y,x)u(y)dy\right) dx.$$

(Nótese que por el teorema de Fubini es legítimo el cambio del orden de integración en el último término). Si llamamos,

(9) $$\begin{cases} V(x) := \int_S B(\chi;y,x)\,u(y)dy, \\ W(x) := u(x) - \int_S \beta(\chi;y,x)u(y)dy \end{cases},$$

de (8) resulta: $\int_S V(x)b^*(D_x)\phi(x)dx = \int_S W(x)\,\phi(x)dx$. O sea,

(10) $$b(D_x)V = W \quad \text{en } D'(S).$$

Comparando (10) con (7) vemos que *para resolver nuestro problema bastará encontrar* $u(\chi;z,\cdot) \in L^1(S)$ que verifique $W(x) = \beta(\chi;z,x)$ para $z \neq x$, esto es

(11) $$\beta(\chi;z,x) = u(\chi;z,x) - \int_S \beta(\chi;y,x)u(\chi;z,y)dy.$$

En este caso, por (9) y (10), $V(\chi;z,x) = \int_S B(\chi;y,x)\,u(\chi;z,y)dy$ será una solución de (7) y $\Gamma(\chi;z,x) = B(\chi;z,x) + V(\chi;z,x)$ verificará

$$b(D_x)\Gamma = b(D_x)B + b(D_x)V = b(D_x)B + \beta = (\delta_z - \beta) + \beta = \delta_z \text{ en } D'(S).$$

5.3. Acotación de $\beta(\chi;z,x)$. Escribimos (5) §**5.2** de la siguiente manera:

(1) $$\beta(\chi;z,x) = (1/k^2(z) - 1/k^2(x))\,\Delta^2 B/\chi^4 - (2/k(z) - 2/k(x))\,\Delta B/\boldsymbol{\chi}^2 -$$
$$-(2\chi^{-4}/k(x))\text{grad}(1/k(x) \times \text{grad}\,\Delta B - (\chi^{-4}/k(x))\Delta(1/k(x))\,\Delta B, \quad (z,x) \in T.$$

Estimaremos a continuación los sumandos. Puesto que $k \in C_+^\infty(S,S')$, resulta para $x,z \,\epsilon S$ $|k(x) - k(z)| \le C|x-z|$. Luego, usando (15) Introducción, obtenemos

(2) $$|(1/k^2(z) - 1/k^2(x))\,\Delta^2 B/\chi^4)| \le O(1)|x-z|^{-1-\varepsilon}\chi^{-4-\varepsilon}(1+\chi|x-z|)^{-N},$$

(3) $$\left|(2/k(z) - 2/k(x))\,\Delta B/\boldsymbol{\chi}^2\right| \le O(1)|x-z|^{1-\varepsilon}\chi^{-\varepsilon}(1+\chi|x-z|)^{-N},$$

(4) $\left|(2\chi^{-4}/k(x))\mathrm{grad}(1/k(x)) \times \mathrm{grad}\,\Delta B\right| \leq O(1)\chi^{-3-\varepsilon}|x-z|^{-1-\varepsilon}(1+\chi|x-z|)^{-N}$,

(5) $\quad |(\chi^{-4}/k(x))\Delta(1/k(x))\,\Delta B| \leq O(1)\chi^{-2-\varepsilon}|x-z|^{-\varepsilon}(1+\chi|x-z|)^{-N}$,

donde $\chi \geq 1$ y $O(1)$ función de $\alpha, N, \varepsilon, k$ pero independiente de χ. Por tanto, para todo $(z,x) \in T$ vale, con $C = C(N,k,\varepsilon)$ (≥ 1) independiente de χ ,

(6) $\qquad |\beta(\chi; z,x)| \leq C|x-z|^{-1-\varepsilon}\chi^{-\varepsilon}(1+\chi|x-z|)^{-N}$.

PROPOSICIÓN 1. *i)* $\beta(\chi; z,x) \in L^1(T) \cap C^\infty(T)$,

ii) $\int_{S\setminus\{x\}} |\beta(\chi; t,x)|\, dt \leq R\chi^{-\varepsilon}$,

iii) $\int_{S\setminus\{z\}} |\beta(\chi; z,t)|\, dt \leq R\chi^{-\varepsilon}$,

con R independiente de $\chi \geq 1$, $x \in S$ o $z \in S$ **.**

Para fijar ideas *extendemos β como función a $S \times S$ de manera que* $\beta(\chi; x,x) = 0$.

Para su uso más adelante presentamos aquí los adjuntos de los operadores diferenciales (2) y (3). Vale $b_z{}^*(D_x) = b_z(D_x)$.

El adjunto de $b_x(D_x) = \left(\frac{-\Delta_x}{tk(x)} + 1\right)^2$ aplicado a $u \in C_0^\infty(S)$ es

(7) $b_x^*(D_x)u = \dfrac{1}{t^2}\Delta\left(\dfrac{1}{k}\Delta\left(\dfrac{u}{k}\right)\right) - \dfrac{2}{t}\Delta\left(\dfrac{u}{k}\right) + u =$

$$= \left(\frac{1}{\chi^4 k}\Delta^2\left(\frac{u}{k}\right) - \frac{2}{\chi^2 k}\Delta(u) + u\right) + \frac{2}{\chi^4}\,\mathrm{grad}\,\Delta\left(\frac{u}{k}\right) \times \mathrm{grad}\frac{1}{k} +$$

$$+ \frac{1}{\chi^4}\Delta\left(\frac{1}{k}\right)\Delta\left(\frac{u}{k}\right) - \frac{4}{\chi^2}\,\mathrm{grad}\,u \times \mathrm{grad}\frac{1}{k} - \frac{2}{\chi^2}\Delta\left(\frac{1}{k}\right)u\,.$$

5.4. Determinación de $\boldsymbol{u(\chi;.,.)}$. Recordemos la ecuación, ((11) §**5.2**),

(1) $\qquad \beta(\chi; z,x) = u(\chi; z,x) - \int_S u(\chi; z,t)\beta(\chi; t,x)dt.$

Llamando K al operador $(Ku)(x) = \int_S \beta(\chi; t,x)u(t)dt$ sobre funciones $u \in L^1(S)$, tenemos $\|Ku\|_{L^1} \leq \int_S dx \int_S |\beta(\chi; t,x)||u(t)|dt = \int_S |u(t)| \left(\int_S |\beta(\chi; t,x)|dx\right) dt.$

Usando la Proposición 1 §**5.3** resulta $\|Ku\|_{L^1} \leq R\chi^{-\varepsilon}\|u\|_{L^1}$,

y por tanto, si $R\chi^{-\varepsilon} < 1$, la norma del operador K será menor que 1 y podremos encontrar la solución de (1) como la serie convergente en $L^1(S)$:

$$u(\chi; z,\cdot) = (I + K + K^2 + \cdots)\beta(\chi; z,\cdot).$$

Para obtener propiedades más finas de $u(\chi; z,x)$ estudiaremos a continuación el núcleo de los operadores K^j.

Escribiremos $\beta(t,x)$ en lugar de $\beta(\chi;t,x)$ para simplificar las fórmulas.

De (6) §**5.3** se obtiene para $x,t,z\in S$, $x\neq t\neq z$,

(2) $$|\beta(x,t)\beta(t,z)|\leq C^2\chi^{-2\varepsilon}(|x-t||t-z|)^{-1-\varepsilon}(1+\chi|x-z|)^{-N}.$$

Si $a,b>0$, $0<\alpha\leq\beta$, es fácil ver que vale, ([BP] §**0.9**),

(3) $$\frac{1}{a^\alpha b^\beta}\leq\left(\frac{1}{a^\beta}+\frac{1}{b^\beta}\right)\left(\frac{2}{a+b}\right)^\alpha.$$

En consecuencia, usando (2) y (3) con $\alpha=\beta=1+\varepsilon$, $a=|x-t|$, $b=|t-z|$ y la desigualdad triangular $a+b\geq|x-z|$, obtenemos:

(4) $$I(x,z):=\int_S|\beta(x,t)\beta(t,z)|dt\leq$$
$$\leq C^2 2^{1+\varepsilon}\chi^{-2\varepsilon}|x-z|^{-1-\varepsilon}(1+\chi|x-z|)^{-N}\left(\int_S\frac{dt}{|x-t|^{1+\varepsilon}}+\int_S\frac{dt}{|z-t|^{1+\varepsilon}}\right)\leq$$
$$\leq(Q/\chi^\varepsilon)^2|x-z|^{-1-\varepsilon}(1+\chi|x-z|)^{-N},$$

donde

$$Q=CM \text{ con } M^2=\max\left\{2^{1+\varepsilon}2\int_{|y|\leq\operatorname{diam}S}|y|^{-1-\varepsilon}dy\,,1\right\},\ C=C(N,k,\varepsilon)\geq1.$$

Luego, $C\leq Q$ y de (6) §**5.3** y (4) obtenemos,

(5) $$\int_S|\beta(z,y_{n-1})|\,dy_{n-1}\int_S|\beta(y_{n-1},y_{n-2})|\,dy_{n-2}\cdots\int_S|\beta(y_2,y_1)||\beta(y_1,x)|dy_1\leq$$
$$\leq(Q/\chi^\varepsilon)^n|x-z|^{-1-\varepsilon}(1+\chi|x-z|)^{-N}.$$

Sea,

(6) $$v(z,x):=|\beta(z,x)|+\int_S|\beta(z,t)|\,|\beta(t,x)|dt+$$
$$+\int_S|\beta(z,t)|dt\int_S|\beta(t,y)|\,|\beta(y,x)|dy+$$
$$+\int_S|\beta(z,y)|dy\int_S|\beta(y,t)|dt\int_S|\beta(t,s)||\beta(s,x)|ds+\cdots.$$

Luego,

(6') $$v(z,x)\leq|x-z|^{-1-\varepsilon}(1+\chi|x-z|)^{-N}\sum_{m=1}^\infty(Q/\chi^\varepsilon)^m.$$

Como Q es independiente de χ, para $\chi^\varepsilon\geq2Q$ vale $\sum_{m=1}^\infty\left(\frac{Q}{\chi^\varepsilon}\right)^m=\frac{Q}{\chi^\varepsilon-Q}\leq\frac{2Q}{\chi^\varepsilon}\leq1.$

Por tanto es legítimo escribir

(7) $$u(z,x):=\beta(z,x)+\int_S\beta(z,y)\beta(y,x)dy+\int_S\beta(z,s)ds\int_S\beta(s,y)\beta(y,x)dy+$$
$$+\int_S\beta(z,t)dt\int_S\beta(t,s)ds\int_S\beta(s,y)\beta(y,x)dy+\cdots=$$
$$=\beta(z,x)+\int\beta(z,y)\beta(y,x)dy+\iint\beta(z,s)\beta(s,y)\beta(y,x)dsdy+$$
$$+\iiint\beta(z,t)\beta(t,s)\beta(s,y)\beta(y,x)\,dtdsdy+\cdots.$$

$u(z,x)\equiv u(\chi;z,x)$ satisface (1) pues se verifica que vale,

$$u(\chi; z, x) - \beta(z, x) = \int u(\chi; z, y)\beta(y, x)dy.$$

Además, si $(z, x) \in T$ tenemos por (6')

(8) $$|u(\chi; z, x)| \leq v(z, x) \leq \frac{2Q}{\chi^\varepsilon} \frac{1}{|x-z|^{1+\varepsilon}} \frac{1}{|1+\chi|x-z||^N}.$$

PROPOSICIÓN 1. Sea $\chi^\varepsilon \geq 2Q = 2CM$. Entonces, las funciones $v(\cdot, x)$ y $v(x, \cdot)$ pertenecen a una bola de $L^1(S)$. Ídem para la función $u(.,.)$. Además $u(.,.), v(.,.)$ pertenecen a $L^1(S \times S)$. La función $u(\cdot,\cdot)$ verifica

$$u(\chi; z, x) = \beta(\chi; z, x) + \int u(\chi; z, y)\beta(\chi; y, x)dy\,.$$

Sobre la regularidad de *u* tenemos la

PROPOSICIÓN 2. Sea $\chi^\varepsilon \geq 2Q$. La función $v(z, x)|x - z|^{1+\varepsilon}$ es acotada y continua en T. La función $u(z, x)|x - z|^{1+\varepsilon}$ también es acotada y continua en T.

DEMOSTRACIÓN. Si $x, z, X, Z \in S$, $x \in B_r(X)$, $z \in B_r(Z)$ y $|X - Z| > 2r$, entonces de (2)-(4) §**5.4** obtenemos para $(x, y) \to (X, Z)$,

$$I(x, z) = \int_S |\beta(x, y)\beta(y, z)|\, dy \to \int_S |\beta(X, y)\beta(y, Z)|\, dy = I(X, Z),$$

o sea, I es continua en T. La estimación (5) y el mismo procedimiento permiten demostrar que el tercer sumando de (6) es continuo en x, z, etc. Luego de multiplicar la serie (6) por $|x-z|^{1+\varepsilon}$ se ve que esta es mayorada por $O(1)\sum_{m=1}^{\infty}(Q/\chi^\varepsilon)^m = O(1/\chi^\varepsilon)$. La serie que define a *v* converge entonces uniformemente sobre compactos de T, QED.

5.5. $\boldsymbol{\Gamma(\chi; z, x)}$, una solución fundamental para el operador $\boldsymbol{b(D_x)}$. Lo único que nos falta probar del método descripto en el §**5.2** para hallar Γ es que la función $\beta(\chi; z, x)$ definida allí efectivamente resuelve (5) del §**5.2**, esto es, $\beta = (b_z - b)B,\ D'(S)$.

LEMA 1. Para $\phi \in C_0^\infty(S)$, se verifica

(1) $$\int_S \beta(\chi; z, x)\phi(x)dx = \int_S B(\chi; z, x)\big(b_z(D_x) - b^*(D_x)\big)\phi(x)dx.$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos

(2) $$I_\delta := \int_{S\backslash B_\delta(z)} \beta(z, x)\phi(x)dx - \int_{S\backslash B_\delta(z)} B(z, x)\big(b_z(D_x) - b^*(D_x)\big)\,\phi(x)dx =$$
$$= \int_{S\backslash B_\delta(z)}\{\big(b_z(D_x) - b(D_x)\big)B(z, x)\}\phi(x)dx -$$
$$- \int_{S\backslash B_\delta(z)} B(z, x)\big(b_z(D_x) - b^*(D_x)\big)\,\phi(x)dx =$$
$$= \int_{S\backslash B_\delta(z)}[\{(b_z - b_x)B\}\phi - B(b_z - b_x)^*\phi]\,dx.$$

El corchete en la última integral es la divergencia de un vector cuyas componentes son sumas de términos de la forma

(3) $\pm D_x^\gamma B(\chi; z, x) D_x^\tau (c_k(x)\phi(x))$,

donde $|\gamma| + |\tau| \leq 3$ y $c_k(x)$ es el coeficiente de una derivada de orden $|\gamma| + |\tau| + 1$ en $\big(b_z(D_x) - b(D_x)\big)$, (cf. Nota 6, Apéndice 2, este capítulo).

Aplicando el teorema de la divergencia de Gauss a la integral en (2) se obtiene que $|I_\delta|$ está acotada por una suma de términos de la forma:

(4) $T_{\gamma\tau k} = \left(\int_{|z-x|=\delta} \left|D_x^\gamma B(z,x)\right| \left|D_x^\tau\big(c_k(x)\phi(x)\big)\right| d\sigma_\delta(x)\right)$, con $|\tau| + |\gamma| \leq 3$.

Se obtiene, usando (16) y (17) Intr. para $|\gamma| \leq 2$

(5) $\left|T_{\gamma\tau k}\right| = \int_{|z-x|=\delta} O(\delta^{-\varepsilon}) d\sigma_\delta(x) = O(\delta^{1-\varepsilon})$.

Para $|\gamma| = 3$ resulta $\tau = 0$ y $c_k(x)$ es el coeficiente de una derivada de orden 4. Esto es $c_k(x) = \chi^{-4}\left(\frac{1}{k^2(z)} - \frac{1}{k^2(x)}\right) = O(|x-z|)$. Usando (17) Intr. se obtiene nuevamente

(6) $\left|T_{\gamma\tau k}\right| = \int_{|z-x|=\delta} O(\delta^{-1-\varepsilon}) O(\delta) d\sigma_\delta(x) = O(\delta^{1-\varepsilon})$.

Se concluye que vale $I_\delta \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0$. QED.

COROLARIO. Γ es solución de $b_x(D_x)\Gamma(\chi; z, x) = \delta_z$ en $D'(S)$.

Estimación de Γ. Dado que B es $O(\chi^2)$, de (8) §**5.4** y la Introducción vemos que las integrales $\int_S B(\chi; y, x) u(\chi; z, y) dy$, $\int_S D^\alpha B(\chi; y, x) u(\chi; z, y) dy$, $|\alpha| = 1$, son $\frac{O(\chi^{2-\varepsilon})}{(1+\chi|x-z|)^N}$. La primera es igual a $V(\chi; z, x)$. Ellas definen funciones continuas. En efecto, sean $x \to X, z \to Z$ y consideremos la primera integral (la segunda se trata análogamente). Ella se escribe como

(7) $\int_{|y-Z|>\delta} B(\chi; y, x) u(\chi; z, y) dy + \int_{|y-Z|\leq\delta} B(\chi; y, x) u(\chi; z, y) dy =$

$$= \int_{|y-Z|>\delta} \{B(\chi; y, x)[u(\chi; z, y)|y-z|^{1+\varepsilon}]\} \frac{dy}{|y-z|^{1+\varepsilon}} + o(1), \quad (\delta \to 0).$$

La llave define una función acotada y la integral converge a

$\int_{|y-Z|>\delta} B(\chi; y, X) u(\chi; Z, y) dy = \int_S B(\chi; y, X) u(\chi; Z, y) dy + o(1)$.

NOTACIÓN. $[D_x^\alpha B(\chi; y, x)]$ será la función igual a $D_x^\alpha B(\chi; y, x)$ si $y \neq x$, e igual a 0 en caso contrario. Ídem para Γ y V.

Por la Proposición 1 del § **5.1 y** para $|\alpha| \leq 3$,

$$D_x^\alpha B(\chi; y, x) = [D_x^\alpha B(\chi; y, x)] \quad \text{en } D'(x \in S).$$

TEOREMA 1. Si $|\alpha| \leq 3$ entonces

i) $D_x^\alpha V(\chi; z, x) = \int_S [D_x^\alpha B(\chi; y, x)] u(\chi; z, y) dy$ en $D'(x \in S)$**.**

ii) $D_x^\alpha \Gamma(\chi; t, x) = [D_x^\alpha \Gamma(\chi; t, x)],\ D'(x \in S)$**.**

DEMOSTRACIÓN. Dado que $\Gamma = B + V$ y $D_x^\alpha B(\chi; y, x) = [D_x^\alpha B(\chi; y, x)]$ en $D'(S)$, bastará probar *i*). Sea α tal que $1 \leq |\alpha| \leq 3$. Definimos, para $x \neq z$,

(8) $$W_\alpha(\chi; z, x) = \int_S u(\chi; z, y)[D_x^\alpha B(\chi; y, x)] dy.$$

Dado que $u(\chi; z, y) = O(1)|z - y|^{-1-\varepsilon}$ (cfr. (8) §**5.4**) y

$D_x^\alpha B(\chi; y, x) = O(1)|z - y|^{-1-\varepsilon}$ (cfr. (16) y (17) Introducción),

resulta, como en (4) §**5.4**, para $x \neq z$,

(9) $$|W_\alpha(\chi; z, x)| \leq \int_S |u(\chi; z, y)||D_x^\alpha B(\chi; y, x)| dy = O(1)|x - z|^{-1-\varepsilon}.$$

En consecuencia, la función $\int_S |W_\alpha(\chi; z, x)| dx = O(1)$.

Luego, si $\phi(x) \in C_0^\infty(S)$, se puede aplicar el Teorema de Fubini en las integrales que siguen: $\langle W_\alpha(\chi; z, x), \phi(x)\rangle = \int_S u(\chi; z, y) dy \int_S D_x^\alpha B(\chi; y, x)\, \phi(x) dx =$

$= (-1)^{|\alpha|} \int_S u(\chi; z, y) dy \int_S B(\chi; y, x) D_x^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|}\langle V(\chi; z, x), D_x^\alpha \phi(x)\rangle.$

Esto es, $D_x^\alpha V(\chi; z, x) = W_\alpha(\chi; z, x)$ en $D'(x \in S)$, por lo cual $D_x^\alpha V = [D_x^\alpha V]$, QED.

PROPOSICIÓN 1. Sea $\chi^\varepsilon \geq 2Q$. Entonces,

$D_x^\alpha \Gamma(\chi; z, x) \in C(S \times S) \cap L^\infty(S \times S)$ si $|\alpha| \leq 1$,

$D_x^\alpha \Gamma(\chi; z, x)|x - z|^\varepsilon \in C(T) \cap L^\infty(T)$ si $|\alpha| = 2$,

$D_x^\alpha \Gamma(\chi; z, x)|x - z|^{1+\varepsilon} \in C(T) \cap L^\infty(T)$ si $|\alpha| = 3$**.**

Dado que $\Gamma = B + V$ y que B satisface estas mismas propiedades, (cf. Introducción), basta probar la siguiente Proposición 2 para demostrar la Proposición 1.

PROPOSICIÓN 2. Sea $\chi^\varepsilon \geq 2Q$.

1) Si $|\alpha| \leq 1$ entonces $D_x^\alpha V(\chi; z, x) \in C(S \times S) \cap L^\infty(S \times S)$, $D_x^\alpha V = O(\chi^{2-\varepsilon})$,

2) $D_x^\alpha V(\chi; z, x)|x - z|^\varepsilon \in C(T) \cap L^\infty(T)$ si $|\alpha| = 2$,

3) $D_x^\alpha V(\chi; z, x)|x - z|^{1+\varepsilon} \in C(T) \cap L^\infty(T)$ si $|\alpha| = 3$**.**

DEMOSTRACIÓN. Sea α tal que $1 \leq |\alpha| \leq 3$. Sabemos por *i*), T.1 que, para $x \neq z$,

(9') $$W_\alpha(\chi; z, x) = \int_{y \neq z, x} u(\chi; z, y) D_x^\alpha B(\chi; y, x)\, dy = D_x^\alpha V(\chi; z, x).$$

Si $|\alpha| = 0{,}1$, la función $W_\alpha \in C(S \times S) \cap L^\infty(S \times S)$, (cf. (7)).

Supongamos $2 \leq |\alpha| \leq 3$, $|x - z| > 0$. Entonces $W_\alpha \in C(T)$. En efecto, para demostrar la continuidad de W_α en $x, z, |x - z| > \delta > 2r$, basta observar que para $x_n \to x, z_n \to z$,

$$\int_{S\setminus B_r(z)\cup B_r(x)} u(z_n, y) D_x^\alpha B(y, x_n) dy \ \rightarrow \ \int_{S\setminus B_r(z)\cup B_r(x)} u(z, y) D_x^\alpha B(y, x) dy$$

y que para $r \rightarrow 0$, $\int_{B_r(z)\cup B_r(x)} u(z, y) D_x^\alpha B(y, x) dy = o(1)$.

Esto sigue de las estimaciones de $D_x^\alpha B$ en la Introducción y de la Proposición 2, §**5.4**.

Como en (4) §**5.4** obtenemos para $|x - z| > 0$ la fórmula (11) siguiente.

La (10) se obtiene análogamente pero usando en (3) §**5.4**: $\alpha = \varepsilon, \beta = 1 + \varepsilon$:

(10) $$W_\alpha(\chi; z, x)|x - z|^\varepsilon = O(1) \quad \text{si } |\alpha| = 2,$$

(11) $$W_\alpha(\chi; z, x)|x - z|^{1+\varepsilon} = O(1) \quad \text{si } |\alpha| = 3,$$ QED.

Consideremos ahora la función $v(x) = \int_S B(y, x) m(y) dy$, $m(x) \ \varepsilon \ L^\infty(S)$.

PROPOSICIÓN 3. Sea $\chi \geq 2Q$. Si $|\alpha| \leq 3$ entonces $D^\alpha v \in C(S) \cap L^\infty(S)$ y valen

a) $$D_x^\alpha \left(\int_S B(y, x) m(y) dy \right) = \int_S [D_x^\alpha B(t, x)] m(t) dt,$$

b) $$D_x^\alpha \left(\int_S V(y, x) m(y) dy \right) = \int_S [D_x^\alpha V(t, x)] m(t) dt,$$

y también

(12) $$D_x^\alpha \left(\int_S \Gamma(t, x) m(t) dt \right) = \int_S [D_x^\alpha \Gamma(t, x)] m(t) dt \in C(S) \cap L^\infty(S).$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos a). Como en la demostración de la Proposición 2 se prueba que $v(x)$ es continua y acotada sobre S. Si $1 \leq |\alpha| \leq 3$ entonces

$$v_\alpha(x) := \int_S [D_x^\alpha B(t, x)]\, m(t) dt = \int_{t \neq x} D_x^\alpha B(t, x) m(t) dt \in L^\infty(S) \cap C(S).$$

Como en el Teorema 1 vemos que $v_\alpha = D_x^\alpha v$, $D'(S)$. Por tanto, si $|\alpha| \leq 3$,

$$D_x^\alpha v = \int_S [D_x^\alpha B(t, x)] m(t) dt.$$

b) se prueba análogamente. (12) sigue ahora de la suma $\Gamma = B + V$, QED.

Otras propiedades de la función Γ.

DEFINICIÓN 1. $C^{n,l}$ designa a la familia de funciones con n derivadas tales que las n-ésimas satisfacen localmente una condición de Hölder de orden $l, 0 < l \leq 1$.

PROPOSICIÓN 4. Para cada z, localmente en x y lejos de z, con $l \in (0,1)$ valen $V(z, x), \Gamma(z, x) \in C^{3,l}$. Más aún, si $v = (v_1, v_2)$, $0 < |v| < \eta < \frac{1}{4} \inf(1, |x_0 - z_0|)$, $|\alpha| = 3$, $(z, x) \in B_{\frac{\eta}{2}}(z_0) \times B_{\frac{\eta}{2}}(x_0)$, $l = 1 - \varepsilon$, (ε como en (12) Intro), entonces

i) $$|D^\alpha V(z, x + v) - D^\alpha V(z, x)| \leq L(z_0, x_0, V)|v|^{1-\varepsilon},$$

ii) $$|D^\alpha \Gamma(z, x + v) - D^\alpha \Gamma(z, x)| \leq L(z_0, x_0, \Gamma)|v|^{1-\varepsilon}.$$

DEMOSTRACIÓN. Vale,

$$D^\alpha V(z_0, x_0 + v) - D^\alpha V(z_0, x_0) = \int_S u(z_0, y)([D^\alpha B(y, x_0 + v)] - [D^\alpha B(y, x_0)]) dy.$$

De (17) Intr. y (8) §**5.4** se deduce que el integrando en

(13) $D^{\alpha}V(z,x+v) - D^{\alpha}V(z,x) = \int_S \; u(z,y)\big(D^{\alpha}B(y,x+v) - D^{\alpha}B(y,x)\big)dy$

es absolutamente integrable y podemos escribir,

(14) $$D^{\alpha}V(z,x+v) - D^{\alpha}V(z,x) = \int_{|y-z|\le\eta} \cdots dy + \int_{|y-z|>\eta} \cdots dy.$$

En la primera integral, estimando $|D^{\alpha}B(y,x+v) - D^{\alpha}B(y,x)|$ por medio de $\{|D^{\alpha+(1,0)}B||v_1| + |D^{\alpha+(0,1)}B||v_2|\}(y,x+\theta v) \le M|v|$, $\theta \in (0,1)$, $M < \infty$, M cota independiente de $(y,z,x) \in B_{\eta}(z) \times B_{\frac{\eta}{2}}(z_0) \times B_{\frac{\eta}{2}}(x_0)$, (cf. Prop. 1 §**5.1**).

Por tanto obtenemos para $|v| < \eta$,

(15) $$\left|\int_{|y-z|\le\eta} u(z,y)\big(D^{\alpha}B(y,x+v) - D^{\alpha}B(y,x)\big)dy\right| \le C_1|v|.$$

Veamos ahora la segunda integral en (14). Sea $W = \{y \in S: |y-z| > \eta\}$.

En W, $u(z,y)$ es acotada: $|u| \le C(\eta)$,

(16) $$\int_W u(z,y)\big(D^{\alpha}B(y,x+v) - D^{\alpha}B(y,x)\big)dy =$$
$$= \int_{W\cap\{|y-x|\le 3|v|\}} u\,(.-.)dy + \int_{W\cap\{|y-x|>3|v|\}} u\,(.-.)dy.$$

El primer sumando de (16) verifica

(17) $$\left|\int_{W\cap\{|y-x|\le 3|v|\}} u\,(.-.)dy\right| \le$$
$$\le C(\eta)\int_{W\cap\{|y-x|\le 3|v|\}}(|D^{\alpha}B(y,x+v)| + |D^{\alpha}B(y,x)|)dy =$$
$$\le C(\eta)\left(\int_{\{|y-x|\le 4|v|\}} \frac{1}{|y-x|^{1+\varepsilon}}dy + \int_{\{|y-x|\le 3|v|\}} \frac{1}{|y-x|^{1+\varepsilon}}dy\right) = C_2|v|^{1-\varepsilon}.$$

El segundo sumando de (16) es

(18) $$\left|\int_{W\cap\{|y-x|>3|v|\}} u(z,y)\big(D^{\alpha}B(y,x+v) - D^{\alpha}B(y,x)\big)dy\right| \le$$
$$\le C(\eta)|v|.\int_{W\cap\{|y-x|>3|v|\}} sup_{|y-x|>2|v|}|D^{\alpha+(1,0)}B|(y,x+\theta v)\,dy +$$
$$+C(\eta)|v|.\int_{W\cap\{|y-x|>3|v|\}} sup_{|y-x|>2|v|}|D^{\alpha+(0,1)}B|(y,x+\theta v)\,dy \le$$

$\le$(cf. (17) Introducción)$\le C(\eta)|v|\int_{R>|y-x|>2|v|}|y-x|^{-2-\varepsilon}dy \le C_3|v| + C_4|v|^{1-\varepsilon}$.

De (17) y (18) sigue que el módulo de (16) es $\le C_5|v|^{1-\varepsilon}$. Esto prueba junto con (15), que (14) es en módulo $\le L(z_0,x_0,V)|v|^{1-\varepsilon}$, $L(z_0,x_0,V)$ = constante. Así obtuvimos i). Como B verifica esa misma estimación salvo por el valor de L, (cf. Proposición 1 §**5.1**) tenemos $|D^{\alpha}\Gamma(z,x+v) - D^{\alpha}\Gamma(z,x)| \le L(z_0,x_0,\Gamma)|v|^{1-\varepsilon}$, QED.

Completa regularidad de Γ. Como consecuencia de la hipoelipticidad del operador $b(D_x)$ resulta que $\Gamma(z,x) \in C^\infty(x \in S \setminus \{z\})$. En efecto, este resultado es un caso particular, por ejemplo, del Corolario 36.1, [Tr], p. 352 o del T. 3-1, [Sc], p. 55. Más aún, vale el

TEOREMA 2. $\Gamma(z,x) \in C^\infty(x \in S \setminus \{z\})$ y $\forall \alpha$ $D_x^\alpha \Gamma(z,x) \in C(T)$**.**

DEMOSTRACIÓN. Utilizaremos la siguiente definición auxiliar.

DEFINICIÓN. Para $z_0, x_0 \in S,\ z_0 \neq x_0,\ 0 < l = 1 - \varepsilon < 1,\ B = B_\rho(\cdot) \subset S$ definimos $\mathbb{C}^n(B) := \{F(z,x) \colon \forall \alpha\ |\alpha| \leq n\ D_x^\alpha F(z,x) \in (C \cap L^\infty)(B(z_0) \times B(x_0))\}$,

$\mathbb{C}^{n,l} \equiv \mathbb{C}^{n,l}(B) := \{F \in \mathbb{C}^n(B) \colon \forall \alpha\ |\alpha| = n\ D_x^\alpha F(z,x) \in C^{0,l}(B(x_0))$ unif. $z \in B(z_0)\}$**.**

"unif. $z \in B(z_0)$" significa que $\forall (z,x) \in B(z_0) \times B(x_0)$ vale para $|v| < \eta$, ($|\alpha| = n$),

$$|D_x^\alpha F(z,x+v) - D_x^\alpha F(z,x)| \leq L(z_0, x_0, F, n)|v|^l.$$

Sean $B_r(x_0) = \{x; |x - x_0| < r\}$, $|z_0 - x_0| > 2r$, $n \geq 3$, $r(3) := r$. Para $n > 3$ definimos $r(n) = r(n-1)(1 - \frac{1}{2^n})$.

Consecuentes con la notación escribiremos $B_{r(n)}(x_0) = \{x; |x - x_0| < r(n)\}$.

Sea $0 \leq \varphi_n \in C_0^\infty(B_{r(n)}(x_0))$, $\varphi_n = 1$ sobre un entorno de $\bar{B}_{r(n+1)}(x_0)$ y llamemos

$$U_n(z,x) = \varphi_n(x)\Gamma(z,x).$$

De la Proposición 4 sigue que $\Gamma(z,x) \in \mathbb{C}^{3,l}(B_{r(3)})$. En consecuencia,

$$U_3(z,x) \in \mathbb{C}^{3,l}(B_{r(3)}).$$

Supongamos que en $B_{r(n)}$ valga $\Gamma(z,x) \in \mathbb{C}^{n,l}(B_{r(n)})$, $(n \geq 3)$. Entonces

$$U_n(z,x) \in \mathbb{C}^{n,l}(B_{r(n)}).$$

De las fórmulas (3) y (4) del §**5.2** sigue que en $B_{r(n)}$, $(\Delta_x)^2 U_n = F_n$ con $F_n = 0$ cerca del borde de $B_{r(n)}(x_0)$ y tal que

$$F_n \in \mathbb{C}^{n-3,l}(B_{r(n)}).$$

Por tanto, $\Delta(\Delta D^\alpha U_n) = D^\alpha F_n \in \mathbb{C}^{0,l}(B_{r(n)})$ si $|\alpha| \leq n - 3$.

Luego, $(\Delta_x D^\alpha U_n)(z,x) = \sigma(D^\alpha F_n)(z,x) - \int_{B_{r(n)}} H(x,y) F_n(z,y) dy$.

Como $F_n(z,x)$ se anula (uniformemente en z) en un entorno del contorno de $B_{r(n)}(x_0)$, la función $\int_{B_{r(n)}} H(x,y) F_n(z,y) dy$ pertenece a $\mathbb{C}^{2,l}(B_{r(n)})$ y de la Nota 2, Apéndice 2, Cap. 5, sabemos que $\sigma(D^\alpha F_n) \in \mathbb{C}^{2,l}(B_{r(n)})$, (cf. ii) Prop. 4).

Por tanto,

$$\Delta D^\alpha U_n \in \mathbb{C}^{2,l}(B_{r(n)}).$$

Entonces, si $|\alpha| \le n-1$, $\Delta D^\alpha U_n \in \mathbb{C}^{0,l}(B_{r(n)})$. Y sigue que

$$D^\alpha U_n = \sigma(\Delta D^\alpha U_n) - \int_{B_{r(n)}} H(x,y)\Delta_y D^\alpha U_n(z,y)dy \ \in \mathbb{C}^{2,l}(B_{r(n)})$$

para α tal que $|\alpha| \le n-1$.

Por tanto, $D^\alpha U_n \in \mathbb{C}^{0,l}(B_{r(n)})$ si $|\alpha| \le n+1$.

En consecuencia, $\Gamma(z,x) \in \mathbb{C}^{n+1,l}(B_{r(n+1)})$. Como $\cap B_{r(n)}(x_0) \supset B_R(x_0)$, donde $0 < R = \lim_{n\to\infty} r(n)$, resulta en particular que $\Gamma(z,x) \in C^\infty(x \in B_R)$.

Pero también tenemos que $\forall\alpha\ D_x^\alpha\Gamma(z,x)$ es acotada y continua en $B_R(z_0) \times B_R(x_0)$,

QED.

5.6. Determinación de Γ^*. Vimos en el §**5.3** que el operador adjunto de

$$b(D_x)u = [k^{-2}(x)(\Delta^2 u/\chi^4) - 2k^{-1}(x)(\Delta u/\chi^2) + u] +$$

$$+\chi^{-4}\left[\tfrac{2}{k(x)}\operatorname{grad}\tfrac{1}{k(x)} \times \operatorname{grad}\Delta u + \tfrac{1}{k(x)}\left(\Delta\tfrac{1}{k(x)}\right)\Delta u\right]$$

es

$$b^*(D_x)u = \left(\frac{1}{\chi^4 k}\Delta^2\left(\frac{u}{k}\right) - \frac{2}{\chi^2 k}\Delta(u) + u\right) + \frac{2}{\chi^4}\operatorname{grad}\Delta\left(\frac{u}{k}\right)\times\operatorname{grad}\frac{1}{k} +$$

$$+\frac{1}{\chi^4}\Delta\left(\frac{1}{k}\right)\Delta\left(\frac{u}{k}\right) - \frac{4}{\chi^2}\operatorname{grad}u\times\operatorname{grad}\frac{1}{k} - \frac{2u}{\chi^2}\Delta\left(\frac{1}{k}\right)$$

y que $b_z^*(D_x) = \left(\frac{-1}{k(z)}\frac{\Delta_x}{\chi^2} + 1\right)^2 = b_z(D_x)$. Por tanto,

$$B^*(\chi;z,x) = B(\chi;z,x), \quad b_z^*(D_x)B^*(\chi;z,x) = \delta_z(x) \quad (D'(D)).$$

Definimos,

(1) $\beta^*(\chi;z,x) := \big(b_z^*(D_x) - b^*(D_x)\big)B(\chi;z,x) = \big(b_z(D_x) - b^*(D_x)\big)B(\chi;z,x)$.

Luego,

$$\beta^*(\chi;z,x) = (\chi^{-4}/k^2(z) - \chi^{-4}/k^2(x))\Delta^2 B + \textstyle\sum_{|\alpha|\le 3} c_\alpha(\chi;z,x)\big(D_x^\alpha B/\chi^{|\alpha|}\big),$$

donde $c_\alpha = O(1)$ para $x,z \in S$, $\chi \ge 1$.

β^* satisface la estimación (6) §**5.3**,

(2) $\quad |\beta^*(\chi;z,x)| \le C^*\chi^{-\varepsilon}|x-z|^{-1-\varepsilon}(1+\chi|x-z|)^{-N}$

para $x,z \in S$, $\chi \ge 1$ $x \ne z$, C^* independiente de χ.

En efecto,

(3) $\beta^*(\chi;z,x) = \chi^{-4}O(|x-z|)\Delta^2 B(\chi;z,x) + \sum_{|\alpha|\le 3} O\big(\chi^{-|\alpha|}\big)\, D_x^\alpha B(\chi;z,x)$

y la demostración de (2) procede a lo largo de las mismas líneas que las de β del §**5.3**.

Completando con 0 en la diagonal de $S \times S$ la función β^* definida en T y llamando a esta extensión también β^* debemos verificar que para ella vale (1) en el sentido de las distribuciones. Esto es, debemos comprobar que

(4) $$\int_S \beta^*(\chi; z, x)\varphi(x)dx = \int_S B^*(z, x)[b_z(D_x) - b(D_x)]\big(\varphi(x)\big)dx \equiv$$

$$\equiv \int_S B(z, x)\left[\left(\frac{1}{k^2(z)} - \frac{1}{k^2(x)}\right)\frac{\Delta^2}{\chi^4} + \cdots\right](\varphi(x))dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(S).$$

La igualdad en (4) es análoga a (1) §**5.5** y puede repetirse la argumentación del Lema 1 para probar (4).

Se puede determinar con la nueva β^* una función u^* y deducir una desigualdad análoga a (8) §**5.4** y con el mismo método.

PROPOSICIÓN 1. La función

(5) $$u^*(\chi; z, x) \coloneqq \beta^*(z.x) + \int_S \beta^*(z.y)\beta^*(y.x)dy +$$

$$+\int_S \beta^*(z.s)ds \int_S \beta^*(s, v)\beta^*(v, x)dv + \cdots$$

es tal que para $x, z \in S$, $|u^*(\chi; z, x)| = \frac{O(1)}{\chi^\varepsilon |x-z|^{1+\varepsilon}(1+\chi|x-z|)^N}$.

Dadas β^* y u^* podemos demostrar ahora que satisfacen a

$$\int u^*(z, t)\beta^*(t, x)dt = (u^* - \beta^*)(z, x),$$

que es la relación análoga a (1) §**5.4**.

Sea $\boldsymbol{C} = \sup\,(C, C^*)$, (cf. (6) §**5.3**, (2) §**5.6**). Definamos $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{C}M$. La Proposición 2 del párrafo **5.5** referida a V y el punto i) del Teorerma 1 del mismo párrafo se corresponden con las dos proposiciones siguientes sobre V^* que se demuestran en la misma forma,

PROPOSICIÓN 2. Sean $\chi^\varepsilon \geq 2\boldsymbol{Q}$ y $V^*(\chi; z, x) \coloneqq \int_S B^*(\chi; y, x)\, u^*(\chi; z, y)dy$. Vale si $|\alpha| \leq 1$, $D_x^\alpha V^*(\chi; z, x) \in C(S \times S)$ y es una función acotada, $D_x^\alpha V^* = O(\chi^{2-\varepsilon})$,
$D_x^\alpha V^*(\chi; z, x)|x-z|^\varepsilon \in C(T) \cap L^\infty(T)$ si $|\alpha| = 2$,
$D_x^\alpha V^*(\chi; z, x)|x-z|^{1+\varepsilon} \in C(T) \cap L^\infty(T)$ si $|\alpha| = 3$.

PROPOSICIÓN 2'. $D_x^\alpha V^*(\chi; z, x) = \int_S [D_x^\alpha B^*(\chi; y, x)]u^*(\chi; z, y)dy$ si $|\alpha| \leq 3$.

Como las propiedades de la Proposición 2 las satisface $B^*(\chi; z, x) = B(\chi; z, x)$ sigue entonces la siguiente Proposición 3 (cf. Proposición 1 §**5.5** y §**5.3**),

PROPOSICIÓN 3. Sea $\Gamma^*(\chi; z, x) \coloneqq B^*(\chi; z, x) + V^*(\chi; z, x)$. Si $\chi^\varepsilon \geq 2\boldsymbol{Q}$ vale,
$D_x^\alpha \Gamma^*(\chi; z, x) \in C(S \times S) \cap L^\infty(S \times S)$ si $|\alpha| \leq 1$,
$D_x^\alpha \Gamma^*(\chi; z, x)|x-z|^\varepsilon \in C(T) \cap L^\infty(T)$ si $|\alpha| = 2$,
$D_x^\alpha \Gamma^*(\chi; z, x)|x-z|^{1+\varepsilon} \in C(T) \cap L^\infty(T)$ si $|\alpha| = 3$.

PROPOSICIÓN 3'. Si $|\alpha| \leq 3$ entonces $D_x^\alpha \Gamma^*(t, x) = [D_x^\alpha \Gamma^*(t, x)]$, $D'(x \in S)$.

El último punto se corresponde con ii) del Teorema 1 del §**5.5**.

Procediendo como en el Corolario del §**5.5** se ve que vale el

TEOREMA 1. $b^*(D_x)\Gamma^*(\chi; z, x) = \delta_z(x)$**.**

PROPOSICIÓN 4. Localmente en x y lejos de z vale: $\Gamma^*(\chi; z, x) \in C^{3,l}(x \in S)$, $l \in (0,1)$. Más aún, Γ^* verifica ii) de la Proposición 4 §**5.5.**

Luego como en el Teorema 2 §**5.5** se prueba el

TEOREMA 2. $\Gamma^*(\chi; z, x) \in C^\infty(x \in S \setminus \{z\})$ y verifica $D_x^\alpha \Gamma^*(\chi; z, x) \in C(T)$ cualquiera sea α**.**

APÉNDICE 1, Cap. 5.

La transformada de Fourier de $\frac{1}{p}$, p polinomio real sin ceros reales.

Véase la notación en la Introducción del Capítulo 5.

TEOREMA 1. Sean $1 \leq N$ entero, $0 < \varepsilon < 1$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, α_i entero no negativo, $x = (x_1, x_2)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Sea $p(\xi)$ un polinomio real de grado $\mu > 0$ con coeficientes acotados por c_1.

Si $\left|\frac{1}{p(\xi)}\right| \leq \frac{c_2}{(1+|\xi|)^\mu}$ entonces $\frac{1}{p(\xi)}$ es una distribución temperada y $P := (1/p)^\wedge$ es en $R^2 \backslash \{0\}$ una función indefinidamente diferenciable.

Además, si $x \neq 0$ y

(1)
$$e_\alpha(x) := \begin{cases} |x|^{\mu-|\alpha|-2-\varepsilon} & \text{si } \mu - |\alpha| \leq 2 \\ 1 & \text{si } \mu - |\alpha| > 2 \end{cases}$$

entonces

(2)
$$|\, D^\alpha P(x)| \leq C(c_1, c_2, N, \varepsilon, \alpha) \frac{e_\alpha(x)}{(1+|x|)^N}\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, β_i entero no negativo. Entonces

(3)
$$\left| D_{\xi_1}^{\beta_1} D_{\xi_2}^{\beta_2} \left(\frac{\xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2}}{p(\xi_1, \xi_2)} \right) \right| = \left| D_\xi^\beta (\xi^\alpha / p(\xi)) \right| \leq C(c_1, c_2)(1 + |\xi|)^{|\alpha|-|\beta|-\mu},$$

y por tanto, si $\mu + |\beta| - |\alpha| > 2$, entonces

$$\left(D_\xi^\beta (\xi^\alpha / p(\xi)) \right)^\wedge (x) = i^{|\beta|} (-1)^{|\alpha|} x^\beta D^\alpha P(x)$$

es una función continua y acotada en R^2 que tiende a cero en el infinito.

Sigue que para todo α, $D^\alpha P(x)$ es una función continua en $R^2 \backslash \{0\}$. Por tanto pertenece a $C^\infty(R^2 \backslash \{0\})$. Sea

$$k_0 := \sup(3 + |\alpha| - \mu, 0).$$

Luego, si $|\beta| \geq k_0$, entonces

(4)
$$\left| \left(D_\xi^\beta (\xi^\alpha / p(\xi)) \right)^\wedge (x) \right| = \left| x^\beta D^\alpha P(x) \right| \leq C(c_1, c_2).$$

a) Si $\mu - |\alpha| > 2$ entonces $k_0 = 0$. Sumando en los β con $|\beta| = N$ y tomando en consideración el caso $|\beta| = 0$, obtenemos de (4),

(5)
$$|D^\alpha P(x)| \leq C(c_1, c_2, N, \alpha)(1 + |x|)^{-N}.$$

b) Si $|\beta| \geq 1$ y $|\beta| \geq k_0$, entonces $\int_{R^2} D_\xi^\beta (\xi^\alpha / p(\xi))\, d\xi = 0$.

En efecto, supongamos por ejemplo que $\beta = (1,0) + \beta'$. Entonces el integrando es

$\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left[D_\xi^{\beta'}(\xi^\alpha/p(\xi))\right]$, donde el corchete es $O\left(\frac{1}{(1+|\xi|)^T}\right)$, con $T=\mu+|\beta|-1-|\alpha|\geq 2$.

Por tanto, la integral $\int d\xi_2 \int \frac{\partial}{\partial \xi_1}[\cdots]\, d\xi_1 = 0$.

En consecuencia, para $|\beta| \geq \sup(k_0, 1)$ vale

$$\left| x^\beta D^\alpha P(x)\right| = \left|\int_{R^2} D_\xi^\beta(\xi^\alpha/p(\xi))e^{-i\langle\xi,x\rangle}d\xi\right| =$$

$$= \left|\int_{R^2} D_\xi^\beta(\xi^\alpha/p(\xi))\left(e^{-i\langle\xi,x\rangle}-1\right)d\xi\right|.$$

Sea ε tal que $0<\varepsilon<1$. Tenemos $\left|e^{-i\langle\xi,x\rangle}-1\right| \leq \inf(2, |\xi||x|) \leq 2(|\xi||x|)^{1-\varepsilon}$. Por tanto obtenemos para $\mu+|\beta|-|\alpha|\geq 3,\ |\beta|\geq \sup(1,k_0)$,

(6) $\quad \left|x^\beta D^\alpha P(x)\right| \leq C_0 \int_{R^2} |x|^{1-\varepsilon}|\xi|^{1-\varepsilon}(1+|\xi|)^{-\mu+|\alpha|-|\beta|}d\xi \leq C'|x|^{1-\varepsilon}$.

c) Si $\mu-|\alpha|\leq 2$ entonces sumando (6) en los β tales que $|\beta|=k_0=3+|\alpha|-\mu$, se obtiene en $R^2\setminus\{0\}$,

(7) $\quad |D^\alpha P(x)| \leq C'(c_1,c_2,\varepsilon,\alpha)|x|^{1-k_0-\varepsilon}$.

Utilizando esta estimación y sumando en los β tales que $|\beta|=k_0+N$, resulta,

(8) $\quad (1+|x|)^N|D^\alpha P(x)| \leq C''(c_1,c_2,N,\varepsilon,\alpha)|x|^{1-k_0-\varepsilon} = C'''|x|^{\mu-|\alpha|-2-\varepsilon}$,

QED.

TEOREMA 2. Para $0\leq|\alpha|<\mu$, $D^\alpha P$ en $D'(R^2)$ coincide con una función $f_\alpha \in L^1(R^2)$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 1, $D^\alpha P$ coincide en $R^2\setminus\{0\}$ con una función $f_\alpha \in L^1(R^2)$. Entonces, $D^\alpha P = f_\alpha + T$ con T una distribución de soporte $\subset\{0\}$. Luego, $\frac{(-i)^{|\alpha|}\xi^\alpha}{p(\xi)} = (\mathcal{F}^{-1}f_\alpha)(\xi)+q(\xi)$, q un polinomio. Como $(\mathcal{F}^{-1}f_\alpha)(\xi)$ tiende a cero para $|\xi|\to\infty$, necesariamente también $q(\xi)\to 0$. Sigue que $q\equiv 0$.

En consecuencia, $T=0$ y $D^\alpha P = f_\alpha$, QED.

APÉNDICE 2, Cap. 5.

NOTAS.

NOTA 1. En §**4.4** [BPII] se considera el problema de Dirichlet $\frac{-1}{k(x)}\Delta u = f \in L^2(D)$, $u = 0$ en el contorno de D, con D una región ñ-conexa regular y $k(x) \in Lip_+(D)$. Ese problema se resuelve allí hallando una distribución u tal que $-\Delta u = fk$ en $D'(D)$, $u \in D_\Delta(D)$. Esto es: $u \in C_0(\overline{D})$ es tal que para toda $\varphi \in C_0^\infty(D)$ verifica

(1) $$\langle u, -\Delta\varphi\rangle = \langle fk, \varphi\rangle$$

y resulta que existe exactamente una.

Sea $k = \mathscr{k} \in C^\infty(D)$. Resolver $\frac{-1}{\mathscr{k}(x)}\Delta T = f$ *en* $D'(D)$ significa hallar una distribución T tal que $\forall\varphi \in C_0^\infty(D)$:

(2) $$\langle f, \varphi\rangle = \langle\frac{-1}{\mathscr{k}(x)}\Delta T, \varphi\rangle = \langle\Delta T, \frac{-1}{\mathscr{k}(x)}\varphi\rangle = \langle T, -\Delta\left(\frac{\varphi}{\mathscr{k}}\right)\rangle.$$

En otras palabras, aquí "*en* $D'(D)$" prácticamente se reduce a multiplicar correctamente las distribuciones $\frac{-1}{\mathscr{k}}$ y ΔT.

La aplicación $\varphi \to \omega = \frac{\varphi}{\mathscr{k}}$ define un isomorfismo de $C_0^\infty(D)$ sobre $C_0^\infty(D)$ y (2) implica

(3) $$\langle f, \mathscr{k}\omega\rangle = \langle T, -\Delta\omega\rangle.$$

Luego, para toda $\omega \in C_0^\infty(D)$: $\langle T, -\Delta\omega\rangle = \langle \mathscr{k}f, \omega\rangle$. Por tanto, la solución u obtenida en (1) sería solución *en* $D'(D)$ cuando $k = \mathscr{k} \in C^\infty$.

NOTA 2. En [BP] (ver (16) §**0.2.5**) se probó que para $f \in C^{0,L}(D), L \in (0,1]$[1] y $K = \overline{B_r(z)} \subset D$ región, la función $\sigma(f)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_K \log|x-y| f(y)dy$ tiene derivadas segundas continuas en $B_r(z)$ y vale

(1) $$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\big(\sigma(f)\big) = f(x).F(x) - \frac{1}{2\pi}\int_K \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\log|x-y|\right)[f(x)-f(y)]dy\,,$$

donde $F(x)$ es una función indefinidamente diferenciable en $R^2 \setminus \partial K$ dependiente solo de K. Llamemos

$$s_{ij}(x,y) := \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\log|x-y|, \qquad G(x) := \int_K s_{ij}(x,y)[f(x)-f(y)]dy.$$

Observemos que por razones de simetría para $0 < a < b < \infty$ vale

[1] $C^{j,L}(D)$ representa a la familia de funciones con dominio D y j derivadas continuas tales que las j-ésimas satisfacen una condición de Hölder de orden L. Si D es una región las funciones son acotadas, lo mismo que sus derivadas.

(1′) $\int_{a<|x-y|<b} s_{ij}(x,y)dy = \int_{a<|x-y|<b} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \log|y-x|\, dy =$

$$= \int_{a<|Y|<b} \frac{\partial^2}{\partial Y_i \partial Y_j} \log|Y| dY = 0.$$

Probaremos el

TEOREMA 1. $0 < L \leq 1, f \in C^{0,L}(D) \Rightarrow \sigma f \in C^{2,L}$ sobre compactos conexos de D**.**

Este resultado es consecuencia de la siguiente Proposición 1 y un simple argumento de compacidad.

PROPOSICIÓN 1. Existen $R \in (0,r), R = r - \varepsilon$ y una constante $M = M(R,z)$ tales que si $x, x_0 \in B_R(z)$ entonces vale

(2) $$|G(x_0) - G(x)| \leq M|x_0 - x|^L,$$

(2’) $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \sigma f$ es localmente L-Hölder continua**.**

DEMOSTRACIÓN. Veamos (2). Sea $2\varepsilon = \operatorname{dist}(x_0, \partial K)$ y supongamos

$\delta \coloneqq |x - x_0| < \varepsilon < 1$. Vale ,

$G(x) - G(x_0) =$

$$= \int_{K \cap \{|y-x_0| \geq 2\delta\}} \{s_{ij}(x,y)[f(x) - f(y)] - s_{ij}(x_0,y)[f(x_0) - f(y)]\}\, dy +$$

$$+ \int_{|y-x_0|<2\delta} s_{ij}(x,y)[f(x) - f(y)]dy - \int_{|y-x_0|<2\delta} s_{ij}(x_0,y)[f(x_0) - f(y)]dy =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

Como $|s_{ij}(x,y)| = O(1)|x-y|^{-2}$, resulta que

(3) $$|I_2| = O(1) \int_0^{3\delta} \rho^{L-1} d\rho = O(1)\delta^L.$$

Lo mismo vale para I_3: $|I_3| = O(1)\delta^L$.

Por otro lado

$$I_1 = \int_{K \cap \{|y-x_0| \geq 2\delta\}} \{s_{ij}(x,y) - s_{ij}(x_0,y)\}[f(x) - f(y)]\, dy +$$

$$+ \int_{K \cap \{|y-x_0| \geq 2\delta\}} \{s_{ij}(x_0,y)[f(x) - f(x_0)]\}\, dy = I' + I''.$$

Pero si $y \in \{K \cap \{|y - x_0| \geq 2\delta\}\}$ entonces

$$|s_{ij}(x,y) - s_{ij}(x_0,y)| = O(1)\delta|y - x_0|^{-3},$$

mientras que allí $|f(x) - f(y)| = O(1)|x-y|^L = O(1)|x_0 - y|^L$.

O sea, teniendo en cuenta la definición de δ,

(4) $$I' = O(1)\delta \int_{2\delta}^{\operatorname{diam} K} \rho^{L-2} d\rho = O(1)\delta^L.$$

Por otra parte, dado que $\delta < \varepsilon = \operatorname{dist}(x_0, \partial K)/2$, por (1′) tenemos,

$$I'' = \big(f(x) - f(x_0)\big) \int_{K\cap\{|y-x_0|\geq 2\delta\}} s_{ij}(x_0,y)\,dy =$$

$$= (f(x) - f(x_0)) \int_{K\cap\{|y-x_0|\geq 2\varepsilon\}} s_{ij}(x_0,y)\,dy.$$

Esto implica

(5) $$I'' = O(1)\delta^L \int_{2\varepsilon}^{\operatorname{diam} K} \rho^{-1} d\rho = O(1)\,|\mathrm{Log}\,\varepsilon|\,\delta^L.$$

O sea, si $R = r - \varepsilon$ y $x, x_0 \in B_R(z)$ entonces $|G(x_0) - G(x)| \leq C(R)|x_0 - x|^L$,

QED.

NOTA 3. Sea $g(x) = \sum_1^\infty \frac{\cos(2^n x)}{2^{3n}}, x \in R^1$. g es una función acotada con dos derivadas continuas y acotadas pero tal que su derivada segunda no es diferenciable en ningún punto (función de Weierstrass).

Sea $0 \leq \varphi \in C_0^\infty(R^1)$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt = 1$. Si $(x,y) \in R^2$ definimos

$$f(x,y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g(x - y^3 t)\varphi(t)dt & \text{para } y > 0\,, \\ g(x) & \text{para } y \leq 0. \end{cases}$$

f es una función que verifica $f(x,y) \in C^\infty(y>0) \cap C^2(R^2)$ pero evidentemente su restricción a $y = 0$ no es C^3.

NOTA 4. La solución variacional de $\left(-\frac{1}{k}\Delta + t\right)u = F \in L^2(S)$, $u = 0$ en ∂S, es la función $u \in \boldsymbol{D}_\Delta = \{u \in H_0(S) : \Delta u \in L^2\}$ tal que para toda $v \in H_0$ verifica

$$a_{t,k}(u,v) = (F,v)_k.$$

En particular, $\forall \varphi \in C_0^\infty(S)$ valdrá $\left(tu - \frac{1}{k}\Delta u, \varphi k\right) = (F, \varphi k)$, (cf. §**4.6**). Si $k \in C_+^\infty(S)$ esto equivale a $\langle tu - \frac{1}{k}\Delta u, \varphi k\rangle = \langle F, \varphi k\rangle$ y por tanto a $\langle\left(-\frac{1}{k}\Delta + t\right)u, \psi\rangle = \langle F, \psi\rangle$ para toda $\psi \in C_0^\infty(S)$. Luego, si $k \in C_+^\infty(S, \dot{S})$, u es solución en el sentido de las distribuciones de $\left(-\frac{1}{k}\Delta + t\right)u = F$.

NOTA 5. El residuo $\boldsymbol{A = \int_D k(p)dp/4\pi}$. Sean $k(x) \in Lip_+(D, \dot{S})$ y $D \in \boldsymbol{B} \cap \mathbb{S}$ una región regular ñ-conexa.

Vimos en el §**4.20** [BPII] que $g(s) := \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{-s} - \frac{\int_D kdp}{4\pi(s-1)}$ es una función holomorfa en $\operatorname{Re} s > 1$ prolongable continuamente a $\operatorname{Re} s \geq 1$ y que la serie de Dirichlet tiene abscisa de convergencia $\sigma_c = 1$. O sea, para $\operatorname{Re} s > 1$ vale

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} = \frac{\frac{1}{4\pi}\int_D kdp}{s-1} + g(s).$$

De (1) obtuvimos $\lambda_n \int_D k(p)dp \sim 4\pi n$, es decir,

(2) $$\frac{n}{\lambda_n} \sim A = \frac{\int_D k(p)dp}{4\pi} \in (0, \infty).$$

La constante A aparece así como una función de los autovalores. Puede obtenerse también de las autofunciones pues $\left(\int_D k(p)dp\right)^{-1}$ es un límite en media de $\{\phi^2(p)\}_1^{\infty}$ para cada $p \in D$, (Carleman).

TEOREMA 1. i) Para todo $p \in D$ y $M \to \infty$, $\frac{\sum_1^M \phi_n^2(p)}{\lambda_M} \to \frac{1}{4\pi}$,

ii) $\frac{\sum_1^M \phi_n^2(p)}{M} \to \left(\int_D k(p)dp\right)^{-1} = \frac{1}{4\pi A}$ en todo punto p de D.

DEMOSTRACIÓN. Veamos i).

(3) $$\sum_1^{\infty} \frac{\phi_n^2}{\lambda_n^s}(p) = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^s} d\alpha(x),$$

donde $\alpha(x)$ es una función monótona, no decreciente, no negativa, a puros saltos en los puntos $x = \lambda_n$, definida por

$\alpha(x) = 0$ si $0 < x < \lambda_1$,

$\alpha(x) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda_N} \phi_j^2(p) = \sum_1^N \phi_j^2(p)$ si $\lambda_{N+1} > x \geq \lambda_N$.

Luego, de (1) y (3),

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^s} d\alpha(x) = \frac{1}{4\pi(s-1)} + \frac{g(s)}{4\pi A}.$$

El teorema de Ikehara es aplicable a la igualdad precedente y asegura que

(4) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{x} \to \frac{1}{4\pi}.$$

Si $\lambda_N < x_N < \lambda_{N+1,}\ x_N = \lambda_N + (\lambda_{N+1} - \lambda_N)/2$ tenemos

(5) $$\frac{\sum_1^N \phi_n^2(p)}{x_N} \to \frac{1}{4\pi} \text{ para } N \uparrow \infty.$$

En la proposicion 3 del §2.2 [BP] obtuvimos que vale $\frac{n}{\lambda_n} \to A,\ n \to \infty$ si y solo si $\frac{N(\lambda)}{\lambda} \to A,\ \lambda \to \infty$, por lo que $\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \to 1$.

Vimos además que en la definición del contador $N(\lambda) = \#\{\lambda_j \leq \lambda\}$ puede usarse $<$ en lugar de $\leq$. Con esta última, en (5), $N = N(\lambda_{N+1})$ donde $\lambda_N < \lambda_{N+1}$.

También obtuvimos que $\#\{\lambda_j : \lambda_j = \lambda_n\} = o(n)$.

Como $\frac{\lambda_N}{\lambda_{N+1}} \to 1$ de (5) sigue que $\frac{\sum_1^N \phi_n^2(p)}{\lambda_N} \to \frac{1}{4\pi}$ para $N \uparrow \infty$.

Sea m_N la multiplicidad del autovalor λ_N. Entonces

(6) $$\lambda_{N-m_N} < \lambda_{N-m_N+1} = \cdots = \lambda_M = \cdots = \lambda_N < \lambda_{N+1}.$$

Luego,

(7) $$\frac{1}{\lambda_N}\sum_1^N \phi_j^2(p) = \frac{1}{\lambda_N}\sum_{\lambda_j \le \lambda_N} \phi_j^2(p) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_{N-m_N+1}}\sum_{\lambda_j \le \lambda_{N-m_N}} \phi_j^2(p) + \frac{1}{\lambda_{N-m_N+1}}\sum_{\lambda_{N-m_N+1} \le \lambda_j \le \lambda_N} \phi_j^2(p) \to \frac{1}{4\pi};$$

por tanto,

$$\frac{1}{\lambda_{N-m_N}}\sum_{\lambda_j \le \lambda_{N-m_N}} \phi_j^2(p) + \frac{1}{\lambda_{N-m_N}}\sum_{\lambda_{N-m_N+1} \le \lambda_j \le \lambda_N} \phi_j^2(p) \to \frac{1}{4\pi}.$$

Pero $\frac{1}{\lambda_{N-m_N}}\sum_{\lambda_j \le \lambda_{N-m_N}} \phi_j^2(p) \to \frac{1}{4\pi}$, por lo que $\frac{1}{\lambda_{N-m_N}}\sum_{\lambda_{N-m_N+1} \le \lambda_j \le \lambda_N} \phi_j^2(p) \to 0$.

O sea,

(8) $$\frac{1}{\lambda_N}\sum\{\phi_j^2(p) \colon \lambda_j = \lambda_N\} \to 0 \text{ si } N \uparrow \infty.$$

Sigue enseguida i). Usando (2) obtenemos ii), QED.

NOTA 6. Una demostración detallada del Lema 1 §**5.5**.

Las estimaciones (6) **5.3** y (8) **5.4** son semejantes:

$$u(\chi; z, t) = O(1)\chi^{-\varepsilon}|t-z|^{-1-\varepsilon} \qquad \beta(\chi; t, x) = O(1)\chi^{-\varepsilon}|t-x|^{-1-\varepsilon},$$

por lo que $\int |u(\chi; z, y)\beta(\chi; y, x)|dy$ es una función que satisface la misma estimación, (cf. (4) §**5.4**). Más aún,

$$|u(\chi; z, y).\beta(\chi; y, x)| = O(1)\chi^{-2\varepsilon}|z-x|^{-1-\varepsilon}\left[\frac{1}{|y-z|^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{|y-x|^{1+\varepsilon}}\right].$$

En consecuencia, si $f \in L^\infty$, uniformemente en z vale

(1) $$\int |f(x)|dx \int |\beta(\chi; y, x)u(\chi; z, y)|dy = O(1).$$

Veamos entonces que, para $\phi \in C_0^\infty(S)$, se verifica

(2) $$\int_S \beta(\chi; z, x)\phi(x)dx = \int_S B(\chi; z, x)\big(b_z(D_x) - b^*(D_x)\big)\phi(x)dx.$$

Sean $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ un multiíndice y ε_j, $j = 1, 2, \cdots$, multiíndices tales que $|\varepsilon_j| = 1$, $\sum_{j=1}^{|\alpha|} \varepsilon_j = \alpha$. Luego, $\sum|\varepsilon_i| = |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ y si $\gamma_j := \sum_{i>j} \varepsilon_i$, $\tau_j := \sum_{i<j} \varepsilon_i$,tenemos $|\gamma_j| + |\tau_j| = |\alpha| - 1$.

Vale,

(3) $$(D^\alpha u)\phi - (-1)^{|\alpha|}u(D^\alpha \phi) = -\sum_{j=1}^{|\alpha|}(-1)^j D^{\varepsilon_j}(D^{\gamma_j}u.D^{\tau_j}\phi).$$

En efecto, la igualdad se demuestra desarrollando el miembro derecho y observando que $\tau_j + \varepsilon_j = \tau_{j+1}$, $\gamma_j + \varepsilon_j = \gamma_{j-1}$, $\gamma_0 = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{|\alpha|} = \alpha$, $\gamma_{|\alpha|} = 0$, $\tau_1 = 0$,$\tau_2 = \varepsilon_1$, $\tau_{|\alpha|+1} = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{|\alpha|} = \alpha$, etc. Luego, con $c_j =$ constante, $c_1 = 1$, vale

(4) $(D^\alpha u)\phi - (-1)^{|\alpha|}u(D^\alpha\phi) =$

$$= D^{\varepsilon_1}(D^{\gamma_1}u\,.\,c_1\phi) + \sum_{|\gamma_j|<|\alpha|-1} D^{\varepsilon_j}(D^{\gamma_j}u.\,D^{\tau_j}c_j\phi), \quad (\,|\gamma_1| = |\alpha|-1).$$

Si en lugar de D^α tenemos $c(x)D^\alpha, c(x) \in C^\infty(S)$, y $\vartheta = c(x)\phi$, vale

(4') $\quad c(x)(D^\alpha u)\phi - (-1)^{|\alpha|}uD^\alpha(c(x)\phi) = (D^\alpha u)\vartheta - (-1)^{|\alpha|}u(D^\alpha\vartheta) =$

$$= D^{\varepsilon_1}D^{\gamma_1}u\,.\,c_1(x)\phi + D^{\varepsilon_2}D^{\gamma_2}u\,.\,D^{\varepsilon_1}(c_1\phi) + \sum_{|\gamma_j|<|\alpha|-1} D^{\varepsilon_j}\left(D^{\gamma_j}u.\,D^{\tau_j}\big(c_j(x)\phi\big)\right),$$

donde $c_j(x) = c_j.\,c(x) \in C^\infty(S)$, $c_1(x) = c(x)$ y $|\gamma_h| = |\alpha| - h,\ h = 0,1,\cdots,|\alpha|$.

Supongamos $|\alpha| \leq 4$. Entonces $|\gamma_1| = 3$ solamente si $|\alpha| = 4$ y en ese caso

(4'') $\quad (D^\alpha u)\vartheta - (-1)^{|\alpha|}u(D^\alpha\vartheta)) = c(x)(D^{\varepsilon_1+\gamma_1}u)\phi + \sum_{|\gamma|<3} D^{\varepsilon_k}D^\gamma u.\,D^\tau(c_k\phi)$.

Por tanto en el desarrollo de $\sum_{|\alpha|\leq 4}\left[(D^\alpha u)\vartheta_\alpha - (-1)^{|\alpha|}u(D^\alpha\vartheta_\alpha))\right]$, $\vartheta_\alpha = c_\alpha\phi$, el factor de todas las derivadas de orden 4 sobre u es el mismo $c(x)$.

Consideremos

$$I_\delta = \int_{S\setminus B_\delta(z)} \beta(z,x)\phi(x)dx - \int_{S\setminus B_\delta(z)} B(z,x)\big(b_z(D_x) - b^*(D_x)\big)\,\phi(x)dx.$$

Los coeficientes de $b_x(D_x)$ como los de $b_x^*(D_x)$ son indefinidamente diferenciables en S, (cf. (3) y (7) §**5.3**)) y acotados sobre el soporte de ϕ. De (5) §**5.2** y (4') obtenemos

(5) $I_\delta = \int_{S\setminus B_\delta(z)}\big\{\big(b_z(D_x) - b(D_x)\big)B(z,x)\big\}\phi(x)dx -$

$$- \int_{S\setminus B_\delta(z)} B(z,x)\big(b_z(D_x) - b^*(D_x)\big)\,\phi(x)dx =$$

$$= \int_{S\setminus B_\delta(z)}[\{(b_z - b_x)B\}\phi - B(b_z - b_x)^*\phi]\,dx.$$

El último miembro, por (4)-(4''), es combinación lineal de expresiones que verifican:

$O\left(\int_{|z-x|=\delta} \left|D_x^\gamma B(z,x)\right| \left|D_x^\tau\big(c_k(x)\phi(x)\big)\right| d\sigma_\delta(x)\right)$, donde $\phi \in C_0^\infty(S)$ y $|\tau| + |\gamma| \leq 3$.

Los sumandos con $|\gamma| \leq 2$ son $O(\delta^{1-\varepsilon})$, $\delta = |z - x|$, en virtud de (16), (17), Introducción.

Si $|\gamma| = 3$ entonces $\tau = 0$, $|\alpha| = 4$, $c(x) = \frac{1}{k^2(z)} - \frac{1}{k^2(x)}$ y el sumando correspondiente es, (cf. (2) y (3) §**5.3** y (4'')),

(6) $$O\left(\int_{|z-x|=\delta}\left|\left(\frac{1}{k^2(z)} - \frac{1}{k^2(x)}\right)\left(D_x^\gamma B(z,x)\right)\,\phi(x)\right| d\sigma_\delta(x)\right).$$

Aquí $c(x) = \frac{(k(x)+k(z))(k(x)-k(z))}{k^2(z)k^2(x)} = O(\delta)$ por la regularidad de k. Luego, la integral es $O(\delta^{1-\varepsilon})$, (cf. (17) Intr. con $h = 3 - 2 = 1$).

Vale entonces, $\lim_{\delta\to 0} I_\delta = 0$.

CAPÍTULO 6.

Introducción. Motivamos el Cap. 5 proponiendo demostrar que si $S, \dot{S}$ son abiertos acotados y $k \in C_+^\infty(S, \dot{S})$ vale $t\|\mathfrak{Q}_t\|_{2,K}^2 \sim A$, (T.1§**6.4**), y que de esta relación asintótica se deduce que $\frac{N(t)}{t} \sim A$, (T.2§**6.4**), donde N es el contador de los autovalores variacionales del problema de Dirichlet del operador $-\frac{1}{k}\Delta$.

Se demuestra como en el Teorema 8 §**4.1** el siguiente resultado,

TEOREMA 1. Sean $k \in C_+^\infty(S, \dot{S})$, S una región con contorno ∂S y $\dot{k}$ su extensión a la región $\dot{S} \supset \bar{S}$. Los autovalores variacionales del problema de Dirichlet del operador $-\frac{1}{k}\Delta$ en la región S verifican

(1) $$0 \leq \overline{\lim} \frac{n}{\lambda_n} - \underline{\lim} \frac{n}{\lambda_n} \leq \frac{1}{4\pi} \int_{\partial S} \dot{k}(x)\, dx.$$

Si $|\partial S| = 0$ entonces existe el $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n}$ y vale

(2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = A = \frac{1}{4\pi} \int_S \; k(x)\, dx.$$

Como extensión del Teorema de H. Weyl este es un resultado aceptable el cual sugiere explorar el problema variacional en una situación más general. En efecto, el Teorema 2 del §**6.4** demuestra que es irrelevante si $|\partial S| = 0$ o no.

Esta misma observación se aplica a 2) Teorema 1 §**4.21** si $k \in C_+^\infty(S, \dot{S})$.

6.1. El núcleo $\mathfrak{q}_t(\cdot,\cdot)$.

En el Capítulo 5 introdujimos el operador $\left(-\frac{1}{k(x)}\Delta_x + t\right)^2$ con $k \in C^\infty(S)$ y tal que existe $0 < \varepsilon = \varepsilon(k)$ para el que vale $\varepsilon < k(x) < 1/\varepsilon$. El objetivo es estudiar al que será su inverso, $\left(-\frac{1}{k}\Delta + t\right)^{-2}$, en el caso que $k \in C_+^\infty(S, \dot{S})$. En esta situación k es una función localmente Lipschitz lo mismo que sus derivadas primeras.

DEFINICIÓN 1. $\mathfrak{G}^{(2)} \coloneqq \mathfrak{G} \circ \mathfrak{G}$, (cf. Def. 3, §**4.6**).

DEFINICIÓN 2. $\mathfrak{q}_t(p,q) \coloneqq \int_S \; \mathfrak{Q}_t(p,r)\mathfrak{Q}_t(r,q)\, k(r)\, dr$, (cf. T. 3, §**4.9**).

TEOREMA 1. Sean S, $\dot{S}$ abiertos acotados tales que $S \subset\subset \dot{S}$, $f \in L^2(S,k)$ y $k \in Lip_+(S, \dot{S})$. Valen,

a) $\mathfrak{q}_t(p,q)$ existe a.e. $(p,q) \in S \times S$, $\mathfrak{q}_t(p,q) = \sum_{m=1}^\infty \frac{\mathfrak{f}_m(p)\mathfrak{f}_m(q)}{(\lambda_m+t)^2}$, $(L^2(S \times S, K))$,

b) $\mathfrak{q}_t(p,p)$ existe a.e. S y $0 \leq \mathfrak{q}_t(p,p) = \sum_{m=1}^\infty \frac{(\mathfrak{f}_m(p))^2}{(\lambda_m+t)^2}$, $\;$ a. e. S y en $L^1(S,k)$,

c) $\mathfrak{G}^{(2)}f(p) = \int_S \ \mathfrak{q}_t(p,q)f\,(q)\,k(q)dq$ **.**

DEMOSTRACIÓN. a) $\mathfrak{q}_t(p,q) \coloneqq \int_S \ \mathfrak{Q}_t(p,r)\mathfrak{Q}_t(r,q)\ k(r)dr$ existe a.e. (p,q) ya que $\mathfrak{Q}_t(u,.), \mathfrak{Q}_t(.,u)$ están en L^2 si $u \in X = S$ a.e. pues $\mathfrak{Q}_t(.,.) \in L^2(S \times S)$. De la desigualdad de Minkowski sigue que $\sum_{j=1}^{N} \frac{\mathfrak{f}_j(p)\mathfrak{f}_j(q)}{(\lambda_j+t)^2}$ es de Cauchy en $L^2(S \times S, K)$ pues

(1) $$\left\| \sum_M^N \frac{\mathfrak{f}_j(p)\mathfrak{f}_j(q)}{(\lambda_j+t)^2} \right\|_{2,K} \leq \sum_M^N \frac{1}{(\lambda_j+t)^2} \xrightarrow[M,N\to\infty]{} 0,$$

por lo que $\sum_1^N \frac{\mathfrak{f}_j(p)\mathfrak{f}_j(q)}{(\lambda_j+t)^2}$ converge en $L^2(S \times S, K)$ a una función $N(p,q)$.

Además una subsucesión $\sum_1^{N(m)} \frac{\mathfrak{f}_j(p)\mathfrak{f}_j(q)}{(\lambda_j+t)^2}$ converge a $N(p,q)$ a.e. $(p,q) \in S \times S$. Podemos elegir la subsucesión de tal manera que se verifiquen también, para $m \to \infty$,

(2) $$\int_S \left| \sum_1^{N(m)} \frac{\mathfrak{f}_j(p)\mathfrak{f}_j(q)}{(\lambda_j+t)^2} - N(p,q) \right|^2 k(q)dq \to 0, \ \ a.e.\ p$$

$$\int_S \left| \sum_1^{N(m)} \frac{\mathfrak{f}_j(p)\mathfrak{f}_j(q)}{(\lambda_j+t)^2} - N(p,q) \right|^2 k(p)dp \to 0, \ \ a.e.\ q.$$

Por otra parte sabemos que $\sum_1^{N(m)} \frac{\mathfrak{f}_n(x)\mathfrak{f}_n(y)}{\lambda_n+t}$ converge en $L^2(S \times S; K)$ a $\mathfrak{Q}_t(x,y)$, (cf. T. 3 §**4.9** [BPII]). Por tanto eligiendo adecuadamente una subsucesión de $N(m)$, que seguiremos denotando de la misma forma, obtenemos

(3) $$\sum_1^{N(m)} \frac{\mathfrak{f}_j(p)\mathfrak{f}_j(q)}{\lambda_j+t} \text{ converge a } \mathfrak{Q}_t(p,q) \text{ a.e. } (p,q) \in S \times S$$

$$\int_S \left| \sum_1^{N(m)} \frac{\mathfrak{f}_j(p)\mathfrak{f}_j(q)}{\lambda_j+t} - \mathfrak{Q}_t(p,q) \right|^2 k(q)dq \to 0, \ \ a.e.\ p$$

$$\int_S \left| \sum_1^{N(m)} \frac{\mathfrak{f}_j(p)\mathfrak{f}_j(q)}{\lambda_j+t} - \mathfrak{Q}_t(p,q) \right|^2 k(p)dp \to 0, \ \ a.e.\ q.$$

Vale entonces para $m \to \infty$ y a.e. $(p,q) \in S \times S$,

$$\mathfrak{q}_t(p,q) = \lim \int_S \left(\sum_{j=1}^{N(m)} \frac{\mathfrak{f}_j(p)\mathfrak{f}_j(r)}{\lambda_j+t} \right) \left(\sum_{l=1}^{N(m)} \frac{\mathfrak{f}_l(r)\mathfrak{f}_l(q)}{\lambda_l+t} \right) k(r)dr =$$

$$= \lim \sum_1^{N(m)} \frac{\mathfrak{f}_j(p)\mathfrak{f}_j(q)}{(\lambda_j+t)^2} = N(p,q).$$

Luego, $\sum_1^N \frac{\mathfrak{f}_j(p)\mathfrak{f}_j(q)}{(\lambda_j+t)^2} \to \mathfrak{q}_t(p,q)$ en $L^2(S \times S, K)$.

b) $\sum_1^{M} \frac{(\mathfrak{f}_n(p))^2}{(\lambda_n+t)^2}$ converge monótonamente para $M \to \infty$ y en todo punto, a una función integrable $T(p) \geq 0$.

En todo punto $p \in S$ tenemos según la Definición 2,

$$\mathfrak{q}_t(p,p) := \int_S \mathfrak{Q}_t(p,r)\mathfrak{Q}_t(r,p)\ k(r)dr.$$

$\mathfrak{q}_t(p,p)$ existe para casi todo punto $p \in S$ y vale

$$\mathfrak{q}_t(p,p) = \lim \int_S \left(\sum_{j=1}^{M(m)} \frac{\mathfrak{f}_j(p)\mathfrak{f}_j(r)}{\lambda_j+t}\right)\left(\sum_{l=1}^{M(m)} \frac{\mathfrak{f}_l(r)\mathfrak{f}_l(p)}{\lambda_l+t}\right) k(r)dr =$$

$$= \lim \sum_1^{M(m)} \frac{\left(\mathfrak{f}_n(p)\right)^2}{(\lambda_n+t)^2} = T(p).$$

Entonces también vale $\left\|\sum_{n=1}^{N} \frac{\mathfrak{f}_n(p)\mathfrak{f}_n(p)}{(\lambda_n+t)^2} - \mathfrak{q}_t(p,p)\right\|_{1,k} \to 0 \quad$ si $N \to \infty$.

c) Como $\mathfrak{Q}_t(.,.) \in L^2(S \times S)$ resulta que $\mathfrak{Q}_t(p,r)\mathfrak{Q}_t(r,q)h(q) \in L^1(S \times S \times S)$ si $h \in L^\infty$. Entonces vale a.e. p,

$$[(\mathfrak{G} \circ \mathfrak{G})(h)](p) = \int \mathfrak{Q}_t(p,r)k(r)dr \int \mathfrak{Q}_t(r,q)h(q)k(q)dq < \infty.$$

Para toda $\varphi \in L^\infty$ tenemos,

(4) $\quad \int [(\mathfrak{G} \circ \mathfrak{G})(h)]\,(p)\varphi(p)k(p)dp$

$$= \iiint \varphi(p)h(q)\left(\mathfrak{Q}_t(p,r)\mathfrak{Q}_t(r,q)\right)\ k(r)k(q)k(p)drdqdp$$

$$= \iint \varphi(p)\mathfrak{q}_t(p,q)h(q)\ k(q)k(p)dqdp$$

$$= \int \varphi(p)k(p)dp \int \mathfrak{q}_t(p,q)h(q)\ k(q)dq.$$

Como $\mathfrak{q}_t(p,q) \in L^2(S \times S, K)$, $\mathfrak{q}_t(p,\cdot) \in L^2$ a.e. p y resulta que si una sucesión de h's converge a f en L^2 entonces

$$\int \mathfrak{q}_t(p,q)h(q)\ k(q)dq \to \int \mathfrak{q}_t(p,q)f(q)\ k(q)dq \text{ a.e. } p \text{ y en } L^2.$$

Por ser $\mathfrak{G}$ un operador continuo de L^2 en L^2 de (4), pasando al límite, obtenemos

(5) $\quad \int [(\mathfrak{G} \circ \mathfrak{G})(f)]\,\varphi(p)\ k(p)dp = \int [\int \mathfrak{q}_t(p,q)f(q)\ k(q)dq]\,\varphi(p)\ k(p)dp.$

Como (5) vale para toda $\varphi \in L^\infty$ resulta $(\mathfrak{G} \circ \mathfrak{G})(f) = \int \mathfrak{q}_t(p,q)f(q)\ k(q)dq$,

QED.

A continuación supondremos $k \in C_+^\infty(S,\dot{S})$, $S = D$ región ñ-conexa regular. Por el Teorema 1 del §**4.21** [BPII] sabemos que $D \in \mathcal{N}$, (D es normal), que por definición significa que los operadores $\mathfrak{G}$ y **G** son idénticos: para toda $v \in L^2$,

(6) $\quad \mathfrak{G}v(p) = \int \mathfrak{Q}(p,q)v(q)k(q)dq = a.e. = \mathbf{G}v(p) = \int G(p,q)v(q)k(q)dq.$

Por esta razón $\mathfrak{Q} = G$ a.e. $D \times D$. Por tanto, $\{\mathfrak{f}_k\} \subset \c{S}(D)$ y este sistema de autofunciones variacionales puede reemplazarse por el sistema de autofunciones clásicas $\{\phi_k\}$. Además $\mathfrak{Q}$ y G tienen desarrollos idénticos en el sistema $\{\phi_k\} \subset \c{S}(D)$. Entonces,

(7) $\quad \mathfrak{q}_t(p,q) = \int_S \mathfrak{Q}_t(p,r)\mathfrak{Q}_t(r,q)\ k(r)\ d = \int_D G_k(p,r;-t)G_k(r,q;-t)\ k(r)dr.$

Usando la identidad de Parseval, (cf. (3) §**4.14** [BPII]), o simplemente a) del Teorema 1, obtenemos que la última integral es igual a

(8) $$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\phi_m(p)\phi_m(q)}{(\lambda_m+t)^2}.$$

La serie (8) de funciones continuas en $\overline{D} \times \overline{D}$ converge uniformemente allí, (cfr. (4) §**4.14** [BPII]). Utilizando el símbolo $\doteq$ para indicar que la convergencia de una serie es uniforme hemos probado el siguiente

TEOREMA 2. Sean $p, q \in D$ región ñ-conexa regular y $k \in C_+^{\infty}(S, \dot{S})$. Entonces, la función $\mathfrak{q}_t(p,q) \doteq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\phi_m(p)\phi_m(q)}{(\lambda_m+t)^2}$ es uniformemente continua en $D \times D$.

Volveremos sobre el núcleo $\mathfrak{q}_t$ en el §**6.3**.

6.1.1. El núcleo $\mathfrak{Q}_0$.

PROPOSICIÓN AUXILIAR. Sea S una región. Existe una familia de regiones finitamente conexas, de Jordan C^1, $\{D_m\}$, tales que[1]

(1) $$D_1 \subset \cdots \subset \overline{D}_m \subset D_{m+1} \subset \cdots \uparrow S.$$

TEOREMA 3. Sea S una región.

i) Si $k \in C_+^{\infty}(S)$ entonces $\mathfrak{Q}_0$ es casi doquier igual a la función de Green generalizada de S, $\mathscr{g}_S$, ([R]).

ii) Si además $k \in C_+^{\infty}(S, \dot{S})$ y $S, \dot{S}$ son regiones entonces $\dot{\mathfrak{Q}}_0 \geq \mathfrak{Q}_0 > 0$ a.e. $S \times S$.

DEMOSTRACIÓN. i) Del §**4.3** [BPII] obtenemos, para $m \geq m_0$, $p, q \in S \cap D_{m_0}$,

$\mathscr{g}_{D_m}(p,q) \uparrow \mathscr{g}_S(p,q)$, $\mathscr{g}_S$ la función generalizada de Green de S.

Como $\mathscr{g}_{D_m} = G_m$, para todo $p, q \in D_m$,

(2) $$0 \leq G_{(m)}(p,q) \uparrow \mathscr{g}_S(p,q), \qquad \mathscr{g}_S(p,\cdot) \in L^2(S).$$

---

[1] Esbozo de una demostración elemental de la Proposición Auxiliar. Sean $C_m, m = 1,2,\cdots$, cerrados conexos contenidos en S, unión de cuadrados cerrados de lado $2^{-T(m)}$, $T(m)$ entero positivo, obtenidos por refinamiento de un reticulado formado por paralelas a los ejes y tales que $C_m \uparrow S$.

Dado C_{m-1}, C_m se obtiene cubriendo a $A(m-1) = \{p \in S : \mathrm{dist}(p, \partial S) \geq 1/2^{m-1}\} \cup C_{m-1}$ con cuadrados de diagonal < $\mathrm{dist}(A(m-1), \partial S)$.

Podemos retocar C_m, primero refinando sus cuadrados aumentando $T(m)$ y agregando cuadrados de ese refinamiento de manera que C_m sea conexo y que no haya dos cuadrados en contacto solo por un vértice.

En esta situación si $D_m = \mathrm{int}\, C_m$ entonces D_m es una región finitamente conexa de Jordan. Finalmente y con un nuevo retoque a D_m en los vértices de su contorno podemos lograr que el nuevo abierto tenga contorno regular, por ejemplo C^1.

(Recordemos que $G_{(m)} = G_m$ si $p, q \in D_m$, $G_{(m)} = 0$ en $S \times S \setminus D_m \times D_m$).

Más aún, del Teorema 1 §**4.3** [BPII] puntos (5) y (7) concluímos que $0 < \mathcal{g}_S(\cdot,\cdot) \in L^2(S \times S)$.

Si φ es una función de prueba con soporte contenido en S tal que $D_{m_0} \supset \operatorname{supp} \varphi$, sigue de (2) y para todo $p \in S$, $m \geq m_0$,

(3) $\quad \tilde{u}_m(p) = \int_S G_{(m)}(p,q)\,\varphi(q)k(q)dq \to \int_S \mathcal{g}_S(p,q)\,\varphi(q)k(q)dq = u(p).$

$\tilde{u}_m(p)$ y $u(p)$ son funciones de cuadrado integrable y la convergencia en (3) también se realiza en media cuadrática:

(4) $$\|\tilde{u}_m - u\|_{2,k} \to 0.$$

Sabemos que

(5) $$u_m(p) = \int_{D_m} G_m(p,q)\,\varphi(q)k(q)dq,$$

es una función en $H_0(D_m) \cap C_0(D_m)$ pues $u_m = \mathbf{G}_m(\varphi) = \mathfrak{G}_m(\varphi)$, (cf. [BPII] T. 1 §**4.4** y Prop. 1 y T. 2 Apéndice Parte III).

Al extender u_m de D_m a S por cero obtendremos una función $\tilde{u}_m$ en $H_0(S)$ pues $\partial D_m \in C^1$.

Usaremos a continuación en $H_0(S)$ la norma $|\cdot|_{H_0}$ asociada al producto escalar $I(u,v) = \int_S \nabla u \times \nabla v\, dx$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $D_1 \supset \operatorname{supp} \varphi$. Definimos

$$w_1 := \tilde{u}_1,\ w_n := \tilde{u}_n - \tilde{u}_{n-1}, \text{ por lo que } \textstyle\sum_1^N w_j = \tilde{u}_N.$$

Vale, $w_n \perp \{\varphi \in C_0^\infty(S): \operatorname{supp} \varphi \subset D_{n-1}\}$ que podemos escribir como

$$w_n \in H_0(D_n) \ominus H_0(D_{n-1}).$$

En efecto, sea $\omega \in C_0^\infty(D_{n-1})$. Tenemos por [BPII] T. 1 Apéndice parte III ,

$$I(w_n,\omega) = \int_S \nabla(\tilde{u}_n - \tilde{u}_{n-1}) \times \nabla\,\omega\, dx = \int_{D_n} \nabla(\tilde{u}_n - \tilde{u}_{n-1}) \times \nabla\,\omega\, dx$$

$$= \int_{D_n} \nabla u_n \times \nabla\,\omega\, dx - \int_{D_{n-1}} \nabla u_{n-1} \times \nabla\,\omega\, dx = \int_{D_n} -\Delta u_n\,\omega dx - \int_{D_{n-1}} -\Delta u_{n-1}\,\omega dx$$

$$= \int_{D_{n-1}} (\varphi k - \varphi k)\omega\, dx = 0.$$

Entonces vale en $H_0(S)$: $\forall N\ \ \sum_1^N \left|w_j\right|_{H_0}^2 = |\tilde{u}_N|_{H_0}^2$. Luego,

$$|\tilde{u}_N|_{H_0}^2 = |u_N|_{H_0(D_N)}^2 = \int_{D_N} -\frac{1}{k}\Delta u_N\, u_N k dx = \int_{D_N} \varphi\ u_N k dx \leq \|\varphi\|_{2,k}\|u_N\|_{2,k} \leq$$

$$\leq \|\varphi\|_{2,k}\left\|\int_{D_N} G_N(p,q)\,\varphi(q)k(q)dq\right\|_{2,k} \leq \|\varphi\|_{2,k}\left\|\int_S \mathcal{g}_S(p,q)\,|\varphi(q)|k(q)dq\right\|_{2,k} \leq$$

$$\leq C(S,k)\big(\|\varphi\|_{2,k}\big)^2 = M^2.$$

Por tanto, $\forall N\ \sum_1^N \left|w_j\right|_{H_0}^2 \leq M^2 < \infty$. En consecuencia, $\sum_1^N w_j = \tilde{u}_N$ converge en $H_0(S)$ en la norma $|\cdot|_{H_0}$ a una función $v \in H_0(S)$.

Es decir, $N \to \infty \Rightarrow |||\tilde{u}_N - v||| \to 0$, pues $.|||\cdot||| \sim |\cdot|_{H_0}$.

En consecuencia, $\tilde{u}_N \to v$ en media cuadrática y por (4) $v = u$ en $L^2(S)$.

O sea, $\tilde{u}_m \to u$ en $H_0(S)$. En particular, $\tilde{u}_m \to u$ en $D'(S)$.

Pero $\frac{-1}{k}\Delta u_m = \varphi$ en $D'(D_m)$.

Luego, en $D'(S)$: $\frac{-1}{k}\Delta\tilde{u}_m = \varphi + T_m$, con $\mathrm{supp} T_m \subset S \setminus D_m$. Entonces $T_m \to 0$ en $D'(S)$ y vale (siempre en $D'(S)$): $\lim \frac{-1}{k}\Delta\tilde{u}_m = \frac{-1}{k}\Delta u = \varphi + \lim\ T_m = \varphi$.

En consecuencia, $u \in \boldsymbol{D}_\Delta$, $\frac{-1}{k}\Delta u = \varphi$.

Por tanto vale en S, (cf. T. 3, §**4.7,** con $t = 0$),

$$\mathfrak{G}_0(\varphi) = u.$$

Tenemos entonces para toda función de prueba φ,

(6) $$\int_S \mathscr{g}_S(p,q)\,\varphi(q)k(q)dq = \int_S \mathfrak{Q}_0(p,q)\,\varphi(q)k(q)dq.$$

Por ser los núcleos de cuadrado integrable y $k \in C^\infty(S) \cap L^\infty(S)$ sigue que

(7) $$\mathscr{g}_S = \mathfrak{Q}_0 \text{ a.e. } S \times S.$$

ii) En este caso existe $\dot{\mathfrak{Q}}_0$ y vale $0 < \mathscr{g}_S \leq \mathscr{g}_{\dot{S}}$ en todo punto de $S \times S$; por tanto

(8) $$0 < \mathfrak{Q}_0 \leq \dot{\mathfrak{Q}}_0 \quad \text{a.e. } S \times S,$$ QED.

6.1.2. El núcleo $\mathfrak{Q}_t$. Supongamos $k \in C_+^\infty(S, \dot{S})$, $S, \dot{S}$ abiertos acotados.

Recordemos que para $t \geq 0$, $\mathfrak{Q}_t(p,q) = \sum_{m=1}^\infty \frac{\mathfrak{f}_m(p)\mathfrak{f}_m(q)}{\lambda_m + t} \quad (L^2(S \times S, K))$.

Luego, si $t > 0$,

$$\mathfrak{Q}_t(p,q) = \mathfrak{Q}_0(p,q) - t\sum_{m=1}^\infty \frac{\mathfrak{f}_m(p)\mathfrak{f}_m(q)}{\lambda_m(\lambda_m+t)} = \mathfrak{Q}_0(p,q) + \mathfrak{F}_t(p,q).$$

y tenemos,

(1) $$\left|\frac{\mathfrak{F}_t}{t}(p,q)\right| \leq \sum_{m=1}^\infty \left|\frac{\mathfrak{f}_m(p)\mathfrak{f}_m(q)}{\lambda_m(\lambda_m+t)}\right| \leq \sum_{m=1}^\infty \left|\frac{\mathfrak{f}_m(p).\mathfrak{f}_m(q)}{\lambda_m.\lambda_m}\right|$$

$$\leq \sqrt{\sum_{m=1}^\infty \left|\frac{\mathfrak{f}_m(p)}{\lambda_m}\right|^2}\sqrt{\sum_{m=1}^\infty \left|\frac{\mathfrak{f}_m(q)}{\lambda_m}\right|^2} = \|\mathfrak{Q}_0(p,\cdot)\|_{2,k}\|\mathfrak{Q}_0(\cdot,q)\|_{2,k} < \infty \quad \text{a.e. } S \times S.$$

Por tanto la primera serie en (1) tiende a cero monótonamente a.e. $S \times S$ si $t \uparrow \infty$ y $\frac{\mathfrak{F}_t}{t}(p,q) = o(1)$. Vale también la siguiente estimación independiente de t,

$$\sqrt{\iint_{S\times S}\left|\frac{\mathfrak{F}_t}{t}(p,q)\right|^2 K dp dq} \leq \sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_m^2} < \infty.$$

Supongamos ahora $k \in C_+^\infty(S,\dot{S})$ y $S,\dot{S}$ regiones. Los desarrollos precedentes se escriben ahora así:

(2) $\left|\frac{\mathfrak{F}_t}{t}(p,q)\right| \leq \sqrt{\sum_{m=1}^\infty c_m^2(g_S(p,\cdot))}\sqrt{\sum_{m=1}^\infty c_m^2(g_S(\cdot,q))} =$

$$= \sqrt{\int_S g_S^2(p,q)\,k(q)dq \int_S g_S^2(p,q)\,k(p)dp} = \text{por la simetría de } \boldsymbol{g} =$$

$$= \int_S g_S^2(p,q)\,k(q)dq =$$

$$= O\left(\int_S \left(1+\left|\mathrm{Log}|p-q|\right|\right)^2 dq\right) = O\left(\int_{|x|\leq \mathrm{diam}\,S}\left(1+\left|\mathrm{Log}|x|\right|\right)^2 dx\right) = O(1).$$

PROPOSICIÓN 1. Si $k \in C_+^\infty(S,\dot{S})$, $p,q \in S$, $0 < t \uparrow \infty$, $S,\dot{S}$ regiones, entonces con M una cte. vale, $\quad M > \left|\frac{\mathfrak{F}_t(p,q)}{t}\right| \to 0 \quad$ a.e. $S \times S$.

Tenemos, a.e. $(p,q) \in S \times S$,

$$\mathfrak{Q}_t(p,q) - \mathfrak{F}_t(p,q) = \mathfrak{Q}_0(p,q) \leq \dot{\mathfrak{Q}}_0(p,q) = \dot{\mathfrak{Q}}_t(p,q) - \dot{\mathfrak{F}}_t(p,q).$$

6.2. Funcionales bilineales asociadas al operador $\boldsymbol{b_x(D_x)} = \left(-\frac{\Delta_x}{\boldsymbol{tk(x)}} + \mathbf{1}\right)^{\mathbf{2}}$ donde $\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{C_+^\infty(S,\dot{S})}$. Teorema de L. Gårding de la funcional bilineal.

Sea $C\{f,g\}$ una funcional bilineal real definida en $C_0^\infty(S) \times C_0^\infty(S)$. $C\{\cdot,\cdot\}$ se dirá *asociada* al operador $b_x(D_x)$, $t = \chi^2 \geq \chi_0 \geq 1$[2], si satisface:

(1) $\qquad C\{b\phi,\vartheta\} = C\{\phi,b^*\vartheta\} = (\phi,\vartheta)$

para toda $\vartheta,\phi \in C_0^\infty(S)$ y viene definida por un núcleo real en $L^2(S\times S)$, $\sigma(\chi;\cdot,\cdot)$, tal que

(2) $\qquad C\{\phi,\vartheta\} = \iint \vartheta(y)\sigma(\chi;y,x)\phi(x)dxdy.$

Esta funcional verifica,

(3) $\qquad |C\{\phi,\vartheta\}| \leq M\|\phi\|_2\|\vartheta\|_2,$

en este caso con $M = \|\sigma\|_2$.

Observemos que para $\phi,\vartheta \in C_0^\infty(S)$, $f,g \in L^2(S)$, vale

(4) $\quad \left|\iint \sigma(y,x)(\phi(x)\psi(y) - f(x)g(y))dxdy\right| \leq M(\|\phi\|\|\psi-g\| + \|g\|\|f-\phi\|).$

Por tanto (2) puede extenderse a funciones en $L^2(S)$. Llamaremos también C a tal extensión. Por otra parte si $q(\chi;y,x) \in L^2(S\times S)$ es un núcleo que verifica para toda $f,g \in L^2(S)$: $C\{f,g\} = \iint g(y)q(\chi;y,x)f(x)dxdy$ entonces $q = \sigma$ a.e. $S \times S$.

Por tanto el núcleo σ es único en L^2.

---

[2] Bastará en nuestro caso que $\chi^\varepsilon \geq 2\boldsymbol{Q}$, (def. de $\boldsymbol{Q}$ en §5.6).

Una tal C puede determinarse de la siguiente manera. Utilizaremos la siguiente

NOTACIÓN. Sean $\varphi, \vartheta \in C_0^\infty,\ f, g \in L^2, \quad \Gamma^*\{f, g\} := \iint f(x)\Gamma^*(y, x)g(y)dydx$.

Como en $C\{f, g\} = \iint f(x)\sigma(y, x)g(y)dydx$ las llaves indican el orden de las funciones f, g en relación a las variables y, x de integración en el núcleo. Sin embargo pondríamos $\Gamma^*(f, g) = \iint f(x)\Gamma^*(x, y)g(y)dydx$**.**

De acuerdo con esta convención escribiremos: $\Gamma^*\{\varphi\}(x) = \int \Gamma^*(v, x)\varphi(v)dv$, $\Gamma^*(\varphi)(z) = \int \Gamma^*(z, v)\varphi(v)dv$, por lo que $\Gamma^*\{f, g\} = (\Gamma^*(f), g) = (f, \Gamma^*\{g\})$.

Y también escribiríamos $\sigma\{f, g\}$ en lugar de $C\{f, g\}$.

Además como $b_x(D_x)\Gamma(z, x) = \delta_z(x)$ tendremos

(5) $\quad \langle b_x\Gamma, \varphi\rangle = \varphi(z) = \langle \Gamma, b_x^*\varphi\rangle = \int \Gamma(\chi; z, x)(b_x^*\,\varphi)(x)dx,$

y si $z \,\overline{\in}\,$ sop $\varphi \qquad \langle b_x\Gamma, \varphi\rangle = \int_S\ [b_x\Gamma](\chi; z, x)\varphi(x)dx = \langle [b_x\Gamma], \varphi\rangle = 0.$

La funcional $C_{\mathfrak{G}}$ asociada al operador b_x. Sabemos que, (cf. §**4.6-4.9** [BPII]),

(6) $\qquad t^2b(D_x) = \left(-\frac{1}{k(x)}\Delta_x + t\right)^2, \ \ (t^2b(D_x))\mathfrak{G}_{t,S}^{(2)}f = f$ si $f \in L^2(S)$,

(7) $\qquad \mathfrak{G}_{t,S}^{(2)}(t^2b(D_x)\phi) = \phi$ si $\phi \in C_0^\infty(S)$, $\ S$ abierto acotado.

Para $\varphi, \vartheta \in C_0^\infty(S)$ *definimos* la funcional bilineal $C_{\mathfrak{G}}$ como:

(8) $\qquad C_{\mathfrak{G}}\{\varphi, \vartheta\} := \left(t^2\mathfrak{G}_{t,S}^{(2)}\varphi, \vartheta\right).$

Esta funcional bilineal satisface (1)-(3). En efecto,

(9) $\quad C_{\mathfrak{G}}\{b\varphi, \vartheta\} = (\varphi, \vartheta) = \left(bt^2\mathfrak{G}_{t,S}^{(2)}\varphi, \vartheta\right) = \left(t^2\mathfrak{G}_{t,S}^{(2)}\varphi, b^*\vartheta\right) = C_{\mathfrak{G}}\{\varphi, b^*\vartheta\}.$

Y si $f, g \in L^2(S)$, (cf. Teor. 1 §**4.6** [BPII] y Teor. 3, iii) §**4.9** [BPII]),

(10) $\ C_{\mathfrak{G}}\{f, g\} := \left(t^2\mathfrak{G}_{t,S}^{(2)}f, g\right) = t^2(\mathfrak{G}_{t,S}f, \mathfrak{G}_{t,S}\left(\frac{g}{k}\right))_k \leq$

$$\leq t^2\left\|\mathfrak{G}_{t,S}f\right\|_{2,k}\left\|\mathfrak{G}_{t,S}\left(\frac{g}{k}\right)\right\|_{2,k} \leq \frac{t^2}{\inf k}\left\|\mathfrak{G}_{t,S}\right\|^2\|f\|_{2,k}\|g\|_{2,k} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\inf k}\frac{t^2}{(\lambda_1+t)^2}\|f\|_{2,k}\|g\|_{2,k} \leq \frac{(\sup k)^2}{\inf k}\frac{t^2}{(\lambda_1+t)^2}\|f\|_2\|g\|_2.$$

Luego, $\|C_{\mathfrak{G}}\| \leq (\sup k)^2 \sup(1/k)t^2(\lambda_1 + t)^{-2}$. Por T. 1 §**6.1**,

(11) $\quad \left(t^2\mathfrak{G}_{t,S}^{(2)}f, g\right) = \iint [t^2\mathfrak{q}_t(y, x)k(x)]f(x)g(y)dxdy, \qquad \mathfrak{q}_t \in L^2(S \times S)$[3].

O sea, $C_{\mathfrak{G}}\{f, g\} = \iint f(x)[t^2\mathfrak{q}_t(y, x)k(x)]g(y)dxdy$ satisface (1)-(3).

---

[3] Demostraremos más adelante que $\mathfrak{q}_t$ es igual a.e. a una función continua y acotada en $S \times S$.

6.3. La funcional diferencia C' y el núcleo ρ. Suponemos $k \in C_+^\infty(S, \dot{S})$.

DEFINICIÓN 1. $C'(f,g) := C_{\mathfrak{G}}\{f,g\} - \dot{\Gamma}^*\{f,g\}$.

Aquí $f, g \in L^2(S)$ y $C_{\mathfrak{G}}$ es la funcional bilineal definida anteriormente sobre $L^2(S)$. Sin embargo $\dot{\Gamma}, \dot{\Gamma}^*$ serán las soluciones fundamentales del operador $b(D_x)$ y de su adjunto sobre $\dot{S}$, que son continuas y acotadas sobre $\dot{S}$.

Extendiendo por 0 las funciones de $C_0^\infty(S)$ y $L^2(S)$ escribimos $C_0^\infty(S) \subset C_0^\infty(\dot{S})$ y $L^2(S) \subset L^2(\dot{S})$. Supondremos $\mathfrak{q}_t(x,y)$ extendida por cero de $S \times S$ a $\dot{S} \times \dot{S}$. Entonces $C'(f,g)$ sobre $L^2(\dot{S}) \times L^2(\dot{S})$ toma la forma

$$C'(f,g) = \int_{S\times S} g(x)[t^2 \mathfrak{q}_t(y,x)k(x)]f(y)dxdy - \int_{\dot{S}\times\dot{S}} g(x)\dot{\Gamma}^*(x,y)f(y)dxdy.$$

DEFINICIÓN 2. $\rho(y,x) := \dot{\Gamma}^*(x,y) - \dot{\Gamma}(y,x),\ x, y \in \dot{S}$.

Veamos que valen para $\varphi, \psi \in C_0^\infty(S)$, $f, g \in L^2(\dot{S})$,

$$(1)\quad \begin{cases} |C'(f,g)| \leq K'\|f\|_2\|g\|_2 \\ C'(b\varphi,\psi) = 0 \\ C'(\varphi, b^*\psi) = -\rho(\varphi, b^*\psi) \end{cases}$$

Notemos que en $\dot{S}$, $b_x(D_x) = \left(-\frac{\Delta_x}{tk(x)} + 1\right)^2$ y valen,

$$(2)\qquad b\left(\dot{\Gamma}\{\varphi\}\right) = \varphi, \qquad b^*\left(\dot{\Gamma}^*\{\varphi\}\right) = \varphi \qquad \left(D'(\dot{S})\right).$$

Verifiquemos la primera igualdad en (2). Sea $\omega \in C_0^\infty(\dot{S})$,

$$\langle b(\dot{\Gamma}\{\varphi\}), \omega\rangle_{\dot{S}} = \langle \dot{\Gamma}\{\varphi\}, b^*\omega\rangle = \iint \left(b^*(D_z)\omega(z)\right)\dot{\Gamma}(t,z)\varphi(t)dtdz =$$

$= \int \varphi(t)dt \int \dot{\Gamma}(t,z)\left(b^*(D_z)\omega(z)\right)dz =$ (por ser $\dot{\Gamma}$ solución fundamental en $\dot{S}$)

$$= \int \varphi(t)\omega(t)\,dt = \langle \varphi, \omega\rangle_{\dot{S}}\ .$$

Demostremos (1). La desigualdad es inmediata.

La primera igualdad en (1) sigue de la Notación y (9) del §**6.2**:

$$(3)\qquad C'(b\varphi,\psi) = \langle \varphi,\psi\rangle_S - \int_S \dot{\Gamma}^*\{\psi\}b\varphi\,dx = \langle \varphi,\psi\rangle_S - \langle \dot{\Gamma}^*\{\psi\}, b\varphi\rangle_{\dot{S}} =$$

$$= \langle \varphi,\psi\rangle_S - \langle \psi,\varphi\rangle_{\dot{S}} = 0$$

Por otra parte, ρ es una función continua acotada en $\dot{S} \times \dot{S}$ y se tiene, ((9)§**6.2** y Def. 1),

$$(4)\quad C'(\varphi, b^*\psi) = \langle \varphi,\psi\rangle - \int_{\dot{S}\times\dot{S}} \dot{\Gamma}(y,x)\varphi(y)(b^*\psi)(x)dxdy +$$

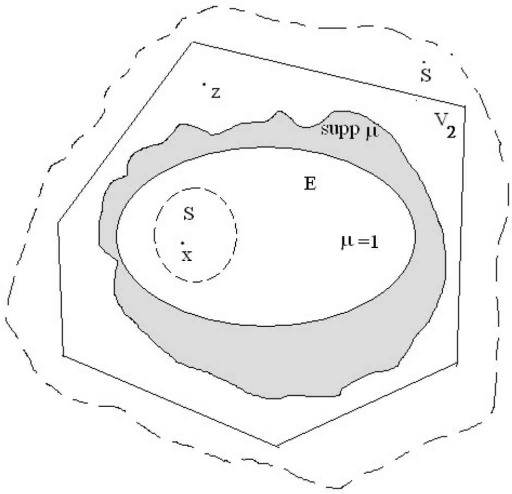
$$+ \int_{\dot{S}\times\dot{S}} (\dot{\Gamma}(y,x) - \dot{\Gamma}^*(x,y))\varphi(y)(b^*\psi)(x)dxdy =$$

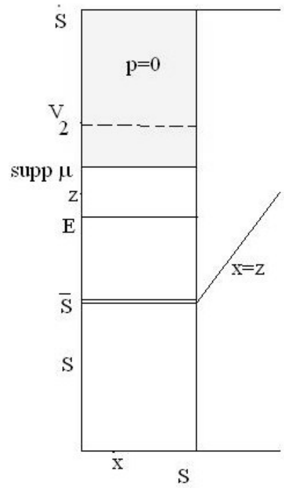
$$= \langle \varphi,\psi\rangle_S - \langle b(\dot{\Gamma}\{\varphi\}),\psi\rangle_{\dot{S}} - \int_{\dot{S}\times\dot{S}} \rho(y,x)\varphi(y)(b^*\psi)(x)dxdy =$$

$$= \langle \varphi,\psi\rangle_S - \langle \varphi,\psi\rangle_{\dot{S}} - \int_{\dot{S}\times\dot{S}} \rho(y,x)\varphi(y)(b^*\psi)(x)dxdy = -\rho(\varphi, b^*\psi).$$

6.3.1. Las funciones $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{p}^*$. Sean $S \subset\subset V_2 \subset\subset \dot{S}$, $\varphi, \psi \in C_0^\infty(S)$ y también

(5) $\mu \in C_0^\infty(V_2)$, $\mu = 1$ en un entorno E de $\bar{S}$, $E \subset\subset V_2$.





Definimos, para $x, y, z \in \dot{S}$,

$$\begin{cases} p(x,z) \coloneqq b(D_z)\left((1-\mu(z))\dot{\Gamma}(x,z)\right) \\ p^*(y,z) \coloneqq b^*(D_z)\left((1-\mu(z))\dot{\Gamma}^*(y,z)\right) \end{cases}$$

Luego, $p(x,z) = 0$ para z en el entorno E de $\bar{S}$.

Como $b(D_z)\dot{\Gamma}(x,z) = 0$ en $x \in S,\ z \in \dot{S} \setminus \operatorname{supp}\mu$, vale allí

$$p(x,z) = b(D_z)\left(-\mu(z)\dot{\Gamma}(x,z)\right) = 0.$$

Además, en $x \in S, z \in \dot{S} \setminus E$ valen $|x-z| \geq \varepsilon > 0$ y

(6) $p(x,z) = -b(D_z)\left(\mu(z)\dot{\Gamma}(x,z)\right) = \sum_{|\beta|>0} A_{\beta\gamma}(z)\left(D_z^\beta \mu(z)\right)\left(D_z^\gamma \dot{\Gamma}(x,z)\right)$,

con $|\beta| \leq 4$, $|\gamma| \leq 3$ y $A_{\beta\gamma}(z) \in C^\infty(\dot{S})$, (cf. T. 2§**5.5**).

Por tanto, $p(x,\cdot) \in C^\infty(\dot{S} \setminus \overline{\left(S_{\frac{\varepsilon}{2}}\right)})$. Se obtiene entonces la

PROPOSICIÓN 1. $p(x,z)$ define una función acotada y continua en $S \times \dot{S}$, nula en $(x,z) \in S \times E$ y en $(x,z) \in S \times \{\dot{S} \setminus \operatorname{supp}\mu\}$ y tal que $p(x,\cdot) \in C^\infty(\dot{S})$. Idem $p^*(x,z)$**.**

Dado que $\varphi \in C_0^\infty(S)$ obtenemos, (cf. (2)), con $z \in \dot{S}$,

(7) $\left(\varphi - b(D_z)\left(\mu\dot{\Gamma}\{\varphi\}\right)\right)(z) = b(D_z)\left(\dot{\Gamma}\{\varphi\}\right)(z) - b(D_z)\left(\mu\dot{\Gamma}\{\varphi\}\right)(z) =$

$= b(D_z)\left((1-\mu)\dot{\Gamma}\{\varphi\}\right) = b(D_z)\left\{(1-\mu(z))\int_S \dot{\Gamma}(x,z)\varphi(x)dx\right\} =$

$= b(D_z)\int_S (1-\mu(z))\dot{\Gamma}(x,z)\varphi(x)dx =$

$=$ ($\operatorname{dist}(z,x) \geq \varepsilon > 0$ ya que el integrando se anula en $z \in E$) $=$

$= \int_S b(D_z)\left((1-\mu(z))\dot{\Gamma}(x,z)\right)\varphi(x)dx = \int_{\dot{S}} p(x,z)\,\varphi(x)dx = p\{\varphi\}(z).$

Por la Proposición 1 tenemos

(7') $$p\{\varphi\}(z) \in C_0^\infty(\dot{S}).$$

O sea, si $z \in \dot{S}$, para $\varphi \in C_0^\infty(S)$ y μ como en (5), de (7) obtenemos,

$$b(D_z)\big(\mu\dot{\Gamma}\{\varphi\}\big)(z) = \varphi(z) - \int_S \varphi(t)p(t,z)dt = \varphi(z) - p\{\varphi\}(z).$$

Luego,

(8) $$b(D_z)\big(\mu\dot{\Gamma}\{\varphi\}\big)(z) \in C_0^\infty(\dot{S}).$$

Por la Proposición 1, $p^*(x,z)$ tiene las propiedades utilizadas de $p(x,z)$. Luego, para $z \in \dot{S}$, vale

(9) $$b^*(D_z)\big(\mu\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\big)(z) = \psi - \int_{V_1} \psi(s)p^*(s,z)ds = \psi - p^*\{\psi\}(z) \in C_0^\infty(\dot{S}).$$

PROPOSICIÓN 2. $\big(\mu\dot{\Gamma}\{\varphi\}\big)(z) \in C_0^\infty(\dot{S})$, $\big(\mu\dot{\Gamma}^*\{\varphi\}\big)(z) \in C_0^\infty(\dot{S})$**.**

DEMOSTRACIÓN. Los operadores diferenciales b y b^* son elípticos y por tanto hipoelípticos, (véase §**5.6**). El Teorema Fundamental para estos operadores dice que si $T \in D'(\dot{S})$ y en el sentido de las distribuciones $b(T) = f, f \in C^\infty(\dot{S})$, entonces $T \in C^\infty(\dot{S})$ y es solución en el sentido ordinario, ([Sc]), QED.

De la Proposición 2, por ser $\mu = 1$ sobre E, sigue que $\dot{\Gamma}\{\varphi\} \in C^\infty(E)$. Dado que supp $\varphi \subset S$, para $z \in \dot{S}$, $\dot{\Gamma}\{\varphi\}(z) = \int_S \dot{\Gamma}(v,z)\varphi(v)dv$. Luego, por la Proposición 1 y el Teorema 2 del §**5.5** resulta la siguiente

PROPOSICIÓN 3. $\dot{\Gamma}\{\varphi\} \in (C^\infty \cap L^\infty)(\dot{S})$. Idem $\Gamma^*\{\psi\}$**.**

6.3.2. Por otra parte, por (7),

(10) $$C'(p\{\varphi\}, p^*\{\psi\}) = C'\Big(\varphi - b_z\big(\mu\dot{\Gamma}\{\varphi\}\big), \psi - b_z{}^*\big(\mu\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\big)\Big) =$$
$$= C'(\varphi,\psi) + C'(\varphi, b_z{}^*((1-\mu)\dot{\Gamma}^*\{\psi\})) + C'\big(b_z\big((1-\mu)\dot{\Gamma}\{\varphi\}\big),\psi\big) -$$
$$-2C'(\varphi,\psi) + C'\Big(b_z\big(\mu\dot{\Gamma}\{\varphi\}\big), b_z{}^*\big(\mu\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\big)\Big).$$

Como el último sumando de (10) es nulo, (cf. (1)), obtenemos,

(10') $$C'(p\{\varphi\}, p^*\{\psi\}) =$$
$$= -C'(\varphi,\psi) + \big\{C'\big(b_z\big((1-\mu)\dot{\Gamma}\{\varphi\}\big),\psi\big) + C'\big(\varphi, b_z{}^*\big((1-\mu)\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\big)\big)\big\}.$$

Los sumandos entre llaves no se pueden tratar como antes pues las funciones involucradas no tienen soporte compacto, pero vale el

LEMA 1. $C'\Big(b_z\Big((1-\mu)\dot{\Gamma}\{\varphi\}\Big),\psi\Big) + C'(\varphi, b_z{}^*((1-\mu)\dot{\Gamma}^*\{\psi\})) =$

$$= -\rho(\varphi,\psi) + \rho\Big(\varphi, b_z{}^*\big(\mu\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\big)\Big).$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto, por un lado tenemos,

$C'\big(b_z\big((1-\mu)\dot{\Gamma}\{\varphi\}\big),\psi\big) = C_{\mathfrak{G}}\big\{b_z\big((1-\mu)\dot{\Gamma}\{\varphi\}\big),\psi\big\} - \dot{\Gamma}^*\big\{b_z\big((1-\mu)\dot{\Gamma}\{\varphi\}\big),\psi\big\} =$

$A - B,$

$A = C_{\mathfrak{G}}\big\{b_z\big((1-\mu)\dot{\Gamma}\{\varphi\}\big),\psi\big\}=0,$

$B = \dot{\Gamma}^*\big\{b_z\dot{\Gamma}\{\varphi\},\psi\big\} - \dot{\Gamma}^*\big\{b_z\big(\mu\dot{\Gamma}\{\varphi\}\big),\psi\big\} =$

$\quad = \dot{\Gamma}^*\{\varphi,\psi\} - \int \psi(y)\,\dot{\Gamma}^*(y,z)\big[b_z\big(\mu\dot{\Gamma}\{\varphi\}\big)\big](z)dzdy =$

$\quad = \dot{\Gamma}^*\{\varphi,\psi\} - \int \dot{\Gamma}^*\{\psi\}(z)\big[b_z\big(\mu\dot{\Gamma}\{\varphi\}\big)\big](z)dz = \dot{\Gamma}^*\{\varphi,\psi\} - \langle \dot{\Gamma}^*\{\psi\}, b_z\big(\mu\dot{\Gamma}\{\varphi\}\big)\rangle =$

$\quad = \dot{\Gamma}^*\{\varphi,\psi\} - \langle \psi, \mu\dot{\Gamma}\{\varphi\}\rangle = \dot{\Gamma}^*\{\varphi,\psi\} - \big(\psi, \dot{\Gamma}\{\varphi\}\big) =$

$\quad = \int \varphi(x)\left(\dot{\Gamma}^*(y,x) - \dot{\Gamma}(x,y)\right)\psi(y)dxdy = \rho(\varphi,\psi),$

$C'\left(b_z\left((1-\mu)\dot{\Gamma}\{\varphi\}\right),\psi\right) = A - B = -\rho(\varphi,\psi).$

Por otra parte,

$C'(\varphi, {b_z}^*(\big(1-\mu)\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\big)) =$

$$= C_{\mathfrak{G}}\left\{\varphi, {b_z}^*\left((1-\mu)\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\right)\right\} - \dot{\Gamma}^*\left\{\varphi\,, {b_z}^*\left((1-\mu)\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\right)\right\} = D - E$$

$D = C_{\mathfrak{G}}\left\{\varphi, {b_z}^*\left((1-\mu)\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\right)\right\} = 0,$

$E = \dot{\Gamma}^*\left\{\varphi\,, b_z^*\left((1-\mu)\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\right)\right\} = \dot{\Gamma}^*\{\varphi\,, b_z^*\big(\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\big)\} - \dot{\Gamma}^*\{\varphi\,, b_z^*\big(\mu\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\big)\} =$

$\quad = \dot{\Gamma}^*\{\varphi,\psi\} - \int \varphi(z)\,\dot{\Gamma}^*(y,z)\big[b^*\big(\mu\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\big)\big](y)dzdy = \big(\varphi, \dot{\Gamma}^*\{\psi\}\big) - \int \cdots dzdy.$

Pero,

$\int \varphi(z)\,\dot{\Gamma}^*(y,z)\big[b^*\big(\mu\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\big)\big](y)dzdy =$

$\int \varphi(z)\,\big[\rho(z,y) + \dot{\Gamma}(z,y)\big]\big[b^*\big(\mu\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\big)\big](y)dzdy =$

$\quad = \rho\left(\varphi, b^*\big(\mu\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\big)\right) + \langle \dot{\Gamma}\{\varphi\}, b^*\big(\mu\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\big)\rangle = \rho\left(\varphi, b^*\big(\mu\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\big)\right) + \big(\varphi, \dot{\Gamma}^*\{\psi\}\big).$

Luego, $E = -\rho\left(\varphi, b^*\big(\mu\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\big)\right).$

Por tanto,

$C'(\varphi, {b_z}^*(\big(1-\mu)\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\big)) = D - E = \rho\left(\varphi, {b_z}^*\big(\mu\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\big)\right),$

y el Lema sigue inmediamente, QED.

Luego, por el Lema 1,

(11) $\quad C'(p\{\varphi\}, p^*\{\psi\}) = = -C'\{\varphi,\psi\} + \{\cdots\} =$

$$= -C'\{\varphi,\psi\} - \rho(\varphi,\psi) + \rho\left(\varphi, {b_z}^*\big(\mu\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\big)\right) =$$

$$= -C_{\mathfrak{G}}\{\varphi,\psi\} + \dot{\Gamma}^*\{\varphi,\psi\} - \rho(\varphi,\psi) + \rho\left(\varphi, {b_z}^*\big(\mu\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\big)\right).$$

6.3.3. El núcleo c.

DEFINICIÓN 3. $c(t,s) \coloneqq C'(p(t,z),p^*(s,z)), \quad t,s \in S, z \in \dot{S}$.

La funcional C' y las funciones p y p^* son continuas. De esto se deduce que la función $c(t,s)$ es acotada y continua en $(t,s) \in S \times S$.

Por (7') tenemos $p\{\varphi\},\ p^*\{\psi\} \in (C_0^\infty \cap L^\infty)(\dot{S})$. Vale,

(12) $\quad C'(p\{\varphi\},p^*\{\psi\}) = C'\left(\int_S \varphi(t)p(t,z)dt, \int_S \psi(s)p^*(s,z)ds\right) =$

$$= C'(\lim \textstyle\sum_{i,j} \varphi(t_{ij})p(t_{ij},z)\,\Delta_{ij}, \lim \sum_{k,l} \psi(s_{kl})p(s_{kl},z)\,\Delta_{kl}).$$

Por otra parte, $\sum_{i,j} \varphi(t_{ij})p(t_{ij},z)\Delta_{ij}$ converge en $L^\infty(S)$ y por tanto en $L^2(S)$ a $\int_S \varphi(t)p(t,z)\,dt$, por lo que

$$C'(p\{\varphi\},p^*\{\psi\}) = \lim\left(\textstyle\sum\sum C'(p(t_{ij},z),p^*(s_{kl},z))\,\varphi(t_{ij})\psi(s_{kl})\Delta_{ij}\Delta_{kl}\right) =$$

$$= \iint_{S\times S} C'(p(t,z),p^*(s,z))\,\varphi(t)\psi(s)dtds = \iint_{S\times S} c(t,s)\,\varphi(t)\psi(s)dtds.$$

Luego,

(13) $\quad C'(p\{\varphi\},p^*\{\psi\}) = \iint_{S\times S} c(t,s)\,\varphi(t)\psi(s)dtds = c(\varphi,\psi)$.

Tenemos hasta ahora que para $\varphi,\psi \in C_0^\infty(S)$ y μ como en (5) vale, (cf. (11) y (13)),

(14) $\quad C_{\mathfrak{S}}\{\varphi,\psi\} = -c(\varphi,\psi) + \dot{\Gamma}^*\{\varphi,\psi\} + \rho\left(\varphi, b_z{}^*\left(\mu\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\right)\right) - \rho(\varphi,\psi)$.

Luego, por Def. 1,

$$C'(\varphi,\psi) + \dot{\Gamma}^*\{\varphi,\psi\} = -c(\varphi,\psi) + \dot{\Gamma}^*\{\varphi,\psi\} - \rho\left(\varphi, b^*\left((1-\mu)\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\right)\right).$$

LEMA 2. Existe $c(\cdot,\cdot) \in (C \cap L^\infty)(S \times S)$ tal que

$$C'(\varphi,\psi) = -c(\varphi,\psi) - \rho\left(\varphi, b^*\left((1-\mu)\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\right)\right).$$

6.3.4. Los núcleos λ y σ. Vale el siguiente

LEMA 3. Existe un núcleo continuo y acotado, $\lambda(x,y)$, $(x,y) \in S \times S$, tal que

$$\rho(\varphi, b^*((1-\mu)\dot{\Gamma}^*\{\psi\})) = \lambda(\varphi,\psi).$$

DEMOSTRACIÓN. Por (9),

$$b^*\left(\mu\dot{\Gamma}^*\{\psi\}\right)(z) = \psi(z) - \int p^*(t,z)\psi(t)dt.$$

Por la Proposición 1, $p^*(t,z) \in (C \cap L^\infty)(S \times \dot{S})$,

$$p^*(t,z) = 0 \text{ sobre } (S \times E) \cup \left(S \times \left(\dot{S} \setminus \operatorname{supp}\mu\right)\right).$$

Definamos, para $x,y \in S$,

(15) $\lambda(x,y) := \int_{\dot{S}} \rho(x,z)\, p^*(y,z) dz = \int_{\mathrm{supp}\mu \setminus E} \rho(x,z)\, p^*(y,z) dz$.

La función λ es acotada y continua en $S \times S$ pues $\rho(y,x) = -\dot{\Gamma}(y,x) + \dot{\Gamma}^*(x,y)$. Entonces, si $(x,y,z) \in S \times S \times \dot{S}$

$$\rho(\varphi,\, p^*\{\psi\}) = \int_{S\times\dot{S}} \varphi(x)\rho(x,z)\, p^*\{\psi\}(z) dx\, dz =$$

$$= \int_{S\times\dot{S}} \varphi(x)\rho(x,z) \left(\int_S\ p^*(y,z)\psi(y)dy\right) dx\, dz$$

$$= \iint \varphi(x) \left[\int_{\dot{S}}\ \rho(x,z)p^*(y,z)dz\right] \psi(y)dxdy = \lambda(\varphi,\psi), \qquad \text{QED.}$$

Luego, del Lema 2 y la Def. 1 obtenemos,

(16) $C'(\varphi,\psi) = -c(\varphi,\psi) - \lambda(\varphi,\psi)$,

(17) $C_{\mathfrak{S}}\{\varphi,\psi\} = -c(\varphi,\psi) + \dot{\Gamma}^*\{\varphi,\psi\} - \lambda(\varphi,\psi)$.

DEFINICIÓN 4. $\sigma(y,x) := \dot{\Gamma}^*(y,x) - c(x,y) - \lambda(x,y)$**.**

Vale entonces i) del

TEOREMA 1. i) $\sigma(\chi; y,x) \in (C \cap L^\infty)(S \times S)$ y

$$C_{\mathfrak{S}}\{\phi,\psi\} = \sigma\{\phi,\psi\} = \iint \sigma(\chi; y,x)\phi(x)\psi(y)dxdy,$$

y a.e. $S \times S$ vale

ii) $\qquad \mathfrak{q}_t(y,x) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{f}_m(y)\mathfrak{f}_m(x)}{(\lambda_m+t)^2} = \frac{\sigma(y,x)}{t^2 k(x)}$,

donde $\frac{\sigma}{k} \in (C \cap L^\infty)(S \times S)$**.**

En efecto, $\int_{S\times S}(\sigma(y,x) - [t^2 \mathfrak{q}_t(y,x)k(x)])\, \phi(x)\psi(y)dxdy = 0\ \forall\phi,\psi$ implica que $\int_{S\times S}(\sigma(y,x) - [t^2 \mathfrak{q}_t(y,x)k(x)])\, I_A(x)I_B(y)dxdy = 0$, A, B compactos en S, QED.

NB. Por (iv) T. 2 §**4.7** y (2) §**6.3** tenemos

$$\forall\psi \in C_0^\infty,\ \ b_x \int t^2 \mathfrak{q}_t(y,x)k(x)\psi(y)dy = \psi = b_x \int \Gamma(y,x)\psi(y)dy.$$

Es razonable sospechar que $t^2 \mathfrak{q}_t(y,x)k(x)$ es, de alguna forma, igual a $\Gamma(y,x)$. El Teorema 1 reemplaza esta sospecha por las siguientes igualdades en $S \times S$,

$$t^2 \mathfrak{q}_t k = \dot{\Gamma}^* + \text{función acotada y continua} = \dot{\Gamma} + \text{función acotada y continua} =$$

$$= \Gamma + \text{función acotada y continua}.$$

6.3.5. La función $r_0(y,x) := \lambda(y,x) + c(y,x)$. Queremos ahora estimar el crecimiento de la función acotada y continua r_0 en función del parámetro χ (≥ 1).

Sea $0 < d < \mathrm{dist}(S, \dot{S} \setminus E),\ 1 > d$.

Recordemos las fórmulas de (15) Intr. Cap. 5,

$$D_z^\alpha \dot{B}(\chi; x,z) = \begin{cases} O(1)\chi^2(1+\chi|x-z|)^{-N} & \text{si } |\alpha|<2 \\ O(1)\chi^2(1+\chi|x-z|)^{-N}(\chi|x-z|)^{2-|\alpha|-\varepsilon} & \text{si } |\alpha|\geq 2 \end{cases},$$

(8) §**5.4** $\quad |\dot{u}(x,z)| \leq \frac{2\dot{Q}}{\chi^\varepsilon}\frac{1}{|x-z|^{1+\varepsilon}}\frac{1}{|1+\chi|x-z||^N},$

Teor. 1 §**5.5** $\quad D_z^\alpha \dot{V}(x,z) = \int_S [D_z^\alpha \dot{B}(y,z)]\dot{u}(x,y)dy \quad$ si $|\alpha| \leq 3$,

Podemos complementar la Prop. 2 §**5.5** procediendo como en la demostración de (4) §**5.4.** En efecto, si $|\alpha| \leq 3$, a fortiori vale

$$D_z^\alpha \dot{B}(\chi; x,z) = \chi^{2+\varepsilon}O(\chi^{-\varepsilon})|x-z|^{-(1+\varepsilon)}(1+\chi|x-z|)^{-N},$$

O sea, la misma estimación de β del §**5.4** multiplicada por $\chi^{2+\varepsilon}$. Como $\dot{u}$ tiene la misma estimación que β los cálculos para demostrar (4) §**5.4** suministran ahora las siguientes estimaciones si $|\alpha| \leq 3$,

(18) $\quad D_z^\alpha \dot{V}(x,z) = O\left(\frac{\chi^2}{\chi^\varepsilon}\right)\frac{1}{|x-z|^{1+\varepsilon}}\frac{1}{|1+\chi|x-z||^N}.$

Como $\dot{\Gamma} = \dot{B} + \dot{V}$, tomando $N \geq 5$, resulta si $|\alpha| \leq 3$, $(x,z) \in S \times \dot{S} \setminus E$,

(18') $\quad D_z^\alpha \dot{\Gamma}(x,z) = D_z^\alpha \dot{B}(x,z) + D_z^\alpha \dot{V}(x,z) =$

$$= O(\chi^2)\frac{1}{d^{1+\varepsilon}}\frac{1}{|1+\chi d|^N} + O\left(\frac{\chi^2}{\chi^\varepsilon}\right)\frac{1}{d^{1+\varepsilon}}\frac{1}{|1+\chi d|^N} = O(\chi^2)\frac{1}{|1+\chi d|^N} = O(\chi^{-N+2}).$$

De (6) §**6.3** $\quad p(x,z) = (\text{si } (x,z) \in S \times (\dot{S} \setminus \operatorname{supp} \mu)) = -b(D_z)\left(\mu(z)\dot{\Gamma}(x,z)\right) =$

$$= \sum_{|\beta|>0, |\gamma|<4} A_{\beta\gamma}(z)\left(D_z^\beta \mu(z)\right)\left(D_z^\gamma \dot{\Gamma}(x,z)\right).$$

Por tanto,

(19) $\quad p(x,z) = O(\chi^{-N+2}),\ p^*(x,z) = O(\chi^{-N+2}).$

Entonces, para $(x,y) \in S \times S$, por (18') y (15) §**6.3.4**,

(20) $\quad |\lambda(x,y)| = \int_{\operatorname{supp}\mu \setminus E} \left|\left(\dot{\Gamma}^*(z,x) - \dot{\Gamma}(x,z)\right)p^*(y,z)\right| dz =$

$$= \int_{\operatorname{supp}\mu \setminus E} O\left(\frac{1}{\chi^{N-2}}\right)dz = O\left(\frac{1}{\chi^{N-2}}\right).$$

Finalmente, de la Definición 3 §**6.3.3** y (19) resulta,

(21) $\quad |c(x,y)| = \left|C'(p(x,\cdot), p^*(y,\cdot))\right| \leq K\|p(x,\cdot)\|\,\|p^*(y,\cdot)\| = O(\chi^{-2(N-2)}).$

Hemos probado entonces el

LEMA 4. Si $(x,y) \in S \times S$ y $N \geq 5$ entonces

(20) $\quad r_0(y,x) = O\left(\chi^{-(N-2)}\right)$**.**

De la Def. 4 y la Prop. 2 §**5.5** obtenemos ahora,

$$\sigma(\chi; y, x) := \dot{B}^*(\chi; y, x) + \dot{V}^*(\chi; y, x) + O\left(\frac{1}{\chi^{N-2}}\right) =$$

$$= \dot{B}(\chi; y, x) + O\left(\frac{\chi^2}{\chi^\varepsilon}\right) + O\left(\frac{1}{\chi^3}\right) = \dot{B}(\chi; y, x) + O\left(\frac{\chi^2}{\chi^\varepsilon}\right)$$

para $(x, y) \in S \times S$. Recolectando resultados llegamos al

TEOREMA 2. En $S \times S$, $\sigma(\chi; y, x)$ es una función continua y acotada que verifica

$$\sigma(\chi; y, x) = \dot{B}(\chi; y, x) + O(\chi^{2-\varepsilon}).$$

NB. A un resultado semejante se hubiera llegado al intercambiar $\dot{\Gamma}$ con $\dot{\Gamma}^*$.

TEOREMA 3. Vale para $(y, x) \in S \times S$ y acotadamente que

$$\lim_{\chi\to\infty} \frac{\sigma(\chi;y,x)}{\chi^2} = \frac{k(x)}{4\pi} \text{ si } x = y, \qquad \lim_{\chi\to\infty} \frac{\sigma(\chi;y,x)}{\chi^2} = 0 \text{ si } x \neq y.$$

DEMOSTRACIÓN. Para $(1 \leq)\, \chi \uparrow \infty$ obtenemos del Teor. 2 precedente que vale $\forall (y, x) \in S \times S$,

$$\frac{\sigma(\chi;y,x)}{\chi^2} = \frac{\dot{B}(\chi;y,x)}{\chi^2} + O(\chi^{-\varepsilon}) = O(1).$$

Como $\lim_{\chi\to\infty} \frac{\sigma}{\chi^2} = \lim_{\chi\to\infty} \dot{B}/\chi^2$, el teorema sigue de (10) Intr. Cap. 5, QED.

6.3.6. Vale más aún,

TEOREMA 4. $0 \leq \sigma(\chi; x, x)/t = t\mathfrak{q}_t(x, x)k(x)$ a.e. S.

DEMOSTRACIÓN. Sea S' un abierto tal que $S' \subset\subset S$, $\operatorname{dist}(\overline{S'}, R^2 \setminus S) < \eta$ y $|S \setminus S'| < \eta$. Sea $0 \leq h(x)$ una función continua de soporte contenido en $\overline{S'}$ e $I_\varepsilon(y, x)$ la función definida en $S \times S$ tal que si $\varepsilon < \operatorname{dist}(\overline{S'}, R^2 \setminus S)$,

$$I_\varepsilon(y, x) = 1/(\pi\varepsilon^2) \text{ si } x \in S', y \in S, |y - x| < \varepsilon, = 0 \text{ en caso contrario.}$$

Vale entonces

(1) $\quad Q_\varepsilon := \iint I_\varepsilon(y, x)\, \mathfrak{q}_t(y, x)\, h(x)k(x)dydx = \iint I_\varepsilon(y, x)\, \frac{\sigma(\chi;y,x)}{\chi^4 k(x)} h(x)k(x)dydx.$

Y para $\varepsilon \to 0$, por la continuidad de σ,

(2) $\quad Q_\varepsilon = \int_S h(x)dx \int_S \frac{\sigma(\chi;y,x)}{\chi^4} I_\varepsilon(y, x)dy \to \int_S \frac{\sigma(\chi;x,x)}{\chi^4} h(x)dx.$

Sea $N > N_0(\delta)$ de manera que, (cf. §**6.1** y Teor. 1),

(3) $\quad \int_S \sum_{N+1}^{\infty} \left(\frac{\mathfrak{f}_n(x)}{\lambda_n + t}\right)^2 |h(x)|k(x)dx < \delta,$

(4) $\quad \left|Q_\varepsilon - \sum_{n=1}^{N} \iint I_\varepsilon(y, x) \frac{\mathfrak{f}_n(y)\mathfrak{f}_n(x)}{(\lambda_n+t)^2} h(x)k(x)dydx\right| < \delta.$

Esto puede lograrse pues $\sum_{N+1}^{\infty} (\lambda_n + t)^{-2} \to 0$ si $N \to \infty$.

Sea M entero positivo y $\mathfrak{f}_n^M(x) = \mathfrak{f}_n(x)$ si $|\mathfrak{f}_n(x)| \leq M$, $= 0$ en caso contrario. Entonces, si $M > M_0(\delta)$,

(5) $\left|\int_S \left(\sum_1^N \frac{(\mathfrak{f}_n^M(x))^2}{(\lambda_n+t)^2}\right) h(x)k(x)dx - \int_S \sum_1^N \frac{\mathfrak{f}_n(x)^2}{(\lambda_n+t)^2} h(x)k(x)dx\right| < \delta$

(6) $\left|Q_\varepsilon - \sum_{n=1}^N \iint I_\varepsilon(y,x) \frac{\mathfrak{f}_n^M(y)\mathfrak{f}_n^M(x)}{(\lambda_n+t)^2} h(x)k(x)dydx \ \right| < \delta.$

Aquí $\sum_1^N \left|\frac{\mathfrak{f}_n^M(y)\mathfrak{f}_n^M(x)}{(\lambda_n+t)^2}\right|$ es una función acotada.

Sea S'' un subconjunto de S' formado por todos los puntos que sean simultáneamente puntos de Lebesgue para todas las funciones $\mathfrak{f}_n^M(x), n \le N$. Entonces $|S''| = |S'|$.

Luego vale, si ε tiende a 0,

(7) $\int h(x)k(x)dx \int I_\varepsilon(y,x) \left(\sum_{n=1}^N \frac{\mathfrak{f}_n^M(y)\mathfrak{f}_n^M(x)}{(\lambda_n+t)^2}\right) dy \to \sum_1^N \int_{S''} \frac{(\mathfrak{f}_n^M(x))^2}{(\lambda_n+t)^2} h(x)k(x)dx.$

O sea, si $\varepsilon < \varepsilon_0(\delta)$ por (6) tenemos,

(8) $\left|Q_\varepsilon - \int_{S'} \left(\sum_1^N \left(\frac{\mathfrak{f}_n^M(x)}{\lambda_n+t}\right)^2\right) h(x)k(x)dx\right| < 2\delta.$

Por (5),

(9) $\left|Q_\varepsilon - \int_{S'} \sum_1^N \left(\frac{\mathfrak{f}_n(x)}{\lambda_n+t}\right)^2 h(x)k(x)dx\right| < 3\delta$

Si $\eta < \eta_0(\delta)$ vale

(10) $\left|Q_\varepsilon - \int_S \sum_1^N \left(\frac{\mathfrak{f}_n(x)}{\lambda_n+t}\right)^2 h(x)k(x)dx\right| < 4\delta,$

y por (3),

(11) $\left|Q_\varepsilon - \int_S \sum_1^\infty \left(\frac{\mathfrak{f}_n(x)}{\lambda_n+t}\right)^2 h(x)k(x)dx\right| < 5\delta.$

En consecuencia, para $\varepsilon \to 0$,

(12) $\iint I_\varepsilon(y,x)\, \mathfrak{q}_t(y,x)\, h(x)k(x)dydx \to \int_S \sum_1^\infty \left(\frac{\mathfrak{f}_n(x)}{\lambda_n+t}\right)^2 \ h(x)k(x)\, dx.$

De (1), (2) y (11) se deduce que para toda $h(x)$ función continua de soporte contenido en S vale

$$\int_S \ \frac{\sigma(\chi;x,x)}{\chi^4} \ h(x)dx = \int_S \ \left(\sum_1^\infty \left(\frac{\mathfrak{f}_n(x)}{\lambda_n+t}\right)^2 \ k(x)\right) h(x)dx.$$

En consecuencia, $\frac{\sigma(\chi;x,x)}{\chi^4} = \left(\sum_1^\infty \left(\frac{\mathfrak{f}_n(x)}{\lambda_n+t}\right)^2 \ \right) k(x)$ a.e. S, QED.

6.4. TEOREMAS DE LARS GÅRDING. Sean $k(x) \in C_+^\infty(S,\dot{S}), S$ un abierto acotado, $\{\lambda_m\}$ la familia de autovalores variacionales de $-k^{-1}(x)\Delta_x$ del problema de Dirichlet: $(-k^{-1}(x)\Delta_x + t)\mathfrak{f}_m = (\lambda_m + t)\mathfrak{f}_m$, $t = \chi^2$, $N(\lambda) = \#\{\lambda_m \le \lambda\}$. Vale

TEOREMA 1. $t\|\mathfrak{Q}_t\|_{2,K}^2 \sim A = \frac{1}{4\pi}\int_S kdp$, o equivalentemente,

$$\lim \sum_1^\infty t(\lambda_m + t)^{-2} = (4\pi)^{-1}\int_S k(p)dp, \quad t \to \infty.$$

DEMOSTRACIÓN. Por los Teoremas 4 §**6.3.6** y 3 del §**6.3.5** tenemos

$$0 \le \sigma(\chi; x, x) = \chi^4 \mathfrak{q}_t(x,x)k(x) \text{ a.e. } S. \quad \sigma(\chi; x, x)/\chi^2 \to k(x)/4\pi.$$

Entonces,

(1) $\int_S \frac{\sigma(\chi;p,p)}{t}dp = t\int_S \mathfrak{q}_t(p,p)k(p)dp = t\int_S \sum_{m=1}^\infty \frac{(\mathfrak{f}_m)^2(p)}{(\lambda_m+t)^2}k(p)dp = \sum_{m=1}^\infty \frac{t}{(\lambda_m+t)^2}.$

Utilizando el Teor. de la Convergencia Dominada de Lebesgue obtenemos, $\int_S \frac{\sigma(\chi;p,p)}{t}dp \to \frac{1}{4\pi}\int_S kdp$. De (1) sigue ahora y para $t \to \infty$,

(2) $\lim \sum_1^\infty t(\lambda_m + t)^{-2} = (4\pi)^{-1}\int_S k(p)dp.$

Por otra parte, (T. 2, §**4.9**),

$$\|\mathfrak{Q}_t\|_{2,K}^2 = \int_{S\times S}\left(\sum_1^\infty \frac{\mathfrak{f}_m(p)\mathfrak{f}_m(q)}{\lambda_m+t}\right)^2 k(p)k(q)dpdq = \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{(\lambda_m+t)^2}, \qquad \text{QED}$$

Con el Teorema 1 queda demostrado el siguiente teorema asintótico de L. Gårding para el problema de Dirichlet y la ecuación diferencial de Sturm-Liouville en la situación descripta al comienzo.

TEOREMA 2. Para los autovalores variacionales vale el Teorema de H. Weyl,

(3) $N(\lambda)/\lambda \sim \int_S \frac{k(p)dp}{4\pi} \sim \frac{n}{\lambda_n}.$

DEMOSTRACIÓN. Véase [BPII] §**4.10**. Allí se prueba que (2)⇒(3), QED.

Dado que $\{\mathfrak{f}_k\}$ es un sistema ortonormal completo puede definirse la norma Hilbert-Schmidt de $\mathfrak{G}_t$ como $\mathbf{N}(\mathfrak{G}_t) = \sqrt{\sum_1^\infty \|\mathfrak{G}_t\mathfrak{f}_j\|_{2,k}^2} = \sqrt{\sum \mu_j^2}$. Por otra parte del Teorema 1 tenemos, $t\|\mathfrak{Q}_t\|_{2,K}^2 \sim \int_S \frac{k(p)dp}{4\pi}$. Vale entonces el, (cf. Teor. 3 §**4.9**),

COROLARIO 1. $\mathbf{N}(\mathfrak{G}_t) = \|\mathfrak{Q}_t\|_{2,K} \sim \sqrt{\frac{\int kdp}{4\pi t}} \sim \frac{1}{t}\sqrt{N(t)}$.

APÉNDICE OPCIONAL CAP. 6.

En este Apéndice, relacionado con el Capítulo 4 pero sin relación alguna con los Capítulos 5 y 6, demostramos desigualdades y estimaciones que involucran a la función $H_k^w(p,q;\lambda)$ introducida en el §**4.15**. Aquí $D \in \boldsymbol{B} \cap \mathbb{S}$, D ñ-conexa y $k(p) \in Lip_+(D,\dot{S})$.

1. Comparación de las funciones $\boldsymbol{G_k(p,q;\lambda), \frac{1}{2\pi}K_0(\chi w|p-q|), H_k^w(p,q;\lambda)}$.

Llamaremos, $m = \inf k, M = \sup k$. Recordemos el principio general de máximo del §**4.16**.

PGM. Si $L^\infty(D) \ni c(x) \le 0,\ f \in L^1(D), u \in C(\overline{D}), \Delta u + cu = f \quad (D'(D))$ vale

a) Si $f(x) \ge 0$ y $\max_{\overline{D}} u(x) > 0$ entonces $\max_{\partial D} u(x) = \max_{\overline{D}} u(x)$**.**

a) es equivalente a:

b) si $f(x) \le 0$ y $\min_{\overline{D}} u(x) < 0$ entonces $\min_{\partial D} u(x) = \min_{\overline{D}} u(x)$.

Consecuencias son:

α) Si $f(x) \ge 0$ y $u \le 0$ en ∂D entonces $u \le 0$, o lo que es lo mismo,

β) Si $f(x) \le 0$ y $u \ge 0$ en ∂D entonces $u \ge 0$.

También,

γ) Si $f = 0$ y $u = 0$ en ∂D entonces $u = 0$**.**

Algunas acotaciones. Del §**4.15** tenemos $\left(\Delta_q + \lambda k(q)\right) G_k(p,q;\lambda) = 0$ en $D \setminus \{|p-q| \le \varepsilon\}$. Además $G_k(p,\cdot;\lambda)$ es continua en $\overline{D \setminus \{|p-q| \le \varepsilon\}}$ y es no negativa en el borde pues en ∂D vale 0. Por PGMb),

(1) $$G_k(p,q;\lambda) \ge 0, \qquad q \ne p.$$

Sea $w \in \left[\sqrt{m}, \sqrt{M}\right]$. Por (1),

(2) $$\frac{1}{2\pi}K_0(\chi w|p-q|) \ge H_k^w(p,q;\lambda).$$

De $H_k^w(p,q;\lambda) = \frac{1}{2\pi}K_0(\chi w|p-q|) - G_k(p,q;\lambda)$ resulta $w \uparrow\ \Rightarrow\ H_k^w \downarrow$. Luego,

(3) $$H_k^{\sqrt{m}} \ge\ H_k^w\ \ge H_k^{\sqrt{M}}.$$

Vale iii) del

TEOREMA 1. i) $H_k^{\sqrt{m}}(p,q;\lambda) \ge 0$,

$$\frac{1}{2\pi}K_0\left(\chi\sqrt{m}|p-q|\right) \ge G_k(p,q;\lambda) \ge 0, p \text{ fijo}, q \ne p,$$

ii) $|H_k^w(p,q;\lambda)| \le \frac{1}{2\pi}K_0(\chi\sqrt{m}|p-q|)$

iii) $H_k^{\sqrt{m}} \ge\ H_k^w\ \ge H_k^{\sqrt{M}}$ **.**

DEMOSTRACIÓN. Sea $U \equiv\ H_k^{\sqrt{m}}(p,q;\lambda) := \frac{1}{2\pi}K_0\left(\chi\sqrt{m}|p-q|\right) - G_k(p,q;\lambda)$,

p fijo, $q \neq p$. U es continua en q y positiva en un entorno del contorno de D.

Además vale, (ver Teor. 1 y (2) §**4.15**),

(4) $(\Delta + \lambda k(q))U =$

$$= (\Delta + \lambda k(q))\left[\frac{1}{2\pi}K_0\big(\chi\sqrt{m}|p-q|\big) - G_k(p,q;\lambda)\right] =$$

$$= (\Delta + \lambda k(q))\frac{1}{2\pi}K_0\big(\chi\sqrt{m}|p-q|\big) + \delta_p =$$

$$= (\Delta + \lambda m + \lambda(k(q)-m))\frac{1}{2\pi}K_0\big(\chi\sqrt{m}|p-q|\big) + \delta_p =$$

$$= \lambda(k(q)-m)\frac{1}{2\pi}K_0\big(\chi\sqrt{m}|p-q|\big) - \delta_p + \delta_p =$$

$$= \chi^2(m-k(q))\frac{1}{2\pi}K_0(\chi\sqrt{m}|p-q|).$$

Luego, $(\Delta + \lambda k(q))U = f \leq 0, f$ absolutamente integrable.

De PGMb) sigue $U \geq 0$ y sigue i).

ii) Por tanto, $H_k^w(p,q;\lambda) \geq \frac{1}{2\pi}K_0(\chi w|p-q|) - \frac{1}{2\pi}K_0(\chi\sqrt{m}|p-q|) \leq 0$, pues $w \geq \sqrt{m}$ por lo que

(5) $$H_k^w(p,q;\lambda) \geq -\frac{1}{2\pi}K_0(\chi\sqrt{m}|p-q|)\ .$$

De (2) y (5) obtenemos la siguiente acotación (que complementa la del T. 1 §**4.16**),

$$|H_k^w(p,q;\lambda)| \leq \frac{1}{2\pi}K_0(\chi\sqrt{m}|p-q|), \qquad \text{QED.}$$

Acotación de $\|H_k^w(\cdot,\cdot;-\chi^2\|_1$. Sean $\chi \gg 1$, $\partial D = \{\tilde{q}\}$, $B_r(p) = \{q: |p-q| < r\}$; c designará a una constante independiente de las variables en $|H_k^w(p,q;-\chi^2)|$, posiblemente dependiente de D, pero que puede variar de una fórmula a otra.

Por (ii) del Teorema 1 y para $r = 1/\log\chi$, si $q \in D \setminus B$ obtenemos,

(5) $$|H_k^w(p,q;-\chi^2)| \leq cK_0\big(\chi\sqrt{m}r\big) \leq ce^{-\frac{\chi\sqrt{m}r}{2}}K_0\left(\frac{\chi\sqrt{m}r}{2}\right) \leq cK_0\left(\frac{\frac{\chi}{\log\chi}\sqrt{m}}{2}\right)e^{-\frac{\chi\sqrt{m}}{2\log\chi}} \leq$$

$$\leq c.1\,.e^{-\frac{\chi\sqrt{m}}{2\log\chi}}.$$

Luego,

$$\iint_{D\times(D\setminus B)}|H_k^w(p,q;-\chi^2)|dpdq \leq |D|^2ce^{-\frac{\chi\sqrt{m}}{2\log\chi}} \leq ce^{-\frac{\chi\sqrt{m}}{2\log\chi}},$$

$$\iint_{D\times B}|H_k^w(p,q;-\chi^2)|dpdq \leq |D|\sup_p\int_B|H_k^w(p,q;-\chi^2)|dq \leq$$

$$\leq c\int_B K_0\big(\chi\sqrt{m}|p-q|\big)dq \leq$$

$$\leq c\int_0^r K_0\big(\chi\sqrt{m}t\big)tdt \leq \frac{c}{\chi^2}\int_0^{\chi\sqrt{m}r}K_0(t)tdt \leq \frac{c}{\chi^2}\int_0^\infty K_0(t)tdt \leq \frac{c}{\chi^2}.$$

De estas dos desigualdades se obtiene el

Teorema 3. $\iint_{D\times D}|H_k^w(p,q;-\chi^2)|dpdq \le \frac{c}{\chi^2}$.

2. Comparación con funciones metaarmónicas.

Propiedades de la función real χ-armónica w en una región D.

1) Por definición $(\Delta-\chi^2)w=0$, $(\chi>0)$, por lo que $w(x)$ es analítica en D.

2) Si D admite función barrera en todo punto de su contorno J y f es una función continua sobre J entonces existe una única función continua en $\overline{D}$, χ-armónica en D e igual a f sobre J.

3) Si $w\ge 0$ es prolongable continuamente a $\overline{D}$ y se anula en ∂D entonces $w\equiv 0$.

4) Si $w(x)$ es prolongable continuamente a $\overline{D}$ entonces

$$\max_{\overline{D}} w \ge 0 \Rightarrow \max_{\overline{D}} w = \max_{\partial D} w.$$

También, $\min_{\overline{D}} w \le 0 \Rightarrow \min_{\overline{D}} w = \min_{\partial D} w$.

5) Si w es no negativa y se anula en un punto de D entonces $w\equiv 0$.

6) Si $w(x)$ es χ-armónica y acotada en un entorno circular reducido $B\setminus\{x\}$, $B\subset D$, de x, entonces es prolongable χ-armónicamente a x.

7) $|w(x)|\le \frac{1}{|B|}\left|\int_B w(y)dy\right|$, $\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}(x)\right| \le \frac{\langle\partial B\rangle}{|B|}\max_{\partial B}|w(y)|$.

8) Sea $w\in C^2(D)\cap C(\overline{D})$ tal que $(\Delta-\chi^2)w=f$ en D. Entonces, $\forall x\in\overline{D}$,

$|w(x)|\le \max\left\{\frac{\|f\|_{\infty|D}}{\chi^2}, \|w\|_{\infty|\partial D}\right\}$,

9) Valen teoremas semejantes a los de Harnack y Montel para sucesiones de funciones χ-armónicas.

Sea $h(p,\cdot;-(\chi w)^2)$, w constante positiva, la función (χw)-armónica tal que para $\tilde{q}\in\partial D$ verifica $h(p,\tilde{q};-\chi^2w^2)=\frac{1}{2\pi}K_0(\chi w|p-\tilde{q}| = H_k^w(p,\tilde{q};-\chi^2)$.

Luego, $0<h(p,\cdot;-\chi^2w^2)$. Esto prueba *i*) del siguiente Teorema 3.

Teorema 3. Sea $m\le T\le M$, $w>0$. Entonces valen, con $\lambda=-\chi^2<0$,

i) $\qquad 0<h(p,q;-\chi^2w^2)$,

ii) $\qquad H_k^{\sqrt{m}}(p,\cdot;\lambda)\ge h(p,\cdot;\lambda m)\ge h(p,\cdot;\lambda T)\ge h(p,\cdot;\lambda M)\ge H_k^{\sqrt{M}}(p,\cdot;\lambda)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $V(\cdot)=H_k^{\sqrt{T}}(p,\cdot;\lambda)-h(p,\cdot;\lambda T)$. Entonces, como en (4),

$\big(\Delta+\lambda k(q)\big)V(q)=\chi^2\big(T-k(q)\big)\frac{1}{2\pi}K_0\big(\chi\sqrt{T}|p-q|\big)-(\Delta+\lambda k(q))h(p,q;\lambda T)$.

Pero $\big(\Delta+\lambda k(q)\big)h(p,q;\lambda T)=\lambda(k(q)-T)h(p,q;\lambda T)$, de donde resulta,

(6) $\qquad \Big(\Delta_q+\lambda k(q)\Big)V(q)=\chi^2\big(T-k(q)\big)\Big(\frac{1}{2\pi}K_0\big(\chi\sqrt{T}|p-q|\big)-h(p,q;\lambda T)\Big)$.

$\left(\frac{1}{2\pi}K_0\big(\chi\sqrt{T}|p-q|\big)-h(p,q;\lambda T)\right)$ es $\chi\sqrt{T}$-armónica en $D\setminus\{p\}$, nula en ∂D, y positiva cerca de p. Luego, aplicando 4), resulta

(7) $$\left(\frac{1}{2\pi}K_0\big(\chi\sqrt{T}|p-q|\big)-h(p,\cdot;\lambda T)\right)\geq 0 \text{ en } D.$$

Para $T=M$ tenemos $\big(T-k(q)\big)=\big(M-k(q)\big)\geq 0$, luego por (6) y (7) tenemos en este caso $\big(\Delta_q+\lambda k(q)\big)V\geq 0$ en D, mientras que $V=0$ en ∂D. Aplicando α) PGM, resulta en este caso

(8) $$V=H_k^{\sqrt{M}}(p,\cdot;\lambda)-h(p,\cdot;\lambda M)\leq 0.$$

Análogamente, para $T=m$ tenemos $\big(T-k(q)\big)=\big(m-k(q)\big)\leq 0$, luego por (6) y (7) tenemos en este caso $\big(\Delta_q+\lambda k(q)\big)V\leq 0$ y por β) PGM

(9) $$V=H_k^{\sqrt{m}}(p,\cdot;\lambda)-h(p,\cdot;\lambda m)\geq 0.$$

Sea $0<T_1<T_2$ entonces $[h(p,\cdot;\lambda T_1)-h(p,\cdot;\lambda T_2)]>0$ en ∂D, mientras que

$$\left(\Delta-\big(\chi\sqrt{T_1}\big)^2\right)[h(p,\cdot;\lambda T_1)-h(p,\cdot;\lambda T_2)]=\left(\Delta-\big(\chi\sqrt{T_1}\big)^2\right)[-h(p,\cdot;\lambda T_2)]=$$

$$=\left(\big(\chi\sqrt{T_2}\big)^2-\big(\chi\sqrt{T_1}\big)^2\right)\{-h(p,\cdot;\lambda T_2)\}\leq 0 \text{ con } [\cdots]\geq 0 \text{ en } \partial D.$$

Luego, aplicando nuevamente β) PGM, resulta

(10) $$h(p,\cdot;\lambda T_1)-h(p,\cdot;\lambda T_2)\geq 0.$$

Finalmente, (8), (9) y (10) implican ii), QED.

SÍMBOLOS - Caps. 0-6

ÍNDICE ALFABÉTICO - Caps. 0-6

REFERENCIAS ver [BPII]

FE de ERRATAS [BPII]

Página	**Línea**	**Dice**	**Debe decir**
4	9	.	. Podemos suponer que la familia $\{B_\varepsilon\}$ es finita y cubre $\bar{B}$.
4	10	para	,$B_{2\varepsilon}(p_0) \subset B_i$, vale para
6	8	4	2
6	9	Weyl	Weyl, (cf. T. 5).
8	-6	*iii*)	*iii'*)
8	-7	*iii*)	*iii'*)
11	-8	[BP]:	[BP], $\left(f \in C(\bar{D}), \vartheta \in L^\infty(D)\right)$:
14	-3	$g(\sigma) - \frac{A}{\sigma - 1} + \text{fn.}$	$g(\sigma)$ + función de σ entera
16	-8	autovalores	valores propios
16	-7	autovalores	valores propios
17	2	$a(3)$	a la asociada $a(3)$
19	2	autovalores	valores propios
19	-4	$\in D_\Delta$	$\in H_0$
24	-9	$\Vert h \Vert = 1$	$\Vert h \Vert_k = 1$
24	-10	$(f, \mathfrak{f}_{\mathrm{n}})$	$(f, \mathfrak{f}_{\mathrm{n}})_k$
24	12	,	, y valen (*ii*) e (*iii*),
26	6	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2^{n-1}}$
26	6	$n + 1$	n
26	11	$\frac{1}{2^{n+1}}$	$\frac{1}{2^n}$
33	9	.	. Asumimos $k \in Lip_+(D)$, (cf. T.1 §4.4 y T.2 §4.7).
33	12	3	2
36	-11	§4.3	§4.4
36	12	$I_{D \times D}$	$\vert_{D \times D}$
37	-3	$I_{D \times D}$	$\vert_{D \times D}$
37	3	*iii*)	*iii*). $\tilde{k} = \dot{k} I_{\tilde{D}}$.
43	7	$\boldsymbol{\mathcal{L}}\left(H_k^{\sqrt{k(p)}}\right)$	$\left\vert \boldsymbol{\mathcal{L}}\left(H_k^{\sqrt{k(p)}}\right) \right\vert$
48	12	4.12	4.13
49	3	$C_1 \int_0^\infty \frac{\vert A(u) \vert}{u} du \int_a^\infty e^{-\frac{u\sqrt{t\, inf k}}{2}} \frac{dt}{t}$	$C_1 \int_0^M \frac{\vert A(u) \vert}{u} du \int_a^\infty e^{-\frac{u\sqrt{t\, inf k}}{2}} \frac{dt}{t} + O(1)$
49	6	$C_1 \int_0^\infty \frac{\vert A(u) \vert}{u} (2 \mathrm{Log}\, u + C_2) du < \infty$	$C_1 \int_0^M \frac{\vert A(u) \vert}{u} (2 \mathrm{Log}\, u + C_2) du + O(1) < \infty$

Página	Línea	Dice	Debe decir
49	-4	BC_0	BC_1
50	6	$H(p,p;-t)$	$H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,p;-t)$
51	-6	.	, (cf. §4.12).
53	-7	$d\xi =$	$d\xi \leq$
53	-2	$\overline{D}$	D
54	-6	la Proposición 1	el Teorema 1
55	6	,	, con $k \in Lip_+(D)$,
55	9		**NB.** Hemos usado aproximación por regiones obtenidas via refinamientos de cuadrículas solamente en las demostraciones de los T.1, §4.21 y T. 1, Apéndice Parte III.
57			$P(r)$ 4.15
57			a 4.18
57	-4Col 1	4.12	4.13
57	-5Col 2	4.11	4.12
58	-7Col 2	0.4.2, 4.9.3	0.4.2, 4.16

AGRADECIMIENTOS

A las Dras. María Inés Platzeck y María Julia Redondo por aceptar e incluir nuestros manuscritos en la serie Notas de Álgebra y Análisis del Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur y al Lic. Fernando Gómez por el cuidado puesto en la publicación de los mismos.