ISSN 0078-2009

NOTAS DE ÁLGEBRA Y ANÁLISIS

23

A. Benedek y R. Panzone

LA DISTRIBUCIÓN DE LOS AUTOVALORES DEL PROBLEMA DE DIRICHLET DEL OPERADOR DIFERENCIAL BIDIMENSIONAL DE STURM-LIOUVILLE, II

ALGUNAS SERIES DE DIRICHLET ASOCIADAS

2013

INMABB - CONICET

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHÍA BLANCA - ARGENTINA

In memoriam Stephen Vági.

The present work is in fact Chapter 4 of the memoir [BP] (2011), MR 2849990, Zbl 1234.35002 by the authors. A corrected and slightly enlarged version of this memoir, entitled "*Distribución asintótica de autovalores, Teoremas de H. Weyl y T. Carleman"* (2012), has been published online in http://www.edutecne.utn.edu.ar/monografias.html.

SUMMARY

We consider only the differential operator $-\frac{1}{k}\Delta$ because it is sufficient for studying the distribution of eigenvalues of the more general operator $-\Delta v + k_1 v = \lambda k_2 v$, (cf. [BP], §3.11 and §0.1).

Section **4.1.** We define the concepts of (plane) region, domain, ñ-connectedness, property S_ε, continuability of the weight $k(x)$ and the families of real functions $Ş(D)$, $Lip_{loc}(D)$, $Lip_+(D)$, $Lip_+\ (D,\dot{S})$ and $Л_\gamma(D)$ for D a region. Also we state several theorems in the easier context of Jordan regions and prove some of them. Among others we prove a Proposition like this: if D is an ñ-connected Jordan region with boundary of measure zero and k is continuable: $k \in Lip_+(D,\dot{S})$, then the (classical) eigenvalues of the operator $-\frac{1}{k}\Delta$ for the Dirichlet problem on D verify $\frac{n}{\lambda_n} \to \frac{\int_D kdp}{4\pi}$. We say that a solution of the Dirichlet problem is a classical solution if it belongs to $Ş(D) = C_0(\overline{D}) \cap C^2(D)$.

Section **4.2.** Here D is a region. We start distinguishing between Green kernel and Green function which is a function that verifies:
$G(p,q) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{\text{diam}\, D}{|p-q|} - H(p,q)$; $\Delta_q H(p,q) = 0$ on D, $H(p,.) \in C(\overline{D})$; if $(p,q) \in D \times \partial D$ then $\frac{1}{2\pi}\log\frac{\text{diam}\, D}{|p-q|} - H(p,q) = 0$.
We say that $D \in \boldsymbol{B}$, or that D is regular, whenever D has a barrier function at any of its boundary points and that $D \in \boldsymbol{G}$ if D admits a Green kernel. This basically means that the integral operator $\int_D\ G(p,q)\phi(q)dq$ with a kernel $G \in L^2$ (and other properties) is the inverse of the differential operator $-\Delta$, $(k = 1)$.
For any region: $D \in \boldsymbol{G} \Rightarrow D \in \boldsymbol{B}$. On the other hand for ñ-connected regions it holds that
$D \in \boldsymbol{B} \Rightarrow D \in \boldsymbol{G}$ because $D \in \boldsymbol{B}$ implies the existence of a Green function that is also a Green kernel. And also that $D \overline{\in} \boldsymbol{B}$ if and only if ∂D has isolated points (a finite number of them because of the finite connectedness).

Section **4.3.** We introduce the generalized Green function $g_D(\cdot,\cdot)$ for D a region. g_D is a symmetric positive function that increases with D such that if $D \in \boldsymbol{B}$ then $g_D(p,q) = G(p,q)$.
By definition it is an application $g_D : D \to (-\infty,\infty]$ such that for $q \in D$ verifies:
(a) $g_D(\cdot,q)$ is a harmonic function on $D \setminus \{q\}$ such that for any $\varepsilon > 0$ it is bounded on $D \setminus B_\varepsilon(q)$,
(b) $g_D(q,q) = \infty$ and if $p \to q$, $g_D(p,q) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|p-q|} + O(1)$,
(c) $p \to \zeta \Rightarrow g_D(p,q) \to 0$ for nearly everywhere $\zeta \in \partial D$.
Nearly everywhere (n.e.) means everywhere on ∂D except for a set $E \subset \partial D$, E a Borel polar set.
$g_D(p,q)$ exists and is unique whenever D is a region.

Section **4.4.** We assume that $k \in Lip_+(D)$ and that D is an ñ-connected regular region. If $D_{-\frac{\Delta}{k}}(D) = \{u \in C_0(\overline{D}): \Delta u \in L^2(D;k)\}$ and **G** ($\equiv$ **G**$_k$) is the operator defined on $L^2(D,k)$ by $(\mathbf{G}f)(p) := \int_D G(p,q)f(q)\,k(q)dq$, we show that the classical Dirichlet boundary problem $-\frac{1}{k(x)}\Delta u(x) = \lambda u(x)$, $u \in Ş(D)$, has infinitely many eigenvalues of finite multiplicity such that $\lambda_n \to \infty$, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$. The corresponding real eigenfunctions, $\phi_j \in Ş(D)$, form a complete orthonormal system in $L^2(D,k)$ such that $\sqrt{\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_j^2}} = \|G\|_{2,k\times k} < \infty$ since in $L^2(D \times D, k \times k)$ it holds that $G(p,q) = \sum \phi_n(p)\phi_n(q)/\lambda_n$. Moreover, $-\frac{1}{k}\Delta$ is a closed operator verifying $\left(-\frac{1}{k}\Delta\right)^{-1} = \mathbf{G}$.

Section **4.5.** Here $D \in S_\varepsilon$ is a regular ñ-connected region and $k \in Lip_+(D,\dot{S})$. Thus $k \in Л_\alpha(D)$ for certain $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$. Then, the Dirichlet series $\sum \lambda_n^{-s}$ defines a function $g(s)$ holomorphic on Re $s > ⅆ \in [1/2, 1)$ where $ⅆ = 1 - \frac{\inf(\alpha,\varepsilon)}{2}$. This is an optimal result. If *D* is a rectifiable Jordan region and $k \equiv 1$ then $ⅆ = 1/2$.
About the Weyl-Berry-Lapidus conjecture we assert that if there exists *m*, $0 < m < 1$, such that the counter $N(\lambda)$ verifies with $A, W > 0$, $N(\lambda) - A\lambda = -W\lambda^m + o(\lambda^m)$, $\lambda \to \infty$, then $m \leq ⅆ$.
This section is the end of Part I of the work.

Part II. Sections **4.6**, **4.7.** We introduce, for S an open bounded plane set, the family $C_+^0(S)$ of bounded continuous positive functions which are bounded away from zero and the bilinear functional $a_{t,k}(f,g) = \int_S \nabla f \times \nabla g + t\int_S fg\,kdx$ on $H_0(S)$ where $k \in C_+^0(S)$ and $t \geq 0$. $H_0(S)$ is the Sobolev space denoted usually as $H_0^1(S)$. $\sqrt{a_{t,k}(f,f)}$ is a norm equivalent to the usual norm on H_0: $|||f||| = \sqrt{\int_S |f|^2 + |\nabla f|^2 dx}$.
Following Lars Gårding we construct an operator $\mathfrak{G}_t$, symmetric, positive and compact from $L^2(S,k)$ into $L^2(S,k)$ which is the inverse of the differential operator $-\frac{1}{k}\Delta + t$ whose domain is $\boldsymbol{D}_\Delta = \{f \in H_0(S): \Delta f \in L^2\}$. We refer to this procedure as the variational method. An eigenfunction $\mathfrak{f}_m$ verifies with $\lambda_m > 0$, $-\frac{1}{k}\Delta\mathfrak{f}_m = \lambda_m\mathfrak{f}_m \in H_0$.

Section **4.8.** We continue in this section the examination of the concepts of classical, strong and weak solutions that we began in §**4.4**. The function u defined on an open bounded set S is a weak solution of the Dirichlet problem $\left(-\frac{1}{k}\Delta + t\right)u = f,\ f \in L^2(S,k),\ t \geq 0,\ u = 0$ on the boundary, if $u \in H_0(S)$ and for any $v \in H_0(S)$ it holds that $a_{t,k}(u,v) = (f,v)_k := \int_S fv\,kdx$**.**
The eigenfunction $\mathfrak{f}_m$ of $-\frac{1}{k}\Delta + t$ corresponding to the eigenvalue $\lambda_m + t$ obtained with the variational method verifies $a_{t,k}(\mathfrak{f}_m, v) = ((\lambda_m + t)\mathfrak{f}_m, v)_k$ and therefore is also called weak eigenfunction in contradistinction to the strong (or classical) eigenfunction ϕ_m.

Section **4.9.** We say that $k \in Lip_+(S)$ if $k \in C_+^0(S)$ is a bounded function that satisfies, locally, a Hölder condition and that $k \in Lip_+(S,\dot{S})$ if $\dot{S} \supset \bar{S}$ and there exists $\dot{k} \in Lip_+(\dot{S})$ such that

$\dot{k} = k$ on *S*. The subindex + means that the functions are bounded away from 0. It holds that if $k \in Lip_+(S, \dot{S})$ then, for each i, $\lambda_i \geq \dot{\lambda}_i > 0$ and $\lambda_i \approx i$, ($\approx$ means $\lambda_m = O(m), m = O(\lambda_m)$).

Section **4.10.** We define $C_+^\infty(S; \dot{S})$ as the family of bounded functions k such that $k = \dot{k} I_S \in C^\infty(S)$ with $\dot{k} \in C_+^\infty(S)$. We give an incomplete proof of the following theorem due to Gårding: if *S* is a bounded open set and $k \in C_+^\infty(S; \dot{S})$ then $\frac{n}{\lambda_n} \to \frac{\int_S k\, dp}{4\pi}$. The proof lacks the demonstration of the validity of the limit: $\lim_{t\to\infty} \sum \frac{t}{(\lambda_m + t)^2} = \frac{1}{4\pi} \int_S k(p) dp$, an interesting fact that is used in the proof of Gårding's theorem.
An example is exhibited which shows that the requirement on k to be continuable to $\dot{k}$ restricts in some sense the range of applicability of the result.

Appendix to Part II. We prove that if D is a Jordan region and $k \in Lip_+ D$ then the variational and classical methods provide the same set of eigenvalues and eigenspaces. That is, strong and weak solutions are undistinguishable.

Part III. Section **4.11.** Although the variational method is of greater generality than the classical one, both methods coincide in many cases. We say that a finitely connected regular region D is normal, $D \in \mathcal{N}$, if the operators $\left(-\frac{1}{k}\Delta\right)^{-1} : L^2 \to L^2$ obtained by either method coincide.
This class is closed under limit: if D is a finitely connected regular region and there exists a sequence $\{D_n\} \subset \mathcal{N}$ such that $\overline{D}_n \subset D_{n+1} \uparrow D$ then $D \in \mathcal{N}$. This implies that the sets of eigenfunctions and the corresponding eigenspaces coincide and that the classical eigenfunctions ϕ_m verify $|||\phi_m||| \sim \sqrt{\lambda_m}\, \|\phi_m\|_k$. When $k \in Lip_+(D, \dot{D})$ it also holds that the classical eigenvalues verify $\lambda_n \geq \dot{\lambda}_n > 0$ for any n.

Section **4.12.** $\mathbb{S}$ shall denote the family of regions D such that $I(D) := \int_0^{\operatorname{diam} D} \frac{1+|\operatorname{Log} t|}{t} |A(t)| dt < \infty$. It holds that $\forall \varepsilon \;\; 0 < \varepsilon \leq 1,\; \mathbb{S} \supset S_\varepsilon$. $\mathbb{S}$, S_ε are families closed by increasing limits.

Section **4.13.** We introduce the family $\boldsymbol{W}_{\tilde{n}}(\{D_n\})$ of $\tilde{n}$-connected regions D for which there exists a sequence of $\tilde{n}$-connected regions $\{D_n\}$, $D_n \in \mathcal{N}$, such that
(1) If $D_n \subset D_{n+1}$, $D_n \neq D_{n+1}$ then $\overline{D}_n \subset D_{n+1}$, (2) $D_1 \subset \cdots \subset D_n \subset D_{n+1} \subset \cdots \uparrow D$.
Then, $D \in \boldsymbol{B} \Rightarrow D \in \mathcal{N}$.
Let D be a non regular region. Then the irregular points of ∂D are isolated and form a set $\tilde{J}$ of finite cardinality $h = \#\tilde{J} < \infty$. Thus $\tilde{D} := D \cup \tilde{J}$ is an ($\tilde{n}$-h)-connected regular region.
Recalling that the eigenvalues of $-\frac{\Delta}{k}$ for the Dirichlet problem on D, an ñ-connected region, are the reciprocals of the proper values of $\mathbf{G} = \left(-\frac{\Delta}{k}\right)^{-1}$ we have:
Theorem. Let $D \in \boldsymbol{W}_{\tilde{\mathbf{n}}}(\{D_m\})$ and $k(p) \in Lip_+(D, \dot{S})$. 1) If $D \in \boldsymbol{B}$ then $\lambda_{m,j} \downarrow \lambda_j$.
2) If $D \,\overline{\in}\, \boldsymbol{B}$ then $\lambda_{m,j} \downarrow l_j > 0$. $\mu_j = \frac{1}{l_j} = j$-th proper value of $\boldsymbol{\mathcal{G}} f(p) = \int_D \mathcal{G}(p,q) f(q) k(q)\, dq$, a Hilbert-Schmidt integral operator such that $\mathcal{G}(p,q) = \tilde{G}(p,q) I_{D\times D}$ a.e. Also $l_j = \tilde{\lambda}_j$.

It also holds that if $D \in B \cap \mathbb{S}$ then the harmonic function $H(p,.)$ associated to the Green's function for the Laplacian verifies $\int_D |H(p,p)|\, dp < \infty$.

Section **4.14.** We introduce the Green kernel $G_k(p,q;\lambda) = G(p,q) + F_k(p,q;\lambda)$, $k \in Lip_+(D,\dot{S})$, and show that $G_t^{(1)} f(p) := \int_D G_k(p,q;\lambda) f(q) dq$ is a completely continuous operator from $L^2(D)$ to $C_0(\overline{D})$. $G_t^{(1)}$ is the inverse of $-(\Delta + \lambda k),\ \lambda < 0$.

Section **4.15.** In this section $G_k(p,q;-\chi^2)$ is approximated by $K_0(\chi w|p-q|)/2\pi$, w a positive constant.

Section **4.16.** Upper and lower bounds for $H_k^w(p,q;-\chi^2) := \frac{K_0(\chi w|p-q|)}{2\pi} - G_k(p,q;-\chi^2)$ are found.

Section **4.17.** This section is devoted to the function $F_k(p,p;\lambda)$.

Section **4.18.** We consider the series $\sum_1^\infty \lambda_n^{-s} \phi_n^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{C_n} F_k(p,p;\lambda)\lambda^{-s} d\lambda =: \phi(p;s)$, Re $s > 6$, and prove that $\phi(p;s) = \frac{1}{4\pi(s-1)} + Z(p;s)$, $Z(p;s)$ holomorfic on Re $s > 1$.

Section **4.19.** In this section we study the functions: $\int_a^\infty H(p,p)t^{-s}dt$, $\int_a^\infty H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,p;-t)t^{-s}dt$.

Section **4.20.** We prove for $D \in \boldsymbol{B} \cap \mathbb{S}$, $k \in Lip_+(D,\dot{S})$ that the Dirichlet series $\sum \lambda_n^{-s}$ verifies, with $g(s)$ holomorphic on Re $s > 1$, $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n^s} = \frac{\int_D k(p)dp}{4\pi(s-1)} + g(s)$. Besides $g(s)$ is continuous on Re $s \geq 1$.
Seemingly, the half-plane of holomorphy of $\sum \lambda_n^{-s}$ increases when the boundary of D is less rough but not further than Re $s > \frac{1}{2}$.

Appendix to Part III. This appendix is devoted to show that all finitely connected Jordan regions belong to $\mathcal{N}$.
We use in the proof the inequality $\iint_D \left|\text{grad}_\xi H(x,\xi)\right|^2 d\xi \leq \log \frac{2 \text{ diam } D}{\text{dist}(x,\partial D)}$ that we prove for these regions. This inequality was obtained by H. Weyl, (see §3 [W]), using Dirichlet's Principle.

Section **4.21.** Let $k(x) \in Lip_+(D,\dot{S})$ and D be an ñ-connected region. If $D \in \boldsymbol{B} \cap \mathbb{S}$ then the eigenvalues of the Dirichlet problem of the Sturm-Liouville differential operator $(-\frac{1}{k(x)})\Delta_x$ verify $\lambda_n \int_D k(p)dp \sim 4\pi n$. Any ñ-connected regular region belongs to $\mathcal{N}$. Besides, the same asymptotic behaviour holds when $D \in \boldsymbol{B}$ and $|D| = 0$.

CAPÍTULO 4, (continuación de [BP])

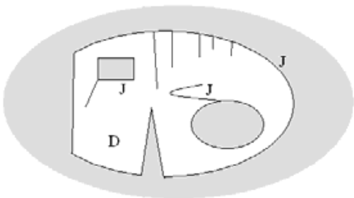
I. El operador $-\frac{1}{k(x)}\Delta_x$ en un abierto acotado del plano. Introducción.

4.1. Escribiremos $h(n) \cong g(n)$ si $\lim_{n\to\infty}\frac{h(n)}{g(n)} = c$, $c = \text{cte.} \neq 0$, es decir si $\frac{h(n)}{cg(n)} \sim 1$, esto es, $\lim_{n\to\infty}\frac{h(n)}{cg(n)} = 1$ El teorema de Weyl dice entonces que los autovalores del problema de Dirichlet para el operador diferencial $-\frac{1}{k(x)}\Delta_x$ verifican, con $dim = 2$,

(1) $$\lambda_n \cong n^{\frac{2}{dim}} \quad \text{o} \quad \sqrt{\lambda_n} = f_n \cong \sqrt[dim]{n}.$$

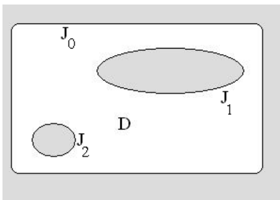
$f_n^{dim} \cong n$ es una ley muy general que se cumple para membranas de Jordan de densidad variable y contorno fractal. El objetivo de este capítulo es mostrar que esa ley se presenta con mucha más generalidad que la demostrada en [BP]. Allí hemos llamado indistintamente dominio o región a un abierto conexo. En este trabajo distinguiremos entre estas palabras.

DEFINICIÓN 1. Llamaremos *dominio* a un conjunto abierto ($\neq \emptyset$) conexo de R^2 y *región* a un dominio acotado.



DEFINICIÓN 2. i) Una región D se dirá *ñ-conexa*, $\tilde{n} = 0,1,2,\dots$, si su contorno ∂D está formado por ñ+1 compactos conexos disjuntos.

ii) De una región D se dirá que es de *Jordan ñ-conexa* si es una región ñ-conexa cuyos ñ+1 contornos parciales son todos ellos curvas de Jordan.



Es decir, $J = \partial D = J_0 \cup J_1 \cup \dots \cup J_{\tilde{n}}$, donde si $i \neq 0$ entonces J_i está contenido en el interior de J_0. J se dirá rectificable si todas las J_i lo son.

Regiones aceptables. La definición de la propiedad S_ε (§**3.0**, [BP]) puede extenderse obviamente a regiones ñ-conexas.

DEFINICIÓN 3. Diremos que D ñ-conexa tiene la propiedad S_ε, $0 < \varepsilon \leq 1$, si existe η tal que para $t \in (0, \eta]$ vale: $|A(t)| = |\{p \in D: \text{dist}(p, \partial D) < t\}| \leq C(D)t^\varepsilon$, donde $|A| =$ área de A y $C(D) < \infty$.

Por tanto, si

(2) $$\vartheta(D, \varepsilon) \coloneqq \sup\left\{\frac{|A(t)|}{t^\varepsilon} : 0 < t \leq \operatorname{diam} D\right\},$$

D tiene la propiedad S_ε si y solo si $\vartheta(D, \varepsilon) < \infty$.

La familia de pesos k.

Sea A un abierto acotado. Recordemos del §**0.2** [BP] que $f \in Lip_{loc}(A)$ significa que f es una función (real) acotada definida en A tal que para cada $x \in A$ existe un entorno circular $B = B^x$, $\bar{B} \subset A$, tal que $x \in B$ y donde f satisface una condición de Hölder α: si $z, y \in B^x$ entonces $|f(z) - f(y)| \leq C(x)|z - y|^\alpha$ con $C(x) < \infty$, $\alpha = \alpha(x)$ tal que $0 < \alpha \leq 1$.

Una subclase de $Lip_{loc}(A)$ es $Lip_+(A)$ que es la familia de funciones $f \in Lip_{loc}(A)$ tales que $\inf(f) > 0$.

DEFINICIÓN 4. Sea D una región de Jordan ñ-conexa. Diremos que $f \in Л_\gamma(D)$, $0 < \gamma \leq 1$, si $f \in Lip_+(D)$ y para todo $x, y \in D$ y para cierta $M_0(x)$ finita, absolutamente integrable en D, vale $|f(x) - f(y)| \leq M_0(x)|x - y|^\gamma$.

La familia de funciones $Л_\gamma(D)$ es una variedad aditiva de funciones continuas tal que para cada $f \in Л_\gamma(D)$ existe $\varepsilon = \varepsilon(f) > 0$ tal que $\forall x$: $\varepsilon \leq f(x) \leq 1/\varepsilon$. Es la familia de donde extraeremos los pesos k para el operador diferencial $-\frac{1}{k(x)}\Delta_x$ para los que es seguramente válido el teorema de Weyl-Carleman. Sin embargo la existencia de infinitos autovalores para el problema de contorno puede probarse con solo exigir que el peso pertenezca a $Lip_+(D)$.

TEOREMA 1. Sea $k(x) \in Lip_+(D)$, D una región de Jordan ñ-conexa. El problema de contorno $\Delta u + \lambda\, k\, u = 0$, $u\big|_{\partial D} = 0$, $-\frac{1}{k(x)}\Delta u(x) = \lambda u(x)$, $u \in Ş(D)$, posee infinitos autovalores reales de multiplicidad finita que pueden ordenarse según su magnitud creciente: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$, $\lambda_n \to \infty$. Las correspondientes autofunciones (reales) $\phi_j \in Ş(D)$ forman un sistema ortonormal completo respecto de la medida $k(x)\, dx$.

Demostraremos este teorema para regiones más generales en los párrafos siguientes. La definición de la familia $Ş(D)$, donde se hallan las soluciones del problema, es (§**0.3.1**, [BP]), $Ş(D) = \{f \in C_0(\bar{D}): f \in C^2(D)\}$. Por ella diremos, cuando sea necesario, que el contexto del Teorema 1 es el del problema *clásico* de autovalores.

El Teorema de Weyl-Carleman para regiones ñ-conexas.

TEOREMA 2. Si la región de Jordan ñ-conexa D es tal que $D \in S_\varepsilon$ y $k \in Л_\alpha(D)$ entonces para los autovalores del problema de Dirichlet del operador $-\frac{1}{k(q)}\Delta_q$ vale

(3) $$\lambda_n \int_D k(p)dp \sim 4\pi n.$$

Más adelante volveremos sobre este teorema y su demostración; por el momento podemos decir que se puede probar repitiendo textualmente la demostración del Teorema 1, §**3.8**, [BP].

Veremos como un corolario del próximo Teorema 6 que vale el

TEOREMA 3. Una región *D* de Jordan ñ-conexa con contornos rectificables tiene la propiedad S_1**.**

Por tanto una región de ese tipo es aceptable para los Teoremas 1 y 2.

Prolongación del peso *k(x)*.

Un punto sobre *k* indicará que $\dot{k}$ es una extensión de *k*.

DEFINICIÓN 5. Sean $S \subset \dot{S}$, S y $\dot{S}$ abiertos acotados tales que $\bar{S} \subset \dot{S}$. Si *k* pertenece a una familia $\mathbb{F}(S)$ de funciones con dominio S y ciertas propiedades, diremos que $k \in \mathbb{F}(S, \dot{S})$ si existe $\dot{k} \in \mathbb{F}(\dot{S})$ tal que $k = \dot{k}$ sobre *S***.**

Nos interesará especialmente el caso en que $\mathbb{F}$ es la familia Lip_{loc}. También usaremos un punto sobre un autovalor, un operador, etc., para indicar que fueron obtenidos en una extensión. El contexto evitará confusiones. Veamos un ejemplo muy útil.

Ejemplo. Sea $k \in Lip_+(S, \dot{S})$. Existe una función $\omega \in C_0^\infty(R^2)$, $0 \le \omega \le 1$, tal que en un entorno abierto *U* de $\bar{S}$ verifica

$$\dot{S} \supset \operatorname{sop}(\omega) = \bar{V} \supset V = \{x: \omega(x) > 0\} \supset \{x: \omega(x) = 1\} \supset U = \operatorname{int}(U) \supset \bar{S}\ .$$

Por tanto, $f := \dot{k}\omega + (1 - \omega)$ es positiva en todo R^2, $f = \dot{k}$ sobre U y por tanto $f = k$ sobre *S*, $f = 1$ en el complemento de $\bar{V}$. Luego, $f \in Lip_+(R^2)$.

f es una extensión de k tal que para todo disco abierto B, $B \supset \bar{S}$, $\dot{k} := I_B f$ es una extensión de k por la que $k \in Lip_+(S, B)$.

Regiones de contorno de medida plana nula.

Vale el siguiente resultado,

TEOREMA 4. Sean $k \in Lip_+(D, \dot{S})$, D de Jordan ñ-conexa con contorno J y $\dot{k}$ su extensión al abierto $\dot{S}$. Supongamos $|J| = 0$. Entonces los autovalores del problema de Dirichlet del operador de Sturm-Liouville en la región *D* verifican (3)**.**

Obsérvese que $|\partial D| = 0 \nRightarrow D \in S_\varepsilon$. O sea, si "mejoramos" el peso permitiéndole una extensión logramos obtener el teorema de Weyl-Carleman en regiones de "peor comportamiento".

En la demostración del Teorema 4 haremos uso del siguiente Teorema 5 que dice prácticamente que $k \in Л_\gamma(D)$ se verifica "cómodamente" si exigimos que $k \in Lip_+(D, \dot{S})$.

TEOREMA 5. Sean $k, f, S, \dot{S}$ como en el ejemplo precedente y sea B un disco abierto tal que $\bar{S} \subset B$. Si $\dot{k} = I_B f$, existe $\gamma \in (0,1]$ tal que $\dot{k} \in Л_\gamma(B)$ con $M(p)$ acotada**.**

DEMOSTRACIÓN. Existe un cubrimiento finito $\{B_i : i = 1, \cdots, N\}$ de $\bar{B}$ por discos abiertos de diamétro menor que $\inf(1, \operatorname{diam} B)$ para los que existe $\alpha_i \in (0,1]$ tal que el supremo para $p, q \in B_i$ de $\frac{|f(q)-f(p)|}{|p-q|^{\alpha_i}}$ no supera un número C_i. Sea $\gamma = \inf \alpha_i$. Luego, lo mismo vale para $\frac{|f(q)-f(p)|}{|p-q|^{\gamma}}$ con las mismas cotas C_i.

Existe un número $\varepsilon > 0$ tal que para todo $p_0 \in \bar{B}$, el disco $B_{2\varepsilon}(p_0)$ de radio 2ε centrado en p_0 está contenido en algún B_i. Por tanto, para todo $p \in B_\varepsilon(p_0) \subset B_i$ vale para todo $q \in B_{2\varepsilon}(p_0)$: $\frac{|f(q)-f(p)|}{|p-q|^{\gamma}} \leq C_i$.

Existe entonces un número M_i tal que cualquiera sea $p \in B_\varepsilon(p_0)$ para todo $q \in B$: $\frac{|f(q)-f(p)|}{|p-q|^{\gamma}} \leq M_i < \infty$. Si $M = \sup M_i$ se tiene, para todo p en B,

$$\sup_{q \in B} \frac{|f(q)-f(p)|}{|p-q|^{\gamma}} \leq M < \infty.$$

En consecuencia, si $p \in B$, $sup_{q \in B} \frac{|\dot{k}(q)-\dot{k}(p)|}{|p-q|^{\gamma}} = M(p) \leq M < \infty$, QED.

Un corolario del teorema de Jacob Steiner. J será aquí una curva de Jordan rectificable. Sea D su interior y $D_p = \{x : \operatorname{dist}(x, D) \leq p\}$. Tenemos,

$$\text{área}\, D \coloneqq |D| = |\bar{D}| < \infty, \quad \operatorname{long} J \coloneqq \langle J \rangle < \infty.$$

Sea $E(p; J) := \{x \,\bar{\in}\, D : \operatorname{dist}(x, D) \leq p\}$. Entonces $|E(p; J)| = \left|D_p \setminus D\right|$. El teorema de Steiner dice que

(4) $$|E(p; J)| \leq \langle J \rangle p + \pi p^2.$$

Como esta fórmula es invariante por homotecias es suficiente demostrarla para curvas contenidas en una bola abierta $B_R(0)$ con centro en 0 y radio R. No la demostraremos aquí (cf. [Gu],[K]) pero la observación sobre la invariancia es válida para la aplicación que sigue. Sea m un número, $0 < m < 1/2$, y sea $R = 1$. Llamemos

$$\boldsymbol{A}(r) \equiv \boldsymbol{A}(r; J) := \{x \in D : \operatorname{dist}(x, J) \leq r\}.$$

TEOREMA 6. Supondremos $0 \in D$. Si $J \subset B_1 \backslash \bar{B}_{2m}$ entonces para $r < m$ vale

(5) $$|\boldsymbol{A}(r)| = |\{x \in D : \operatorname{dist}(x, J) \leq r\}| \leq C(m) \langle J \rangle r.$$

Y si $r \geq m$ entonces $|\boldsymbol{A}(r)| \leq |D| \leq |D| \frac{r}{m}$**.**

DEMOSTRACIÓN. Obsérvese que la hipótesis implica que $\bar{B}_{2m} \subset D$ y también que $\boldsymbol{A}(r) \subset B_1 \setminus \bar{B}_m$. Sea $f(z) \coloneqq 1/z$. Vale: $f^2 = I$, $f(B_1 \setminus \bar{B}_m) = B_{1/m} \setminus \bar{B}_1$ y $f(\boldsymbol{A}(r)) \subset B_{1/m} \setminus \bar{B}_1$. También

(6) $\qquad 1 \leq |f'(z)| \leq m^{-2}$ en $B_1 \setminus B_m$,

(7) $\qquad |f'(z)| \leq 1$ en $R^2 \setminus B_1$.

Entonces, por (6), $f(\boldsymbol{A}(r)) \subset E(\frac{r}{m^2}; f(J))$. Aplicando el teorema de Steiner y teniendo en cuenta que por (6), $\langle f(J) \rangle \leq \frac{1}{m^2}\langle J \rangle$, resulta

(8) $$|f(\boldsymbol{A}(r))| \leq \frac{r}{m^2}\langle f(J) \rangle + \pi\frac{r^2}{m^4} \leq \frac{r}{m^4}\langle J \rangle + \pi\frac{r^2}{m^4}.$$

Por (7) el jacobiano de la transformación f no supera a 1 en $R^2 \setminus B_1$. Vale entonces,

$$|\boldsymbol{A}(r)| \leq 1. |f(\boldsymbol{A}(r))| \leq \frac{1}{m^4}(\langle J \rangle + \pi r)r.$$

Pero, como por hipótesis, $r < m$ y al rodear J a B_{2m}, $4\pi m \leq \langle J \rangle$, resulta $\pi r < \frac{\langle J \rangle}{4}$. Por tanto tenemos $|\boldsymbol{A}(r)| \leq \frac{5}{4m^4}\langle J \rangle r$, QED.

COROLARIO 1. Si una familia de curvas de Jordan $J_s, s \in \Sigma$, es tal que cada curva contiene en su interior a la esfera $\bar{B}_m(0)$ y está contenida en la esfera $B_R(0)$ entonces existe una constante $C = C(m, R)$ tal que $\sup|\boldsymbol{A}(r; J_s)| \leq C(\sup\langle J_s \rangle)r$.

COROLARIO 2. Vale el Teorema 3: una región de Jordan ñ-conexa de contorno rectificable tiene la propiedad S_1.

En efecto, esto sigue del Corolario 1, QED.

Decrecimiento de los autovalores con la extensión de la región.

El siguiente Teorema 7 se demostrará más adelante, (cf. §**4.11**).

TEOREMA 7. Sean *D* y $\dot{D}$ regiones de Jordan múltiplemente conexas. Si $k \in Lip_+(D, \dot{D})$ entonces $\forall i \;\; \lambda_i \geq \dot{\lambda}_i > 0$.

Demostración del Teorema 4. Veamos el siguiente Teorema 8 del cual el Teorema 4 es una consecuencia inmediata.

TEOREMA 8. Sean $k \in Lip_+(D, \dot{S})$, D de Jordan ñ-conexa con contorno J y $\dot{k}$ su extensión al abierto $\dot{S}$. Los autovalores del problema de Dirichlet del operador de Sturm-Liouville en la región *D* verifican

(9) $$\overline{\lim}\frac{n}{\lambda_n} - \underline{\lim}\frac{n}{\lambda_n} \leq \frac{1}{4\pi}\int_J \dot{k}(x)\,dx.$$

DEMOSTRACIÓN. En [BP] vimos que dada una curva de Jordan J existe una familia de curvas de Jordan J_m, $m = 1, 2, 3, \dots$, (J_m una curva C^∞ con tangente no nula en cada uno de sus puntos), tales que $J_m \dot{\to} J$, (dado ε, a partir de un *m*, J_m está en un ε-entorno de *J*), con sus dominios interiores verificando

$$D_1 \subset \cdots \subset \bar{D}_m \subset D_{m+1} \subset \bar{D}_{m+1} \subset \cdots \subset D.$$

Se deduce, por medio de una inversión del plano respecto de un punto $p_0 \in D$, que también hay una familia de regiones de Jordan $\dot{D}_m$, $m = 1,2,3, \dots$, de contornos $\dot{J}_m$ tales que, $\dot{D}_1 \supset \cdots \supset \bar{\dot{D}}_m \supset \dot{D}_m \supset \bar{\dot{D}}_{m+1} \supset \cdots \supset \bar{D}$, donde $\dot{J}_m$ es una curva C^∞ con tangente no nula en cada uno de sus puntos verificando $\dot{J}_m \dashrightarrow J$. O sea, $D_m \uparrow D, \dot{D}_m \downarrow \bar{D}$.

Lo mismo puede decirse cuando *D* es de Jordan ñ-conexa con contorno *J*.

Además podemos suponer que todas las regiones $\dot{D}_m$ y sus contornos están contenidos en $\dot{S}$. Por tanto, k es prolongable como $\dot{k}$ a $\overline{\dot{D}_1}$. Para todas esas regiones es válido el Teorema 3 y por tanto el Teorema 4 sobre la primera aproximación asintótica de H. Weyl.

Llamemos $\lambda_{m,j}$ $(\dot{\lambda}_{m,j})$ el j-ésimo autovalor cuando se considera la región D_m $(\dot{D}_m)$ y el operador $-\frac{1}{k(q)}\Delta_q$ para el problema de Dirichlet.

Del Teorema 7 obtenemos las desigualdades: $\frac{n}{\lambda_{m,n}} \le \frac{n}{\lambda_n} \le \frac{n}{\dot{\lambda}_{m,n}}$.

Entonces, para *m* fijo y $n \to \infty$, vale

(10) $\frac{1}{4\pi}\int_{D_m} k(x)dx = \lim \frac{n}{\lambda_{m,n}} \le \underline{\lim} \frac{n}{\lambda_n} \le \overline{\lim} \frac{n}{\lambda_n} \le \lim \frac{n}{\dot{\lambda}_{m,n}} = \frac{1}{4\pi}\int_{\dot{D}_m} \dot{k}(x)\, dx.$

Esto implica

(11) $0 \le \overline{\lim} \frac{n}{\lambda_n} - \underline{\lim} \frac{n}{\lambda_n} \le \frac{1}{4\pi}\int_{\dot{D}_m \setminus D_m} \dot{k}(x)\, dx.$

Haciendo tender $m \to \infty$ se obtiene (9), QED.

Observemos que para la validez de todos los resultados de esta Introducción quedan solamente por demostrar los Teoremas 1 y 7. Si bien $k \in Lip_+(D)$ es una hipótesis suficiente para probar el Teor. 1 sobre la monotonía de los autovalores y ortogonalidad de las autofunciones necesitamos $k \in Л_\gamma(D)$ para demostrar el Teorema 2. Con respecto a este resultado véase el Teorema 3 §**4.13**. Por comodidad en general supondremos $k \in Lip_+(D, \dot{S})$ que por el Teorema 5 implica $k \in Л_\gamma$.

4.2. El método clásico. Generalizaciones. Continuando nuestra crónica sobre el teorema de aproximación asintótica de H. Weyl volvemos sobre este resultado en situaciones no cubiertas por los teoremas enunciados en §**4.1**.

La función barrera. La definición de función barrera global es la siguiente.

DEFINICIÓN 1. Dados D región e $y \in \partial D$ diremos que en *y* hay función barrera si existe una función subarmónica $w_y(x)$ definida en D tal que $\forall x \in D$, $w_y(x) < 0$ y $\lim_{x \to y} w_y(x) = 0$. Al punto *y* del contorno se lo llamará regular. Diremos que la región D es regular, o posee la propiedad $\boldsymbol{B}$ respecto de Δ, si admite en todo punto $y \in \partial D$ una función barrera.

Es un hecho bien conocido que una región de Jordan tiene la propiedad $\boldsymbol{B}$. Recordemos su demostración. Sea $p_0 \in \partial D$ y s un punto exterior de $J = \partial D$ lo suficientemente alejado como para que la circunferencia C de centro p_0 y radio $\rho = |p_0 - s|$ contenga en su interior a J. Existe entonces un arco de Jordan K con extremos p_0 y s el cual –salvo por esos puntos– está contenido en el exterior de J y en el interior de C. En el abierto (simplemente conexo) $B_\rho(p_0) \setminus \overline{K}$ puede definirse una rama de $\log(z - p_0)$. Entonces Re $\left\{\frac{1}{\log(z-p_0) - \log|s-p_0|}\right\}$ es una función barrera para D en p_0, (cf. [P], [Br]).

Más aún, todo subconjunto abierto propio del plano y simplemente conexo es regular, (cf. [R], p. 92). El concepto de función barrera es local pues vale el

TEOREMA 1. Sean D región, $y \in \partial D$, $B = B_r(y)$ y w subarmónica en $x \in D \cap B$. Si $w_y(x) < 0$ y $\lim_{x \to y} w_y(x) = 0$ entonces existe una función barrera $\widetilde{w}$ en y.

Se demuestra en [R], utilizando el método de Perron-Poincaré, el siguiente resultado fundamental de existencia de solución armónica con valores de contorno continuos preasignados.

TEOREMA 2. Sea D una región tal que $D \in \boldsymbol{B}$. Si $f \in C(J)$, existe una única función $u \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ tal que $\Delta u = 0$ en D, $u = f$ en J. Además, $\|u\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

El teorema precedente dice que el problema de Dirichlet para Δ es resoluble en regiones regulares. Si para una región D arbitraria vale el Teorema 2 entonces la solución de $\Delta u = 0$ en D, $f(z) = -|z - y|$, $y \in J$, es una función armónica, continua hasta el borde, negativa en $\overline{D} \setminus \{y\}$ (principio de máximo) y nula en y. Vale entonces el

COROLARIO 1. La región D es regular si y solo si el problema de Dirichlet para el laplaciano admite solución allí.

La propiedad *G*. Esta propiedad se refiere a la existencia de un operador integral con un núcleo de cuadrado integrable, inverso de $-\Delta$, (cf. *i*), *iii*) de la Def. 2),

DEFINICIÓN 2. Diremos que una región D posee la propiedad $\boldsymbol{G}$ respecto del operador $-\Delta$ si existe un núcleo de Green, es decir, una función $G(p,q)$ definida en $D \times \overline{D}$, continua en $D \times \overline{D} \setminus \{(p,p): p \in D\}$, tal que $G(p,q) = 0$ si $q \in \partial D$ y verifica:

i) $u \in C^2(D) \cap C_0(\overline{D})$, $\phi \in L^\infty(D)$, $\Delta u = \phi$ en D, implica, para $p \in D$,

(1) $$u(p) = -\int_D G(p,q)\phi(q)dq \equiv -G(\phi),$$

ii) $p, q \in D,\ p \neq q \ \Rightarrow\ G(p,q) = G(q,p)$, *iii*) $\phi \in L^\infty(D),\ p \in \overline{D},\ u(p) = -\int_D G(p,q)\phi(q)dq \ \Rightarrow\ u \in C^1(D) \cap C_0(\overline{D})$,

iv) $\phi \in L^\infty(D) \cap C^1(D) \ \Rightarrow\ u(p) = -\int_D G(p,q)\phi(q)dq \in C^2(D) \cap C_0(\overline{D})$ es tal que $\Delta u = \phi$ en D,

vi) $p, q \in D, p \neq q \Rightarrow 0 \leq G(p,q) < \infty$ y para cada $p \in D$, en un entorno q de p, vale

(2) $$G(p,q) - \frac{1}{2\pi}\log\frac{\mathrm{diam}(D)}{|p-q|} = O(1),$$

vii) $\int_{\overline{D}} G^2(p,q)dq \leq C^2 < \infty, 0 < C = \text{cte}, p \in D$ **.**

Resulta inmediatamente que *vii*) implica *viii*):

viii) $\|G\|_{2,D\times D} < \infty$

Sea $\phi \in L^2(D)$. Dado que ϕ puede aproximarse en L^2 por funciones regulares de soporte compacto resulta de *iv*) y *vii*) que $u(p) = -\int_D G(p,q)\phi(q)dq$ verifica

iii') $u \in C_0(\overline{D})$ y vale $\Delta u = \phi$ en $D'(D)$.

También vale[1]

v) $\Phi \in L^2, \Phi = \boldsymbol{\lambda} G(\Phi) \Leftrightarrow \Phi \in Ş(D), -\Delta\Phi = \boldsymbol{\lambda}\Phi$.

En efecto, las propiedades *i*), *ii*), *iii*), *iv*), *v*), *vi*), *vii*), *viii*) son satisfechas por el núcleo de Green para el problema de Dirichlet y el Laplaciano en una región de Jordan como se ve en el Teor. 1, Cap. 1, [BP].

La proposición *v*) para la función G de la Definición 2 es idéntica a la proposición *v*) del T. 1, §**1.0** , [BP], y puede repetirse la demostración de esta última que consiste en mostrar que *vii*) y *i*)-*iv*) implican *v*).

Hemos visto entonces que, por definición, $D \in \boldsymbol{G}$ si existe un núcleo de Green, o sea,

PROPOSICIÓN 1. $D \in \boldsymbol{G}$ si y solo si existe una función $G(p,q)$ que satisface *i*)-*viii*) y *iii*'**).**

La propiedad *iii*) identifica un operador de L^∞ en $C^1(D) \cap C_0(\overline{D})$. Vale el

TEOREMA 3. Un núcleo que satisface *iii*) y *viii*) es único en L^2 con esas propiedades**.**

DEMOSTRACIÓN. Basta imitar la sencilla demostración de la Proposición 2, §**3.2**, [BP], QED.

TEOREMA 4. Sea D una región. Entonces, $D \in \boldsymbol{G} \Longrightarrow D \in \boldsymbol{B}$**.**

DEMOSTRACIÓN. Sea $y \in \partial D$. Podemos suponer $y = 0$. Por *iv*) de la Definición 2 sabemos que existe u tal que $\Delta u = -4$, $u = 0$ en ∂D. Sea $w(x) = u(x) + |x|^2$.

[1] Recordemos que $Ş(D) := C_0(\overline{D}) \cap C^2(D)$, donde $C_0(\overline{D}) := \{v \in C(\overline{D}) : y \in \partial D \Longrightarrow v(y) = 0\}$.

Entonces, $\Delta w = 0$, $w(x) = |x|^2$ sobre ∂D. Por otra parte $w > 0$ en *D*. Luego, $-w$ es función barrera en $y = 0$, QED.

Función de Green. Precisaremos el concepto de función de Green sin identificarlo todavía con el de núcleo de Green. Básicamente una función de Green es una familia de soluciones fundamentales del laplaciano, nulas en el contorno, (cf. [BP], §**1.0**).

DEFINICIÓN 3. Una función de Green para una región *D* es una función que verifica

1) $G(p,q) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{M}{|p-q|} - H(p,q)$, $\quad M = \operatorname{diam} D, p, q \in D$,

2) $\Delta_q H(p,q) = 0$ en *D*, $H(p,.) \in C(\overline{D})$,

3) $\frac{1}{2\pi}\log\frac{M}{|p-q|} - H(p,q) = 0$ si $(p,q) \in D \times \partial D$.

TEOREMA 5. Una región *D* admite una función de Green si tiene la propiedad $\boldsymbol{B}$.

DEMOSTRACIÓN. Si $D \in \boldsymbol{B}$ definimos la función $G(.,.)$ como en el caso en que *D* es una región de Jordan utilizando el Teorema 2 de este párrafo, (cf. [BP]), QED.

Nos interesa el caso en que la función de Green *G* es efectivamente un núcleo de Green.

PROPOSICIÓN 2. Si $\{y\}$ es una componente de ∂D entonces *y* no es regular**.**

DEMOSTRACIÓN. $u: D \to [-\infty, \infty)$ es subarmónica si es semicontinua superiormente y satisface la desigualdad $u(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z + re^{it}\right)dt, 0 \leq r < \rho(z),\ \forall z \in D$. Si *y* fuera regular entonces existiría función barrera *u* en él. En ese caso *u* tendría una singularidad evitable en *y*, (cf. [R], p. 67), donde su prolongación subarmónica $\tilde{u}$ debe ser ≥ 0. Por tanto, $0 \leq \tilde{u}(y) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(y + re^{it}\right)dt < 0$, contradicción, QED.

TEOREMA 6. Una región *D* ñ-conexa sin componentes de ∂D puntuales tiene la propiedad $\boldsymbol{B}$. O sea, $D \,\overline{\in}\, \boldsymbol{B}$ si y solo si ∂D tiene puntos aislados**.**

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis toda componente de ∂D tiene más de un punto. Usando este hecho se ve que la demostración indicada al principio de esta sección para curvas de Jordan puede adaptarse a la nueva situación; es decir, todo punto del contorno es regular (cf. [R], Ch. 4), QED.

TEOREMA 7. i) Sea *D* una región ñ-conexa y $D \in \boldsymbol{B}$. Entonces $D \in \boldsymbol{G}$. Además existe una familia de regiones de Jordan ñ-conexas D_m de contornos J_m rectificables tales que

$$D_1 \subset \cdots \subset \overline{D}_m \subset D_{m+1} \subset \overline{D}_{m+1} \subset \cdots \uparrow D, \qquad J_m \dot{\to} J.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $D \in \boldsymbol{B}$ existe la función de Green $G(.,.)$. Las propiedades *i*)-*viii*) de la Definición 2 son satisfechas por el operador integral definido con la función de Green como núcleo para el problema de Dirichlet y el Laplaciano en la región *D* como se prueba imitando las demostraciones del Teorema 1, §**1.0**, [BP]. Salvo por algunos detalles la repetición de las demostraciones es prácticamente literal, QED.

Hemos demostrado entonces que al menos para regiones ñ-conexas vale:

TEOREMA 8. Si D es ñ-conexa entonces $D \in \boldsymbol{B} \Leftrightarrow D \in \boldsymbol{G}$**.**

4.3. La función de Green generalizada. Es posible, y tiene numerosas ventajas, extender el concepto de función de Green como se hace en [R], p. 106. Allí se define una función $g_D(z,w)$, o simplemente $g(z,w)$, que para dominios $D \in \boldsymbol{B}$ verifica $G(p,q) = g(p,q)$ pero que puede definirse para dominios $D \notin \boldsymbol{B}$.

DEFINICIÓN 1. Sea D una región. Una función de Green generalizada es una aplicación $g\colon D \to (-\infty,\infty]$ tal que para cada $q \in D$:

(a) $g(\cdot,q)$ es armónica en $D \setminus \{q\}$ y acotada en $D \setminus B_\varepsilon(q)$ para todo $\varepsilon > 0$,

(b) $g(q,q) = \infty$ y para $p \to q$, $g(p,q) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|p-q|} + O(1)$,

(c) $g(p,q) \to 0$ si $p \to \zeta$ para aproximadamente en todo $\zeta \in \partial D$**.**

Escribiremos “n.e.” (= nearly everywhere) en lugar de “aproximadamente en todo”; “n.e.” significa en todo $\zeta \in \partial D$ salvo en un subconjunto $E \subset \partial D$, E de Borel, polar[2].

Los conjuntos polares de Borel en R^2 forman una familia $\mathbb{P}$ de conjuntos medibles que tienen medida de Lebesgue nula, contiene a los puntos, es cerrada por uniones numerables y subconjuntos, y es invariante por transformaciones conformes.

Un conjunto $E \in \mathbb{P}$ no es necesariamente numerable pero vale la

PROPOSICIÓN 1. Si $E \in \mathbb{P}$ es un F_σ entonces es totalmente desconexo**.**

En particular, si D es un dominio y $E = \bar{E} \in \mathbb{P}$ entonces $D \setminus E$ sigue siendo conexo.

Observemos que un abierto acotado no vacío A, plano, tiene necesariamente un contorno ∂A compacto no vacío. Para este vale

$$1 = \dim_{\mathrm{top}}\partial A \leq \dim_{\mathrm{Haus}}\partial A \leq \dim_{\mathrm{box}}\partial A \leq 2.$$

Pero si un conjunto X es compacto entonces $\dim_{\mathrm{top}}X = 0$ si y solo si X es totalmente desconexo, ([GJ]). Luego, usando la Proposición 1 se demuestra la

PROPOSICIÓN 2. Si D es una región entonces $\partial D \notin \mathbb{P}$**.**

Vale el siguiente teorema.

---

[2] Sea μ una medida de Borel finita de soporte compacto. Su potencial es $p_\mu(z) = \int \log|z-w|d\mu(w)$ y su energía es $I(\mu) = \int p_\mu(z)d\mu(z)$. $E \subset \boldsymbol{C}$ se llama polar si $I(\mu) = -\infty$ para toda tal $\mu \neq 0$ con soporte contenido en E.

TEOREMA 1. Sea D una región, $\zeta \in \partial D$. Sea D' una región tal que $D \subset D'$. Entonces,
(1) existe una sola función de Green generalizada g para D,
(2) $g(p,q) = g(q,p)$, es decir, g es simétrica en $D \times D$,
(3) $g(p,q) > 0$,
(4) $\lim_{q\to\zeta} g(p,q) = 0 \Leftrightarrow \zeta$ es un punto regular del contorno,
(5) $\forall p, q \in D \quad g(p,q) \leq g'(p,q)$,
(6) si para $p_0, q_0 \in D,\ p_0 \neq q_0$, vale $g(p_0,q_0) = g'(p_0,q_0)$ entonces $\forall p, q \in D$ vale $g(p,q) = g'(p,q)$,
(7) si para $p_0, q_0 \in D,\ p_0 \neq q_0$, vale $g(p_0,q_0) = g'(p_0,q_0)$ y $D \in \boldsymbol{B}$ entonces $D = D'$ **.**

COROLARIO 1. Sean D y D' regiones tales que $D \subset D' \neq D \in \boldsymbol{B}$. Entonces,

$$\forall p, q \in D, p \neq q,\ g(p,p) = g'(p,p) = \infty,\ g(p,q) < g'(p,q).$$

COROLARIO 2. Sea D una región tal que $D \in \boldsymbol{B}$. Entonces, $g(p,q) = G(p,q)$**.**
En efecto, basta comparar la Definición 3 §**4.2** con la Definición 1 del presente párrafo.

TEOREMA 2. (1) Si una región D es simplemente conexa entonces es regular (todos los puntos de su contorno son regulares, cf. [R] §4.2).
(2) Si $\zeta \in \partial D, \zeta \in \mathrm{C}$, C componente de ∂D con más de un punto entonces ζ es regular.
(3) Si $\{\zeta\} = \mathrm{C}$ entonces ζ no es regular**.**

TEOREMA 3. Sean D_m y D regiones tales que $D_m \uparrow D$. Entonces, $\forall p, q \in D$, $g_{D_m}(p,q) \uparrow g_D(p,q)$, (cf. [R])**.**

4.4. Desarrollo en autofunciones. Monotonía de los autovalores con el índice. Supondremos de la función peso $k(x)$ que $k \in Lip_+(D)$ y de la región D que es ñ-conexa y admite función barrera en todos sus puntos frontera.
Por tanto vale el Teorema 7 del §**4.2** por lo que existe una función $G(p,q)$ tal que

G satisface *i*)-*viii*) y *iii*') del §**4.2**,

vale también el principio de máximo del §**0.4.1** [BP]:

$$C(\overline{D}) \cap C^2(D) \ni u \neq \text{cte.},\ \ \Delta u = f \geq 0,\ \ u(x) = \max_{\overline{D}} u \ \ \Longrightarrow\ \ x \in \partial D,\ x \,\overline{\in}\, D,$$

y el Lema de Weyl del §**0.2.5** y su corolario el Teorema 1 del §**1.8** [BP]:

$$\theta \in Lip_{loc} \Longrightarrow \int_D G(p,q)\theta(q)dq \ \in C^2(D).$$

Podemos entonces probar, imitando la demostración del T. 1 del §**1.9** [BP] y de su Corolario, los puntos (*i*)-(*viii*) del siguiente teorema sobre el desarrollo en autofunciones del operador $-k^{-1}(x)\Delta_x$, que implica en particular el T. 1 del §**4.1**.

DEFINICIÓN 1. Sean $k(x) \in Lip_+(D)$ y $D \in \boldsymbol{B}$ región ñ-conexa. Llamaremos

$D_{-\frac{\Delta}{k}}(D) \equiv D_\Delta(D) := \{u \in C_0(\overline{D}) : \Delta u \in L^2(D)\}$ al dominio de $-\frac{\Delta}{k}$ y $\mathbf{G} \equiv \mathbf{G}_k$ al operador sobre $L^2(D, k)$ definido por $(\mathbf{G}f)(p) := \int_D G(p,q)f(q)\,k(q)dq$.

NB. u es solución clásica del problema de Dirichlet $-\frac{1}{k}\Delta u = f$ si $u \in Ş(D)$. Sobre D_Δ entendemos que la igualdad $-\Delta u = g \in L^2(D)$ es en el sentido de las distribuciones. Si $g = fk$, u será la solución de $-\frac{1}{k}\Delta u = f$ que en este trabajo nosotros llamaremos fuerte. En $Ş(D) \cap D_\Delta(D)$ la solución en $D'(D)$ coincide con la solución ordinaria obtenida por derivación. Haciendo abuso del lenguaje usaremos, a veces, fuerte por clásica.

TEOREMA 1. Sean $k(x) \in Lip_+(D)$ y $D \in \boldsymbol{B}$ región ñ-conexa.

(i) El problema de contorno

(1) $$-\frac{1}{k(x)}\Delta u(x) = \lambda u(x),\ u \in Ş(D),$$

posee infinitos autovalores reales de multiplicidad finita que pueden ordenarse según su magnitud creciente:

(2) $$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots, \quad \lambda_n \to \infty.$$

(ii) Las correspondientes autofunciones $\phi_j \in Ş(D)$, reales, normalizadas en $L^2(D, k)$:

$$\|\phi_j\|_k := \sqrt{\int_D |\phi_j(x)|^2 k(x)dx} = 1, \text{ verifican } \int_D \phi_i\phi_j\ kdx = 0 \text{ si } i \neq j,$$

y forman un sistema ortonormal completo respecto de la medida $k(x)dx$ en D.

(iii) Toda función $u \in Ş(D)$ tal que $\Delta u \in L^\infty(D)$ admite un desarrollo uniformemente convergente en $\overline{D}$ (también absolutamente convergente):

(3) $u = \sum_1^\infty c_j\,\phi_j, \qquad c_j = c_j(u) = \int_D u\,\phi_j\,kdx,$

(iv) $\frac{\phi_n(p)}{\lambda_n} = \int_D G(p,q)\,\phi_n(q)\,k(q)dq = \mathbf{G}(\phi_n), \quad \phi_n = \phi_n(\cdot) = \phi_n(\cdot\,;k),$

(v) $\sum_1^\infty \frac{|\phi_j(p)|^2}{\lambda_j^2} = \int_D G^2(p,q)k(q)dq \leq C^2 < \infty, \quad C = \sqrt{\|k\|_\infty}\ \text{diam}\ D,$

(vi) $\sqrt{\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_j^2}} = \|G\|_{2,k\times k} \leq C' < \infty, \qquad C' = \|k\|_\infty\sqrt{|D|}\ \text{diam}\ D,$

(vii) $\forall p \in \overline{D}$, $G(p,q) = \sum \frac{\phi_n(p)\phi_n(q)}{\lambda_n}, \qquad (L^2(q \in D)),$

(viii) $G(p,q) = \sum \phi_n(p)\phi_n(q)/\lambda_n, \qquad L^2(D \times D),$

(ix) $-\frac{\Delta}{k}$ lleva $D_{-\frac{\Delta}{k}}(D)$ sobre $L^2(D,k)$ en forma biunívoca. Vale $\left(-\frac{1}{k}\Delta\right)^{-1} = \mathbf{G}$.

DEMOSTRACIÓN de (ix). Veamos que $\Delta(D_\Delta) \supset L^2(D)$. Por *iii*') §**4.2**, si $v \in L^2$ entonces $u(p) = -\int_D G(p,q)v(q)\,dq \in D_\Delta$ y $\Delta u = v$. Por la Proposición 1 §**3.2** [BP], (véase también el §**4.14**), Δ es biunívoca sobre su dominio. Por tanto,

$-\frac{1}{k}\Delta\left(D_{-\frac{\Delta}{k}}\right) = L^2(D,k)$ y $\left(-\frac{1}{k}\Delta\right)^{-1}(v) = \int_D G(p,q)v(q)\,k(q)dq = \mathbf{G}(v)$, QED.

NOTAS. i) Sobre $L^2(D,k)$ vale $\mathbf{G} = \mathbf{G}^*$. Vimos que $\mathbf{G}^{-1}$ existe y que el dominio de $\mathbf{G}^{-1}$ es denso en L^2 por lo que existe $(\mathbf{G}^{-1})^*$. Luego, $(\mathbf{G}^{-1})^* = (\mathbf{G}^*)^{-1} = \mathbf{G}^{-1}$. Es decir, $-\frac{1}{k}\Delta = \left(-\frac{1}{k}\Delta\right)^*$. En particular, $-\frac{1}{k}\Delta$ es cerrado.

ii) Vale: $E = -\frac{1}{k}\Delta(C_0^\infty(D))$ no es denso en $L^2(D,k)$. En efecto, sea $L^2 \ni f \perp E$; entonces $\forall\varphi \in C_0^\infty(D)$ vale $0 = \left(f, -\frac{1}{k}\Delta\varphi\right)_k = (f, -\Delta\varphi) = -\langle\Delta f, \varphi\rangle$. Por tanto $\Delta f = 0$ y f puede identificarse con una función armónica. Además toda función armónica de cuadrado integrable es ortogonal a *E* en $L^2(D,k)$.

4.5. Series de Dirichlet. Vale el, (con $\alpha = \gamma$ del Teor.5 §**4.1**),

TEOREMA 1. Sean $D \in \boldsymbol{B} \cap S_\varepsilon$ una región ñ-conexa y $k(x) \in Lip_+(D,\dot{S}) \cap Л_\alpha(D)$. Entonces,

i) la función $g(s) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{-s} - \frac{\frac{1}{4\pi}\int_D kdp}{s-1}$ es holomorfa en

(1) $\qquad$ Re $s > \mathbb{d} := 1 - \frac{\inf(\alpha,\varepsilon)}{2}$,

ii) si *D* es de Jordan rectificable y $k \equiv 1$ entonces $\mathbb{d} = 1/2$,

iii) no es cierto en general que $g(s) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{-s} - \frac{\frac{1}{4\pi}\int_D kdp}{s-1}$ sea holomorfa en Re $s > \mathbb{d} - \epsilon, \epsilon > 0$,

iv) para una región de Jordan C^2 y el problema clásico de Dirichlet no vale $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots\} = \boldsymbol{N} := \{1,2,3, \cdots\}$. Ni tampoco $\{\lambda_j\} = c\{\boldsymbol{N} \setminus \{1, \cdots, m\}\}$.

v) si para el problema de Dirichlet de la ecuación de Sturm-Liouville en *D* existe *m* tal que $0 < m < 1$ y vale, (cf. [La]),

(2) $N(\lambda) - A\lambda = -W\lambda^m + o(\lambda^m), A, W > 0,\ 1 < \lambda \to \infty \quad \Rightarrow\ m \leq \mathbb{d}$.

DEMOSTRACIÓN. i) Se demuestra como el Corolario 2 del Teorema 1, [BP] §**3.8**, (véase también el Teorema 1, §**4.20**).

ii) sigue de i).

iii) De una región de Jordan diremos que es C^2 si su contorno J definido por $\{y_1(s), y_2(s)\}$, s parámetro longitud de arco, es tal que $y_i \in C^2, i = 1{,}2$, y posee versor tangente en cada uno de sus puntos. Una definición más detallada puede verse en [Z], pgs. 11-12.

Para el problema clásico de Dirichlet con $k = 1$ y una región de Jordan C^2 vale en $\operatorname{Re} z > 1$:

(3) $$\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_j^z} = \int_{0+}^\infty \frac{dN(\lambda)}{\lambda^z} = \frac{\text{area } D}{4\pi(z-1)} - \frac{\text{long } J}{8\pi(z-\frac{1}{2})} + h(z),$$

donde $h(z)$ es holomorfa en $\operatorname{Re} z > 0$, (Pleijel, cf. [Z]). Esto prueba iii) en vista de ii).

iv) $\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ es una función entera y por tanto holomorfa en $\operatorname{Re} z > 0$.

v) Repetimos la demostración del párrafo **3.9** de [BP]. Supongamos que valga para $0 < \mathbb{d} < m < 1$, $1 < \lambda < \infty$, la igualdad $\delta(\lambda) \coloneqq N(\lambda) - A\lambda = -W\lambda^m + o(\lambda^m)$.

Entonces, si $K(x) = x^{-s}$, $s = \sigma + i\tau$, $1 > \sigma > m$, $B > C \to \infty$, se tiene

$K(x) = x^{-\sigma}(\cos(\tau \log x) - i \operatorname{sen}(\tau \log x)$ y vale

$\int_C^B K(x) d\delta(x) = (K\delta)(B) - (K\delta)(C) - \int_C^B \delta(x) dK(x) = o(1) + s \int_C^B \delta(x) x^{-1-\sigma}\, dx.$

Luego, $\int_C^B K(x) d\delta(x) \to 0$. Más aún, $\int_C^B x^{-(\sigma+i\tau)} d\delta(x) \stackrel{\cdot}{\to} 0$ si $s = \sigma + i\tau$ pertenece a un compacto contenido en $\operatorname{Re} s > m$.

Por tanto, $g_1(s) = \int_{1+}^{\infty-} x^{-s} d\delta(x)$ es una función holomorfa en $1 > \sigma > m$. Pero

$$g_1(\sigma) = \sigma \int_{1+}^\infty \delta(x) x^{-1-\sigma}\, dx - \delta(1+).$$

La última integral es tal que $\left|\int_{1+}^\infty \delta(x) x^{-1-\sigma}\, dx\right| \to \infty$ cuando $\sigma \downarrow m$. Luego, $g_1(s)$ no es prolongable holomórficamente a $\sigma \geq m$.

Esto contradice el hecho de que en $\sigma > 2$ la función $g_1(\sigma) = \int_{1+}^{\infty-} \lambda^{-\sigma} d(N(\lambda) - A\lambda)$ es igual a $g(\sigma) - \frac{A}{\sigma-1} +$ función entera en σ. En efecto, esta última define una función holomorfa en $\operatorname{Re} s > \mathbb{d} < m$, contradicción.

Luego, si vale (2) entonces $\mathbb{d} \geq m$, QED.

II. El método variacional.

4.6. Normas en espacios de Sobolev. Sea S un abierto acotado de R^2.

DEFINICIÓN 1. $C_+^0(S)$ designará a la familia de funciones reales $k(x) \in C^0(S)$ (= familia de funciones continuas) para las que existe $\varepsilon = \varepsilon(k) \in (0, \infty)$ tal que $\forall x \in S$: $\varepsilon < k(x) < 1/\varepsilon$.

Queremos determinar el inverso del operador de Sturm-Liouville $-\frac{1}{k(x)}\Delta$, $k \in C_+^0(S)$. Recurriremos al método de Gårding para la determinación del operador de Green del operador diferencial. Si es necesario llamaremos método *variacional* a este tratamiento del operador en contraposición al que hemos llamado método *clásico* y utilizado en [BP], Caps. 1 y 3 y en la Introducción de este capítulo.

Definamos $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1,2$, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$ y sea

(1) $\qquad H_0(S) =$ la completación de $C_0^\infty(S)$ (real) respecto de la norma

(2) $$|||f||| = \left(\int_S \left(|f|^2 + |\nabla f|^2\right) dx\right)^{1/2} = \left(\int_S \left(|f|^2 + \sum |D_i f|^2\right) dx\right)^{1/2},$$

(cf. [A], [Tr], donde H_0 se denota con H_0^1). $H_0(S) \subset H^1(S) =$ el espacio real de Sobolev constituído por las funciones en $L^2(S)$ cuyas primeras derivadas pertenecen a $L^2(S)$ munido de la norma (2). $H^1(S)$ es un espacio de Hilbert cuyo producto escalar (producto interior) se define como

$$((u,v)) := \int_S uv\, dx + \int_S \nabla u \times \nabla v\, dx = \int_S uv\, dx + \int_S \sum D_i u D_i v\, dx,$$

$$|||u||| = \sqrt{((u,u))}.$$

$C^\infty(S) \cap H^1(S)$ es denso en $H^1(S)$. $H_0(S)$ hereda de $H^1(S)$ este producto escalar y siendo un subspacio cerrado del mismo es a su vez un espacio de Hilbert.

Como S es un abierto acotado, $I(u,v) := \int_S \nabla u \times \nabla v\, dx$ es también un producto escalar en $H_0(S)$ que da lugar a una norma equivalente $|\cdot|_{H_0}$, (cf. [A], Ch. VI). En efecto,

PROPOSICIÓN 0. Sea $S \subset (-K, K) \times (-K, K)$, $\varphi \in C_0^\infty(S)$. Entonces

$$\int_S \varphi^2(x) dx \le (2K)^2 \int_S |\nabla\varphi|^2 dx\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\varphi \in C_0^\infty(S)$, $\varphi(x_1, x_2) = \int_{-K}^{x_1} \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s, x_2) ds$. Luego,

$|\varphi(x_1,x_2)|^2 \le 2K \int_{-K}^{K} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,x_2)\right|^2 ds$. Integrando sobre S, obtenemos la tesis, QED.

COROLARIO 1. Para $v \in H_0(S)$ vale

$$I(v,v) \le |||v|||^2 \le (1 + 4K^2) I(v,v).$$

Sigue que si S es un abierto acotado, $1 \overline{\in} H_0$ y $H_0 \neq H^1$, (cf. [T], Prop. 24.10).

Definimos, para $f, g \in H_0(S),\ t \geq 0$,

(3) $$(f, g)_t := \int_S \nabla f \times \nabla g\, dx + t \int_S fg\, dx.$$

O sea, $((f, g)) = (f, g)_{t=1}$. La norma $\|\cdot\|_t$ correspondiente al producto escalar (3) incorpora la constante t y se escribe como $\|f\|_t := \sqrt{\int |\nabla f|^2 dx + t \int f^2 dx}$.

Es equivalente, para cada t, a $|||\cdot|||$. En particular, $\|\cdot\|_0 \sim \|\cdot\|_1 = |||\cdot|||$.

Por tanto $H_0(S)$ es un espacio de Hilbert respecto al producto escalar $(\cdot,\cdot)_t, t \geq 0$.

En lo que sigue el contexto evitará la confusión originada por la notación:

$$\|f\| = \sqrt{\int f^2 dx},\ \ \|f\|_k = \sqrt{\int f^2.kdx}\ \text{ y }\ \|f\|_t = \sqrt{I(f, f) + t\|f\|^2}.$$

La funcional $\boldsymbol{a_{t,k}}(\cdot,\cdot)$. Sean $I(f, g) = \int_S \nabla f \times \nabla g\, dx,\ k(x) \in C_+^0(S)$ y

$(f, g)_k = \int_S fg\, kdx$.

DEFINICIÓN 2. Sea $t \geq 0$. Si $f, g \in H_0(S)$ definimos

$$a_{t,k}(f, g) := I(f, g) + t(f, g)_k = \int_S \nabla f \times \nabla g\, dx + t \int_S fg\, kdx\ .$$

En particular, $a_{0,k}(f, g) = I(f, g)$. Vale además $a_{t,k}(f, g) = a_{t,k}(g, f)$ y

(4) $$\left|a_{t,k}(f, g)\right| \leq |||f|||.|||g||| + t\|k\|_\infty \|f\|.\|g\| \leq (1 + t\|k\|_\infty)|||f|||.|||g|||\ .$$

Luego, $a_{t,k}(\cdot,\cdot)$ define una funcional bilineal continua simétrica sobre $H_0(S)$ que verifica (4). Notemos que si $f, g \in C_0^\infty(S)$ entonces

(5) $$a_{t,k}(f, g) = t \int_S fg\, kdx + \int_S \left(-\frac{1}{k}\Delta f\right) g\, kdx = \int_S \left[\left(t - \frac{1}{k}\Delta\right) f\right] g\, kdx.$$

PROPOSICIÓN 1. Si $f \in H_0(S), \Delta f \in L^2(S)$ y $\varphi \in C_0^\infty(S)$ entonces

(6) $$a_{t,k}(f, \varphi) = \int_S \left\{tf + \left(-\frac{1}{k}\Delta f\right)\right\} \varphi\ kdx.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos $C_0^\infty \ni f_n \to f$ en $H_0(S)$. Luego, $\int_S \nabla f_n . \nabla\varphi dx =$

$= \langle -\Delta f_n, \varphi\rangle \to \int_S \nabla f . \nabla\varphi dx = \langle -\Delta f, \varphi\rangle = \int_S \left(-\frac{1}{k}\Delta f\right) \varphi\, kdx,$ QED.

De la Definición (2), para $f, g \in H_0(S)$ y $M = M(k, S)$, una constante independiente de t, obtenemos,

(7) $$\left|a_{t,k}(f, g)\right| \leq M\|f\|_t \|g\|_t\ .$$

Por otra parte, si $0 \neq f \in H_0(S), t \geq 0$ y $\alpha = \inf(1, \inf k)\ (> 0)$,

(7') $$a_{t,k}(f, f) = \int |\nabla f|^2 dx + t\|f\|_k^2 \geq \alpha\left(\int |\nabla f|^2 dx + t\|f\|^2\right) \geq \alpha\|f\|_t^2 > 0\ .$$

O sea, la forma es coerciva sobre $H_0(S)$ munido con la norma $\|\cdot\|_t$. Vale entonces la

PROPOSICIÓN 2. Si $t \geq 0$, $a_{t,k}(f,g)$ define un producto escalar sobre $H_0(S)$ cuya norma asociada es equivalente a (3)**.**

En efecto, para $t \geq 0$, obtenemos $|a_{t,k}(f,g)| \leq \sqrt{a_{t,k}(f,f)} . \sqrt{a_{t,k}(g,g)}$. Eligiendo una constante positiva $M = M(k)$ adecuadamente vale,

(8) $\quad M^{-1}\|f\|_t^2 \leq a_{t,k}(f,f) \leq M\|f\|_t^2$ para toda $f \in H_0$ y todo $t \geq 0$.

En consecuencia, $H_0(S)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar $a_{t,k}(\cdot,\cdot)$.

El operador $\boldsymbol{N_t}$. De (8) se deduce, por el teorema de representación de funcionales lineales continuas, que para toda $v \in H_0(S)$ existe una única $q = q(v) \in H_0(S)$ tal que para toda $f \in H_0$ vale

(9) $$a_{t,k}(f,v) = (f,q(v))_t.$$

Por el mismo argumento, dado $q \in H_0$ existe un único $N_t(q) = v$ verificando $a_{t,k}(f,v) = (f,q)_t$. Es decir, N_t establece una correspondencia biunívoca y lineal de $H_0(S)$ sobre $H_0(S)$. Entonces, si $q, f \in H_0$ tenemos

(10) $$a_{t,k}(f,N_t(q)) = (f,q)_t.$$

De (8) y (10) se deduce que N_t es un operador que además de 1-1 y lineal es acotado respecto de la norma $\|.\|_t$ con $\|N_t\| \leq M$. Vale entonces $\|N_t^{-1}\| \geq 1/_{\|N_t\|} \geq 1/M$.

Podemos elegir $M = M(k,S)$ tan grande de manera que verifique simultáneamente,

(7') $\quad |a_{t,k}(f,g)| \leq M\|f\|_t\|g\|_t, \quad \frac{1}{M} \leq \|N_t\|, \ \|N_t^{-1}\| \leq M.$

El operador N_t permite vincular la forma bilineal simétrica $(.,.)_t$ con la forma bilineal simétrica $a_{t,k}(.,.)$.

El operador $\boldsymbol{M_t}$. Si $f, g \in C_0^\infty$ tenemos

$$|(f,g)| \leq \|f\|\|g\|.$$

En vista de la Proposición 0 tenemos entonces,

(11) $\quad |(f,g)| \leq 2K\|f\|\|g\|_t$.

Esta desigualdad vale aún para $g \in H_0(S)$. (f,g) define entonces una funcional lineal continua sobre $g \in H_0(S)$ con norma $\|\cdot\|_t$.

Por tanto define un operador lineal $\widetilde{M}_t: C_0^\infty(S) \to H_0(S)$ tal que:

(12) $$(f,g) = (\widetilde{M}_t f, g)_t .$$

De (11) y (12) obtenemos para $f \in C_0^\infty(S)$,

(13) $$\|\widetilde{M}_t f\|_t \leq 2K\|f\|.$$

Pero, como por el corolario de la Proposición 0: $|||\cdot||| \leq (1+2K)\|\cdot\|_t$, sigue de (13) que el operador $\widetilde{M}_t$ verifica, con $B = 2K(1+2K)$,

(13') $$|||\widetilde{M}_t f||| \leq B\|f\| \quad \text{para todo } f \in C_0^\infty(S).$$

Por tanto $\widetilde{M}_t$ puede extenderse continuamente a todo $L^2(S)$, $\widetilde{M}_t: L^2(S) \to H_0(S)$. La extensión satisface entonces (12) para $f \in L^2(S), g \in H_0(S)$: $(f,g) = (\widetilde{M}_t f, g)_t$.

Sigue ahora que el operador $\widetilde{M}_t$ es inyectivo, lineal y continuo. Las mismas propiedades tiene el operador M_t que definimos como $M_t(f) = \widetilde{M}_t(kf): L^2(S) \to H_0(S)$.

Vale entonces la siguiente relación entre las formas bilineales simétricas $(\cdot,\cdot)_k$ y $(\cdot,\cdot)_t$,

(14) $\int_S fg\,kdx = (f,g)_k = (M_t f, g)_t$ para toda $f \in L^2(S)$, para toda $g \in H_0(S)$.

Por el teorema de inmersión de Rellich-Kondrachov, (cf. [A]), vale la

PROPOSICIÓN 3. El operador $M_t: L^2(S) \to L^2(S)$ es compacto.

El operador $\mathfrak{G}_t$. En general escribiremos $\mathfrak{G}$ en lugar de $\mathfrak{G}_t$. Vimos en (10) que para funciones reales $g, h \in H_0(S)$, vale la fórmula, $a_{t,k}(g, N_t h) = (h,g)_t$.

De esta fórmula y (14) sigue entonces para $h = M_t f$, $f \in L^2(S)$, $g \in H_0$, que

$$a_{t,k}(g, N_t M_t f) = (M_t f, g)_t = (f,g)_k.$$

Luego, si $f \in L^2(S), g \in H_0(S)$, vale

(15) $$a_{t,k}(N_t M_t f, g) = (f,g)_k.$$

DEFINICIÓN 3. $\mathfrak{G} \equiv \mathfrak{G}_t := N_t M_t: L^2(S) \to H_0(S) \subset L^2(S)$.

Recolectando fórmulas, para $f \in L^2(S)$, $g \in H_0(S)$, logramos la relación,

(16) $$(M_t f, g)_t = (f,g)_k = a_{t,k}(\mathfrak{G}f, g).$$

TEOREMA 1. i) $\mathfrak{G} = N_t M_t$ es un operador biunívoco y continuo de $L^2(S)$ en $H_0(S)$. ii) $\mathfrak{G}$ es simétrico, positivo y compacto de $L^2(S;k)$ en $L^2(S;k)$.

DEMOSTRACION. i) sigue de lo dicho en los párrafos precedentes.

ii) $\mathfrak{G}$ es simétrico y positivo pues

$$(f,\mathfrak{G}g)_k = a_{t,k}(\mathfrak{G}f,\mathfrak{G}g) = a_{t,k}(\mathfrak{G}g,\mathfrak{G}f) = (g,\mathfrak{G}f)_k = (\mathfrak{G}f,g)_k, \qquad \text{QED.}$$

4.7. Las autofunciones de $\mathfrak{G}_t$. De la desigualdad (8), (16) y el Teorema 1 sigue que si $t \geq 0$ y $0 \neq f \in L^2(S,k)$ entonces

(1) $$M\|\mathfrak{G}f\|_t^2 \geq (f,\mathfrak{G}f)_k = a_{t,k}(\mathfrak{G}(f),\mathfrak{G}(f)) \geq M^{-1}\|\mathfrak{G}f\|_t^2 > 0.$$

De (1) y Teorema 1 ii), se deduce que existe una familia $\{\mathfrak{f}_m\}$ ortonormal en $L^2(S,k)$ tal que $\mathfrak{G}_t(\mathfrak{f}_m) = \mu_m \mathfrak{f}_m$, con $\mu_m > 0$. De (1) se deduce también que el rango de $\mathfrak{G}_t$ es denso en $L^2(S,k)$. En consecuencia, $\#\{\mu_m\} = \aleph_0$ y $\mu_m \downarrow 0$.

Los autovalores son de multiplicidad finita. Por tanto $\#\{\mathfrak{f}_m\} = \aleph_0$. Hemos probado entonces el siguiente resultado,

TEOREMA 1. Los valores propios μ_m de $\mathfrak{G}$ son positivos, de multiplicidad finita y tienden a cero. La familia de autofunciones $\{\mathfrak{f}_m\} = \{\mathfrak{f}_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H_0(S)$ es ortonormal y completa en $L^2(S;k)$ y verifica entonces $\mathfrak{G}\mathfrak{f}_m = \mu_m \mathfrak{f}_m$.

Este teorema es análogo al T.1 §**4.4**. Dado que $k \in C_+^0(S)$ la situación aquí es más general y no podemos afirmar, aun suponiendo S de Jordan, que $\mathfrak{f}_m \in C^2(S)$.

Rango y dominio del operador diferencial $-\boldsymbol{k}^{-1}\Delta + \boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{C}_+^0(\boldsymbol{S})$.

DEFINICIÓN 1. A la variedad lineal de H_0, $\boldsymbol{D}_\Delta := \{f \in H_0(S) : \Delta f \in L^2(S)\}$, la llamaremos dominio (variacional) del operador $-k^{-1}\Delta + t$. Al rango lo notaremos con $\mathfrak{R} := \big((-k^{-1}\Delta) + t\big)\boldsymbol{D}_\Delta \ \ (\subset L^2(S))$.

TEOREMA 2. Sean $t \geq 0$, $\lambda_m + t = \mu_m^{-1}$.

i) Sobre $\boldsymbol{D}_\Delta$ vale $\mathfrak{G}(-k^{-1}\Delta + t) = I$,

ii) Sobre $\mathfrak{R}$ vale $(-k^{-1}\Delta + t)\,\mathfrak{G} = I$,

iii) $\mathfrak{R} = \overline{\mathfrak{R}} = L^2(S,k)$,

iv) $\mathfrak{G} = \left(-\frac{1}{k}\Delta + t\right)^{-1}$ sobre $L^2(S,k) = \mathfrak{R}$,

v) $\mathfrak{R} =$ dominio de $\mathfrak{G} = L^2(S,k)$, $\quad H_0(S) \supset$ rango de $\mathfrak{G} = \boldsymbol{D}_\Delta \supset \{\mathfrak{f}_m\} \cup C_0^\infty(S)$,

vi) $(-k^{-1}\Delta + t)\mathfrak{f}_m = (\lambda_m + t)\mathfrak{f}_m$,

vii) $-\frac{1}{k}\Delta\mathfrak{f}_m = \lambda_m \mathfrak{f}_m$, $\lambda_m > 0$.

DEMOSTRACIÓN. i) Sean $f \in \boldsymbol{D}_\Delta$ y $F = -\frac{1}{k}\Delta f + tf$. De (16) y la Proposición 1 del §**4.6** sigue, para toda $\varphi \in C_0^\infty$, que $a_{t,k}(f,\varphi) = (F,\varphi)_k = a_{t,k}(\mathfrak{G}F,\varphi)$. Por tanto, $a_{t,k}(\mathfrak{G}F - f,\varphi) = 0$. Por la densidad de $C_0^\infty(S)$ en $H_0(S)$, de (7) §**4.6** obtenemos $a_{t,k}(\mathfrak{G}F - f, \mathfrak{G}F - f) = 0$. De (7') §**4.6** sigue entonces que $\mathfrak{G}F - f = 0$.

ii) Si $F \in \mathfrak{R}$ entonces existe $f \in \boldsymbol{D}_\Delta$ tal que $F = (-k^{-1}\Delta + t)f$. Aplicando i) se obtiene $(-k^{-1}\Delta + t)\mathfrak{G}F = (-k^{-1}\Delta + t)f = F$.

iii) $\overline{\mathfrak{R}} = L^2(S,k)$ pues la cápsula lineal de $\{\mathfrak{f}_m\}$ es densa $L^2(S,k)$, (cf. T. 1). Vale que $-k^{-1}\Delta + t$ es un operador cerrado sobre $\boldsymbol{D}_\Delta$. En efecto, supongamos $\varphi_n \to w \in \boldsymbol{D}_\Delta$ en H_0 y $-\frac{1}{k}\Delta\varphi_n + t\varphi_n \to h$ en L^2. Entonces $\Delta\varphi_n \to (tw - h)k$ en L^2 y $\Delta\varphi_n \to \Delta w$ en $D'(D)$. Por tanto, en $D'(D)$, vale $\Delta w = (tw - h)k$, o sea $\Delta w \in L^2$ y $w \in \boldsymbol{D}_\Delta$. En consecuencia, $h = -\frac{1}{k}\Delta w + tw \in \mathfrak{R}$ y el operador diferencial es cerrado. Luego

$(-k^{-1}\Delta + t)^{-1}$ es también cerrado. Pero $(-k^{-1}\Delta + t)^{-1} = \mathfrak{G}$ sobre $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{G}$ es acotado. Por tanto el dominio de $(-k^{-1}\Delta + t)^{-1}$ es cerrado: $\mathfrak{R} = \overline{\mathfrak{R}}$.

iv) y v) siguen de i)-iii) y Teorema 1.

vi) $\mathfrak{f}_m \in \boldsymbol{D}_\Delta$. Entonces, $(-k^{-1}\Delta + t)\mu_m\mathfrak{f}_m = (-k^{-1}\Delta + t)\mathfrak{G}\mathfrak{f}_m = \mathfrak{f}_m$.

vii) $\lambda_m.1 = \int_S \left(-\frac{1}{k}\Delta\mathfrak{f}_m\right)\mathfrak{f}_m k dx = \int_S |\nabla\mathfrak{f}_m|^2 dx$. Como $\mathfrak{f}_m \neq 0$, por el Corolario 1 de la Proposición 0 §**4.6**, obtenemos $\int_S |\nabla\mathfrak{f}_m|^2 dx > 0$, QED.

TEOREMA 3. Sea $\mathfrak{f} \in \boldsymbol{D}_\Delta(S)$. Valen (A) y (A'),

(A) $\quad \forall f, g \in H_0(S) \quad a_{t,k}(\mathfrak{G}_t f, g) = a_{t,k}(f, \mathfrak{G}_t g)$,

(A') $\forall g \in H_0(S)$ $a_{t,k}(\mathfrak{f}, g) = \int_S \nabla\mathfrak{f} \times \nabla g \, dx + t\int_S \mathfrak{f}g \, kdx = \int_S \left\{-\frac{1}{k}\Delta\mathfrak{f} + t\mathfrak{f}\right\} g \, kdx.$

Además son equivalentes (B), (C) y (D),

(B) $\forall g \in H_0(S) \quad a_{t,k}(\mathfrak{f}, g) = \int_S (\lambda_m + t)\mathfrak{f}g \, kdx$,

(C) $\quad \left(-\frac{1}{k}\Delta + t\right)\mathfrak{f} = (\lambda_m + t)\mathfrak{f}$,

(D) $\mathfrak{f}$ pertenece al mismo autoespacio que $\mathfrak{f}_m$, autofunción correspondiente al autovalor $\lambda_m + t$.

DEMOSTRACIÓN. (A) sigue de la Definición 2 §**4.6** y de $a_{t,k}(\mathfrak{G}_t f, g) = \int_S fg \, kdx$, que es la fórmula (16) del §**4.6**. (A') es consecuencia de (6) y (7), §**4.6**.

(D) implica (C) por Teorema 1 y vi) Teorema 2.

(C) es equivalente a $\frac{\mathfrak{f}}{\lambda_m+t} = \mathfrak{G}_t\mathfrak{f}$, (cf. iv) Teorema 2).

Veamos que (C) implica (D). Si $\lambda_n \neq \lambda_m$, por (A) tenemos,

$\int_S \mathfrak{f}\mathfrak{f}_n \, kdx = a_{t,k}(\mathfrak{G}_t\mathfrak{f}, \mathfrak{f}_n) = a_{t,k}(\mathfrak{f}, \mathfrak{G}_t\mathfrak{f}_n)$; por tanto,

$$\int_S \mathfrak{f}\mathfrak{f}_n \, kdx = a_{t,k}\left(\frac{\mathfrak{f}}{\lambda_m+t}, \mathfrak{f}_n\right) = a_{t,k}\left(\mathfrak{f}, \frac{\mathfrak{f}_n}{\lambda_n+t}\right).$$

Luego, $\int_S \mathfrak{f}\mathfrak{f}_n \, kdx = 0$, por lo que $\mathfrak{f}$ debe estar en el mismo autoespacio que $\mathfrak{f}_m$, y vale (D).

(B) dice que $a_{t,k}\left(\frac{\mathfrak{f}}{\lambda_m+t}, g\right) = \int_S \mathfrak{f}g \, kdx = a_{t,k}(\mathfrak{G}_t\mathfrak{f}, g)$. Por (1) §**4.7**, $\mathfrak{G}_t\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{f}}{\lambda_m+t}$ que implica (C).

(B) se deduce de (C) usando (A'), QED.

4.8. Soluciones débiles y fuertes.

DEFINICIÓN 1. Una función u definida en un abierto acotado S es una solución débil, o variacional, del problema de Dirichlet

(1) $$\left(-\frac{1}{k}\Delta + t\right)u = f,\ t \geq 0,\ u = 0 \text{ sobre } \partial S, f \in L^2(S,k),$$

si $u \in H_0(S)$ y para toda $v \in H_0(S)$ vale

(2) $$a_{t,k}(u,v) = (f,v)_k.$$

Es decir, vale para toda $v \in H_0(S)$, $\int_S \nabla u \times \nabla v\, dx + t\int_S uv\, kdx = \int_S fv\, kdx$.

La autofunción $\mathfrak{f}_m$ de $-\frac{1}{k}\Delta + t$ correspondiente al autovalor $\lambda_m + t$ obtenida con el método variacional pertenece a H_0 y verifica vi) T. 2 §**4.7**. Por el T. 3 §**4.7** satisface la ecuación $a_{t,k}(\mathfrak{f}_m, g) = ((\lambda_m + t)\mathfrak{f}_m, g)_k$ cualquiera sea $g \in H_0(S)$, (esto es equivalente a $a_{0,k}(\mathfrak{f}_m, g) = (\lambda_m \mathfrak{f}_m, g)_k$), por lo que también llamamos autofunciones débiles a las autofunciones variacionales y en contraposición con las autofunciones clásicas a las que también llamamos fuertes.

Por (16) §**4.6** y Teor. 2 §**4.7** sabemos que una solución de (1) viene dada por $u = \mathfrak{G}_t f$. La solución es única pues, por (8) §**4.6**, $a_{t,k}(u,u) = 0$ implica $u = 0$.

Para conocer los autovalores y autofunciones de $-\frac{1}{k}\Delta + t$ basta conocer los de $-\frac{1}{k}\Delta$ pues los primeros difieren en una constante y las segundas son compartidas: en efecto, de $\frac{-1}{k}\Delta\psi = \lambda\psi$ sigue $\frac{-1}{k}\Delta\psi + t\psi = (\lambda + t)\psi$ y recíprocamente. Lo mismo vale para las autofunciones débiles: si $v, \psi \in H_0$, $L^2(S) \ni \Delta\psi$ entonces

$$\int_S \nabla\psi \times \nabla v dx = \lambda \int_S \psi v k dx \Leftrightarrow \int_S \nabla\psi \times \nabla v dx + t\int_S \psi v k dx = (\lambda + t)\int_S \psi v k dx.$$

Luego, $\forall v \in C_0^\infty, \int_S [-k^{-1}\Delta\psi - \lambda\psi]v\, kdx = 0$ (Prop. 1§**4.6**), $-\Delta\psi = \lambda\psi k$, $(L^2(S))$.

Notemos que para $u \in \c{S}(S), h \in L^2 \cap C(S))$, si $\left(-\frac{1}{k}\Delta + t\right)u = h$ entonces, por definición, u es solución clásica (fuerte) del problema de Dirichlet (1) con $f = h$, (cf. **NB** §**4.4**). Si $\varphi \in C_0^\infty$ tenemos $\int_S \nabla u \times \nabla\varphi\, dx + t\int_S u\varphi\, kdx = \int_S h\varphi\, kdx$. Si además $u \in H_0$ entonces u es solución débil de ese problema pues se deduce que para toda $v \in H_0(S)$, $\int_S \nabla u \times \nabla v\, dx + t\int_S uv\, kdx = \int_S hv\, kdx$.

4.9. Decrecimiento de los autovalores variacionales con la extensión de la región.

Queremos probar el siguiente Teorema 1 sobre el comportamiento de los autovalores con el cambio de la región D pero en el marco de referencia del método variacional para el problema que nos ocupa y con $k \in Lip_+(D, \dot{D}) \subset C_+^0(D)$.

NOTACIÓN. Designaremos con $|f| = \sqrt{a_{t,k}(f,f)}$ la norma asociada a $a_{t,k}(\cdot,\cdot)$.

Sean $f, g \in C_0^\infty(D)$, $t \geq 0$, $\mathfrak{c}_m(f) = \int_D f\, \mathfrak{f}_m\, kdx$ = m-ésimo coeficiente de Fourier de *f*. Tenemos, $f = \sum_1^\infty \mathfrak{c}_m(f)\mathfrak{f}_m \quad (L^2(D;k))$. Del Teorema 3 §**4.7** sabemos que vale, $a_{t,k}(f,g) = \int_D \left\{tf + \left(-\frac{1}{k}\Delta f\right)\right\} g\ kdx$. Como $-\frac{1}{k}\Delta\mathfrak{f}_m = \lambda_m \mathfrak{f}_m$, $\lambda_m > 0$, obtenemos $-\Delta f = \sum_1^\infty \lambda_m \mathfrak{c}_m(f)\, k\mathfrak{f}_m \quad (D'(D))$. Luego,

(1) $$a_{t,k}(f,g) = \lim \sum_1^N (\lambda_m + t)\mathfrak{c}_m(f)\mathfrak{c}_m(g).$$

Sabemos que $|a_{t,k}(f,g)| \leq M\|f\|_t\|g\|_t$. Si $f \neq 0$, de (7) y (8) del §**4.6**, obtenemos

(2) $$|f|^2 = \sum_{m=1}^\infty (\lambda_m + t)\, \mathfrak{c}_m^2(f) \geq M^{-1}\|f\|_t^2 > 0.$$

$a_{t,k}(f,g)$ define un producto escalar sobre $C_0^\infty(D)$ que satisface (2). Completando $C_0^\infty(D)$ respecto de la norma $|\cdot|$ asociada se obtiene un espacio de Hilbert $X(D)$ identificable con $H_0(D)$. En efecto, por (2) una sucesión en $C_0^\infty(D)$ es de Cauchy en H_0 si y sólo si lo es en la norma $|.|$, y volvemos a obtener la Proposición 2 del §**4.6**.

TEOREMA 1. Sean D y $\dot{D}$ abiertos acotados planos tales que $\dot{D} \supset \overline{D}$. Supongamos $k \in Lip_+(D, \dot{D})$. Valen,

a) $\forall i\ \ \lambda_i \geq \dot{\lambda}_i > 0$,

b)[3] $\lambda_m \approx m$,

c) $\sum_1^\infty \lambda_m^{-2} < \infty$.

DEMOSTRACIÓN. a) Para $t \geq 0$ y por el T.1 §**4.7** tenemos, $\mathfrak{G}\mathfrak{f}_m = \frac{\mathfrak{f}_m}{\lambda_m + t}$.

Si $f \in C_0^\infty(D)$ vale, (§**4.7**),

(3) $$a_{t,k}(\mathfrak{G}f, \mathfrak{G}f) = \int_D (\mathfrak{G}f) f k dx = \sum c_m(f) \frac{c_m(f)}{\lambda_m + t}.$$

Luego, como $t \geq 0$, del Teorema 2 §**4.7** obtenemos $|\lambda_m + t|^2 \geq \lambda_1^2$. De (2) y del §**4.6** sigue que con una constante positiva $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(k, D)$ vale,

(4) $$a_{t,k}(\mathfrak{G}f, \mathfrak{G}f) \leq \frac{1}{\lambda_1^2}\|f\|_{2,k}^2 \leq \mathfrak{h}^2 a_{t,k}(f,f).$$

En consecuencia,

(5) $$|\mathfrak{G}f| \leq \mathfrak{h}\ |f| \text{ sobre } C_0^\infty(D).$$

Luego, $\mathfrak{G}$ admite una extensión lineal y acotada en la norma $|.|$ de $C_0^\infty(D)$ a $X(D)$ y por tanto a $H_0(D)$ que por (16) §**4.6** verifica además $a_{t,k}(\mathfrak{G}f, g) = (f, g)_k$.

[3] ≈ significa $\lambda_m = O(m)\ y\ m = O(\lambda_m)$.

El operador $\mathfrak{G}$ satisface en $C_0^\infty(D)$ las relaciones: $|\mathfrak{G}f|^2 = a_{t,k}(\mathfrak{G}f,\mathfrak{G}f)$ y

(6) $a_{t,k}(\mathfrak{G}f,\mathfrak{G}f) = \sup\left\{\frac{|a_{t,k}(\mathfrak{G}f,g)|^2}{a_{t,k}(g,g)}: g \in C_0^\infty(D)\right\} = \sup\left\{\frac{|(f,g)_k|^2}{a_{t,k}(g,g)}: g \in C_0^\infty(D)\right\}$,

donde $0 \neq g$. Análogamente y usando que $C_0^\infty(D) \subset C_0^\infty(\dot{D})$,

(7) $\dot{a}_{t,k}(\dot{\mathfrak{G}}f,\dot{\mathfrak{G}}f) = \sup\left\{\frac{|(f,h)_{\dot{k}}|^2}{\dot{a}_{t,k}(h,h)}: 0 \neq h \in C_0^\infty(\dot{D})\right\} \geq \sup\left\{\frac{|(f,g)_{\dot{k}}|^2}{\dot{a}_{t,k}(g,g)}: 0 \neq g \in C_0^\infty(D)\right\}$.

Como para $g \in C_0^\infty(D)$, $(f,g)_{\dot{k}} = (f,g)_k$ y $\dot{a}_{t,k}(g,g) = a_{t,k}(g,g)$ los miembros derechos de (6) y (7) son iguales.

Luego, y siempre suponiendo $f \in C_0^\infty(D) \subset C_0^\infty(\dot{D})$, obtenemos,

$0 \leq \int_D f(\mathfrak{G}f)k dx = a_{t,k}(\mathfrak{G}f,\mathfrak{G}f) \leq \dot{a}_{t,k}(\dot{\mathfrak{G}}f,\dot{\mathfrak{G}}f) = \int_{\dot{D}} f(\dot{\mathfrak{G}}f)\dot{k} dx$, o sea,

(8) $\quad 0 \leq \int_D f(\mathfrak{G}f)k dx \leq \int_{\dot{D}} f(\dot{\mathfrak{G}}f)\dot{k} dx.$

Aproximando $f \in L^2(D,k)$ por una sucesión $\{\phi_j\} \subset C_0^\infty(D)$ y suponiéndola extendida por 0 para poder aplicarle el operador $\dot{\mathfrak{G}}$, vale,

(9) $\quad 0 \leq \int_D f(\mathfrak{G}f)k dx \leq \int_{\dot{D}} f(\dot{\mathfrak{G}}f)\dot{k} dx = \int_D f(\dot{\mathfrak{G}}f)k dx.$

Definimos: $\tilde{\mathfrak{G}}(h) = \chi_D \dot{\mathfrak{G}}(\chi_D h)$, $h \in L^2(\dot{D})$.

Por el Teorema 1, §**4.6**, $\tilde{\mathfrak{G}}$ es un operador simétrico, positivo y completamente continuo de $L^2(D,k)$ en $L^2(D,k)$. Verifica, en virtud de (9),

(10) $\quad \tilde{\mathfrak{G}} \geq \mathfrak{G}.$

Luego, sus valores propios guardan la misma relación,

$$\forall i: \ \tilde{\mu}_i \geq \mu_i.$$

Por Teorema 2, §**4.7**, $\lambda_i, \dot{\lambda}_i > 0$ y vale,

(11) $\frac{1}{\dot{\lambda}_i + t} = \dot{\mu}_i = \sup\left\{(\dot{\mathfrak{G}}f,f)_{\dot{k}}: \|f\|_{\dot{k}} = 1,\ f \perp \dot{\mathfrak{f}}_1, \dots, \dot{\mathfrak{f}}_{i-1}\right\}$

$$\geq \sup\left\{(\dot{\mathfrak{G}}(\chi_D f),\chi_D f)_{\dot{k}}: \|\chi_D f\|_k = 1,\ \chi_D f \perp \dot{\mathfrak{f}}_1, \dots, \dot{\mathfrak{f}}_{i-1}\right\}$$

$$= \sup\left\{(\tilde{\mathfrak{G}}g,g)_k: \|g\|_k = 1,\ g \perp \chi_D\dot{\mathfrak{f}}_1, \dots, \chi_D\dot{\mathfrak{f}}_{i-1}\right\}$$

$$\geq \inf_{\{h_1,\dots,h_{i-1}\}\subset L^2(D,k)} \sup\left\{(\tilde{\mathfrak{G}}g,g)_k: \|g\|_k = 1,\ g \perp h_1, \dots, h_{i-1}\right\}$$

$$= \tilde{\mu}_i \geq \mu_i = \frac{1}{\lambda_i + t}.$$

Luego, para todo i, $\lambda_i \geq \dot{\lambda}_i$. O sea, vale a).

En el Apéndice parte II probaremos el siguiente teorema, que usaremos a continuación.

TEOREMA 2. Si $D = B =$ disco abierto y $k \in Lip_+(B)$ entonces los autovalores y las autofunciones clásicas y variacionales coinciden**.**

b) y c) Por el Teorema 5 §**4.1**, k tiene una extensión $\ddot{k} \in Л_\alpha(B)$ para un α tal que $0 < \alpha \leq 1$, donde B es un disco abierto que contiene a la clausura de D. También $\ddot{k} \in Lip_+(D, B)$. Como B es perimetrizable para los autovalores clásicos correspondientes vale el Teorema de Weyl: $\ddot{\lambda}_m \approx m$. Por lo ya visto y el Teorema 2, $\lambda_m \geq \ddot{\lambda}_m > 0$ y $\sum \lambda_m^{-2} \leq \sum \ddot{\lambda}_m^{-2} \leq C \sum \frac{1}{m^2} < \infty$. O sea, c) es válida.

Sea U un disco abierto tal que $\bar{U} \subset D$ y sea $\{\rho_m\}_1^\infty$ la familia de autovalores para el peso $I_U k$. Como $I_U k \in Lip_+(U, D)$ se tiene $\rho_m \approx m$ y $\rho_m \geq \lambda_m$. Sigue entonces b), QED.

TEOREMA 3. Sean D abierto acotado, $t \geq 0$, $k \in C_+^0(D)$, $K(x,y) = k(x)k(y)$,

$\mathfrak{G}_t = \left(-\frac{\Delta}{k} + t\right)^{-1}$ y $(-\frac{1}{k}\Delta + t)\mathfrak{f}_n = (\lambda_n + t)\mathfrak{f}_n = \mu_n^{-1}\mathfrak{f}_n$, $(\lambda_n > 0)$.

i) si $\sum_1^\infty \frac{1}{(\lambda_n + t)^2} < \infty$ entonces la serie $\sum_1^\infty \frac{\mathfrak{f}_n(x)\mathfrak{f}_n(y)}{\lambda_n + t}$ converge en $L^2(D \times D; K)$,

ii) $\mathfrak{Q}_t(x,y) := \sum_1^\infty \frac{\mathfrak{f}_n(x)\mathfrak{f}_n(y)}{\lambda_n + t}$ es el núcleo de $\mathfrak{G}_t$ como operador integral con peso $k(y)$,

iii) $\mu_1 = \|\mathfrak{G}_t\| \leq \|\mathfrak{Q}_t\|_{2,K} = \sqrt{\sum \mu_n^2} < \infty$,

iv) si además $k \in Lip_+(D, \dot{D})$ vale $\sum_1^\infty \frac{1}{(\lambda_n + t)^2} < \infty$ y $\mathfrak{G}_t$ es un operador integral Hilbert-Schmidt, (nuclear: $\sum \mu_n^2 < \infty$)**.**

DEMOSTRACIÓN. $\mathfrak{G}_t$ es un operador compacto de $L^2(S, k)$ en sí mismo y vale $\mathfrak{G}f = \sum_{n=1}^\infty \mu_n (f, \mathfrak{f}_n)\mathfrak{f}_n$. Por ser $\mathfrak{G}$ hermitiano, real y positivo tenemos

$\|\mathfrak{G}\| = \sup \frac{|(\mathfrak{G}f, f)_k|}{\|f\|_{2,k}^2} = \sup \frac{(\mathfrak{G}f, f)_k}{\|f\|_{2,k}^2} = \sup_{\|h\|=1} \sum_{n=1}^\infty \mu_n (h, \mathfrak{f}_n)_k^2 = \mu_1$.

Sea $h(x,y) \in L^2(D \times D; K)$ tal que $\|h(.,.)\|_{2,K} = 1$ y $\mathfrak{Q}_{M,N}(x,y) := \sum_M^N \frac{\mathfrak{f}_n(x)\mathfrak{f}_n(y)}{\lambda_n + t}$.

Dado $\varepsilon > 0$, si $N \geq M \geq M_0(\varepsilon)$,

$$\left|\iint_{S \times S} \mathfrak{Q}_{M,N}(x,y)h(x,y)k(x)k(y)dxdy\right| = \left|\sum_{n=M}^N \frac{\mathfrak{c}_{n,n}(h)}{\lambda_n + t}\right| \leq$$

$$\leq \|h\|_{2,K} \sqrt{\sum_M^N (\lambda_n + t)^{-2}} \leq \sqrt{\sum_M^\infty (\lambda_n + t)^{-2}} \leq \varepsilon.$$

Luego, $\left\|\mathfrak{Q}_{M,N}(x,y)\right\|_{2,K} \leq \varepsilon$ y $\left\{\mathfrak{Q}_{1,N}(x,y)\right\}$ es de Cauchy en $L^2(D \times D; K)$. Entonces la serie $\sum_1^\infty \frac{\mathfrak{f}_n(x)\mathfrak{f}_n(y)}{\lambda_n + t}$ converge en media 2 con peso *K*. Por tanto, si $f \in L^2(D, k)$ vale $\int_D \mathfrak{Q}(x,y)f(y)k(y)dy = \lim_i \int_D \mathfrak{Q}_{1,N(i)}(x,y)f(y)k(y)dy$ a.e. *x*. En consecuencia,

$\int_D \mathfrak{Q}(x,y)\mathfrak{f}_n(y)k(y)dy = \frac{\mathfrak{f}_n(x)}{\lambda_n + t} = (\mathfrak{G}_t\mathfrak{f}_n)(x)$ y $(\mathfrak{G}_t f)(x) = \int_D \mathfrak{Q}(x,y)f(y)k(y)dy$.

Por tanto, $\|\mathfrak{G}_t f\|_{2,k} \leq \|\mathfrak{Q}\|_{2,K}\|f\|_{2,k}$ y $\|\mathfrak{G}_t\|^2 \leq \|\mathfrak{Q}\|_{2,K}^2 = \sum \mu_n^2$, QED.

Llamaremos a $\mathfrak{Q}_t$ núcleo de Green (variacional) y a $\mathfrak{G}_t$ operador de Green en el problema que nos ocupa, (cf. Teor. 1 §**4.4**).

4.10. La familia $C_+^\infty(S,\dot{S})$ y el teorema asintótico de Lars Gårding.

Sean $S,\dot{S}$ abiertos acotados planos tales que $\dot{S} \supset \bar{S}$. Denotamos con $C_+^\infty(S)$ a la familia de funciones *f* definidas en *S* indefinidamente diferenciables tales que para todo $x \in S$, $\varepsilon \leq f(x) \leq 1/\varepsilon$, donde $0 < \varepsilon = \varepsilon(f)$. De acuerdo a la nomenclatura de la introducción $C_+^\infty(S,\dot{S})$ es la familia de las funciones $f \in C_+^\infty(S)$ que admiten una prolongacion de la misma naturaleza a $\dot{S}$. Esta es la clase de los pesos *k* en la teoría que nos ocupa ahora.

El Teorema 3 §**4.9** permite afirmar que para $t \geq 0$ tenemos

(1) $$\sum_{m=1}^\infty \frac{1}{(\lambda_m+t)^2} < \infty.$$

Vale el siguiente resultado, que no demostraremos en este capítulo,

TEOREMA 1. Sea *S* sea un abierto acotado y $k \in C_+^\infty(S,\dot{S})$. Entonces,

(2) $$\lim_{t\to\infty} \sum \frac{t}{(\lambda_m+t)^2} = \frac{1}{4\pi}\int_S k(p)dp =: A \neq 0.$$

De aquí sigue el teorema de Gårding,

TEOREMA 2. Sea *S* sea un abierto acotado y $k \in C_+^\infty(S,\dot{S})$. Entonces,

(3) $$\lim_{0<\lambda\to\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} = \frac{1}{4\pi}\int_S k(p)dp.$$

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que los autovalores de nuestro problema de Dirichlet, ahora con una $k \in C_+^\infty(S,\dot{S})$, se cuentan según su multiplicidad y que el contador *N* se define como $N(s) := \#\{\lambda_m \leq s\}$.

De (1) obtenemos $\sum_1^\infty (\lambda_m+t)^{-2} = o(1)$ para $t \to \infty$. El límite (2) dice más y precisamente que $\sum_1^\infty (\lambda_m+t)^{-2} \sim \frac{A}{t}$, donde $A = \frac{1}{4\pi}\int_S k(p)dp$.

Sea $t > 0$. Entonces,

$$\sum_1^\infty (\lambda_m+t)^{-2} = \int_0^\infty (s+t)^{-2}dN(s) = \lim_{\sigma\to\infty}\int_0^\sigma (s+t)^{-2}dN(s)$$
$$= \lim\left[\frac{N(\sigma)}{(\sigma+t)^2} + 2\int_0^\sigma (s+t)^{-3}N(s)ds\right]$$

Dado ε existe σ_0 tal que para todo $\sigma > \sigma_0$, $\varepsilon > \sum_{\sigma_0<\lambda_m\leq\sigma} \frac{1}{(\lambda_m+t)^2} \geq \frac{N(\sigma)-N(\sigma_0)}{(\sigma+t)^2} \geq 0$.

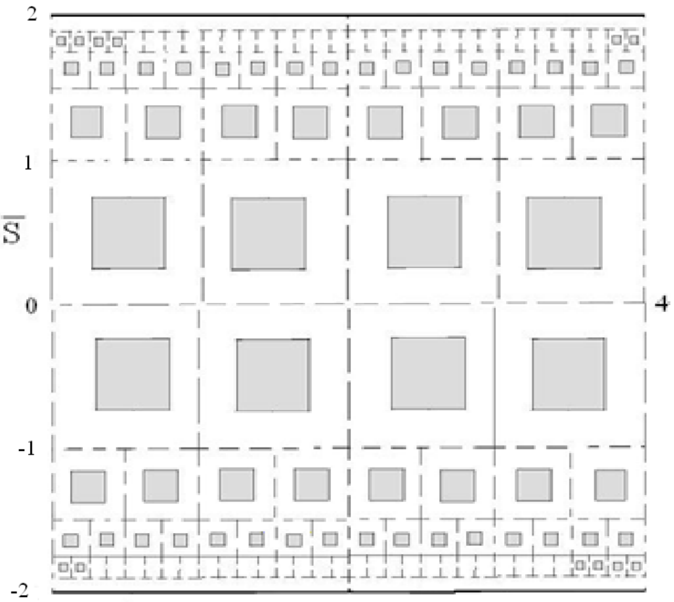
Se deduce entonces que $N(\sigma)/(\sigma+t)^2 \to 0$ para $\sigma \to \infty$. Por tanto,

$$\int_0^\infty (s+t)^{-2}dN(s) = 2\int_0^\infty \frac{N(s)}{(s+t)^3}ds \sim \frac{A}{t}, \quad t \to \infty.$$

Aplicando ahora un teorema tauberiano debido a Hardy y Littlewood, ([Ti] p. 364, [BP] §**0.10**), resulta $N(s) \sim As$, QED.

Ejemplo. El Teorema 1 es muy general. Sin embargo la exigencia de que k admita una extensión $\dot{k}$ impone restricciones a la aplicabilidad del resultado. Veamos un ejemplo.

Sea $Q = (0,4) \times (-2,2)$ y $R^+ = (0,4) \times (0,2)$. Subdividimos R^+ en cuadrados $R_{j,n}^+ = \left((j-1)\frac{2}{2^{n+1}}, j\frac{2}{2^{n+1}}\right) \times \left(2 - \frac{2}{2^{n-1}}, 2 - \frac{2}{2^n}\right)$ disjuntos, de lado $\frac{1}{2^n}$, donde $n, j = 1,2, \cdots$.



Sea $Q_{j,n}^+ =$ el cuadrado abierto con el mismo centro que $R_{j,n}^+$, de lados paralelos y de lado de longitud $\frac{1}{2^{n+1}}$.

Sea $Q_{j,n}^-$ su simétrico respecto al eje de las abscisas.

Definimos el abierto

$$S := \cup_{j,n}\left(Q_{j,n}^+ \cup Q_{j,n}^-\right).$$

Su clausura $\bar{S}$ $(= cl\, S)$ es igual a

$$\bar{S} = [0,4] \times \{-2\} \cup [0,4] \times \{2\} \cup \cup_{j,n}\left(cl\, Q_{j,n}^+ \cup cl\, Q_{j,n}^-\right).$$

Sea $e(y)$ una función de C^∞(R), monótona creciente en $(-2,2)$, igual a 1 en $(-\infty, -2)$ e igual a 2 en $(2, \infty)$. Sea $k(x) = k(x_1, x_2) = e(x_2) I_S(x_1, x_2)$.

S es unión de cuadrados abiertos. Quedan determinadas en cada cuadrado Q las autofunciones del problema variacional de Dirichlet y sus autovalores cuando se usa como peso kI_Q, (cf. Teor. 3 del siguiente Apéndice).

Los autovalores sobre los $Q's$ determinan a toda la familia de autovalores sobre S cuya distribución asintótica ahora conocemos gracias al teorema de Gårding.

Sea $k'(\cdot,\cdot)$ tal que

$k'(x_1, x_2) = k(x_1, x_2)$ si $(x_1, x_2) \in Q_{j,2m+1}^{\pm}$,

$k'(x_1, x_2) = k(x_1, \tau_m(x_2))$ si $(x_1, x_2) \in Q_{j,2m}^-$,

donde τ_m es la traslación en R tal que $(x_1, x_2) \to \left(x_1, \tau_m(x_2)\right)$ lleva $Q_{j,2m}^-$ sobre $Q_{j,2m}^+$,

$k'(x_1, x_2) = k(x_1, \tau_m^{-1}(x_2))$ si $(x_1, x_2) \in Q_{j,2m}^+$.

Esto puede escribirse como $k'(T(x)) = k(x)$. Veamos que el problema de Dirichlet en S con peso k' tiene los mismos autovalores que con el peso k. La verificación de (B) del Teorema 3 §**4.7** $\forall g \in C_0^\infty(S)$ es equivalente a su verificación $\forall g \in H_0(S)$.

Pero una función de $C_0^\infty(S)$ tiene su soporte en un número finito de cuadrados por lo que la transformación T deja invariante $C_0^\infty(S)$ y por tanto a $H_0(S)$. Luego,

si $\forall g \in C_0^\infty(S)$, $a_{t,k}(\mathfrak{f}_m, g) = \int_S (\lambda_m + t)\mathfrak{f}_m g\, kdx$ entonces para $g'\big(T(x)\big) = g(x)$, etc., también valen,

$$a_{t,k}(\mathfrak{f}_m, g) = a_{t,k'}(\mathfrak{f}'_m, g'), \quad \int_S (\lambda_m + t)\mathfrak{f}_m g\, kdx = \int_S (\lambda_m + t)\mathfrak{f}'_m g'\, k'dx, \quad \text{qed.}$$

Pero k' no admite una extensión continua a $\bar{S}$, por lo que no le es aplicable el Teorema 2 del §**4.10** tal como está enunciado.

APÉNDICE Parte II.

Demostraremos en este Apéndice una generalización del Teor. 2 del §**4.9** siguiendo la demostración que se encuentra en [Z] §**6**. Recurriremos al siguiente teorema auxiliar, (ver [Tr]).

TEOREMA 1. i) Sean D y E abiertos acotados tales que $D \subset E$. A partir de las funciones u en $H_0(D)$ definimos las funciones $\tilde{u}$, $\tilde{u}(x) \coloneqq u(x)$ si $x \in D$, $\tilde{u}(x) = 0$ si $x \in E \setminus D$. Entonces, en el sentido de las distribuciones vale $\widetilde{\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}$.

ii) Las funciones extendidas $\tilde{u}$ forman un subespacio de $H_0(E)$ isomorfo a $H_0(D)$ tal que $|\tilde{u}|_{H_0(E)} = |u|_{H_0(D)}$.

iii) Sea D una región de Jordan con contorno C^1 y sea $u \in C_0(\overline{D}) \cap H^1(D)$. Entonces, $u \in H_0(D)$.

Recordemos que: $\mathbf{G}f(p) = \int_D \ G(p,q)f(q)k(q)dq$, $Gf(p) = \int_D \ G(p,q)f(q)dq$, $(G \equiv G_0^{(1)})$.

DEFINICIÓN 1. $Lip_0(D)$ es la familia de funciones Hölder continuas de soporte compacto contenido en D.

TEOREMA 2. Sea D una región de Jordan. Supongamos $k \in Lip_+(D)$.

a) La solución débil u de $-\frac{1}{k}\Delta u = \psi$, $\psi \in Lip_0(D)$ coincide con la solución clásica v,

b) $\mathfrak{G} = \mathbf{G}$ sobre $L^2(D,k)$,

c) $\boldsymbol{D}_\Delta(D) = D_\Delta(D)$.

Autofunciones clásicas y variacionales de $-\frac{1}{k}\Delta$ en el disco unitario . Consideremos para este operador diferencial el problema de Dirichlet en $U = \{x: |x| < 1\}$. Sea $\varphi \in Lip_0(U)$. Notamos para $\xi \in R^2$: $\hat{\xi} = \xi/|\xi|^2$.

El núcleo de Green $G(x,\xi)$ para esta región es

(1) $$G(x,\xi) = \frac{-1}{2\pi}\left[\log|x-\xi| - \log\left|x-\hat{\xi}\right| - \log|\xi|\right] \quad \text{si } x \neq \xi \neq 0.$$

La función $u(x) \coloneqq \int_U \ G(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,k(\xi)\,d\xi$ es la solución clásica de $-\frac{1}{k}\Delta u = \varphi$, $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$, $u(x) = 0$ si $x \in \partial U = \{x: |x| = 1\}$, (cf. por ejemplo T.2, §**3.2** [BP]).

Veamos que u pertenece a $H_0(U)$. (En este caso $u \in \boldsymbol{D}_\Delta$, el dominio variacional de Δ, y vale por (A') Teor. 3 §**4.7**:

$$\forall g \in H_0 \quad a_{0,k}(u,g) = \int_S \ (-\Delta u)g dx = \int_S \ \varphi g\, k dx.$$

O sea, la solución clásica es también la solución débil.)

PROPOSICIÓN 1. a) Si $K(x,\xi)$ es igual al núcleo de Green $G(x,\xi)$, del problema de Dirichlet para $-\frac{1}{k}\Delta$ en U, o a alguna de sus primeras derivadas,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}G(x,\xi)=\frac{-1}{2\pi}\left\{\frac{x_i-\xi_i}{|x-\xi|^2}-\frac{x_i-\hat{\xi}_i}{\left|x-\hat{\xi}\right|^2}\right\}$$

entonces verifica

(2) $\quad \int_U |K(x,\xi)|d\xi \le C < \infty\,, \quad \int_U |K(x,\xi)|dx \le C < \infty\,, \quad$ para $x,\xi \in U$.

b) Si $\varphi \in Lip_0(U)$ entonces $u(x)=\int_U G(x,\xi)\varphi(\xi)k(\xi)\,d\xi$ pertenece a $H_0(U)$ **.**

DEMOSTRACIÓN. (2) vale en vista de las acotaciones

$0 \le G(x,y) \le \log\left(M/|x-y|\right)$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}G(x,\xi)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{x_i-\xi_i}{|x-\xi|^2}-\frac{x_i-\hat{\xi}_i}{\left|x-\hat{\xi}\right|^2}\right\}\right| \le \frac{1}{2}\left\{|x-\xi|^{-1}+\left|x-\hat{\xi}\right|^{-1}\right\} \le |x-\xi|^{-1}\,,$$

pues $\left(\xi+\hat{\xi}\right)/2 \,\bar{\in}\, \bar{U}$.

Sea $w(x):=\int_U K(x,y)\varphi(y)dy$. Entonces, $\int_U |w(x)|^2 \le C^2\|\varphi\|_2^2$ pues

$$|w(x)|^2 = \left|\int_U K(x,y)\varphi(y)dy\right|^2 \le \int_U |K(x,y)|dy \int_U |K(x,y)||\varphi(y)|^2dy$$
$$\le C\int_U |K(x,y)||\varphi(y)|^2dy.$$

Luego, $\int_U |w(x)|^2dx \le C\int_U dx\int_U |K(x,y)||\varphi(y)|^2dy \le C^2\|\varphi\|_2^2$.

Como $\varphi k \in Lip_0(U) \subset L^\infty(U)$, por el Teorema 1 §**1.0** [BP], sabemos que u, $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ se obtienen de φk vía operadores integrales con los núcleos mencionados en (1) y a). Luego,

(3) $$\|u\|_2, \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_2, \left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|_2 \le M_0\|\varphi\|_{2,k}\,,$$

y tenemos $u \in H^1(U)$. Por ii) del Teorema 1 concluímos que $u \in H_0(U)$, QED.

Por lo dicho, $\mathfrak{G} = \mathbf{G}$ sobre $Lip_0(U)$, que es una familia densa en L^2, y dado que ambos operadores son continuos sobre L^2 vale la

PROPOSICIÓN 2. $\mathfrak{G} = \mathbf{G}$ sobre $L^2(U,k)$**.**

PROPOSICIÓN 3. Sea D una región de Jordan, $J=\partial D$, $k \in Lip_+(D)$. La solución clásica $v \in C(\bar{D})\cap C^2(D)$ de $-\frac{1}{k}\Delta v=\psi$, $\psi \in Lip_0(D)$, $v=0$ en J, pertenece a $H^1(D)$. Si $J \in C^1$ entonces $v \in H_0(D)$ y es la solución débil de $-\frac{1}{k}\Delta v=\psi$, $v=0$ en J**.**

DEMOSTRACIÓN. Sea g la aplicación conforme que lleva D sobre U y $\bar{D}$

topológicamente sobre $\overline{U}$, (teorema de Riemann-Carathéodory). Acorde a nuestra notación la escribimos en su forma real: $\xi = g(x) = (g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2))$, donde $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $x = (x_1, x_2)$, recordando que $g_1(x_1, x_2) + i g_2(x_1, x_2)$ es una función holomorfa en la variable $z = x_1 + i x_2$ de derivada no nula para $(x_1, x_2) \in D$.

Por tanto valen las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = \frac{\partial g_2}{\partial x_2}$, $\frac{\partial g_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial g_2}{\partial x_1}$.

Sea $\Phi(x) = \varphi(g(x))$, $x \in D$.

Entonces, $\Phi \in Lip_0(D)$ si y sólo si $\varphi \in Lip_0(U)$.

Supondremos $\varphi \in Lip_0(U)$. Sean

(4) $\quad u(\xi) = \int_U G(\xi, \tau)\varphi(\tau)\, \tilde{k}(\tau) d\tau$, $\quad \tilde{k}(\tau) := k\big(g^{-1}(\tau)\big) \in Lip_+(U)$.

Puesto que $\varphi\tilde{k} \in Lip_0(U)$ vale $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$, $u = 0$ en ∂U, $-\Delta_\xi u = \varphi(\xi)\, \tilde{k}(\xi)$ donde $\xi \in U$. Sea $v(x) := u(g(x))$.

Utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann obtenemos

(5) $\quad -\Delta_x v = \left(-\Delta_\xi u\right) \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \left[\varphi\big(g(x)\big)\tilde{k}\big(g(x)\big)\right] \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \left(\Phi(x) \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(x_1, x_2)}\right) k(x)$.

Si $\psi(x) := \Phi(x) \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(x_1, x_2)}$ entonces resulta $\psi \in Lip_0(D)$ y $v(x)$ es la solución clásica en D de $-\frac{1}{k}\Delta v = \psi$, $v|_{\partial D} \equiv 0$.

Nuevamente por las ecuaciones de Cauchy-Riemann tenemos

$$|\nabla_x v|^2 = \left|\left(\nabla_\xi u\right)(g(x))\right|^2 \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(x_1, x_2)}.$$

Por (3), $\|\nabla_x v\|_{L^2(D)} = \left\|\nabla_\xi u\right\|_{L^2(U)} \le M_1 \|\varphi\|_{L^2(U,k)}$ y la solución clásica de $-\frac{1}{k}\Delta v = \psi$, $v = 0$ en J, está en $H^1(D)$.

La segunda parte de la Proposición 3 sigue de iii) del Teorema 1, QED.

DEMOSTRACIÓN del TEOREMA 2. a) Existen regiones de Jordan D_n con contornos $J_n \in C^1$, versor tangente continuo en todo punto, $J_n \dot{\to} J$, tales que el soporte de ψ verifica supp $\psi \subset D_1 \subset \overline{D}_n \subset D_{n+1} \subset \overline{D}_{n+1} \subset \cdots \subset D$, $n = 1, 2, \dots$.

Por ejemplo, $D_n := \{x \in D : G(x_0, x) > \varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \downarrow 0$, donde x_0 es un punto de D, $G(x_0, x)$ es el núcleo de Green para la región D, y los ε_n son adecuadamente elegidos, (cf. [BP], Cap. 1). Sea v_n la solución clásica sobre D_n y definimos $\tilde{v}_n = v_n$ en D_n, $\tilde{v}_n = 0$ en $D \setminus D_n$. Sea v la solución clásica de $-\frac{1}{k}\Delta v = \psi$ sobre D.

De $-\frac{1}{k}\Delta v_n = \psi$, $v_n = 0$ en J_n, sigue que $v - \tilde{v}_n$ es una función armónica sobre $D \setminus J_n$, continua sobre $\overline{D}$. Por tanto, $\|v - \tilde{v}_n\|_\infty \le \sup_{z \in J_n} |v(z)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Esto es, v es el límite en $L^{\infty}(D)$, y por tanto en $L^2(D)$, de $\{\tilde{v}_n\}$. En particular tenemos, $\forall n \ \|\tilde{v}_n\|_{2,k} \leq M < \infty$. En vista de la Proposición 3, v_n coincide con la solución débil u_n del mismo problema. Luego, por i) del Teorema 1, obtenemos,

$$\int_D |\nabla\tilde{u}_n|^2 dx = \int_D \nabla\tilde{u}_n \times \nabla\tilde{u}_n\, dx = \int_{D_n} \nabla u_n \times \nabla u_n\, dx = \int_{D_n} \left(-\frac{1}{k}\Delta u_n\right) u_n . k(x) dx$$

$$= \int_{D_n} \psi u_n k dx \leq \|\psi\|_{2,k}\|\tilde{u}_n\|_{2,k} = \|\psi\|_{2,k}\|\tilde{v}_n\|_{2,k} \leq M\|\psi\|_{2,k} = M'$$

Existe entonces $K < \infty$ tal que $|||\tilde{u}_n|||^2 < K^2$.

a') Usaremos a continuación en $H_0(D)$ la norma equivalente $|\cdot|_{H_0}$ asociada al producto escalar, (cf. Corolario de la Proposición 0), $I(u,v) = \int_D \nabla u \times \nabla v\, dx$.

Definamos $w_1 := \tilde{u}_1$, $w_n := \tilde{u}_n - \tilde{u}_{n-1}$, por lo que $\sum_1^N w_j = \tilde{u}_N$. Vale, con $|\cdot|_{H_0}$,

$$w_n \in H_0(D_n) \ominus H_0(D_{n-1}).$$

En efecto, sea $\varphi \in C_0^{\infty}(D_{n-1})$. Puesto que u_m es una solución débil en D_m, tenemos

$$a_{0,k}(w_n,\varphi) = I(w_n,\varphi) = \int_D \nabla(\tilde{u}_n - \tilde{u}_{n-1}) \times \nabla\varphi dx = \int_{D_n} \nabla(\tilde{u}_n - \tilde{u}_{n-1}) \times \nabla\varphi\, dx$$

$$= \int_{D_n} \nabla u_n \times \nabla\varphi\, dx - \int_{D_{n-1}} \nabla u_{n-1} \times \nabla\varphi\, dx = \int_{D_{n-1}} (\psi - \psi)\varphi\, k dx = 0.$$

Entonces vale en $H_0(D)$: $\forall N \ \sum_1^N \left|w_j\right|_{H_0}^2 = |\tilde{u}_N|_{H_0}^2 \leq K^2$. En consecuencia, $\sum_1^N w_j = \tilde{u}_N$ converge en $H_0(D)$ en la norma $|\cdot|_{H_0}$, y por tanto en la norma $|||\cdot|||$, a una función $u \in H_0(D)$. Como $\tilde{u}_N = \tilde{v}_N$ la sucesión $\{\tilde{u}_N\}$ converge en L^2 a la solución clásica v. Así, $u = v$.

b) Hemos probado que $\mathfrak{G} = \mathbf{G}$ sobre $Lip_0(D)$ que es denso en $L^2(D,k)$. Como ambos operadores son completamente continuos de L^2 en L^2 obtenemos su igualdad sobre este espacio.

c) Véanse §**4.7** y §**4.4** para las definiciones de $\boldsymbol{D}_{\Delta}$ y D_{Δ}, respectivamente. El punto c) dice simplemente que el rango de $\mathfrak{G}$ es igual al rango de $\mathbf{G}$, QED.

Veamos ahora el siguiente corolario del teorema precedente.

TEOREMA 3. Sean $k \in Lip_+(D)$, D de Jordan. Vale entonces

1) Las familias de autovalores variacionales y clásicos del problema $-\frac{\Delta}{k}v = \lambda v$ coinciden lo mismo que sus multiplicidades. Los autoespacios correspondientes a un mismo autovalor son iguales y pueden usarse indistintamente las familias $\{\mathfrak{f}_m\}, \{\phi_j\}$.

2) Las soluciones débiles y fuertes del problema de Dirichlet $-\frac{\Delta}{k}v = f \in L^2$ son iguales.

DEMOSTRACIÓN. Los puntos 1) y 2) son consecuencias de b) del Teorema 2. Véanse la **NB** del párrafo §**4.4**, el Teorema 3 del §**4.7** y el § **4.8**, QED.

III. Las ideas de T. Carleman nuevamente.

4.11. Autovalores en una región regular finitamente conexa.

Todas las regiones que consideraremos en esta parte III serán finitamente conexas (*FC*). Si $D \in \boldsymbol{B} \cap FC$ entonces podemos calcular sus autovalores clásicos y variacionales que coinciden como veremos. Una demostración de este hecho para regiones de Jordan *FC* se presenta en el Apéndice a esta Parte III . Pero esto sugiere la conveniencia de acuñar un nombre para una subclase de la familia de regiones regulares finitamente conexas.

DEFINICIÓN 1. Diremos que $D \in \boldsymbol{B} \cap FC$ es normal si para ella vale $\mathfrak{G} = \mathbf{G}$. Denotaremos a esta familia con $\mathcal{N}$.

El siguiente lema describe una propiedad importante de la familia $\mathcal{N}$.

LEMA 1. Sea $D \in \boldsymbol{B} \cap FC$. Si $\{D_n\} \subset \mathcal{N}$, $D_{n+1} \supset \overline{D}_n$ y $D_n \uparrow D$ entonces $D \in \mathcal{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Basta imitar a') de la demostración del Teorema 3 en el Apéndice Parte II, QED.

TEOREMA 1. Sea $D \in \mathcal{N}$ y $k(x) \in Lip_+(D)$. Entonces,

i) las familias de autovalores variacionales y clásicos del problema de Dirichlet para el operador $-\frac{1}{k}\Delta$ coinciden lo mismo que sus multiplicidades y los autoespacios correspondientes a un mismo autovalor son iguales por lo que pueden usarse indistintamente las familias $\{\mathfrak{f}_m\}, \{\phi_j\}$,

ii) $D_\Delta = \{f \in C_0(\overline{D}) : \Delta f \in L^2(D)\} = \{f \in H_0(D) : \Delta f \in L^2(D)\} = \boldsymbol{D}_\Delta$,

iii) sea $\dot{D}$ una región como D tal que $\dot{D} \supset \overline{D}$ y sea $k \in Lip_+(D, \dot{D})$. Entonces los autovalores clásicos verifican

a) $\forall i \;\; \lambda_i \geq \dot{\lambda}_i > 0$,

b) $\lambda_m \cong m$.

DEMOSTRACIÓN. $\mathfrak{G} = \mathbf{G} \Rightarrow$ i), ii).

iii) En esta situación es lícito usar la tesis a) del Teorema 1 del §**4.8** sobre el decrecimiento de los autovalores con el crecimiento de los dominios, aplicada ahora a los autovalores clásicos, QED.

COROLARIO 1. Sean $k \in Lip_+(D)$, $D \in \mathcal{N}$, ϕ_n autofunción clásica de $-\frac{1}{k}\Delta$ tal que $\|\phi_n\|_k = 1$. Entonces,

$$\lambda_n + (\sup k)^{-1} \leq |||\phi_n|||^2 \leq \lambda_n + (\inf k)^{-1}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 1 tenemos $\forall n\colon \phi_n \in H_0$ y de

$$|||\phi_n|||^2 = \int \phi_n^2 dx + \int \nabla\phi_n \times \nabla\phi_n \, dx = \int \phi_n^2 dx - \int \Delta\phi_n . \phi_n dx$$
$$= \int \phi_n^2 dx + \lambda_n \int \phi_n^2 k dx = \int \tfrac{1}{k}\phi_n^2 . k dx + \lambda_n . 1, \qquad \text{QED.}$$

4.12. La familia $\mathbb{S}$ y la propiedad S_ε.

Nos interesan los casos en los que cuando D admita función barrera en todo punto de ∂D tengamos un núcleo de Green, y esto lo tenemos asegurado cuando la región es ñ-conexa, (cf. Teor. 7 §**4.2**). En ese caso también contamos con un teorema de desarrollo. Con frecuencia nos restringiremos a pesos k que verifiquen la siguiente hipótesis en D: $k(p) \in Lip_+(D, \dot{S})$. Por el Teorema 5 de la Introducción existe entonces un $\gamma \in (0,1]$ tal que $k \in Л_\gamma(D)$ y con una función $M(p)$ acotada ($M(p) \le M < \infty$). (Esta restricción no implica que los resultados que obtengamos no puedan generalizarse).

DEFINICIÓN 1. $\mathbb{S}$ designará a la familia de regiones D tales que $\frac{|A(t)| \operatorname{Log} t}{t}$ es integrable en un semientorno del origen. O sea,

$$I = I(D) =: \int_0^{\operatorname{diam} D} |A(t)| \frac{1+|\operatorname{Log} t|}{t} dt < \infty.$$

Recordemos que $A(t) = \{p \in D: \operatorname{dist}(p, \partial D) < t\}$. Vale $\mathbb{S} \supset S_\varepsilon$ cualquiera sea $\varepsilon \in (0,1]$. La propiedad S_ε se presenta realmente pues dado $\varepsilon, 0 < \varepsilon \le 1$, existe una región de Jordan D tal que $|A(t)| \approx t^\varepsilon$ para t pequeño. También se preserva por límites crecientes. Sea D una región ñ-conexa para la que exista una sucesión de regiones ñ-conexas $\{D_n\}$, $D_n \in S_{\varepsilon_n}, J_n = \partial D_n$, tal que

(i) Si $D_n \subset D_{n+1}$, $D_n \neq D_{n+1}$ entonces $\overline{D}_n \subset D_{n+1}$,

(ii) $D_1 \subset \cdots \subset D_n \subset D_{n+1} \subset \cdots \uparrow D$.

Obviamente (ii) implica $J_n \dot{\to} J = \partial D$.

Supongamos que con $\vartheta(D_n, \varepsilon_n) \coloneqq \sup\{|A_n(t)| t^{-\varepsilon_n}: 0 < t \le \operatorname{diam} D\}$ se verifica $\vartheta = \sup_n \vartheta(D_n, \varepsilon_n) < \infty$. Supongamos además que $0 < \eta = \inf \varepsilon_n$. Entonces,

$A(t) \subset \{D \setminus D_n\} \cup A_n(t)$ y

(*) $\qquad |A(t)| \le |D \setminus D_n| + |A_n(t)|$,

por lo que para $0 < t \le 1$ vale $\frac{|A(t)|}{t^\eta} \le \frac{|D \setminus D_n|}{t^\eta} + \frac{|A_n(t)|}{t^\eta} = o(1) + \frac{|A_n(t)|}{t^\eta} \le o(1) + \frac{|A_n(t)|}{t^{\varepsilon_n}}$.

Por tanto, $\frac{|A(t)|}{t^\eta} \le \vartheta$ y $D \in S_\eta$.

La propiedad S_ε puede prácticamente caracterizarse de la siguiente manera.

LEMA 1. Si $0 < \tau < \varepsilon \le 1$ entonces $D \in S_\varepsilon \Rightarrow \int_0^M \frac{|A(x)|}{x^{1+\tau}} dx < \infty$.

Si $0 < \tau \leq 1$ entonces $\int_0^M \frac{|A(x)|}{x^{1+\tau}} dx < \infty \Rightarrow D \in S_\tau$.

DEMOSTRACIÓN. La primera implicación es inmediata. Veamos la segunda. La integral $\tau \int_t^M \frac{|A(x)|}{x^{1+\tau}} dx = -\int_t^M |A(x)| d\frac{1}{x^\tau}$ existe y es finita. Como $|A(t)|$ es una función monótona y continua también existe $\int_t^M \frac{1}{x^\tau} d\,|A(x)|$ y vale

$$\tau \int_t^M \frac{|A(x)|}{x^{1+\tau}} dx = -\frac{|A(M)|}{M^\tau} + \frac{|A(t)|}{t^\tau} + \int_t^M \frac{1}{x^\tau} d|A(t)|.$$

Por tanto, $\frac{|A(M)|}{M^\tau} + \tau \int_0^M \frac{|A(x)|}{x^{1+\tau}} dx \geq \frac{|A(t)|}{t^\tau}$, QED.

Por otra parte, si $\gamma \in (0,1)$, existe una curva de Jordan L de área nula de región interior E tal que para cierto $m > 0$ y $t > 0$ suficientemente pequeño satisface

$|A(t)| \geq m|\mathrm{Log}\, t|^{-\gamma}$, ([K]). Por tanto, $I(E) = \infty$ y $E \,\overline{\in}\, \mathbb{S}$.

La propiedad $\mathbb{S}$ también se conserva por límites crecientes. Esto sigue de la desigualdad (*) utilizando el lema de Fatou. En efecto, supongamos $\sup I(D_n) < \infty$. Entonces,

$|A(t)| \frac{1+|\mathrm{Log}\, t|}{t} \leq \underline{\lim} \left((|D \setminus D_n| + |A_n(t)|) \frac{1+|\mathrm{Log}\, t|}{t} \right) = \underline{\lim} \left(|A_n(t)| \frac{1+|\mathrm{Log}\, t|}{t} \right)$; luego,

$$I(D) \leq \int_0^{\operatorname{diam} D} \underline{\lim} \left(|A_n(t)| \frac{1+|\mathrm{Log}\, t|}{t} \right) dt \leq \underline{\lim} \int_0^{\operatorname{diam} D} |A_n(t)| \frac{1+|\mathrm{Log}\, t|}{t} dt$$

$$= \underline{\lim} \left(\int_0^{\operatorname{diam} D_n} + \int_{\operatorname{diam} D_n}^{\operatorname{diam} D} \right) = \underline{\lim} (I(D_n) + o(1)) = \underline{\lim}\, I(D_n) \leq \sup I(D_n) < \infty.$$

4.13. Regiones no regulares. Límite de autovalores.

El concepto de autovalor fue definido (explícita o tácitamente) en los párrafos §**4.1**, §**4.4**, y §**4.7** y utilizado en los teoremas: 1 §**4.1**, 1 §**4.4**, 1, 2 y 3 §**4.7**. La siguiente definición, necesaria y conveniente para lo que sigue, las comprende conceptualmente a todas.

DEFINICIÓN 1. Por autovalor λ_n de $-\frac{1}{k(q)}\Delta_q$ en D región ñ-conexa entenderemos el recíproco del valor propio μ_n ($\neq 0$) del operador inverso $\mathbf{G} = \left(-\frac{1}{k}\Delta\right)^{-1}$.

Hemos visto (T. 8, §**4.2**) que las regiones $D \in \boldsymbol{B}$, ñ-conexas, admiten núcleo de Green[1] y por tanto operador de Green, por lo que la Definición 1 se aplica al caso D regular.

DEFINICIÓN 2. Una región D se dirá que pertenece a $\boldsymbol{W}_{\tilde{n}}(\{D_n\})$ si es ñ-conexa y existe una sucesión de regiones ñ-conexas $\{D_n\} \subset \boldsymbol{\mathcal{N}}$ tal que

(i) Si $D_n \subset D_{n+1}$, $D_n \neq D_{n+1}$ entonces $\overline{D}_n \subset D_{n+1}$,

(ii) $D_1 \subset \cdots \subset D_n \subset D_{n+1} \subset \cdots \uparrow D$.

[1] Para comparar con el caso variacional véase Teor. 3 §**4.9**.

Tenemos ahora $D \in \boldsymbol{\mathcal{N}}$ si $D \in \boldsymbol{B}$, (cf. Lema 1 §**4.11**).

Supongamos que D es una región ñ-conexa tal que $D \,\bar{\in}\, \boldsymbol{B}$. Por el Teorema 2 del §**4.3** resulta que los puntos irregulares de ∂D son aislados y forman un conjunto $\tilde{J}$ de cardinalidad *h* finita y positiva.

NOTACIÓN. $\widetilde{D} = D \cup \tilde{J}$**.**

PROPOSICIÓN 1. $\widetilde{D}$ es una región $(\tilde{n} - h)$-conexa tal que $\widetilde{D} \in \boldsymbol{B}$**.**

TEOREMA 1. Sean *D* una región de $\boldsymbol{W}_{\tilde{\mathbf{n}}}(\{D_n\})$ y $k(p) \in Lip_+(D, \dot{S})$.

i) Si *D* tiene la propiedad $\boldsymbol{B}$ entonces $\lambda_{m,j} \downarrow \lambda_j$.

ii) Si $D \,\bar{\in}\, \boldsymbol{B}$ entonces $\lambda_{m,j} \downarrow l_j > 0$. $\mu_j = 1/l_j$ es el *j*-ésimo valor propio del operador Hilbert-Schmidt $\boldsymbol{\mathcal{G}}f(p) = \int_D \mathcal{G}(p,q) f(q)\, k(q) dq$ con núcleo $\mathcal{G}(\cdot,\cdot)$ definido en iii).

iii) Si $D \,\bar{\in}\, \boldsymbol{B}$, k puede extenderse a $\tilde{k} \in Lip_+(\widetilde{D}, \dot{S})$ y vale

$$\mathcal{G}(p,q) = \tilde{G}(p,q) I_{D \times D} \text{ a.e.} \quad \text{y} \quad l_j = \tilde{\lambda}_j.$$

DEMOSTRACIÓN. Definimos $G_{(m)}$ a partir del núcleo de Green G_m:

$$G_{(m)}(p,q) = G_m(p,q) \quad \text{si } (p,q) \in D_m \times D_m,$$
$$G_{(m)}(p,q) = 0 \qquad \text{si } (p,q) \in D \times D \setminus D_m \times D_m.$$

Los operadores $\boldsymbol{G}_{(m)}$ y $\mathbf{G}_m$ correspondientes tienen los mismos valores propios positivos y extendiendo por cero la *j*-ésima autofunción de $\mathbf{G}_m$ se obtiene la *j*-ésima autofunción de $\boldsymbol{G}_{(m)}$. De los Teoremas 1-3 §**4.3** y sus Corolarios sigue que

(1) $\forall (p,q) \in D \times D \qquad G_{(m)}(p,q) \uparrow \mathcal{G}(p,q) \qquad 0 < \mathcal{G}(p,q) \in L^2(D \times D, k \times k)$,

pues por (v) Teor. 1 §**4.3**: $\left\|\boldsymbol{G}_{(m)}\right\|_{2,k} \leq \sqrt{\|k\|_\infty}\, \text{diam}\, D$. Por tanto, $\mathcal{G}(p,q) = \mathcal{G}(q,p)$.

El operador de Hilbert-Schmidt

(2) $$(\boldsymbol{\mathcal{G}}f)(p) = \int_D \mathcal{G}(p,q) f(q)\, k(q) dq$$

es tal que su núcleo verifica

(3) $$\mathcal{G} = G_{(m)} + \left(\mathcal{G} - G_{(m)}\right), \quad \left\|\mathcal{G} - G_{(m)}\right\|_{2,k} \to 0.$$

En consecuencia, $\boldsymbol{G}_{(m)}$ y $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ son completamente continuos y $\left\|\boldsymbol{\mathcal{G}} - \boldsymbol{G}_{(m)}\right\|_{op} \to 0$.

i) D es regular. Vale $G(p,q) = g_D(p,q)$, $\mathbf{G}f(p) = \int_D G(p,q) f(q) k(q) dq$.

Aplicando resultados de Weyl y Courant, (cf. [RN] §95), deducimos que para cada $j = 1,2,\cdots$ y $(0 <)\ \tau_j =$ *j*-ésimo valor propio de **G**, vale

(4) $$\mu_{m,j} \to \tau_j.$$

Por el Teorema 1 §**4.11**, $\mu_{m,j}^{-1} = \lambda_{m,j} \downarrow \lambda_j = \tau_j^{-1} > 0$, $\lambda_j =$ *j*-ésimo autovalor de **G**.

(Otra demostración de (4): $\mu_{m,j} \uparrow \tau_j$ sigue de $\mu_{1,j} \leq \mu_{2,j} \leq \cdots \leq \tau_j$ y de

$\sum_j \mu_{m,j}^2 = \left\| G_{(m)} \right\|_{2,k\times k}^2 \uparrow \|G\|_{2,k\times k}^2 = \sum_j \tau_j^2$.)

ii) y iii) Si $D \overline{\in} \boldsymbol{B}$ no existe operador de Green, por lo tanto no se puede hablar de sus valores propios, cuyos inversos habíamos llamado autovalores del problema de Dirichlet del operador $-\frac{1}{k(q)}\Delta_q$ en la región D. Sin embargo existe $l_j = \lim_m \lambda_{m,j}$.

Ignorando en las J_m las componentes que rodean a puntos de $\tilde{J}$ se obtiene una familia $\{\widetilde{D}_m\}$ tal que $\widetilde{D}_m \uparrow \widetilde{D}$. Estamos entonces en la situación del punto i) y de manera que $|\widetilde{D} \setminus D| = 0$, y vale $\forall (p,q) \in \widetilde{D} \times \widetilde{D}$, $\tilde{G}_{(m)}(p,q) \uparrow \tilde{G}(p,q) > 0$.

Como $0 \leq G_{(m)}(p,q) \leq \tilde{G}_{(m)}(p,q)\ \forall (p,q) \in D \times D$, resulta allí

$$0 \leq \mathcal{G}(p,q) := \lim_m G_{(m)}(p,q) \leq \tilde{G}(p,q).$$

Sea $0 \leq f(p) \in L^\infty(D)$ con soporte contenido en D_n. Sea $\tilde{f} = f$ en D, $\tilde{f} = 0$ en $\tilde{J}$. Si definimos $U_m(p) := \int_D G_{(m)}(p,q) f(q)\, k(q) dq$ y $U'(p) \coloneqq \int_D \mathcal{G}(p,q) f(q)\, k(q) dq$, resulta $U_m(p) \uparrow U'(p)$ y $\lim_{m\to\infty} \|U_m - U'\|_{2,k} = 0$. Vale entonces

$0 \leq U'(p) \leq V(p) \coloneqq \int_D \tilde{G}(p,q) f(q)\, k(q) dq = \int_{\widetilde{D}} \tilde{G}(p,q) \tilde{f}(q)\, \tilde{k}(q) dq = \tilde{\mathbf{G}}(\tilde{f})(p)$.

$U'(p)$ es una función integrable definida en D. V es una función continua en la clausura de $\widetilde{D}$, nula en el borde.

En D_m, $m \geq n$, tenemos $-kf = \Delta U_m$ y en $D'(D_n)$ tenemos $\Delta U_m \to \Delta U'$. Luego, $-kf = \Delta U'$ en $D'(D_n)$. Por tanto esto mismo vale en $D'(D)$.

También $-kf = \Delta V$ $(D'(D))$. Por tanto $\Delta(V - U') = 0$ en $D'(D)$ y $V - U' = h$ a.e. donde h es una función armónica en D. Luego, a.e. $U' = U \coloneqq V - h \in C(D)$.

Como U es continua, $0 \leq U(p) \leq V(p) = (\tilde{\mathbf{G}}\tilde{f})(p)$ si $p \in D$. Por otra parte, U puede extenderse como cero a $\partial\widetilde{D}$ pues $V(p) \in C(\widetilde{D} \cup \partial\widetilde{D})$ y V se anula en $\partial\widetilde{D}$.

h puede extenderse a $\widetilde{D}$ como $\tilde{h}$ (armónica) pues como $0 \leq h(x) \leq V(x)$, $x \in D$, tiene singularidades evitables sobre los puntos aislados de $\tilde{J}$. Pero $\tilde{h}$ se anula en $\partial\widetilde{D}$ por lo que debe ser $\tilde{h}(p) = 0$, $p \in \widetilde{D}$. Luego, $V = U$ en D.

Esta igualdad vale aún para cualquier $f(p) \in L^\infty(D)$ de soporte compacto en D. En consecuencia, $\forall f \in L^2(D)$: $\int_D \tilde{G}(p,q) f(q)\, k(q) dq = \int_D \mathcal{G}(p,q) f(q)\, k(q) dq$ a.e. Por tanto, $\mathcal{G}(p,q) = \tilde{G}(p,q) I_{D\times D}$ en $L^2(D \times D)$.

Por lo dicho y utilizando una adecuada caracterización de los valores propios, (ver §95 [RN]), se comprueba que los operadores $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ sobre $L^2(D,k)$ y $\tilde{\mathbf{G}}$ sobre $L^2(\widetilde{D},\tilde{k})$, deben tener los mismos valores propios. Podemos ahora repetir los argumentos que probaron (4) pero con $l_j = \tilde{\lambda}_j$ en lugar de λ_j y $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ en lugar de **G**, QED.

TEOREMA 2. Si $D \in \boldsymbol{B} \cap \mathbb{S}$ es ñ-conexa entonces la función continua $H(p,p)$ es absolutamente integrable, (cf. Def. 3 y Teor. 8 §**4.2**).

DEMOSTRACIÓN. $D \in \boldsymbol{B}$ asegura la existencia de función de Green y por tanto de la función $H(p,q)$. Vale $|H(p,q)| \leq \frac{1}{2\pi}\log\frac{M}{|p-q|}$ con $M = \text{diam}\, D$. Si $l(p) = \text{dist}(p,J)$ y $q \in J = \partial D$ entonces $|H(p,q)| \leq \frac{1}{2\pi}\log\frac{M}{l(p)}$. En consecuencia, $|H(p,p)| \leq \frac{1}{2\pi}\log\frac{M}{l(p)}$.

Por tanto, $\int_D |H(p,p)|dp \leq \int_D \frac{1}{2\pi}\log\frac{M}{l(p)}dp.$ Pero,

$\int_D \log\frac{M}{l(p)}dp = \int_D dp \int_{l(p)}^{\text{diam}\, D}\frac{dt}{t} = \int_0^{\text{diam}\, D}\frac{dt}{t}\int_D I_{\{t>l(p)\}}dp = \int_0^M |A(t)|\frac{dt}{t} \leq I(D).$

Por tanto, $\int_D |H(p,p)|dp \leq I(D)/2\pi < \infty$, QED.

En el siguiente Teorema 3 D puede ser una región muy general. El resultado no se limita a regiones de Jordan como en [BP] y su demostración comienza en la sección siguiente. Por comodidad supondremos el peso k en la clase $Lip_+(D,\dot{S})$.

TEOREMA 3 (Weyl-Carleman). Sean $k(x) \in Lip_+\left(D,\dot{S}\right)$ y $D \in \boldsymbol{B}$ una región ñ-conexa con la propiedad $\mathbb{S}$. Entonces, los autovalores del problema de Dirichlet para el operador de Sturm-Liouville $(-\frac{1}{k(x)})\Delta_x$ verifican

(5) $$\lambda_n \int_D k(p)dp \sim 4\pi n.$$

De este teorema se deduce el, (cf. [BP] §**3.0**),

TEOREMA 4. Sean $D \in \boldsymbol{B}$ y $k(x) \in Lip_+\left(D,\dot{S}\right)$. Si el contorno J tiene dimensión de Minkowski $\mathbf{d} < 2$ entonces los autovalores de $\Delta u + \lambda k(x)u = 0, u \in \c{S}(D)$, verifican (5) para $n \to \infty$.

En efecto, bastará utilizar para su demostración la siguiente proposición, (cf. [BP]).

TEOREMA 5. Si $\mathbf{d} \in [1,2)$ entonces dado $\varepsilon > 0$ $\exists t_0 = t_0(\varepsilon) < 1$ tal que $\forall t \in [0, t_0(\varepsilon))$ se verifica $|A(t)| \leq t^\eta$ cualquiera sea $\eta \in (0, 2 - \mathbf{d} - \varepsilon]$.

O sea, en el Teorema 4, $D \in S_\eta \subset \mathbb{S}$ y se aplica el Teorema 3.

4.14. El núcleo de Green $G_k(p,q;\lambda)$ del operador $-(\Delta + \lambda k)$ para $\lambda < 0$ y sus propiedades. Aquí $\lambda = -\chi^2 = -t$, $\chi > 0$. Dados $\lambda,\ k(q) \in Lip_+(D,\dot{S})$, $\mathcal{L}{:} = \Delta + \lambda k$

es la perturbación de Δ por el sumando $\lambda k(q)$. Luego $G_k(p,q;\lambda)$ será el núcleo de Green de $-\mathcal{L}$. Sea $\{\phi_n\}$ la familia de autofunciones del operador $-\frac{1}{k(q)}\Delta_q$. Como $-(\Delta+\lambda k)\phi_n = (\lambda_n-\lambda)k\phi_n$, el núcleo de Green $G_k(p,q;\lambda)$ deberá satisfacer la relación: $\int_D G_k(p,q;\lambda)\phi_n(q)k(q)dq = \frac{\phi_n(p)}{\lambda_n-\lambda}$. O sea, respecto del sistema $\{\phi_n(q)\}$ y el peso k, deberá valer: $c_n(G_k) = \frac{\phi_n(p)}{\lambda_n-\lambda}$.

DEFINICIÓN 1. $G_k(p,q;\lambda) := \sum \phi_n(p)\phi_n(q)/(\lambda_n-\lambda)$**.**

Para $\lambda = 0$ tenemos, según esta definición, $G_k(p,q;0) := \sum \phi_n(p)\phi_n(q)/\lambda_n$, por lo que $G_k(p,q;0) = G(p,q)$, el núcleo de Green del operador $-\Delta$. Entonces

(2) $G_k(p,q;\lambda) =$

$$= G(p,q) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(p)\phi_n(q)/(\lambda_n(\lambda_n-\lambda)) = G(p,q) + F_k(p,q;\lambda)$$

En vista de (v) Teor. 1 §**4.4**, $F_k(p,q;\lambda)$ es acotada en $\overline{D}\times\overline{D}$. $G_k(p,q;\lambda)$ es simétrica y define un operador Hilbert-Schmidt en $L^2(D)$. De las definiciones resultan, para todo p y todo n, los siguientes coeficientes de Fourier,

(3) $c_n(G_k) = \frac{\phi_n(p)}{\lambda_n-\lambda}$, $\quad c_n(F_k) = \frac{\lambda}{\lambda_n}\frac{\phi_n(p)}{\lambda_n-\lambda}$, $\quad c_n(G) = \frac{\phi_n(p)}{\lambda_n}$.

DEFINICIÓN 2. $\left(G_t^{(1)}u\right)(p) := \int_D G_k(p,q;-t)u(q)dq$,

$$(F_t f)(p) := \int_D F_k(p,q;-t)f(q)dq\textbf{.}$$

El operador $G_t^{(1)}$ puede escribirse como la suma de dos operadores Hilbert-Schmidt: $G_t^{(1)} = G_0^{(1)} + F_t$ y es completamente continuo de L^2 en L^2. Más aún,

TEOREMA 1. $G_0^{(1)}$ es completamente continuo de $L^2(D)$ en $C_0(\overline{D})$**.**

DEMOSTRACIÓN. [BP], §**3.1**, Teorema 1, QED.

Por otra parte tenemos,

$$\left|\sum_1^\infty\left(\frac{\phi_n^2(p)}{\lambda_n^2} - \frac{\phi_n^2(p')}{\lambda_n^2}\right)\right| \le \sum\left|\frac{\phi_n(p)+\phi_n(p')}{\lambda_n}\right|\left|\frac{\phi_n(p)-\phi_n(p')}{\lambda_n}\right| \le$$

$$\le 2C\left(\sum\left|\frac{\phi_n(p)-\phi_n(p')}{\lambda_n}\right|^2\right)^{1/2} \le 2C\sqrt{\|k\|_\infty}\left(\int_D |G(p,q)-G(p',q)|^2dq\right)^{1/2}.$$

Por tanto, $\sum\left|\frac{\phi_n(p)}{\lambda_n}\right|^2 \in C_0(\overline{D})$. Del teorema de Dini sigue que

(4) $\sum_N^\infty \left|\frac{\phi_n}{\lambda_n}\right|^2 \downarrow 0$, uniformemente para $N\to\infty$.

Se deduce que si $T \le \lambda < 0$ entonces $\left|\sum_N^\infty \frac{\lambda\phi_n(p)}{\lambda_n}\frac{\phi_n(q)}{\lambda_n-\lambda}\right| < \varepsilon$ para $N > N(\varepsilon,T)$, y que vale el

TEOREMA 2. $F_k(p,q;\lambda)=\sum_1^\infty \frac{\lambda\phi_n(p)}{\lambda_n}\frac{\phi_n(q)}{\lambda_n-\lambda}\in C(\overline{D}\times\overline{D}\times(-\infty,0)))$ y

$F_k(p,q;\lambda)=0$ si $p\in\partial D$ o $q\in\partial D$**.**

$F_t f(.)=\int_D F_k(.,q;-t)f(q)dq$, es un operador acotado de $L^2(D)$ en $L^\infty(D)$. Del Teorema 2 sigue que F_t es un operador completamente continuo de $L^2(D)$ en $C_0(\overline{D})$.

TEOREMA 3. $G_t^{(1)}$ es un operador completamente continuo de $L^2(D)$ en $C_0(\overline{D})$**.**

TEOREMA 4. El operador $G_t^{(1)}$ tiene las siguientes propiedades *i*)-*vi*).

i) Si $u\in C_0(\overline{D})$ y, en el sentido de $D'(D)$, vale $\mathcal{L}u=(\Delta+\lambda k)u=f\in L^2(D)$, entonces para todo $p\in\overline{D}$, $u(p)=-G_t^{(1)}f(p)=-\int_D G_k(p,q;\lambda)f(q)dq$.

ii) $G_k(p,q;\lambda)=G_k(q,p;\lambda)$ para todo $(p,q)\in D\times D$.

iii) Si $f\in L^2(D)$ y $u(p):=-\left(G_t^{(1)}f\right)(p)$, $p\in\overline{D}$, entonces $u\in C_0(\overline{D})$ y en el sentido de las distribuciones en *D*: $\mathcal{L}u=f$.

iv) Para cierta constante $c_1\geq$ diam D vale $-\|F_k\|_\infty\leq G_k(p,q;\lambda)\leq\log\frac{c_1}{|p-q|}$.

v) $\int_D |G_k(p,q;\lambda|^2k(q)dq$ y $\int_D |G_k(p,q;\lambda|^2dq$ son uniformemente acotadas en $p\in\overline{D}$.

vi) $G_k(\cdot,\cdot;\lambda)\in L^2(D\times D;k\times k)$**.**

DEMOSTRACIÓN. *iii*). De (3) y (4) obtenemos: $u(p)=-\sum c_n(\frac{f}{k})\frac{\phi_n(p)}{\lambda_n-\lambda}$, donde la serie converge uniformemente. Como $-(\Delta+\lambda k)\phi_n=(\lambda_n-\lambda)k\phi_n$, obtenemos, en $D'(D)$,

$$\mathcal{L}u=-(\Delta+\lambda k)(-u)=\sum\frac{\lambda_n-\lambda}{\lambda_n-\lambda}\phi_n k.c_n\left(\frac{f}{k}\right)=k.\sum\phi_n c_n\left(\frac{f}{k}\right)=k\frac{f}{k}=f.$$

i) Sean $f=\mathcal{L}u$, $v=-G_t^{(1)}f$. Por *iii*), $\mathcal{L}v=-\mathcal{L}\int G_k f\,dq=f\ (D'(D))$ y $\mathcal{L}[v-u]=0$. Como $v-u\in C_0(\overline{D})$, de la siguiente Proposición 1 obtenemos $v=u$, QED.

PROPOSICIÓN 1. Sea μ una constante real, $\Phi\in C_0(\overline{D})$ y $(\Delta+\lambda k+\mu)\Phi=0$ $(D'(D))$. Entonces $\Phi\in Ş(D)$ y si $\lambda k+\mu\leq 0$, $\Phi=0$**.**

DEMOSTRACIÓN. Tenemos, $-\Delta\Phi=(\lambda k+\mu)\Phi\in L^\infty$. Luego, $E*(\lambda k+\mu)\Phi\in C^1$ (Cap. 0 [BP]) lo que implica $\Phi\in C^1$ y $(\lambda k+\mu)\Phi\in L^\infty\cap Lip_{loc}$. Otra vez del Cap. 0 [BP] obtenemos $\Phi\in C^2$. En consecuencia, $\Phi\in Ş(D)$ y $-(\Delta+\lambda k)\Phi=\mu\Phi$ en sentido ordinario. Si además $\lambda k+\mu\leq 0$, del Teorema 2, § **0.4.1**, de unicidad y continuidad, obtenemos $\Phi=0$, QED.

PROPOSICIÓN 2. Un núcleo G_k que satisface *iii*) y *vi*) para toda $\phi \in C_0^\infty(D)$ es único con esas propiedades**.**

DEMOSTRACIÓN. Sean A y B dos núcleos que satisfacen la hipótesis y $\phi \in C_0^\infty(D)$. Se tiene $u = -\int A\phi,\ \ w = -\int B\phi$ ambas en $C_0(\overline{D})$. De $(\Delta + \lambda k)(u - w) = 0$, por la Proposición 2, obtenemos $u = w$. Luego, $\int (A - B)\phi dq = 0$, por lo que $(A - B)(p,\cdot\,;\lambda) = 0\ \ (L^2)$. Por tanto, $A = B\ a.e.$, QED.

DEFINICIÓN 3. Definimos el dominio del operador diferencial $-(\Delta + \lambda k)$ en D región ñ-conexa regular, $\lambda \leq 0$, como $D_{\Delta+\lambda k}(D) = D_\Delta(D) = \{u \in C_0(\overline{D}) : \Delta u \in L^2\}$**.**

De las **NOTAS** del §**4.4** deducimos que el operador diferencial $-(\Delta + \lambda k)$ con dominio $D_{\Delta+\lambda k}$ es un operador cerrado. Además es biunívoco, pues si $u \in D_{\Delta+\lambda k}(D)$, $(\Delta + \lambda k)u = 0$, entonces, por la Proposición 1, $u = 0$.

TEOREMA 5. Si $\lambda = -t < 0$ entonces $(\Delta + \lambda k)D_\Delta = L^2$ y para toda $v \in L^2(D)$,

$$((\Delta + \lambda k)^{-1}v)(p) = -\left(G_t^{(1)}v\right)(p) = -\int_D G_k(p,q;-t)v(q)dq\textbf{.}$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición de D_Δ, $(\Delta + \lambda k)D_\Delta \subset L^2$.

$(\Delta + \lambda k)D_\Delta = L^2$: *iii*) del Teorema 4 junto con el Teorema 3 dicen precisamente que si $v \in L^2$ entonces $u = -\left(G_t^{(1)}v\right)(p) \in D_\Delta$ y que $\mathcal{L}u = v$, QED.

En otras palabras, $-G_t^{(1)}$ es el operador de Green de $\Delta + \lambda k$ y $-G_k(p,q;\lambda)$ es su núcleo de Green.

PROPOSICIÓN 3. Son equivalentes las proposiciones *a*) y *b*) para $\lambda = -t < 0$:

a) $\Phi \in L^2,\ \Phi = \mu G_t^{(1)}\Phi$, *b*) $\Phi \in \c{S}, -(\Delta + \lambda k)\Phi = \mu\Phi$,

c) si $\mu \leq |\lambda|k,\ \lambda < 0$ y vale *a*) entonces $\Phi = 0$**.**

DEMOSTRACIÓN. Basta demostrar la equivalencia para $\mu \neq 0$.

b)⟹*a*). Sea $\Phi \in \c{S}(D)$. Si $(\Delta + \lambda k)\Phi = -\mu\Phi$, de *i*) Teorema 4 obtenemos $\Phi = G_t^{(1)}(\mu\Phi)$. Por tanto, $\Phi = \mu G_t^{(1)}(\Phi)$.

a)⟹*b*). Sea $\Phi \in L^2$ y $\Phi = G_t^{(1)}(\mu\Phi)$. De *iii*) T.4 sigue que $\Phi \in C_0(\overline{D})$ y también que $(\Delta + \lambda k)\Phi = -\mu\Phi\ \ (D'(D))$. De la Proposición 1 sigue que $\Phi \in \c{S}(D)$ y que $-(\Delta + \lambda k)\Phi = \mu\Phi$ vale en sentido ordinario, QED.

4.15. Aproximación del núcleo de Green $G_k(p,q;\lambda)$ por la función de Kelvin K_0.

Sea K_0 la función de Kelvin: $K_0(r) := \int_1^\infty e^{-rt}(t^2 - 1)^{-1/2}dt, r > 0$, que satisface

(1) $K_0(r) = -\log r + (1 - I_0(r))\log r + P(r)$, con $P(z), I_0(z)$ enteras en z^2,

y verifica $K_0(r) \le e^{-\frac{r}{2}} K_0(r/2)$.

Para $t > 0$ vale $0 < -K_0'(t) \le C_1 \frac{e^{-t/2}}{t}$.

I_0 es una función de Bessel modificada. De (1) obtenemos

$K_0(|x|) = -\log|x| + Q(|x|)$, donde $Q(r) \in C^1([0,\infty))$, $Q(|x|) \in C^1(R^2)$.

Entonces, la función en q para $p \in D$, $\frac{1}{2\pi} K_0(\chi|p-q|)$, es tal que

$$\frac{1}{2\pi} K_0(\chi|p-q|) + \frac{1}{2\pi}\log|p-q| \in C(\overline{D}),$$

y se sabe que en $D'(R^2)$ vale, ([S]),

$$-(\Delta_q - \chi^2)\frac{1}{2\pi} K_0(\chi|p-q|) = \delta_p. \tag{2}$$

DEFINICIÓN 1. Para $\lambda = -\chi^2 < 0$, $w > 0$, definimos

$$\begin{aligned} H_k^w(p,q;\lambda) &:= -G_k(p,q;\lambda) + \frac{1}{2\pi} K_0(\chi w|p-q|) \\ &= -F_k(p,q;\lambda) + \left\{\frac{1}{2\pi} K_0(\chi w|p-q|) - G(p,q)\right\}. \end{aligned}$$

Escribiremos cuando no haya lugar a confusión $H(p,q;\lambda)$, o simplemente H, en lugar de $H_k^w(p,q;\lambda)$. Por lo dicho, $H(p,.;\lambda)$ es continua y acotada en $\overline{D}$.

De la definición de G y de las fórmulas (1)-(2), se deduce la siguiente

PROPOSICIÓN 1. $H_k^w(p,q;-\chi^2) \in C(D \times D \times (0 < \chi < \infty) \times (0 < w < \infty))$.

Tenemos entonces las siguientes relaciones donde $\mathcal{L} \equiv \Delta_q + \lambda k(q)$,

$$G_k(p,q;\lambda) = \frac{1}{2\pi} K_0(\chi w|p-q|) - H_k^w(p,q;\lambda) = G(p,q) + F_k(p,q;\lambda) \tag{3}$$

$$\begin{cases} H_k^w(p,q;\lambda) = H_k^w(q,p;\lambda), & (p,q) \in D \times D \\ \mathcal{L}(H) = -\lambda(w^2 - k(q))\frac{1}{2\pi} K_0(\chi w|p-q|) & \text{en } D'(q \in D) \\ H_k^w(p,\tilde{q};\lambda) = \frac{1}{2\pi} K_0(\chi w|p-\tilde{q}|), & (p,\tilde{q}) \in D \times \partial D \end{cases} \tag{4}$$

Es solo necesario verificar la segunda igualdad que demostramos a continuación.

TEOREMA 1. $\mathcal{L}(H) = \chi^2(w^2 - k(q))\frac{1}{2\pi} K_0(\chi w|p-q|)$.

DEMOSTRACIÓN. Como $(\Delta_q + \lambda k(q))\phi_n = (\lambda - \lambda_n)k(q)\phi_n$ y $\Delta_q G(p,q) = -\delta_p$, en $D'(q \in D)$, resulta que

$$\begin{aligned} (\Delta_q + \lambda k(q))(-G_k(p,q;\lambda)) &= -(\Delta_q + \lambda k)(G(p,q) + F_k(p,q;\lambda)) \\ &= \delta_p - \lambda k(q)\left[G(p,q) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(p)\phi_n(q)}{\lambda_n}\right] = \delta_p \end{aligned}$$

O sea, $-\mathcal{L}(G_k(p,.;\lambda)) = \delta_p \quad D'(D)$. Luego, $\Delta_q G_k = -\delta_p + k(q)\chi^2 G_k$.

Por (2) vale también $\Delta_q G_k = -\delta_p + \chi^2 w^2 \frac{1}{2\pi} K_0(\chi w|p-q|) - \Delta_q H$.

De las dos últimas igualdades obtenemos en $D'(q \in D)$,

$(\Delta_q - \chi^2 k)H = \chi^2 w^2 \frac{1}{2\pi} K_0(\chi w|p-q|) - k(q)\chi^2 G_k - \chi^2 kH$; por tanto,

$$\mathcal{L}(H) = \mathcal{L}_q(H) = \chi^2 w^2 \frac{1}{2\pi} K_0(\chi w|p-q|) - k\chi^2(G_k + H), \qquad \text{QED.}$$

Puesto que $k \in Lip_+(D, \dot{S})$ existe α tal que $k \in Л_\alpha(D)$ y para cierta constante M vale

(5) $$M(p) = \sup_{q \in D \setminus \{p\}} \frac{|k(p)-k(q)|}{|p-q|^\alpha} \leq M < \infty.$$

Tenemos entonces la siguiente estimación de $\mathcal{L}(H_k^w)$ y para $w = \sqrt{k(p)}$,

TEOREMA 2. $\mathcal{L}(H_k^{\sqrt{k(p)}}) \leq C_0 \chi^{2-\alpha}$.

DEMOSTRACIÓN. Por Teorema 1 tenemos,

$$\mathcal{L}\left(H_k^{\sqrt{k(p)}}\right) = \chi^2\big(k(p)-k(q)\big)\frac{1}{2\pi}K_0\big(\chi\sqrt{k(p)}|p-q|\big)$$

$$= \chi^{2-\alpha}\frac{(k(p)-k(q))}{|p-q|^\alpha}.\left\{\frac{1}{k(p)^{\alpha/2}}\big(\chi\sqrt{k(p)}|p-q|\big)^\alpha \frac{1}{2\pi}K_0\big(\chi\sqrt{k(p)}|p-q|\big)\right\}.$$

Luego, si $p, q \in D, p \neq q$,

$$r(p,q;\lambda) := \frac{1}{k(p)^{\alpha/2}}\big(\chi\sqrt{k(p)}|p-q|\big)^\alpha \frac{1}{2\pi}K_0\big(\chi\sqrt{k(p)}|p-q|\big),$$

entonces

$$\left|\mathcal{L}\left(H_k^{\sqrt{k(p)}}\right)\right| = \chi^{2-\alpha}\frac{|k(p)-k(q)|}{|p-q|^\alpha}.r(p,q;\lambda) \leq \chi^{2-\alpha}M(p)\, r(p,q;\lambda).$$

$t^\alpha K_0(t)$ es una función acotada en $(0,\infty)$ que tiende a cero para $t \to 0$. Luego,

(6) $$0 \leq r(p,q;\lambda) = \frac{1}{k(p)^{\alpha/2}}\big(\chi\sqrt{k(p)}|p-q|\big)^\alpha \frac{1}{2\pi}K_0\big(\chi\sqrt{k(p)}|p-q|\big) \leq C' < \infty.$$

En consecuencia, $|\mathcal{L}(H)| \leq C'M\chi^{2-\alpha} = C_0\chi^{2-\alpha}$, QED.

4.16. Estimaciones de la función $H_k^w(p,q;-\chi^2), w = \sqrt{k(p)}$.

NOTACIÓN. C_0 y α tendrán aquí el significado del párrafo anterior.

Sean $0 < \beta < \alpha$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\chi) := \gamma\chi^{-\beta}$, $\gamma = \frac{C_0}{h \inf\{k(p)\,:\,p \in D\}}$, h un número positivo fijo.

Sea $u(q) := H_k^w(p,q;\lambda) + \boldsymbol{a}(\chi)$. Vale para p fijo,

$$\mathcal{L}(u)(q) = \mathcal{L}(H + \boldsymbol{a}(\chi)) = \mathcal{L}(H) + \lambda k(q)\boldsymbol{a}(\chi) = \mathcal{L}(H) - \chi^2 k(q)\boldsymbol{a}(\chi).$$

Entonces, por Teorema 2 §**4.15**, $\mathcal{L}(u)(q) \leq \chi^{2-\alpha}C_0\left(1 - \frac{\chi^{\alpha-\beta}k(q)}{h \inf k}\right)$.

Si χ es tal que $\chi^{\alpha-\beta} \geq h$ tenemos $f(q) := \mathcal{L}(u)(q) \leq 0$.

Pero en $\tilde{q} \in \partial D$, $u(\tilde{q}\,) = H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,\tilde{q};\lambda) + \boldsymbol{a}(\chi) > 0$.

Luego, o bien $u \geq 0$, o por b) del Principio General de Máximo[2] resulta $\min_{\overline{D}}\big(H + \boldsymbol{a}(\chi)\big) = \min_{\partial D}(H + \boldsymbol{a}(\chi)) < 0$, absurdo.

En consecuencia, $H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,q;\lambda) \geq -\gamma/\chi^{\beta}$ para todo $q \in D$ y por tanto para todo $(p,q) \in D \times D$, que es la segunda desigualdad del siguiente

TEOREMA 1. Sean $l(p) \coloneqq \mathrm{dist}(p,\partial D)$, $\gamma = \frac{C_0}{h \inf k}$, $0 < \beta < \alpha$, $p, q \in D$, h un número positivo, $\chi \geq h^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$. Vale

$$\gamma\chi^{-\beta} + \frac{1}{2\pi} K_0\big(\chi\sqrt{k(p)}\,l(p)\big) \;\geq\; H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,q;\lambda) \;\geq\; -\gamma\chi^{-\beta}.$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos la primera desigualdad. Si utilizamos $\boldsymbol{a}(\chi) := -\gamma\chi^{-\beta}$ obtendremos $\Delta_q u(q) + \lambda k(q) u(q) \equiv \mathcal{L}(u)(q) \geq 0$.

Queremos demostrar que se verifica

$$u(q) = H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,q;\lambda) + \boldsymbol{a}(\chi) \leq \frac{1}{2\pi} K_0\big(\chi\sqrt{k(p)}\,l(p)\big). \tag{1}$$

Si $\max_{\overline{D}}(H + \boldsymbol{a}(\chi)) \leq 0$ vale (1). Si $\max_{\overline{D}}(H + \boldsymbol{a}(\chi)) > 0$, por a) del principio general de máximo, $\max_{\partial D}(H + \boldsymbol{a}) = \max_{\overline{D}}(H + \boldsymbol{a})$.

Pero si $\tilde{q} \in \partial D$, $H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,\tilde{q};\lambda) + \boldsymbol{a}(\chi) \leq H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,\tilde{q};\lambda) =$

$$= \frac{1}{2\pi} K_0\big(\chi\sqrt{k(p)}\,|p - \tilde{q}|\big) \leq \frac{1}{2\pi} K_0\big(\chi\sqrt{k(p)}\,l(p)\big).$$

Esta última cota resulta de la monotonía de K_0. Por tanto vale (1). Luego,

$H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,q;\lambda) \leq \gamma\chi^{-\beta} + \frac{1}{2\pi} K_0\big(\chi\sqrt{k(p)}\,l(p)\big)$, QED.

TEOREMA 2. Sean $0 < \beta < \alpha\ (\leq 1)$, $p \in D$, $l(p) = \mathrm{dist}(p,\partial D)$. Entonces valen

i) $H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,p;-\chi^2) \in C((p,\chi) \in D \times (0,\infty))$,

y si $\chi \geq h^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$ (> 0),

ii) $-\frac{C_0(k)}{h \inf k}\chi^{-\beta} \leq H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,p;-\chi^2) \leq \frac{C_0(k)}{h \inf k}\chi^{-\beta} + \frac{1}{2\pi} K_0\big(\chi\sqrt{k(p)}\,l(p)\big)$.

---

[2] Principio General de Máximo, ([BP] §**0.4.2**). Sea D una región, $L^1(D) \ni c(x) \leq 0$ y sea $u \in C(\overline{D})$ tal que $\Delta u + c(x)u = f(x)$ en $D'(D)$ donde $f \in L^1(D)$.

a) Si $f(x) \geq 0$ y $M = \max_{\overline{D}} u(x) > 0$ entonces $M = m = \max_{\partial D} u(x)$.

b) Si $f(x) \leq 0$ y $\min_{\overline{D}} u(x) < 0$ entonces $\min_{\partial D} u(x) = \min_{\overline{D}} u(x)$.

c) Si $c(x) \equiv 0$ y $f(x) \geq 0$ entonces $\max_{\overline{D}} u(x) = \max_{\partial D} u(x)$.

d) Si $c(x) \equiv 0$ y $f(x) \leq 0$ entonces $\min_{\overline{D}} u(x) = \min_{\partial D} u(x)$.

DEMOSTRACIÓN. i) sigue de la Proposición 1, §**4.15**. ii) es exactamente el Teorema 1 con $q = p$ donde se muestra el rol de h en el factor de $\chi^{-\beta}$, QED.

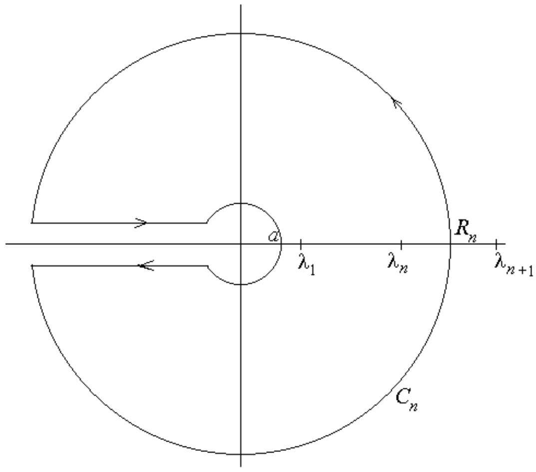
4.17. La función $\boldsymbol{F_k(p,p;\lambda)}$. Para demostrar el teorema de H. Weyl en el problema clásico de Dirichlet para el operador de Sturm-Liouville con peso $k(x) \in Lip_+(D,\dot{S})$, $D \in \boldsymbol{B} \cap \mathbb{S}$ una región ñ-conexa, estudiaremos la función $F(p;\lambda) := F_k(p,p;\lambda)$.

Valen, $\sum \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty$, $\sum_{1<n}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = \infty$, (ver figura). Luego, para infinitos n: $\frac{1}{\lambda_n^2} \le \lambda_{n+1} - \lambda_n$. Definimos, $Q := \left\{n : \frac{1}{\lambda_n^2} \le \lambda_{n+1} - \lambda_n\right\}$ y para $n \in Q$, $R_n := \frac{\lambda_{n+1}+\lambda_n}{2}$.

Si $\lambda \in \Gamma_n := \{\lambda : |\lambda| = R_n\}$, vale $\lambda_{n+1} \le 2R_n = 2|\lambda|$. Como $1/(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \le (\lambda_{n+1})^2$ tenemos

$$\max_h \left|\frac{\lambda_h}{\lambda_h - \lambda}\right| \le \max_h \left|\frac{\lambda_h}{\lambda_h - R_n}\right| \le$$

$$\le \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - R_n} = \frac{2\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \le 2\lambda_{n+1}^3 \le 16|\lambda|^3.$$



Luego, si $\lambda \in \Gamma_n$ vale:

$$0 < \left|\frac{1}{(\lambda_m - \lambda)\lambda_m}\right| \le \frac{1}{\lambda_m^2} \max_h \left|\frac{\lambda_h}{\lambda_h - \lambda}\right| \le 16 \frac{|\lambda|^3}{\lambda_m^2}$$

Recordemos que

$F_k(p,q;\lambda) = \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(p)\phi_j(q)/(\lambda_j(\lambda_j - \lambda))$.

Sea $p \in \overline{D}$. Puesto que $F(p;\lambda) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j^2(p)}{(\lambda - \lambda_j)} \frac{\lambda}{\lambda_j}$ sigue

(1) $$|F(p;\lambda)| \le 16|\lambda|^4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j^2(p)}{\lambda_j^2} \le C''|\lambda|^4, \quad \lambda \in \Gamma_n, \; n \in Q = Q(D).$$

Por otra parte y para $w = \sqrt{k(p)}$ obtenemos del §**4.15**,

$$F(p;\lambda) = \left\{\frac{1}{2\pi} K_0\left(\chi\sqrt{k(p)}|p-q|\right) - G(p,q)\right\}_{q=p} - H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,p;\lambda)$$

$$= \left\{-\frac{\log\left(\chi\sqrt{k(p)}\right)}{2\pi} + d + H(p,p)\right\} - H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,p;\lambda),$$

donde $d = P(0)/2\pi$ y $H(p,.)$ es la función armónica asociada al núcleo de Green G. De (1) y el Teorema 2 §**4.16** obtenemos entonces el siguiente resultado,

TEOREMA 1. Si $0 < \beta < \alpha$, $\chi^{\alpha-\beta} \ge h$, entonces

$$F(p;\lambda) = \sum \frac{\phi_j^2(p)}{(\lambda_j - \lambda)(\lambda_j/\lambda)} = \left\{\left[-\frac{\log\chi}{2\pi} + d + H(p,p)\right] - \frac{\log k(p)}{4\pi}\right\} - H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,p;\lambda),$$

con $$\left|H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,p;\lambda)\right| \le \frac{C_0}{h \inf k}\chi^{-\beta} + \frac{1}{2\pi} K_0\left(\chi\sqrt{k(p)}\,l(p)\right).$$

4.18. La función $\boldsymbol{\phi(p;s)=\sum_1^\infty \lambda_j^{-s}\phi_j^2(p)}$. Definimos, para $n\in Q$, la curva C_n como en la figura del §**4.17** y donde $a\in(0,\frac{\lambda_1}{2})$. Sea s un número complejo con $\operatorname{Re} s>6$. Estudiaremos para estos la función

(1) $\quad \phi(p;s):=\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}F(p;\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda^s}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{-1}{\lambda^s}\sum_1^\infty\frac{\lambda\phi_j^2(p)}{\lambda_j(\lambda-\lambda_j)}d\lambda=\lim_{n\to\infty}\sum_{\lambda_j\le R_n}\frac{\phi_j^2(p)}{\lambda_j^s}.$$

Como $|F(p;\lambda)|=O(1)|\lambda|^4$, (cf. (1) §**4.17**), la integral sobre Γ_n en (1) es $o(\lambda_n^{-1})$. Luego, si $\operatorname{Re} s>6$,

(2) $\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n\backslash\Gamma_n}F(p;\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda^s}\to\sum_{j=1}^\infty\frac{\phi_j^2(p)}{\lambda_j^s}=\lim_{n\to\infty}\sum_{\lambda_j\le R_n}\frac{\phi_j^2(p)}{\lambda_j^s},\quad n\to\infty, n\in Q.$

Pero, $\quad -\int_{C_n\backslash\Gamma_n}F(p;\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda^s}\to\int_\infty^a F(p;te^{-i\pi})\frac{e^{-i\pi}}{(te^{-i\pi})^s}dt+\int_{-\pi}^{\pi}F(p;ae^{i\varphi})\frac{ae^{i\varphi}}{(ae^{i\varphi})^s}id\varphi+$

$$+\int_a^\infty F(p;te^{i\pi})\frac{e^{i\pi}}{(te^{i\pi})^s}dt=$$

$$=\int_a^\infty F(p;-t)t^{-s}(e^{is\pi}-e^{-is\pi})dt+\int_{-\pi}^{\pi}F(p;ae^{i\varphi})(ae^{i\varphi})^{1-s}id\varphi.$$

Luego, como $\operatorname{Re} s>6$, $\quad \lim_{n\to\infty}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n\backslash\Gamma_n}F(p;\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda^s}=$

$$=\frac{\operatorname{sen} s\pi}{\pi}\int_a^\infty F(p;-t)t^{-s}\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(p;ae^{i\varphi})\,(ae^{i\varphi})^{1-s}d\varphi.$$

El último término define una función Z_0,

(3) $\quad 2\pi Z_0(p;s)=\int_{-\pi<\varphi<\pi}F(p;ae^{i\varphi})\,e^{(1-s)\operatorname{Log}(ae^{i\varphi})}d\varphi=$

$$=\int_{-\pi<\varphi<\pi}e^{(2-s)\operatorname{Log}(ae^{i\varphi})}\sum_{n=1}^\infty\frac{\phi_n^2(p)}{\lambda_n(\lambda_n-ae^{i\varphi})}d\varphi=\sum\frac{\phi_n^2(p)}{\lambda_n^2}\int_{-\pi<\varphi<\pi}\frac{\lambda_n e^{(2-s)\operatorname{Log}(ae^{i\varphi})}}{\lambda_n-ae^{i\varphi}}d\varphi$$

La última integral, si s varía en un compacto K, es en módulo uniformemente acotada en n y s puesto que

$$\left|\int_{-\pi<\varphi<\pi}\cdots\right|\le 2\pi\frac{\lambda_n}{\lambda_n-a}a^{2-\operatorname{Re}(s)}e^{\pi|\operatorname{Im}(s)|}\le(4\pi a^2)a^{-\operatorname{Re}(s)}e^{\pi|\operatorname{Im}(s)|}.$$

Por (v) Teorema 1 §**4.4** tenemos,

(4) $\quad |Z_0(p;s)|\le\left(2a^2\sum\frac{\phi_n^2(p)}{\lambda_n^2}\right)a^{-\operatorname{Re}(s)}e^{\pi|\operatorname{Im}(s)|}\le(2a^2C^2)a^{-\operatorname{Re}(s)}e^{\pi|\operatorname{Im}(s)|}.$

Luego, si $s\in K$ entonces $|Z_0(p;s)|\le C(K)a^{-\operatorname{Re}(s)}$.

Además la última serie en (3) converge uniformemente en $p\in\overline{D}$ y $s\in K$ (cf. (4) §**4.14**). Por tanto $Z_0(p;s)$ es una función continua en $(p,s)\in\overline{D}\times\mathbf{C}$ y analítica entera en s para cada $p\in\overline{D}$. Entonces, para $F(p;\lambda)=F_k(p,p;\lambda)$ vale el

TEOREMA 1. Si Re $s > 6$ entonces

(5) $$\phi(p;s) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{F(p;\lambda)}{\lambda^s} d\lambda$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j^2}{\lambda_j^s} = \frac{\operatorname{sen} s\pi}{\pi}\int_a^{\infty} F(p;-t)t^{-s}dt + Z_0(p;s),$$

donde $Z_0(p;s) \in C(\overline{D} \times \mathbf{C})$ es analítica entera en s para cada $p \in \overline{D}$.

TEOREMA 2. Para cada $p \in D$ y con $Z(p;s)$ holomorfa en Re $s > 1$, vale

(6) $$\phi(p;s) = \frac{1}{4\pi(s-1)} + Z(p;s).$$

DEMOSTRACIÓN. La serie en (5) es igual a $\sum_1^{\infty} \frac{\phi_n^2(p)}{\lambda_n^2}\left[e^{-(s-2)\operatorname{Log}\lambda_n}\right]$. Esta es una función holomorfa en Re $s > 2$ pues el corchete es holomorfo y uniformemente acotado en n y s si Re $s \geq 2 + \varepsilon > 2$. Por otra parte se tiene por Teor. 1 §**4.17**,

(7) $$F(p;\lambda) = \left[-\frac{\log\chi}{2\pi} + d + H(p,p) - \frac{\log k(p)}{4\pi}\right] - H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,p;\lambda),$$

y si se elige $h < a^{\frac{\alpha-\beta}{2}}$ entonces dicho teorema se aplica con $t = \chi^2 \geq a$.

Luego, para Re $s > 2$,

(8) $$\int_a^{\infty} F(p;-t)t^{-s}dt =$$

$$= \left[-\int_a^{\infty}\frac{\log\sqrt{t}}{2\pi t^s}dt + \left(d + H(p,p) - \frac{\log k(p)}{4\pi}\right)\int_a^{\infty}\frac{dt}{t^s}\right] - \int_a^{\infty}\frac{H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,p;-t)}{t^s}dt$$

$$= L(p;s) - \int_a^{\infty}\frac{H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,p;-t)}{t^s}dt.$$

El corchete $L(p;s)$, luego de las integraciones, se reduce a:

(9) $$L(p;s) = \left(\frac{\log\sqrt{a}}{2\pi(1-s)} - \frac{1}{4\pi(1-s)^2} - \frac{d+H(p,p)}{1-s} + \frac{\log k(p)}{4\pi(1-s)}\right)a^{1-s}.$$

En el §**4.19** se demuestra que la función

(10) $$\theta_1(p;s) := \int_a^{\infty}\frac{H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,p;-t)}{t^s}dt,$$

es, para cada $p \in D$, una función holomorfa en Re $s > 1$.

Entonces esto mismo vale para $\phi(p;s)$. Del Teorema 1 obtenemos:

(11) $$\phi(p;s) = \frac{\operatorname{sen} s\pi}{\pi}L(p;s) + \left(-\frac{\operatorname{sen} s\pi}{\pi}\theta_1(p;s) + Z_0(p;s)\right).$$

Luego,

(12) $$\phi(p;s) = \frac{T}{s-1} + Z(p;s),$$

donde T es el residuo en $s = 1$ de la función meromorfa $\frac{\operatorname{sen}(s\pi)}{\pi}L(p;s), s \in \mathbf{C}$, que tiene un único polo en $\mathbf{C}$. Este residuo vale,

$$T = \lim_{s\to 1}\ (s-1)\frac{\operatorname{sen} s\pi}{\pi} L(p;s) = \lim_{s\to 1} -\frac{\operatorname{sen} s\pi}{4\pi^2(s-1)} a^{1-s} = \frac{1}{4\pi}\,.$$

Luego,

(13) $\qquad Z(p;s) := \left\{\frac{\operatorname{sen}(s\pi)}{\pi} L(p;s) - \frac{1}{4\pi(s-1)}\right\} + \left(-\frac{\operatorname{sen}\pi s}{\pi}\theta_1(p;s) + Z_0(p;s)\right),$

es para cada $p \in D$, holomorfa en Re $s > 1$.

Por tanto tenemos $\phi(p;s) = \frac{1}{4\pi(s-1)} + Z(p;s)$, QED.

4.19. Integración de las funciones $\boldsymbol{H(p,p)t^{-s}}$ y $\boldsymbol{H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,p;-t)t^{-s}}$. El objetivo es integrar estas funciones sobre $D \times (a,\infty)$ respecto de la medida $k(p)dp \times dt$.

TEOREMA 1. Sea $k(x) \in Lip_+(D,\dot{S})$ y $D \in \boldsymbol{B} \cap \mathbb{S}$ una región ñ-conexa.

Entonces,

a) $H(p,p) \in L^1(D;k)$,

b) $\theta_0(p;s) := \int_a^\infty H(p,p)t^{-s}dt$ es tal que (sen $s\pi$) $\int_D \theta_0(p;s)k(p)dp$ es entera**.**

DEMOSTRACIÓN. a) se probó en el §**4.12**, Teor. 2.

b) Tenemos para Re $s > 1$, $\int_a^\infty H(p,p)t^{-s}\,dt = H(p,p)\frac{a^{1-s}}{s-1}$. Integrando esta última expresión sobre D obtenemos una función holomorfa en Re $s > 1$. Luego, $a^{1-s}\frac{\operatorname{sen} s\pi}{s-1}\int_D H(p,p)k(p)dp$ se prolonga a una función entera, QED.

TEOREMA 2. Sean $k(x) \in Lip_+(D,\dot{S})$ y $D \in \boldsymbol{B} \cap \mathbb{S}$ una región ñ-conexa.

Entonces[3] $k \in Lip_+(D) \cap Л_\alpha(D)$ y valen

i) $\omega = \int_D dp \int_a^\infty \frac{\left|H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,p;-t)\right|}{t} dt < \infty$,

ii) $\theta_1(p;z) := \int_a^\infty H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,p;-t)t^{-z}dt$ y $\int_D \theta_1(p;z)k(p)dp$ definen funciones holomorfas en Re $z > 1$.

iii) $\int_D \theta_1(p;z)k(p)dp$ puede extenderse como una función continua a Re $z \geq 1$**.**

DEMOSTRACIÓN. i) Por hipótesis $I = \int_0^M |A(t)|\frac{1+|\mathrm{Log}(t)|}{t}dt < \infty$, $M = \operatorname{diam} D$.

Tenemos, por Teorema 2 §**4.16** y con $0 < \beta < \alpha$,

$$\int_D dp \int_a^\infty \frac{|H(p,p;-t)|}{t} dt \leq \int_D dp \int_a^\infty \frac{C_0(k)}{h \inf k} \frac{dt}{t^{1+\beta/2}} + \frac{1}{2\pi}\int_D dp \int_a^\infty K_0\left(\sqrt{tk(p)}\, l(p)\right)\frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{C_0(k)|D|}{h \inf k}\frac{1}{\frac{\beta}{2}a^{\frac{\beta}{2}}} + \frac{1}{2\pi}\int_D dp \int_a^\infty \frac{dt}{t}\int_{l(p)}^\infty \left(-K_0'\left(\sqrt{tk(p)}u\right)\right)\sqrt{tk(p)}du = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$

A es finito y de las propiedades de K_0 enunciadas en el §**4.15** se deduce que

---

[3] Por el Teor. 5 de la Introducción existe $\alpha \in (0,1]$ tal que $k \in Л_\alpha(D)$.

$$\mathbf{B} \leq \int_D \, dp \int_a^\infty \frac{dt}{t} \int_{l(p)}^\infty \frac{C_1}{u} e^{-\frac{u}{2}\sqrt{t \inf k}} du = \int_D \, dp \int_a^\infty \frac{dt}{t} \int_0^\infty \frac{C_1}{u} e^{-\frac{u}{2}\sqrt{t \inf k}} I_{\{l(p)<u\}} du.$$

Cambiando el orden de integración y usando la hipótesis sobre *D*, resulta,

$$\mathbf{B} = \int_a^\infty \frac{dt}{t} \int_0^\infty \frac{C_1}{u} e^{-\frac{u\sqrt{t \inf k}}{2}} |A(u)| du = \; C_1 \int_0^\infty \frac{|A(u)|}{u} du \int_a^\infty e^{-\frac{u\sqrt{t \inf k}}{2}} \frac{dt}{t}$$

Pero $\int_a^\infty e^{-\frac{u\sqrt{t \inf k}}{2}} \frac{dt}{t} = \int_{au^2}^\infty e^{-\frac{\sqrt{s \inf k}}{2}} \frac{ds}{s} \leq \int_{\inf\{1,au^2\}}^\infty e^{-\frac{\sqrt{s \inf k}}{2}} \frac{ds}{s} \leq$

$\leq \int_{\inf\{1,au^2\}}^1 \frac{ds}{s} + \int_1^\infty e^{-\frac{\sqrt{s \inf k}}{2}} ds = \mathrm{Log}^+(\frac{1}{au^2}) + C \leq 2|\mathrm{Log}\, u| + C_2$. Luego

$\mathbf{B} \leq C_1 \int_0^\infty \frac{|A(u)|}{u} (2|\mathrm{Log}\, u| + C_2) du < \infty$.

ii) Una aplicación del Lema 1 §**0.2** [BP], o bien, por ejemplo, de la Proposición 1 §**4.15** y de [Cp] §**5.5** obtenemos que $\theta_1(p;z)$ y $\int_D \, \theta_1(p;z)k(p)dp$ son holomorfas en $\mathrm{Re}\, z \; > 1$.

iii) Si $\infty > T \geq t \geq a > 0$ entonces $\left|\frac{1}{t^{\mathrm{Re}\, z\, -\, 1}} - 1\right| < \varepsilon$ si $|\mathrm{Re}\, z - 1| \leq \delta$. Por tanto, para T bastante grande ($\uparrow \infty$) tenemos

$$\left| \int_D \, dp \int_a^\infty \frac{H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,p;-t)}{t^z} dt - \int_D \, dp \int_a^\infty \frac{H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,p;-t)}{t^{1+i\,\mathrm{Im}\, z}} \right| \leq$$

$$\leq \int_D \, dp \int_a^\infty \frac{\left|H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,p;-t)\right|}{t^1} \left|\frac{1}{t^{\mathrm{Re} z - 1}} - 1\right| dt$$

$$\leq \varepsilon \int_D \, dp \int_a^T \frac{\left|H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,p;-t)\right|}{t} dt + 2 \int_D \, dp \int_T^\infty \frac{\left|H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,p;-t)\right|}{t} dt \leq \varepsilon\omega + o(1), \quad \text{QED.}$$

TEOREMA A. Sean $k(x) \in Lip_+(D, \dot{S})$ y $D \in \boldsymbol{B} \cap S_\varepsilon$ una región ñ-conexa. Entonces $k \in Lip_+(D) \cap Л_\alpha(D)$ para cierto α. Si $0 < \delta < \frac{\inf\{\alpha,\varepsilon\}}{2}$ y $\theta_1(p;s) = \int_a^\infty H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,p;-t)t^{-s}dt$ valen

i) $\int_D \, dp \int_a^\infty \frac{\left|H_k^{\sqrt{k(p)}}(p,p;-t)\right|}{t^{1-\delta}} dt < \infty$,

ii) $\theta_1(p;s)$ y $\int_D \, \theta_1(p;s)k(p)dp$ definen funciones holomorfas en $\mathrm{Re}\, s \; > 1 - \delta$.

DEMOSTRACIÓN. i) se demuestra como i) del Teorema anterior. Por hipótesis $|A(u)| \leq Bu^\varepsilon$. Usando δ tal que $0 < 2\delta < \beta < \alpha$ tenemos

$\int_D \, dp \int_a^\infty \frac{|H(p,p;-t)|}{t^{1-\delta}} dt \leq \int_D \, dp \int_a^\infty \frac{\rho M}{t^{1-\delta+\beta/2}} dt + \frac{1}{2\pi} \int_D \, dp \int_a^\infty K_0\big(\sqrt{tk(p)}l(p)\big) \frac{dt}{t^{1-\delta}} =$

$= O(1) + \frac{1}{2\pi} \int_D \, dp \int_a^\infty \frac{dt}{t^{1-\delta}} \int_{l(p)}^\infty \Big(-K_0'\big(\sqrt{tk(p)}u\big)\Big) \sqrt{tk(p)} du.$

La triple integral no supera a

$$\int_D \, dp \int_a^\infty \frac{dt}{t^{1-\delta}} \int_{l(p)}^\infty \frac{C_0}{u} e^{-\frac{u}{2}\sqrt{t \inf k}} du = \int_D \, dp \int_a^\infty \frac{dt}{t^{1-\delta}} \int_0^\infty \frac{C_0}{u} e^{-\frac{u}{2}\sqrt{t \inf k}} I_{\{l(p)<u\}} du.$$

Cambiando el orden de integración y usando la hipótesis sobre *D*, resulta,

$$\int_a^\infty \frac{dt}{t^{1-\delta}} \int_0^\infty \frac{C_0}{u} e^{-\frac{u\sqrt{t \inf k}}{2}} |A(u)| du \leq BC_0 \int_a^\infty \frac{dt}{t^{1-\delta}} \int_0^\infty \frac{1}{u^{1-\varepsilon}} e^{-\frac{u\sqrt{t \inf k}}{2}} du.$$

Sea $v = \frac{u\sqrt{t \inf k}}{2}$. La última integral doble es, salvo factor constante, menor o igual a

$$\int_a^\infty \frac{dt}{t^{1-\delta}} \int_0^\infty \frac{e^{-v}}{v^{1-\varepsilon} t^{\varepsilon/2}} dv = O(1) \int_a^\infty \frac{dt}{t^{1-\delta+\varepsilon/2}} < \infty.$$

ii) De i) sigue, como antes, que $\int_D \, \theta_1(p;s)k(p)dp$ es holomorfa en $\mathrm{Re}\, s \; > 1 - \delta$, lo mismo que $\theta_1(p;s)$, QED.

4.20. La serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} = \int_D \phi(p;s)k(p)dp$. Dado que $\sum_1^{\infty} \lambda_n^{-2} < \infty$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s}$ converge si Re $s \geq 2$.

Vimos que para Re $s > 6$ vale, (cf. Teor. 1 §**4.18**),

(1) $\phi(p;s) = \frac{\operatorname{sen} \pi s}{\pi} \int_a^{\infty} F(p;-t)t^{-s}dt + Z_0(p;s) =$ por (8) y (9) §**4.18**) =

$$= \left[-\frac{\log \sqrt{k(p)a}}{2\pi} + d - \frac{1}{4\pi(s-1)}\right] a^{1-s} \frac{\operatorname{sen} \pi s}{\pi(s-1)} +$$

$$+ \frac{\operatorname{sen} \pi s}{\pi} \int_a^{\infty} (H(p,p) - H(p,p;-t)) \frac{dt}{t^s} + Z_0(p;s),$$

donde d es una constante. Como

$\frac{\operatorname{sen} s\pi}{\pi(s-1)} = -1 + (s-1)[\cdots]$ y $a^{1-s} \frac{\operatorname{sen} s\pi}{\pi(s-1)} = -1 + c_1(s-1) + (s-1)^2.$ entera, obtenemos

(2) $$\phi(p;s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(p)}{\lambda_n^s} =$$

$$= \frac{1}{4\pi(s-1)} + \left[(\operatorname{Log} k(p))Z_4(s) + Z_3(s) + Z_0(p;s)\right] + \frac{\operatorname{sen} \pi s}{\pi}(\theta_0(p;s) - \theta_1(p;s)),$$

donde $Z_3(s)$ y $Z_4(s)$ son analíticas enteras, $Z_0(p;s)$ es entera para cada $p \in \overline{D}$ por el Teorema 1 §**4.18** y $\theta_0 - \theta_1$ representa a la última integral, (cf. Teoremas 1 y 2 §**4.19**).

Integrando respecto de $k(p)dp$ obtenemos,

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} = \int_D \phi(p;s)k(p)dp =$$

$$= \frac{\int kdp}{4\pi(s-1)} + \left[\int_D (Z_4(s) log\, k + Z_3(s) + Z_0(p;s) + \frac{\operatorname{sen} s\pi}{\pi}\theta_0)kdp\right] + \frac{-\operatorname{sen} s\pi}{\pi} \int_D \theta_1\, kdp$$

$$= \frac{\int kdp}{4\pi(s-1)} - \frac{\operatorname{sen} s\pi}{\pi} \int \theta_1(p;s)k(p)dp + \left[\text{entera en } s + \int_D Z_0(p;s)k(p)dp\right] =$$

$$= \frac{\int kdp}{4\pi(s-1)} - \frac{\operatorname{sen} s\pi}{\pi} \int \theta_1(p;s)k(p)dp + \text{ entera en } s + \frac{1}{2\pi} \sum \frac{1}{\lambda_n^2} \int_{(-\pi,\pi)} \frac{\lambda_n e^{(2-s)\operatorname{Log}(ae^{iv})}}{\lambda_n - ae^{iv}} dv$$

$$= \frac{\int kdp}{4\pi(s-1)} - \frac{\operatorname{sen} s\pi}{\pi} \int_D \theta_1(p;s)k(p)dp + \text{analítica entera en } s =$$

$$= \frac{\int_D kdp}{4\pi(s-1)} + g(s).$$

$g(s)$ es holomorfa en Re $s > 6$ y, por el Teorema 2 §**4.19**, prolongable holomórficamente a Re $s > 1$ y continuamente a Re $s \geq 1$.

Sea σ_c la abscisa de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s}$. Recordemos que D es regular, pertenece a $Л_\alpha$ para cierto $\alpha \in (0,1]$ y tiene la propiedad $\mathbb{S}$. Hemos probado entonces i) del

TEOREMA 1. i) $g(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} - \frac{\int_D kdp}{4\pi(s-1)}$ en Re $s > 6$ es una función holomorfa prolongable como tal a Re $s > 1$. Es también prolongable continuamente a Re $s \geq 1$.

ii) $\sigma_c = 1$. O sea, para Re $s > 1$ vale $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} = \frac{\frac{1}{4\pi}\int_D kdp}{s-1} + g(s)$.

DEMOSTRACIÓN. ii). Sabemos que $\sigma_c \leq 2$. Un teorema de Landau sobre series de Dirichlet con coeficientes positivos afirma que en la abscisa de convergencia de la serie la función definida por ella no es holomorfa. Luego, $\sigma_c = 1$, QED.

La abscisa de convergencia σ_c del teorema precedente depende exclusivamente del comportamiento de $\theta_1(p;s)$, y este a su vez mejora con la mayor regularidad del borde de D. En efecto, usando el Teorema A del §**4.19** se obtiene,

TEOREMA B. Sean $k(x) \in Lip_+(D,\dot{S})$ y $D \in \boldsymbol{B} \cap S_\varepsilon$ una región ñ-conexa. Entonces, $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} - \frac{\int_D kdp}{4\pi(s-1)}$ en Re $s > 6$, es una función holomorfa allí prolongable holomórficamente a Re $s > 1 - \inf\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Las familias S_ε crecen de la siguiente manera: $S_1 \subset \cdots \subset S_{\varepsilon+\varepsilon'} \subset \cdots \subset S_\varepsilon \subset \cdots \subset \mathbb{S}$, pero los semiplanos calculados de holomorfía de g, para α fijo, decrecen como

$$\left\{\text{Re } z > \frac{1}{2}\right\} \supset \left\{\text{Re } z > 1 - \inf\left(\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2}\right)\right\} \supset \cdots \supset \left\{\text{Re } z > 1 - inf\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} \supset \cdots \supset \{\text{Re } z > 1\}.$$

Las g correspondientes son todas continuas en $\{\text{Re } z \geq 1\}$. El caso $\alpha = \varepsilon = 1$ se presenta en regiones de Jordan con contorno rectificable y $k \equiv 1$. Además su semiplano $\left\{\text{Re } z > \frac{1}{2}\right\}$ es óptimo, (Teorema 1 §4.5).

4.21. El Teorema de Weyl-Carleman cuando $\boldsymbol{D} \in \boldsymbol{B} \cap \mathbb{S}$. Sean $k(x) \in Lip_+(D,\dot{S})$ y D ñ-conexa. Definamos: $N(x) = 0$ si $x < \lambda_1$, $N(x) = n$ si $\lambda_n \leq x < \lambda_{n+1}$. Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s}$ puede escribirse como $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^s} dN(x)$, (aun si λ_j es múltiple). Aplicando el teorema tauberiano de Ikehara (cf. [C], [I], [BP] § **0.6**) se obtiene $\frac{N(x)}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\int_D k(p)dp}{4\pi}$.

En particular, $\frac{N(\lambda_n)}{\lambda_n} = \frac{n}{\lambda_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\int_D kdp}{4\pi}$. O sea, vale el Teorema 3 del §**4.13**: los autovalores del problema de Dirichlet para el operador de Sturm-Liouville $(-\frac{1}{k(x)})\Delta_x$ verifican $\lambda_n \int_D k(p)dp \sim 4\pi n$.

El Teorema de Weyl-Carleman cuando $\boldsymbol{D} \in \boldsymbol{B}$.

a) Sea $D \in \boldsymbol{W}_{ñ}(\{D_n\}) \cap \boldsymbol{B}$, $k(x) \in Lip_+(D,\dot{S})$. Supongamos la familia aproximante $\{D_n\}$ $(\subset \mathcal{N})$ tal que $\{D_n\} \subset \mathbb{S}$. Si $\forall n\ I(D_n) \leq \iota < \infty$ entonces $D \in \mathbb{S}$ y vale el Teorema de Weyl-Carleman.

b) Veamos qué puede decirse en caso contrario.

TEOREMA 1. Sean $k(x) \in Lip_+(D,\dot{S})$ y $D \in \boldsymbol{B}$ una región ñ-conexa.

1) $D \in \boldsymbol{\mathcal{N}}$.

2) Si $|\partial D| = 0$ entonces los autovalores del problema de Dirichlet para el operador de Sturm-Liouville $(-\frac{1}{k(x)})\Delta_x$ verifican $\lambda_n \int_D k(p)dp \sim 4\pi n$.

DEMOSTRACIÓN. Vale $D \in \boldsymbol{W}_{\text{ñ}}(\{D_m\})$ con $\{D_m\}$ una familia de regiones ñ-conexas poligonales, por ejemplo obtenidas a partir de un refinamiento de cuadrículas. Las regiones D_m tienen la propiedad S_1. (Si $\sup \operatorname{long} \partial D_m < \infty$ estamos en el caso a)).

Pero en este caso, por el Lema 1 del §**4.11**, resulta $D \in \boldsymbol{\mathcal{N}}$. Por otra parte, existe una familia semejante $\{\dot{D}_m\}$ tal que $\dot{D}_m \downarrow \overline{D}$. Podemos ahora, recurriendo al Teorema 1 §**4.9**, repetir los argumentos del Teorema 8 §**4.1** para obtener,

$$\overline{\lim} \frac{n}{\lambda_n} - \underline{\lim} \frac{n}{\lambda_n} \leq \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \dot{k}(x) dx, \qquad \text{QED.}$$

APÉNDICE Parte III.

TEOREMA 1. Sea D una región de Jordan $\tilde{n}$-conexa.

La función de Green para D es $G(x;\xi) = s(x;\xi) - H(x;\xi) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x-\xi|} - H(x;\xi)$.

Para $(x,\xi) \in D \times D$, $M = \operatorname{diam} D$ y $l(x) = \operatorname{dist}(x, \partial D)$ vale

$$\iint_D \left|\nabla_\xi H\right|^2 d\xi = \iint_D \left\{\left(\frac{\partial H}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial \xi_2}\right)^2\right\} d\xi_1\, d\xi_2 \leq \log\frac{2M}{|l(x)|} < \infty\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Para $x \in D$, fijo, y $\xi \in D$, definimos

$$\tilde{s}(x;\xi) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{l(x)/2} & \text{si } |x-\xi| < l(x)/2 \\ \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x-\xi|} & \text{si } |x-\xi| \geq l(x)/2 \end{cases}.$$

Sea $\Sigma(x) = \{\xi: |x-\xi| = l(x)/2\}$. El conjunto Σ es de medida plana cero.

Sea $B = \{\xi: |(x-\xi| < l(x)/2\}$. La función $\tilde{s}(x;\xi)$ es armónica en $\xi \in R^2 \setminus \Sigma$. Vale para $\xi \in D \setminus \Sigma$,

(1) $$2\operatorname{div}_\xi\left(\left(H(x;\xi) - \tilde{s}(x;\xi)\right)\nabla_\xi H(x;\xi)\right) =$$

$$= \left|\nabla_\xi H(x;\xi)\right|^2 - \left|\nabla_\xi \tilde{s}(x;\xi)\right|^2 + \left|\nabla_\xi H(x;\xi) - \nabla_\xi \tilde{s}(x;\xi)\right|^2 \geq$$

$$\geq \left|\nabla_\xi H(x;\xi)\right|^2 - \left|\nabla_\xi \tilde{s}(x;\xi)\right|^2.$$

La función $H(x;\xi) - \tilde{s}(x;\xi)$ es continua en $\xi \in \overline{D}$ y nula en $\xi \in J$. Utilizando el teorema clásico de Gauss, si es posible, vemos que la div_ξ en la expresión (1) tiene integral igual a 0. Por tanto obtenemos,

$$0 \geq \iint_D \left|\nabla_\xi H(x;\xi)\right|^2 d\xi - \iint_D \left|\nabla_\xi \tilde{s}(x;\xi)\right|^2 d\xi.$$

De aquí sigue (un caso particular del Principio de Dirichlet)

(2) $$\iint_D \left|\nabla_\xi H(x;\xi)\right|^2 d\xi \leq \iint_D |\nabla\tilde{s}(x;\xi)|^2 d\xi.$$

Como

$$\iint_D |\nabla\tilde{s}(x;\xi)|^2 d\xi = \int_{\frac{l(x)}{2}}^{M} \left(\frac{1}{r}\right)^2 r dr = \log\left(\frac{2M}{l(x)}\right) < \infty,$$

sigue la cota,

(3) $$\iint_D \left|\nabla_\xi H(x;\xi)\right|^2 d\xi \leq \log\left(\frac{2M}{l(x)}\right) < \infty.$$

Para justificar la aplicación del teorema de Gauss, sea $\{D_n\}$ una familia de regiones de Jordan $\tilde{n}$-conexas formadas por cuadrados de refinamientos de un reticulado formado por paralelas a los ejes tal que $D \supset \overline{D}_n$, $D_n \uparrow \overline{D}$, $M_n = \operatorname{diam} D_n \leq M$. Podemos suponer que $\overline{B} \subset D_n$ para todo n.

Por el principio de reflexión la función en ξ, $H_n(x;\xi) - \tilde{s}(x;\xi)$, puede extenderse armónicamente fuera de D_n, al menos para todo punto que no sea un vértice de ∂D_n. Como $\tilde{s}(x;\xi)$ es armónica en $\xi \in R^2 \setminus \Sigma$, también $H_n(x;\xi)$ puede, en la misma forma, extenderse armónicamente fuera de D_n. Ahora es legítimo aplicar el teorema de Gauss y se obtiene

(3') $$\iint_{D_n} \left|\nabla_\xi H_n(x;\xi)\right|^2 d\xi \leq \log\left(\frac{2M_n}{l(x)}\right) \leq \log\left(\frac{2M}{l(x)}\right) < \infty.$$

Por el Corolario 2 y el Teorema 3 del §**4.3** tenemos para $0 < j \uparrow \infty$ y $\xi \in \overline{D}_n$,

$G_{n+j}(x;\xi) = s(x;\xi) - H_{n+j}(x;\xi) \uparrow G(x;\xi) = s(x;\xi) - H(x;\xi)$.

Luego, para $\xi \in \overline{D}_n$, $H_{n+j}(x;\xi) \downarrow H(x;\xi)$ si $j \uparrow \infty$.

Por el teorema de Harnack la convergencia es localmente uniforme sobre D_n. Y de la misma manera convergen las derivadas primeras $\frac{\partial H_{n+j}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial H_{n+j}}{\partial \xi_2}$ a las derivadas primeras $\frac{\partial H}{\partial \xi_1}, \frac{\partial H}{\partial \xi_2}$. Sea $K = \overline{K} \subset D_n$. Por el lema de Fatou y (3') tenemos,

$$\iint_K \left|\nabla_\xi H(x;\xi)\right|^2 d\xi \leq \lim\ \inf \iint_{D_{n+j}} \left|\nabla_\xi H_{n+j}(x;\xi)\right|^2 d\xi \leq \log\left(\frac{2M}{l(x)}\right).$$

En consecuencia, $\iint_D \left|\nabla_\xi H(x;\xi)\right|^2 d\xi \leq \log\left(\frac{2M}{l(x)}\right)$, QED.

PROPOSICIÓN 1. Sea D una región de Jordan $\tilde{n}$-conexa de contorno C^1. Supongamos $\varphi \in Lip_0(D)$. Entonces, $w(\xi) = \iint G(x;\xi)\varphi(x)dx \in H_0(D)$.

DEMOSTRACIÓN. Llamemos

$v(\xi) = \iint \varphi(x) \log\frac{1}{|x-\xi|} dx, \quad u(\xi) = \iint H(x;\xi)\varphi(x)dx.$

Para probar que $w \in H^1(D)$ bastará ver que v y u pertenecen a ese espacio. Por el Teorema 1 §**0.2** [BP] sabemos que $v \in C^1(R^2)$, por lo que $v \in H^1(D)$.

Por el Lema 1 §**1.6** [BP] tenemos $\frac{\partial u}{\partial \xi_1}(\xi) = \iint \frac{\partial H}{\partial \xi_1}(x;\xi)\varphi(x)dx$. Luego,

$$\left|\nabla_\xi u\right|^2 = \left|\iint_{\operatorname{supp}\varphi} (\nabla_\xi H)\varphi dx\right|^2 \leq \|\varphi\|_2^2 \iint_{\operatorname{supp}\varphi} \left|\nabla_\xi H\right|^2 dx.$$

De aquí, usando la Proposición 1 y el teorema de Fubini sigue:

$$\iint_D \left|\nabla_\xi u\right|^2 d\xi \leq \|\varphi\|_2^2 \iint_D \left(\iint_D \left|\nabla_\xi H\right|^2 d\xi\right) dx \leq \|\varphi\|_2^2 \iint_D \log\frac{2M}{|l(x)|} dx.$$

Como J es rectificable, si $A(\rho) = \{x : l(x) < \rho\}$ entonces $|A(\rho)| = O(\rho)$, (cf. §**4.1**). Luego, $\iint \log\frac{1}{|l(x)|} dx \leq I(D) < \infty$, (cf. demostración Teorema 2 §**4.13**).

Por otra parte, $H(x;\xi)$ es continua en $D \times \overline{D}$ y por tanto acotada en supp $\varphi \times \overline{D}$, por lo que $u \in L^\infty(D)$. Luego, $u \in H^1(D)$. Entonces, $w \in H^1(D)$.

Del Teorema 1 del Apéndice Parte II obtenemos $w \in H_0(D)$, QED.

Hemos probado entonces la Proposición 3 de ese Apéndice para D $\tilde{n}$-conexa y $J \in C^1$. Se deduce como allí, (ver a) y a') Teorema 2, loc. cit.), que vale la

PROPOSICIÓN 2. Sea D una región de Jordan ñ-conexa arbitraria y $\varphi \in Lip_0(D)$. Entonces, $w(\xi) = \iint G(x;\xi)\varphi(x)dx \in H_0(D)$**.**

Como en el Apéndice Parte II se demuestran ahora las proposiciones siguientes,

PROPOSICIÓN 3. Sea D de Jordan $\tilde{n}$-conexa y $\varphi \in Lip_0(D)$. Entonces, $\mathbf{G}\varphi \in H_0(D)$**.**

TEOREMA 2. $\mathfrak{G} = \mathbf{G}$ sobre $L^2(D,k)$**.**

SÍMBOLOS Caps. 0-4

ÍNDICE ALFABÉTICO Caps. 0-4

REFERENCIAS (Caps. 0-4)

[A] ADAMS R. A., *Sobolev Spaces*, New York, Academic Press, (1975).

[AG] ACHIESER N. I. und GLASMANN I. M., *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert Raum*, Akademie Verlag, Berlin, (1968).

[B] BENEDEK A., *Sobre el problema de Dirichlet*, Notas de Álgebra y Análisis n.° 2, Instituto de Matemática, Univ. Nacional del Sur, (1968).

[BC] BROSSARD J., CARMONA R., Commun. Math. Phys., 104, p. 103-122, (1986).

[Bo] BORG G., Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe, Acta Math., 78 1-96, (1946).

[BP] BENEDEK A., PANZONE R., *La distribución de los autovalores del problema de Dirichlet del operador diferencial bidimensional de Sturm-Liouville*: *teoremas asintóticos de Hermann Weyl y de Torsten Carleman*, Notas de Algebra y Análisis n.° 22, INMABB, Univ. Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, (2011).

[BR] BIRKHOFF G., ROTA G-C., *Ordinary Differential Equations,* Blaisdell, (1978).

[Br] BRELOT M., *Éléments de la Théorie Classique du Potentiel,* Centre de documentation universitaire, 5 Place de la Sorbonne, Paris V, (1965).

[C] CARLEMAN T., *L'intégral de Fourier et questions qui s'y rattachent*, Uppsala, (1944).

[Ca] CARLEMAM T., Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes, Åttonde skan. matematiker kongressen i Stockholm, 34-44, (1934).

[CH] COURANT R., HILBERT D., *Methods of Mathematical Physics*, I, Interscience, (1953).

[Co] COULSON C. A., *Ondas*, Madrid-Buenos Aires, (1944).

[Cp] COPSON E. T., *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*, Oxford, (1955).

[Cw] CONWAY J. H., Can you hear the shape of a drum?, second lecture of *The Sensual (quadratic) Form*, The Carus Math. Monographs, M. A. A., (1997).

[D] DOOB J. L., *Classical Potential Theory and its Probabilistic Counterpart*, Springer, (1984).

[E] EDGAR G. A., *Measure, Topology and Fractal Geometry*, Springer, (1990).

[Eu] EULER L., De motu vibratorio cordarum inaequaliter crassarum, Novi Comm.Petrop., T. IX, 246-304.

[Eu] EULER L., Sobre el movimiento vibratorio de la cuerda dotada de sesión variable, (latín, 1772), Novi Comm.Petrop., T. XVII, 432-448.

[Ev] EVANS L. C., *Partial Differential Equations*, Am. Math. Soc., (1998).

[F] FALCONER K., *Fractal Geometry*, Wiley, (1990).

[G] GÅRDING L. On the asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators, Math. Scand. 1, 237-255 (1953).

[GJ] GILLMAN L., JERISON M., *Rings of Continuous Functions*, Van Nostrand, (1960).

[Gr] GROMES D., Mathematische Zeitschrift, 94, p. 110-121, (1966).

[Gu] GUGGENHEIMER H. W., *Differential Geometry*, McGraw-Hill, (1963).

[GWW] GORDON C., WEBB, D.L. and WOLPERT S., One can't hear the shape of a drum, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 27, 134-138, (1992).

[H] HÖRMANDER L., *Linear partial differential operators*, Springer Verlag, (1963).

[He] HELLWIG G., *Partial differential equations, an introduction*, Blaisdell, New York (1964).

[HP] HILLE E., PHILLIPS R. S., *Functional Analysis and Semi-Groups*, AMS, Coll. Pub. Vol. XXXI, (1957).

[I] IKEHARA S., An extension of Landau's theorem in the analytic theory of numbers, J. Math. and Phys. MIT (2) 10, p. 1-12, (1931).

[Iv] IVRII V. Ja., *Precise Spectral Asymptotics for Elliptic Operators*, Lecture Notes in Math., vol. 1100, Springer-Verlag, (1984).

[K] BENEDEK A., PANZONE R., Comentario a un Teorema de Jakob Steiner, Rev. de la Unión Matemática Argentina, XXXII, 93-106, (1985-86).

[K] KAC M., Can one hear the shape of a drum?, *Am. Math. Monthly*, 73, nº4, 1-23, (1966).

[Ke] KELLOG O., On the derivatives of harmonic functions on the boundary, Trans. Am. Math. Soc., vol. 33, no. 2, 486-510, (1931).

[Ko] KOREVAAR J., *Tauberian Theory,* Springer, (2004).

[Ku] KUTZNETSOV N. V., Differential Equations, 2, 10, p. 715-723, (1966).

[L] LI YI-SHEN, On an inverse eigenvalue problem for a second order differential equation with boundary dependence on the parameter, Acta Math. Sinica, 15, 375-381, (1965).

[La] LAPIDUS M. L., Fractal drum, inverse spectral problem for elliptic operators and a partial resolution of the Weyl-Berry conjecture, T.A.M.S., 325, p. 465-529, (1991).

[Le] LEVINSON N., The inverse Sturm-Liouville problem, Mat. Tidsskr B, 25-30, (1949).

[Mo] MOTHWURF W., Über Saiten mit nur harmonischen Obertönen, Monatshefte für Math., 40 93-96 (1933).

[Mt] MATTILA P, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*, Cambridge University Press, (1995).

[N] NEWMAN, M. A., *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*, Cambridge University Press, (1961).

[P] PETROVSKY I. G., *Lectures on Partial Differential Equations*, Intersc. Pub., New York, (1957).

[Pa] PANZONE R., Sobre algunos problemas inversos y un teorema de Euler concerniente a la cuerda vibrante, Anales Acad. Cs. Exactas, Fís. y Nat., Buenos Aires, n.° 36, 73-90, (1984).

[R] RANSFORD T., *Potential Theory on the Complex Plane*, London Math. Soc., Student Text 28, (1995).

[RN] RIESZ F., SZ.-NAGY B., *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*, Akadémiai Kiadó, Budapest, (1953).

[S] SCHWARTZ L., *Théorie des Distributions*, I, II, Hermann, Paris, (1951).

[Sc] SCHECHTER M., *Modern Methods in Partial Differential Equations, an Introduction,* Mc Graw-Hill, (1977).

[Sy] SEELEY R. T., A sharp asymptotic remainder estimate for the eigenvalues of the Lapacian in a domain of $\mathbf{R}^3$, Adv. in Math. 29 244-269 (1978).

[SZ] SAKS S., ZYGMUND A., *Analytic Functions*, Warszawa, (1952).

[T] TSUJI M., *Potential Theory in Modern Function Theory,* Maruzen, Tokyo, (1959).

[Ta] TAYLOR M., *Partial Differential Equations*, I-III, Springer, (1996).

[Ti] TITCHMARSH E. C., *Eigenfunction Expansions associated with Second-order Differential Equations*, II, Oxford, (1970).

[Tr] TREVES F., *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, (1975).

[W] WEYL H., Göttinger Nachrichten, com., Febr. (1911).

[W] WEYL HERMANN, Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen, Math. Ann., 71, 441-479, (1912).

[We] WEINBERGER H. F., *A first course in Partial Differential Equations*, Blaisdell, (1965).

[Wi] WIDDER D. V., *An Introduction to Transform Theory*, Academic Press, New York and London, (1971).

[Z] BENEDEK A., PANZONE R., Remarks on a Theorem of Å. Pleijel and related topics, I, INMABB-CONICET, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, Notas de Álgebra y Análisis # 19, (2005).

FE de ERRATAS [BP]

Página	**Línea**	**Dice**	**Debe decir**
2	12	autovalores	valores propios
7	-3	región	región (dominio)
9	1	Teorema 2	Teorema 1, §0.2.1
9	18	∂x_2^k	∂x_2^{k-h}
15	17	Obviamente	Supuesto esto
15	-3	que	que $k \in Lip_+(D)$ o
32	16	0.1	0.2.1
43	-4	μ_n	λ_n
44	2	[Le]	[Le], cf. Ref. vol.II
44	12	tiene	tiene (cf. 0.3.1)
56	-3	$\coloneqq G_t^{(1)}\phi$	$u \coloneqq G_t^{(1)}\phi$
57	17	v	u
57	-4	.	, $\overline{D}_\Delta = L^2(D)$.
59	-9	vale	vale, (por (3); cf. [S], (VII,10;15)),
60	17	$sup_{q\in D}$	$sup_{q\in D\setminus\{p\}}$
61	8	Sea	Sea *k* no constante,
61	9	tenemos	en todo caso tenemos
64	-8	$-\Sigma$	Σ
64	-8	$[\cdots]$	$[e^{-(s-2)\mathrm{Log}\lambda_n}]$
68	5	es	es prolongable y
69	4	$\theta_1(p;s)$	$\frac{\text{sen } s\pi}{\pi}\int \theta_1(p;s)k(p)dp$
69	5	.	, (cf. (3)§3.8).
77			dominio 1.3
77			región = dominio 1.3
79			$\mathbf{d} = \overline{\dim}_B(\cdot)$ 3.0