ISSN 0078 2009

NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS

21

Ibrahim Assem

Université de Sherbrooke

Juan Angel Cappa

María Inés Platzeck

Melina Verdecchia

Universidad Nacional del Sur

MODULOS INCLINANTES Y ALGEBRAS INCLINADAS

2008

INMABB - CONICET

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

INDICE GENERAL

INTRODUCCION

El objetivo de estas notas es presentar una introducción a la teoría de inclinación. Introducida hace más de treinta años, la teoría de inclinación ha adquirido más y más importancia con el correr del tiempo, y se ha convertido en una de las partes principales de la teoría moderna de representaciones de álgebras de artin. El contexto general de la teoría de inclinación es el siguiente: comenzando con un álgebra de artin A y un módulo finitamente generado T_A, interesa comparar las categorías de módulos sobre A y sobre el álgebra de endomorfismos $B = \mathrm{End}T_A$. Éste es un problema muy amplio, si no se restringe la clase de módulos T_A a considerar. Así, cuando T_A es un progenerador, la teoría de Morita nos dice que estas categorías son equivalentes. A fin de que esta comparación sea fructífera, una posibilidad es elegir el módulo T_A "muy cercano.ªl progenerador A_A. Un módulo inclinante es un tal módulo y, en una primera aproximación, la teoría de inclinación puede entenderse como una generalización de la teoría de Morita. Sin embargo, con los años, ha mostrado tener muchas otras interpretaciones y aplicaciones en varias áreas de la matemática (para un panorama reciente, remitimos al lector a [R], Ringel, (2007)).

En estas notas suponemos que el lector tiene cierta familiaridad con el álgebra homológica como puede encontrarse, por ejemplo, en los libros de Cartan-Eilenberg (1956) o Rotman (1979), y con los elementos de teoría de representación de álgebras, que pueden encontrarse en el libro de Auslander, Reiten y Smalϕ (1995), ó en los cuatro primeros capítulos del de Assem, Simson y Skowroński (2006). De todas maneras, recordamos en el primer capítulo las nociones necesarias para la comprensión del texto. El segundo capítulo está dedicado a las propiedades de los módulos inclinantes, y culmina con el llamado teorema de inclinación (también llamado Teorema de Brenner y Butler). Finalmente, el tercero está dedicado al estudio de las álgebras inclinadas. Teniendo en cuenta al alumno graduado que se está iniciando en investigación en teoría de representación, nos hemos preocupado en incluir en el texto numerosos ejemplos.

En la actualidad está generalmente aceptado que los orígenes de la teoría de inclinación pueden remontarse a los funtores de reflexión, introducidos por Bernstein, Gelfand y Ponomarev en 1973 para probar el Teorema de Gabriel. Sin embargo, estos funtores fueron definidos considerando un carcaj acíclico, y por lo tanto su uso se restringe a las álgebras hereditarias de dimensión finita sobre un cuerpo. En 1979 Auslander, Platzeck y Reiten definieron los funtores de reflexión sin usar carcajes. Los módulos inclinantes que introdujeron se llaman ahora módulos inclinantes APR y son todavía muy útiles en el estudio de las álgebras de artin. Poco después, el paso decisivo fue tomado por Brenner y Butler (1980), quienes definieron módulos inclinantes por un conjunto de axiomas y probaron varios resultados fundamentales. Happel y Ringel (1982) debilitaron los axiomas dados por Brenner y Butler, y pusieron gran parte de la teoría en su forma actual. También introdujeron la noción de álgebras inclinadas. En estas notas seguimos fundamentalmente el enfoque de Happel y Ringel. Desde entonces, las condiciones que definen a los módulos inclinantes han sido generalizadas más aún, por Miyashita (1986), Happel (1987) y otros. En el mismo trabajo de 1987, Happel prueba uno de los resultados más importantes de la teoría: si B es un álgebra obtenida de A por medio del proceso de inclinación, entonces las categorías derivadas acotadas de A y B son equivalentes. Las conexiones de la teoría inclinante con la categoría derivada, o con la categoría de conglomerados, según es considerada por Buan, Marsh, Reineke, Reiten y Todorov (2006) están más allá del objetivo de estas notas.

Las álgebras inclinadas, introducidas por Happel y Ringel (1982) son las que se obtienen de las álgebras hereditarias por el proceso inclinante. Su importancia se manifiesta en el hecho que un módulo indescomponible sobre un álgebra de artin arbitraria, que no está en un ciclo en la categoría de módulos, es módulo sobre un álgebra inclinada. Como se conoce mucho sobre la categoría de módulos sobre un álgebra hereditaria, también conocemos mucho sobre la categoría de módulos sobre un álgebra inclinada. Claramente, es útil tener un criterio para decidir si un álgebra dada es inclinada o no. Happel y Ringel han observado que la categoría de módulos sobre un álgebra inclinada tiene una configuración combinatoria - llamada rodaja - que permite recuperar el álgebra original. Desde entonces, se han encontrado varias caracterizaciones en el mismo espíritu, por ejemplo, la que encontró Ringel en 1984 y la que es quizás la más eficiente, debida (independientemente) a Liu y Skowroński (1993).

El primer autor agradece apoyo de NSERC de Canadá, los otros tres autores de la Universidad Nacional del Sur y del CONICET. M.I. Platzeck es miembro de la Carrera de Investigador Científico del CONICET.

CAPITULO I

PRELIMINARES

1. Algebras de artin

En estas notas todas las álgebras son álgebras de artin, a menos que se indique lo contrario. Recordamos que un álgebra se dice *de artin* si es finitamente generada como módulo sobre su centro, y éste es un anillo artiniano. Para las nociones básicas sobre anillos y módulos, o álgebra homológica, remitimos al lector a [AF, Ro, A].

Nos interesa aquí el estudio de la teoría de representaciones de un álgebra de artin A, es decir, la categoría $\mathrm{mod}A$ de $A-$módulos a derecha finitamente generados. Para ello, podemos suponer sin pérdida de generalidad que A es conexa (es decir, indescomponible como anillo).

Designaremos $\mathrm{ind}A$ a una subcategoría plena de $\mathrm{mod}A$ cuyos objetos forman un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de $A-$módulos indescomponibles. Por el teorema de descomposión única de Krull-Schmidt, todo $A-$módulo a derecha finitamente generado se escribe como suma directa de un número finito de $A-$módulos indescomponibles, y esta descomposición es única a menos de isomorfismo. En virtud de este resultado, la categoría $\mathrm{ind}A$ juega un papel esencial en el estudio de $\mathrm{mod}A$.

Sea $\mathscr{C}$ una subcategoría aditiva de $\mathrm{mod}A$. Escribiremos $M \in \mathscr{C}$ para expresar que M es un objeto de $\mathscr{C}$, y notaremos $\mathrm{ind}\,\mathscr{C}$ la subcategoría plena de $\mathrm{ind}A$ que tiene por objetos un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de objetos de $\mathscr{C}$. Si M es un $A-$módulo, notaremos $\mathrm{add}M$ la subcategoría aditiva de $\mathrm{mod}A$ formada por las sumas directas de sumandos directos de M, y escribiremos $\mathrm{ind}M$ en lugar de $\mathrm{ind}(\mathrm{add}M)$.

Por último, consideraremos los $A-$módulos a izquierda como $A^{op}-$módulos (a derecha).

Una de las propiedades más importantes de las álgebras de artin es la existencia de una dualidad $D : \mathrm{mod}A \to \mathrm{mod}A^{op}$ (ver [AuRS], sección (II.3), p. 37). La utilizaremos de manera esencial en lo que sigue.

Sea $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos de A, arbitrario, pero fijo. A cada i tal que $1 \leq i \leq n$, se asocia un $A-$módulo indescomponible proyectivo $P_i = e_iA$ y (en virtud de la dualidad) un $A-$módulo indescomponible inyectivo $I_i = D(Ae_i)$. Por otra parte, el cociente $S_i = P_i/\mathrm{rad}P_i$ es simple e isomorfo al zócalo $\mathrm{soc}I_i$ de I_i. De hecho, esta correspondencia entre P_i e I_i es funtorial: Definimos el *funtor de Nakayama*

$$\nu = D\mathrm{Hom}_A(-, A) : \mathrm{mod}A \to \mathrm{mod}A.$$

Observamos que hay un isomorfismo de funtores $\nu \cong - \otimes_A DA$.

Lema 1.1. *El funtor de Nakayama induce una equivalencia entre las subcategorías de* $\mathrm{mod}A$ *formadas respectivamente por los proyectivos y los inyectivos, tal que* $\nu(P_i) \cong I_i$*, para cada* i*.*

Demostración. Sea $\nu' = \mathrm{Hom}_A(DA, -) : \mathrm{mod}A \to \mathrm{mod}A$. Entonces se tienen los siguientes isomorfismos funtoriales:

$\nu(P_i) = D\mathrm{Hom}_A(e_iA, A) \cong D(Ae_i) = I_i$;

$\nu'(I_i) = \mathrm{Hom}_A(DA, D(Ae_i)) \cong \mathrm{Hom}_{A^{op}}(Ae_i, A) \cong e_iA = P_i$. □

Lema 1.2. *Para todo $A-$módulo M y todo i tal que $1 \leq i \leq n$, se tiene que $Hom_A(P_i,M) \cong D\operatorname{Hom}_A(M,I_i)$.*

Demostración. $D\operatorname{Hom}_A(M,I_i) = D\operatorname{Hom}_A(M,D(Ae_i)) \cong D\operatorname{Hom}_{A^{op}}(Ae_i,DM)$
$\cong D(e_iDM) \cong (D^2M)e_i \cong Me_i \cong \operatorname{Hom}_A(e_iA,M) = \operatorname{Hom}_A(P_i,M)$. $\square$

Sea P la suma directa de los proyectivos de ind$A$, y sea $B = \operatorname{End} P_A$. Del teorema clásico de Morita resulta que las categorías mod$A$ y mod$B$ son equivalentes, y que dos $B-$módulos proyectivos indes-componibles correspondientes a dos idempotentes ortogonales primitivos distintos no son isomorfos (es decir, B es un álgebra *básica*). Por lo tanto, podemos suponer de partida, sin pérdida de genera-lidad, que A es básica. Salvo mención explícita de lo contrario, supondremos que todas nuestras álgebras son conexas y básicas.

Ahora definimos el grupo de Grothendieck del álgebra A. Sea $\mathscr{F}$ el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfismo $\widetilde{M}$ de los $A-$módulos finitamente generados M, y $\mathscr{F}'$ el subgrupo generado por todas las expresiones $\widetilde{L}+\widetilde{N}-\widetilde{M}$, tales que

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

es una sucesión exacta en mod$A$. Entonces el *grupo de Grothendieck* $K_0(A)$ de A es por definición el grupo cociente $\mathscr{F}/\mathscr{F}'$.

Notamos $[M]$ la imagen de $\widetilde{M}$ en $K_0(A)$.

Sea $\{S_1,S_2,...,S_n\}$ el subconjunto de ind$A$ de los módulos simples. Resulta inmediatamente del teorema de Jordan -Hölder que para cada $M \in \operatorname{mod} A$ el número $m_i(M)$ de factores de composición de M isomorfos a S_i depende sólo de M y de S_i (y no de la serie de composición de M). Llamamos *vector dimensión* de M al vector

$$\underline{\dim}(M) = [m_1(M),m_2(M),...,m_n(M)] \in \mathbb{Z}^n.$$

Esto permite definir, para cada i, aplicaciones $m_i : \mathscr{F} \to \mathbb{Z}$ y $\underline{\dim} : \mathscr{F} \to \mathbb{Z}^n$, poniendo $m_i(\widetilde{M}) = m_i(M)$, $\underline{\dim}(\widetilde{M}) = \underline{\dim}(M)$.

Lema 1.3. *Las aplicaciones m_i y $\underline{\dim}$ inducen homomorfismos de grupos*

$$m_i : K_0(A) \to \mathbb{Z} \quad y \quad \underline{\dim} : K_0(A) \to \mathbb{Z}^n.$$

Demostración. Basta probar que, si $0 \to L \to M \to N \to 0$ es una sucesión exacta corta, entonces para cada i se tiene que $m_i(M) = m_i(L)+m_i(N)$.

Podemos suponer que $L \subseteq M$ y $N = M/L$. Si $0 = L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq ... \subsetneq L_s = L$ es una serie de composición de L, y $0 = M_0/L \subsetneq M_1/L \subsetneq ... \subsetneq M_t/L = M/L = N$ una de N, se ve de inmediato que $0 = L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq ... \subsetneq L_s = L = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq ... \subsetneq M_t = M$ es una serie de composición de M. De aquí se deduce la igualdad deseada. $\square$

Teorema 1.4. *El grupo $K_0(A)$ es abeliano libre con base $\{[S_1],[S_2],...,[S_n]\}$ y la aplicación $\underline{\dim}$: $K_0(A) \to \mathbb{Z}^n$ es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. Resulta de la existencia de series de composición de los $A-$módulos y de la definición de $K_0(A)$ que, para todo $A-$módulo M, tenemos:

$$[M] = \sum_{i=1}^{n} m_i(M)\,[S_i]\,.$$

Por lo tanto el conjunto $\{[S_1],[S_2],...,[S_n]\}$ genera $K_0(A)$. En virtud de (1.3), la aplicación $\underline{\dim}$: $K_0(A) \to \mathbb{Z}^n$ es un homomorfismo de grupos. Como el conjunto $\{[S_1],[S_2],...,[S_n]\}$ se aplica biyectivamente sobre la base canónica de $\mathbb{Z}^n$, es linealmente independiente y, luego, una base. Por lo tanto $\underline{\dim}$: $K_0(A) \to \mathbb{Z}^n$ es un isomorfismo. □

Corolario 1.5. *Sea A un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. Entonces, para todo i y todo A−módulo M, se tiene que:*

$$m_i(M) = \dim_k \mathrm{Hom}_A(P_i, A).$$

Demostración. Sabemos que m_i define un homomorfismo $K_0(A) \to \mathbb{Z}$ tal que

$$m_i(S_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j\,. \end{cases}$$

Por otra parte, $\dim_k \mathrm{Hom}_A(P_i, -)$ también define un homomorfismo $K_0(A) \to \mathbb{Z}$, ya que si $0 \to L \to M \to N \to 0$ es una sucesión exacta, entonces

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P_i, L) \to \mathrm{Hom}_A(P_i, M) \to \mathrm{Hom}_A(P_i, N) \to 0$$

también lo es.

Como k es algebraicamente cerrado, el anillo de endomorfismos de cada módulo simple tiene dimensión 1, y se tiene que

$$\dim_k \mathrm{Hom}_A(P_i, S_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j\,. \end{cases}$$

Como ambos homomorfismos coinciden en la base $\{[S_j]\}_{j=1}^{n}$, son iguales. □

Los carcajes ligados forman una fuente inagotable de ejemplos. Un *carcaj* Q es una cuádrupla ordenada $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ formada por dos conjuntos, Q_0 (el conjunto de *puntos*) y Q_1 (el conjunto de *flechas*); y dos aplicaciones $s,t : Q_1 \to Q_0$ que asocian a cada flecha $\alpha \in Q_1$ su *inicio* $s(\alpha)$ y su *fin* $t(\alpha)$. De esta manera, un carcaj se puede considerar un grafo orientado (que puede tener lazos y flechas múltiples).

Sean Q un carcaj finito y $x,y \in Q_0$. Un *camino* de longitud l de x a y es una sucesión de flechas $\alpha_1\alpha_2...\alpha_l$ tales que $x = s(\alpha_1)$, $y = t(\alpha_l)$, y $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ para todo i tal que $1 \leq i < l$. Además asociamos a cada punto $x \in Q_0$ un camino de longitud nula ε_x llamado el *camino estacionario* en x. Sea k un cuerpo. El *álgebra de caminos kQ* de Q es la $k-$álgebra con base formada por los caminos de Q (incluidos los caminos estacionarios), dotada del producto dado por la composición de caminos:

$$(\alpha_1\alpha_2...\alpha_l)(\beta_1\beta_2...\beta_m) = \begin{cases} \alpha_1\alpha_2...\alpha_l\beta_1\beta_2...\beta_m & \text{si} \quad t(\alpha_l) = s(\beta_1) \\ 0 & \text{si} \quad t(\alpha_l) \neq s(\beta_1) \end{cases}$$

y prolongado por distributividad y asociatividad teniendo en cuenta que, si x e y son puntos y α es una flecha, entonces

$$\varepsilon_x\alpha = \begin{cases} \alpha & \text{si } s(\alpha) = x \\ 0 & \text{si } s(\alpha) \neq x \end{cases} \quad , \quad \alpha\varepsilon_x = \begin{cases} \alpha & \text{si } t(\alpha) = x \\ 0 & \text{si } t(\alpha) \neq x \end{cases} \quad \text{y} \quad \varepsilon_x\varepsilon_y = \begin{cases} \varepsilon_x & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \,. \end{cases}$$

Una *relación* sobre Q, de x a y, es un elemento de kQ de la forma $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\omega_i$ donde, para cada i, λ_i es un escalar no nulo y ω_i es un camino de longitud mayor o igual que dos de x a y. Un conjunto de relaciones sobre kQ genera un ideal I de kQ. Este ideal I se dice *admisible* si existe un entero p tal que todo camino de Q de longitud mayor o igual que p pertenece a I. Si I es admisible, entonces es fácil de probar que el álgebra cociente kQ/I es de $k-$dimensión finita.

Recíprocamente, si A es un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k, entonces existen un carcaj conexo, finito Q y un ideal admisible I de kQ tales que $A \cong kQ/I$ (ver [AuRS] (III.1.10) p. 66 ó [ASS] (II 3.7) p. 64). En este caso, las clases módulo I de los caminos estacionarios, $e_x = \varepsilon_x + I$, forman un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos de A (en particular, están en correspondencia biyectiva con los puntos de Q). A cada $x \in Q_0$ corresponde también un $A-$módulo proyectivo indescomponible $P_x = e_xA$. Las clases módulo I de los caminos de Q que comienzan en x forman una base de P_x considerado como k-espacio vectorial. Dualmente, asociado a x tenemos el $A-$módulo inyectivo $I_x = D(Ae_x)$, y la base dual de las clases módulo I de los caminos que terminan en x.

Ejemplo 1.6. Sea A dada por el carcaj Q

$$\begin{tikzcd} & \overset{2}{\circ} \arrow[dl, "\beta"'] & \\ 1\circ & & \circ 4 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\ & \underset{3}{\circ} \arrow[ul, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

ligado por la relación $\rho = \alpha\beta - \gamma\delta$ (es decir, A es el cociente del álgebra de caminos de Q por el ideal generado por ρ). Escribimos brevemente $\alpha\beta = \gamma\delta$, y la llamamos una *relación de conmutatividad*. Notamos $I = \langle\rho\rangle$. Aquí el proyectivo indescomponible P_1 tiene por base $\{e_1\}$, y es simple; $\{e_2, \beta + I\}$ es una base de P_2, y el proyectivo P_4 tiene por base $\{e_4, \alpha + I, \gamma + I, \alpha\beta + I = \gamma\delta + I\}$. Suele ser más útil representar los módulos por sus sucesiones de Loewy (ver [AuRS] p.12 ó [ASS] p. 160):

$$P_1 = 1, \; P_2 = {}^{2}_{1}, \; P_3 = {}^{3}_{1}, P_4 = \begin{smallmatrix} & 4 & \\ 2 & & 3 \\ & 1 & \end{smallmatrix}.$$

Análogamente,

$$I_1 = \begin{smallmatrix} & 4 & \\ 2 & & 3 \\ & 1 & \end{smallmatrix},\ I_2 = \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix},\ I_3 = \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix},\ I_4 = 4.$$

2. Morfismos irreducibles y sucesiones que casi se parten.

Nuestra herramienta principal en estas notas es la teoría de Auslander-Reiten. A continuación resumimos sus principales resultados. Para una exposición detallada, remitimos al lector a [AuRS] o, para el caso de álgebras sobre cuerpos algebraicamente cerrados, a [ASS]. En toda esta sección, suponemos que A es un álgebra de artin básica y conexa.

Definiciones. (a) Sea $f : L \to M$ un morfismo de $A-$módulos. Entonces f se dice *minimal a izquierda* si $hf = f$ implica que h es un automorfismo; se dice que f *casi se parte a izquierda* si no es una sección y, para todo $u : L \to U$ que no es una sección, existe $u' : M \to U$ tal que $u'f = u$. Por último, se dice que f es un morfismo *minimal que casi se parte a izquierda* si es minimal a izquierda y casi se parte a izquierda.

(b) Sea $g : M \to N$ un morfismo de $A-$módulos. Entonces g se dice *minimal a derecha* si $gk = g$ implica que k es un automorfismo; se dice que g *casi se parte a derecha* si no es una retracción y, para todo $v : V \to N$ que no es una retracción, existe $v' : V \to M$ tal que $gv' = v$. Por último, g se dice *minimal que casi se parte a derecha* si es minimal a derecha y casi se parte a derecha.

Es claro que cada noción "a derecha" es dual de la correspondiente noción "a izquierda". A modo de ejemplo, enunciamos el siguiente lema, cuya sencilla demostración dejamos a cargo del lector.

Lema 2.1. (a) *Sea P un $A-$módulo indescomponible proyectivo. Entonces $f : L \to P$ es minimal que casi se parte a derecha si y sólo si f es un monomorfismo con imagen* rad$P$.

(b) *Sea I un $A-$módulo indescomponible inyectivo. Entonces $g : I \to N$ es minimal que casi se parte a izquierda si y sólo si g es un epimorfismo con núcleo* soc$I$. □

Definición. Un morfismo de $A-$módulos $f : M \to N$ se dice *irreducible* si no es una sección ni una retracción y, para toda factorización $f = f_1 f_2$, con $f_1 : X \to N$ y $f_2 : M \to X$, se tiene que f_1 es una retracción o f_2 es una sección.

Es evidente que esta definición es autodual. Notemos que todo morfismo irreducible es un monomorfismo o un epimorfismo: En efecto, sea $f = jp$ la factorización canónica del morfismo irreducible f a través de su imagen. Si f no es un monomorfismo, entonces p tampoco lo es. Por tanto j es a la vez un monomorfismo y una retracción. De aquí sigue que j es un isomorfismo. Luego f es un epimorfismo, como queríamos. Este hecho (con el lema de Fitting) implica que, para todo módulo indescomponible M, no existen morfismos irreducibles de M en M.

El lector puede ver una demostración del siguiente teorema que relaciona los morfismos irreducibles y los morfismos minimales que casi se parten a izquierda (o a derecha) en [AuRS] (V.5.3) p. 167 ó [ASS] (IV, 1.10) p. 103.

Teorema 2.2. (a) *Sea L un módulo indescomponible. Un morfismo $f : L \to M$ es irreducible si y sólo si $M \neq 0$ y existe un morfismo $f' : L \to M'$ tal que $\begin{bmatrix} f \\ f' \end{bmatrix} : L \to M \oplus M'$ es minimal que casi se parte a izquierda.*

(b) *Sea N un módulo indescomponible. Un morfismo $g : M \to N$ es irreducible si y sólo si $M \neq 0$ y existe un morfismo $g' : M' \to N$ tal que $\begin{bmatrix} g & g' \end{bmatrix} : M \oplus M' \to N$ es minimal que casi se parte a derecha.* $\square$

Luego, si P es indescomponible proyectivo, un morfismo no nulo $f' : L' \to P$ es irreducible si, y sólo si, existe L'' tal que $L' \oplus L'' \cong \mathrm{rad}P$ y f' es la composición de las inclusiones $L' \hookrightarrow \mathrm{rad}P \hookrightarrow P$. Dualmente, si I es indescomponible inyectivo, un morfismo no nulo $g' : I \to N'$ es irreducible si, y sólo si, existe N'' tal que $N' \oplus N'' \cong I \,/\, \mathrm{soc}I$ y g' es la composición de las proyecciones $I \twoheadrightarrow I \,/\, \mathrm{soc}I \twoheadrightarrow N'$. Esto sigue directamente de (2.1) y (2.2).

Definición. Una sucesión exacta corta de $A-$módulos

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

se dice *que casi se parte* si f es minimal que casi se parte a izquierda y g es minimal que casi se parte a derecha.

Resulta directamente de la definición que una sucesión que casi se parte no se parte. El teorema siguiente (cuya demostración se encuentra en [AuRS] (V.1.4) p. 144 y (V.5.3) p. 167 ó [ASS] (IV 1.13) p.105) resume las propiedades y caracterizaciones de las sucesiones que casi se parten.

Teorema 2.3. *Sea $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ una sucesión exacta corta. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *La sucesión casi se parte.*
(b) *L es indescomponible y g es un morfismo que casi se parte a derecha.*
(c) *N es indescomponible y f es un morfismo que casi se parte a izquierda.*
(d) *f es un morfismo minimal que casi se parte a izquierda.*
(e) *g es un morfismo minimal que casi se parte a derecha.*
(f) *L,N son indescomponibles y f,g son irreducibles.*

Además, si estas condiciones se verifican, la sucesión está unívocamente determinada por N (o por L) salvo isomorfismo. $\square$

Para probar la existencia de sucesiones que casi se parten, se consideran las categorías proyectivamente e inyectivamente estables. Sean M y N dos $A-$módulos. Definimos $\mathscr{P}(M,N)$ (e $\mathscr{I}(M,N)$) como el conjunto de morfismos de M en N que se factorizan por $A-$módulos proyectivos (e inyectivos, respectivamente). Es fácil probar que $\mathscr{P}(M,N)$ e $\mathscr{I}(M,N)$ son subgrupos de $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ y que, más aún, estos subgrupos definen ideales $\mathscr{P}$ e $\mathscr{J}$ de $\mathrm{mod}A$, respectivamente.

La *categoría proyectivamente estable* $\underline{\mathrm{mod}}A = (\mathrm{mod}A)/\mathscr{P}$ admite por objetos todos los $A-$módulos, y el conjunto de morfismos de M a N en esta categoría es $\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)/\mathscr{P}(M,N)$. De manera dual, los A-módulos son también los objetos de la *categoría inyectivamente estable* $\overline{\mathrm{mod}}A = (\mathrm{mod}A)/\mathscr{J}$, y el conjunto de morfismos de M a N en esta categoría es $\overline{\mathrm{Hom}}_A(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)/\mathscr{J}(M,N)$.

Consideremos ahora un $A-$módulo M y una presentación proyectiva minimal

$$P_1 \xrightarrow{f} P_0 \to M \to 0.$$

Se define la *traspuesta* TrM de M como el conúcleo de $\mathrm{Hom}_A(f,A)$:

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,A) \to \mathrm{Hom}_A(P_0,A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(f,A)} \mathrm{Hom}_A(P_1,A) \to TrM \to 0.$$

Usando que un morfismo $f : M \to N$ puede levantarse a un morfismo entre presentaciones proyectivas de M y N, puede definirse un morfismo, la traspuesta de f, de TrM en TrN. Si bien no es único se puede probar que esta operación induce un funtor (de hecho una dualidad) $Tr : \underline{\mathrm{mod}}A \to \underline{\mathrm{mod}}A^{op}$ (ver [AuRS] (IV.1.6) p. 104).

Esto nos permite definir las composiciones $\tau = DTr$ y $\tau^{-1} = TrD$, llamadas las *traslaciones de Auslander-Reiten*. Así, τ es una equivalencia de $\underline{\mathrm{mod}}A$ en $\overline{\mathrm{mod}}A$, de inversa $\tau^{-1} : \overline{\mathrm{mod}}A \to \underline{\mathrm{mod}}A$ (ver [AuRS] (IV.1.9) p. 106 ó [ASS] (IV 2.3) p. 112).

Recordemos que $\nu = D\mathrm{Hom}_A(-,A)$ y $\nu' = \mathrm{Hom}_A(DA,-)$ son los funtores considerados en la sección 1.

Lema 2.4. (a) *Si* $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \to M \to 0$ *es una presentación proyectiva minimal, se tiene una sucesión exacta*

$$0 \to \tau M \to \nu P_1 \xrightarrow{\nu f} \nu P_0 \to \nu M \to 0.$$

(b) *Si* $0 \to N \to I^0 \xrightarrow{g} I^1$ *es una copresentación inyectiva minimal, se tiene una sucesión exacta*

$$0 \to \nu' N \to \nu' P_1 \xrightarrow{\nu g} \nu' P_0 \to \tau^{-1} N \to 0.$$

Demostración. Basta probar (a), ya que (b) es dual. La sucesión requerida resulta de aplicar la dualidad D a la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,A) \to \mathrm{Hom}_A(P_0,A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(f,A)} \mathrm{Hom}_A(P_1,A) \to TrM \to 0.$$

□

En lo que sigue, $\mathrm{dp}M$ designará la dimensión proyectiva del A-módulo M, $\mathrm{di}M$ su dimensión inyectiva, y $\mathrm{dim.gl.}A$ la dimensión global del álgebra A.

Corolario 2.5. *Sea M un $A-$módulo.*

(a) $\mathrm{dp}M \leq 1$ *si y sólo si* $\mathrm{Hom}_A(DA, \tau M) = 0$.

(b) $\mathrm{di}M \leq 1$ *si y sólo si* $\mathrm{Hom}_A(\tau^{-1}M, A) = 0$.

Demostración. Basta probar (a), porque (b) es dual. En virtud de (2.4) y (1.1), se tiene un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \nu'\tau M \arrow[r] & \nu'\nu P_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \nu'\nu P_0 \arrow[d, equal] & & \\ & & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

porque $\nu' = \mathrm{Hom}_A(DA, -)$ es exacto a izquierda. Luego $\mathrm{dp}M \leq 1$ si y sólo si $\nu'\tau M = 0$, que es lo que queríamos. □

El siguiente teorema es esencial en la demostración de la existencia de sucesiones que casi se parten:

Teorema 2.6. *(Las fórmulas de Auslander-Reiten). Sean M y N dos $A-$módulos. Existen isomorfismos*

$$\mathrm{Ext}^1_A(M,N) \cong D\underline{\mathrm{Hom}}_A(\tau^{-1}N, M) \cong D\overline{\mathrm{Hom}}_A(N, \tau M),$$

funtoriales en ambas variables.

Demostración. Indicamos las etapas principales de la prueba, dejando el detalle de los cálculos al lector. Necesitamos unas palabras de preparación. Dados dos $A-$módulos X, Y, consideremos el morfismo funtorial

$$\varphi_{X,Y} : Y \otimes_A \mathrm{Hom}_A(X,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X,Y)$$

definido por: $y \otimes f \longmapsto (x \longmapsto yf(x))$ (para $x \in X$, $y \in Y$ y $f : X \to A$). Es claro que si X o Y es proyectivo, entonces $\varphi_{X,Y}$ es un isomorfismo. Por otra parte, Coker $\varphi_{X,Y} \cong \underline{\mathrm{Hom}}_A(X,Y)$: En efecto, una cubierta proyectiva $P \to Y$ induce un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd} P \otimes_A \mathrm{Hom}_A(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{X,P}"', "\cong"] & Y \otimes_A \mathrm{Hom}_A(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{X,Y}"'] & 0 & \\ \mathrm{Hom}_A(X,P) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(X,Y) \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}}_A(X,Y) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

que implica nuestra afirmación.

Sean ahora M, N dos $A-$módulos. Evidentemente basta probar el primer isomorfismo del enunciado del teorema, y para ello podemos suponer que N no tiene sumandos directos inyectivos. Una presentación proyectiva minimal

$$P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} \tau^{-1}N \to 0$$

induce, en virtud de (2.4), una sucesión exacta

$$0 \to N \to \nu P_1 \xrightarrow{\nu f_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu f_0} \nu(\tau^{-1}N) \to 0.$$

De aquí se obtiene el complejo

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(M,\nu P_1) \to \mathrm{Hom}_A(M,\nu P_0) \to \mathrm{Hom}_A(M,\nu(\tau^{-1}N)).$$

Por otro lado, la presentación proyectiva minimal dada induce una sucesión exacta

$$D\,\mathrm{Hom}_A(P_1,M) \to D\,\mathrm{Hom}_A(P_0,M) \to D\,\mathrm{Hom}_A(\tau^{-1}N,M) \to 0.$$

Ahora, si componemos, para un A-módulo X, el dual de $\varphi_{M,X}$ con el isomorfismo de adjunción, obtenemos un morfismo

$$\psi_{M,X} : D\,\mathrm{Hom}_A(M,X) \xrightarrow{D\varphi_{M,X}} D(X \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M,A)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_A(X,\nu M)\ ,$$

que es un isomorfismo cuando X es proyectivo. De esta manera tenemos un diagrama conmutativo donde la fila superior es exacta y la fila inferior es un complejo:

$$\begin{tikzcd}
 & D\,\mathrm{Hom}_A(P_1,M) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{M,P_1}"', "\cong"] & D\,\mathrm{Hom}_A(P_0,M) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{M,P_0}"', "\cong"] & D\,\mathrm{Hom}_A(\tau^{-1}N,M) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{M,\tau^{-1}N}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] \mathrm{Hom}_A(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M,\nu P_1) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M,\nu P_0) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M,\nu(\tau^{-1}N)). &
\end{tikzcd}$$

Como νP_1 y νP_0 son inyectivos, deducimos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^1_A(M,N) &= \mathrm{Ker}\,\mathrm{Hom}_A(M,\nu f_0)\ /\ \mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(M,\nu f_1) \\
&\cong \mathrm{Ker}\ \psi_{M,\tau^{-1}N} \\
&\cong \mathrm{Ker}\ D\varphi_{M,\tau^{-1}N} \\
&\cong D\ \mathrm{Coker}\ \varphi_{M,\tau^{-1}N} \\
&\cong D\underline{\mathrm{Hom}}_A(\tau^{-1}N,M)
\end{aligned}$$

en virtud del enunciado probado más arriba. □

Corolario 2.7. (a) $\mathrm{dp}M \leq 1$ *implica* $\mathrm{Ext}^1_A(M,N) \cong D\ \mathrm{Hom}_A(N,\tau M)$.
(b) $\mathrm{di}M \leq 1$ *implica* $\mathrm{Ext}^1_A(M,N) \cong D\,\mathrm{Hom}_A(\tau^{-1}N,M)$.

Demostración. Basta probar (a), ya que (b) es dual. Si $\mathrm{dp}M \leq 1$, entonces, por (2.5), $\mathrm{Hom}_A(DA,\tau M) = 0$. Por consiguiente, ningún morfismo (no nulo) de N a τM se factoriza por inyectivos. Luego $\mathrm{Hom}_A(N,\tau M) = \overline{\mathrm{Hom}}_A(N,\tau M)$. □

Sea M un módulo indescomponible y no proyectivo. Empleando las fórmulas de Auslander-Reiten se puede probar que el bimódulo $\mathrm{Ext}^1_A(M,\tau M)$ tiene zócalo simple como $\mathrm{End}\,M$-módulo y como $(\mathrm{End}\,\tau M)^{op}$-módulo. Además estos dos zócalos coinciden y cada elemento no nulo del zócalo es una sucesión que casi se parte. Para la demostración de estos resultados, que implican el siguiente teorema de existencia, remitimos al lector a [AuRS] (V.2.1) p. 147, ó [ASS] (IV. 3.1) p 120.

Teorema 2.8. (a) *Para todo $A-$módulo indescomponible no proyectivo M, existe una sucesión que casi se parte*

$$0 \to \tau M \to E \to M \to 0.$$

(b) *Para todo $A-$módulo indescomponible no inyectivo N, existe una sucesión que casi se parte*

$$0 \to N \to F \to \tau^{-1}N \to 0.$$

□

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es que, para todo módulo indescomponible M, existe un morfismo minimal que casi se parte a derecha $f : L \to M$. En efecto, si M es proyectivo, tomamos la inclusión $\mathrm{rad}M \hookrightarrow M$, y si no lo es, existe una sucesión que casi se parte

$$0 \to \tau M \to L \xrightarrow{f} M \to 0.$$

En particular, $L = 0$ si y sólo si M es simple proyectivo. Dualmente, para todo módulo indescomponible M, existe un morfismo minimal que casi se parte a izquierda $g : M \to N$, y $N = 0$ si y sólo si M es simple inyectivo.

Corolario 2.9. (a) *Sea M un $A-$módulo indescomponible no proyectivo. Existe un morfismo irreducible $f : X \to M$ si y sólo si existe un morfismo irreducible $f' : \tau M \to X$.*

(b) *Sea N un $A-$módulo indescomponible no inyectivo. Existe un morfismo irreducible $g : N \to Y$ si y sólo si existe un morfismo irreducible $g' : Y \to \tau^{-1}N$.*

Demostración. Basta probar (a), porque (b) es dual. Sea $f : X \to M$ un morfismo irreducible. Por (2.2), existe $g : X' \to M$ tal que $\begin{bmatrix} f & g \end{bmatrix} : X \oplus X' \to M$ es minimal que casi se parte a derecha. Como M no es proyectivo, por (2.3) hay una sucesión que casi se parte

$$0 \to \tau M \xrightarrow{\begin{bmatrix} f' \\ g' \end{bmatrix}} X \oplus X' \xrightarrow{[f\ g]} M \to 0\ ,$$

de la cual resulta el enunciado, usando nuevamente (2.2). □

Corolario 2.10. (a) *Sea S un $A-$módulo simple proyectivo y no inyectivo. Si $f : S \to M$ es irreducible, entonces M es proyectivo.*

(b) *Sea S un $A-$módulo simple inyectivo y no proyectivo. Si $g : N \to S$ es irreducible, entonces N es inyectivo.*

Demostración. Basta probar (a), porque (b) es dual. Podemos suponer que M es indescomponible. Si M no es proyectivo, existe, en virtud de (2.9), un morfismo irreducible $\tau M \to S$. Pero esto contradice la hipótesis de que S es simple proyectivo. □

Corolario 2.11. *Sea M un $A-$módulo indescomponible no proyectivo tal que* $\mathrm{End}\,M_A$ *es un anillo de división. Entonces cualquier elemento no nulo de* $\mathrm{Ext}^1_A(M, \tau M)$ *es una sucesión que casi se parte.*

Demostración. Por la fórmula de Auslander -Reiten sabemos que

$$\mathrm{Ext}^1_A(M,\tau M)\cong D\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,M)\cong D\,\mathrm{End}\,M_A,$$

de donde $\mathrm{Ext}^1_A(M,\tau M)$ es un espacio vectorial de dimensión 1 sobre $\mathrm{End}\,M_A$, de lo que resulta lo enunciado. □

Ejemplo 2.12. Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y A el álgebra dada por el carcaj Q

$$1\circ \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \circ\, 2$$

ligado por la relación $\alpha\beta=0$ (es decir, como hemos visto, A es el cociente del álgebra de caminos de Q por el ideal generado por $\alpha\beta$). Procediendo como en (1.6), vemos que los proyectivos e inyectivos indescomponibles son:

$$P_1=\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\qquad P_2=\begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix}$$

$$I_1=\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\qquad I_2=P_2\ .$$

Construiremos la sucesión que casi se parte que termina en 1. Para ello, comencemos por calcular $\tau 1$: Una resolución proyectiva minimal

$$\begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix}\longrightarrow\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\longrightarrow 1\longrightarrow 0$$

induce, por aplicación de ν, una sucesión exacta

$$0\longrightarrow 2\longrightarrow\begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix}\longrightarrow\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$$

donde $2=\tau 1$ (esto se deduce de que $\dim_k\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix})=1$). Como 1 es simple, $\mathrm{End}(1_A)$ es un anillo de división y (2.11) implica entonces que todo elemento no nulo de $\mathrm{Ext}^1_A(1,2)=\mathrm{Ext}^1_A(1,\tau 1)$ es una sucesión que casi se parte. Un tal elemento es la sucesión

$$0\longrightarrow 2\longrightarrow\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\longrightarrow 1\longrightarrow 0.$$

De igual manera, para calcular la sucesión que casi se parte que termina en 2, consideramos la resolución proyectiva minimal

$$\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\longrightarrow\begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix}\longrightarrow 2\longrightarrow 0.$$

De aquí deducimos, por aplicación de ν, una sucesión exacta

$$0\longrightarrow 1\longrightarrow\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\longrightarrow\begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix},$$

porque ahora $\dim_k\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix})=1$. Por lo tanto $\tau 2=1$. Nuevamente, basta calcular una extensión que no se parte, como la siguiente:

$$0\longrightarrow 1\longrightarrow\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\longrightarrow 2\longrightarrow 0.$$

Es necesario alertar al lector: El cálculo de una sucesión que casi se parte (y en particular de su término medio) es en general muy difícil.

3. El carcaj de Auslander-Reiten.

El carcaj de Auslander-Reiten permite presentar importante información contenida en las sucesiones que casi se parten bajo forma de diagrama. Para definir este carcaj, necesitamos introducir la noción de *radical* de una categoría de módulos.

Sea A un álgebra de artin y M,N dos $A-$módulos. Se define $\mathrm{rad}_A(M,N)$ como el conjunto de los $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ tales que, para todo $X \in \mathrm{ind}A$ y para todo par de morfismos $g: X \to M$, $h: N \to X$, la composición hfg no es un isomorfismo.

Si M y N son indescomponibles, esta definición se simplifica.

Lema 3.1. *Sean M,N dos $A-$módulos indescomponibles. Entonces* $\mathrm{rad}_A(M,N) = \{f \in \mathrm{Hom}_A(M,N) \mid f$ *no es un isomorfismo*$\}$.

Demostración. Si $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ es un isomorfismo, entonces $M \xrightarrow{id} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{f^{-1}} M$ también lo es. Por consiguiente el miembro izquierdo está contenido en el miembro derecho. Recíprocamente, supongamos que $g: X \to M$, $h: N \to X$ son morfismos tales que $hfg = u$ es un isomorfismo. En particular, h es un epimorfismo y g un monomorfismo. Por otra parte, el morfismo compuesto

$$M \xrightarrow{f} N \overset{h}{\twoheadrightarrow} X \xrightarrow[\cong]{u^{-1}} X \overset{g}{\hookrightarrow} M$$

es un endomorfismo de M. Entonces

$$(gu^{-1}hf)(gu^{-1}hf) = (gu^{-1})(hfg)(u^{-1}hf) = (gu^{-1})u(u^{-1}hf) = gu^{-1}hf$$

es un idempotente. Como M es indescomponible, esto implica que $gu^{-1}hf = 0$ ó $gu^{-1}hf = id_M$. Pero $gu^{-1}hf = 0$ implica $hf = 0$, lo que es imposible, porque hfg es un isomorfismo. Por lo tanto $gu^{-1}hf = id_M$. Análogamente se prueba que el endomorfismo $fgu^{-1}h$ de N es un idempotente no nulo, de donde $fgu^{-1}h = id_N$. Por lo tanto f es inversible a izquierda y a derecha, o sea, es un isomorfismo. $\square$

Es fácil probar que para cada par de módulos M,N, el conjunto $\mathrm{rad}_A(M,N)$ es un subgrupo de $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ y, más aún, que estos subgrupos definen un ideal rad_A de $\mathrm{mod}A$ (ver [AuRS] (V.7.1) p. 178).

Entonces podemos definir las potencias de este ideal de la manera usual. En particular, para dos $A-$módulos M,N, se define $\mathrm{rad}_A^2(M,N) = \{f \in \mathrm{Hom}_A(M,N) \mid$ existen $X \in \mathrm{mod}A$ y morfismos $g \in \mathrm{rad}_A(M,X), h \in \mathrm{rad}_A(X,N)$ tales que $f = hg\}$.

Ahora se puede probar que un morfismo $f: M \to N$ entre módulos indescomponibles es irreducible si y sólo si $f \in \mathrm{rad}_A(M,N) \setminus \mathrm{rad}_A^2(M,N)$ (ver [AuRS] (V.7.3) p. 179 ó [ASS] (IV.1.6) p. 100). Esta observación lleva a considerar el cociente

$$\mathrm{Irr}(M,N) = \mathrm{rad}_A(M,N)/\mathrm{rad}_A^2(M,N).$$

Es claro que $\mathrm{Irr}(M,N)$ está munido de una estructura de $\mathrm{End}M-(\mathrm{End}N)^{op}-$bimódulo. Pero nosotros queremos más. Supongamos que M,N son indescomponibles y pongamos:

$$K_M = \mathrm{End}M/\mathrm{rad}\ \mathrm{End}M,\ K_N = \mathrm{End}N/\mathrm{rad}\ \mathrm{End}N.$$

Como $\mathrm{End}M$ y $\mathrm{End}N$ son anillos locales, K_M y K_N son anillos de división. Por otro lado, el radical del anillo $\mathrm{End}M$ coincide con $\mathrm{rad}_A(M,M)$, de donde

$$\mathrm{rad}\ \mathrm{End}N.\ \mathrm{rad}_A(M,N) \subseteq \mathrm{rad}_A^2(M,N),\ \mathrm{rad}_A(M,N).\ \mathrm{rad}\ \mathrm{End}M \subseteq \mathrm{rad}_A^2(M,N).$$

Luego $\mathrm{Irr}(M,N)$ está dotado de una estructura de $K_M - K_N^{op}-$bimódulo, y lo llamamos *bimódulo de los morfismos irreducibles*.

Ahora podemos definir el carcaj de Auslander-Reiten de A.

Definición. Sea A un álgebra de artin. El *carcaj de Auslander-Reiten* $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ de A se define como sigue:

(a) Los puntos de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ son los objetos de $\mathrm{ind}A$.

(b) Hay una (y sólo una) flecha $M \to N$ si y sólo si existe un morfismo irreducible de M a N. Esta flecha está munida de un par de enteros (a,b), llamado su *valuación*, donde $a = \dim_{K_M}\mathrm{Irr}(M,N)$ y $b = \dim_{K_N}\mathrm{Irr}(M,N)$.

Observaciones 3.2. (a) Supongamos que N en $\mathrm{ind}A$ no es proyectivo, y que (a,b) es la valuación de la flecha $M \to N$. Por (2.9), existe una flecha $\tau N \to M$. Se prueba que esta flecha tiene valuación (b,a) (ver [AuRS] (VII.1.5) p. 231).

(b) Como no existen morfismos irreducibles de un indescomponible en sí mismo, el carcaj de Auslander-Reiten no tiene lazos.

(c) Resulta de la definición que $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ es un carcaj finito si y sólo si $\mathrm{ind}A$ tiene sólo un número finito de objetos, es decir, si y sólo si el álgebra A es de representación finita.

(d) Describimos ahora la estructura local del carcaj de Auslander-Reiten. Sea M un $A-$módulo indescomponible no proyectivo. Entonces existe una sucesión que casi se parte

$$0 \to \tau M \to \bigoplus_{i=1}^{n} E_i^{m_i} \to M \to 0,$$

donde los E_i son indescomponibles, y $E_i \ncong E_j$ si $i \neq j$. Tenemos una "malla"

$$\begin{tikzcd}
 & E_1 \arrow[dr, "{(a_1,b_1)}"] \arrow[dd, dash, dotted] & \\
\tau M \arrow[ur, "{(b_1,a_1)}"] \arrow[dr, "{(b_n,a_n)}"'] & & M \\
 & E_n \arrow[ur, "{(a_n,b_n)}"'] &
\end{tikzcd}$$

y el carcaj de Auslander-Reiten es la unión de estas mallas. Esto implica que cada componente conexa del carcaj de Auslander-Reiten es finita o numerable. Generalmente, un carcaj de Auslander-Reiten admite infinitas componentes conexas. Por otra parte, si una componente conexa Γ de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ es finita, entonces $\Gamma = \Gamma(\mathrm{mod}A)$ y en particular A es de representación finita. Este enunciado es conocido bajo el nombre de teorema de Auslander (ver [AuRS] (VII.2.1) p. 233 ó [ASS] (IV.5.4) p. 141).

Ahora analizamos la definición precedente en el siguiente caso particular de gran importancia. Sea A un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. Entonces, para todo $A-$módulo indescomponible M, tenemos que

$$K_M = \operatorname{End} M/\operatorname{rad}(\operatorname{End} M) \cong k.$$

Así, para toda flecha $M \to N$ de $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ de valuación (a,b), los enteros a y b representan ambos la dimensión del $k-$espacio vectorial $\operatorname{Irr}(M,N)$. Por lo tanto, la información dada sobre $\operatorname{Irr}(M,N)$ por medio de un sola flecha munida de una valuación (a,a), puede darse también por medio de a flechas, todas de M a N y tenemos, en este caso particular, la siguiente definición.

Definición. Sea A un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. El *carcaj de Auslander-Reiten* $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ de A se define como sigue:

(a) Los puntos de $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ son los objetos de $\operatorname{ind} A$.

(b) Las flechas $M \to N$ están en correspondencia biyectiva con los vectores de una $k-$base de $\operatorname{Irr}(M,N)$.

Sigue de (3.2) (a) más arriba que si N no es proyectivo y hay n flechas de M a N, entonces también hay n flechas de τN a M.

Como en la mayoría de los ejemplos que veremos las álgebras son de representación finita, el siguiente resultado nos será útil. La prueba que damos aquí se debe a Bongartz.

Proposición 3.3. *Sea A un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. Si A es de representación finita, entonces* $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ *no tiene flechas múltiples.*

Demostración. Supongamos que existen $M,N \in \operatorname{ind} A$ tales que $\dim_k \operatorname{Irr}(M,N) \geq 2$. Como todo morfismo irreducible es un monomorfismo o un epimorfismo, podemos suponer que $\dim_k M > \dim_k N$. En particular N no es proyectivo y existe una sucesión que casi se parte de la forma

$$0 \to \tau N \to M^2 \oplus E \to N \to 0.$$

Luego $\dim_k \tau N = 2\dim_k M + \dim_k E - \dim_k N > \dim_k M > \dim_k N$. Por otro lado, en virtud de la observación de más arriba, $\dim_k \operatorname{Irr}(\tau N, M) = \dim_k \operatorname{Irr}(M,N) \geq 2$. Entonces, por recurrencia, $\dim_k N < \dim_k \tau N < \dim_k \tau^2 N < \ldots$ y la componente conexa de $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ que contiene a N es infinita, lo que contradice la hipótesis. $\square$

De manera equivalente, (3.3) dice que si A verifica la hipótesis del enunciado, entonces cada flecha de $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ tiene valuación $(1,1)$.

La razón por la cual el carcaj de Auslander-Reiten es tan útil es que puede ser considerado como una primera aproximación de la categoría de módulos. En efecto, definimos por recurrencia el ideal

$$\operatorname{rad}_A^n = \operatorname{rad}_A^{n-1}.\ \operatorname{rad}_A$$

de mod$A$, para cada $n > 1$. Entonces, para A - módulos M y N,

$$\operatorname{rad}_A^n(M,N) = \left\{ \sum_i g_i f_i : g_i \in \operatorname{rad}_A^{n-1}(X_i,N),\ f_i \in \operatorname{rad}_A(M,X_i), X_i \in \operatorname{ind}A \right\}.$$

Definimos el *radical infinito* $\operatorname{rad}_A^\infty$ de mod$A$ como el ideal

$$\operatorname{rad}_A^\infty = \bigcap_{n \geq 1} \operatorname{rad}_A^n .$$

Tenemos el teorema siguiente (ver [AuRS] (V.7) p.178 ó [ASS] (IV.5.6) p. 143).

Teorema 3.4. *Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo. Si $\operatorname{rad}_A^\infty(M,N) = 0$, entonces f es suma de composiciones de morfismos irreducibles.* $\square$

En particular, se puede probar que un álgebra A es de representación finita si y sólo si $\operatorname{rad}_A^\infty = 0$. En este caso, cada morfismo es suma de composiciones de morfismos irreducibles (entonces, se puede describir a partir del carcaj de Auslander-Reiten).

En general, el carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra arbitraria A contiene esencialmente la información de la categoría cociente mod$A/\operatorname{rad}_A^\infty$.

El lema siguiente será empleado en el capítulo III.

Lema 3.5. *Sean A un álgebra de artin y M, N dos A - módulos indescomponibles tales que* $\operatorname{rad}_A^\infty(M,N) \neq 0$. *Entonces, para cada $i \geq 0$, existen*

(a) un camino

$$M = M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \longrightarrow \ \dots\ \xrightarrow{f_i} M_i$$

de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles y un morfismo $g \in \operatorname{rad}_A^\infty(M_i,N)$ tales que $gf_i.....f_1 \neq 0$, y

(b) un camino

$$N_i \xrightarrow{g_i} \dots \longrightarrow N_1 \xrightarrow{g_1} N_0 = N$$

de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles y un morfismo $f \in \operatorname{rad}_A^\infty(M,N_i)$ tales que $g_1.....g_i f \neq 0$.

Demostración.

Basta probar (a), porque (b) es dual. Consideremos el morfismo minimal que casi se parte a izquierda

$$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_t \end{bmatrix} : M \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{t} E_i$$

donde los módulos E_i son indescomponibles. Como A es un álgebra de artin, su centro $Z(A)$ es un anillo artiniano, por lo que el $Z(A)$-módulo finitamente generado $\operatorname{Hom}_A(E_i,N)$ es artiniano. Por lo tanto existe m_i tal que $\operatorname{rad}_A^\infty(E_i,N) = \operatorname{rad}_A^{m_i}(E_i,N)$ (ver [AuRS] (V.7.2)). Sea m el máximo de los m_i y sea $f \in \operatorname{rad}_A^\infty(M,N)$ un morfismo no nulo. Entonces, en particular,

$f \in \operatorname{rad}_A^{m+1}(M,N)$, de donde $f = \sum_i g_i f_i : f_i \in \operatorname{rad}_A(M,X_i)$, $g_i \in \operatorname{rad}_A^m(X_i,N)$, con los $g_i f_i \neq 0$ y X_i en ind$A$ (ver [AuRS] (V.7.4)).

Como f_1 no es un isomorfismo, existe

$$k = \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & k_t \end{bmatrix} : \bigoplus_{i=1}^{t} E_i \longrightarrow X_1$$

tal que $f_1 = kh = \sum_{i=1}^{t} k_i h_i$. Como $g_1 f_1 \neq 0$, existe i tal que $g_1 k_i h_i \neq 0$, con $g_1 k_i : E_i \to N$ en $\operatorname{rad}^m(E_i,N) = \operatorname{rad}^\infty(E_i,N)$, y h_i irreducible. El enunciado sigue por recurrencia. $\square$

Ahora pasamos a la construcción del carcaj de Auslander-Reiten. Esto es, en general, muy difícil, pues requiere información sobre todas las sucesiones que casi se parten de mod$A$. Existe sin embargo una técnica de construcción llamada "del tejido" que consiste en utilizar de manera sistemática ciertos hechos ya probados, a saber:

(1) Las fuentes de $\Gamma(\operatorname{mod}A)$, esto es, los puntos que no son fin de ninguna flecha, son los módulos simples proyectivos.

(2) Toda flecha que sale de un simple proyectivo llega a un proyectivo.

(3) Toda flecha que llega a un proyectivo, sale de un sumando directo de su radical.

(4) Si un módulo indescomponible L no es inyectivo, y si conocemos el morfismo minimal que casi se parte a izquierda $f : L \to M$, entonces $\tau^{-1}L \cong \operatorname{Coker} f$, y para cada indescomponible X, existe una flecha $X \to \tau^{-1}L$ si y sólo si existe una flecha $L \to X$.

También tenemos a nuestra disposición los enunciados duales.

Ilustramos la técnica con ejemplos. La misma funciona a la perfección con los carcajes de Auslander-Reiten finitos y acíclicos.

Ejemplos 3.6. (a) Sea A el álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd}
1\circ & & \\
& \underset{3}{\circ} \arrow[ul] \arrow[dl] & \underset{4}{\circ} \arrow[l] \\
2\circ & &
\end{tikzcd} .$$

Los módulos indescomponibles proyectivos son

$$P_1 = 1,\ P_2 = 2,\ P_3 = \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \ \text{ y }\ P_4 = \begin{smallmatrix} & 4 & \\ & 3 & \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} .$$

Aquí A es hereditaria, por ser un álgebra de caminos (ver [AuRS] (III.1.4) p. 54 ó [ASS] (VII.1.7) p. 248). Por lo tanto el radical de cada módulo indescomponible proyectivo es también proyectivo. En efecto, rad $P_3 = P_1 \oplus P_2$ y rad $P_4 = P_3$. Ahora se deduce de los pasos (1) y (3) de arriba que hay un subcarcaj pleno de $\Gamma(\operatorname{mod}A)$ de la forma

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
1 \arrow[dr] & & \\
& \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix} \arrow[r] & \begin{smallmatrix} & 4 & \\ & 3 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix} \quad . \\
2 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Como ya están presentes todos los proyectivos, veremos cómo utilizando la propiedad (2) y aplicando sistemáticamente la propiedad (4) podemos llegar a los inyectivos, con lo que completaremos el carcaj de Auslander-Reiten. Así , en virtud de (2), el morfismo minimal que casi se parte a izquierda que sale de 1 es la inclusión $1 \to \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix}$. Por lo tanto, $\tau^{-1}1$ es el conúcleo en la sucesión que casi se parte

$$0 \to 1 \to \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \to 0\ .$$

Análogamente, $\tau^{-1}2$ es el conúcleo en la sucesión que casi se parte

$$0 \to 2 \to \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \to 0\ .$$

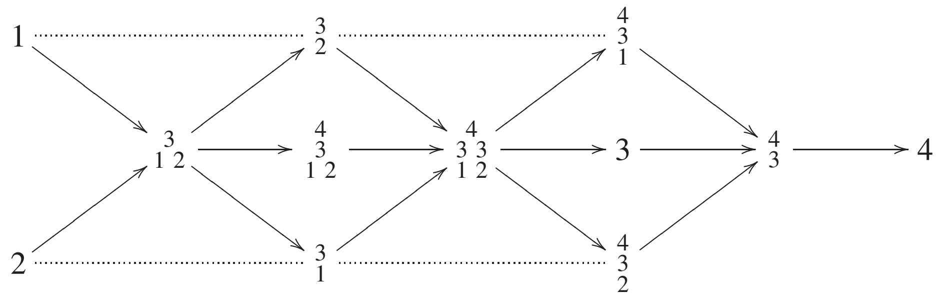
Así tenemos el subcarcaj de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \\
& \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \begin{smallmatrix} & 4 & \\ & 3 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix} \\
2 \arrow[ur] & & \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \quad .
\end{tikzcd}$$

Veamos que el morfismo $\begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 4 & \\ & 3 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$ es minimal que casi se parte a izquierda. Es claro que cada uno de los tres morfismos $\begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 4 & \\ & 3 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$ es irreducible. Supongamos que X es indescomponible y que $\begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix} \to X$ es irreducible. Si X es proyectivo, entonces $\begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix}$ es sumando directo de su radical (y por lo tanto $X = \begin{smallmatrix} & 4 & \\ & 3 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix}$). Si X no es proyectivo, entonces existe un morfismo irreducible $\tau X \to \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix}$ (de donde $\tau X = 1$ ó $\tau X = 2$, y luego $X = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}$ ó $X = \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$ respectivamente). Esto muestra lo que queríamos. Por consiguiente, $\tau^{-1} \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix}$ es el conúcleo en la sucesión exacta

$$0 \to \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 4 & \\ & 3 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 4 & \\ 3 & & 3 \\ 1 & & 2\end{smallmatrix} \to 0.$$

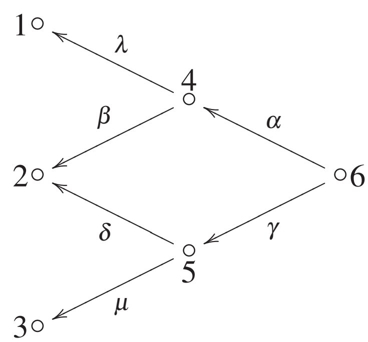
Repitiendo varias veces el procedimiento anterior, obtenemos



y aquí paramos, porque hemos llegado a los inyectivos indescomponibles.

Al graficar, una convención útil es ubicar los trasladados de Auslander-Reiten en la misma línea horizontal. Hemos ilustrado esto con líneas punteadas (cuando el dibujo lo permite).

(b) Sea A dada por el carcaj



ligado por $\alpha\beta = \gamma\delta$, $\alpha\lambda = 0$ y $\gamma\mu = 0$.

Los $A-$módulos indescomponibles proyectivos son:

$$P_1 = 1,\ P_2 = 2,\ P_3 = 3,\ P_4 = \begin{smallmatrix} & 4 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix},\ \ P_5 = \begin{smallmatrix} & 5 & \\ 2 & & 3 \end{smallmatrix},\ P_6 = \begin{smallmatrix} & 6 & \\ 4 & & 5 \\ & 2 & \end{smallmatrix}.$$

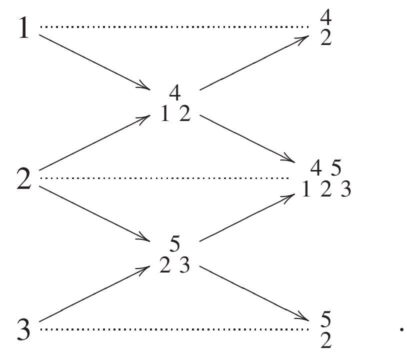
Un carcaj ligado acíclico siempre admite al menos un módulo simple proyectivo (en efecto, éstos corresponden a los pozos del carcaj, esto es, a los puntos que no son inicio de ninguna flecha). En este ejemplo tenemos tres: P_1, P_2 y P_3. Por (2), toda flecha que sale de un simple proyectivo llega a un proyectivo y, en virtud de (3), este último admite al simple proyectivo como sumando de su radical. Esto nos da los morfismos irreducibles

$$P_1 \to P_4 \leftarrow P_2 \to P_5 \leftarrow P_3\,.$$

Como ninguno de los módulos de arriba es inyectivo, aplicamos (4). Así $\tau^{-1}1$ es el conúcleo en la sucesión que casi se parte

$$0 \to 1 \to \begin{smallmatrix} & 4 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \to 0$$

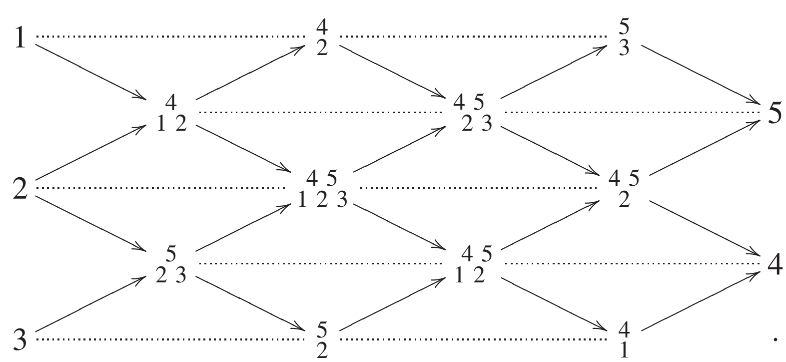
y análogamente obtenemos $\tau^{-1}2$ y $\tau^{-1}3$:



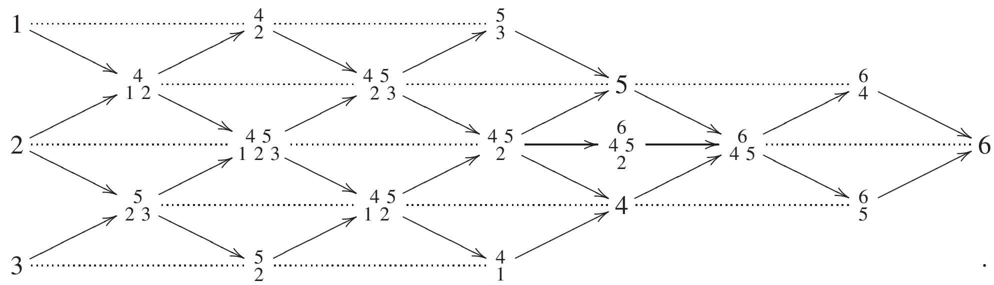
Afirmamos que $\begin{smallmatrix}&4&\\1&&2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&4&&5&\\1&&2&&3\end{smallmatrix}$ es minimal que casi se parte a izquierda: supongamos en efecto que $\begin{smallmatrix}&4&\\1&&2\end{smallmatrix} \to X$ es irreducible con X indescomponible. Si X fuera proyectivo, entonces $\begin{smallmatrix}&4&\\1&&2\end{smallmatrix}$ sería un sumando directo de rad$X$. Pero esto es imposible, por lo tanto X no es proyectivo y existe un morfismo irreducible $\tau X \to \begin{smallmatrix}&4&\\1&&2\end{smallmatrix}$. Esto implica que $\tau X = 1$ ó $\tau X = 2$, y luego $X = \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}$ ó $X = \begin{smallmatrix}&4&&5&\\1&&2&&3\end{smallmatrix}$. Por consiguiente $\tau^{-1}(\begin{smallmatrix}&4&\\1&&2\end{smallmatrix})$ es el conúcleo en la sucesión exacta

$$0 \to \begin{smallmatrix}&4&\\1&&2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&4&&5&\\1&&2&&3\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4&&5&\\&2&&3\end{smallmatrix} \to 0\,.$$

Continuamos de esta manera, construyendo paso a paso los conúcleos hasta llegar a un inyectivo o a un sumando directo del radical de un proyectivo (en nuestro caso, éste debe ser $\begin{smallmatrix}4&&5\\&2&\end{smallmatrix} = \mathrm{rad}P_6$, que es indescomponible).



Aquí, $\begin{smallmatrix}5\\3\end{smallmatrix}$ y $\begin{smallmatrix}4\\1\end{smallmatrix}$ son inyectivos, mientras que $\begin{smallmatrix}4&&5\\&2&\end{smallmatrix} = \mathrm{rad}P_6$. Luego tenemos un morfismo irreducible $\begin{smallmatrix}4&&5\\&2&\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&6&\\4&&5\\&2&\end{smallmatrix}$. Por otro lado, el mismo razonamiento de más arriba muestra que el morfismo $\begin{smallmatrix}4&&5\\&2&\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&6&\\4&&5\\&2&\end{smallmatrix} \oplus 5 \oplus 4$ es minimal que casi se parte a izquierda. Entonces podemos calcular el conúcleo y continuar hasta terminar en los inyectivos:

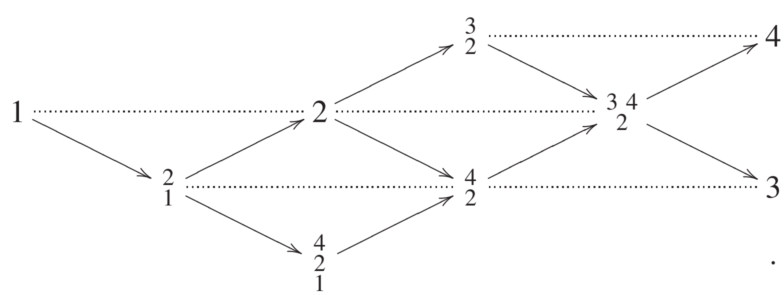


Como vemos, en tanto no haya inyectivos ni proyectivos en el camino, la construcción se hace simplemente calculando los conúcleos (o los núcleos, si uno empieza por los inyectivos). Sabemos que un proyectivo va a aparecer cuando aparezca un sumando directo de su radical (dualmente, inmediatamente después de un inyectivo, aparecen los sumandos directos del cociente del inyectivo en cuestión sobre su zócalo).

(c) Sea A dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd} & \circ 4 \arrow[d, "\gamma"] & \\ \underset{1}{\circ} & \underset{2}{\circ} \arrow[l, "\alpha"'] & \underset{3}{\circ} \arrow[l, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

ligado por la relación $\beta\alpha = 0$. Aquí $P_1 = 1$, $P_2 = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$, $P_3 = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}$ y $P_4 = \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$.
Calculamos fácilmente $\Gamma(\mathrm{mod}A)$:



(d) Sea, como en el Ejemplo 2.12, A el álgebra dada por el carcaj

$$1 \circ \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \circ\, 2$$

ligado por la relación $\alpha\beta = 0$. Ya sabemos que $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ tiene ciclos orientados, por haber calculado en (2.12) las siguientes sucesiones que casi se parten:

$$0 \longrightarrow 2 \longrightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \longrightarrow 1 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow {\scriptstyle\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}} \longrightarrow 2 \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto el método del tejido no se aplica aquí. Sin embargo $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} = P_1 = \mathrm{rad}P_2$. Entonces podemos ubicar los dos proyectivos:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
\vdots & & & & \vdots \\
2 \arrow[dr] & & 1 \arrow[dr] & & 2 \\
\vdots & \begin{matrix}1\\2\end{matrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{matrix}2\\1\end{matrix} \arrow[ur] & \vdots \\
& & \begin{matrix}2\\1\\2\end{matrix} & &
\end{tikzcd}$$

(donde identificamos las dos copias de 2). Ahora, se prueba como antes que el morfismo $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \longrightarrow 1 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix}$ es minimal que casi se parte a izquierda. Por consiguiente, $\tau^{-1}(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix})$ es el conúcleo en la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \longrightarrow 1 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \rightarrow 0.$$

En otros términos, el carcaj de Auslander-Reiten está dado por:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
\vdots & & & & \vdots \\
2 \arrow[dr] & & 1 \arrow[dr] & & 2 \\
\vdots & \begin{matrix}1\\2\end{matrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{matrix}2\\1\end{matrix} \arrow[ur] & \vdots \\
& & \begin{matrix}2\\1\\2\end{matrix} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

(donde identificamos las dos copias de 2). Observemos que $\begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix} = I_2$ es inyectivo y que $\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} = I_2$ / $\mathrm{soc}I_2$, lo cual confirma que el morfismo $\begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$ es irreducible.

CAPITULO II

MODULOS INCLINANTES

1. Algebras de Endomorfismos

La teoría de inclinación consiste en comparar las categorías de módulos sobre un álgebra de artin dada A y sobre el álgebra de endomorfismos B de un A-módulo T, que se elige "suficientemente próximo" del generador A_A.

Sean A un álgebra de artin y T_A un A-módulo a derecha (por el momento, arbitrario). Escribimos $B = \operatorname{End} T_A$. La acción natural de B en T hace de este último un $B-A$-bimódulo, dado que la linealidad de cada elemento $f \in B$ implica

$$f(ta) = f(t)a = (ft)a$$

para todo $t \in T$ y $a \in A$.

Por lo tanto, para todo A-módulo a derecha M, el grupo abeliano $\operatorname{Hom}_A(T,M)$ tiene una estructura de B-módulo a derecha dada por

$$(fb)(t) = f(bt)$$

para $f \in \operatorname{Hom}_A(T,M)$, $b \in B$ y $t \in T$. De la misma manera, para todo B-módulo a derecha X, el grupo $X \otimes_B T$ tiene una estructura de A-módulo a derecha dada por

$$(x \otimes t)a = x \otimes (ta)$$

para $x \in X$, $t \in T$ y $a \in A$. Tenemos así dos funtores aditivos

$$\operatorname{Hom}_A(T,-) : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} B$$

y

$$- \otimes_B T : \operatorname{mod} B \to \operatorname{mod} A\,.$$

Es bien conocido que estos dos funtores son adjuntos y que la counidad y la unidad de esta adjunción son respectivamente los morfismos

$$\varepsilon_M : \operatorname{Hom}_A(T,M) \otimes_B T \to M$$

$$f \otimes t \mapsto f(t)$$

(para $f \in \operatorname{Hom}_A(T,M)$ y $t \in T$) y

$$\delta_X : X \to \operatorname{Hom}_A(T, X \otimes_B T)$$

$$x \mapsto (t \mapsto x \otimes t)$$

(para $x \in X$ y $t \in T$).

Lema 1.1. (a) *Sea* $T_0 \in \operatorname{add} T$. *Entonces* ε_{T_0} *es un isomorfismo.*

(b) *Sea* $P \in \operatorname{add} B$. *Entonces* δ_P *es un isomorfismo.*

Demostración. Probaremos sólo (a), pues la demostración de (b) es similar. Resulta de la aditividad de los funtores involucrados que es suficiente verificar el enunciado cuando $T_0 = T$. En este caso $\varepsilon_T : \mathrm{Hom}_A(T,T) \otimes_B T = B \otimes_B T \to T$ define la estructura de B-módulo de T y entonces es un isomorfismo de A-módulos. □

El resultado principal de esta sección es que el funtor $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ aplica los objetos de $\mathrm{add}T$ sobre los de $\mathrm{add}B$, es decir, sobre los B-módulos proyectivos. Por otro lado, la restricción a $\mathrm{add}T$ de este funtor induce una equivalencia entre $\mathrm{add}T$ y $\mathrm{add}B$ de cuasi$-$inversa $-\otimes_B T$. Por esta razón, la proposición siguiente es frecuentemente llamada “Lema de proyectivización” (ver [AuRS] (II.2.1) p.33 ó [ASS] (VI.3.1) p. 202).

Proposición 1.2. (a) *Sean* $T_0 \in \mathrm{add}T$ *y* M *un* A*-módulo. La aplicación* $f \mapsto \mathrm{Hom}_A(T,f)$ *induce un isomorfismo funtorial*

$$\mathrm{Hom}_A(T_0,M) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,T_0),\mathrm{Hom}_A(T,M)).$$

(b) *Los funtores* $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ *y* $-\otimes_B T$ *inducen equivalencias cuasi inversas entre* $\mathrm{add}T$ *y* $\mathrm{add}B$.

Demostración. (a) Nuevamente, basta verificar la validez del enunciado cuando $T_0 = T$. En tal caso, los isomorfismos funtoriales

$$\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,T),\mathrm{Hom}_A(T,M)) \cong \mathrm{Hom}_B(B,\mathrm{Hom}_A(T,M)) \cong \mathrm{Hom}_A(T,M)$$

aplican $\mathrm{Hom}_A(T,f)$ sobre $\mathrm{Hom}_A(T,f)(id_T) = f\, id_T = f$.

(b) Sea $T_0 \in \mathrm{add}T$. Entonces $\mathrm{Hom}_A(T,T_0) \in \mathrm{add}\,\mathrm{Hom}_A(T,T) = \mathrm{add}B$. Luego $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ aplica $\mathrm{add}T$ en $\mathrm{add}B$. Asimismo, $-\otimes_B T$ aplica $\mathrm{add}B$ en $\mathrm{add}T$. Resulta de (1.1) que estos funtores (restringidos a $\mathrm{add}\,T$ y $\mathrm{add}\,B$, respectivamente) son cuasi–inversos. □

Nota 1.3. (a) Una consecuencia inmediata de (1.2)(b) es que $B = \mathrm{End}\,T_A$ es básica si y solamente si en la descomposición $T = \bigoplus_{i=1}^n T_i$ de T en sumandos directos indescomponibles, se tiene $T_i \ncong T_j$ para $i \neq j$.

(b) En analogía con (1.2)(a) tenemos que, para P en $\mathrm{add}\,B$ y $X \in \mathrm{mod}\,B$, la aplicación $g \mapsto g \otimes T$ induce un isomorfismo $\mathrm{Hom}_B(X,P) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_A(X \otimes_B T, P \otimes_B T)$.

Probamos, a modo de corolario, una versión del famoso Teorema de Gabriel-Mitchell (que nos será útil en la sección (III.6)). Recordamos que un A-módulo M se dice *generado por* T si existe un epimorfismo $T^m \to M$, para algún entero $m > 0$. Se designa por $\mathrm{Gen}T$ a la subcategoría plena de $\mathrm{mod}A$ formada por los A-módulos generados por T.

Ejemplo 1.4. Para todo A-módulo M, se tiene que $\mathrm{Hom}_A(T,M) \otimes_B T \in \mathrm{Gen}T$. En efecto, siendo $\mathrm{Hom}_A(T,M)$ un B- módulo finitamente generado, resulta que existe un epimorfismo $B^m \to \mathrm{Hom}_A(T,M)$, con $m > 0$. De aquí obtenemos un epimorfismo $T^m \cong B^m \otimes_B T \to \mathrm{Hom}_A(T,M) \otimes T$.

Corolario 1.5. *Sean* $\mathscr{A}$ *una subcategoría abeliana plena de* $\mathrm{mod}A$ *y* $T \in \mathscr{A}$ *un objeto proyectivo tal que* $\mathscr{A} = \mathrm{Gen}T$. *Sea* $B = \mathrm{End}\,T_A$. *Entonces el funtor* $\mathrm{Hom}_A(T,-) : \mathscr{A} \to \mathrm{mod}\,B$ *es una equivalencia de categorías.*

Demostración. Probaremos primero que el funtor $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ es denso. Sea X un B-módulo, y sean P_0, $P_1 \in \mathrm{add}\, B$ tales que hay una sucesión exacta

$$P_1 \xrightarrow{g} P_0 \to X \to 0.$$

Sabemos por (1.2)(b) que existen T_0, $T_1 \in \mathrm{add}\, T$ y un morfismo $f : T_1 \to T_0$ tales que $g = \mathrm{Hom}_A(T,f)$. Sea $M = \mathrm{Coker}\, f$. Aplicando $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ a la sucesión exacta

$$T_1 \to T_0 \to M \to 0$$

obtenemos, dada la proyectividad de T en $\mathscr{A}$, un diagrama conmutativo con filas exactas,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(T,T_1) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_A(T,T_0) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_A(T,M) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

del cual resulta lo enunciado.

Basta ahora demostrar que $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ es fielmente pleno, esto es, que para todo M, $N \in \mathscr{A}$ se tiene un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,M), \mathrm{Hom}_A(T,N))$$

dado por $f \mapsto \mathrm{Hom}_A(T,f)$.

En virtud de (1.2)(a) sabemos que lo enunciado es válido si $M \in \mathrm{add}\, T$. Sea M arbitrario. Como $\mathscr{A} = \mathrm{Gen}\, T$, existe un epimorfismo $p : T^m \to M$, con $m > 0$. Como $\mathscr{A}$ es abeliana, $L = \mathrm{Ker}\, p$ pertenece a $\mathscr{A}$, por lo que es a su vez generado por T. Se tiene así una sucesión exacta

$$T_1 \to T_0 \to M \to 0$$

con $T_0, T_1 \in \mathrm{add}\, T$. Se deduce un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M,N) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(T_0,N) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_A(T_1,N) \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,M),\mathrm{Hom}_A(T,N)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,T_0),\mathrm{Hom}_A(T,N)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,T_1),\mathrm{Hom}_A(T,N))
\end{tikzcd}$$

lo que termina la demostración. □

La hipótesis hecha en (1.5) es bastante restrictiva, y es claro que en general la subcategoría $\mathrm{Gen}T$ de $\mathrm{mod}A$ no es equivalente a $\mathrm{mod}B$. Entonces es razonable preguntarse qué subcategorías de $\mathrm{mod}B$ son equivalentes a la subcategoría $\mathrm{Gen}T$ de $\mathrm{mod}A$. Como uno desea que los funtores $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ y $-\otimes_B T$ sean equivalencias cuasi inversas entre estas dos subcategorías, un punto de partida posible sería tratar de determinar cuándo el morfismo funtorial ε_M es un isomorfismo.

Para esto necesitamos una definición. Sea M un A-módulo. Elegimos un conjunto de generadores $\{f_1, \ldots, f_d\}$ del B-módulo finitamente generado $\mathrm{Hom}_A(T,M)$ y consideramos el morfismo

$$f = [f_1, \ldots, f_d] : T^d \to M.$$

Se dice que f es una $\operatorname{add} T$ *-aproximación a derecha de M.*

Lema 1.6. *Sea M un A-módulo y $f : T_0 \to M$ una* $\operatorname{add} T$*-aproximación a derecha de M (con $T_0 \in \operatorname{add} T$). Entonces*

(a) $\operatorname{Hom}_A(T, f) : \operatorname{Hom}_A(T, T_0) \to \operatorname{Hom}_A(T, M)$*es un epimorfismo.*

(b) $f : T_0 \to M$ *es un epimorfismo si y sólo si M está en* $\operatorname{Gen} T$.

Demostración. (a) Resulta de la definición.

(b) Como la necesidad es evidente, probemos la suficiencia. Sea $M \in \operatorname{Gen} T$. Entonces existe un epimorfismo $g : T^m \to M$, con $m > 0$. Por la definición de f (ver (a)), existe $h : T^m \to T_0$ tal que $g = fh$. Como g es sobreyectiva, también lo es f. $\square$

Es útil enunciar explícitamente el dual. Sea M un A-módulo. Se elige un conjunto de generadores $\{f_1, \ldots, f_d\}$ del B^{op}-módulo finitamente generado $\operatorname{Hom}_A(M, T)$ y se considera el morfismo

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{bmatrix} : M \to T^d.$$

Diremos que f es una $\operatorname{add} T$*-aproximación a izquierda de M.*

Recordamos ahora que un A-módulo M se dice *cogenerado por T* si existe un monomorfismo $M \to T^m$, con $m > 0$. Designamos por $\operatorname{Cogen} T$ a la subcategoría plena de $\operatorname{mod} A$ formada por los A-módulos cogenerados por T. El lema siguiente es dual de 1.6.

Lema 1.7. *Sean M un A-módulo y $f : M \to T_0$ una* $\operatorname{add} T$*–aproximación a izquierda de M (con $T_0 \in \operatorname{add} T$). Entonces*

(a) $\operatorname{Hom}_A(f, T) : \operatorname{Hom}_A(T_0, T) \to \operatorname{Hom}_A(M, T)$ *es un epimorfismo.*

(b) $f : M \to T_0$ *es un monomorfismo si y sólo si M está en* $\operatorname{Cogen} T$. $\square$

Proposición 1.8. *Sea M un A-módulo. Entonces $\varepsilon_M : \operatorname{Hom}_A(T, M) \otimes_B T \to M$ es un epimorfismo si y solamente si $M \in$* $\operatorname{Gen} T$.

Demostración. Supongamos que ε_M es un epimorfismo. Sabemos por (1.4) que $\operatorname{Hom}_A(T, M) \otimes_B T \in \operatorname{Gen} T$. Luego $M \in \operatorname{Gen} T$. Recíprocamente, supongamos que $M \in \operatorname{Gen} T$ y sea $f : T_0 \to M$, con $T_0 \in \operatorname{add} T$ una $\operatorname{add} T$ -aproximación a derecha de M. En virtud de (1.6)(b), f es sobreyectivo, por lo que hay una sucesión exacta corta

$$0 \to L \to T_0 \xrightarrow{f} M \to 0.$$

Aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ y (1.6)(a), se obtiene otra sucesión exacta corta

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(T, L) \to \operatorname{Hom}_A(T, T_0) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(T, f)} \operatorname{Hom}_A(T, M) \to 0.$$

Aplicando a continuación el funtor $- \otimes_B T$ se obtiene un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \operatorname{Hom}_A(T,L) \otimes_B T & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(T,T_0) \otimes_B T & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(T,M) \otimes_B T & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_L} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_{T_0}} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_M} & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & T_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Resulta de (1.1) que ε_{T_0} es un isomorfismo, de donde ε_M es un epimorfismo. $\square$

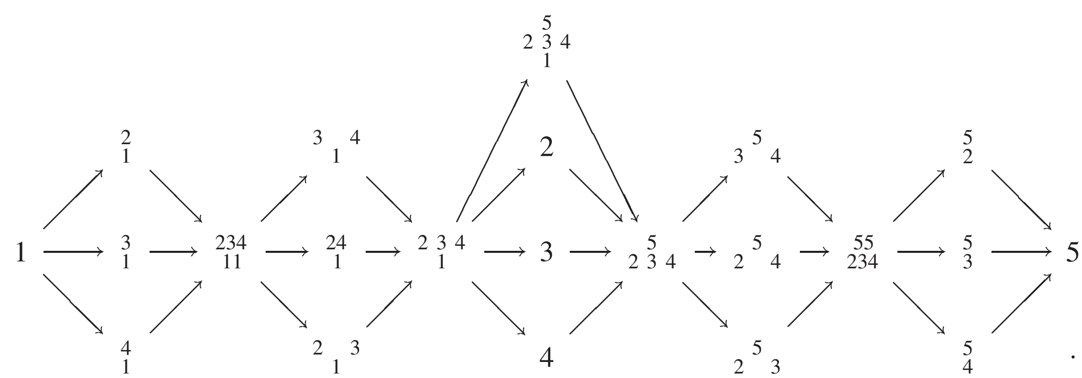
Nota 1.9. (a) Supongamos que en la demostración precedente tuviéramos $L \in \operatorname{add} T$. Entonces, en el diagrama, ε_L es un isomorfismo y por lo tanto ε_M también lo es. Tenemos así que es condición suficiente para que ε_M sea un isomorfismo para todo $M \in \operatorname{Gen} T$, que el núcleo L de una $\operatorname{add} T$-aproximación a derecha esté en $\operatorname{add} T$.

(b) El enunciado dual de 1.8 dice que el morfismo funtorial $M_A \to \operatorname{Hom}_{B^{op}}(\operatorname{Hom}_A(M,T),T)$ definido por $x \mapsto (g \mapsto g(x))$ es inyectivo si y sólo si $M \in \operatorname{Cogen} T$. Nosotros no lo necesitaremos, por lo que no lo demostramos aquí.

Ejemplo 1.10. En toda esta sección no hacemos ninguna hipótesis sobre el A-módulo T. En estas condiciones es difícil esperar una buena relación entre las categorías $\operatorname{mod} A$ y $\operatorname{mod} B$. Así, sea k un cuerpo algebraicamente cerrado, y A el álgebra dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dl] & \\
1 & 3 \arrow[l] & 5 \arrow[ul] \arrow[l] \arrow[dl] \\
 & 4 \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

con todas las relaciones de conmutatividad posibles. Entonces el carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ de A está dado por



Tomemos $T_1 = \begin{smallmatrix}234\\11\end{smallmatrix}$ y $T_2 = \begin{smallmatrix}234\\1\end{smallmatrix}$. Entonces $T = T_1 \oplus T_2$ tiene exactamente dos sumandos directos indescomponibles no isomorfos. Entonces, por (1.2)(b), el carcaj de $B = \operatorname{End} T_A$ tiene exactamente dos puntos. Veamos que $\dim_k \operatorname{Hom}_A(T_1, T_2) = 2$. Como A es de representación finita, todo no isomorfismo entre módulos indescomponibles es suma de composiciones de morfismos irreducibles (ver (I.3.5) ó [AuRS] (2.7.8) p.183). Como en el carcaj hay tres caminos de T_1 a T_2, la dimensión de $\operatorname{Hom}_A(T_1,T_2)$ es menor o igual que 3. Ahora bien, como existe una sucesión exacta (que casi se parte)

$$0 \to T_1 \to \begin{smallmatrix}34\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}24\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}23\\1\end{smallmatrix} \to T_2 \to 0$$

entonces la suma de los tres caminos es cero, y además dos cualesquiera de ellos son linealmente independientes porque sus imágenes tienen distintos factores de composición.

Esto prueba lo deseado.

De la misma manera resulta $\operatorname{rad}\operatorname{End} T_1 = 0$, $\operatorname{rad}\operatorname{End} T_2 = 0$ y $\operatorname{Hom}_A(T_2,T_1) = 0$. Entonces, tanto $\operatorname{End} T_1$ como $\operatorname{End} T_2$ son anillos de división. Como k es algebraicamente cerrado, tenemos que $\operatorname{End} T_1 = k$ y $\operatorname{End} T_2 = k$. Por consiguiente, B es el álgebra de caminos del carcaj

$$\circ \leftleftarrows \circ \,.$$

Ésta es el álgebra de Kronecker, que es hereditaria y de representación infinita (ver [AuRS] (VIII.7) p. 302). El álgebra de Kronecker es lo que se denomina un álgebra mansa, es decir que es posible parametrizar sus módulos indescomponibles de una dimensión dada. Por el contrario, si $T' = \begin{smallmatrix}234\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}5\\234\end{smallmatrix}$, se ve fácilmente que el carcaj de $B' = \operatorname{End} T'_A$ es

$$\circ \;\substack{\longleftarrow\\ \longleftarrow\\ \longleftarrow}\; \circ \,.$$

Este álgebra es lo que se llama un álgebra salvaje: su categoría de módulos contiene la categoría de módulos sobre cualquier álgebra arbitraria. No podemos entonces esperar obtener una descripción completa de $\operatorname{mod} B'$. Como A es de representación finita, las categorías de módulos sobre A, B y B' son muy diferentes.

2. Pares de torsión y módulos inclinantes parciales

En la sección precedente estudiamos la subcategoría $\operatorname{Gen} T$ de $\operatorname{mod} A$. Resulta directamente de la definición de esta subcategoría, que la misma es cerrada por cocientes (imágenes epimórficas). Es útil ver cuándo $\operatorname{Gen} T$ es también cerrada por extensiones. En efecto, en este caso, determina un par de torsión.

Definición (Dickson) Un par $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ de subcategorías aditivas plenas de $\operatorname{mod} A$ es un *par de torsión* si:

(a) $\operatorname{Hom}_A(M,N) = 0$ para todo $M \in \mathscr{T}$ y $N \in \mathscr{F}$
(b) Si $\operatorname{Hom}_A(M,F) = 0$ para todo $F \in \mathscr{F}$, entonces $M \in \mathscr{T}$
(c) Si $\operatorname{Hom}_A(T,N) = 0$ para todo $T \in \mathscr{T}$, entonces $N \in \mathscr{F}$.

En otras palabras, es un par de subcategorías aditivas tales que no hay ningún morfismo no nulo de la primera en la segunda, y son maximales con esta propiedad. Calcular un par de torsión en $\operatorname{mod} A$ nos da información sobre la dirección de los morfismos en $\operatorname{mod} A$. Las subcategorías $\mathscr{T}$ y $\mathscr{F}$, llamadas respectivamente *clase de torsión* y *clase sin torsión*, tienen caracterizaciones intrínsecas.

Proposición 2.1. (a) *Sea $\mathscr{T}$ una subcategoría aditiva plena de* $\operatorname{mod} A$. *Existe una subcategoría $\mathscr{F}$ tal que $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ es un par de torsión si y solamente si $\mathscr{T}$ es cerrada por cocientes y extensiones.*

(b) *Sea* $\mathscr{F}$ *una subcategoría aditiva plena de* mod$A$. *Existe una subcategoría* $\mathscr{T}$ *tal que* $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ *es un par de torsión si y solamente si* $\mathscr{F}$ *es cerrada por submódulos y extensiones.*
(c) *Si* $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ *es un par de torsión de* mod$A$, *entonces para todo módulo* M *existe una sucesión exacta corta*

$$0 \to tM \to M \to M/tM \to 0$$

con $tM \in \mathscr{T}$ *y* $M/tM \in \mathscr{F}$, *única en el sentido que toda sucesión exacta corta*

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

con $L \in \mathscr{T}$ *y* $N \in \mathscr{F}$ *es isomorfa a la precedente.*

Demostración. (a) Supongamos que $\mathscr{T}$ es la clase de torsión de un par de torsión $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ y conside-remos una sucesión exacta corta

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

de mod$A$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(-,F)$, con $F \in \mathscr{F}$, se tiene una sucesión exacta a izquierda

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M'',F) \to \mathrm{Hom}_A(M,F) \to \mathrm{Hom}_A(M',F).$$

Ahora, $M \in \mathscr{T}$ implica $\mathrm{Hom}_A(M,F) = 0$ para todo $F \in \mathscr{F}$, de donde $\mathrm{Hom}_A(M'',F) = 0$ para todo $F \in \mathscr{F}$ y por lo tanto $M'' \in \mathscr{T}$. Luego $\mathscr{T}$ es cerrada por cocientes. De la misma manera, $M', M'' \in \mathscr{T}$ implica $M \in \mathscr{T}$.

Recíprocamente, sea $\mathscr{T}$ una subcategoría cerrada por cocientes y extensiones. Para todo módulo M, sea tM la *traza* de $\mathscr{T}$ en M, esto es, la suma de las imágenes de todos los morfismos de objetos de $\mathscr{T}$ en M:

$$tM = \sum\{\mathrm{Im}\phi \mid \phi : T \to M, T \in \mathscr{T}\}.$$

Resulta de la hipótesis que $tM \in \mathscr{T}$ y, más aún, que tM es el mayor submódulo de M que está en $\mathscr{T}$. En particular, se tiene que $M \in \mathscr{T}$ si y solamente si $M = tM$. Se tiene así una sucesión exacta corta

$$0 \to tM \to M \to M/tM \to 0. \qquad (*)$$

Afirmamos que $t(M/tM) = 0$. En efecto, pongamos $t(M/tM) = M'/tM$, donde M' es un submódulo de M que contiene a tM. La hipótesis que $\mathscr{T}$ es cerrada por extensiones y la sucesión exacta corta

$$0 \to tM \to M' \to M'/tM \to 0$$

implican que $M' \in \mathscr{T}$. Pero entonces $M' \subseteq tM$ y $t(M/tM) = M'/tM = 0$, lo que prueba lo afirmado.

Escribamos ahora $\mathscr{F} = \{M \in \mathrm{mod}A \,|\, tM = 0\}$. En particular, para todo A-módulo M se tiene $M/tM \in \mathscr{F}$. Veamos que $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ es un par de torsión. Sean $M \in \mathscr{T}$, $N \in \mathscr{F}$. Si un morfismo $f : M \to N$ es no nulo, también lo es la aplicación inducida $M = tM \to \mathrm{Im}f$, de donde $tN \neq 0$, lo que es una contradicción. Entonces $\mathrm{Hom}_A(M,N) = 0$. Supongamos ahora que $\mathrm{Hom}(M,F) = 0$ para todo $F \in \mathscr{F}$. Entonces de la sucesión $(*)$ arriba obtenida resulta que $M/tM = 0$ y por lo tanto $M = tM \in \mathscr{T}$. De manera análoga se demuestra la última condición.

(b) Resulta de (a) por dualidad.

(c) Hemos probado la existencia de la sucesión $(*)$. Falta probar la unicidad. Sea

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

una sucesión exacta con $L \in \mathscr{T}$ y $N \in \mathscr{F}$. Como tM es el mayor submódulo de M perteneciente a $\mathscr{T}$, se tiene una inyección $j : L \to tM$ y por lo tanto un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "j"] & M \arrow[r] \arrow[d, "id"] & N \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & tM \arrow[r] & M \arrow[r] & M/tM \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

Del lema de la serpiente se tiene que $\operatorname{Ker} g \cong tM/L \in \mathscr{T}$. Como $N \in \mathscr{F}$ y $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ es un par de torsión, se tiene que $\operatorname{Ker} g = 0$. Luego $tM \cong L$ y por consiguiente $N \cong M/tM$.

$\square$

La sucesión exacta de (c) se dice *canónica*. Una consecuencia inmediata de la existencia de sucesiones canónicas es que un A-módulo simple está o bien en $\mathscr{T}$, o bien en $\mathscr{F}$.

Es claro que, si T es arbitrario, no hay razón para que $\operatorname{Gen} T$ sea una clase de torsión, es decir, sea cerrada por extensiones (por ejemplo, si A está dada por un carcaj que contiene una flecha $x \to y$, entonces $\operatorname{Gen}(S_x \oplus S_y)$ no es cerrado por extensiones). Daremos una condición suficiente para que éste sea el caso.

Lema 2.2. *Sea T un A-módulo tal que $\operatorname{Ext}^1_A(T,M) = 0$ para todo $M \in \operatorname{Gen} T$. Entonces $\operatorname{Gen} T$ es una clase de torsión. Además, la clase sin torsión correspondiente es $\{M \in \operatorname{mod} A \mid \operatorname{Hom}_A(T,M) = 0\}$.*

Demostración. Para demostrar la primera afirmación basta probar que $\operatorname{Gen} T$ es cerrado por extensiones. Sea $0 \to L \to M \to N \to 0$ una sucesión exacta corta con $L,N \in \operatorname{Gen} T$. Como $\operatorname{Ext}^1_A(T,L) = 0$, el funtor $\operatorname{Hom}_A(T,-)$ induce una sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(T,L) \to \operatorname{Hom}_A(T,M) \to \operatorname{Hom}_A(T,N) \to 0$$

y obtenemos un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Hom}_A(T,L) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_L"] & \operatorname{Hom}_A(T,M) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_M"] & \operatorname{Hom}_A(T,N) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Sabemos por (II, 1.8) que ε_L y ε_N son epimorfismos. Entonces ε_M también lo es, o sea $M \in \operatorname{Gen} T$.

Sea M sin torsión. Como $T \in \operatorname{Gen} T$, se tiene que $\operatorname{Hom}_A(T,M) = 0$. Recíprocamente, sea M tal que $\operatorname{Hom}_A(T,M) = 0$, y sea $L \in \operatorname{Gen} T$. Entonces existe un epimorfismo $T^m \to L$, con $m > 0$. Por lo tanto $\operatorname{Hom}_A(L,M) = 0$, de donde M es sin torsión. $\square$

Como mencionamos anteriormente, buscamos módulos "próximos" a los generadores.

Definición. Un módulo T se dice *inclinante parcial* si satisface las dos condiciones siguientes:
(T_1) $\mathrm{dp}T \leq 1$
(T_2) $\mathrm{Ext}_A^1(T,T) = 0$.

Por ejemplo, todo módulo proyectivo es inclinante parcial.

La noción dual es la de *módulo coinclinante parcial*. Así, un A-módulo T se dice coinclinante parcial si $\mathrm{di}T \leq 1$ y $\mathrm{Ext}_A^1(T,T) = 0$. Es evidente que T es un A-módulo inclinante parcial si y sólo si DT es un A^{op}-módulo coinclinante parcial. Estas dos nociones (inclinante y coinclinante parcial) coinciden evidentemente si A es un álgebra hereditaria.

Lema 2.3. *Sea T un A-módulo tal que* $\mathrm{dp}T \leq 1$. *Entonces T es inclinante parcial si y sólo si* $\mathrm{Ext}_A^1(T,M) = 0$ *para todo* $M \in \mathrm{Gen}\,T$.

Demostración. Supongamos que T es inclinante parcial y sea $M \in \mathrm{Gen}\,T$. Entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \to L \to T^m \to M \to 0,$$

con $m > 0$. Como $\mathrm{dp}T \leq 1$ se obtiene un epimorfismo

$$\mathrm{Ext}_A^1(T,T^m) \to \mathrm{Ext}_A^1(T,M) \to 0.$$

Luego $\mathrm{Ext}_A^1(T,T) = 0$ implica $\mathrm{Ext}_A^1(T,M) = 0$ para $M \in \mathrm{Gen}\,T$. La recíproca es inmediata. $\square$

Una consecuencia directa del lema es que todo módulo inclinante parcial induce un par de torsión $(\mathscr{T}_0(T), \mathscr{F}_0(T))$, con $\mathscr{T}_0(T) = \mathrm{Gen}\,T$ y $\mathscr{F}_0(T) = \{M \in \mathrm{mod}A \mid \mathrm{Hom}_A(T,M) = 0\}$.

Existe una terminología para esto, debida a Auslander y Smalϕ.

Definición. Sea $\mathscr{C}$ una subcategoría aditiva plena de $\mathrm{mod}A$, cerrada por extensiones. Entonces un objeto M de $\mathscr{C}$ se dice
(a) Ext-*proyectivo en* $\mathscr{C}$ si $\mathrm{Ext}_A^1(M,C) = 0$ para todo $C \in \mathscr{C}$.
(b) Ext-*inyectivo en* $\mathscr{C}$ si $\mathrm{Ext}_A^1(C,M) = 0$ para todo $C \in \mathscr{C}$.

El Lema 2.3 se reformula diciendo que si T es un módulo inclinante parcial, entonces es Ext-proyectivo en $\mathrm{Gen}\,T$ (que es cerrado por extensiones, por (2.2)). En consecuencia, todo objeto no nulo $T_0 \in \mathrm{add}\,T$ es también Ext-proyectivo en $\mathrm{Gen}\,T$.

El lema siguiente, debido también a Auslander y Smalϕ, facilita el cálculo de los Ext-proyectivos y de los Ext-inyectivos.

Lema 2.4. *Sea $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ un par de torsión.*
(a) *Si $L \in \mathscr{T}$ es indescomponible, entonces L es* Ext-*proyectivo en $\mathscr{T}$ si y sólo si $\tau L \in \mathscr{F}$.*
(b) *Si $N \in \mathscr{F}$ es indescomponible, entonces N es* Ext-*inyectivo en $\mathscr{F}$ si y sólo si $\tau^{-1}N \in \mathscr{T}$.*

Demostración. Probaremos sólo (a), pues (b) es dual.

Supongamos $\tau L \in \mathscr{F}$ y $M \in \mathscr{T}$. La fórmula de Auslander-Reiten da:

$$\mathrm{Ext}_A^1(L,M) \cong D\,\overline{\mathrm{Hom}}_A(M,\tau L) \subseteq D\,\mathrm{Hom}_A(M,\tau L) = 0.$$

Recíprocamente, sea $L \in \mathscr{T}$ un indescomponible Ext-proyectivo en $\mathscr{T}$ y consideremos la sucesión canónica para τL en el par de torsión $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$

$$0 \to t(\tau L) \xrightarrow{i} \tau L \xrightarrow{p} \tau L/t(\tau L) \to 0.$$

Si $\tau L \notin \mathscr{F}$ entonces p no es un isomorfismo y por lo tanto no es una sección. Pero entonces la sucesión que casi se parte $0 \to \tau L \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} L \to 0$ induce un diagrama conmutativo con filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & t(\tau L) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "i"] & F \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "h"] & L \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tau L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d] & L \arrow[r] & 0 \\
 & \tau L/t(\tau L) \arrow[r, "="] \arrow[d] & \tau L/t(\tau L) \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & . &
\end{tikzcd}$$

Como $t(\tau L) \in \mathscr{T}$ y L es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}$, la sucesión de arriba se parte. Entonces existe $g'' : L \to F$ tal que $g'g'' = id_L$. Por lo tanto, $g(hg'') = (gh)g'' = g'g'' = id_L$ y la sucesión que casi se parte, se parte, lo que es absurdo. $\square$

En particular, si T es inclinante parcial, entonces $\tau T \in \mathscr{F}_0(T)$.

Volviendo al Lema 2.3, vemos que resulta de su demostración que, si T es un módulo inclinante parcial, entonces $\operatorname{Gen} T \subseteq \{M \mid \operatorname{Ext}^1_A(T,M) = 0\}$. Probaremos ahora que este último conjunto es también una clase de torsión que contiene a $\mathscr{T}_0(T)$.

Lema 2.5. *Sea T un módulo inclinante parcial. Entonces la clase $\mathscr{T}_1(T) = \{M \in \operatorname{mod} A \mid \operatorname{Ext}^1_A(T,M) = 0\}$ es una clase de torsión que contiene a $\mathscr{T}_0(T)$.*

Demostración. Basta demostrar que $\mathscr{T}_1(T)$ es cerrada por cocientes y extensiones. Sea entonces $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta corta. Como $\operatorname{dp} T \leq 1$ se obtiene una sucesión exacta

$$\operatorname{Ext}^1_A(T,M') \to \operatorname{Ext}^1_A(T,M) \to \operatorname{Ext}^1_A(T,M'') \to 0.$$

Por lo tanto, $M \in \mathscr{T}_1(T)$ implica $M'' \in \mathscr{T}_1(T)$. De la misma manera, $M', M'' \in \mathscr{T}_1(T)$ implican $M \in \mathscr{T}_1(T)$. Por 2.3 tenemos que $\mathscr{T}_0(T) \subseteq \mathscr{T}_1(T)$. $\square$

Como T es evidentemente Ext-proyectivo en $\mathscr{T}_1(T)$, resulta de (2.4) que τT pertenece a la clase sin torsión correspondiente $\mathscr{F}_1(T)$. En realidad, se puede demostrar que $\mathscr{F}_1(T)$ es la clase $\mathrm{Cogen}(\tau T)$ de todos los módulos cogenerados por τT: la demostración es dual de la de (2.2), utilizando la observación (II.1.9)(b). Nosotros no las necesitaremos aquí.

Antes de pasar a los ejemplos necesitaremos algunas observaciones sobre los módulos inclinantes parciales que son fieles. La razón es que, si bien un A-módulo inyectivo I está in $\mathscr{T}_1(T)$, no siempre sucede que I esté también en $\mathscr{T}_0(T)$. Veremos que éste es el caso cuando T es fiel. Recordamos que un A-módulo M se dice *fiel* si su anulador $\mathrm{Ann}M = \{a \in A \,|\, Ma = 0\}$ es nulo.

Lema 2.6. *Sea M un A-módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) M_A *es fiel.*

(b) *Toda* $\mathrm{add}M$*-aproximación a izquierda* $A_A \to M^d$ *es inyectiva.*

(c) $A_A \in \mathrm{Cogen}M$.

(d) $DA_A \in \mathrm{Gen}\,M$.

Demostración. (a) implica (b). Sea M un A-módulo fiel. Elijamos un conjunto $\{f_1, \ldots, f_d\}$ de generadores del $\mathrm{End}M_A{}^{op}$-módulo $\mathrm{Hom}_A(A,M)$ y sea $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{bmatrix} : A \to M^d$ una $\mathrm{add}M$-aproximación a izquierda. Supongamos que $a \in \mathrm{Ker}\, f$ y $x \in M$. El isomorfismo canónico $M \cong \mathrm{Hom}_A(A,M)$ da un morfismo $h_x : A \to M$ tal que $x = h_x(1)$. La definición de f implica que h_x se factoriza por f. Entonces $f(a) = 0$ implica $h_x(a) = 0$, es decir $xa = 0$. Como x es arbitrario se tiene que $Ma = 0$, de donde $a = 0$.

(b) implica (c). Es trivial.

(c) implica (a). Sean $g : A \to M^d$ un monomorfismo y $a \in A$ tal que $Ma = 0$. Entonces $g(a) = g(1)a = 0$ implica $a = 0$.

(d) es equivalente a (c). En efecto, para $a \in A$, se tiene que $Ma = 0$ si y solamente si $aDM = 0$. Luego M_A es fiel si y solamente si ${}_AA \in \mathrm{Cogen}({}_ADM)$, ó equivalentemente, $DA_A \in \mathrm{Gen}\,M_A$. □

Supongamos que T es un módulo inclinante parcial. Entonces, como $\mathrm{dp}T \leq 1$, por (I.2.7) se tiene que $\mathrm{Hom}_A(T, \tau T) \cong D\mathrm{Ext}^1_A(T,T) = 0$. Si T es fiel la recíproca también vale:

Lema 2.7. *Sea T un A-módulo. Si T es inclinante parcial entonces* $\mathrm{Hom}_A(T, \tau T) = 0$*. Si T es fiel, la recíproca también vale .*

Demostración. Si T es fiel existe, por (2.6), un epimorfismo $T^m \to DA$, con $m > 0$. Aplicando $\mathrm{Hom}_A(-, \tau T)$ se obtiene un monomorfismo

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(DA, \tau T) \to \mathrm{Hom}_A(T^m, \tau T).$$

Como $\mathrm{Hom}_A(T, \tau T) = 0$, se deduce que $\mathrm{Hom}_A(DA, \tau T) = 0$, de donde $\mathrm{dp}T \leq 1$. Finalmente, $\mathrm{Ext}^1_A(T,T) \cong D\mathrm{Hom}_A(T, \tau T) = 0$. □

En particular, un módulo inclinante parcial fiel T induce un par de torsión $(\mathscr{T}_0(T), \mathscr{F}_0(T))$ con $\mathscr{T}_0(T) = \mathrm{Gen}\,T$ y $\mathscr{F}_0(T) = \{M \,|\, \mathrm{Hom}_A(T,M) = 0\}$. Resulta entonces de la fidelidad de T que $DA \in \mathscr{T}_0(T)$.

Una consecuencia es que todo proyectivo-inyectivo pertenece a $\operatorname{add} T$: en efecto, si hubiera un módulo proyectivo $P \in \operatorname{Gen} T$, existiría un epimorfismo $T^m \to P$ con $m > 0$, que debe partirse, pues P es proyectivo, y por lo tanto $P \in \operatorname{add} T$.

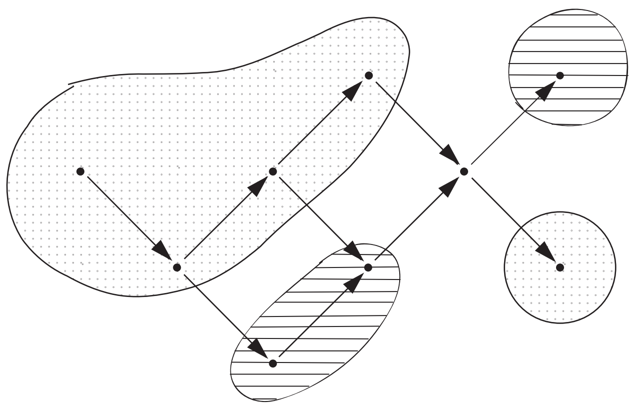
Ejemplo 2.8. Sea A dada por el carcaj

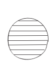
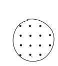
$$\begin{tikzcd} & \circ\, 4 \arrow[d, "\gamma"] & \\ \underset{1}{\circ} & \underset{2}{\circ} \arrow[l, "\beta"] & \underset{3}{\circ} \arrow[l, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

con relación $\alpha\beta = 0$. Entonces el carcaj de Auslander-Reiten de A está dado por

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & & \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[dr] & & 4 \\ 1 \arrow[dr] & & 2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & 3 \\ & & \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & & . \end{tikzcd}$$

El módulo $T = \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$ es inclinante parcial (por ser proyectivo). Es fácil calcular los indescomponibles generados por T: son $\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}$ y 4. Por lo tanto, $\mathscr{T}_0(T) = \operatorname{add}\{\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}, 4\}$. La clase sin torsión $\mathscr{F}_0(T)$ es igualmente fácil de calcular, pues contiene solamente a los módulos M tales que $Me_4 = 0$. Esto da $\mathscr{F}_0(T) = \operatorname{add}\{1, \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, 2, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}, 3\}$. Ilustramos esto así:

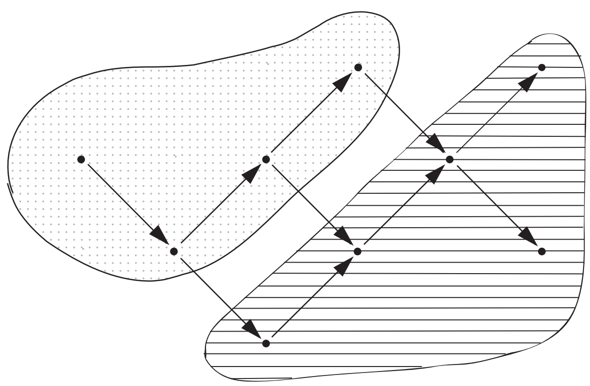


donde $\mathscr{T}_0(T)$ se describe por  y $\mathscr{F}_0(T)$ por  . El único módulo indescomponible que no es ni de torsión ni sin torsión es $\begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix}$, y su sucesión canónica es $0 \to \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix} \to 3 \to 0$, dado que $\begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix} \in \mathscr{T}_0(T)$ y $3 \in \mathscr{F}_0(T)$.

Observamos que los Ext-proyectivos en $\mathscr{T}_0(T)$ indescomponibles son $\substack{4\\2\\1}$, $\substack{4\\2}$ y 4, puesto que todos están en $\mathscr{T}_0(T)$ y $\tau\substack{4\\2\\1}=0$, $\tau\substack{4\\2}=\substack{2\\1}, \tau 4=\substack{3\\2}$ están en $\mathscr{F}_0(T)$. Calculamos ahora $(\mathscr{T}_1(T),\mathscr{F}_1(T))$. Como $M\in\mathscr{T}_1(T)$ si y sólo si $\mathrm{Ext}^1_A(T,M)=0$, se tiene que $\mathscr{T}_1(T)=\mathrm{mod}A$, en tanto que $\mathscr{F}_1(T)=\{0\}$.

Sea $T'=\substack{4\\2\\1}\oplus\substack{3\ 4\\2}$. Entonces T' es fiel. En efecto, para probar que $A_A\in\mathrm{Cogen}T'$, basta probar que para todo A-módulo proyectivo indescomponible P_x existe un monomorfismo $P_x\to T'_0$, con $T'_0\in\mathrm{add}\,T$, lo que vale pues hay monomorfismos $1\to\substack{2\\1}\to\substack{4\\2\\1}$, $\substack{3\\2}\to\substack{3\ 4\\2}$, y $\substack{4\\2\\1},\substack{3\ 4\\2}\in\mathrm{add}\,T'$. Por otro lado, se tiene que $\mathrm{Hom}_A(T',\tau T')\cong\mathrm{Hom}_A(T',2)=0$ de donde resulta, en virtud de (2.7), que T' es un módulo inclinante parcial.

Los indescomponibles generados por T' son $\{\substack{4\\2\\1},\substack{4\\2},\substack{3\ 4\\2},4,3\}$. Por lo tanto, $\mathscr{T}_0(T')=\mathrm{add}\{\substack{4\\2\\1},\substack{4\\2},\substack{3\ 4\\2},4,3\}$. En cuanto a $\mathscr{F}_0(T')=\{M\mid \mathrm{Hom}_A(T',M)=0\}$, como en un álgebra de representación finita todo morfismo es suma de composiciones de morfismos irreducibles, tenemos que todo módulo indescomponible M tal que no existe ningún camino (de un sumando directo) de T' en M en $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ pertenece a $\mathscr{F}_0(T')$. Luego $\mathrm{add}\{1,\substack{2\\1},2,\substack{3\\2}\}\subseteq\mathscr{F}_0(T')$. Como los otros indescomponibles están en $\mathscr{T}_0(T')$, se tiene que $\mathscr{F}_0(T')=\mathrm{add}\{1,\substack{2\\1},2,\substack{3\\2}\}$. Representamos esto en la figura siguiente

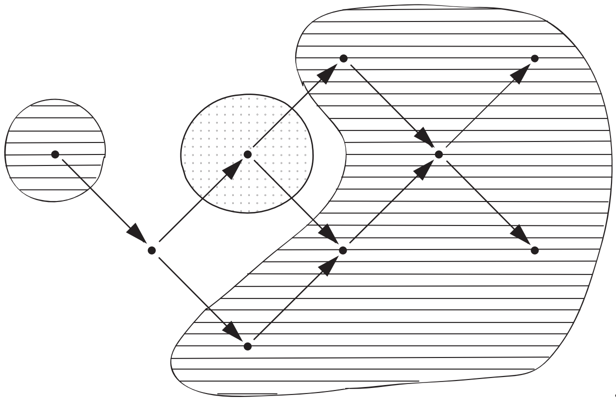


donde, una vez más, la clase de torsión se designa y la clase sin torsión . En este ejemplo todo indescomponible es, o bien de torsión, o bien sin torsión. Se dice entonces que *el par de torsión es escindido*. Daremos abajo una caracterización de pares de torsión escindidos.

Aquí, los Ext-proyectivos indescomponibles de $\mathscr{T}_0(T')$ son $\substack{4\\2\\1},\substack{4\\2},\substack{3\ 4\\2}$ y 4.

Calculemos ahora $(\mathscr{T}_1(T'),\mathscr{F}_1(T'))$. Tenemos que $M\in\mathscr{T}_1(T')$ si y sólo si $\mathrm{Hom}_A(M,2)=\mathrm{Hom}_A(M,\tau T')\cong D\mathrm{Ext}^1_A(T',M)=0$, es decir si y sólo si 2 no es un sumando directo de $M/\mathrm{rad}M$. Por consiguiente, $\mathscr{T}_1(T')=\mathrm{add}\{1,\substack{3\\2},\substack{4\\2\\1},\substack{4\\2},\substack{3\ 4\\2},3,4\}$. En cuanto a $\mathscr{F}_1(T')=\{M\in\mathrm{mod}A\mid\mathrm{Hom}_A(L,M)=0 \text{ para todo } L\in\mathscr{T}_1(T')\}$, se ve enseguida que $\mathscr{F}_1(T')=\mathrm{add}\{2\}$

(en efecto, se tiene un morfismo $1 \to {}^{2}_{1}$ con $1 \in \mathscr{T}_1(T')$). Representamos esto en la figura siguiente



La sucesión canónica correspondiente al módulo indescomponible ${}^{2}_{1}$, el único que no está en $\mathscr{T}_1(T')$ ni en $\mathscr{F}_1(T')$, es

$$0 \to 1 \to {}^{2}_{1} \to 2 \to 0$$

porque $1 \in \mathscr{T}_1(T')$ y $2 \in \mathscr{F}_1(T')$.

Finalmente, los Ext-proyectivos indescomponibles de torsión son 1, $\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$, ${}^{3}{}_{2}{}^{4}$ y ${}^{3}_{2}$ (pero no ${}^{4}_{2}$: en efecto, $\tau\, {}^{4}_{2} = {}^{2}_{1} \notin \mathscr{F}_1(T')$).

Según lo prometido, terminaremos con algunos comentarios sobre los pares de torsión escindidos.

Definición. Un par de torsión $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ se dice *escindido* si cada A-módulo indescomponible pertenece, o bien a $\mathscr{T}$, o bien a $\mathscr{F}$.

Éste es el caso, por ejemplo, del par $(\mathscr{T}_0(T'), \mathscr{F}_0(T'))$ en el ejemplo arriba. La siguiente caracterización nos será de utilidad.

Proposición 2.9. *Sea* $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ *un par de torsión de* mod$A$. *Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ *es escindido.*

(b) *Para todo A-módulo M, la sucesión canónica se parte.*

(c) $\tau^{-1}M \in \mathscr{T}$, *para todo* $M \in \mathscr{T}$.

(d) $\tau N \in \mathscr{F}$, *para todo* $N \in \mathscr{F}$.

Demostración. (a) implica (c). Sea

$$0 \to M \to E \to \tau^{-1}M \to 0$$

la sucesión que casi se parte que comienza en M. Como para todo sumando directo indescomponible E' de E se tiene que $\mathrm{Hom}_A(M, E') \neq 0$, entonces $M \in \mathscr{T}$ implica $E' \notin \mathscr{F}$. Luego $E' \in \mathscr{T}$, por hipótesis. Por consiguiente, $E \in \mathscr{T}$ y entonces $\tau^{-1}M \in \mathscr{T}$.

(c) implica (b). Sea

$$0 \to tM \to M \to M/tM \to 0$$

la sucesión canónica para M. Entonces $\mathrm{Ext}_A^1(M/tM, tM) \cong D\underline{\mathrm{Hom}}_A(\tau^{-1}(tM), M/tM) \subseteq D\,\mathrm{Hom}_A(\tau^{-1}(tM), M/tM) = 0$, pues $\tau^{-1}(tM) \in \mathscr{T}$. Luego la sucesión se parte.

(b) implica (a). Sea M un A-módulo indescomponible. La hipótesis implica que $M = tM \oplus M/tM$. Pero entonces, o bien $M \cong tM \in \mathscr{T}$, o bien $M \cong M/tM \in \mathscr{F}$.

De manera análoga se demuestra la equivalencia de estas condiciones con (d). $\square$

Es fácil ver que la condición (b) equivale a la siguiente:

(b') $\mathrm{Ext}_A^1(M,N) = 0$ para todo $M \in \mathscr{F}$, $N \in \mathscr{T}$.

Esto resulta de la unicidad de la sucesión canónica (ver (2.1)).

Los pares de torsión escindidos serán particularmente útiles en el capítulo siguiente.

3. Módulos inclinantes

Definición. Un A-módulo inclinante parcial T se dice *inclinante* si satisface la propiedad adicional

(T_3) Existe una sucesión exacta corta

$$0 \to A_A \to T'_A \to T''_A \to 0$$

con $T', T'' \in \mathrm{add}\, T$.

Recordamos que T es inclinante parcial si $\mathrm{dp}T \leq 1$ y $\mathrm{Ext}_A^1(T,T) = 0$. Por ejemplo, todo progenerador es un módulo inclinante.

La noción dual es la de *módulo coinclinante*. Así, un A-módulo T es coinclinante si $\mathrm{di}T \leq 1$, $\mathrm{Ext}_A^1(T,T) = 0$ y existe una sucesión exacta

$$0 \to T''_A \to T''_A \to DA_A \to 0$$

con T'_A, $T''_A \in \mathrm{add}\, T$. Es claro que un A-módulo T es inclinante si y sólo si DT es coinclinante. Finalmente, si A es hereditaria, todo módulo inclinante es coinclinante y recíprocamente.

Puede interpretarse que los axiomas de módulo inclinante significan que un módulo inclinante es "bastante próximo" al módulo A_A. Una condición suficiente para que (T_3) sea verificada es que, para todo A-módulo proyectivo indescomponible P, exista una sucesión exacta corta

$$0 \to P \to T' \to T'' \to 0$$

con $T', T'' \in \mathrm{add}\, T$. No es inmediatamente evidente que esta condición sea igualmente necesaria. Probaremos esto más adelante en (3.8).

Una consecuencia directa del axioma (T_3) y de (II.2.6) es que todo módulo inclinante es fiel. Se deduce una primera caracterización de los módulos inclinantes.

Lema 3.1. *Un A-módulo T es inclinante si y sólo si* $\mathrm{Hom}_A(T, \tau T) = 0$ *y T satisface* (T_3).

Demostración. En efecto, si T es inclinante, $\mathrm{dp}T \leq 1$ y luego $\mathrm{Hom}_A(T, \tau T) \cong D\,\mathrm{Ext}_A^1(T,T) = 0$. Recíprocamente, si T satisface (T_3) entonces es fiel. Luego, por (II.2.7), es inclinante parcial y, por lo tanto, inclinante. $\square$

Por otra parte, no es válido en general que un módulo inclinante parcial fiel es inclinante. Así, el módulo fiel T' del Ejemplo (2.8) no es inclinante, como veremos más adelante.

Necesitamos el lema siguiente.

Lema 3.2. *Sean* $M, T \in \mathrm{mod}A$. *Entonces existe una sucesión exacta corta*

$$(*) \qquad 0 \to M \to E \to T_0 \to 0$$

con $T_0 \in \mathrm{add}T$*, tal que el morfismo de conexión* $\delta : \mathrm{Hom}_A(T, T_0) \to \mathrm{Ext}^1_A(T, M)$ *inducido por el funtor* $\mathrm{Hom}_A(T, -)$ *es sobreyectivo.*

Demostración. Si $\mathrm{Ext}^1_A(T, M) = 0$ el lema es trivial. Supongamos entonces que $\mathrm{Ext}^1_A(T, M)$ $\neq 0$ y sea $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_d\}$ un conjunto de generadores del $\mathrm{End}\, T_A$-módulo $\mathrm{Ext}^1_A(T, M)$.

Representamos a cada $\underline{e}_i$ por una sucesión exacta:

$$0 \to M \xrightarrow{f_i} E_i \xrightarrow{g_i} T \to 0.$$

El morfismo codiagonal $k = [id_M, \ldots, id_M] : M^d \to M$ induce un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "u'_i"] & E_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "u_i"] & T \arrow[r] \arrow[d, "u''_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M^d \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"] & \bigoplus_{i=1}^d E_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & T^d \arrow[r] \arrow[d, "id_{T^d}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f'"] & E \arrow[r, "g'"] & T^d \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde u_i, u'_i, u''_i son las inclusiones respectivas en la coordenada i-ésima y f, g son las aplicaciones inducidas en la suma directa. Como $ku'_i = id_M$, del precedente se deduce otro diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, equal] & E_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "vu_i"] & T \arrow[r] \arrow[d, "u''_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f'"] & E \arrow[r, "g'"] & T^d \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

Si $\underline{e}$ designa al elemento de $\mathrm{Ext}^1_A(T^d, M)$ representado por la sucesión $(*)$ de abajo, este último diagrama se expresa diciendo que $\underline{e}_i = \mathrm{Ext}^1_A(u''_i, M)\,\underline{e} = \delta(u''_i)$ para cada i. Luego δ es sobreyectiva y la sucesión $(*)$ satisface lo pedido. □

Una consecuencia inmediata de (3.2) es el llema siguiente, llamado Lema de Bongartz, que dice que todo módulo inclinante parcial puede ser completado a un módulo inclinante.

Lema 3.3. (Bongartz) *Sea* T *un módulo inclinante parcial. Entonces existe un módulo* E *tal que* $T \oplus E$ *es inclinante.*

Demostración. Aplicando (3.2), existe una sucesión exacta

$$(*) \qquad 0 \to A \to E \to T_0 \to 0$$

tal que $T_0 \in \operatorname{add}T$ y el morfismo de conexión $\delta : \operatorname{Hom}_A(T,T_0) \to \operatorname{Ext}_A^1(T,A)$ inducido por el funtor $\operatorname{Hom}_A(T,-)$ es sobreyectivo. Aplicando $\operatorname{Hom}_A(T,-)$ a $(*)$ se obtiene una sucesión exacta

$$\ldots \operatorname{Hom}_A(T,T_0) \xrightarrow{\delta} \operatorname{Ext}_A^1(T,A) \to \operatorname{Ext}_A^1(T,E) \to \operatorname{Ext}_A^1(T,T_0) = 0.$$

Como δ es sobreyectivo, resulta que $\operatorname{Ext}_A^1(T,E) = 0$.

Si se aplican sucesivamente los funtores $\operatorname{Hom}_A(-,T)$ y $\operatorname{Hom}_A(-,E)$ a la sucesión $(*)$ se obtienen análogamente sucesiones exactas

$$0 = \operatorname{Ext}_A^1(T_0,T) \to \operatorname{Ext}_A^1(E,T) \to \operatorname{Ext}_A^1(A,T) = 0$$

y

$$0 = \operatorname{Ext}_A^1(T_0,E) \to \operatorname{Ext}_A^1(E,E) \to \operatorname{Ext}_A^1(A,E) = 0.$$

Luego $\operatorname{Ext}_A^1(T\oplus E, T\oplus E) = 0$. Como $\operatorname{dp}T \leq 1$, la sucesión exacta $(*)$ da también $\operatorname{dp}E \leq 1$. Finalmente, la sucesión $(*)$ es la sucesión de (T_3). Esto prueba que $T\oplus E$ es un módulo inclinante, como queríamos. $\square$

Es importante observar que hemos probado que, para toda sucesión exacta

$$0 \to A \to E \to T_0 \to 0$$

con $T_0 \in \operatorname{add}T$ tal que el morfismo de conexión $\delta : \operatorname{Hom}_A(T,T_0) \to \operatorname{Ext}_A^1(T,A)$ es sobreyectivo, el módulo $T\oplus E$ es inclinante. Cada tal sucesión se dice una *sucesión de Bongartz* para T, y el módulo E se dice un *complemento de Bongartz* de T.

La consecuencia más notable del Lema de Bongartz es que un módulo inclinante parcial es inclinante si y sólo si el número de clases de isomorfismo de sumandos indescomponibles de T es igual al rango del grupo de Grothendieck $K_0(A)$ de A, es decir al número de clases de isomorfismo de A-módulos simples (en virtud de I.1.4). Probaremos este resultado en (II.5.6).

Corolario 3.4. *Sea E un complemento de Bongartz del módulo inclinante parcial T. Entonces $\mathscr{T}_1(T) = \mathscr{T}_1(T\oplus E)$.*

Demostración. Es claro que, para un A-módulo M, la condición $\operatorname{Ext}_A^1(T\oplus E, M) = 0$ implica $\operatorname{Ext}_A^1(T,M) = 0$. Luego $\mathscr{T}_1(T\oplus E) \subseteq \mathscr{T}_1(T)$.

Recíprocamente, sean $M \in \mathscr{T}_1(T)$ y

$$0 \to A \to E \to T^d \to 0$$

una sucesión de Bongartz para T. Aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_A(-,M)$ resulta una sucesión exacta

$$0 = \operatorname{Ext}_A^1(T^d,M) \to \operatorname{Ext}_A^1(E,M) \to \operatorname{Ext}_A^1(A,M) = 0.$$

Luego $\operatorname{Ext}_A^1(E,M) = 0$ y por lo tanto $\operatorname{Ext}_A^1(T\oplus E,M) = 0$. Esto muestra que $\mathscr{T}_1(T) = \mathscr{T}_1(T\oplus E)$. $\square$

El teorema siguiente da varias caracterizaciones equivalentes de los módulos inclinantes.

Teorema 3.5. *Sea T un A-módulo inclinante parcial. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) *T es un módulo inclinante.*

(b) $\mathscr{T}_0(T) = \mathscr{T}_1(T)$.

(c) *Para todo $M \in \mathscr{T}_1(T)$ existe una sucesión exacta*

$$\ldots \to T_2 \to T_1 \to T_0 \to M \to 0$$

con $T_i \in \operatorname{add} T$ para todo i.

(d) *L es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}_1(T)$ si y sólo si $L \in \operatorname{add} T$.*

Demostración. (a) implica (b). Sabemos ya, por (II. 2.5), que $\mathscr{T}_0(T) \subseteq \mathscr{T}_1(T)$. Recíprocamente, sean $M \in \mathscr{T}_1(T)$ y

$$0 \to tM \to M \to M/tM \to 0$$

la sucesión canónica de M en el par de torsión $(\mathscr{T}_0(T), \mathscr{F}_0(T))$. Como $M/tM \in \mathscr{F}_0(T)$, se tiene que $\operatorname{Hom}_A(T, M/tM) = 0$. Por otro lado, el funtor $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ da una sucesión exacta

$$\operatorname{Ext}^1_A(T,M) \to \operatorname{Ext}^1_A(T,M/tM) \to 0$$

puesto que $\operatorname{dp} T \leq 1$. Luego $\operatorname{Ext}^1_A(T,M) = 0$ implica $\operatorname{Ext}^1_A(T,M/tM) = 0$. Apliquemos ahora el funtor $\operatorname{Hom}_A(-, M/tM)$ a la sucesión exacta del axioma (T_3)

$$0 \to A_A \to T'_A \to T''_A \to 0$$

con $T', T'' \in \operatorname{add} T$. Esto da una sucesión exacta

$$0 = \operatorname{Hom}_A(T', M/tM) \to \operatorname{Hom}_A(A, M/tM) \to \operatorname{Ext}^1_A(T'', M/tM) = 0.$$

Por lo tanto, $M/tM \cong \operatorname{Hom}_A(A, M/tM) = 0$. Luego $M = tM \in \mathscr{T}_0(T)$.

(b) implica (c). Sea $M \in \mathscr{T}_1(T) = \mathscr{T}_0(T)$. Comenzamos probando la existencia de una sucesión exacta

$$0 \to L \to T_0 \to M \to 0$$

con $T_0 \in \operatorname{add} T$ y $L \in \mathscr{T}_1(T)$. Como $M \in \operatorname{Gen} T$, resulta de (II.1.6) que una $\operatorname{add} T$-aproximación $f : T_0 \to M$, con $T_0 \in \operatorname{add} T$, es sobreyectiva. Pongamos $L = \operatorname{Ker} f$ y apliquemos el funtor $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ a la sucesión exacta corta

$$0 \to L \to T_0 \xrightarrow{f} M \to 0.$$

Obtenemos una sucesión exacta

$$\ldots \operatorname{Hom}_A(T, T_0) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(T,f)} \operatorname{Hom}_A(T, M) \to \operatorname{Ext}^1_A(T, L) \to \operatorname{Ext}^1_A(T, T_0) = 0.$$

Dado que f es una $\operatorname{add} T$-aproximación, el morfismo $\operatorname{Hom}_A(T, f)$ es sobreyectivo. Luego $\operatorname{Ext}^1_A(T, L) = 0$. Esto prueba entonces que $L \in \mathscr{T}_1(T) = \mathscr{T}_0(T)$. El enunciado de (c) se obtiene entonces por recurrencia.

(c) implica (d). Supongamos que $L \in \operatorname{add} T$. Entonces es claro que L es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}_1(T) = \{M \mid \operatorname{Ext}^1_A(T, M) = 0\}$. Recíprocamente, supongamos que L es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}_1(T)$. Por (c) sabemos que existe una sucesión exacta

$$0 \to L' \to T_0 \to L \to 0$$

con $T_0 \in \operatorname{add} T$ y $L' \in \mathscr{T}_1(T)$. Como L es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}_1(T)$, se tiene $\operatorname{Ext}_A^1(L, L') = 0$. Luego esta sucesión se parte y $L \in \operatorname{add} T$.

(d) implica (a). Sea $0 \to A \to E \to T_0 \to 0$ una sucesión de Bongartz para T. Para probar que T es inclinante basta probar que $E \in \operatorname{add} T$. En virtud de (d), esto se reduce a probar que E es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}_1(T)$. En efecto, como $T \oplus E$ es inclinante, se tiene que $\operatorname{Ext}_A^1(T, E) = 0$, de donde $E \in \mathscr{T}_1(T)$. Sea $M \in \mathscr{T}_1(T)$. Aplicando $\operatorname{Hom}_A(-, M)$ a la sucesión de Bongartz encontramos una sucesión exacta

$$0 = \operatorname{Ext}_A^1(T_0, M) \to \operatorname{Ext}_A^1(E, M) \to \operatorname{Ext}_A^1(A, M) = 0,$$

de donde $\operatorname{Ext}_A^1(E, M) = 0$, probando lo deseado. □

Por lo tanto, si T es un A-módulo inclinante, las clases de torsión $\mathscr{T}_0(T)$ y $\mathscr{T}_1(T)$ coinciden. Notaremos $\mathscr{T}(T) = \mathscr{T}_0(T) = \mathscr{T}_1(T)$ y $\mathscr{F}(T) = \mathscr{F}_0(T) = \mathscr{F}_1(T)$. Así, el par de torsión inducido es $(\mathscr{T}(T), \mathscr{F}(T))$.

Extraeremos ahora algunas consecuencias de 3.5.

Corolario 3.6. *Sean T un A-módulo inclinante y $B = \operatorname{End} T_A$. Entonces:*

(a) *El funtor* $\operatorname{Hom}_A(T, -)|_{\mathscr{T}(T)}$ *preserva sucesiones exactas cortas.*

(b) *El funtor* $\operatorname{Ext}_A^1(T, -)|_{\mathscr{F}(T)}$ *preserva sucesiones exactas cortas.*

Demostración. (a) Sea $0 \to L \to M \to N \to 0$ una sucesión exacta de $\mathscr{T}(T)$. Como $\operatorname{Ext}_A^1(T, L) = 0$ se tiene una sucesión exacta en $\operatorname{mod} B$

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(T, L) \to \operatorname{Hom}_A(T, M) \to \operatorname{Hom}_A(T, N) \to 0.$$

(b) es similar, teniendo en cuenta el hecho que $\operatorname{Ext}_A^2(T, -) = 0$. □

Corolario 3.7. *Sean T un A-módulo inclinante y $B = \operatorname{End} T_A$. Entonces $M \in \mathscr{T}(T)$ si y sólo si $\varepsilon_M : \operatorname{Hom}_A(T, M) \otimes_B T \to M$ es un isomorfismo.*

Demostración. La suficiencia resulta de (II.1.8). Probemos la necesidad. Sea $M \in \mathscr{T}(T)$. Existe, por (3.5)(c), una sucesión exacta

$$0 \to K \to T_1 \to T_0 \to M \to 0$$

con $T_1, T_0 \in \operatorname{add} T$ y $K \in \mathscr{T}(T)$. Utilizando (3.6), obtenemos una sucesión exacta

$$\operatorname{Hom}_A(T, T_1) \to \operatorname{Hom}_A(T, T_0) \to \operatorname{Hom}_A(T, M) \to 0.$$

Aplicando el funtor exacto a derecha $- \otimes_B T$ tenemos un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccc}
\operatorname{Hom}_A(T, T_1) \otimes_B T & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(T, T_0) \otimes_B T & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(T, M) \otimes_B T & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle \varepsilon_{T_0}} \downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon_{T_1}} \downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon_M} \downarrow & & \\
T_1 & \longrightarrow & T_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Sabemos por (II.1.1) que $\varepsilon_{T_0}, \varepsilon_{T_1}$ son isomorfismos y, por lo tanto, ε_M también lo es. □

Corolario 3.8. *Un módulo inclinante parcial T es inclinante si y sólo si para todo A-módulo proyectivo indescomponible P existe una sucesión exacta*

$$0 \to P \to T_0' \to T_0'' \to 0$$

con $T_0', T_0'' \in \operatorname{add} T$.

Demostración. Siendo la suficiencia evidente, probemos la necesidad. Si T es inclinante, existe una sucesión exacta $0 \to A \to T' \to T'' \to 0$ con $T', T'' \in \operatorname{add} T$. Entonces una retracción $p : A_A \to P$ induce un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & T' & \longrightarrow & T'' & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle p}\big\downarrow & & {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\| & & \\ 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & F & \longrightarrow & T'' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Basta demostrar que $F \in \operatorname{add} T$. Como p es sobreyectivo entonces f también lo es, de donde $F \in \mathscr{T}(T)$. Sea $M \in \mathscr{T}(T)$. Entonces $\operatorname{Hom}_A(-, M)$ aplicado a la sucesión de abajo induce una sucesión exacta

$$0 = \operatorname{Ext}_A^1(T'', M) \to \operatorname{Ext}_A^1(F, M) \to \operatorname{Ext}_A^1(P, M) = 0.$$

Luego $\operatorname{Ext}_A^1(F, M) = 0$. Del teorema resulta que $F \in \operatorname{add} T$. □

Corolario 3.9. *Sea T un A-módulo inclinante. Entonces $L \in \operatorname{add} T$ si y sólo si $L \in \mathscr{T}(T)$ y $\tau L \in \mathscr{F}(T)$.*

Demostración. El resultado es consecuencia del teorema y de (II.2.4). □

Nota 3.10. Sea T un A-módulo inclinante. Se sabe que los Ext-proyectivos de $\mathscr{T}(T)$ son los objetos de $\operatorname{add} T$. Por otro lado, los Ext-inyectivos de $\mathscr{T}(T)$ coinciden con los A-módulos inyectivos. En efecto, es claro que, como todos los A-módulos inyectivos indescomponibles están en $\mathscr{T}(T)$, entonces son Ext-inyectivos en esta subcategoría. Recíprocamente, si M es un A-módulo Ext-inyectivo de $\mathscr{T}(T)$, sea $j : M \to I$ una cápsula inyectiva y consideremos la sucesión exacta

$$0 \to M \to I \to I/M \to 0.$$

Como $I \in \mathscr{T}(T)$, también $I/M \in \mathscr{T}(T)$, Por lo tanto $\operatorname{Ext}_A^1(I/M, M) = 0$ y la sucesión precedente se parte. Luego M es inyectivo.

A continuación probaremos que un módulo inclinante es un módulo inclinante parcial que tiene un número maximal de sumandos indescomponibles no isomorfos.

Corolario 3.11. *Un A-módulo T es inclinante si y sólo si es un módulo inclinante parcial tal que, para cada módulo E tal que $T \oplus E$ es inclinante parcial, tenemos $E \in \operatorname{add} T$.*

Demostración. La suficiencia es fácil: sean T un módulo inclinante parcial que verifica la condición del enunciado, y E un complemento de Bongartz para T. Entonces $T \oplus E$ es inclinante y, en particular, es inclinante parcial. Por hipótesis tenemos que $E \in \operatorname{add} T$. Luego T es inclinante.

Recíprocamente, sean T un A-módulo inclinante y E tales que $T \oplus E$ es inclinante parcial. En particular, $\mathrm{Ext}_A^1(T,E) = 0$ implica $E \in \mathscr{T}(T)$. Sea $M \in \mathscr{T}(T)$. Como T es inclinante, existe un epimorfismo $f : T_0 \to M$, con $T_0 \in \mathrm{add}\, T$. Como $\mathrm{dp}E \leq 1$, tenemos un epimorfismo $\mathrm{Ext}_A^1(E,f) : \mathrm{Ext}_A^1(E,T_0) \to \mathrm{Ext}_A^1(E,M)$. Entonces $\mathrm{Ext}_A^1(E,T) = 0$ implica $\mathrm{Ext}_A^1(E,M) = 0$. Por lo tanto E es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}(T)$ y, por (II.3.5)(d), tenemos $E \in \mathrm{add}\, T$. □

Ejemplo 3.12. (a) El módulo fiel $T' = \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix}$ del Ejemplo (II.2.8) no es inclinante. En efecto, el conúcleo $\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}$ de la inclusión $1 \to \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$ no pertenece a $\mathrm{add}\, T'$.

Mostremos que, por el contrario, $U = \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix} \oplus 4$ es un módulo inclinante.

(T_1) $\mathrm{dp}U \leq 1$ resulta de las resoluciones proyectivas

$$0 \to 1 \to \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \to 0\ ,\ 0 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix} \to 0\ ,\ 0 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \to 4 \to 0$$

y de que el módulo $\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$ es proyectivo.

(T_2) Puesto que el módulo $\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$ es proyectivo e inyectivo, y como $\begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix} \oplus 4$ es inyectivo, tenemos que $\mathrm{Ext}_A^1(U,U) = \mathrm{Ext}_A^1(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix} \oplus 4\, ,\, \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix})$. Entonces, como $\mathrm{dp}U \leq 1$, obtenemos

$$\mathrm{Ext}_A^1(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}, \tau(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix})) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}) = 0\,,$$

$$\mathrm{Ext}_A^1(\begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}, \tau(\begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix})) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}, 2) = 0\ , \text{y}$$

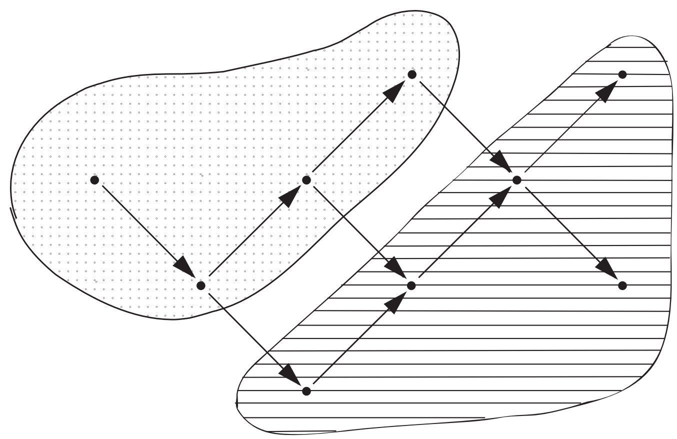
$$\mathrm{Ext}_A^1(4, \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}, \tau(4)) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) = 0\,.$$

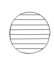
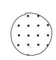
(T_3) Esto resulta de las sucesiones exactas cortas

$0 \to 1 \to \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \to 0\ ;\quad 0 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \to 4 \to 0$ y

$0 \to \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix} \to 4 \to 0$.

Entonces se tiene $\mathscr{T}(U) = \mathrm{Gen}(U) = \mathrm{add}\{\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix}, 3, 4\}$ y $\mathscr{F}(U)$ $= \{M \mid \mathrm{Hom}_A(U,M) = 0\} = \mathrm{add}\,\{1, \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, 2, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\}$. Se tiene así



donde $\mathscr{T}(U)$ se designa por  y $\mathscr{F}(U)$ por  . Se reencuentra así uno de los pares de torsión del Ejemplo (II.2.8).

Consideramos ahora el módulo $V = 1 \oplus \substack{4\\2\\1} \oplus \substack{3\,4\\2} \oplus 4$. Verificamos a continuación que éste es también un módulo inclinante.

(T_1) Para probar que $\mathrm{dp}V \leq 1$ consideramos las resoluciones proyectivas

$0 \to \substack{2\\1} \to \substack{4\\2\\1} \oplus \substack{3\\2} \to \substack{3\,4\\2} \to 0$ y $0 \to \substack{2\\1} \to \substack{4\\2\\1} \to 4 \to 0$

y recordamos que $1 \oplus \substack{4\\2\\1}$ es proyectivo.

(T_2) Para demostrar que $\mathrm{Ext}^1_A(V,V) \cong \mathrm{Ext}^1_A(\substack{3\,4\\2} \oplus 4, 1) = 0$ basta considerar

$$\mathrm{Ext}^1_A(\substack{3\,4\\2}, 1) \cong D\,\mathrm{Hom}_A(1, \tau(\substack{3\,4\\2})) \cong D\,\mathrm{Hom}_A(1,2) = 0 \text{ y}$$

$$\mathrm{Ext}^1_A(4,1) \cong D\,\mathrm{Hom}_A(1,\tau(4)) \cong D\,\mathrm{Hom}_A(1, \substack{3\\2}) = 0$$

donde se ha utilizado que $\mathrm{dp}V \leq 1$.

(T_3) Como 1 y $\substack{4\\2\\1}$ son proyectivos, basta considerar las sucesiones exactas cortas

$0 \to \substack{2\\1} \to \substack{4\\2\\1} \to 4 \to 0$ y $0 \to \substack{3\\2} \to \substack{3\,4\\2} \to 4 \to 0$.

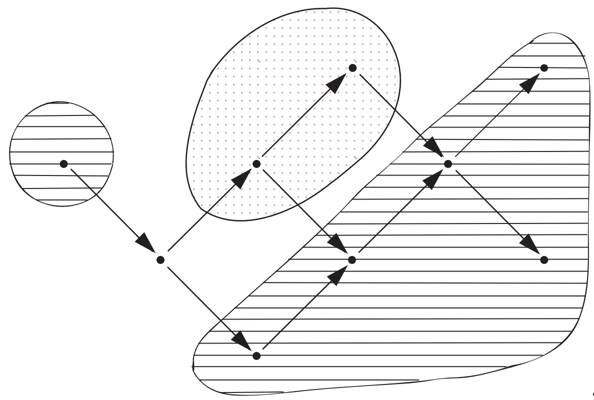
Calculamos ahora el par de torsión correspondiente

$$\mathscr{T}(V) = \mathrm{Gen}(V) = \mathrm{add}\{1, \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}34\\2\end{smallmatrix}, 3, 4\},$$

en tanto que

$$\mathscr{F}(V) = \{M \mid \mathrm{Hom}_A(V,M) = 0\} = \mathrm{add}\{2, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\}.$$

Se tiene así



Notamos que el módulo indescomponible $\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$ no pertenece ni a $\mathscr{T}(V)$ ni a $\mathscr{F}(V)$. En efecto, $\mathrm{Hom}_A(V, \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}) \neq 0$, y la sucesión $0 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \to 4 \to 0$ muestra que $\mathrm{Ext}^1_A(V, \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}) \neq 0$. La sucesión canónica correspondiente a $\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$ está dada por

$$0 \to 1 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to 2 \to 0.$$

(b) Sea A el álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & \circ 3 \arrow[dl] \\
\underset{1}{\circ} & \underset{2}{\circ} \arrow[l] & \\
 & & \circ 4. \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

El carcaj de Auslander-Reiten de A está dado por

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
1 \arrow[dr] & & 2 \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}3\,4\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[dr] & & \\
 & \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[r] & \begin{smallmatrix}&3\,4\\2&2\\&1\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \arrow[r] & \begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix} \arrow[r] \arrow[dr] & 3 \\
 & & \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & 4.
\end{tikzcd}$$

Veremos que $T = \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}34\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \oplus 4$ es un módulo inclinante.

(T_1) Resulta del hecho que A es hereditaria.

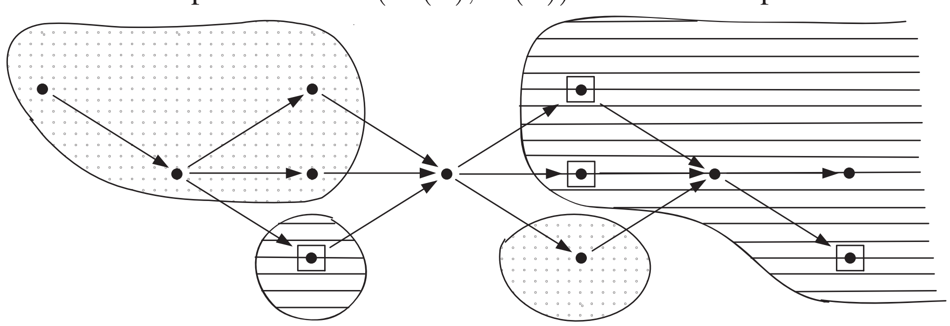
(T_2) Para probar que $\mathrm{Ext}^1_A(T,T) \cong \mathrm{Ext}^1_A(\substack{34\\2\\1} \oplus \substack{4\\2} \oplus 4\,,\, \substack{4\\2\\1} \oplus \substack{4\\2}) = 0$, se usan los isomorfismos

$$\mathrm{Ext}^1_A(\substack{34\\2\\1}, \substack{4\\2\\1}) \cong D\mathrm{Hom}_A(\substack{4\\2\\1}, \tau(\substack{34\\2\\1})) \cong D\mathrm{Hom}_A(\substack{4\\2\\1}, 2) = 0$$
$$\mathrm{Ext}^1_A(\substack{34\\2\\1}, \substack{4\\2}) \cong D\mathrm{Hom}_A(\substack{4\\2}, \tau(\substack{34\\2\\1})) \cong D\mathrm{Hom}_A(\substack{4\\2}, 2) = 0$$
$$\mathrm{Ext}^1_A(\substack{4\\2}, \substack{4\\2\\1}) \cong D\mathrm{Hom}_A(\substack{4\\2\\1}, \tau(\substack{4\\2})) \cong D\mathrm{Hom}_A(\substack{4\\2\\1}, \substack{3\\2\\1}) = 0$$
$$\mathrm{Ext}^1_A(\substack{4\\2}, \substack{4\\2}) \cong D\mathrm{Hom}_A(\substack{4\\2}, \tau(\substack{4\\2})) \cong D\mathrm{Hom}_A(\substack{4\\2}, \substack{3\\2\\1}) = 0$$
$$\mathrm{Ext}^1_A(4, \substack{4\\2\\1}) \cong D\mathrm{Hom}_A(\substack{4\\2\\1}, \tau(4)) \cong D\mathrm{Hom}_A(\substack{4\\2\\1}, \substack{3\\2}) = 0$$
$$\mathrm{Ext}^1_A(4, \substack{4\\2}) \cong D\mathrm{Hom}_A(\substack{4\\2}, \tau(4)) \cong D\mathrm{Hom}_A(\substack{4\\2}, \substack{3\\2}) = 0.$$

(T_3) Como $\substack{4\\2\\1}$ es sumando directo de T, basta considerar las sucesiones exactas

$$0 \to 1 \to \substack{4\\2\\1} \to \substack{4\\2} \to 0\ ,\ 0 \to \substack{2\\1} \to \substack{4\\2\\1} \to 4 \to 0\ ,\ 0 \to \substack{3\\2\\1} \to \substack{34\\2\\1} \to 4 \to 0.$$

Calculamos ahora el par de torsión $(\mathscr{T}(T), \mathscr{F}(T))$. Un cálculo rápido nos da



donde los sumandos directos indescomponibles de T se indican con los cuadrados $\boxed{\bullet}$.

El módulo indescomponible $\substack{3\;4\\2\;2\\1}$ no es ni de torsión ni sin torsión. Su sucesión canónica en el par $(\mathscr{T}(T), \mathscr{F}(T))$ es

$$0 \to \substack{4\\2\\1} \to \substack{3\;4\\2\;2\\1} \to \substack{3\\2} \to 0\,.$$

(c) Un ejemplo de interés más teórico es el siguiente. Un módulo inclinante construido como lo haremos ahora se llama *módulo inclinante APR* (por Auslander, Platzeck, Reiten).

Sea S_x un módulo simple proyectivo no inyectivo. Entonces el módulo $T_x = \tau^{-1}(S_x) \oplus (\bigoplus_{y \neq x} P_y)$ es un módulo inclinante.

En efecto, consideremos la sucesión exacta que casi se parte

$$0 \to S_x \to P \to \tau^{-1}(S_x) \to 0.$$

Por (I.2.10) sabemos que P es proyectivo. Esta sucesión prueba (T_1) y (T_3), porque ningún sumando indescomponible de P es isomorfo a S_x.

Finalmente, como $\mathrm{dp}T \leq 1$, se tiene

$$\mathrm{Ext}^1_A(T_x,T_x) \cong D\,\mathrm{Hom}_A(T_x,\tau T_x) \cong D\,\mathrm{Hom}_A(T_x,S_x) = 0$$

dado que S_x es simple proyectivo.

Probamos ahora que el par de torsión $(\mathscr{T}(T_x),\mathscr{F}(T_x))$ se escinde. En efecto, $M \in \mathscr{T}(T_x)$ si y sólo si $0 = \mathrm{Ext}^1_A(T_x,M) \cong D\,\mathrm{Hom}_A(M,\tau T_x) \cong D\,\mathrm{Hom}_A(M,S_x)$. Éste es el caso si y sólo si ningún sumando directo indescomponible de M es isomorfo a S_x. Como $S_x \cong \tau T_x \in \mathscr{F}(T_x)$, se deduce que $\mathscr{F}(T_x) = \mathrm{add}\,S_x$, mientras que $\mathscr{T}(T_x) = \mathrm{add}(\mathrm{ind}A \setminus \{S_x\})$.

4. El teorema de inclinación.

Sean A un álgebra de artin básica y conexa y T_A un A-módulo inclinante. El teorema de inclinación, debido a Brenner y Butler, compara las categorías de módulos sobre A y sobre $B = \mathrm{End}\,T_A$. Ya sabemos, por (II.1.2), que el funtor $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ proyectiviza a T. Comenzaremos por probar que la restricción de este funtor a la subcategoría $\mathscr{T}(T) = \mathrm{Gen}(T) = \{M \mid \mathrm{Ext}^1_A(T,M) = 0\}$ es un funtor pleno, fiel y preserva extensiones.

Lema 4.1. *Sean A un álgebra, T un A-módulo inclinante y $B = \mathrm{End}\,T_A$. Para $M,N \in \mathscr{T}(T)$ hay isomorfismos funtoriales:*

(a) $\mathrm{Hom}_A(M,N) \cong \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,M),\mathrm{Hom}_A(T,N))$.

(b) $\mathrm{Ext}^1_A(M,N) \cong \mathrm{Ext}^1_B(\mathrm{Hom}_A(T,M),\mathrm{Hom}_A(T,N))$.

Demostración. En virtud de (II.3.5) sabemos que existe una sucesión exacta

$$\ldots \to T_2 \xrightarrow{d_2} T_1 \xrightarrow{d_1} T_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

con $T_i \in \mathrm{add}\,T$ para todo i.

(a) Como la sucesión precedente se encuentra enteramente en $\mathscr{T}(T)$, que es cerrada por cocientes, resulta de (II.3.6) que hay una sucesión exacta

$$\ldots \to \mathrm{Hom}_A(T,T_1) \to \mathrm{Hom}_A(T,T_0) \to \mathrm{Hom}_A(T,M) \to 0.$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_B(-,\mathrm{Hom}_A(T,N))$ obtenemos la fila superior del siguiente diagrama conmutativo, cuyas filas son exactas,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,M),\mathrm{Hom}_A(T,N)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,T_0),\mathrm{Hom}_A(T,N)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,T_1),\mathrm{Hom}_A(T,N)) \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(T_0,N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(T_1,N)
\end{tikzcd}$$

donde los isomorfismos verticales resultan de (II.1.2)(a). El diagrama prueba lo enunciado.

(b) Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ al complejo

$$\ldots \to T_2 \xrightarrow{d_2} T_1 \xrightarrow{d_1} T_0 \to 0 \qquad (T_*)$$

se obtiene, por (II.1.2(a)) y (II.3.6), una resolución proyectiva de $\mathrm{Hom}_A(T,M)$ en mod$B$. Por definición, $\mathrm{Ext}^1_A(\mathrm{Hom}_A(T,M),\mathrm{Hom}_A(T,N))$ es el primer grupo de cohomología del complejo

$$\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(T,T_*),\mathrm{Hom}_A(T,N)) \cong \mathrm{Hom}_A(T_*,N)$$

(donde el isomorfismo resulta de (a)), o sea coincide con $H^1(\mathrm{Hom}_A(T_*,N))$.

Sea $L = \mathrm{Im}d_1$ y sea $d_1 = jp$ la factorización canónica de d_1. Se tiene una sucesión exacta

$$0 \to L \xrightarrow{j} T_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

que induce, como $\mathrm{Ext}^1_A(T_0,N) = 0$, una sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(T_0,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(j,N)} \mathrm{Hom}_A(L,N) \to \mathrm{Ext}^1_A(M,N) \to 0.$$

Probaremos que $H^1(\mathrm{Hom}_A(T_*,N)) \cong \mathrm{Ext}^1_A(M,N)$.

Consideramos así el complejo $\mathrm{Hom}_A(T_*,N)$:

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(T_0,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(d_1,N)} \mathrm{Hom}_A(T_1,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(d_2,N)} \mathrm{Hom}_A(T_2,N) \to \cdots$$

La exactitud a izquierda de $\mathrm{Hom}_A(-,N)$ implica que $\mathrm{Hom}_A(L,N) \cong \mathrm{Ker}\,\mathrm{Hom}_A(d_2,N)$, de modo que $H^1(\mathrm{Hom}_A(T_*,N)) \cong \mathrm{Hom}_A(L,N)/\mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(d_1,N)$. Sea $\mathrm{Hom}_A(d_1,N) = \xi\pi$ la factorización canónica de $\mathrm{Hom}_A(d_1,N)$ a través de su imagen. Entonces $\mathrm{Hom}_A(d_2,N)\xi\pi = \mathrm{Hom}_A(d_2,N)\,\mathrm{Hom}_A(d_1,N) = 0$ implica $\mathrm{Hom}_A(d_2,N)\xi = 0$, dado que π es un epimorfismo. Luego ξ se factoriza por $\mathrm{Hom}_A(L,N) \cong \mathrm{Ker}\,\mathrm{Hom}_A(d_2,N)$, o sea, existe $\varphi : \mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(d_1,N) \to \mathrm{Hom}_A(L,N)$ tal que $\mathrm{Hom}_A(p,N)\varphi = \xi$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(T_0,N) \arrow[rr, "\mathrm{Hom}_A(d_1,N)"] \arrow[dr, "\pi"'] \arrow[dd, equal] & & \mathrm{Hom}_A(T_1,N) \\
& \mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(d_1,N) \arrow[ur, hook, "\xi"'] \arrow[dr, dashed, "\varphi"'] & \\
\mathrm{Hom}_A(T_0,N) \arrow[rr, "\mathrm{Hom}_A(j,n)"] & & \mathrm{Hom}_A(L,N) \arrow[uu, hook, "\mathrm{Hom}_A(p,N)"']
\end{tikzcd}$$

Por otra parte, φ es un monomorfismo, porque ξ lo es. Se tiene así:

$$\mathrm{Hom}_A(p,N)\varphi\pi = \xi\pi = \mathrm{Hom}_A(d_1,N) = \mathrm{Hom}_A(jp,N) = \mathrm{Hom}_A(p,N)\,\mathrm{Hom}_A(j,N),$$

de donde $\varphi\pi = \mathrm{Hom}_A(j,N)$. Como φ es un monomorfismo, mientras que π es un epimorfismo, se tiene que $\mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(d_1,N) \cong \mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(j,N)$, de donde

$$H^1(\mathrm{Hom}_A(T_*,N)) \cong \mathrm{Hom}_A(L,N)/\mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(j,N) \cong \mathrm{Coker}\,\mathrm{Hom}_A(j,N) \cong \mathrm{Ext}^1_A(M,N).$$

□

La observación base de la teoría de inclinación es que, si T_A es un A-módulo inclinante y $B = \operatorname{End} T_A$, entonces ${}_BT$ es un B^{op}-módulo inclinante. Esto hace simétricos los papeles de A y B.

Lema 4.2. *Sean A un álgebra, T un A-módulo inclinante y $B = \operatorname{End} T_A$. Entonces ${}_BT$ es un B^{op}-módulo inclinante y la aplicación $a \mapsto (t \mapsto ta)$ es un isomorfismo $A \xrightarrow{\cong} (\operatorname{End} {}_BT)^{op}$.*

Demostración. A fin de probar que ${}_BT$ es inclinante, verificamos los axiomas.

(T_1) Como T_A es inclinante, existe una sucesión exacta corta $0 \to A_A \to T' \to T'' \to 0$ con $T', T'' \in \operatorname{add} T$. Entonces $\operatorname{Hom}_A(-, {}_BT_A)$ induce una sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(T'', {}_BT_A) \to \operatorname{Hom}_A(T', {}_BT_A) \to \operatorname{Hom}_A(A, {}_BT_A) \to 0.$$

Como $\operatorname{Hom}_A(A, {}_BT_A) \cong {}_BT$ y $\operatorname{Hom}_A(T, {}_BT_A) \cong {}_BB$, se obtiene que $\operatorname{dp}_B T \leq 1$.

(T_2) Observemos que $D({}_BT) \cong D({}_BT \otimes_A A) \cong \operatorname{Hom}_A(T, DA)$, donde el último isomorfismo resulta de la adjunción. Como $DA \in \mathscr{T}(T)$ se tiene, en virtud de (4.1)(b)

$$\operatorname{Ext}^1_B(DT, DT) \cong \operatorname{Ext}^1_B(\operatorname{Hom}_A(T, DA), \operatorname{Hom}_A(T, DA)) \cong \operatorname{Ext}^1_A(DA, DA) = 0.$$

Por lo tanto $\operatorname{Ext}^1_{B^{op}}(T, T) = 0$.

(T_3) Dado que $\operatorname{dp} T_A \leq 1$, se tiene una resolución proyectiva de la forma $0 \to P_1 \to P_0 \to T \to 0$. Entonces $\operatorname{Hom}_A(-, {}_BT_A)$ induce una sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(T, {}_BT_A) \to \operatorname{Hom}_A(P_0, {}_BT_A) \to \operatorname{Hom}_A(P_1, {}_BT_A) \to 0$$

dado que $\operatorname{Ext}^1_A(T, T) = 0$. La conclusión resulta de los isomorfismos $\operatorname{Hom}_A(T, {}_BT) \cong {}_BB$ y $\operatorname{Hom}_A(A, {}_BT_A) \cong {}_BT$.

Esto establece que ${}_BT$ es inclinante.

Para $a \in A$, la aplicación $\rho_a : t \mapsto ta$ es un endomorfismo de ${}_BT$. Por otro lado, la aplicación $\varphi : a \mapsto \rho_a$ es un morfismo de álgebras $A \xrightarrow{\cong} (\operatorname{End} {}_BT)^{op}$. Si $a \in \operatorname{Ker} \varphi$, entonces $Ta = 0$, de donde $a = 0$, pues todo módulo inclinante es fiel. Así, φ es inyectivo. Como, además, $DA \in \mathscr{T}$ y $DT \cong \operatorname{Hom}_A(T, DA)$, resulta de (4.1)(a) que hay isomorfismos de grupos abelianos $A \cong \operatorname{End} DA \cong \operatorname{End} \operatorname{Hom}_A(T, DA) \cong \operatorname{End} DT \cong \operatorname{End} T$. Luego φ es un isomorfismo. $\square$

Corolario 4.3. *Sean A un álgebra, T un A-módulo inclinante y $B = \operatorname{End} T_A$. Entonces los centros $\mathscr{Z}(A)$ y $\mathscr{Z}(B)$ son isomorfos. En particular, B es un álgebra conexa.*

Demostración. Se define $\varphi : \mathscr{Z}(A) \to \mathscr{Z}(B)$ por $a \mapsto (\rho_a : t \mapsto ta)$. En efecto, si $a \in \mathscr{Z}(A)$, entonces $\rho_a \in \operatorname{End} T_A = B$ dado que, para todo $t \in T$ y $c \in A$, se tiene que

$$\rho_a(tc) = (tc)a = (ta)c = \rho_a(t)c.$$

Por otro lado, ρ_a es central, pues si $f \in \operatorname{End} T_A$ entonces se tiene, para todo $t \in T$,

$$(\rho_a f)(t) = f(t)a = f(ta) = (f\rho_a)(t).$$

Para construir la inversa, identificamos A con $(\operatorname{End} {}_BT)^{op}$ por el morfismo $a \mapsto \rho_a$ de (4.2) y definimos $\psi : \mathscr{Z}(B) \to \mathscr{Z}(A)$ por $b \mapsto (\lambda_b : t \mapsto bt)$. Es claro que ψ es un morfismo de álgebras. Sea $a \in \mathscr{Z}(A)$. Entonces $\psi\varphi(a) = \lambda_{\rho_a}$ está definido por $t \mapsto \rho_a(t) = ta$, es decir por el elemento $a \in A$ identificado a $\rho_a \in (\operatorname{End} {}_BT)^{op}$. Así, $\psi\varphi(a) = a$ para todo $a \in \mathscr{Z}(A)$. De la misma manera se prueba que $\varphi\psi = id_{\mathscr{Z}(B)}$. $\square$

Corolario 4.4. *Sean A un álgebra, T un A-módulo inclinante y $B = \operatorname{End} T_A$. Entonces T_A induce un par de torsión $(\mathscr{X}(T_A), \mathscr{Y}(T_A))$ en $\operatorname{mod} B$, donde $\mathscr{X}(T_A) = D\mathscr{F}({}_BT) = \{X_B \mid X \otimes_B T = 0\}$ e $\mathscr{Y}(T_A) = D\mathscr{T}({}_BT) = \{Y_B \mid \operatorname{Tor}_1^B(Y,T) = 0\}$.*

Demostración. Por (4.2) y (II.3.5), el módulo inclinante ${}_BT$ induce un par de torsión $(\mathscr{T}({}_BT), \mathscr{F}({}_BT))$ en $\operatorname{mod} B^{op}$, donde

$$\mathscr{T}({}_BT) = \{{}_BU \mid \operatorname{Ext}^1_{B^{op}}(T,U) = 0\} \text{ y } \mathscr{F}({}_BT) = \{{}_BV \mid \operatorname{Hom}_{B^{op}}(T,V) = 0\}.$$

Definimos entonces el par de torsión $(\mathscr{X}(T_A), \mathscr{Y}(T_A))$ en $\operatorname{mod} B$ por $\mathscr{X}(T_A) = D\mathscr{F}({}_BT)$ e $\mathscr{Y}(T_A) = D\mathscr{T}({}_BT)$. Así, $X_B \in \mathscr{X}(T_A)$ si y solamente si $DX \in \mathscr{F}({}_BT)$, es decir,

$$X \otimes_B T \cong D\operatorname{Hom}_B(X, DT) \cong D\operatorname{Hom}_{B^{op}}(T, DX) = 0.$$

Asimismo, $Y_B \in \mathscr{Y}(T_A)$ si y solamente si $DY \in \mathscr{T}({}_BT)$, es decir,

$$\operatorname{Tor}_1^B(Y,T) \cong D\operatorname{Ext}^1_B(Y, DT) \cong D\operatorname{Ext}^1_{B^{op}}(T, DY) = 0.$$

Los isomorfismos funtoriales utilizados resultan de [CE] p. 120, [Ro] (9.51) p. 257 ó [A] (IX.4.2) p. 259. □

Un $B-A$-bimódulo T determina el par de funtores adjuntos $\operatorname{Hom}_A(T,-) : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} B$ y $- \otimes_B T : \operatorname{mod} B \to \operatorname{mod} A$. Ahora bien, T puede considerarse también como $A^{op} - B^{op}$-bimódulo, determinando el par de funtores adjuntos $\operatorname{Hom}_{B^{op}}(T,-) : \operatorname{mod} B^{op} \to \operatorname{mod} B$ y $- \otimes_{A^{op}} T = T \otimes_A : \operatorname{mod} A^{op} \to \operatorname{mod} B^{op}$. Nos será de gran utilidad el hecho que la counidad δ de la adjunción asociada al primer par y la unidad ε de la adjunción asociada al segundo par son duales, en el sentido que para cada $X \in \operatorname{mod} B$ existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\delta_X"] \arrow[d, "\gamma_X"'] & \operatorname{Hom}_A(T, X \otimes_B T) \arrow[d, "\theta_X"] \\ D^2X \arrow[r, "D\varepsilon_{DX}"] & D(T \otimes_A \operatorname{Hom}_{B^{op}}(T, DX)) \end{tikzcd}$$

donde θ_X es un isomorfismo funtorial, y $\gamma_X : X \to D^2X$ es el isomorfismo dado por la evaluación: $\gamma_X(x)(f) = f(x)$, para $x \in X, f \in DX$.

Para definir θ_X comenzamos recordando que, como T es un $B-A$-bimódulo, hay un isomorfismo de funtores $\eta : - \otimes_B T \to D\operatorname{Hom}_{B^{op}}(T, D-)$ definido por $\eta_X(x \otimes t)(f) = f(t)(x)$, para X en $\operatorname{mod} B$, $x \in X$, $t \in T$ y $f \in \operatorname{Hom}_{B^{op}}(T, DX)$ (ver [CE] (VI.5.3) p.120, [Ro] (9.51) p.257 ó [A] (IX.4.12) p. 259).

Considerando a T como $A^{op} - B^{op}-$bimódulo, notamos $\mu : T \otimes_A - \to D\operatorname{Hom}_A(T, D-)$ al isomorfismo definido de la misma manera.

Definimos el morfismo funtorial $\theta : \operatorname{Hom}_A(T, - \otimes_B T) \to D(T \otimes_A \operatorname{Hom}_{B^{op}}(T, D-))$ como la composición $\theta = D\mu.\gamma.\operatorname{Hom}_A(T, \eta)$. Así, para cada $X \in \operatorname{mod} B$, θ_X es la composición

$$\operatorname{Hom}_A(T, X \otimes_B T) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(T,\eta_X)} \operatorname{Hom}_A(T, D\operatorname{Hom}_{B^{op}}(T, DX))$$

$$\xrightarrow{\gamma_{\operatorname{Hom}_A(T, D\operatorname{Hom}_{B^{op}}(T,DX))}} D^2\operatorname{Hom}_A(T, D\operatorname{Hom}_{B^{op}}(T, DX))$$

$$\xrightarrow{D\mu_{\mathrm{Hom}_{B^{op}}(T,DX)}} D(T\otimes_A \mathrm{Hom}_{B^{op}}(T,DX)).$$

Lema 4.5. *Con las notaciones anteriores, θ_X es un isomorfismo tal que el diagrama anterior conmuta, es decir $\theta_X\delta_X = D(\varepsilon_{DX})\gamma_X$. En particular, δ_X es un isomorfismo si y sólo si ε_{DX} lo es.*

Demostración. Sabemos que μ, γ y η son isomorfismos funtoriales. Por lo tanto θ también lo es. Probaremos ahora que $\theta_X\delta_X = D(\varepsilon_{DX})\gamma_X$.

Sea $x\in X$, $t\in T$ y $f\in \mathrm{Hom}_B(T,X)$. Comenzamos evaluando el miembro de la derecha:

$$\begin{aligned}(D\varepsilon_{DX}\gamma_X(x))(t\otimes f) &= \gamma_X(x)(\varepsilon_{DX}(t\otimes f))\\ &= \varepsilon_{DX}(t\otimes f)(x) = f(t)(x).\end{aligned}$$

Ahora evaluamos el miembro de la izquierda

$$\begin{aligned}(\theta_X\delta_X)(x)(t\otimes f) &= (D\mu_{\mathrm{Hom}_{B^{op}}(T,DX)}\gamma_{\mathrm{Hom}_A(T,D\,\mathrm{Hom}_{B^{op}}(T,DX))}\mathrm{Hom}_A(T,\eta_X)\delta_X(x))(t\otimes f)\\ &= \gamma_{\mathrm{Hom}_A(T,D\,\mathrm{Hom}_{B^{op}}(T,DX))}(\eta_X\delta_X(x))\mu_{\mathrm{Hom}_B(T,X)}(t\otimes f)\\ &= \mu_{\mathrm{Hom}_B(T,X)}(t\otimes f)(\eta_X\delta_X(x))\\ &= \eta_X\delta_X(x)(t)(f)\\ &= \eta_X(t\otimes x)(f)\\ &= f(t)(x).\end{aligned}$$

Luego, los dos miembros coinciden, probando lo deseado. □

En lo que sigue será de gran utilidad el hecho que, si T_A es un A-módulo inclinante y $B=\mathrm{End}\,T_A$, entonces ${}_BT$ es un B^{op}-módulo inclinante, probado en (4.2).

Lema 4.6. *Sean A un álgebra, T un A-módulo inclinante y $B=\mathrm{End}\,T_A$. Entonces $Y\in\mathscr{Y}(T_A)$, si y sólo si el morfismo funtorial $\delta_Y: Y\to \mathrm{Hom}_A(T,Y\otimes_B T)$ definido por $y\mapsto (t\mapsto y\otimes t)$ es un isomorfismo.*

Demostración. El resultado se obtiene por dualidad utilizando (3.7). En efecto, $Y_B\in\mathscr{Y}(T_A)$ si y sólo si $DY\in\mathscr{T}({}_BT)$. Como ${}_BT$ es inclinante, resulta de (3.7) que esto equivale a decir que $\varepsilon_{DY}:\mathrm{Hom}_{B^{op}}(T,DY)\otimes_{A^{op}}T\to DY$ es biyectiva, y sabemos por lo arriba demostrado que esto vale si y sólo si $\delta_Y: Y\to\mathrm{Hom}_A(T,Y\otimes_B T)$ es un isomorfismo. □

Estamos ahora en condiciones de probar el teorema principal de esta sección (y de este capítulo), el teorema de inclinación.

Teorema 4.7. *Sean A un álgebra, T un A-módulo inclinante y $B=\mathrm{End}\,T_A$. Entonces:*

(a) *Los funtores $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ y $-\otimes_B T$ inducen equivalencias cuasi-inversas entre $\mathscr{T}(T)$ e $\mathscr{Y}(T)$.*

(b) *Los funtores $\mathrm{Ext}^1_A(T,-)$ y $\mathrm{Tor}^B_1(-,T)$ inducen equivalencias cuasi-inversas entre $\mathscr{F}(T)$ y $\mathscr{X}(T)$.*

Demostración. (a) Comenzamos probando que si $Y\in\mathscr{Y}(T_A)$ entonces $Y\otimes_B T\in\mathscr{T}(T_A)$. Sea $Y\in\mathscr{Y}(T)$. Sabemos que existe un epimorfismo $B^m\to Y$, con $m>0$, y por lo tanto un epimorfismo $T_A^m\cong B^m\otimes_B T_A\to Y\otimes_B T$. Por lo tanto $Y\otimes_B T\in \mathrm{Gen}\,T_A=\mathscr{T}(T_A)$.

Sea $M\in\mathscr{T}(T_A)$. Probaremos que $\mathrm{Hom}_A(T,M)\in\mathscr{Y}(T_A)$ por dualidad, teniendo en cuenta que ${}_BT$ es un módulo inclinante y que $A\cong(\mathrm{End}\,{}_BT)^{op}$ por (4.2). Como $M\in\mathscr{T}(T_A)$, entonces

$DM \in \mathscr{Y}({}_BT)$, de donde $T \otimes_A DM \in \mathscr{T}({}_BT)$, por lo que acabamos de demostrar. Luego $\mathrm{Hom}_A(T,M) \cong D(T \otimes_A DM) \in \mathscr{Y}(T_A)$, lo que prueba lo deseado.

Ya sabemos que $\mathrm{Hom}_A(T,M) \otimes_B T \cong M$, para $M \in \mathscr{T}(T_A)$, por (3.7). Por otro lado, usando (4.6) tenemos que $Y \cong \mathrm{Hom}_A(T, Y \otimes_B T)$, para $Y \in \mathscr{Y}(T_A)$, lo que termina la demostración de (a).

(b) Sea $N \in \mathscr{F}(T_A)$. Existe una sucesión exacta corta

$$0 \to N \to I \to M \to 0$$

con I inyectivo. Entonces $I, M \in \mathscr{T}(T_A)$. Como $\mathrm{Hom}_A(T,N) = 0$ y $\mathrm{Ext}^1_A(T,I) = 0$ se deduce una sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(T,I) \to \mathrm{Hom}_A(T,M) \to \mathrm{Ext}^1_A(T,N) \to 0.$$

En virtud de (a), $M \in \mathscr{T}(T_A)$ implica $\mathrm{Hom}_A(T,M) \in \mathscr{Y}(T_A)$. Esto quiere decir que $\mathrm{Tor}^B_1(\mathrm{Hom}_A(T,M),T)) = 0$ y tenemos entonces un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}^B_1(\mathrm{Ext}^1_A(T,N),T) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(T,I) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_{T_0}"] & \mathrm{Hom}_A(T,M) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_M"] & \mathrm{Ext}^1_A(T,N) \otimes_B T \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & I \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde ε_{T_0}, ε_M son isomorfismos. Se deduce enseguida que $\mathrm{Ext}^1_A(T,N) \otimes_B T = 0$ (de donde $\mathrm{Ext}^1_A(T,N) \in \mathscr{X}(T_A)$), y que $\mathrm{Tor}^B_1(\mathrm{Ext}^1_A(T,N),T) \cong N$.

La recíproca resulta nuevamente por dualidad. Sea $X \in \mathscr{X}(T_A)$. Entonces $DX \in \mathscr{F}({}_BT)$, de donde $\mathrm{Tor}^A_1(\mathrm{Ext}^1_{B^{op}}(T,DX),T) \cong DX$ por lo recién probado. Esto es,

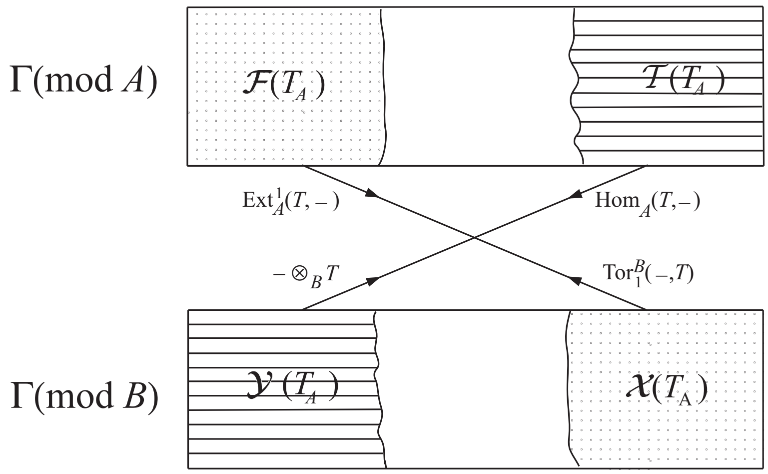
$$X \cong D\mathrm{Tor}^A_1(\mathrm{Ext}^1_{B^{op}}(T,DX),T) \cong \mathrm{Ext}^1_{A^{op}}(\mathrm{Ext}^1_{B^{op}}(T,DX),DT)$$

$$\cong \mathrm{Ext}^1_{A^{op}}(D\mathrm{Tor}^{B^{op}}_1(T,DX),DT) \cong \mathrm{Ext}^1_A(T,\mathrm{Tor}^B_1(X,T)),$$

usando los isomorfismos funtoriales de ([CE] p. 120, [Ro] (9.51) p. 257 ó [A] (IX.4.2) p. 259.). Además, como $DX \in \mathscr{F}({}_BT)$, tenemos que $D\mathrm{Tor}^{B^{op}}_1(T,X) \cong \mathrm{Ext}^1_{B^{op}}(T,DX)$ pertenece a $\mathscr{X}({}_BT)$ por lo recién probado. Entonces $\mathrm{Tor}^{B^{op}}_1(T,X) \in D\mathscr{X}({}_BT) = \mathscr{F}(T_A)$.

$\square$

Es posible visualizar las equivalencias inversas de inclinación en los carcajes de Auslander-Reiten de A y de B. En efecto, en un carcaj de Auslander-Reiten, diseñado de manera tal que los morfismos vayan de izquierda a derecha, una clase de torsión se encuentra siempre "hacia la derecha" del carcaj mientras que la clase sin torsión correspondiente se encuentra "hacia la izquierda". Se obtiene así la figura siguiente, que muestra las clases $\mathscr{T}$ e $\mathscr{Y}$ (representadas por ) y las clases $\mathscr{F}$ y $\mathscr{X}$ (representadas por ) así como las equivalencias inversas.

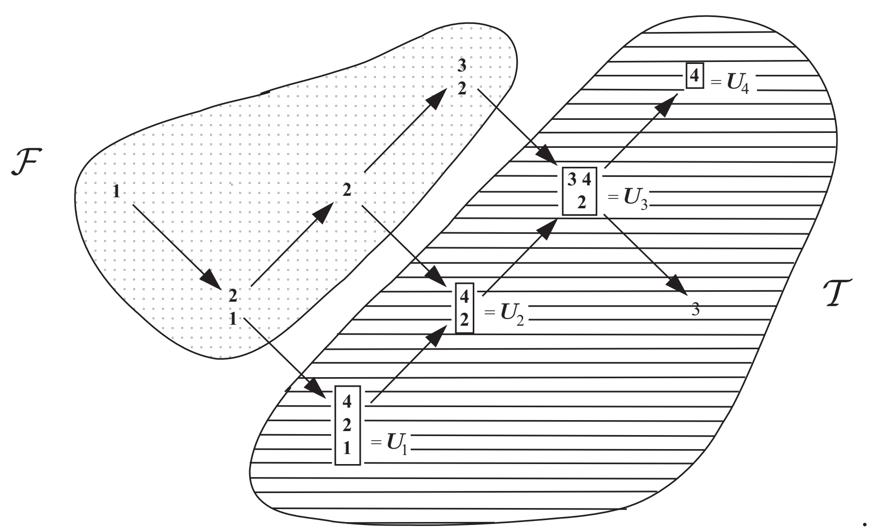


Ejemplo 4.8. (a) Sea, como en (II.3.12)(a), el álgebra A dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd} & 4 \arrow[d, "\gamma"] & \\ 1 & 2 \arrow[l, "\beta"] & 3 \arrow[l, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

ligado por $\alpha\beta = 0$.

(i) Sea $U = \bigoplus_{i=1}^{4} U_i$, donde $U_1 = \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$, $U_2 = \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}$, $U_3 = \begin{smallmatrix} 34 \\ 2 \end{smallmatrix}$ y $U_4 = {\scriptstyle 4}$. En (II.3.12)(a) verificamos que U es inclinante y calculamos el par de torsión $(\mathscr{T}(U_A), \mathscr{F}(U_A))$

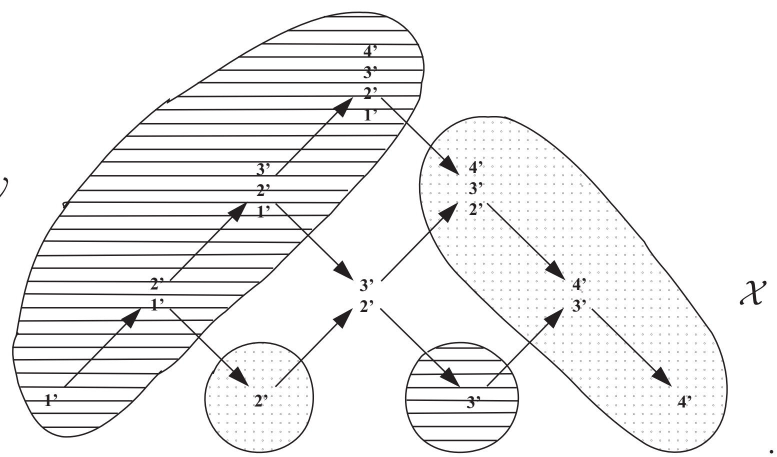


.

Entonces, $B = \operatorname{End} U_A$ está dada por el carcaj

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \longleftarrow & \circ & \longleftarrow & \circ & \longleftarrow & \circ \\ 1' & & 2' & & 3' & & 4' \end{array}$$

sin relaciones. Hemos designado por i' al punto cuyo proyectivo indescomponible correspondiente es $Q_{i'} = \operatorname{Hom}_A(U, U_i)$. Entonces $\Gamma(\operatorname{mod} B)$ está dado por



La acción de los funtores $\operatorname{Hom}_A(U,-)$ y $\operatorname{Ext}^1_A(U,-)$ sobre los A-módulos indescomponibles se calcula directamente. En efecto:

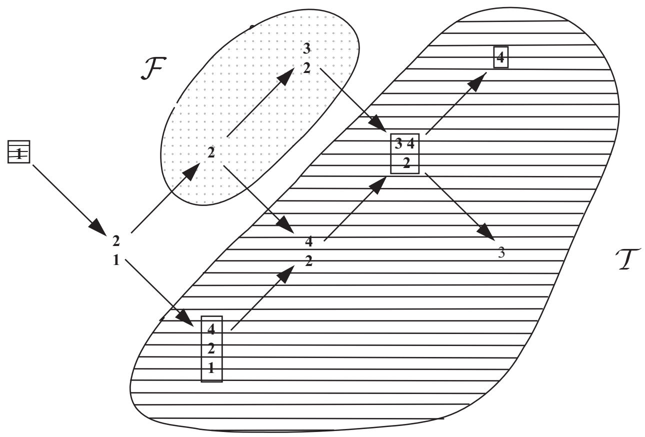
$\operatorname{Hom}_A(U, \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}) = 1'$; $\operatorname{Hom}_A(U, \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix}2'\\1'\end{smallmatrix}$; $\operatorname{Hom}_A(U, \begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix}3'\\2'\\1'\end{smallmatrix}$; $\operatorname{Hom}_A(U, 4) = \begin{smallmatrix}4'\\3'\\2'\\1'\end{smallmatrix}$
y $\operatorname{Hom}_A(U, 3) = 3'$

en tanto que, como $\operatorname{dp} U \leq 1$,

$\operatorname{Ext}^1_A(U, 1) \cong D\operatorname{Hom}_A(1, \tau U) = 2'$; $\operatorname{Ext}^1_A(U, \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}) \cong D\operatorname{Hom}_A(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, \tau U) = \begin{smallmatrix}4'\\3'\\2'\end{smallmatrix}$; $\operatorname{Ext}^1_A(U, 2)$

$\cong D\operatorname{Hom}_A(2, \tau U) = \begin{smallmatrix}4'\\3'\end{smallmatrix}$ y $\operatorname{Ext}^1_A(U, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) \cong D\operatorname{Hom}_A(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}, \tau U) = 4'$.

(ii) Sea $V = \bigoplus_{i=1}^4 V_i$, donde $V_1 = 1$, $V_2 = \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$, $V_3 = \begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix}$ y $V_4 = 4$. En (3.12) verificamos que V es un A-módulo inclinante y calculamos $(\mathscr{T}(V), \mathscr{F}(V))$.



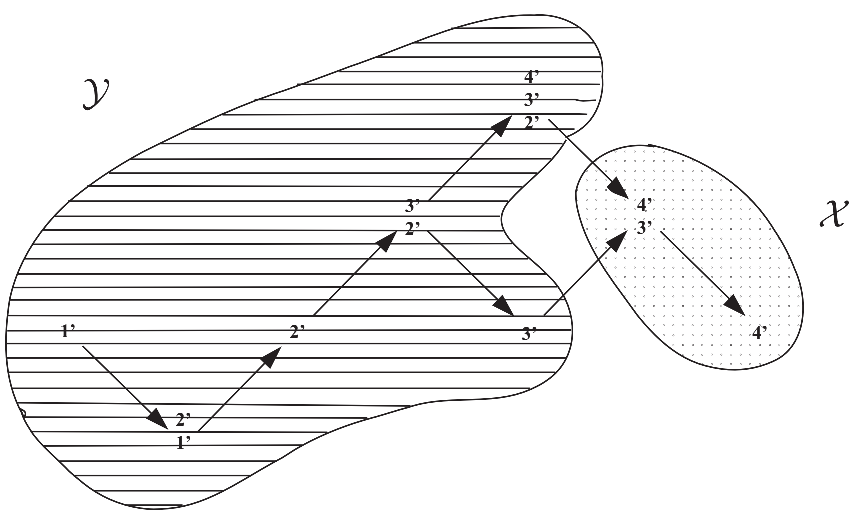
Aquí, B está dada por el carcaj

$$\underset{1'}{\circ} \xleftarrow{\nu} \underset{2'}{\circ} \xleftarrow{\mu} \underset{3'}{\circ} \xleftarrow{\lambda} \underset{4'}{\circ}$$

ligado por la relación $\mu\nu = 0$, donde, para $i \in \{1,2,3,4\}$, se ha designado por i' al punto cuyo proyectivo correspondiente es $Q_{i'} = \mathrm{Hom}_A(V,V_i)$. Así, la relación $\mu\nu = 0$ proviene del hecho que

$$\mathrm{Hom}_A(V_1,V_3) = \mathrm{Hom}_A(1, \substack{34\\2}) = 0.$$

El carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(\mathrm{mod}B)$ de B es



Aquí,

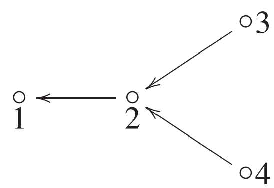
$\mathrm{Hom}_A(V, 1) = 1'$; $\mathrm{Hom}_A(V, \substack{4\\2}) = 2'$; $\mathrm{Hom}_A(V, 4) = \substack{4'\\3'\\2'}$;

$\mathrm{Hom}_A(V, \substack{4\\2\\1}) = \substack{2'\\1'}$; $\mathrm{Hom}_A(V, \substack{34\\2}) = \substack{3'\\2'}$; $\mathrm{Hom}_A(V, 3) = 3'$;

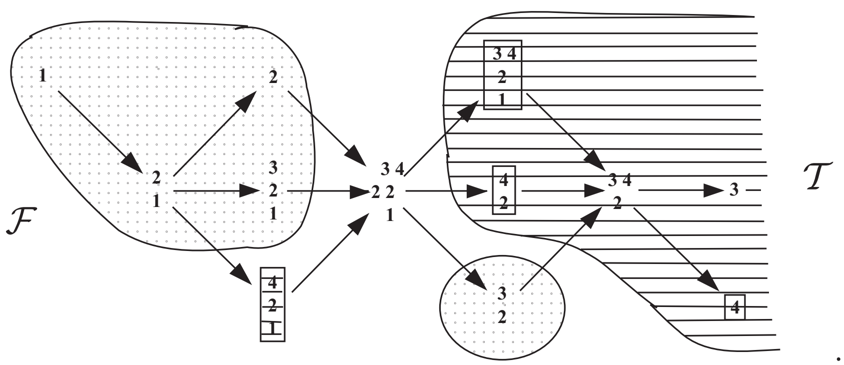
en tanto que, como dp$V \leq 1$,

$\mathrm{Ext}_A^1(V, {\scriptstyle 2}) \cong D\,\mathrm{Hom}_A({\scriptstyle 2}, \tau U) = {\scriptstyle\begin{smallmatrix}4'\\3'\end{smallmatrix}}$; $\mathrm{Ext}_A^1(V, {\scriptstyle\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}}) \cong D\,\mathrm{Hom}_A({\scriptstyle\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}}, \tau U) = {\scriptstyle 4'}$.

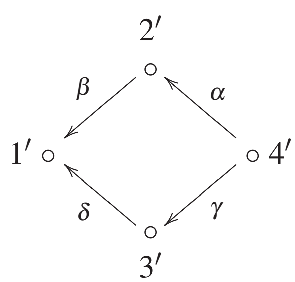
(b) Sea A, como en el Ejemplo (II.3.12)(b), el álgebra de caminos del carcaj



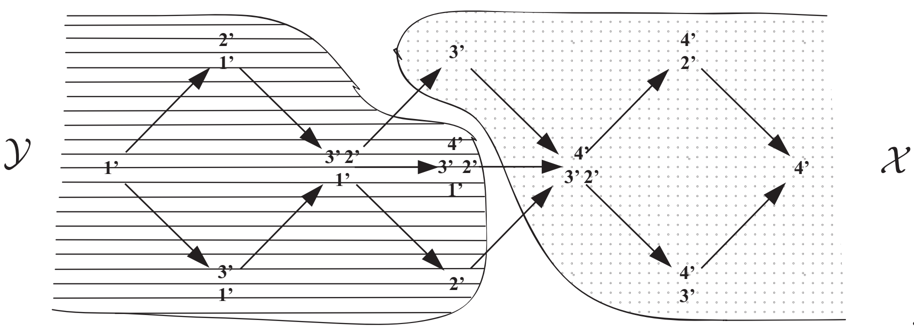
y sea $T = \bigoplus_{i=1}^4 T_i$, donde $T_1 = {\scriptstyle\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}}$, $T_2 = {\scriptstyle\begin{smallmatrix}34\\2\\1\end{smallmatrix}}$, $T_3 = {\scriptstyle\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}}$ y $T_4 = {\scriptstyle 4}$. Hemos verificado que T es un módulo inclinante y hemos calculado el par de torsión $(\mathscr{T}(T_A), \mathscr{F}(T_A))$



Aquí, B está dada por el carcaj



ligado por la relación $\alpha\beta = \gamma\delta$. Una vez más, hemos notado por i' al punto tal que $Q_{i'} = \mathrm{Hom}_A(T, T_i)$. La relación $\alpha\beta = \gamma\delta$ corresponde al hecho que las composiciones ${\scriptstyle\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}} \to {\scriptstyle\begin{smallmatrix}34\\2\\1\end{smallmatrix}} \to 4$ y ${\scriptstyle\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}} \to {\scriptstyle\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}} \to {\scriptstyle 4}$ son iguales (a menos de escalares). El carcaj de Auslander-Reiten de B está dado por



Aquí se tiene

$\mathrm{Hom}_A(T, \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}) = 1'$; $\mathrm{Hom}_A(T, \begin{smallmatrix}34\\2\\1\end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix}2'\\1'\end{smallmatrix}$; $\mathrm{Hom}_A(T, \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix}3'\\1'\end{smallmatrix}$;

$\mathrm{Hom}_A(T, \begin{smallmatrix}34\\2\end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix}3'2'\\1'\end{smallmatrix}$; $\mathrm{Hom}_A(T, 4) = \begin{smallmatrix}4'\\3'2'\\1'\end{smallmatrix}$; $\mathrm{Hom}_A(T, 3) = 2'$, y

$\mathrm{Ext}^1_A(T,1) = 3'$; $\mathrm{Ext}^1_A(T, \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix}4'\\3'2'\end{smallmatrix}$; $\mathrm{Ext}^1_A(T, 2) = \begin{smallmatrix}4'\\2'\end{smallmatrix}$; $\mathrm{Ext}^1_A(T, \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix}4'\\3'\end{smallmatrix}$; $\mathrm{Ext}^1_A(T, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) = 4'$.

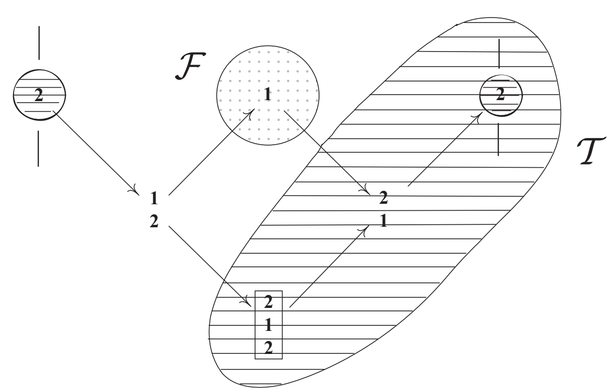
(c) Sea A dada por el carcaj

$$1 \circ \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \circ\, 2$$

ligado por $\alpha\beta = 0$. Consideramos $T_A = \begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus 2$. Entonces $\mathrm{dp}T_A \leq 1$ pues $\begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix}$ es proyectivo y hay una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix} \longrightarrow 2 \longrightarrow 0$$

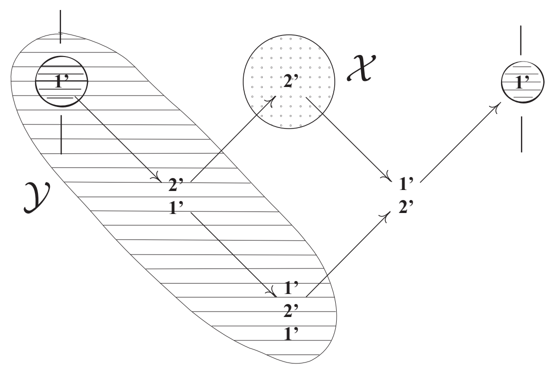
con $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ proyectivo. La misma sucesión da (T_3) (por (II.3.8)). Finalmente $\mathrm{Ext}^1_A(T,T) \cong D\mathrm{Hom}_A(T, \tau_A T) \cong D\mathrm{Hom}_A(T, 1) = 0$. Así, T es un A-módulo inclinante. El carcaj de Auslander-Reiten de A está dado por



donde se identifican las dos copias de 2, y hemos calculado el par de torsión $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$. Aquí, B está dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd} 1' \circ \arrow[r, shift left, "\lambda"] & \circ 2' \arrow[l, shift left, "\mu"] \end{tikzcd}$$

donde $1'$ es tal que $Q_{1'} = \mathrm{Hom}_A(T, \begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix})$ y $2'$ es tal que $Q_{2'} = \mathrm{Hom}_A(T,2)$. Como la composición $2 \to \begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix} \to 2$ es nula, se tiene la relación $\mu\lambda = 0$. El carcaj de Auslander-Reiten de B está dado por



donde se identifican las dos copias de $1'$.

Aquí se tiene

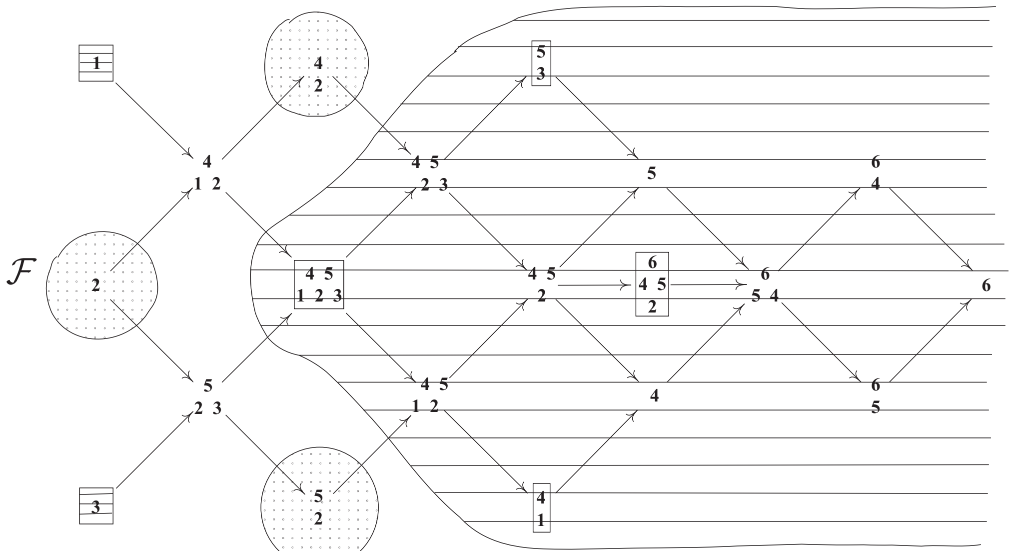
$$\mathrm{Hom}_A(T,2) = \begin{smallmatrix}2'\\1'\end{smallmatrix}; \mathrm{Hom}_A(T, \begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix}1'\\2'\\1'\end{smallmatrix}; \mathrm{Hom}_A(T, \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}) = 1',$$

en tanto que $\mathrm{Ext}^1_A(T,1) \cong D\,\mathrm{Hom}_A(1, \tau T) \cong 2'$, de donde $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ corresponde a lo indicado en la figura.

(d) Sea A dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 1\circ & & \\ & \overset{4}{\circ} \arrow[ul, "\varepsilon"'] \arrow[dl, "\beta"'] & \\ 2\circ & & \circ 6 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\ & \underset{5}{\circ} \arrow[ul, "\delta"] \arrow[dl, "\pi"] & \\ 3\circ & & \end{tikzcd}$$

ligado por $\alpha\varepsilon = 0, \gamma\pi = 0$ y $\alpha\beta = \gamma\delta$. Sea $T = 1 \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}45\\123\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}5\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}6\\45\\2\end{smallmatrix}$. Dejamos al lector la tarea de verificar que T es un módulo inclinante y que el par de torsión $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ está dado por

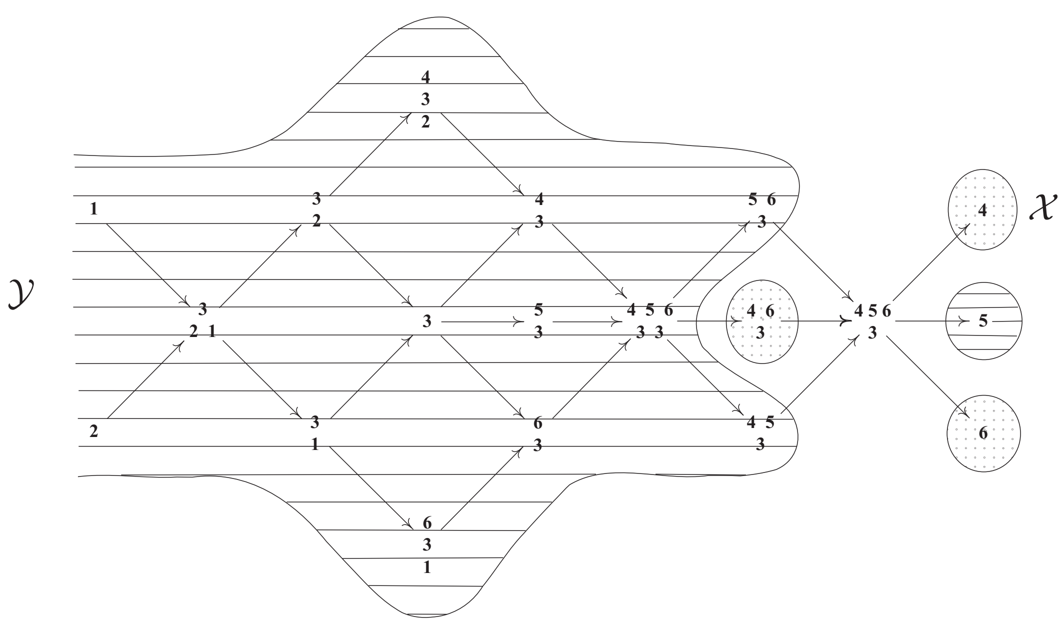


.

Aquí, B está dado por el carcaj

$$
\begin{tikzcd}
1 & & 4 \arrow[dl, "\lambda"'] \\
& 3 \arrow[ul, "\sigma"'] \arrow[dl, "\rho"] & 5 \arrow[l, "\mu"'] \\
2 & & 6 \arrow[ul, "\nu"]
\end{tikzcd}
$$

ligado por $\mu\sigma = 0$, $\mu\rho = 0$, $\lambda\sigma = 0$ y $\nu\rho = 0$. El par de torsión $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ está dado por



.

5. Consecuencias del teorema de inclinación

La primera consecuencia importante del teorema de inclinación es la relación entre las dimensiones globales del álgebra de partida y del álgebra de endomorfismos de un módulo inclinante.

Sea $\mathscr{C}$ una subcategoría plena de una categoría de módulos. Notamos $\mathrm{dp}\mathscr{C}$ al supremo de las dimensiones proyectivas de los módulos de $\mathscr{C}$.

Lema 5.1. *Sean A un álgebra y $\mathscr{C}$ una clase sin torsión de* $\mathrm{mod}A$ *que contiene los proyectivos. Entonces* $\mathrm{dim.gl.}A \leq 1+\mathrm{dp}\mathscr{C}$.

Demostración. Para todo A-módulo M existe una sucesión exacta corta

$$0 \to L \to P \to M \to 0$$

con P proyectivo. Pero entonces $P \in \mathscr{C}$ y, por lo tanto, $L \in \mathscr{C}$. Luego

$$\mathrm{dp}M \leq 1+\mathrm{dp}L \leq 1+\mathrm{dp}\mathscr{C}.$$

□

Lema 5.2. *Sean A un álgebra y T un A-módulo inclinante. Para todo $M \in \mathscr{T}(T)$ se tiene* $\mathrm{dp}\,\mathrm{Hom}_A(T,M) \leq \mathrm{dp}M$.

Demostración. Por recurrencia sobre $n = \mathrm{dp}M$. Si $n = 0$ entonces M es proyectivo. Como $M \in \mathscr{T}(T)$, se tiene que $M \in \mathrm{add}\,T$. En consecuencia, $\mathrm{Hom}_A(T,M)$ es proyectivo y no hay nada que probar. Supongamos $n \geq 1$. Por (II.3.5), existe una sucesión exacta

$$0 \to L \to T_0 \to M \to 0$$

con $T_0 \in \mathrm{add}\,T$ y $L \in \mathscr{T}(T)$. Usando (II.3.6), deducimos una sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(T,L) \to \mathrm{Hom}_A(T,T_0) \to \mathrm{Hom}_A(T,M) \to 0.$$

Sea N un A-módulo arbitrario. El funtor $\mathrm{Hom}_A(-,N)$ aplicado a la primera de las sucesiones precedentes da una sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^n_A(T_0,N) \to \mathrm{Ext}^n_A(L,N) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_A(M,N) = 0$$

(pues $n =$ dp M). Consideramos ahora dos casos. Si $n = 1$, consideremos $N \in \mathscr{T}(T)$. En la sucesión precedente se tiene que $\mathrm{Ext}^1_A(T_0,N) = 0$ y por lo tanto $\mathrm{Ext}^1_A(L,N) = 0$. Luego L es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}(T)$. Por (II.3.5), $L \in \mathrm{add}(T)$. En consecuencia $\mathrm{Hom}_A(T,L)$ es un B-módulo proyectivo y la segunda sucesión exacta da dp $\mathrm{Hom}_A(T,M) \leq 1$.

Si $n > 1$, entonces dp $T_0 \leq 1$ implica que $\mathrm{Ext}^n_A(L,N) = 0$ para todo A-módulo N, de donde $\mathrm{dp}L \leq n-1$. De la hipótesis de recurrencia resulta que dp $\mathrm{Hom}_A(T,L) \leq n-1$ y de la segunda sucesión exacta corta de arriba obtenemos entonces

$$\mathrm{dp}\,\mathrm{Hom}_A(T,M) \leq 1+\mathrm{dp}\,\mathrm{Hom}_A(T,L) \leq n.$$

□

Teorema 5.3. *Sean A un álgebra, T un A-módulo inclinante y $B = \mathrm{End}\,T_A$. Entonces*

$$|\mathrm{dim.gl.}A - \mathrm{dim.gl.}B| \leq 1.$$

Demostración. La clase sin torsión $\mathscr{Y}(T)$ en mod$B$ contiene los proyectivos (en virtud de (II.1.2)(b)). Sea $Y \in \mathscr{Y}(T)$. Por el teorema de inclinación hay un módulo $M \in \mathscr{T}(T)$ tal que $Y \cong \operatorname{Hom}_A(T,M)$. Por (5.2), dp$Y \leq$ dp$M \leq$ dim.gl.A. Por lo tanto dp$\mathscr{Y}(T) \leq$ dim.gl.A. Resulta entonces de (5.1) que

$$\text{dim.gl.}B \leq 1 + \text{dim.gl.}A.$$

Considerando T como un B^{op}-módulo inclinante se tiene también que

$$\text{dim.gl.}A \leq 1 + \text{dim.gl.}B$$

porque $A \cong (\operatorname{End}{}_B T)^{op}$, en virtud de (II.4.2). □

Ejemplo 5.4. En el Ejemplo (II.4.8)(a)(i), tenemos dim.gl.$A = 2$ y dim.gl.$B = 1$. En el Ejemplo (II.4.8)(a)(ii), se tiene dim.gl.$A =$ dim.gl.$B = 2$. Finalmente, en el Ejemplo (II.4.8)(b), se tiene dim.gl.$A = 1$ y dim.gl.$B = 2$.

El cálculo de la dimensión global se realiza más sencillamente construyendo las resoluciones proyectivas de los módulos simples. En efecto, un resultado de M. Auslander dice que, para un álgebra A vale que

$$\text{dim.gl.}A = \sup\{\text{dp}S \,|\, S \,\text{es un}\, A-\text{módulo simple}\}$$

(ver [AuRS](I.5.1) p.17 ó [A] (X.2.8) p. 282). A manera de ejemplo, calcularemos las dimensiones proyectivas de los A-módulos simples para el álgebra A de (II.4.8)(a). Aquí, A está dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd} & \overset{4}{\circ} \arrow[d, "\gamma"] & \\ \underset{1}{\circ} & \underset{2}{\circ} \arrow[l, "\beta"'] & \underset{3}{\circ} \arrow[l, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

ligado por $\alpha\beta = 0$.

Se tienen las siguientes resoluciones proyectivas

$$0 \to {\scriptstyle 1} \to {\scriptstyle 1} \to 0$$

$$0 \to {\scriptstyle 1} \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to {\scriptstyle 2} \to 0$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 0 \arrow[r] & {\scriptstyle 1} \arrow[r] & \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[r] & {\scriptstyle 3} \arrow[r] & 0 \\ & & & {\scriptstyle 2} \arrow[ur, hook] & & & \end{tikzcd}$$

y

$$0 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \to {\scriptstyle 4} \to 0.$$

Por lo tanto, dp $1 = 0,$ dp $2 = 1 =$ dp 4, en tanto que dp $3 = 2$. Luego dim.gl.$A = 2$.

Por otro lado, el proceso de inclinación induce también un isomorfismo entre los grupos de Grothendieck de las álgebras involucradas (ver (I.1))

Teorema 5.5. *Sean A un álgebra, T un A-módulo inclinante y $B = \operatorname{End} T_A$. La aplicación $f : K_0(A) \to K_0(B)$ definida por $M \mapsto \underline{\dim} \operatorname{Hom}_A(T,M) - \underline{\dim} \operatorname{Ext}^1_A(T,M)$ es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. Sea $0 \to L \to M \to N \to 0$ una sucesión exacta corta de A-módulos. Se deduce una sucesión exacta larga

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(T,L) \to \operatorname{Hom}_A(T,M) \to \operatorname{Hom}_A(T,N) \to$$

$$\to \operatorname{Ext}^1_A(T,L) \to \operatorname{Ext}^1_A(T,M) \to \operatorname{Ext}^1_A(T,N) \to 0.$$

Resulta entonces de la definición de f y de las de $K_0(A)$ y $K_0(B)$, que f está bien definida y es un homomorfismo de grupos.

Sea S un B-módulo simple. Como $(\mathscr{X}(T), \mathscr{Y}(T))$ es un par de torsión tenemos que, o bien $S \in \mathscr{X}(T)$, o bien $S \in \mathscr{Y}(T)$. En el primer caso, $S \cong \operatorname{Hom}_A(T, S \otimes_B T)$ y $\operatorname{Ext}^1_A(T, S \otimes_B T) = 0$. En el segundo, $S \cong \operatorname{Ext}^1_A(T, \operatorname{Tor}^B_1(S,T))$, mientras que $\operatorname{Hom}_A(T, \operatorname{Tor}^B_1(S,T)) = 0$, en virtud del teorema de inclinación. En ambos casos, $\underline{\dim} S$ pertenece a la imagen de f. Luego f es sobreyectiva y por consiguiente el rango rg $K_0(A)$ de $K_0(A)$ es mayor o igual que el de $K_0(B)$. Como ${}_BT$ es también inclinante obtenemos que rg $K_0(B) \geq$ rg $K_0(A)$. □

El resultado más importante de esta sección, debido a Bongartz, es una consecuencia de (5.5), y facilita mucho la tarea de determinar si un módulo dado es inclinante o no.

Corolario 5.6. *Sea $T = T_1^{n_1} \oplus T_2^{n_2} \oplus \cdots \oplus T_t^{n_t}$ con los T_i indescomponibles y tales que $T_i \ncong T_j$ para $i \neq j$. Entonces T es un A-módulo inclinante si y sólo si T es inclinante parcial y verifica*

$(\mathrm{T}_{3'})$ $t = \operatorname{rg} K_0(A)$.

Demostración. Necesidad. Si T es inclinante, entonces es inclinante parcial y, además, $t =$ rg $K_0(B)$ (por (II.1.2)(b) y (5.5)). Pero entonces (5.5) implica $(\mathrm{T}_{3'})$.

Suficiencia. Si T es inclinante parcial, resulta de (II.3.2) que existe un módulo E tal que $T \oplus E$ es inclinante. En virtud de $(\mathrm{T}_{3'})$, el número de sumandos indescomponibles no isomorfos de $T \oplus E$, que es igual al rango de $K_0(A)$, debe también coincidir con t. Por lo tanto, $E \in \operatorname{add} T$, de donde T es inclinante. □

El resultado siguiente, conocido como *Lema de Skowroński*, puede verse como una generalización de (5.6) y es de importancia capital por sus aplicaciones.

Corolario 5.7. *Sea $T = T_1^{n_1} \oplus T_2^{n_2} \oplus \cdots \oplus T_t^{n_t}$ con los T_i indescomponibles y tales que $T_i \ncong T_j$ para $i \neq j$. Si $\operatorname{Hom}_A(T, \tau T) = 0$ (ó, dualmente, $\operatorname{Hom}_A(\tau^{-1} T, T) = 0$), entonces $t \leq \operatorname{rg} K_0(A)$.*

Demostración. Sea I el anulador de T y $B = A/I$. Puede demostrarse (ver [AuRS], Exercise (II.5), p. 186-187) que el trasladado de Auslander-Reiten $\tau_B T$ de T en mod$B$ es un A-submódulo del trasladado $\tau_A T$ de T en mod$A$. Por lo tanto $\operatorname{Hom}_A(T, \tau_A T) = 0$ implica $\operatorname{Hom}_B(T, \tau_B T) = 0$. Como T_B es fiel, resulta de (II.2.7) que es inclinante parcial. En virtud del Lema de Bongartz (II.3.2), existe un B-módulo E tal que $T \oplus E$ es inclinante en mod$B$. Luego t no supera el número de sumandos indescomponibles no isomorfos de $T \oplus E$, que es igual, por (5.6), al rango de $K_0(B)$. Como $\operatorname{rg} K_0(B) \leq \operatorname{rg} K_0(A)$, se deduce que $t \leq \operatorname{rg} K_0(A)$. □

Si, en particular, T es un módulo inclinante parcial, entonces el número de clases de isomorfismo de sumandos indescomponibles de T no puede superar el rango de $K_0(A)$.

El lema siguiente, llamado "lema de conexión", dice qué ocurre en la "frontera" entre $\mathscr{X}(T)$ e $\mathscr{Y}(T)$.

Lema 5.8. *Sean A un álgebra, T un A - módulo inclinante y $B = \operatorname{End} T_A$. Sean P_A un proyectivo indescomponible e I_A un inyectivo indescomponible tales que* $\operatorname{soc} I = P/\operatorname{rad} P$. *Entonces*

$$\tau^{-1}\operatorname{Hom}_A(T,I) \cong \operatorname{Ext}_A^1(T,P).$$

En particular, $P \in \operatorname{add} T$ si y sólo si $\operatorname{Hom}_A(T,I)$ es un B - módulo inyectivo.

Demostración. Como T es un módulo inclinante, existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow T' \xrightarrow{f} T'' \longrightarrow 0$$

con T', $T''\in \operatorname{add} T$. Aplicando $\operatorname{Hom}_A(-,T)$ obtenemos una resolución proyectiva del B^{op}-módulo $\operatorname{Hom}_A(P,T)$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A\left(T'',T\right) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A\left(T',T\right) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(P,T) \longrightarrow 0.$$

Por otra parte, existe un isomorfismo funtorial

$$\operatorname{Hom}_A(T,T_0) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_{B^{op}}(\operatorname{Hom}_A(T_0,T),\operatorname{Hom}_A(T,T))$$

dado por $u \longmapsto \operatorname{Hom}_A(u,T)$: en efecto, es un isomorfismo cuando $T_0 = T$ y los funtores son aditivos. Entonces el cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{B^{op}}(\operatorname{Hom}_A(T',T),\operatorname{Hom}_A(T,T)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\operatorname{Hom}_{B^{op}}(\operatorname{Hom}_A(f,T),\operatorname{Hom}_A(T,T))"'] & \operatorname{Hom}_A(T,T') \arrow[d, "\operatorname{Hom}_A(T,f)"] \\
\operatorname{Hom}_{B^{op}}(\operatorname{Hom}_A(T'',T),\operatorname{Hom}_A(T,T)) \arrow[r, "\cong"] & \operatorname{Hom}_A(T,T'')
\end{tikzcd}$$

y la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,P) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A\left(T,T'\right) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(T,f)} \operatorname{Hom}_A\left(T,T''\right) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^1(T,P) \longrightarrow 0$$

muestran que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ext}_A^1(T,P) &\cong \operatorname{Coker}\operatorname{Hom}_A(T,f) \\
&\cong \operatorname{Coker}\operatorname{Hom}_{B^{op}}(\operatorname{Hom}_A(f,T),B) \\
&\cong Tr\operatorname{Hom}_A(P,T).
\end{aligned}$$

Por (I.1.2), tenemos que $\operatorname{Hom}_A(P,T) \cong D\operatorname{Hom}_A(T,I)$, de donde

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ext}_A^1(T,P) &\cong TrD\operatorname{Hom}_A(T,I) \\
&= \tau^{-1}\operatorname{Hom}_A(T,I).
\end{aligned}$$

El último enunciado sigue del hecho que un módulo proyectivo P está en $\operatorname{add} T$ si y sólo si está en $\mathscr{T}(T) = \operatorname{Gen} T$, si y sólo si $\operatorname{Ext}_A^1(T,P) = 0$. $\square$

Corolario 5.9. *Sean A un álgebra, T un A - módulo inclinante y $B = \operatorname{End} T_A$. Sean I un A - módulo inyectivo y M un A - módulo arbitrario. Entonces, para cada $i > 0$, tenemos*

$$\operatorname{Ext}^i_B(\operatorname{Hom}_A(T,M), \operatorname{Hom}_A(T,I)) = 0.$$

Demostración. Sea

$$\ldots P_t \xrightarrow{f_t} \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} \operatorname{Hom}_A(T,M) \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva de $\operatorname{Hom}_A(T,M)$ en mod$B$, y ponemos $K_i = \operatorname{Im} f_i$ para cada $i \geq 0$. Como todos los B - módulos proyectivos están en la clase sin torsión $\mathscr{Y}(T)$, entonces $K_i \in \mathscr{Y}(T)$ para cada i. Ahora, empleando la fórmula de Auslander-Reiten y el lema de conexión (II.5.8) tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ext}^i_B(\operatorname{Hom}_A(T,M), \operatorname{Hom}_A(T,I)) &\cong \operatorname{Ext}^1_B(K_{i-1}, \operatorname{Hom}_A(T,I)) \\
&\cong D\, \underline{\operatorname{Hom}}_B\left(\tau^{-1}\operatorname{Hom}_A(T,I), K_{i-1}\right) \\
&\cong D\, \underline{\operatorname{Hom}}_B\left(\operatorname{Ext}^1_A(T,P), K_{i-1}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

porque $K_{i-1} \in \mathscr{Y}(T)$ y $\operatorname{Ext}^1_A(T,P) \in \mathscr{X}(T)$, como se deduce fácilmente aplicando $\operatorname{Hom}_A(T,-)$ a la sucesión canónica para M respecto del par de torsión $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$. □

Terminaremos esta sección con un teorema, debido a Hoshino, que permite determinar si un par de torsión asociado a un módulo inclinante se escinde.

Lema 5.10. *Sean A un álgebra y T un A-módulo inclinante. Si $M \in \mathscr{T}(T)$ y $N \in \mathscr{F}(T)$, se tiene*

$$\operatorname{Ext}^2_A(M,N) \cong \operatorname{Ext}^1_B(\operatorname{Hom}_A(T,M), \operatorname{Ext}^1_A(T,N)).$$

Demostración. Sea $0 \to N \to I \to N' \to 0$ una sucesión exacta corta , con I inyectivo. Como $N \in \mathscr{F}(T)$, se deduce una sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(T,I) \to \operatorname{Hom}_A(T,N') \to \operatorname{Ext}^1_A(T,N) \to 0.$$

El funtor $\operatorname{Hom}_B(\operatorname{Hom}_A(T,M),-)$ induce una sucesión exacta

$$\begin{gathered}
\operatorname{Ext}^1_B(\operatorname{Hom}_A(T,M), \operatorname{Hom}_A(T,I)) \to \operatorname{Ext}^1_B(\operatorname{Hom}_A(T,M), \operatorname{Hom}_A(T,N')) \to \\
\to \operatorname{Ext}^1_B(\operatorname{Hom}_A(T,M), \operatorname{Ext}^1_A(T,N)) \to \operatorname{Ext}^2_B(\operatorname{Hom}_A(T,M), \operatorname{Hom}_A(T,I)).
\end{gathered}$$

En virtud del Corolario 5.9, y como $I \in \mathscr{T}(T)$, tenemos que

$$\operatorname{Ext}^1_B(\operatorname{Hom}_A(T,M), \operatorname{Hom}_A(T,I)) = 0$$

y

$$\operatorname{Ext}^2_B(\operatorname{Hom}_A(T,M), \operatorname{Hom}_A(T,I)) = 0.$$

Por lo tanto, como $N' \in \mathscr{T}(T)$,

$$\begin{gathered}
\operatorname{Ext}^1_B(\operatorname{Hom}_A(T,M), \operatorname{Ext}^1_A(T,N)) \cong \\
\operatorname{Ext}^1_B(\operatorname{Hom}_A(T,M), \operatorname{Hom}_A(T,N')) \cong \operatorname{Ext}^1_A(M,N') \cong \operatorname{Ext}^2_A(M,N).
\end{gathered}$$

□

Teorema 5.11. *Sean A un álgebra y T un A-módulo inclinante. Entonces*
(a) $(\mathscr{X}(T), \mathscr{Y}(T))$ *se escinde si y sólo si* di $\mathscr{F}(T) \leq 1$.
(B) $(\mathscr{T}(T), \mathscr{F}(T))$ *se escinde si y sólo si* dp $\mathscr{X}(T) \leq 1$.

Demostración. Probaremos (a). La prueba de (b) es similar.

Supongamos en efecto que el par $(\mathscr{X}(T), \mathscr{Y}(T))$ se escinde. En particular, $\mathrm{Ext}_B^1(Y, X) = 0$ para todo $Y \in \mathscr{Y}(T)$ y $X \in \mathscr{X}(T)$ (en virtud de (II.2.9).

Sea entonces $N \in \mathscr{F}(T)$. Consideramos una copresentación inyectiva minimal

$$0 \to N \xrightarrow{d^0} I^0 \xrightarrow{d^1} I^1$$

y pongamos $L^0 = \mathrm{Im} d^1$ y $L^1 = \mathrm{Coker} d^1$. Se tiene entonces

$$\mathrm{Ext}_A^1(L^1, L^0) \cong \mathrm{Ext}_A^2(L^1, N) \cong \mathrm{Ext}_B^1(\mathrm{Hom}_A(T, L^1), \mathrm{Ext}_A^1(T, N)) = 0,$$

dado que $\mathrm{Hom}_A(T, L^1) \in \mathscr{Y}(T)$ y $\mathrm{Ext}_A^1(T, N) \in \mathscr{X}(T)$. Entonces la sucesión exacta corta

$$0 \to L^0 \to I^1 \to L^1 \to 0$$

se parte. Luego L^0 es inyectivo. Por lo tanto di $N \leq 1$.

Recíprocamente, supongamos di $\mathscr{F}(T) \leq 1$. Sean $Y \in \mathscr{Y}(T)$ y $X \in \mathscr{X}(T)$. Entonces existen $M \in \mathscr{T}(T)$ y $N \in \mathscr{F}(T)$ tales que $Y \cong \mathrm{Hom}_A(T, M)$ y $X \cong \mathrm{Ext}_A^1(T, N)$ (por el teorema de inclinación). Se tiene entonces

$$\mathrm{Ext}_B^1(Y, X) \cong \mathrm{Ext}_B^1(\mathrm{Hom}_A(T, M), \mathrm{Ext}_A^1(T, N)) \cong \mathrm{Ext}_A^2(M, N) = 0$$

dado que di $N \leq 1$. En virtud de (II.2.9), el par $(\mathscr{X}(T), \mathscr{Y}(T))$ se escinde. $\square$

En particular, si T es un módulo inclinante sobre un álgebra hereditaria A, el par de torsión $(\mathscr{X}(T), \mathscr{Y}(T))$ en mod$B$ siempre es escindido.

CAPITULO III

ALGEBRAS INCLINADAS

1. Algebras inclinadas

De todas las clases de álgebras con las que se trabaja en teoría de representaciones, las álgebras hereditarias son las que más se han estudiado (ver, por ejemplo, el capítulo VIII de [AuRS]). Las álgebras inclinadas forman una clase muy cercana a éstas.

Definición. Un álgebra de artin A se dice *inclinada* si existen un álgebra hereditaria H y un módulo inclinante T_H tales que $A \cong \operatorname{End} T_H$.

En el resto de estas notas supondremos, como en los capítulos anteriores, que las álgebras consideradas son siempre básicas y conexas.

Como asumimos que A es básica, si $T = \oplus_{i=1}^{n} T_i$ es una descomposición del módulo inclinante T en sumandos directos indescomponibles, entonces $T_i \ncong T_j$ para $i \neq j$. Esto sigue de (II.1.2) (b).

Por ejemplo, toda álgebra hereditaria es trivialmente inclinada. Un ejemplo distinto es el álgebra B del ejemplo (II.4.7) (b) dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd} & \overset{2}{\circ} \arrow[dl, "\beta"'] & \\ 1\circ & & \circ 4 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\ & \underset{\circ}{3} \arrow[ul, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

ligado por la relación $\alpha\beta = \gamma\delta$.

Una primera consecuencia sencilla del teorema de inclinación es el lema siguiente.

Lema 1.1. *Un álgebra A es inclinada si y sólo si existe un módulo inclinante T_A tal que $H = \operatorname{End} T_A$ es hereditaria.*

Demostración. Supongamos que A es inclinada. Entonces existen un álgebra hereditaria H y un módulo inclinante U_H tales que $A \cong \operatorname{End} U_H$. Como H es hereditaria, di $U_H \leq 1$ por lo que U_H es coinclinante. En virtud (del dual) de (II.4.2), ${}_AU$ es un A^{op} - módulo inclinante y $H \cong (\operatorname{End} {}_AU)^{op}$. Por consiguiente, el módulo $T_A = D({}_AU)$ es un A - módulo inclinante y $H \cong \operatorname{End} D({}_AU) \cong \operatorname{End} T_A$. La recíproca se prueba en forma análoga. □

En particular, de (1.1) y de (II.4.3) sigue que H es conexa.

Ahora vamos a probar que el carcaj de un álgebra inclinada es acíclico. Para ello utilizaremos el lema siguiente, debido a Happel y Ringel.

Lema 1.2. *Sea H un álgebra hereditaria y T_1, T_2 dos H- módulos indescomponibles tales que $\operatorname{Ext}_H^1(T_2, T_1) = 0$. Entonces todo morfismo no nulo de T_1 a T_2 es un monomorfismo o* *un epimorfismo. En particular, si* T *es indescomponible y* $\mathrm{Ext}_H^1(T,T)=0$*, entonces* End T_H *es un anillo de división.*

Demostración. Supongamos que el morfismo $f:T_1\longrightarrow T_2$ no es ni inyectivo ni sobreyectivo. Sea $f=gh$ su factorización canónica a través de $\mathrm{Im}f$. Entonces la longitud $l(M)$ de $M=\mathrm{Im}\,f$ verifica $l(M)<l(T_1)$ y $l(M)<l(T_2)$. La sucesión exacta corta

$$0\longrightarrow \mathrm{Ker}\,h\longrightarrow T_1\xrightarrow{h} M\longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}_H^1(T_2/M,T_1)\longrightarrow \mathrm{Ext}_H^1(T_2/M,M)\longrightarrow \mathrm{Ext}_H^2(T_2/M,\mathrm{Ker}\,h)=0$$

puesto que H es hereditaria. Se deducen un diagrama conmutativo con filas exactas en mod$H$ como sigue

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & T_1 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & T_2/M & \longrightarrow & 0\\
 & & {\scriptstyle h}\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\| & & \\
0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & T_2 & \longrightarrow & T_2/M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

y la sucesión exacta corta

$$0\longrightarrow T_1\longrightarrow E\oplus M\longrightarrow T_2\longrightarrow 0\,.$$

Como $\mathrm{Ext}_H^1(T_2,T_1)=0$, esta última sucesión se parte. Como $l(M)<l(T_1)$ y $l(M)<l(T_2)$, entonces del Teorema de Krull-Schmidt se deduce que $M=0$ y, por ende, $f=0$. $\square$

Sea A un álgebra de artin y M , N dos A - módulos indescomponibles. Un *camino* en ind$A$ de M a N es una sucesión de morfismos no nulos

$$M=M_0\xrightarrow{f_1}M_1\xrightarrow{f_2}\ \cdots\ \xrightarrow{f_t}M_t=N$$

con cada M_i en ind$A$. Diremos entonces que M es un *predecesor* de N, y que N es un *sucesor* de M. Un tal camino es llamado un *ciclo* si $M\cong N$ y al menos uno de los f_i no es un isomorfismo. Un álgebra se dice *triangular* si no existen ciclos de la forma

$$P_0\longrightarrow P_1\longrightarrow \ldots\longrightarrow P_t=P_0$$

con $P_0,\ldots,P_t$ proyectivos. Esto equivale a decir que el carcaj de A es acíclico (ver [AuRS], pág. 69).

Corolario 1.3. *Toda álgebra inclinada es triangular.*

Demostración. Sea A un álgebra inclinada. Sabemos que existen un álgebra hereditaria H y un módulo inclinante T_H tales que $A\cong \mathrm{End}\ T_H$. Sean T_1', T_2' y T_3' sumandos indescomponibles de T y $f:T_1'\longrightarrow T_2'$, $g:T_2'\longrightarrow T_3'$ morfismos no nulos. No pueden ser simultáneamente f un epimorfismo propio y g un monomorfismo propio: en efecto, en tal caso tendríamos que $gf\neq 0$ y que gf no es ni inyectivo ni sobreyectivo, lo cual contradice (1.2).

Supongamos que A no es triangular. Todo ciclo entre módulos indescomponibles proyectivos induce, en virtud de (II.1.2), un ciclo

$$T_0 \xrightarrow{f_1} T_1 \xrightarrow{f_2} T_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_t} T_t = T_0$$

entre sumandos indescomponibles de T. La observación anterior implica que un ciclo no puede contener un epimorfismo propio seguido de un monomorfismo propio. Luego, todos los f_i son epimorfismos o todos son monomorfismos. Por consiguiente, la composición $f_t \ldots f_1$ es un epimorfismo o un monomorfismo y, por lo tanto, es un isomorfismo. En cualquiera de los dos casos resulta que cada f_i es un isomorfismo, una contradicción. $\square$

Las propiedades siguientes son consecuencia del teorema de inclinación.

Proposición 1.4. *Sea H un álgebra hereditaria, T_H un módulo inclinante y $A = \mathrm{End}\ T_H$. Entonces:*

(a) El par de torsión $(\mathscr{X}(T), \mathscr{Y}(T))$ en $\mathrm{mod}A$ *se escinde.*

(b) $\mathrm{dim.gl.}A \leq 2$ *y, para todo A - módulo indescomponible M, se tiene que* $\mathrm{dp}M \leq 1$ *ó* $\mathrm{di}M \leq 1$.

Demostración. (a) Resulta de (II.5.9).

(b) La primera parte sigue de (II.5.3). Sea M un A - módulo indescomponible. Por (a), tenemos dos casos. Si $M \in \mathscr{Y}(T)$ entonces existe $M' \in \mathscr{T}(T)$ tal que $M \cong \mathrm{Hom}_A(T, M')$ y entonces $\mathrm{dp}M = \mathrm{dp}\,\mathrm{Hom}_A(T, M') \leq \mathrm{dp}M' \leq 1$ (aplicamos (II.5.2)). Si, por el contrario, $M \in \mathscr{X}(T)$ entonces, por (II.5.9), tenemos $\tau^{-1}M \in \mathscr{X}(T)$ mientras que $A_A \in \mathscr{Y}(T)$. Luego, $\mathrm{Hom}_A\left(\tau^{-1}M, A\right) = 0$ y por lo tanto $\mathrm{di}M \leq 1$. $\square$

Una consecuencia inmediata de (a) y de (II.4.6) es que, si H es hereditaria de representación finita, entonces A también es de representación finita. La recíproca no vale, como lo muestra el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1.5. Sea H dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd} & \overset{\circ}{2} \arrow[dl] & \\ 1\circ & & \circ 4 \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & \underset{\circ}{3} \arrow[ul] & \end{tikzcd} .$$

Aquí, H es hereditaria y de representación infinita (ver [AuRS] (VIII.5.4), pág. 293). Consideremos $T_1 = 1$, $T_2 = \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$, $T_3 = \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$, $T_4 = 4$. Es claro que cada uno de estos módulos es indescomponible. Para demostrar que $T = \oplus_{i=1}^{4} T_i$ es inclinante, basta probar que
$\mathrm{Ext}_H^1(T, T) = 0$, ya que H es hereditaria con 4 simples no isomorfos. Para probar este enunciado probamos primero que $\tau T_3 \cong \tau^{-1} T_3 \cong 3$. Para ello construimos una presentación proyectiva minimal de T_3

$$0 \longrightarrow P_3 = {\scriptstyle \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}} \xrightarrow{f} P_4 = {\scriptstyle \begin{smallmatrix} & 4 & \\ 2 & & 3 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix}} \longrightarrow T_3 = {\scriptstyle \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}} \longrightarrow 0\,.$$

Aplicando el funtor de Nakayama $\nu = D\mathrm{Hom}_A(-, A)$ a f, resulta que el núcleo de νf es el núcleo del único morfismo no nulo (a menos de escalares) de I_3 en I_4 , por lo tanto

$$\tau T_3 = \mathrm{Ker}\left({\scriptstyle \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}} \longrightarrow 4 \right) = 3\,.$$

De manera análoga se prueba que $\tau^{-1}T_3 \cong 3$. Por simetría se tiene que $\tau T_2 \cong \tau^{-1}T_2 \cong 2$. Luego, podemos deducir que

$$\mathrm{Ext}^1_H(T_4, T_3) \cong D\mathrm{Hom}_H\left(\tau^{-1}T_3, T_4\right) \cong D\mathrm{Hom}_H(3, 4) = 0$$

y

$$\mathrm{Ext}^1_H(T_3, T_1) \cong D\mathrm{Hom}_H(T_{1,}\tau T_3) \cong D\mathrm{Hom}_H(1, 3) = 0\,.$$

Por simetría, $\mathrm{Ext}^1_H(T_4, T_2) = 0$ y $\mathrm{Ext}^1_H(T_2, T_1) = 0$. Finalmente,

$$\mathrm{Ext}^1_H(T_3, T_2) \cong D\mathrm{Hom}_H(T_2, \tau T_3) \cong D\mathrm{Hom}_H\left({\scriptstyle \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}}, 3 \right) = 0\,,$$

y de manera análoga se prueba que $\mathrm{Ext}^1_H(T_2, T_3) = 0$. Por lo tanto, $\mathrm{Ext}^1_H(T, T) = 0$ y T es un H - módulo inclinante.

El álgebra inclinada A =End T_H está dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dl, "\beta"'] & \\
1 & & 4 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
 & 3 \arrow[ul, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

ligado por las relaciones $\alpha\beta = 0$, $\gamma\delta = 0$. Este álgebra es de representación finita y su carcaj de Auslander-Reiten es

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & 3 \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \arrow[dr] & \\
1 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & \begin{smallmatrix} 2\,3 \\ 1 \end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix} 4 \\ 2\,3 \end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & 4 \\
 & \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & 2 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

en donde las líneas punteadas indican las sucesiones que casi se parten. Observamos que el A - módulo $U_A = {\scriptstyle \begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ & 1 \end{smallmatrix}} \oplus 3 \oplus 2 \oplus {\scriptstyle \begin{smallmatrix} & 4 & \\ 2 & & 3 \end{smallmatrix}}$ es tal que $H \cong \mathrm{End}\, U_A$.

2. Módulos inclinantes convexos.

La definición de álgebra inclinada hace mención a un álgebra hereditaria y a un módulo inclinante sobre ésta. Para verificar si un álgebra dada es inclinada, sería bueno saber cómo construir el álgebra hereditaria y el módulo inclinante en cuestión. Este es el objetivo de esta sección.

Sea A un álgebra de artin. Una subcategoría $\mathscr{C}$ de mod A se dirá *cerrada por predecesores* (o *por sucesores*) si, para todo $M \in \operatorname{ind}\mathscr{C}$, todo predecesor (o sucesor, respectivamente) de M pertenece también a $\mathscr{C}$. Ejemplos de tales subcategorías aparecen en el lema siguiente.

Lema 2.1. *Sea $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ un par de torsión en mod A. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(a) $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ se escinde.
(b) $\mathscr{F}$ es cerrada por predecesores.
(c) $\mathscr{T}$ es cerrada por sucesores.

Demostración. Por dualidad, basta probar la equivalencia entre (a) y (b). Supongamos entonces que $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ se escinde y sea $M \in \mathscr{F}$ indescomponible. Para todo $L \in \operatorname{ind}A$, tenemos que o bien $L \in \mathscr{T}$, o bien $L \in \mathscr{F}$. Si $\operatorname{Hom}_A(L,M) \neq 0$, se debe tener $L \in \mathscr{F}$. Por inducción se prueba inmediatamente que todo predecesor de M pertenece a $\mathscr{F}$. Por lo tanto, (a) implica (b). La recíproca resulta de (II.2.9) ya que, para todo módulo M indescomponible no proyectivo, τM es un predecesor de M . □

Un A - módulo inclinante T_A se dice *separante* si el par de torsión $(\mathscr{T}(T_A),\mathscr{F}(T_A))$ se escinde. Así, (II.3.10)(c) implica que todo módulo inclinante APR es separante. Daremos otro ejemplo, para lo cual recordaremos que un álgebra A es inclinada si y sólo si existe un A - módulo inclinante T_A tal que End T_A es hereditaria (en virtud de (1.1)).

Lema 2.2. *Sea A un álgebra inclinada, y T un A - módulo inclinante tal que $H = \operatorname{End} T_A$ es hereditaria. Entonces T_A es separante.*

Demostración. Por (II.4.2), ${}_HT$ es inclinante y el par de torsión $(\mathscr{X}({}_HT),\mathscr{Y}({}_HT))$ se escinde en $\operatorname{mod}A^{op}$, por (1.4)(a). Además, por (II.4.4), $\mathscr{T}(T_A) = D\mathscr{Y}({}_HT)$ y $\mathscr{F}(T_A) = D\mathscr{X}({}_HT)$. Luego T_A es separante. □

Un conjunto Σ de módulos indescomponibles de $\operatorname{ind}A$ se dice *convexo* si, para todo M, $N \in \Sigma$ y todo camino

$$M = M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_t} M_t = N,$$

todos los M_i pertenecen a Σ. Un A - módulo M se dice *convexo* si el conjunto $\operatorname{ind}M$ de los sumandos directos indescomponibles de M es convexo.

Lema 2.3. *Un A - módulo inclinante T es convexo si y sólo si*

$$\operatorname{ind}T = \{M \in \operatorname{ind}A : M \in \mathscr{T}(T) \text{ y } \operatorname{Hom}_A(M,T) \neq 0\}.$$

Además, en este caso, $H = \operatorname{End} T_A$ *es hereditaria.*

Demostración. Supongamos que T es convexo. Sea $M \in \operatorname{ind}\mathscr{T}(T)$ tal que $\operatorname{Hom}_A(M,T) \neq 0$. Como $M \in \operatorname{Gen}T$, existe un morfismo no nulo $T' \longrightarrow M$, con $T' \in \operatorname{ind}T$, de donde obtenemos un camino $T' \longrightarrow M \longrightarrow T''$ con T', $T'' \in \operatorname{ind}T$. La convexidad de T implica que $M \in \operatorname{ind}T$. Luego,

$$\{M \in \operatorname{ind}A : M \in \mathscr{T}(T) \text{ y } \operatorname{Hom}_A(M,T) \neq 0\} \subseteq \operatorname{ind}T.$$

La otra inclusión es trivial.

Recíprocamente, supongamos que $\operatorname{ind}T = \{M \in \operatorname{ind}A : M \in \mathscr{T}(T) \text{ y } \operatorname{Hom}_A(M,T) \neq 0\}$. Comencemos probando que $H = \operatorname{End} T_A$ es hereditaria. Sea Q_H un H - módulo proyectivo e Y un submódulo indescomponible de Q. Debemos probar que Y es proyectivo. Como Q_H es proyectivo, tenemos que $Q \in \mathscr{Y}(T)$ y, por lo tanto, $Y \in \mathscr{Y}(T)$. Por el teorema de inclinación, existen $T' \in \operatorname{add}T$ y $M \in \mathscr{T}(T)$ indescomponible tales que $Q \cong \operatorname{Hom}_A(T,T')$ e $Y \cong \operatorname{Hom}_A(T,M)$. La inclusión $\operatorname{Hom}_A(T,M) \cong Y \hookrightarrow Q \cong \operatorname{Hom}_A(T,T')$ induce, aplicando el funtor $-\otimes_H T$, un morfismo no nulo $M \longrightarrow T'$. Luego, $\operatorname{Hom}_A(M,T) \neq 0$. Como $M \in \mathscr{T}(T)$, nuestra hipótesis nos da que $M \in \operatorname{ind}T$. Por lo tanto, $Y \cong \operatorname{Hom}_A(T,M)$ es proyectivo. Esto establece que H es hereditaria.

Por (2.2), T_A es separante. Consideremos entonces un camino

$$T' = M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_t = T''$$

en $\operatorname{ind}A$, con T', $T'' \in \operatorname{ind}T$. Como $T' \in \mathscr{T}(T_A)$ que es cerrada por sucesores por (2.1), tenemos que $M_i \in \mathscr{T}(T)$ para todo i. Como $\operatorname{Hom}_A(M_{t-1}, T'') \neq 0$ y $M_{t-1} \in \mathscr{T}(T)$, nuestra hipótesis nos da que $M_{t-1} \in \operatorname{ind}T$. Por recurrencia podemos obtener que $M_i \in \operatorname{ind}T$ para todo i. Luego, T es convexo. □

Lema 2.4. *Sea* T_A *un módulo inclinante. Cada una de las condiciones abajo indicadas implica la siguiente:*

(a) *Para todo* $M \in \mathscr{T}(T)$*, existe una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con T_0, $T_1 \in \operatorname{add}T$.

(b) $\operatorname{Ext}_A^2(M,N) = 0$ *para todo* $M, N \in \mathscr{T}(T)$.

(c) $\operatorname{di}M \leq 1$ *para todo* $M \in \mathscr{T}(T)$.

(d) $\operatorname{Hom}_A\left(\tau^{-1}M, T\right) = 0$ *para todo* $M \in \mathscr{T}(T)$.

Demostración. (a) implica (b) Sean M, $N \in \mathscr{T}(T)$. Aplicando $\operatorname{Hom}_A(-,N)$ a una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con T_0, $T_1 \in \operatorname{add}T$, obtenemos la sucesión exacta

$$0 = \operatorname{Ext}_A^1(T_1,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^2(M,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^2(T_0,N) = 0$$

y, por lo tanto, $\mathrm{Ext}_A^2(M,N)=0$.

(b) implica (c) Sea $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f^0} I^0 \xrightarrow{f^1} I^1$ una copresentación inyectiva minimal de M. Entonces N^0 =Coker f^0 y N^1 =Coker f^1 están en $\mathscr{T}(T)$. La sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I^0 \longrightarrow N^0 \longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta

$$0=\mathrm{Ext}_A^1\left(N^1,I^0\right) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1\left(N^1,N^0\right) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^2\left(N^1,M\right)=0$$

(el último término se anula por hipótesis). Por lo tanto, $\mathrm{Ext}_A^1\left(N^1,N^0\right)=0$. En particular, la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow N^1 \longrightarrow 0$$

se parte. Luego, N^0 es inyectivo.

(c) implica (d) Sea $M \in \mathscr{T}(T)$. La hipótesis di$M \leq 1$ implica que $\mathrm{Hom}_A\left(\tau^{-1}M,T\right) \cong D\mathrm{Ext}_A^1(T,M)=0$, por (I.2.7). $\square$

En virtud del teorema de inclinación (II.4.6), la condición (a) del lema precedente equivale a dp$\mathscr{Y}(T) \leq 1$. Por lo tanto, aplicando (II.5.1) obtenemos que dim.gl.$A \leq 2$.

Observación 2.5. Es razonable preguntarse en qué casos se verifica la condición (a). Esto ocurre, por ejemplo, cuando A es un álgebra hereditaria. En efecto, supongamos que A lo sea. Sea $M \in \mathscr{T}(T)$. Por (II.3.5) sabemos que existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow T_0 \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

con $L \in \mathscr{T}(T)$, de la cual se obtiene una sucesión exacta de funtores

$$\mathrm{Ext}_A^1(T_0,-) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(L,-) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^2(M,-)=0.$$

Como para todo $N \in \mathscr{T}(T)$ se tiene que $\mathrm{Ext}_A^1(T_0,N)=0$, entonces $\mathrm{Ext}_A^1(L,N)=0$, es decir, L es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}(T)$. Por (II.3.5), $L \in \mathrm{add}T$, obteniéndose entonces la sucesión buscada.

Deduciremos varias caracterizaciones de los módulos inclinantes convexos.

Proposición 2.6. *Sea T_A un módulo inclinante. Las condiciones siguientes son equivalentes:*
(a) End T_A *es hereditaria.*
(b) T_A es separante y, para todo $M \in \mathscr{T}(T)$, existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con T_0, $T_1 \in$ add$T$.
(c) T_A es separante y $\mathrm{Ext}_A^2(M,N)=0$, para todo $M,N \in \mathscr{T}(T)$.
(d) T_A es separante y di$M \leq 1$, para todo $M \in \mathscr{T}(T)$.
(e) T_A es separante y $\mathrm{Hom}_A\left(\tau^{-1}M,T\right)=0$, para todo $M \in \mathscr{T}(T)$.
(f) ind$T=\{M \in \mathrm{ind}A : M \in \mathscr{T}(T)$ y $\mathrm{Hom}_A(M,T) \neq 0\}$.

(g) T_A es convexo.

Demostración. (a) implica (b) Sea $M \in \mathscr{T}(T)$. Por (II.3.5), existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow T_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con $T_0 \in \operatorname{add}T$ y $L \in \mathscr{T}(T)$. Sea $H = \operatorname{End} T_A$. La sucesión anterior induce, por (II.3.6), una sucesión exacta corta en mod$H$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,L) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,T_0) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,M) \longrightarrow 0.$$

Como $\operatorname{Hom}_A(T,T_0)$ es H - proyectivo y H es hereditaria, $\operatorname{Hom}_A(T,L)$ también es H - proyectivo. Dado que $L \in \mathscr{T}(T)$, sabemos por (II.1.2) que $L \in \operatorname{add}T$. Finalmente T_A es separante, por (2.2).

(b) implica (c), (c) implica (d) y (d) implica (e) siguen de (2.4).

(e) implica (f) Sea $M \in \mathscr{T}(T)$ indescomponible tal que $\operatorname{Hom}_A(M,T) \neq 0$. Por (II.3.5), basta probar que M es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}(T)$, esto es, por (II.3.9), que $\tau M \in \mathscr{F}(T)$. Supongamos que $\tau M \notin \mathscr{F}(T)$. Como T es separante, debe ser $\tau M \neq 0$ y $\tau M \in \mathscr{T}(T)$. Pero entonces $\operatorname{Hom}_A(M,T) = \operatorname{Hom}_A\left(\tau^{-1}(\tau M),T\right) = 0$. Contradicción.

Por último, sigue de (2.3) que (f) y (g) son equivalentes y que implican (a). □

Como consecuencia de la proposición anterior, destacamos la siguiente caracterización de las álgebras inclinadas.

Teorema 2.7. *Un álgebra de artin A es inclinada si y sólo si existe un A-módulo inclinante convexo.*

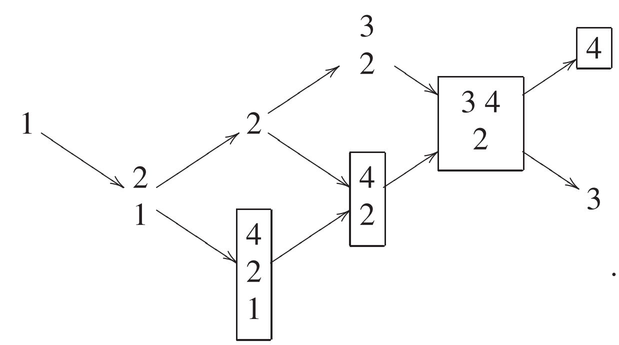
Demostración. Si A es inclinada, existe, por (1.1), un A - módulo inclinante T_A tal que $H = \operatorname{End} T_A$ es hereditaria. Por (2.6), T_A es convexo. Recíprocamente, si T_A es un módulo inclinante convexo, por (2.3), $\operatorname{End} T_A$ es hereditaria. Luego A es inclinada. □

Ejemplo 2.8. Sea, como en el ejemplo (II.4.7) (a), A dada por el carcaj

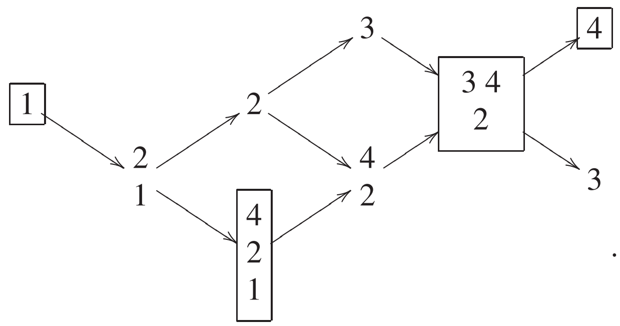
$$\begin{tikzcd} & \underset{}{\circ} 4 \arrow[d, "\gamma"] & \\ \underset{1}{\circ} & \underset{2}{\circ} \arrow[l, "\beta"'] & \underset{3}{\circ} \arrow[l, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

ligado por la relación $\alpha\beta = 0$.

(i) Sabemos que $U = \oplus_{i=1}^{4} U_i$, con $U_1 = \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$, $U_2 = \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}$, $U_3 = \begin{smallmatrix} 3\,4 \\ 2 \end{smallmatrix}$ y $U_4 = 4$, es un A - módulo inclinante (ver (II.3.12) (a)) y que su álgebra de endomorfismos $\operatorname{End}U$ es hereditaria (ver (II.4.7) (a)). Además, es fácil ver que U es un módulo convexo. Esto resulta de la ubicación de los sumandos directos indescomponibles de U en el carcaj de Auslander-Reiten de A. En particular, A es inclinada.



(ii) Sabemos también que $V = \oplus_{i=1}^{4} V_i$, con $V_1 = 1$, $V_2 = \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$, $V_3 = \begin{smallmatrix}3 & & 4\\ & 2 & \end{smallmatrix}$ y $V_4 = 4$ es un A - módulo inclinante (ver (II.3.12) (a)) y que su álgebra de endomorfismos $\operatorname{End} V$ no es hereditaria (ver (II.4.7) (a)). Además, V no es un módulo convexo. Por ejemplo, el camino de $V_1 = 1$ a $V_2 = \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$ se factoriza por el indescomponible $\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$ que no es un sumando directo de V.



3. Módulos sinceros.

A fin de enunciar (y probar) nuestra segunda caracterización de las álgebras inclinadas, vamos a necesitar la siguiente definición.

Definición. Un A - módulo M se dice *sincero* si cada A - módulo simple es un factor de composición de M.

La siguiente es una caracterización inmediata de los módulos sinceros.

Lema 3.1. *Sea M un A - módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(a) *M es sincero.*
(b) *Para todo A - módulo proyectivo $P \neq 0$, se tiene que* $\operatorname{Hom}_A(P, M) \neq 0$.
(c) *Para todo A - módulo inyectivo $I \neq 0$, se tiene que* $\operatorname{Hom}_A(M, I) \neq 0$.

Demostración. Es claro, a partir de (I.1.2), que para un A - módulo simple S las siguientes condiciones son equivalentes:
(i) S es un factor de composición de M.

(ii) Si $P(S)$ es la cubierta proyectiva de S, entonces $\mathrm{Hom}_A(P(S),M) \neq 0$.
(iii) Si $I(S)$ es la cápsula inyectiva de S, entonces $\mathrm{Hom}_A(M,I(S)) \neq 0$. $\square$

Así, todo módulo fiel es sincero. La recíproca no es verdadera. En efecto, si A es el álgebra hereditaria con carcaj

$$\underset{1}{\circ} \xleftarrow[\alpha]{} \underset{2}{\circ}$$

entonces el módulo semisimple $M = 1 \oplus 2$ es sincero, pero no es fiel, ya que $M\alpha = 0$.

Lema 3.2. *Sean M un A - módulo,*

$$\mathscr{T}_M = \mathrm{add}\left\{N \in \mathrm{ind}A : \textit{existe } M' \in \mathrm{ind}M \textit{ y un camino } M' \rightsquigarrow N\right\}$$

y

$$\mathscr{F}_M = \mathrm{add}\left(\mathrm{ind}A \setminus \mathscr{T}_M\right).$$

Entonces $(\mathscr{T}_M, \mathscr{F}_M)$ es un par de torsión que se escinde.

Demostración. Es claro que $\mathscr{T}_M$ es cerrada por sucesores. Por lo tanto, $\mathscr{T}_M$ es cerrada por imágenes epimórficas y por extensiones. Luego, es una clase de torsión. Entonces la conclusión sigue de (2.1). $\square$

Definición. Un *gancho* es un camino de ind$A$ de la forma

$$\tau X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$$

con f y g irreducibles. Sea M un A-módulo. Se dice que *ningún camino entre dos sumandos de M contiene un gancho* si, para todo camino de ind$A$ de la forma

$$L = M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_t} M_t = M$$

con L, $N \in \mathrm{ind}M$, ninguno de los subcaminos

$$M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1}$$

es un gancho.

Lema 3.3. *Sea M un A - módulo sincero tal que ningún camino entre dos sumandos de M contiene un gancho. Entonces el par de torsión $(\mathscr{T}_M, \mathscr{F}_M)$ verifica:*
(a) *Para todo $N \in \mathscr{T}_M$,* $\mathrm{di}N \leq 1$.
(b) *M es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}_M$.*
(c) *$DA \in \mathscr{T}_M$.*
(d) *Todo módulo Ext-proyectivo de $\mathscr{T}_M$ es inclinante parcial.*
(e) *El número de clases de isomorfismo de módulos* Ext-*proyectivos indescomponibles de $\mathscr{T}_M$ es menor o igual que el rango de $K_0(A)$.*

Demostración. (a) Sea $N \in \mathscr{T}_M$ indescomponible tal que di$N > 1$. Entonces existe un A - módulo proyectivo indescomponible P tal que $\mathrm{Hom}_A\left(\tau^{-1}N, P\right) \neq 0$. Como M es sincero, existe $M'' \in \operatorname{ind}M$ tal que $\operatorname{Hom}_A(P,M'') \neq 0$. Además, como $N \in \mathscr{T}_M$, existe un camino $M' \rightsquigarrow N$, con $M' \in \operatorname{ind}M$. De aquí se deduce la existencia de un camino con un gancho

$$M' \rightsquigarrow N \longrightarrow * \longrightarrow \tau^{-1}N \longrightarrow P \longrightarrow M''$$

con $M', M'' \in \operatorname{ind}M$. Contradicción.

(b) Sea $N \in \mathscr{T}_M$ un módulo indescomponible tal que $\operatorname{Ext}^1_A(M,N) \neq 0$. Como $\operatorname{Ext}^1_A(M,N) \cong D\underline{\operatorname{Hom}}_A\left(\tau^{-1}N, M\right)$, existe un morfismo no nulo $\tau^{-1}N \longrightarrow M''$, con $M'' \in \operatorname{ind}M$. Como $N \in \mathscr{T}_M$, existe también un camino $M' \rightsquigarrow N$, con $M' \in \operatorname{ind}M$. Nuevamente obtenemos un camino con un gancho

$$M' \rightsquigarrow N \longrightarrow * \longrightarrow \tau^{-1}N \rightsquigarrow M''$$

con $M', M'' \in \operatorname{ind}M$. Esta contradicción prueba que $\operatorname{Ext}^1_A(M,N) = 0$ para todo $N \in \mathscr{T}_M$.

(c) Sea I un A - módulo inyectivo indescomponible. Como M es sincero, $\operatorname{Hom}_A(M,I) \neq 0$. Luego existe un morfismo no nulo $M' \longrightarrow I$, con $M' \in \operatorname{ind}M$. Por lo tanto, $I \in \mathscr{T}_M$, de donde $DA \in \mathscr{T}_M$.

(d) Sea T_0 un Ext-proyectivo de $\mathscr{T}_M$. En particular, $\operatorname{Ext}^1_A(T_0,T_0) = 0$. Por otro lado, $\tau T_0 \in \mathscr{F}_M$ (por (II.2.4)). Como $DA \in \mathscr{T}_M$, a partir de (c) tenemos que $\operatorname{Hom}_A(DA, \tau T_0) = 0$. Luego, $\operatorname{dp}T_0 \leq 1$.

(e) Resulta de (d) y de (II.5.7). $\square$

Resulta de (d) y (e) que la suma directa de un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de A - módulos indescomponibles Ext-proyectivos de $\mathscr{T}_M$ es un módulo inclinante parcial.

Lema 3.4. *Sea M un $A-$módulo sincero tal que ningún camino entre dos módulos de* $\operatorname{ind}M$ *contiene un gancho. Sea T la suma directa de un conjunto completo de módulos* Ext-*proyectivos indescomponibles no isomorfos de $\mathscr{T}_M$. Entonces T es un módulo inclinante convexo y $M \in$* $\operatorname{add}T$.

Demostración. Sean M y T como en el enunciado. Por la observación de más arriba, T es un módulo inclinante parcial. Por (3.3)(b), $M \in \operatorname{add}T$. Luego basta ver que T es inclinante y convexo. Probaremos esto en cuatro etapas:

(1) Sea $K \longrightarrow T'$ un morfismo irreducible, con K en $\operatorname{ind}A$ y T' en $\operatorname{ind}T$. Entonces

(a) Si $K \in \mathscr{T}_M$ entonces $K \in \operatorname{ind}T$:

En efecto, basta probar que K es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}_M$ y para esto, por (II.2.4), es suficiente mostrar que $\tau K \in \mathscr{F}_M$. Si $\tau K \notin \mathscr{F}_M$, entonces $\tau K \in \operatorname{ind}\mathscr{T}_M$ ya que $(\mathscr{T}_M, \mathscr{F}_M)$ se escinde. Sabemos que existe un camino

$$M' \rightsquigarrow \tau K \longrightarrow * \longrightarrow K \longrightarrow T'$$

con $M' \in \operatorname{ind}M$. Si T' es proyectivo, entonces, al ser M sincero, tenemos $\operatorname{Hom}_A(T',M) \neq 0$. Luego, existe un camino con un gancho

$$M' \rightsquigarrow \tau K \longrightarrow * \longrightarrow K \longrightarrow T' \longrightarrow M''$$

con M', M'' en ind$M$. Contradicción. Por lo tanto, T' no es proyectivo. Pero entonces, el morfismo irreducible $K \longrightarrow T'$ induce un morfismo irreducible $\tau K \longrightarrow \tau T'$. Esto es absurdo, porque $\tau K \in \mathscr{T}_M$ y $\tau T' \in \mathscr{F}_M$. Luego, $\tau K \in \mathscr{F}_M$, lo que prueba (a).

(b) Si $K \in \mathscr{F}_M$ entonces $K \in \mathrm{add}(\tau T)$:

Por nuestra hipótesis K no es inyectivo, y hay un morfismo irreducible $T' \longrightarrow \tau^{-1}K$. Luego, $\tau^{-1}K \in \mathscr{T}_M$. Como $\tau\left(\tau^{-1}K\right) = K \in \mathscr{F}_M$, resulta que $\tau^{-1}K$ es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}_M$, o sea , está en add$T$. Esto es, $K \in \mathrm{add}(\tau T)$.

(2) T es un módulo inclinante:

Como ya dijimos, T es un módulo inclinante parcial. Entonces sólo nos resta probar (T_3). Sea

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} T^d \longrightarrow 0$$

una sucesión de Bongartz para T (ver (II.3.3)). Queremos probar que $E \in \mathrm{add}T$. Como $(\mathscr{T}_M, \mathscr{F}_M)$ se escinde, podemos escribir $E = X \oplus Y$, con $X \in \mathscr{T}_M$ e $Y \in \mathscr{F}_M$.

A continuación probaremos que $Y = 0$. Supongamos que $Y \neq 0$. Si Y es proyectivo, la sinceridad de M implica que $\mathrm{Hom}_A(Y,M) \neq 0$, de donde $\mathrm{Hom}_A(Y,T) \neq 0$ pues $M \in \mathrm{add}T$ (por (3.3) (b)). Si Y no es proyectivo entonces la restricción a Y del morfismo g de la sucesión precedente es no nula. En cualquier caso resulta que $\mathrm{Hom}_A(Y,T) \neq 0$. Por otro lado, $T \oplus E$ es inclinante, luego

$$\mathrm{Hom}_A(Y, \tau T) \cong D\mathrm{Ext}^1_A(T,Y) = 0.$$

Sea $v_1 : Y \longrightarrow T_1$ un morfismo no nulo, con $T_1 \in \mathrm{ind}T$. Vamos a construir en forma recursiva, para todo $i \geq 2$, morfismos $v_i : Y \longrightarrow T_i$ y morfismos irreducibles $u_{i-1} : T_i \longrightarrow T_{i-1}$ con los $T_i \in \mathrm{ind}T$, tales que $u_1u_2...u_{i-1}v_i \neq 0$. Supongamos que $v_i, u_1, ..., u_{i-1}$ han sido construidos. Para construir v_{i+1}, u_i consideramos el morfismo minimal que casi se parte a derecha que termina en T_i, al que escribimos en la forma $[f_i, g_i] : K_i \oplus L_i \longrightarrow T_i$, con $K_i \in \mathscr{T}_M$ y $L_i \in \mathscr{F}_M$. Como $Y \in \mathscr{F}_M$ y $T_i \in \mathscr{T}_M$, el morfismo $v_i : Y \longrightarrow T_i$ no es una retracción, por lo que se factoriza a través del morfismo $[f_i, g_i] : K_i \oplus L_i \longrightarrow T_i$. Por (1) sabemos que $K_i \in \mathrm{add}T$ y $L_i \in \mathrm{add}(\tau T)$, de donde $\mathrm{Hom}_A(Y, L_i) = 0$, por lo observado arriba. Como $\mathrm{Hom}_A(Y, L_i) = 0$, v_i se factoriza por $f_i : K_i \longrightarrow T_i$. Como $u_1u_2...u_{i-1}v_i \neq 0$, hay un sumando directo T_{i+1} de K_i y morfismos $u_i : T_{i+1} \longrightarrow T_i$, $v_{i+1} : Y \longrightarrow T_{i+1}$ tales que $u_1u_2...u_{i-1}u_iv_{i+1} \neq 0$. Esto termina la construcción.

Como, para todo i, tenemos que $u_1u_2...u_{i-1} \neq 0$, obtenemos una contradicción, ya que todos estos morfismos se encuentran en rad(End$T$), que es un ideal nilpotente. Así concluimos que $Y = 0$.

Hemos probado que la sucesión de Bongartz es de la forma

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow X \longrightarrow T^d \longrightarrow 0$$

con $X \in \mathscr{T}_M$. Sea $N \in \mathscr{T}_M$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(-,N)$, obtenemos una sucesión exacta

$$0 = \mathrm{Ext}^1_A(T^d, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(X,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(A,N) = 0$$

Por lo tanto, $\mathrm{Ext}^1_A(X,N) = 0$ y X es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}_M$. Luego, $X \in \mathrm{add}T$ y esto prueba que T es inclinante.

(3) $\mathscr{T}_M = \mathscr{T}(T)$ y $\mathscr{F}_M = \mathscr{F}(T)$:

Sea $N \in \mathscr{T}_M$. Como T es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}_M$, $\mathrm{Ext}^1_A(T,N) = 0$. Por lo tanto, $N \in \mathscr{T}(T)$. Recíprocamente, sea N indescomponible en $\mathscr{T}(T)$. Entonces $\mathrm{Hom}_A(T,N) \neq 0$, de donde $N \in \mathscr{T}_M$. Así probamos que $\mathscr{T}_M = \mathscr{T}(T)$. En consecuencia, $\mathscr{F}_M = \mathscr{F}(T)$.

(4) Por último, T es un módulo inclinante convexo:

En efecto, de (2) y (3) sigue que T es un módulo inclinante separante. Por otro lado, de (3.3) (a), tenemos que di$N \leq 1$ para todo $N \in \mathscr{T}(T)$. En virtud de (2.6), T es convexo. $\square$

A continuación presentamos el teorema principal de esta sección.

Teorema 3.5. *Un álgebra A es inclinada si y sólo si existe un A - módulo sincero M tal que ningún camino entre dos sumandos de M contiene un gancho.*

Demostración. La suficiencia de la condición sigue de (3.4) y de (2.7).

Recíprocamente, supongamos que A es inclinada. Por (2.7), existe un A-módulo inclinante convexo T. Como T es inclinante, es fiel y, por lo tanto, sincero. Supongamos que existe un camino que contiene un gancho

$$T' \rightsquigarrow \tau L \longrightarrow * \longrightarrow L \rightsquigarrow T''$$

con T', T'' en ind$T$. La convexidad de T implica que L, $\tau L \in \mathrm{ind}T$. Pero $\mathrm{Ext}^1_A(L,\tau L) \neq 0$, lo que contradice que $\mathrm{Ext}^1_A(T,T) = 0$. Luego $M = T$ satisface lo deseado. $\square$

El corolario que sigue es una consecuencia interesante del teorema anterior. Un A - módulo indescomponible se dice *dirigido* si no existe ningún ciclo

$$M = M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_t = M$$

en ind$A$.

Corolario 3.6. *Sea A un álgebra que admite un módulo indescomponible sincero y dirigido. Entonces A es inclinada.*

Demostración. Sea $M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_t} M_t$ un camino en ind$A$, con $M_0, M_t \in \mathrm{ind}M$. Como M es indescomponible, entonces $M_0 = M_t \cong M$. Como M es dirigido, f_i es un isomorfismo, para todo i. Luego el camino no contiene ganchos. Ahora el enunciado sigue de (3.5). $\square$

La recíproca de este corolario es falsa. En efecto, el álgebra A del ejemplo (2.8) es inclinada, pero no existe un A-módulo indescomponible sincero.

Demostraremos un resultado que muestra la importancia de las álgebras inclinadas: si M es un A - módulo indescomponible dirigido arbitrario, entonces existe un álgebra inclinada B tal que M es un B - módulo. Así, para estudiar la estructura de los módulos indescomponibles dirigidos sobre un álgebra arbitraria, es suficiente estudiar los módulos indescomponibles dirigidos sobre las álgebras inclinadas. A fin de probar esto, necesitamos la siguiente definición.

Sea M un A - módulo indescomponible. El *proyectivo P_M que soporta a M* es por definición la suma directa $P_M = \oplus P_x$ de un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de A - módulos proyectivos indescomponibles P_x tales que $\mathrm{Hom}_A(P_x, M) \neq 0$. El *soporte de M* es el álgebra $\mathrm{Supp}M = \mathrm{End}\,P_M$. Así, M es un módulo indescomponible sincero si y sólo si $\mathrm{Supp}M \cong A$.

Corolario 3.7. *Sea A un álgebra de artin y M un módulo indescomponible dirigido. Entonces $B = \mathrm{Supp}M$ es un álgebra inclinada.*

Demostración. En virtud de la definición de soporte, M es un B - módulo indescomponible y sincero. Por otra parte, un ciclo en $\mathrm{ind}B$ induce un ciclo en $\mathrm{ind}A$. El enunciado resulta entonces de (3.6). $\square$

En el caso considerado, el soporte es además convexo. Decimos, en efecto, que $\mathrm{Supp}M$ es *convexo en A* si, para toda sucesión

$$P_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_t$$

de morfismos no nulos entre indescomponibles proyectivos, con $P_0, P_t \in \mathrm{add}P_M$, tenemos que $P_i \in \mathrm{add}P_M$ para todo i. La demostración siguiente está inspirada en la hecha por Bongartz para álgebras sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.

Para demostrar este resultado utilizaremos el siguiente lema.

Lema 3.8. (a) *Sea $P \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} X$ un camino en* $\mathrm{ind}A$, *con P, Q proyectivos* y $gf = 0$. *Entonces existe un camino en indA de la forma $P/\mathrm{rad}P \longrightarrow U \longrightarrow X$.*

(b) *Dualmente, sea $X \xrightarrow{f} I \xrightarrow{g} J$ un camino en* $\mathrm{ind}A$, *con I, J inyectivos y $gf = 0$. Entonces existe un camino en* $\mathrm{ind}A$ *de la forma $X \longrightarrow V \longrightarrow \mathrm{soc}J$.*

Demostración. Demostraremos la parte (a). La parte (b) se deduce por dualidad.

Sean $S = P/\mathrm{rad}P$ y $U = Q/f(\mathrm{rad}P)$. En el diagrama de abajo, $\mathrm{Ker}(qf) = f^{-1}f(\mathrm{rad}P) = \mathrm{rad}P + \mathrm{Ker}f = \mathrm{rad}P = \mathrm{Ker}p$. Luego el morfismo f induce un monomorfismo $\overline{f} : S \longrightarrow U$. Además el módulo U es indescomponible, por ser imagen epimórfica no nula del proyectivo indescomponible Q. Por último, $\mathrm{Ker}q = f(\mathrm{rad}P) \subseteq \mathrm{Ker}g$, de donde el morfismo g se factoriza a través del epimorfismo canónico q, como se indica en el diagrama. Esto completa la demostración.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Q \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, equal] \\ S \arrow[r, dashed, "\overline{f}"'] & U \arrow[r, dashed, "\overline{g}"'] & X \end{tikzcd}$$

$\square$

Proposición 3.9. *Sea M un $A-$módulo indescomponible dirigido. Entonces $B =$* $\mathrm{Supp}M$ *es convexo en A.*

Demostración. Supongamos que $\mathrm{Supp}M$ no es convexo en A. Entonces existe un camino $P_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_t$, con $t \geq 2$, $P_0, P_t \in \mathrm{ind}P_M$, y $P_1, \ldots, P_{t-1}$ proyectivos que no están en indP_M. Consideremos un tal camino con longitud t mínima. Sea $S_i = P_i/\mathrm{rad}P_i$, con $1 \leq i \leq t$. Entonces $P_{i-1} \ncong P_i$. Dado que $\mathrm{Hom}_A(P_{i-1}, S_i) = 0$, podemos aplicar (3.8)(a) a cada uno de los caminos $P_{i-1} \longrightarrow P_i \longrightarrow S_i$ para deducir que existe un camino

$$(1) \qquad S_1 \longrightarrow U_2 \longrightarrow S_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow S_{t-1}.$$

Como, por hipótesis, P_t está en Supp$M$ y P_{t-1} no está en Supp$M$, existe un camino $P_{t-1} \longrightarrow P_t \longrightarrow M$ con composición nula. Aplicando (3.8)(a) a este camino, se obtiene un camino

$$(2) \qquad S_{t-1} \longrightarrow U_t \longrightarrow M.$$

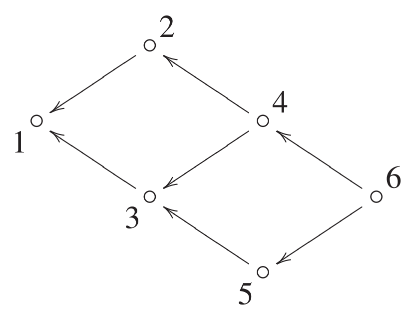
Ahora vamos a usar la equivalencia de Nakayama entre proyectivos e inyectivos para aplicar (3.8) nuevamente. Sea $I_i = \nu(P_i)$. Como $P_0 \in \mathrm{ind}P_M$, $P_1 \notin \mathrm{ind}P_M$, y $\mathrm{Hom}_A(P_i, M) = 0$ si y sólo si $\mathrm{Hom}_A(M, I_i) = 0$, hay un camino de la forma $M \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1$ con composición nula. Deducimos, usando (3.8)(b), la existencia de un camino

$$(3) \qquad M \longrightarrow U_1 \longrightarrow S_1.$$

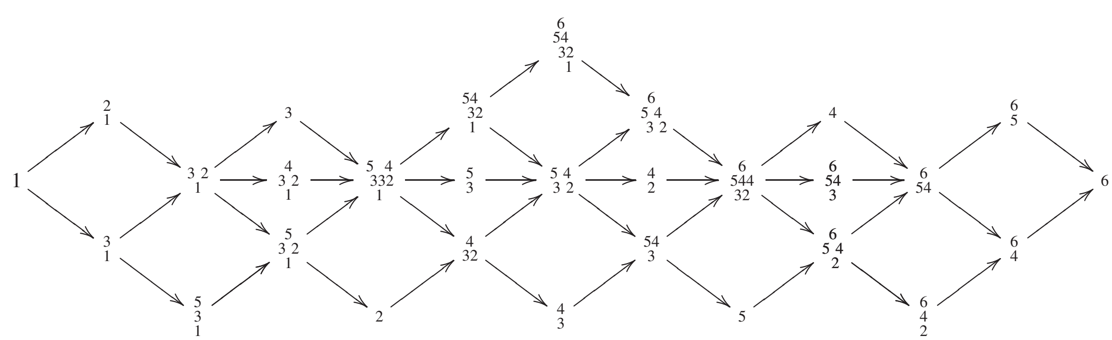
Concatenando los caminos $(1), (2)$ y (3) obtenemos un camino $M \longrightarrow U_1 \longrightarrow S_1 \longrightarrow U_2 \longrightarrow S_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow S_{t-1} \longrightarrow U_t \longrightarrow M$. Como el módulo M es dirigido, todos los morfismos de este camino deben ser isomorfismos. Luego $M \cong S_1$. Pero esto es un absurdo, ya que por hipótesis, $\mathrm{Hom}_A(P_1, M) = 0$. $\square$

Ejemplo 3.10

(a) Sea A dada por el carcaj



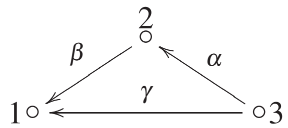
ligado por todas las relaciones de conmutatividad posibles. El cálculo de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ muestra que éste es acíclico



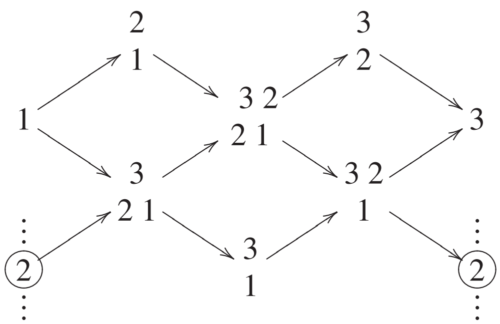
.

El módulo indescomponible proyectivo $\begin{smallmatrix} & 6 & \\ 5 & & 4 \\ 3 & & 2 \\ & 1 & \end{smallmatrix}$ es sincero y dirigido. Por lo tanto, A es inclinada.

(b) Para que un álgebra sea inclinada no es suficiente que haya un módulo indescomponible sincero. En efecto, sea A dada por el carcaj



ligado por la relación $\alpha\beta = 0$. Entonces $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ es



donde identificamos las dos copias del simple 2. Aquí tenemos varios módulos indescomponibles sinceros, pero todos están sobre ciclos. Sin embargo, A no es inclinada, pues $\mathrm{dp}\,\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} = 2 = \mathrm{di}\,\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$, y (1.4) (b) afirma que los módulos indescomponibles de dimensión proyectiva 2 sobre un álgebra inclinada tienen dimensión inyectiva menor o igual que uno.

En cambio, es fácil ver que el soporte del módulo indescomponible dirigido $\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$ es el álgebra dada por el carcaj

$$\overset{1}{\circ} \xleftarrow{\beta} \overset{2}{\circ}$$

mientras que el del módulo indescomponible dirigido $\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$ es el álgebra cuyo carcaj es

$$\overset{2}{\circ} \xleftarrow{\alpha} \overset{3}{\circ}$$

y estas dos álgebras son inclinadas, ya que son hereditarias.

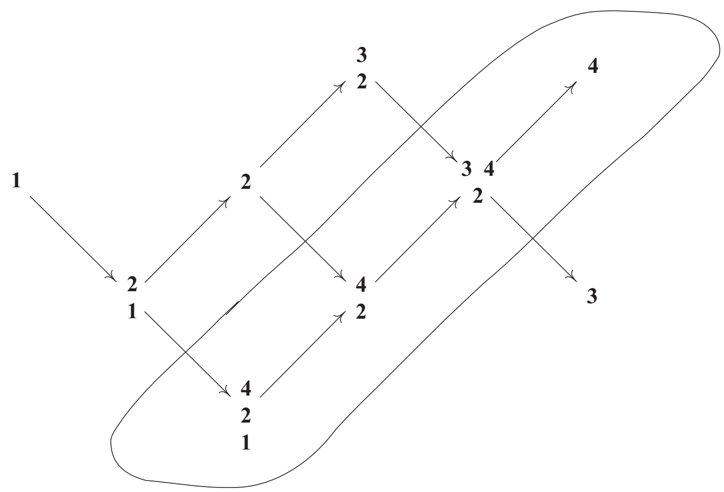
4. Rodajas y rodajas completas.

Si queremos verificar si un álgebra dada es inclinada debemos, de un modo u otro, reconocer el álgebra hereditaria de la cual ella es originaria. Ejemplos simples muestran que esta información está codificada en el carcaj de Auslander-Reiten. Para explicar la idea, retomamos un ejemplo visto anteriormente.

Ejemplo 4.1. Sea A dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd} & \overset{\circ}{4} \arrow[d, "\gamma"] & \\ \underset{1}{\circ} & \underset{2}{\circ} \arrow[l, "\beta"] & \underset{3}{\circ} \arrow[l, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

ligado por la relación $\alpha\beta = 0$. Entonces el carcaj de Auslander-Reiten de A está dado por



.

Ya vimos (en (2.8)) que el módulo $U = \oplus_{i=1}^{4} U_i$, con $U_1 = \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$, $U_2 = \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}$, $U_3 = \begin{smallmatrix}3\ 4\\2\end{smallmatrix}$ y $U_4 = 4$ es inclinante convexo, y que el álgebra $H = \operatorname{End} U_A$ es el álgebra hereditaria de carcaj

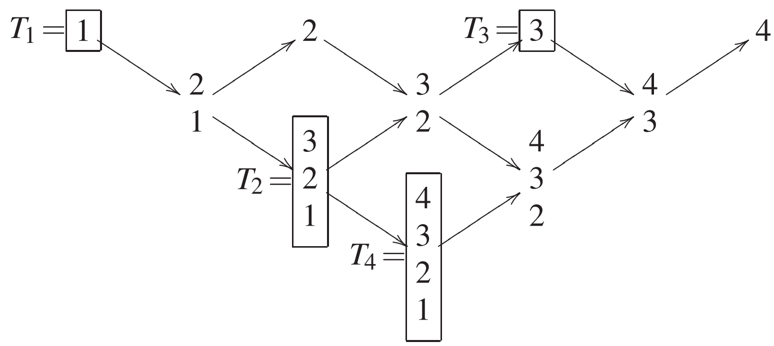
$$\underset{1}{\circ} \longleftarrow \underset{2}{\circ} \longleftarrow \underset{3}{\circ} \longleftarrow \underset{4}{\circ}\ .$$

Sabemos que U es un H^{op} - módulo inclinante y el carcaj de H^{op} reproduce exactamente el subcarcaj pleno

$$\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}3\ 4\\2\end{smallmatrix} \longrightarrow 4$$

de $\Gamma(\operatorname{mod} A)$. En otros términos, mirar $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ permite "recuperar" el álgebra hereditaria H tal que A es el anillo de endomorfismos de un H-módulo inclinante. En efecto, por (II.4.2) sabemos que $A \cong (\operatorname{End}\,_H U)^{op} \cong \operatorname{End} DU_H$.

Notamos que, mirando el carcaj de Auslander-Reiten de H, podemos también hallar un módulo inclinante T tal que $A \cong \operatorname{End} T_H$. Para ello buscamos H-módulos tales que el subgrafo del carcaj de Auslander-Reiten determinado por ellos "reproduzca" el carcaj de A^{op}:



Tenemos un H - módulo inclinante $T=\oplus_{i=1}^{4}T_i$ (con $T_1=1$, $T_2=\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$, $T_3=3$ y $T_4=\begin{smallmatrix}4\\3\\2\\1\end{smallmatrix}$) tal que $A\cong \operatorname{End}T_H$.

A partir de este ejemplo, llegamos a dos conjuntos diferentes de axiomas, que son el objeto de esta sección y de la sección siguiente.

Definición. Un conjunto finito $\mathscr{S}\subseteq \operatorname{ind}A$ es una *rodaja* en $\operatorname{mod}A$ si satisface los axiomas siguientes:

(S_1) $\oplus_{U\in\mathscr{S}}U$ es un A - módulo sincero.

(S_2) $\mathscr{S}$ es un conjunto convexo en $\operatorname{ind}A$.

(S_3) Si $0\longrightarrow L\longrightarrow M\longrightarrow N\longrightarrow 0$ es una sucesión que casi se parte entonces a lo sumo uno de los módulos L y N está en $\mathscr{S}$.

El conjunto $\mathscr{S}$ se llama *rodaja completa* si, además de los axiomas anteriores, satisface la condición:

(S_3') Si $0\longrightarrow L\longrightarrow M\longrightarrow N\longrightarrow 0$ es una sucesión que casi se parte y un sumando indescomponible de M está en $\mathscr{S}$ entonces $L\in\mathscr{S}$ ó $N\in\mathscr{S}$.

Es fácil ver que en el ejemplo precedente, el conjunto $\left\{\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix},4\right\}$ es una rodaja completa. Por otra parte, $\left\{\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix}\right\}$ es una rodaja, pero no es completa, como lo muestra la sucesión que casi se parte

$$0\longrightarrow \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\longrightarrow \begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix}\longrightarrow 4\longrightarrow 0\ .$$

Lema 4.2. *Sea T un A - módulo inclinante convexo. Entonces* $\operatorname{ind}T$ *es una rodaja completa en* $\operatorname{mod}A$.

Demostración. Verifiquemos los axiomas de la definición de rodaja completa.

(S_1) T es sincero por ser inclinante.

(S_2) Decir que T es convexo es decir que $\operatorname{ind}T$ lo es.

(S_3) Sea $0\longrightarrow \tau X\longrightarrow E\longrightarrow X\longrightarrow 0$ una sucesión que casi se parte en $\operatorname{mod}A$. Supongamos que τX y X están en $\operatorname{ind}T$. Entonces $\operatorname{Ext}_A^1(X,\tau X)\neq 0$ contradice que $\operatorname{Ext}_A^1(T,T)=0$.

(S_3') Sea $0 \longrightarrow \tau X \longrightarrow E \oplus T_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$ una sucesión que casi se parte con $T_0 \in \mathrm{ind}T$. En virtud de (2.6), T es separante. Como $T_0 \in \mathrm{add}T$ y $\mathrm{Hom}_A(T_0, X) \neq 0$, tenemos que $X \in \mathscr{T}(T)$. Supongamos que $X \notin \mathrm{ind}T$. Como T es inclinante, $\tau X \notin \mathscr{F}(T)$, por (II.3.9). Por lo tanto, $\tau X \in \mathscr{T}(T)$. Finalmente, de $\mathrm{Hom}_A(\tau X, T_0) \neq 0$ y (2.3), resulta que $\tau X \in \mathrm{ind}T$. $\square$

Necesitaremos también el lema siguiente.

Lema 4.3. *Sea M un A - módulo convexo. Entonces:*

(a) $\mathrm{rad}_A^\infty(M,M) = 0$.

(b) *Si, además,* $\mathrm{End}M$ *es conexo, el subcarcaj pleno de* $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ *definido por* $\mathrm{ind}M$ *es conexo.*

Demostración. (a) Sea m un número natural tal que $\mathrm{rad}^m(\mathrm{End}M) = 0$. Basta ver que $\mathrm{rad}_A^\infty(X,Y) = 0$ siempre que $X, Y \in \mathrm{ind}M$. Consideremos un camino $X = X_m \xrightarrow{f_m} X_{m-1} \rightarrow \cdots \xrightarrow{f_1} X_0 = Y$, con cada $X_i \in \mathrm{ind}A$ y cada $f_i \in \mathrm{rad}_A(X_i, X_{i-1})$. Por la convexidad de M, tenemos que $X_i \in \mathrm{ind}M$ para cada i. Como $\mathrm{rad}^m(\mathrm{End}M) = 0$, resulta que $f_1 \ldots f_m = 0$, lo que prueba que $\mathrm{rad}_A^\infty(X,Y) = 0$.

(b) Sean X, Y dos sumandos indescomponibles de M tales que $\mathrm{Hom}_A(X,Y) \neq 0$. Por (a) y (I.3.4), existe un camino

$$X = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \rightarrow \cdots \xrightarrow{f_t} X_t = Y$$

de morfismos irreducibles con cada $X_i \in \mathrm{ind}A$. Por la convexidad de M, tenemos que $X_i \in \mathrm{ind}M$ para cada i, de lo que resulta el enunciado. $\square$

En lo que sigue notaremos $|\mathscr{S}|$ al cardinal del conjunto $\mathscr{S}$.

Nuestro próximo teorema muestra la relación entre las nociones de rodaja completa y de módulo inclinante convexo.

Teorema 4.4. *Sea $\mathscr{S}$ una rodaja en* $\mathrm{mod}A$ *y $M = \oplus_{U \in \mathscr{S}} U$. Entonces existe una rodaja completa $\mathscr{S}' \supseteq \mathscr{S}$. Además, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *M es un módulo inclinante convexo.*

(b) *$\mathscr{S}$ es una rodaja completa.*

(c) $|\mathscr{S}| = \mathrm{rg}K_0(A)$.

Demostración. Supongamos primero que existe un camino que contiene un gancho $M' \rightsquigarrow \tau X \longrightarrow * \longrightarrow X \rightsquigarrow M''$, con $M', M'' \in \mathscr{S}$. Por (S_2), tenemos que $X, \tau X \in \mathscr{S}$. Pero esto contradice ($S_3$). Luego M satisface las hipótesis del Lema (3.4). Por lo tanto $T = \bigoplus\{X \in \mathrm{ind}A : X$ es Ext-proyectivo de $\mathscr{T}_M\}$ es un módulo inclinante convexo, y existe N tal que $T = M \oplus N$. Luego $|\mathscr{S}| = |\mathrm{ind}M| \leq |\mathrm{ind}T| = \mathrm{rg}\,K_0(A)$, y la igualdad vale si y sólo si $M = T$. De aquí se desprende inmediatamente la equivalencia de (a) y (c), y también el primer enunciado del teorema, ya que $\mathscr{S} \subseteq \mathrm{ind}T$, que es una rodaja completa por (4.2). El mismo (4.2) muestra que (a) implica (b).

Sólo resta probar que (b) implica (a), y para ello basta ver que $M = T$. Supongamos entonces que $\mathscr{S}$ es una rodaja completa, y sea $T' \in \mathrm{ind}T$. Como $T' \in \mathscr{T}_M$, existe un camino

$$M' = T_0 \xrightarrow{f_1} T_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_t} T_t = T'$$

con $M' \in \mathscr{S} \subseteq \text{ind}T$. Como T es convexo, entonces $T_i \in \text{ind}T$ para todo i . Claramente, basta probar que $T_1 \in \mathscr{S}$. Como T es inclinante y entonces conexo (ver (II.4.3)), por (4.3) podemos suponer que en el camino precedente los morfismos son irreducibles. Vamos a considerar dos casos:

Caso 1: T_1 es proyectivo. Como M es sincero, existe $M'' \in \mathscr{S}$ tal que $\text{Hom}_A(T_1, M'') \neq 0$. A partir del camino $M' \to T_1 \to M''$ y de la convexidad de $\mathscr{S}$, obtenemos $T_1 \in \mathscr{S}$.

Caso 2: T_1 no es proyectivo. Entonces existe una sucesión que casi se parte $0 \to \tau T_1 \to M' \oplus E \to T_1 \to 0$. Como $\tau T_1 \notin \text{ind}T$, entonces $\tau T_1 \notin \mathscr{S}$ y, por (S_3'), tenemos que $T_1 \in \mathscr{S}$, como queríamos. $\square$

Corolario 4.5. *Sea $\mathscr{S}$ una rodaja en mod$A$, y sea $M = \bigoplus_{U \in S} U$. Entonces $|\mathscr{S}| \leq \text{rg}K_0(A)$, existe una componente de $\Gamma(\text{mod}A)$ que contiene a $\mathscr{S}$, M es un módulo inclinante parcial y* $\text{rad}_A^\infty(M, M) = 0$.

Demostración. Se deduce inmediatamente de (4.3) y (4.4). $\square$

El corolario siguiente justifica el nombre de rodaja completa.

Corolario 4.6. *Si $\mathscr{S}'$ es una rodaja en* mod$A$ *que contiene una rodaja completa $\mathscr{S}$, entonces* $\mathscr{S}' = \mathscr{S}$.

Demostración. A partir de (4.4), tenemos que $|\mathscr{S}| = \text{rg}K_0(A)$ y $|\mathscr{S}'| \leq \text{rg}K_0(A)$. Entonces el corolario sigue de las desigualdades

$$\text{rg}K_0(A) = |\mathscr{S}| \leq \left|\mathscr{S}'\right| \leq \text{rg}K_0(A).$$

$\square$

Deducimos también la recíproca de (4.2).

Corolario 4.7. *Un A - módulo T es inclinante convexo si y solamente si* ind$T$ *es una rodaja completa en* mod$A$. *En particular, una rodaja completa induce un subcarcaj conexo de* $\Gamma(\text{mod}A)$.

Demostración. Este corolario resulta de (4.2), (4.3) y (4.4). $\square$

La consecuencia más interesante es una nueva caracterización de las álgebras inclinadas.

Teorema 4.8. *Sea A un álgebra. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *A es un álgebra inclinada.*

(b) *Existe una rodaja completa en* mod$A$.

(c) *Existe una rodaja en* mod$A$.

Demostración. (a) implica (b) Si A es inclinada, existe un módulo inclinante convexo T. Pero entonces, por (4.2), $\operatorname{ind}T$ es una rodaja completa en $\operatorname{mod}A$.

(b) implica (c) Esta implicación es trivial.

(c) implica (a) De (4.4) resulta que existe un A-módulo inclinante convexo. $\square$

Finalmente, el resultado siguiente muestra cómo construir (todas) las rodajas completas.

Teorema 4.9. (a) *Sea H un álgebra hereditaria, T_H un módulo inclinante y $A = \operatorname{End} T_H$. Entonces* $\operatorname{ind}(\operatorname{Hom}_H(T, DH))$ *es una rodaja completa en* $\operatorname{mod}A$.

(b) *Recíprocamente, sea A un álgebra y $\mathscr{S}$ una rodaja completa en* $\operatorname{mod}A$. *Entonces $M = \oplus_{U\in\mathscr{S}} U$ es un módulo inclinante convexo, $H = \operatorname{End} M$ es hereditaria, $T_H = D({}_H M)$ es inclinante y $\mathscr{S} = \operatorname{ind}(\operatorname{Hom}_H(T, DH))$.*

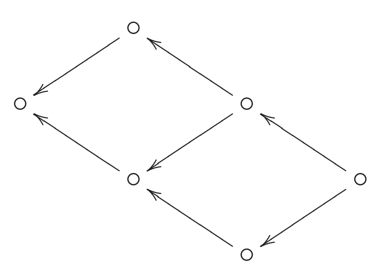
Demostración. (a) Sea $M_A = D({}_A T)$. Como T_H es co-inclinante, ${}_A T$ también lo es. Luego, M_A es inclinante. Como $H \cong \operatorname{End} M_A$ es hereditaria, el módulo M_A es inclinante convexo, por (2.6). Por lo tanto, en virtud de (4.2), $\operatorname{ind}M$ es una rodaja completa en $\operatorname{mod}A$. Por otro lado $M_A = D({}_A T) \cong D({}_A T \otimes_H H) \cong \operatorname{Hom}_H(T, DH)$. Así queda demostrado (a).

(b) Resta probar que, recíprocamente, toda rodaja completa en $\operatorname{mod}A$ es de la forma vista en (a). Sea $\mathscr{S}$ una tal rodaja. Por (4.2), $M = \oplus_{U\in\mathscr{S}} U$ es inclinante convexo. De (2.6), obtenemos que $H = \operatorname{End} M_A$ es hereditaria y ${}_H M$ es inclinante, luego, co-inclinante. Por lo tanto, $T_H = D({}_H M)$ es inclinante. En virtud de (II.4.2), tenemos $A \cong \operatorname{End} T_H$. Pero entonces

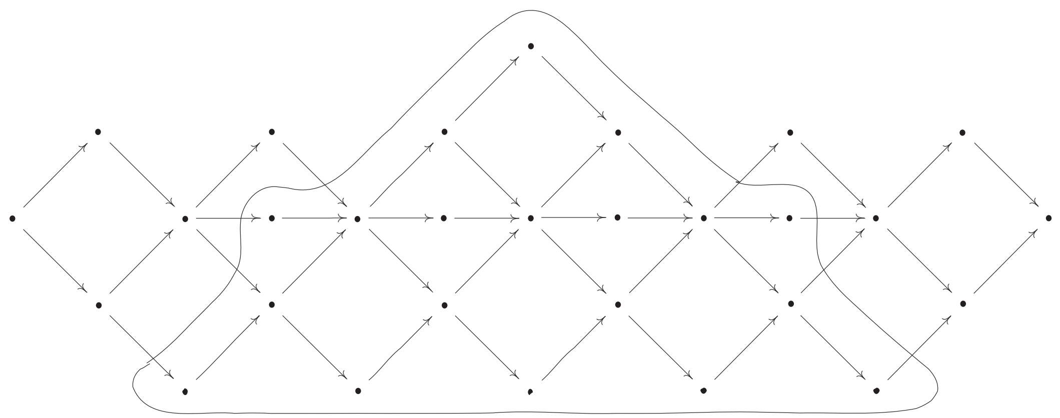
$$\oplus_{U\in\mathscr{S}} U = M_A \cong D({}_A T) \cong \operatorname{Hom}_H(T, DH)$$

Esto prueba que $\mathscr{S}$ es de la forma requerida. $\square$

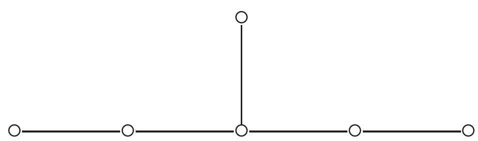
Ejemplo 4.10. En general, la categoría de módulos de un álgebra inclinada contiene varias rodajas completas. Por ejemplo, el álgebra dada por el carcaj



con todas las relaciones de conmutatividad posibles, tiene el carcaj de Auslander-Reiten siguiente (ver el ejemplo (3.8) (a))



La región indicada contiene varias rodajas completas que realizan todas las orientaciones posibles del diagrama de Dynkin $\mathbb{E}_6$.



Por lo tanto, para cada orientación de este grafo, existe un módulo inclinante sobre el álgebra de caminos del carcaj resultante cuya álgebra de endomorfismos es isomorfa a A.

5. Las secciones : el criterio de Liu y Skowroński.

Si bien la existencia de rodajas es un criterio muy satisfactorio cuando queremos saber si un álgebra de representación finita es inclinada o no, este criterio es más difícil de aplicar a álgebras de representación infinita. En efecto, esta verificación presupone un buen conocimiento de la categoría de módulos. Sin embargo, el Corolario (4.5) nos dice que en realidad basta conocer localmente el carcaj de Auslander-Reiten. Por ello, en esta sección estudiaremos subcarcajes especiales de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ con el objeto de obtener un criterio más fácil de aplicar. Este criterio fue obtenido simultánea e independientemente por Liu y Skowroński.

En lo que sigue del capítulo, Γ designa una componente de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$.

Definición. Sea Γ una componente de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$. Una *sección* Σ de Γ es un subcarcaj pleno que satisface los axiomas siguientes:

(σ_1) Σ es acíclico.

(σ_2) Para cada punto x de Γ, existe exactamente un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\tau^n x \in \Sigma_0$.

(σ_3) Σ es convexo en Γ: si $x = x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_t = y$ es un camino en Γ con $x, y \in \Sigma_0$, entonces $x_i \in \Sigma_0$ para todo i.

Notemos que la noción de sección es puramente combinatoria. Observemos que la noción de convexidad en (σ_3) es diferente de la definida en la sección 2: en efecto, se trata aquí de caminos en Γ, es decir de caminos formados por morfismos irreducibles, y no por morfismos arbitrarios. Es claro que si un conjunto $\Sigma \subseteq \Gamma$ es convexo (en el sentido de la sección 2), entonces es convexo en Γ, pero la recíproca es falsa en general.

Por ejemplo, la rodaja completa del ejemplo (4.1) es una sección.

Lema 5.1. *Sea* Γ *una componente conexa de* $\Gamma(\text{mod}A)$ *y* Σ *una sección de* Γ*. Supongamos que* $x \to y$ *es una flecha en* Γ.

a) Si $x \in \Sigma_0$, *entonces o bien* $y \in \Sigma_0$, *o bien* $\tau y \in \Sigma_0$.

b) Si $y \in \Sigma_0$, *entonces o bien* $x \in \Sigma_0$, *o bien* $\tau^{-1}x \in \Sigma_0$.

Demostración. Probemos (a), ya que (b) es dual. Por (σ_2), existe un entero m tal que $\tau^m y \in \Sigma_0$. Si $m \leq 0$, entonces existe un camino $x \longrightarrow y \longrightarrow * \longrightarrow \tau^{-1}y \longrightarrow \ldots \longrightarrow \tau^m y$ en Γ. Como $x, \tau^m y \in \Sigma_0$, entonces por la convexidad (σ_3), tenemos que $y \in \Sigma_0$. Luego, (σ_2) nos da $m = 0$. De la misma manera, si $m > 0$ tenemos que $\tau y \in \Sigma_0$. □

Lema 5.2. *Sean* Γ *una componente conexa de* $\Gamma(\text{mod}A)$ *y* Σ *una sección de* Γ *tal que* $\text{Hom}_A(U, \tau V) = 0$ *para todo* U, $V \in \Sigma_0$. *Entonces*

(a) $|\Sigma_0| \leq \text{rg}\, K_0(A)$.

(b) $\text{rad}_A^\infty(U,V) = 0$ *para todo* U, $V \in \Sigma_0$.

(c) $\text{Hom}_A\left(\tau^{-1}U, V\right) = 0$ *para todo* U, $V \in \Sigma_0$.

Demostración. (a) Esto sigue del lema de Skowroński (II.5.7).

(b) Sean U, $V \in \Sigma_0$ tales que $\text{rad}_A^\infty(U,V) \neq 0$. Por el lema (I.3.5), existe, para cada $i \geq 0$, un camino de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles

$$V_i \longrightarrow V_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_0 = V$$

tal que $\text{rad}_A^\infty(U, V_i) \neq 0$. Como Σ es finita y acíclica, existe $i_0 \geq 1$ tal que $V_{i_0-1} \in \Sigma_0$ pero $V_{i_0} \notin \Sigma_0$. Por el Lema (5.1), tenemos $\tau^{-1}V_{i_0} \in \Sigma_0$. Pero entonces $\text{Hom}_A\left(U, \tau\left(\tau^{-1}V_{i_0}\right)\right) = \text{Hom}_A(U, V_{i_0}) \neq 0$ contradice la hipótesis.

(c) Sean U_0, $V_0 \in \Sigma_0$ tales que $\text{Hom}_A\left(\tau^{-1}U_0, V_0\right) \neq 0$. Entonces no existe un camino de morfismos irreducibles $\tau^{-1}U_0 \rightsquigarrow V_0$: en efecto, si existiera un tal camino, entonces habría un camino compuesto $U_0 \longrightarrow * \longrightarrow \tau^{-1}U_0 \rightsquigarrow V_0$ en Γ, y la convexidad de Σ en Γ daría $\tau^{-1}U_0 \in \Sigma_0$, una contradicción. Entonces $\text{rad}_A^\infty\left(\tau^{-1}U_0, V_0\right) \neq 0$. Como Σ es finita y acíclica, podemos suponer que U_0 no tiene predecesor directo $W \in \Sigma_0$ tal que $\text{rad}_A^\infty\left(\tau^{-1}W, V_0\right) \neq 0$. Por otra parte, observando que el morfismo minimal que casi se parte a derecha $E \longrightarrow \tau^{-1}U_0$ es sobreyectivo, tenemos que $\text{rad}_A^\infty(W_0, V_0) \neq 0$, para algún sumando indescomponible W_0 de E. Como existe una flecha $U_0 \longrightarrow W_0$ en Γ, resulta del Lema (5.1) que uno de los módulos W_0, τW_0 pertenece a Σ_0. Por nuestra hipótesis sobre U_0, tenemos que $\tau W_0 \notin \Sigma_0$. Entonces $W_0 \in \Sigma_0$ y esto contradice (b). □

El lema siguiente es dual de (5.2).

Lema 5.3. *Sean* Γ *una componente conexa de* $\Gamma(\text{mod}A)$ *y* Σ *una sección de* Γ *tal que* $\text{Hom}_A\left(\tau^{-1}U, V\right) = 0$ *para todo* U, $V \in \Sigma_0$. *Entonces*

(a) $|\Sigma_0| \leq \text{rg}\, K_0(A)$.

(b) $\mathrm{rad}_A^\infty(U,V)=0$ *para todo* $U,V\in\Sigma_0$.
(c) $\mathrm{Hom}_A(U,\tau V)=0$ *para todo* $U,V\in\Sigma_0$. $\square$

Una primera consecuencia evidente es el corolario siguiente.

Corolario 5.4. *Sean* Γ *una componente conexa de* $\Gamma(\mathrm{mod}A)$, Σ *una sección de* Γ *y* $T=\bigoplus_{U\in\Sigma_0}U$. *Entonces* $\mathrm{Hom}_A(T,\tau T)=0$ *si y sólo si* $\mathrm{Hom}_A\left(\tau^{-1}T,T\right)=0$. $\square$

Un subcarcaj pleno Σ de Γ se dice *fiel* si su anulador $\mathrm{Ann}\,\Sigma=\bigcap\limits_{M\in\Sigma_0}\mathrm{Ann}\,M=\{a\in A: Ma=0 \text{ para todo } M\in\Sigma_0\}$ es el ideal nulo.

Lema 5.5. *Sea* Γ *una componente de* $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ *y* Σ *un subcarcaj finito y acíclico de* Γ.

(a) *Si, para todo* $M\in\Sigma_0$ *y morfismo irreducible* $M\longrightarrow N$, *tenemos que* $N\in\Sigma_0$ *o* $\tau N\in\Sigma_0$, *entonces todo morfismo no nulo* $M\longrightarrow U$, *con* $M\in\Sigma_0$ *y* $U\notin\Sigma_0$ *indescomponible, se factoriza por* $\mathrm{add}\left(\tau^{-1}\Sigma\right)$.

(b) *Si, para todo* $M\in\Sigma_0$ *y morfismo irreducible* $L\longrightarrow M$, *tenemos que* $L\in\Sigma_0$ *o* $\tau^{-1}L\in\Sigma_0$, *entonces todo morfismo no nulo* $U\longrightarrow M$, *con* $M\in\Sigma_0$ *y* $U\notin\Sigma_0$ *indescomponible, se factoriza por* $\mathrm{add}(\tau\Sigma)$.

Demostración. Es suficiente probar (b), ya que (a) es dual. Sea $f:U\longrightarrow M$ como en el enunciado. Vamos a proceder por recurrencia, puesto que Σ es acíclico. Supongamos primero que M es una fuente de Σ, y sea $g:E\longrightarrow M$ el morfismo minimal que casi se parte a derecha. Como M es una fuente de Σ, ningún sumando directo de E pertenece a Σ_0. En virtud de la hipótesis, $E\in\mathrm{add}(\tau\Sigma)$. Como f se factoriza por g, hemos terminado. Supongamos ahora que M no es una fuente y que el enunciado se verifica para todo predecesor propio M' de M sobre Σ. Sea $g:E\longrightarrow M$ el morfismo minimal que casi se parte a derecha. Por hipótesis, $E=E'\oplus E''$, donde $E'\in\mathrm{add}(\tau\Sigma)$, mientras que todos los sumandos directos de E'' pertenecen a Σ_0 y son predecesores de M. Entonces f se factoriza por $g=[g'\ g'']:E'\oplus E''\longrightarrow M$, o sea, existe $h=\begin{bmatrix}h'\\h''\end{bmatrix}:U\longrightarrow E'\oplus E''$ tal que $f=gh=g'h'+g''h''$. Finalmente, por la recurrencia, h'' se factoriza por $\mathrm{add}(\tau\Sigma)$. $\square$

Lema 5.6. *Sean* Γ *una componente conexa de* $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ *y* Σ *una sección fiel de* Γ *tal que* $\mathrm{Hom}_A(U,\tau V)=0$ *para todo* $U,V\in\Sigma_0$. *Entonces* $T=\bigoplus\limits_{U\in\Sigma_0}U$ *es un módulo inclinante convexo.*

Demostración. Por (II.2.7), T es un módulo inclinante parcial. Además, sigue de (II.1.7) que una $\mathrm{add}T$ - aproximación a izquierda $f:A\longrightarrow T^d$ es inyectiva. Entonces tenemos una sucesión exacta

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{f} T^d\xrightarrow{g} X\longrightarrow 0.$$

Afirmamos que $T\oplus X$ es inclinante. Como $\mathrm{dp}T\leq 1$ y A es proyectivo, tenemos que $\mathrm{dp}X\leq 1$. Entonces $\mathrm{dp}(T\oplus X)\leq 1$.

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(-,T)$, obtenemos una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T^d,T) \stackrel{\mathrm{Hom}_A(f,T)}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_A(A,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(X,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T^d,T)=0.$$

Por (II.1.7), $\mathrm{Hom}_A(f,T)$ es sobreyectivo. Por lo tanto, $\mathrm{Ext}^1_A(X,T)=0$. Aplicando sucesivamente $\mathrm{Hom}_A(X,-)$ y $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ a la misma sucesión exacta, se tiene

$$0=\mathrm{Ext}^1_A(X,T^d) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(X,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(X,A)=0$$

y

$$0=\mathrm{Ext}^1_A(T,T^d) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(T,A)=0$$

dado que $\mathrm{dp}(T\oplus X)\leq 1$. Entonces $\mathrm{Ext}^1_A(X,X)=0$ y $\mathrm{Ext}^1_A(T,X)=0$. Por consiguiente, $\mathrm{Ext}^1_A(T\oplus X,T\oplus X)=0$ y $T\oplus X$ es inclinante.

Para probar que T es un módulo inclinante, es suficiente mostrar que $X\in \mathrm{add}T$. Si esto no ocurre, existe $U\in \mathrm{ind}X$ tal que $U\notin \mathrm{add}T$. Como $\mathrm{Hom}_A(T,U)\neq 0$, existe un sumando indescomponible T_0 de T tal que $\mathrm{Hom}_A(T_0,U)\neq 0$. Como Σ es finita y acíclica, podemos suponer que T_0 no tiene sucesor directo $T_0'\in\Sigma_0$ tal que $\mathrm{Hom}_A\left(T_0',U\right)\neq 0$. Como $U\notin\Sigma_0$, tenemos que $\mathrm{rad}(T_0,U)\neq 0$. Considerando el morfismo minimal que casi se parte a izquierda empezando en T_0, existe una flecha $T_0\longrightarrow V$ en Γ tal que $\mathrm{Hom}_A(V,U)\neq 0$. Por (5.1), $V\in\Sigma_0$ o $\tau V\in\Sigma_0$. Por nuestra hipótesis sobre T_0, tenemos que $V\notin\Sigma_0$, pero

$$\mathrm{Ext}^1_A(U,\tau V)\cong D\mathrm{Hom}_A\left(\tau\left(\tau^{-1}V\right),U\right)=D\mathrm{Hom}_A(V,U)\neq 0$$

contradice que $\mathrm{Ext}^1_A(X,T)=0$. Esto prueba que T es inclinante.

Finalmente, para probar que T es convexo, hay que probar que $H=\mathrm{End}\,T_A$ es hereditaria (ver (2.6)). Sean P un H - módulo proyectivo indescomponible, y $f:Y\longrightarrow P$ un monomorfismo con Y indescomponible. Tenemos que probar que Y es proyectivo. Como $Y\neq 0$, existe un morfismo no nulo $f':Q\longrightarrow Y$, con Q proyectivo indescomponible. Como P y Q son proyectivos, tenemos que P, $Q\in\mathscr{Y}(T)$. Luego $Y\in\mathscr{Y}(T)$, pues Y es submódulo de P. Entonces existen morfismos $g:M\longrightarrow T_0$ y $g':T_1\longrightarrow M$, con T_0, $T_1\in\mathrm{add}T$ y $M\in\mathscr{T}(T)$, tales que $P=\mathrm{Hom}_A(T,T_0)$, $Q=\mathrm{Hom}_A(T,T_1)$, $Y=\mathrm{Hom}_A(T,M)$, $f=\mathrm{Hom}_A(T,g)$ y $f'=\mathrm{Hom}_A(T,g')$. Como f es un monomorfismo, tenemos que $ff'\neq 0$. Entonces $gg'\neq 0$. Si alguno de los morfismos g, g' estuviera en el radical infinito de $\mathrm{mod}A$, entonces $\mathrm{rad}^\infty_A(T_1,T_0)\neq 0$, lo que contradice (5.2)(b). Entonces existen caminos en Γ de T_1 a M y de M a T_0. La convexidad de Σ en Γ implica que $M\in\mathrm{add}T$, de donde Y es proyectivo. □

Ahora estamos preparados para probar el resultado principal de esta sección.

Teorema 5.7. *Sean Γ una componente conexa de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ y Σ un subcarcaj pleno y convexo de Γ. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) Σ *es una sección fiel tal que* $\mathrm{Hom}_A(U,\tau V)=0$, *para todo* $U,V\in\Sigma_0$.

(b) Σ *es una sección fiel tal que* $\mathrm{Hom}_A\left(\tau^{-1}U,V\right)=0$, *para todo* $U,V\in\Sigma_0$.

(c) $T=\bigoplus_{U\in\Sigma_0}U$ *es un módulo inclinante convexo.*

Demostración. Por (5.4), (a) y (b) son equivalentes y, por (5.6), tenemos que (a) implica (c). Entonces basta probar que (c) implica (a).

Supongamos que T es un módulo inclinante convexo. En particular, es fiel. Por lo tanto, Σ es fiel. Además, $\mathrm{Hom}_A(T,\tau T) \cong D\mathrm{Ext}_A^1(T,T) = 0$. Finalmente, $\Sigma_0 = \mathrm{ind}T$ es convexo en $\mathrm{ind}A$, luego a fortiori convexo en Γ. Por (2.6), $\mathrm{End}\,T$ es hereditaria. Luego $\mathrm{End}\,T$ es triangular y Σ es acíclico. Nos resta probar (σ_2).

Comenzamos por verificar que Σ corta a cada τ - órbita de Γ. Para ello basta ver que, si $M \in \Sigma_0$ y $L \in \Gamma$ pertenecen a dos órbitas vecinas, entonces Σ corta a la órbita de L. Supongamos que existe un morfismo irreducible $\tau^n M \longrightarrow L$ o $L \longrightarrow \tau^n M$, para un cierto $n \in \mathbb{Z}$. Renombrando si es necesario a L, podemos suponer que $|n|$ es mínimo para la familia de morfismos irreducibles que conectan un módulo de la órbita de M con uno de la órbita de L. Consideramos tres casos :

Caso 1. $n < 0$. En este caso no existe morfismo irreducible $L \to \tau^n M$, porque de lo contrario también tendríamos uno $\tau^{n+1}M \to L$, contra la minimalidad de $|n|$. Luego tenemos un morfismo irreducible $\tau^n M \to L$. Análogamente, L debe ser proyectivo, ya que de lo contrario tendríamos un morfismo irreducible $\tau^{n+1}M \to \tau L$, contra la minimalidad de $|n|$. Entonces, por la sinceridad de T, existe un morfismo no nulo $L \to M'$, con $M' \in \Sigma_0$. Luego tenemos un camino en $\mathrm{ind}A$: $M \to \cdots \to \tau^n M \to L \to M'$, de donde $L \in \Sigma_0$, por la convexidad.

Caso 2. $n > 0$. Este caso es dual del anterior.

Caso 3. $n = 0$. Tenemos un morfismo irreducible $M \to L$ ó $L \to M$. En el primer caso, $L \in \mathscr{T}(T)$. Si L es proyectivo, entonces $L \in \Sigma_0$. Suponemos entonces que L no es proyectivo. Si $\tau L \in \mathscr{T}(T)$, de (2.3) obtenemos que $\tau L \in \Sigma_0$ y, si $\tau L \notin \mathscr{T}(T)$, resulta que $\tau L \in \mathscr{F}(T)$, de donde $L \in \Sigma_0$. De modo que en el primer caso, o bien $L \in \Sigma_0$, o bien $\tau L \in \Sigma_0$. En el segundo caso tenemos un morfismo irreducible $L \to M$. Si L es inyectivo, entonces $L \in \mathscr{T}(T)$ y, por (2.3), $L \in \Sigma_0$. Por último, si L no es inyectivo, hay un morfismo $M \to \tau^{-1}L$ y usando el primer caso concluimos que, o bien $\tau^{-1}L \in \Sigma_0$, o bien $L = \tau(\tau^{-1}L) \in \Sigma_0$.

Esto termina la demostración de que Σ corta a cada τ-órbita de Γ. A continuación probaremos que la corta una sola vez: si M y $\tau^m M$ (con $m > 0$) pertenecen ambos a Σ_0, del camino $\tau^m M \to \cdots \to \tau M \to * \to M$ deducimos que $\tau M \in \Sigma_0$, porque T es convexo. Pero $\mathrm{Ext}_A^1(M,\tau M) \neq 0$, lo que contradice la hipótesis que T es inclinante. Así, hemos probado que Σ verifica las condiciones de (a). $\square$

La primera consecuencia de este teorema es el criterio de Liu-Skowroński.

Corolario 5.8. *Sea A un álgebra de artin. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) *A es inclinada.*

(b) $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ *contiene una sección fiel Σ tal que* $\mathrm{Hom}_A(U,\tau V) = 0$ *para todo* $U,V \in \Sigma_0$.

(c) $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ *contiene una sección fiel Σ tal que* $\mathrm{Hom}_A(\tau^{-1}U,V) = 0$ *para todo* $U,V \in \Sigma_0$.

Demostración. Como A es inclinada, por (2.7) existe un módulo inclinante convexo y por (II.4.3) sabemos que $\mathrm{End}\,T_A$ es conexo. Resulta entonces de (4.3) que el subcarcaj pleno de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ determinado por $\mathrm{ind}T$ es conexo y por lo tanto está contenido en una componente conexa de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$. El resultado es entonces consecuencia de (5.7). $\square$

El resultado siguiente es menos inmediato.

Corolario 5.9. *Un conjunto* $\Sigma_0 \subseteq \mathrm{ind}A$ *es una rodaja completa en* $\mathrm{mod}A$ *si y sólo si el subcarcaj* Σ *determinado por* Σ_0 *es una sección tal que:*
(a) $\mathrm{Hom}_A(U, \tau V) = 0$ *para todo* $U, V \in \Sigma_0$.
(b) $\mathrm{dp}U \leq 1$ *para todo* $U \in \Sigma_0$.
(c) $\mathrm{di}U \leq 1$ *para todo* $U \in \Sigma_0$.

Demostración. Sea Σ_0 una rodaja completa en $\mathrm{mod}A$. Por (II.4.4), $T = \bigoplus_{u \in \Sigma_0} U$ es un módulo inclinante convexo, cuyo anillo de endomorfismos es conexo (ver (II.4.3)). En particular, por (4.3)(b), Σ está contenida en una componente conexa Γ de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$. Así, de (5.7) deducimos (a) y (b). Por dualidad, T es también co-inclinante, por lo que obtenemos también (c).

Recíprocamente, sea Σ una sección en Γ que satisface (a), (b) y (c). Por (5.2), Σ es finita, de donde T es un módulo finitamente generado. Como $\mathrm{Ext}^1_A(T,T) \cong D\,\mathrm{Hom}_A(T, \tau T) = 0$, tenemos que T es inclinante parcial. Luego, existe E tal que $T \oplus E$ es inclinante. Supongamos que $E \notin \mathrm{add}T$. Como $\mathrm{End}(T \oplus E)$ es conexo (por (II.4.3)), existe un sumando directo E' de E que no está en $\mathrm{add}T$ tal que $\mathrm{Hom}_A(T, E') \neq 0$ ó $\mathrm{Hom}_A(E', T) \neq 0$. Por (5.5) tenemos que $\mathrm{Hom}_A\left(\tau^{-1}T, E'\right) \neq 0$ ó $\mathrm{Hom}_A(E', \tau T) \neq 0$. En el primer caso, $\mathrm{Ext}^1_A(E', T) \neq 0$ (ya que $\mathrm{di}\,T \leq 1$) y, en el segundo caso, $\mathrm{Ext}^1_A(T, E') \neq 0$ (ya que $\mathrm{dp}T \leq 1$). Esto contradice la hipótesis que $T \oplus E$ es inclinante. Por lo tanto, $E \in \mathrm{add}T$ y T es fiel. Entonces, a partir de (5.3), obtenemos que Σ_0 es una rodaja completa. $\square$

Mucho trabajo ha sido dedicado al estudio de las componentes del carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra inclinada. Aunque actualmente se conocen buenas caracterizaciones, este estudio se sitúa fuera del marco de esta monografía. Nos limitaremos a algunas observaciones. Para comenzar, damos una definición.

Sea A un álgebra inclinada. Llamamos *componente de conexión de* $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ a una componente que contiene rodajas completas. A partir de (4.7) tenemos que $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ contiene al menos una componente de conexión.

Proposición 5.10. *Sean* A *un álgebra inclinada,* $n = \mathrm{rg}\, K_0(A)$, Σ *una rodaja completa en* $\mathrm{mod}A$ *y* Γ *la componente de* $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ *que contiene a* Σ. *Entonces:*
(a) Γ *es acíclica y tiene exactamente* n τ*-órbitas*.
(b) $\mathrm{rad}^\infty_A(X,Y) = 0$ *para todo* $X, Y \in \Gamma$.
(c) *Si* $T = \bigoplus_{U \in \Sigma} U$ *y* $\Gamma' \neq \Gamma$ *es otra componente de* $\Gamma(\mathrm{mod}A)$*, existen dos casos posibles:*
(i) $\Gamma' \subseteq \mathscr{T}(T)$ *y entonces* Γ' *no contiene proyectivos.*
(ii) $\Gamma' \subseteq \mathscr{F}(T)$ *y entonces* Γ' *no contiene inyectivos.*

Demostración. (a) Supongamos por el absurdo que existe un ciclo de morfismos irreducibles $M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_t = M_0$ en Γ. Como Σ es una sección (ver (5.9)), para cada i existe $n_i \in \mathbb{Z}$ tal que $\tau^{n_i} M_i \in \Sigma$. Podemos suponer que existen i tal que $n_i \geq 0$ y j tal que $n_j \leq 0$. En efecto, si $n_i > 0$ para todo i, consideramos $m = \min_i n_i$ y aplicamos τ^{-m} a todo el ciclo. De la misma manera, si $n_i < 0$ para todo i, escribimos $m' = \max_i n_i$ y aplicamos $\tau^{-m'}$. Esto establece nuestra afirmación.

Por lo tanto, tenemos dos caminos de morfismos irreducibles $\tau^{n_i} M_i \rightsquigarrow M_i$ y $M_j \rightsquigarrow \tau^{n_j} M_j$. Componiendo, obtenemos un camino de morfismos irreducibles

$\tau^{n_i} M_i \rightsquigarrow M_i \longrightarrow M_{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_j \rightsquigarrow \tau^{n_j} M_j$.
Como $\tau^{n_i} M_i \in \Sigma$ y $\tau^{n_j} M_j \in \Sigma$, por la convexidad tenemos que todos los M_i están en Σ, y esto contradice que Σ es acíclica, por ser una sección. Esto prueba que Γ es acíclica. Por otro lado, por (4.4), $|\Sigma| = n$, y como la sección Σ corta a cada τ-órbita exactamente una vez, resulta inmediatamente que Σ tiene exactamente n τ-órbitas.

(b) Sean $X, Y \in \Gamma$ tales que $\operatorname{rad}_A^\infty(X,Y) \neq 0$. Por (I.3.5), existe un camino infinito de morfismos irreducibles

$$X = X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_i \to \cdots$$

tales que $\operatorname{rad}_A^\infty(X_i, Y) \neq 0$ para cada i. Veamos que existe $p \geq 0$ tal que X_p es sucesor de Σ en Γ. Como Γ tiene sólo n τ-órbitas, una de ellas contiene a X_i para infinitos valores i_k del índice i. Como Σ corta a cada τ-órbita, existe M en Σ y números enteros t_k tales que $X_{i_k} = \tau^{t_k} M$. Por (a), Γ es acíclica. Luego la sucesión (t_k) es estrictamente decreciente y entonces existe m tal que $t_m < 0$. Pero entonces $p = i_m$ satisface lo deseado. Ahora bien, $\operatorname{rad}_A^\infty(X_p, Y) \neq 0$ implica que existe un camino infinito de morfismos irreducibles

$$\cdots \to Y_j \to \cdots \to Y_1 \to Y_0 = Y$$

tal que $\operatorname{rad}_A^\infty(X_p, Y_j) \neq 0$ para cada j. Ahora se deduce igual que antes que existe $q \geq 0$ tal que Y_q es predecesor de Σ en Γ.

Tenemos así un camino $Z_0 \to Z_1 \to \cdots \to Z_i = X_p \to Y_q = U_0 \to \cdots \to U_s$ en $\operatorname{ind} A$, con $Z_0, U_s \in \Sigma$. Por la convexidad de Σ en $\operatorname{ind} A$, deducimos que $X_p, Y_q \in \Sigma$, de donde $\operatorname{rad}_A^\infty(X_p, Y_q) = 0$, por (4.3). Esto contradice que $\operatorname{rad}_A^\infty(X_p, Y_j) \neq 0$ para cada j, probando (b).

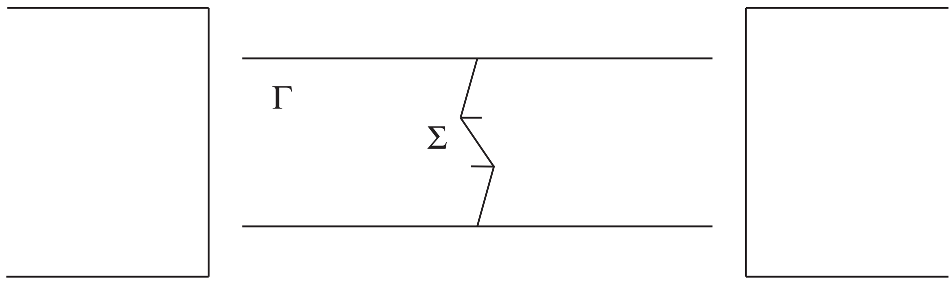
(c) Supongamos que $M \in \Gamma'$. Como T es separante, tenemos dos casos: $M \in \mathscr{T}(T)$ ó $M \in \mathscr{F}(T)$. Supongamos que $M \in \mathscr{T}(T)$. Entonces, probaremos que $\Gamma' \subseteq \mathscr{T}(T)$.

Si $\Gamma' \nsubseteq \mathscr{T}(T)$, existe $N \in \Gamma'$ tal que $N \in \mathscr{F}(T)$. Como la componente Γ' es conexa, podemos suponer que existe un morfismo irreducible $M \longrightarrow N$ ó $N \longrightarrow M$. Como $N \in \mathscr{F}(T)$ y $M \in \mathscr{T}(T)$, tenemos un morfismo irreducible $N \to M$. Por otra parte, $M \in \Gamma'$ no pertenece a $\Sigma \subseteq \Gamma$ y entonces M no es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}(T)$. Pero tenemos un morfismo irreducible $\tau M \to N$ y esto es absurdo, porque $N \in \mathscr{F}(T)$. Así, $\Gamma' \in \mathscr{T}(T)$.

La segunda parte de (i) a saber, que Γ' no contiene proyectivos, resulta del hecho que los únicos proyectivos de $\mathscr{T}(T)$ pertenecen a Σ y, por lo tanto, a Γ. Hemos probado que Γ' verifica (i).

Finalmente, si $M \in \mathscr{F}(T)$, se prueba análogamente que Γ' verifica (ii). □

Este enunciado dice que cada componente de conexión Γ "separa" a la categoría de módulos del álgebra inclinada A de la manera siguiente.

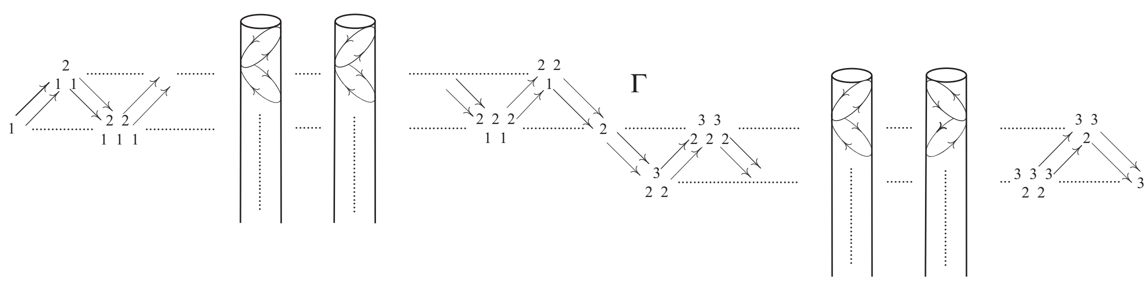


donde los morfismos van de izquierda a derecha, Γ es acíclica, toda componente Γ' contenida en $\mathscr{T}(T)$ está "a la derecha" de Γ, y todos sus módulos son generados por T. De la misma manera toda componente Γ'' contenida en $\mathscr{F}(T)$ está "a la izquierda" de Γ, y todos sus módulos son cogenerados por Γ.

Ejemplo 5.11. (a) Sea A dada por el carcaj

$$\underset{1}{\circ} \leftleftarrows \underset{2}{\circ} \leftleftarrows \underset{3}{\circ}$$

y tal que $\mathrm{rad}^2 A = 0$ (esto quiere decir que la composición de dos flechas cualesquiera es nula). El carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ está dado por



La componente central Γ, que contiene a 2, es una componente de conexión (y, de hecho, la única componente de conexión), puesto que ella contiene a la rodaja completa $\left\{ {}^{2\,2}_{\;1}, 2, {}^{\;3}_{2\,2} \right\}$. Las componentes que preceden a Γ son la componente postproyectiva, que contiene a 1, y una familia de tubos estables: estos son en efecto las componentes postproyectiva y regular del álgebra de Kronecker

$$\underset{1}{\circ} \leftleftarrows \underset{2}{\circ}$$

(ver [AuRS], pág. 302). Dualmente, las componentes que siguen a Γ son tubos estables y una componente preinyectiva que son las componentes preinyectiva y regular del álgebra de Kronecker

$$\underset{2}{\circ} \leftleftarrows \underset{3}{\circ}$$

(en efecto, esto sigue del hecho que A es de radical cuadrado nulo, ver [AuRS], pág. 344).

(b) El ejemplo anterior muestra porqué suponer que una componente contiene una sección no es suficiente para concluir que la componente es de conexión. En efecto, la componente postproyectiva contiene una sección $\left\{1, {}_{1}{}^{2}{}_{1}\right\}$, pero ésta no es fiel, ya que el proyectivo ${}_{2}{}^{3}{}_{2}$ no es cogenerado por ella. Por lo tanto, la componente no es de conexión.

6. Álgebras de endomorfismos de módulos inclinantes parciales.

Vamos a concluir este trabajo con un teorema, de Happel, que dice que si T es un módulo inclinante parcial sobre un álgebra hereditaria, entonces $\operatorname{End} T$ es un álgebra inclinada.

Lema 6.1. *Sea H un álgebra hereditaria y T un H - módulo inclinante parcial. Entonces T es inclinante si y sólo si, para todo H - módulo $M \neq 0$ tal que $\operatorname{Ext}_H^1(M,M) = 0$, se tiene que $\operatorname{Hom}_H(M,T) \neq 0$ ó $\operatorname{Ext}_H^1(M,T) \neq 0$.*

Demostración. Sea T un H - módulo inclinante. Por la observación (2.5), existe una sucesión exacta corta
$$0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_0 \longrightarrow DH \longrightarrow 0$$
con $T_0, T_1 \in \operatorname{add} T$, ya que $DH \in \mathscr{T}(T)$. Aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_H(M,-)$ a la sucesión anterior obtenemos

$$0 \to \operatorname{Hom}_H(M,T_1) \to \operatorname{Hom}_H(M,T_0) \to \operatorname{Hom}_H(M,DH) \to \operatorname{Ext}_H^1(M,T_1) \to \operatorname{Ext}_H^1(M,T_0) \to 0.$$

Luego, $\operatorname{Hom}_H(M,T) = 0$ y $\operatorname{Ext}_H^1(M,T) = 0$ implican $\operatorname{Hom}_H(M,DH) = 0$ y, por consiguiente, $M = 0$. Esto prueba la necesidad.

Para probar la suficiencia, sea T un módulo inclinante parcial que verifica la propiedad enunciada. Para mostrar que T es inclinante, vamos a probar que una $\operatorname{add} T$- aproximación a izquierda $f : H_H \longrightarrow T_0$ (con $T_0 \in \operatorname{add} T$) es inyectiva y, luego, que el conúcleo $C = \operatorname{Coker} f$ pertenece a $\operatorname{add} T$.

Si aplicamos el funtor $\operatorname{Hom}_H(-,T)$ a las sucesiones exactas cortas
$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \longrightarrow H \xrightarrow{f} \operatorname{Im} f \longrightarrow 0 \qquad y \qquad 0 \longrightarrow \operatorname{Im} f \longrightarrow T_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$
obtenemos, respectivamente, las sucesiones exactas

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_H(\operatorname{Im} f, T) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_H(f,T)} \operatorname{Hom}_H(H,T) \longrightarrow \operatorname{Hom}_H(\operatorname{Ker} f, T) \longrightarrow \\ \longrightarrow \operatorname{Ext}_H^1(\operatorname{Im} f, T) \longrightarrow \operatorname{Ext}_H^1(H,T) = 0 \longrightarrow \operatorname{Ext}_H^1(\operatorname{Ker} f, T) \longrightarrow 0 \end{gathered}$$

y

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_H(C,T) \longrightarrow \operatorname{Hom}_H(T_0,T) \longrightarrow \operatorname{Hom}_H(\operatorname{Im} f, T) \longrightarrow \\ \longrightarrow \operatorname{Ext}_H^1(C,T) \longrightarrow \operatorname{Ext}_H^1(T_0,T) = 0 \longrightarrow \operatorname{Ext}_H^1(\operatorname{Im} f, T) \longrightarrow 0, \end{gathered}$$

ya que H es hereditaria. En particular, $\operatorname{Ext}_H^1(\operatorname{Ker} f, T) = 0$ y $\operatorname{Ext}_H^1(\operatorname{Im} f, T) = 0$.
Como $\operatorname{Hom}_H(f,T)$ es sobreyectivo, y f es una $\operatorname{add} T$ - aproximación a izquierda, también tenemos que $\operatorname{Hom}_H(\operatorname{Ker} f, T) = 0$. Además, aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_H(-, \operatorname{Ker} f)$ a la sucesión $0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \longrightarrow H \xrightarrow{f} \operatorname{Im} f \longrightarrow 0$ obtenemos en forma análoga que $\operatorname{Ext}_H^1(\operatorname{Ker} f, \operatorname{Ker} f) = 0$.
Por hipótesis, $\operatorname{Ker}\, f = 0$, y f es inyectiva.

Entonces tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{f} T_0 \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0\,.$$

Aplicando $\mathrm{Hom}_H(T,-)$, obtenemos un epimorfismo

$$0 = \mathrm{Ext}^1_H(T,T_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(T,C) \longrightarrow 0$$

de donde $\mathrm{Ext}^1_H(T,C)=0$. Aplicando $\mathrm{Hom}_H(-,T)$ a la misma sucesión, se obtiene una sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_H(C,T) \to \mathrm{Hom}_H(T_0,T) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_H(f,T)} \mathrm{Hom}_H(H,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(C,T) \longrightarrow 0.$$

Como $\mathrm{Hom}_H(f,T)$ es sobreyectivo, $\mathrm{Ext}^1_H(C,T)=0$. Por último, $\mathrm{Hom}_H(C,-)$ aplicado a la misma sucesión exacta corta nos da un epimorfismo

$$0 = \mathrm{Ext}^1_H(C,T_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(C,C) \longrightarrow 0$$

de donde $\mathrm{Ext}^1_H(C,C)=0$. Luego, $\mathrm{Ext}^1_H(T\oplus C, T\oplus C)=0$ y $T\oplus C$ es un módulo inclinante.

Para probar que T es inclinante nos resta mostrar que $C\in \mathrm{add}T$. Supongamos que $C\neq 0$.

Como $\mathrm{Ext}^1_H(C,T)=0$, de nuestra hipótesis resulta que $\mathrm{Hom}_H(C,T)\neq 0$. Sea $h: C\longrightarrow T_1$ (con $T_1\in \mathrm{add}T$) una $\mathrm{add}T$-aproximación a izquierda. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_H(-,T)$ a las sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}h \longrightarrow C \xrightarrow{h} \mathrm{Im}h \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}h \longrightarrow T_1 \longrightarrow \mathrm{Coker}h \longrightarrow 0$$

obtenemos las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Coker}h,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_H(T_1,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Im}h,T) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Coker}h,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(T_1,T)=0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Im}h,T) \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Im}h,T) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_H(h,T)} \mathrm{Hom}_H(C,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Ker}h,T) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Im}h,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(C,T)=0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Ker}h,T) \longrightarrow 0\,.$$

En particular, $\mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Im}h,T)=0$ y $\mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Ker}h,T)=0$. Como $\mathrm{Hom}_H(h,T)$ es sobreyectivo, tenemos que $\mathrm{Hom}_H(\mathrm{Ker}h,T)=0$. Finalmente, aplicando $\mathrm{Hom}_H(\mathrm{Ker}h,-)$ a la primera sucesión de más arriba, obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Ker}h,\mathrm{Ker}h) \longrightarrow \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Ker}h,C) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_H(\mathrm{Ker}h,h)} \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Ker}h,\mathrm{Im}h) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Ker}h,\mathrm{Ker}h) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Ker}h,C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Ker}h,\mathrm{Im}h) \longrightarrow 0.$$

La inclusion $\mathrm{Im}h\to T_1$ induce un monomorfismo $\mathrm{Hom}_H(\mathrm{Ker}h,\mathrm{Im}h)\to \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Ker}h,T_1)=0$, entonces $\mathrm{Hom}_H(\mathrm{Ker}h,\mathrm{Im}h)=0$ y tenemos un monomorfismo

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Ker}h,\mathrm{Ker}h) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Ker}h,C)\,.$$

Por otro lado, $\operatorname{Hom}_H(-,C)$ aplicado a la primera sucesión nos da un epimorfismo

$$0 = \operatorname{Ext}^1_H(C,C) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_H(\operatorname{Ker} h, C) \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto, $\operatorname{Ext}^1_H(\operatorname{Ker} h, C) = 0$. Luego, $\operatorname{Ext}^1_H(\operatorname{Ker} h, \operatorname{Ker} h) = 0$. Por nuestra hipótesis, $\operatorname{Ker} h = 0$. Entonces h es inyectiva y tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{h} T_1 \longrightarrow \operatorname{Coker} h \longrightarrow 0. \qquad (*)$$

Aplicando $\operatorname{Hom}_H(-,T)$ a $(*)$, se tiene una sucesión exacta

$$\operatorname{Hom}_H(T_1,T) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_H(h,T)} \operatorname{Hom}_H(C,T) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_H(\operatorname{Coker} h, T) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_H(T_1,T) = 0.$$

Como $\operatorname{Hom}_H(h,T)$ es sobreyectivo, resulta que $\operatorname{Ext}^1_H(\operatorname{Coker} h, T) = 0$. Luego, aplicando $\operatorname{Hom}_H(\operatorname{Coker} h, -)$ a la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{f} T_0 \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

obtenemos un epimorfismo

$$0 = \operatorname{Ext}^1_H(\operatorname{Coker} h, T_0) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_H(\operatorname{Coker} h, C) \longrightarrow 0,$$

de donde $\operatorname{Ext}^1_H(\operatorname{Coker} h, C) = 0$. Por lo tanto, la sucesión $(*)$ se parte y $C \in \operatorname{add} T$. Esto termina la demostración del lema. □

Probaremos el principal resultado de esta sección por recurrencia. La noción clave es la categoría perpendicular definida por Geigle y Lenzing.

Definición. Sea A un álgebra de artin y T un A - módulo inclinante parcial. La *categoría perpendicular* $T^\perp$ de T es la subcategoría plena de $\operatorname{mod} A$ cuya clase de objetos es

$$T^\perp = \left\{ X \in \operatorname{mod} A : \operatorname{Hom}_A(T,X) = 0 \text{ y } \operatorname{Ext}^1_A(T,X) = 0 \right\}.$$

En la notación de la sección (II.2), tenemos

$$T^\perp = \mathscr{T}_1(T) \cap \mathscr{F}_0(T).$$

Hay una caracterización de módulos inclinantes en términos de la categoría perpendicular.

Proposición 6.2. *Sea T un módulo inclinante parcial. Entonces T es inclinante si y sólo si $T^\perp = 0$.*

Demostración. Sea T un módulo inclinante. Entonces, por (II.3.5) tenemos $\mathscr{T}_0(T) = \mathscr{T}_1(T)$. Por lo tanto $T^\perp = \mathscr{T}_1(T) \cap \mathscr{F}_0(T) = \mathscr{T}_0(T) \cap \mathscr{F}_0(T) = 0$.

Recíprocamente, sea T un módulo inclinante parcial tal que $T^\perp = 0$. Para probar que T es inclinante, basta probar que $\mathscr{T}_0(T) = \mathscr{T}_1(T)$ (ver (II.3.5)). Como ya sabemos que $\mathscr{T}_0(T) \subseteq \mathscr{T}_1(T)$ (por (II.2.5)), tenemos que probar que cada $X \in \mathscr{T}_1(T)$ pertenece a $\mathscr{T}_0(T) = \operatorname{Gen} T$.

Podemos suponer que $X \neq 0$. Como $X \in \mathscr{T}_1(T)$ y, por hipótesis, $\mathscr{T}_1(T) \cap \mathscr{F}_0(T) = 0$, tenemos que $X \notin \mathscr{F}_0(T)$ y entonces $\mathrm{Hom}_A(T,X) \neq 0$. Sea $f_0 : T_0 \to X$ una add$T$-aproximación a derecha, con $T_0 \in \mathrm{add}T$. Tenemos una sucesión exacta

$$T_0 \xrightarrow{f} X \to C \to 0$$

con $C = \mathrm{Coker} f$. Sea $N = \mathrm{Im} f$ y $f = ip$ la factorización canónica de f. En particular, N está generado por T_0, de donde $N \in \mathscr{T}_0(T)$. Así, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ a la sucesión exacta corta

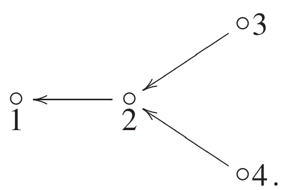
$$0 \to N \xrightarrow{i} X \to C \to 0$$

conseguimos primero $\mathrm{Ext}^1_A(T,C) = 0$ (porque $X \in \mathscr{T}_1(T)$) y segundo una sucesión exacta corta

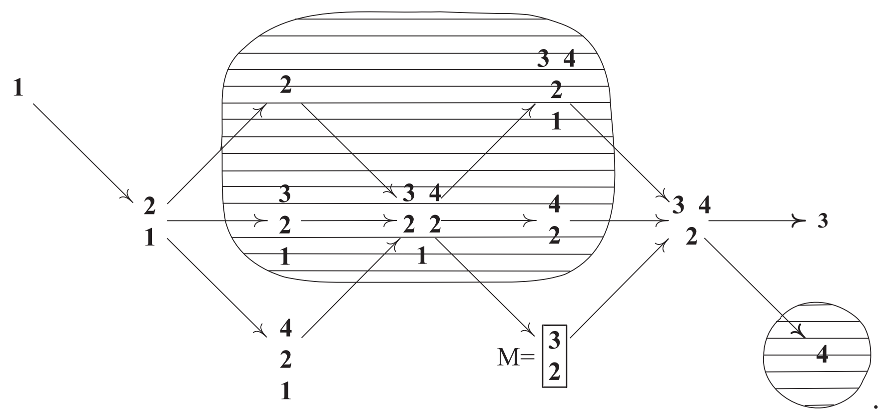
$$0 \to \mathrm{Hom}_A(T,N) \to \mathrm{Hom}_A(T,X) \to \mathrm{Hom}_A(T,C) \to 0.$$

Ahora, sea $g : T \to X$ un morfismo. Como $f : T_0 \to X$ es una add$T$- aproximación a derecha, existe $h : T \to T_0$ tal que $g = fh = (ip)h = i(ph)$. Entonces $\mathrm{Hom}_A(T,i)$ es un epimorfismo y $\mathrm{Hom}_A(T,C) = 0$. Esto muestra que $C \in T^{\perp}$ y entonces $C = 0$. Por lo tanto $X \in \mathrm{Gen}T = \mathscr{T}_0(T)$ y luego T es inclinante. $\square$

Ejemplo 6.3. Sea A el álgebra de caminos del carcaj



Entonces el carcaj de Auslander-Reiten de A está dado por



Si $T = {}^{3}_{2}$, es fácil ver que T es un módulo inclinante parcial indescomponible. Los módulos indescomponibles de $T^{\perp}$ son aquéllos que están sombreados. En efecto, es inmediato que, para $X \in \mathrm{ind}A$, se tiene

$$\mathrm{Hom}_A(T,X) \neq 0 \text{ si y sólo si } X \in \left\{ {}^{3}_{2}, {}^{3\,4}_{\;2}, 3 \right\}$$

y

$$\mathrm{Ext}_A^1(T,X) \neq 0 \text{ si y sólo si } X \in \left\{1, \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}\right\}$$

(lo que puede verse usando el isomorfismo $\mathrm{Ext}_A^1(T,X) \cong D\mathrm{Hom}_A(X,\tau T)$, válido porque $\mathrm{dp}T \leq 1$).

Lema 6.4. *Sea T un módulo inclinante parcial. Entonces la categoría perpendicular $T^\perp$ es una subcategoría abeliana de* mod$A$*, cerrada por extensiones.*

Demostración. Para probar que $T^\perp$ es una subcategoría abeliana de mod$A$, es suficiente mostrar que, para todo morfismo $f : X \longrightarrow Y$ en mod$A$, con $X,Y \in T^\perp$, los módulos $K = \mathrm{Ker}f$, $J = \mathrm{Im}f$ y $C = \mathrm{Coker}f$ están en $T^\perp$.

Se tienen las siguientes sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow X \longrightarrow J \longrightarrow 0 \quad y \quad 0 \longrightarrow J \longrightarrow Y \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Puesto que $\mathrm{dp}T \leq 1$, al aplicar el funtor $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ obtenemos las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T,K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T,J) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(T,K) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(T,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(T,J) \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T,J) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T,C) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(T,J) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(T,Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(T,C) \longrightarrow 0$$

Como $X,Y \in T^\perp$, de la primera sucesión exacta obtenemos: $\mathrm{Hom}_A(T,K) = 0$ y $\mathrm{Ext}_A^1(T,J) = 0$, y de la segunda: $\mathrm{Hom}_A(T,J) = 0$ y $\mathrm{Ext}_A^1(T,C) = 0$. Luego, $J \in T^\perp$, $\mathrm{Ext}_A^1(T,K) = 0$ (de donde $K \in T^\perp$) y, por último, $\mathrm{Hom}_A(T,C) = 0$ (de donde $C \in T^\perp$).

Finalmente, si

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta con $X,Z \in T^\perp$, se prueba de la misma manera que $Y \in T^\perp$. □

Ahora vamos a presentar un teorema de reducción, debido a Geigle y Lenzing.

Teorema 6.5. *Sea A un álgebra de artin y M un A - módulo tal que:*

(a) $\mathrm{dp}M \leq 1$,

(b) $\mathrm{Ext}_A^1(M,M) = 0$,

(c) $\mathrm{Hom}_A(M,A) = 0$, *y*

(d) End$M$ *es un anillo de división.*

Entonces existe un álgebra A' tal que $M^\perp \cong$ modA'*. Además,* $\mathrm{dim.gl.}A' \leq \mathrm{dim.gl.}A$ *y* $\mathrm{rg}K_0(A') = \mathrm{rg}K_0(A) - 1$.

Demostración. Como $\mathrm{Hom}_A(M,A)=0$, entonces M no es proyectivo. Luego $0\neq\tau M\cong \mathrm{Hom}_A(A,\tau M)\cong D\mathrm{Ext}_A^1(M,A)$, ya que $\mathrm{dp}M\leq 1$. Por hipótesis, el módulo M es inclinante parcial. Entonces consideramos una sucesión de Bongartz (II.3.3)

$$0\longrightarrow A\longrightarrow E\longrightarrow M^d\longrightarrow 0,$$

donde d es la longitud de $\mathrm{Ext}_A^1(M,A)$ como $\mathrm{End}M$ - módulo. Sabemos que el morfismo inducido $\mathrm{Hom}_A\left(M,M^d\right)\longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(M,A)$ es sobreyectivo. Ahora bien, como los $\mathrm{End}M$ - módulos $\mathrm{Ext}_A^1(M,A)$ y $\mathrm{Hom}_A\left(M,M^d\right)$ tienen la misma longitud, dicho morfismo es, entonces, un isomorfismo. Luego, a partir de la sucesión exacta

$$0=\mathrm{Hom}_A(M,A)\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,E)\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,M^d)\longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(M,A)\longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(M,E)\longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(M,M^d)=0$$

se obtiene que $\mathrm{Hom}_A(M,E)=0$ y $\mathrm{Ext}_A^1(M,E)=0$. Por lo tanto, $E\in M^{\perp}$.

Sea $X\in M^{\perp}$. Si aplicamos $\mathrm{Hom}_A(-,X)$ a la sucesión de Bongartz, obtenemos

$$0=\mathrm{Ext}_A^1(M^d,X)\longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(E,X)\longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(A,X)=0.$$

Luego, $\mathrm{Ext}_A^1(E,X)=0$ y el objeto E es proyectivo en $M^{\perp}$: en efecto, si $0\to X\to Y\to Z\to 0$ es una sucesión exacta, con $X\in M^{\perp}$, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(E,-)$ obtenemos un epimorfismo $\mathrm{Hom}_A(E,Y)\to \mathrm{Hom}_A(E,Z)$.

Por otra parte, todo objeto $X\in M^{\perp}$ está generado por E. En efecto, $E\oplus M$ es inclinante y $\mathrm{Ext}_A^1(E\oplus M,X)=0$, de donde X es de torsión, esto es, $X\in \mathrm{Gen}(E\oplus M)$. Como $\mathrm{Hom}_A(M,X)=0$, deducimos que $X\in \mathrm{Gen}E$.

Escribamos $A'=\mathrm{End}E$. Por (II.1.5), el funtor $\mathrm{Hom}_A(E,-):M^{\perp}\longrightarrow \mathrm{mod}A'$ es una equivalencia de categorías que transforma $\mathrm{add}E$ en los A'-módulos proyectivos y preserva sucesiones exactas (ver (6.4)). Entonces las resoluciones proyectivas en $\mathrm{mod}A'$ se corresponden con las sucesiones exactas

$$E_t\xrightarrow{f_t}\cdots\longrightarrow E_1\xrightarrow{f_1}E_0\xrightarrow{f_0}X\longrightarrow 0,$$

con cada $E_i\in \mathrm{add}E$. Ahora veamos que $\mathrm{dim.gl.}A'\leq n=\mathrm{dim.gl.}A$. Por lo dicho más arriba, basta ver que si

$$0\longrightarrow K_n\longrightarrow E_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots\longrightarrow E_1\xrightarrow{f_1}E_0\xrightarrow{f_0}X\longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta con $X\in M^{\perp}$ y cada $E_i\in \mathrm{add}E$, entonces $K_n\in \mathrm{add}E$.

Para probarlo, consideramos una tal sucesión y notamos $\mathrm{Im}f_i=K_i$. Entonces $K_0=X$ y para cada i con $0\leq i\leq n$ tenemos una sucesión exacta

$$0\longrightarrow K_{i+1}\longrightarrow E_i\longrightarrow K_i\longrightarrow 0$$

en $M^{\perp}$.

Sea Y un A - módulo arbitrario. Como $\mathrm{dp}E\leq 1$, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(-,Y)$, para cada $j\geq 2$ obtenemos un isomorfismo

$$\mathrm{Ext}_A^j(K_{i+1},Y)\cong \mathrm{Ext}_A^{j+1}(K_i,Y)$$

y una sucesión exacta a derecha

$$\operatorname{Ext}_A^1(E_i,Y) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^1(K_{i+1},Y) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^2(K_i,Y) \longrightarrow 0.$$

Tenemos varias consecuencias:

(1) $\mathrm{dp}K_n \leq 1$. En efecto, ya que $\mathrm{dim.gl.}A = n$, para todo Y tenemos que

$$\operatorname{Ext}_A^2(K_n,Y) \cong \operatorname{Ext}_A^3(K_{n-1},Y) \cong \ \ldots \ \cong \operatorname{Ext}_A^{n+1}(K_1,Y) = 0\,.$$

(2) Si $\operatorname{Ext}_A^1(E,Y) = 0$, la sucesión exacta a derecha da un isomorfismo

$$\operatorname{Ext}_A^1(K_{i+1},Y) \cong \operatorname{Ext}_A^2(K_i,Y)\,,$$

de donde

$$\operatorname{Ext}_A^1(K_n,Y) \cong \operatorname{Ext}_A^2(K_{n-1},Y) \cong \ \ldots \ \cong \operatorname{Ext}_A^{n+1}(K_0,Y) = 0.$$

En particular, $\operatorname{Ext}_A^1(K_n,K_n) = \operatorname{Ext}_A^1(K_n,E) = \operatorname{Ext}_A^1(K_n,M) = 0$.

Como, por otro lado, $K_n \in M^{\perp}$, resulta $\operatorname{Ext}_A^1(M,K_n) = 0$. Además, $\operatorname{Ext}_A^1(E,K_n) = 0$ pues E es Ext-proyectivo en $M^{\perp}$. Probamos así que $\operatorname{Ext}_A^1(E \oplus M \oplus K_n, E \oplus M \oplus K_n) = 0$ y que $\mathrm{dp}K_n \leq 1$. Por consiguiente, $E \oplus M \oplus K_n$ es un módulo inclinante parcial. Puesto que $E \oplus M$ es un módulo inclinante, $K_n \in \operatorname{add}(E \oplus M)$. Como $\operatorname{Hom}_A(M,K_n) = 0$, tenemos que $K_n \in \operatorname{add}E$, lo que prueba que $\mathrm{dim.gl.}A' \leq \mathrm{dim.gl.}A$.

Finalmente, por (d), M es indescomponible y como $M \oplus E$ es inclinante, resulta que E tiene $\mathrm{rg}K_0(A) - 1$ sumandos indescomponibles no isomorfos. Luego, $\mathrm{rg}K_0(A') = \mathrm{rg}K_0(A) - 1$. $\square$

Existe un caso particular del teorema que es importante: si A es hereditaria, entonces A' también lo es.

Ejemplo 6.6. Recordemos el ejemplo (6.3). Es fácil ver que, en este caso, $T^{\perp} \cong \operatorname{mod}A'$, donde A' es el álgebra de caminos de carcaj

$$\circ \longleftarrow \circ \longrightarrow \circ\,.$$

En efecto, el complemento de Bongartz de $T = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}$ es (salvo multiplicidad) $E = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus 2 \oplus \begin{smallmatrix} 3 & & 4 \\ & 2 & \\ & 1 & \end{smallmatrix}$ y $\operatorname{End}E \cong A'$.

A continuación llegamos al resultado anunciado que implica que si A es un álgebra inclinada y e es un idempotente de A, entonces eAe es inclinada.

Teorema 6.7. *Sea H un álgebra hereditaria y T un H - módulo inclinante parcial. Entonces $A = \operatorname{End}T_H$ es un álgebra inclinada.*

Demostración. Si el número de clases de isomorfismo de sumandos indescomponibles de T es igual al rango de $K_0(H)$, entonces T es un H - módulo inclinante y no hay nada que probar. Si no es éste el caso, podemos disminuir el rango. Supongamos que $|\mathrm{ind}T| < \mathrm{rg}K_0(H)$. Entonces T no es inclinante. Por (6.1) existe un H - módulo indescomponible X tal que $\operatorname{Ext}_H^1(X,X) = 0$, $\operatorname{Ext}_H^1(X,T) = 0$ y $\operatorname{Hom}_H(X,T) = 0$. Entonces, de (1.2) resulta que $\operatorname{End}X$ es un anillo de división.

Si X es proyectivo, entonces existe un idempotente primitivo $e \in H$ tal que $X = eH$. Sea $H' = H/HeH$. Entonces los H'-módulos coinciden con los H-módulos M tales que $Me = \mathrm{Hom}_H(eH, M) = 0$. Como eH es proyectivo, esto muestra que los H'-módulos son exactamente los objetos de $(eH)^{\perp}$. Por otra parte, H' es hereditaria. Además, $Te \cong \mathrm{Hom}_H(eH, T) = \mathrm{Hom}_H(X, T) = 0$, de modo que T es un H' -módulo. Por otra parte, $\mathrm{rg}K_0(H') = \mathrm{rg}K_0(H) - 1$.

Si X no es proyectivo, entonces $\mathrm{Hom}_H(X, H) = 0$ y podemos considerar la categoría perpendicular $X^{\perp}$. Por (6.5) existe un álgebra hereditaria H' tal que $\mathrm{rg}K_0(H') = \mathrm{rg}K_0(H) - 1$ y $X^{\perp} \cong \mathrm{mod}H'$. Además, $T \in X^{\perp}$ y entonces T puede ser considerado como un H' - módulo inclinante parcial. En efecto, sabemos que toda sucesión $0 \to T \to E \to T \to 0$ se parte. En particular, toda tal sucesión en $X^{\perp}$ se parte. Entonces, considerando a T como H'-módulo, tenemos que $\mathrm{Ext}^1_{H'}(T, T) = 0$. Como H' es hereditaria, T es inclinante parcial sobre H'.

Así, en cada caso, hemos disminuido el rango del grupo de Grothendieck. Reiterando estas operaciones, terminamos obteniendo un álgebra hereditaria C tal que $rgK_0(C) = |\mathrm{ind}T|$ y, además, $\mathrm{End}\,T_C \cong \mathrm{End}\,T_H$. Esto finaliza la demostración. $\square$

Ejemplo 6.8. El teorema (6.7) suministra una técnica poderosa para verificar cuándo un álgebra no es inclinada. En efecto, es suficiente hallar un idempotente e del álgebra A tal que eAe no sea inclinada. Entonces seguirá del teorema que A tampoco lo es.

Sea entonces A dada por el carcaj

$$\underset{1}{\circ} \xleftarrow{\varepsilon} \underset{2}{\circ} \xleftarrow{\delta} \underset{3}{\circ} \xleftarrow{\gamma} \underset{4}{\circ} \xleftarrow{\beta} \underset{5}{\circ} \xleftarrow{\alpha} \underset{6}{\circ}$$

con las relaciones $\alpha\beta = 0$, $\delta\varepsilon = 0$. Consideremos $e = e_1 + e_2 + e_5 + e_6$. Entonces $B = eAe$ está dada por el carcaj

$$\underset{1}{\circ} \xleftarrow{\nu} \underset{2}{\circ} \xleftarrow{\mu} \underset{5}{\circ} \xleftarrow{\lambda} \underset{6}{\circ}$$

con las relaciones $\lambda\mu = 0$, $\mu\nu = 0$. Entonces B no es inclinada. En efecto, la dimensión proyectiva del módulo simple en 6 es igual a 3, ya que tenemos la resolución proyectiva

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} 6 \\ 5 \end{smallmatrix} \longrightarrow 6 \longrightarrow 0$$

Por lo tanto, $\mathrm{dim.gl.}B \geq 3$ (de hecho es fácil verificar que $\mathrm{dim.gl.}B = 3$). Por (1.4) (a), B no es inclinada. Luego, A tampoco lo es.

BIBLIOGRAFIA

[AF] Assem,I., Tilting theory -an introduction, Topics in Algebra, *Banach Center Publ.* 26, Part 1, PWN, (1990) 127-180.

[A2] Assem, I., Left sections and the left part of an artin algebra, *por aparecer en Colloq. Math*, (2007).

[A3] Assem, I., *Algèbres et modules*, Cours et exercices, Masson (Paris)/Presses de l'Université d'Ottawa (Ottawa), (1997).

[APT] Assem, I. Platzeck, M. I., and Trepode, S., On the representation dimension of tilted and laura algebras, *J. Algebra* 296 (2), (2006), 426-439.

[ASS] Assem, I. Simson, D., and Skowronki, A., *Elements of the representation theory of Associative Algebras*, London Math. Soc. Student Texts 85, Cambridge University Press, (2006).

[Au1] Auslander, M., Representation theory of artin algebras I, *Comm. Algebra* 1 (3), (1974), 177-268.

[Au2] Auslander, M., Representation theory of artin algebras II, *Comm. Algebra* 1 (4), (1974), 269-310.

[AuR1] Auslander, M. and Reiten, I., Representation theory of artin algebras III, almost split sequences, *Comm. Algebra* 3 (3), (1975), 239-294.

[AuR2] Auslander, M., and Reiten, I., Representation theory of artin algebras IV : invariants given by almost split sequences, *Comm. Algebra* 5, (1977), 443-518.

[AuR3] Auslander, M., and Reiten, I., Representation theory of artin algebras V : methods for computing almost split sequences and irreducible morphisms, *Comm. Algebra* 5 (5), (1977), 519-554.

[AuR4] Auslander, M. and Reiten, I., Representation theory of artin algebras VI : a functorial approach to almost split sequences *Comm. Algebra* 6, (1978), 257-300.

[AuS] Auslander, M. and Smalø, S. O., Almost split sequences in subcategories, *J. Algebra* 69, (1981), 426-454. *Addendum, J. Algebra* 71, (1981), 592-594.

[AuPR] Auslander, M., Platzeck, M. I. and Reiten, I., Coxeter functors without diagrams, *Trans. Amer. Math. Soc.* 250, (1979), 1-46.

[AuRS] Auslander, M., Reiten, I., and Smalø, S. O., *Representation theory of artin algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36, (1995).

[B] Bakke, Ø., Some characterizations of tilted algebras, *Math. Scand.* 63 (1), (1988), 43-50.

[BGP] Bernstein, I. N., Gelfand, I. M. and Ponomarev, V. A., Coxeter functors and Gabriel's theorem, *Uspekhi Mat Nauk* 28 (2), 19-33 *Russian Math Surveys* 28, (1973), 17-32.

[Bo] Bongartz, K., Tilted algebras, SLN 903 (1981) 26-38.

[BB] Brenner, S. et Butler, M. C. R., Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors, *Proc. ICRA II,* (1979), SLN 832, (1980), 103-170.

[BMRRT] Buan, A. B., Marsh, R., Reineke, M., Reiten, I. and Todorov, G., Tilting theory and cluster combinatorics, *Adv. Math.* 204 (2), (2006), 572-618.

[Bu] Butler, M. C. R., The construction of almost split sequences I, *Proc. London Math. soc.* 40, (1980), 72-86.

[CE] Cartan, H. and Eilenberg, S., *Homological algebra*, Princeton University Press, (1956).

[G] Gabriel, P., Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras, *Proc. ICRA II,* (1979), SLN 831, (1980), 1-80.

[GR] Gabriel, P. and Roiter, A. V., Representations of finite dimensional algebras, *Encyclopedia of Mathematical Sciences,* Vol. 73, *Springer Verlag,* (1992).

[GL] Geigle, W. and Lenzing, H., Perpendicular categories with applications to representations and sheaves, *J. Algebra* 144, (1991), 273-343.

[H1] Happel, D., On the derived category of a finite dimensional algebra, *Comment. Math. Helv.* 62 (3), (1987), 339-389.

[H2] Happel, D., Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras, *London Math. Soc. Lecture Note* 119, *Cambridge Univ. Press,* (1988).

[HR1] Happel, D. and Ringel, C. M., Tilted algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 274, (2), (1982), 399-443.

[HR2] Happel, D. and Ringel, C. M., Construction of tilted algebras, *Proc. ICRA III (Puebla 1980),* SLN 903, (1981), 125-144.

[HRS] Happel, D., Reiten, I. and Smalø, S. O., Tilting in abelian categories and quasitilted algebras, *Memoirs of the Amer. Math. Soc.* 575, Vol. 120, (1996).

[Ho1] Hoshino, M., On splitting torsion theories induced by tilting modules, *Comm. Algebra*, Vol. 11, (4), (1983), 427-441.

[Ho2] Hoshino, M., Tilting modules and torsion theories, *Bull. London Math. Soc.* 14, (1982), 334-336.

[Ho3] Hoshino, M., Happel-Ringel's theorem on tilted algebras, *Tsukuba J. Math.*, Vol. 26, (2), (1982), 289-292.

[K] Kerner, O., Tilting wild algebras, *J. London Math. Soc. (2)* 39, (1989), 29-47.

[L1] Liu, S., The connected components of the Auslander-Reiten quiver of a tilted algebra, *J. Algebra* 161 (2), (1993), 505-523.

[L2] Liu, S., Tilted algebras and generalized standard Auslander-Reiten components, *Arch. Math.* Vol. 61, (1993), 12-19.

[M] Miyashita, Y., Tilting modules of finite projective dimension, Math. Z. 193, (1986), 113-146.

[R] Reiten, I., The use of almost split sequences in the representation theory of artin algebras, *Proc. Workshop ICRA III*, SLN 944, (1981), 29-104.

[Ri1] Ringel, C. M., Tame algebras and integral quadratic forms, SLN 1099, (1984).

[Ri2] Ringel, C. M., The regular components of the Auslander-Reiten quiver of a tilted algebra, *Chinese Ann. Math. Ser. B 9*, No. 1, (1988), 1-18.

[Ri3] Ringel, C. M., Some remarks concerning tilting modules and tilted algebras. Origin. Relevance. Future, in : *Handbook of Tilting Theory* (2007)

[Ro] Rotman, J., *An introduction to homological algebra*, Academic Press, (1979).

[S1] Skowronski, A., Regular Auslander-Reiten components containing directing modules, *Proc. Amer. Math. Soc.* 120 (1), (1994), 19-26.

[S2] Skowronski, A., Generalized standard Auslander-Reiten components without oriented cycles, *Osaka J. Math.* 30, (1993), 515-527.

[Sm] Smalø, S. O., Torsion theories and tilting modules, *Bull. London Math. Soc.* 16, (1984), 518.

INDICE ALFABETICO