# Particiones graficales

Luiz F. Monteiro (*), Aída Kremer (**) y Agustín Claverie (***)
(*) INMABB-C.O.N.I.C.E.T.-Universidad Nacional del Sur
(**) Departamento de Matemática-Universidad Nacional del Sur
(***) Laboratorio de Matemática - Departamento de Matemática-Universidad Nacional del Sur
luizmont@criba.edu.ar - akremer@uns.edu.ar - claverie@uns.edu.ar

**Resumen**

Las particiones graficales definidas en la Sección 2 han sido estudiadas por C.C. Rousseau y F. Ali [7], G. Sierksma y H. Hoogeveen [8], T. M. Barnes y C. D. Savage [2, 3]. En estas notas determinamos, de un modo diferente, el cardinal del conjunto $G(n)$ de las particiones graficales donde $n$ es un número natural par. Además una fórmula para determinar $|G(n)|$ y como implementar un programa para el cálculo de $|G(n)|$. Los resultados teóricos fueron obtenidos por los dos primeros autores y la implementación de un programa en lenguaje C y los resultados numéricos por A. Claverie.

## 1. Introducción

Un grafo simple con $n$ vértices es aquel que no tiene bucles y tal que a lo sumo existe una arista entre dos vértices.
Si $G$ es un grafo simple con $n$ vértices y $v$ es un vértice de $G$ entonces el grado de $v$, en notación $grad(v)$ es el número de aristas incidentes con $v$, luego como $G$ no tiene bucles (C1): $0 \leq grad(v) \leq n-1$. Además (C2): $\sum\limits_{v \in G} grad(v)$ es un número par dado que $\sum\limits_{v \in G} grad(v) = 2|A(G)|$, donde $A(G)$ es el conjunto de aristas de $G$.

Una sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de números enteros no negativos se dice una *sucesión de grado* de un grafo simple $G$ si los vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de $G$ pueden etiquetarse $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de forma tal que $gr(v_i) = x_i$, para $1 \leq i \leq n$.

Una sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de números enteros no negativos se dice una *sucesión grafical* si es la sucesión de grados de algún grafo simple.

Por lo indicado precedentemente toda sucesión grafical verifica las condiciones (C1) y (C2). Sin embargo estas dos condiciones no implican que una sucesión que las verifique, sea grafical. Por ejemplo si $n = 3$, la sucesión $2, 0, 0$ verifica (C1) y (C2) y no existe ningún grafo simple con 3 vértices tal que uno de sus vértices tenga grado 2 y los restantes grado 0. En efecto, si $G = \{v_1, v_2, v_3\}$ y por ejemplo $grad(v_1) = 2$ entonces necesariamente $v_1 v_2$ y $v_1 v_3$ son aristas de $G$ y por lo tanto $grad(v_2) \geq 1$, $grad(v_3) \geq 1$.

Para indicar una sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de números enteros no negativos vamos a utilizar la notación $x(n)$. Claramente si $x(n)$ es una sucesión grafical entonces toda permutación de la misma es una sucesión grafical. Dos grafos simples con $n$ vértices $G$ y $G'$ son isomorfos si y solo si la sucesión de grados de $G$ es una permutación de la sucesión de grados de $G'$. Por lo tanto si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es la sucesión de grados de un grafo simple con $n$ vértices, existe un grafo simple $G'$ isomorfo a $G$ cuya sucesión de grados $y_1, y_2, \ldots, y_n$ verifica $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$.

Un vértice $v$ de un grafo simple se dice aislado si $grad(v) = 0$. Se denomina grafo simple nulo con $n$ vértices al grafo que no tiene aristas, esto es todos sus vértices son aislados.

## 2. Particiones graficales

Se denomina *partición grafical* de un número entero positivo $n$ a toda sucesión de enteros <u>positivos</u> $x_1, x_2, \ldots, x_h$ tal que $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_h$, $\sum_{i=1}^{h} x_i = n$ y es la sucesión de grados de algún grafo simple sin puntos aislados. Claramente $h \leq n$, (ver por ejemplo T. M. Barnes y C. D. Savage [2, 3]). Como los $x_i$ son los grados de un grafo simple sin puntos aislados entonces $x_i \geq 1$, para todo $i$ y $h - 1 \geq x_1$. Las particiones graficales existen solamente cuando $n$ es par, dado que la suma de los grados de los vértices de un grafo es un número par.

Denotemos como Barnes y Savage, con $G(n)$ el conjunto de todas las particiones graficales del entero positivo <u>par</u> $n$. Es fácil ver que:

$$G(2) = \{1, 1\}, \quad G(4) = \{2, 1, 1 \ ; \ 1, 1, 1, 1\},$$

$$G(6) = \{2, 2, 2 \ ; \ 2, 2, 1, 1 \ ; \ 3, 1, 1, 1 \ ; \ 2, 1, 1, 1, 1 \ ; \ 1, 1, 1, 1, 1, 1\}. \tag{2.1}$$

Barnes y Savage en 1995, [2] determinaron, vía un programa computacional, $|G(n)|$, para $2 \leq n \leq 220$ y en 1997, [3] indicaron un programa para generar los elementos de $G(n)$ más *eficiente* que el indicado en 1995.

Como en la Sección 1 para indicar una sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_h$ de números enteros <u>positivos</u> vamos a utilizar la notación $x(h)$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, $n$ par y $h \leq n$ sea $G(n, h)$ el conjunto de todos los elementos de $G(n)$ con $h$ términos. Luego

$$|G(n)| = \sum_{h \leq n} |G(n, h)|. \tag{2.2}$$

De acuerdo con los resultados de A. Tripathi y S. Vijay [9], $x(h) \in G(n, h)$ si y solo si:

$$h - 1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_h \geq 1, \tag{2.3}$$

$$\sum_{i=1}^{h} x_i = n, \tag{2.4}$$

$$A_x(j) = \sum_{k=1}^{j} x_k \leq j(j-1) + \sum_{k=j+1}^{h} (j \wedge x_k) = B_x(j), \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq s, \tag{2.5}$$

donde $s \leq h-1$ es el mayor entero tal que $x_s \geq s-1$.

Observemos que los resultados de A. Tripathi y S. Vijay [9] simplifican los indicados por P. Erdös y T. Gallai [6].

Dado un número entero positivo $n$, se denomina $h$-partición de $n$ donde $1 \leq h \leq n$, a toda sucesión de números enteros positivos $x_1, x_2, \ldots, x_h$ tales que $x_1 + x_2 + \cdots + x_h = n$, donde el orden de los sumandos es irrelevante. Luego podemos siempre suponer, sin inconvenientes, que $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_h$.

Representemos con $P(n,h)$ el conjunto de las $h$-particiones de $n$. Se conocen distintos modos de calcular $|P(n,h)|$, ver por ejemplo [4], [5], [1]. Designemos con $P(n)$ el conjunto de las particiones de un entero positivo $n$ y pongamos por definición $|P(0)| = 1$. Es bien conocido que $|P(n,n)| = 1 = |P(n,1)|$ y, ver por ejemplo [4], que:

$$|P(n,h)| = \sum_{q=1}^{n-h} |P(n-h,q)| = |P(n-h)|, \quad \text{para} \quad \left[\frac{n}{2}\right] < h \leq n. \tag{2.6}$$

Por (2.4), si $x(h) \in G(n,h)$ entonces $x(h)$ es una $h$-partición de $n$.

Además si $x(h), y(h) \in G(n,h)$ son diferentes ellas son $h$-particiones de $n$ diferentes luego:

**Lema 2.1** $|G(n,h)| \leq |P(n,h)|$.

**Lema 2.2** *Si $n$ es par, $n \geq 6$, $\dfrac{n}{2} + 1 \leq h \leq n$ y $x(h) \in P(n,h)$ entonces $x_{h-1} = x_h = 1$.*

**Dem.** Sea $x(h) \in P(n,h)$, luego $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_h$. Si $h = n$ entonces $x_i = 1$, para $1 \leq i \leq n$. Si $h < n$ entonces $x_1 > 1$ pues si $x_1 = 1$ entonces $n = \sum\limits_{i=1}^{h} x_i = h$, absurdo. Además $x_h = 1$ pues si $x_h \geq 2$ entonces $n = \sum\limits_{i=1}^{h} x_i \geq 2h$ luego $h \leq \frac{n}{2}$ y como por hipótesis $\dfrac{n}{2} + 1 \leq h$ tendríamos $\dfrac{n}{2} + 1 \leq \dfrac{n}{2}$, absurdo.
Si $x_{h-1} > 1$ entonces $n = \sum\limits_{i=1}^{h} x_i \geq 2(h-1) + 1 = 2h-1$ y como $n$ es par $n \geq 2h$ luego $h \leq \frac{n}{2}$ y como en el caso anterior llegamos a un absurdo. ■

**Lema 2.3** *Si $n$ es par, $n \geq 6$ y $\dfrac{n}{2} + 1 \leq h \leq n$ entonces $|G(n,h)| = |P(n,h)|$.*

**Dem.** Si $n = 6$ y (1) $4 \leq h \leq 6$ entonces por (2.1): $|G(6,4)| = 2$, $|G(6,5)| = 1$ y $|G(6,6)| = 1$.
Como se verifica (1) entonces por (2.6) $|P(6,4)| = |P(2)| = 2$, $|P(6,5)| = |P(1)| = 1$ y $|P(6,6)| = |P(0)| = 1$. Luego el lema es válido, para $n = 6$.

Sea $n$ par, $n \geq 8$ y supongamos si $x(h) \in P(n-2,h)$ donde $\dfrac{n}{2} = \dfrac{n-2}{2} + 1 \leq h \leq n-2$ entonces $x(h) \in G(n-2,h)$. Sea $x(h) \in P(n,h)$, donde $\dfrac{n}{2}+1 \leq h \leq n$, luego $x(h)$ verifica (2.3) y (2.4).

Si $h = n$ entonces $x_i = 1$, para $1 \leq i \leq n$ luego claramente $x(h)$ verifica (2.5) y por lo tanto $x(h) \in G(n,n)$.

Si $h < n$ entonces $x_1 \geq 2$, y por el Lema 2.2, $x_h = x_{h-1} = 1$ luego la sucesión $y(h-1)$ definida por $y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2, \ldots, y_{h-1} = x_{h-1}$ es una $(h-1)$-partición de $n-2$ luego $h-1 \leq n-2$. Como $\dfrac{n}{2}+1 \leq h$ entonces $\dfrac{n}{2} \leq h-1$ y como $\dfrac{n-2}{2} \leq \dfrac{n}{2}$ entonces $\dfrac{n-2}{2} \leq h-1 \leq n-2$ luego por la hipótesis $y(h-1) \in G(n-2,h-1)$ y por lo tanto verifica (2.5) esto es

$$A_y(j) = \sum_{k=1}^{j} y_k \leq j(j-1) + \sum_{k=j+1}^{h-1} (j \wedge y_k) = B_y(j), \text{ para } 1 \leq j \leq s,$$

donde $s \leq h-2$ es el mayor entero tal que $y_s \geq s-1$. Luego como $x_h = 1$ entonces

$$A_x(j) = A_y(j) + 1 \leq B_y(j) + 1 = j(j-1) + \sum_{k=j+1}^{h-1} (j \wedge y_k) + 1 = j(j-1) + \sum_{k=j+1}^{h} (j \wedge x_k).$$

Luego $x(h)$ verifica (2.5) y por lo tanto $P(n,h) \subseteq G(n,h)$ luego por el Lema 2.1 $P(n,h) = G(n,h)$, si $n$ es par, $n \geq 6$ y $\dfrac{n}{2}+1 \leq h \leq n$. ■

**Lema 2.4** *Si $n$ es par, $n \geq 6$ y $\dfrac{n}{2}+1 \leq h \leq n$ entonces $|P(n,h)| = |P(n-h)|$.*

**Dem.** $\left[\dfrac{n}{2}\right] = \dfrac{n}{2} < \dfrac{n}{2}+1$ y como por hipótesis $\dfrac{n}{2}+1 \leq h \leq n$ tenemos que $\left[\dfrac{n}{2}\right] < h \leq n$ luego por (2.6) $|P(n,h)| = |P(n-h)|$. ■

**Lema 2.5** *Si $n$ es par, $h \leq n$ y $x(h) \in G(n,h)$ entonces $x_1 \leq \dfrac{n}{2}$.*

**Dem.** En efecto, si $\dfrac{n}{2} < x_1$ entonces (1) $\dfrac{n}{2}+1 \leq x_1$.

Como $1 \leq x_i$, para $2 \leq i \leq h$ entonces (2) $h-1 \leq \sum_{i=2}^{h} x_i$. De (1) y (2) resulta $\dfrac{n}{2}+1+h-1 \leq x_1 + \sum_{i=2}^{h} x_i = \sum_{i=1}^{h} x_i = n$, y por lo tanto $h \leq \dfrac{n}{2}$.

Como $x(h)$ tiene que verificar, en particular la ecuación (2.5), para $j = 1$ tendríamos

$$h \leq \frac{n}{2} < x_1 = A_x(1) \leq B_x(1) = \sum_{k=2}^{h} (1 \wedge x_k) = h-1,$$

absurdo. ■

**Teorema 2.1** *Si $n$ es par, $8 \leq n$, entonces*

$$|G(n)| = \sum_{h=4}^{\frac{n}{2}} |G(n,h)| + \sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1} |P(h)|.$$

**Dem.** Por (2.2)

$$|G(n)| = \sum_{h \leq n} |G(n,h)| = \sum_{h \leq \frac{n}{2}} |G(n,h)| + \sum_{h=\frac{n}{2}+1}^{n} |G(n,h)|.$$

Por los Lemas 2.3 y 2.4, $|G(n,h)| = |P(n-h)|$, para $\frac{n}{2}+1 \leq h \leq n$. Pongamos $r = n-h$ luego si $h = \frac{n}{2}+1$ entonces $r = n - (\frac{n}{2}+1) = \frac{n}{2}-1$ y si $h = n$ entonces $r = 0$, por lo tanto:

$$|G(n)| = \sum_{h \leq \frac{n}{2}} |G(n,h)| + \sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1} |P(h)|.$$

Si $h = 3$ entonces $x_1 \leq 2$ luego $\sum_{i=1}^{3} x_i \leq 6$, absurdo pues debe ser $\sum_{i=1}^{3} x_i = n \geq 8$, luego:

$$|G(n)| = \sum_{h=4}^{\frac{n}{2}} |G(n,h)| + \sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1} |P(h)|.$$

■

**Observación 2.1** *Si $n = 14$ entonces $|G(14,4)| = 0$.*

*En efecto, si existiera $x(4) \in G(14,4)$, entonces $x_1 \leq 3$ y por lo tanto $\sum_{i=1}^{4} x_i \neq 14$. Entonces podemos formular la siguiente pregunta:*

*Dado $n \geq 12$ ¿cuál es el menor $h$ tal que $|G(n,h)| \neq 0$?*

**Lema 2.6** *Si $m \geq 4$, $n = m(m-1)$ y $x(m)$ es la sucesión definida por $x_i = m-1$ para $1 \leq i \leq m$, entonces $x(m) \in G(m(m-1), m)$.*

**Dem.** Claramente se verifica (2.3). Como $\sum_{i=1}^{m} x_i = m(m-1) = n$ entonces se verifica (2.4).
El mayor $s \leq m-1$ tal que $x_s \geq s-1$ es $s = m-1$, dado que $x_{m-1} = m-1 \geq m-1-1$.
$A_x(1) = m-1 = \sum_{k=2}^{m} (1 \wedge x_k) = B_x(1)$. Si $2 \leq j \leq m-1$ entonces $A_x(j) = j(m-1)$ y
$B_x(j) = j(j-1) + \sum_{k=j+1}^{m} (j \wedge x_k) = j(j-1) + \sum_{k=j+1}^{m} j = j(j-1)+(m-j)j = j(j-1+m-j) = j(m-1)$. Por lo tanto se verifica (2.5). ■

**Lema 2.7** *Si $m \geq 3$, $n = m(m-1)$ y $h < m$ entonces $|G(n,h)| = 0$.*

**Dem.** En efecto, si $h < m$ y $x(h) \in G(n,h)$ entonces $x_1 \leq h-1 < m-1$ y $\sum_{i=1}^{h} x_i \leq h(m-1) < m(m-1) = n$, absurdo. ■

**Lema 2.8** *Si $m \geq 4$, $n = m(m-1)+2$ e $y(m+1)$ está definida por $y_i = m-1$ para $1 \leq i \leq m$ e $y_{m+1} = 2$, entonces $y(m+1) \in G(m(m-1)+2, m+1)$.*

**Dem.** Obviamente se verifica (2.3). Como $\sum_{i=1}^{m+1} y_i = m(m-1)+2 = n$ se verifica (2.4).
El mayor $s \leq m$ tal que $y_s \geq s-1$ es $s = m-1$ pues $y_{m-1} = m-1 \geq m-1-1$.
$A_y(1) = m-1 \leq B_y(1) = \sum_{k=2}^{m+1}(1 \wedge y_k) = m$. Si $2 \leq j \leq m-1$ entonces $A_y(j) = j(m-1)$ y $B_y(j) = j(j-1) + \sum_{k=j+1}^{m+1}(j \wedge y_k) = j(j-1) + \sum_{k=j+1}^{m} j + 2 = j(j-1)+(m-j)j+2 = j(j-1+m-j)+2 = j(m-1)+2$. Luego se verifica (2.5). ■

**Lema 2.9** *Si $m \geq 3$, $n$ es par, $m(m-1)+2 \leq n \leq (m+1)m$ y $x(h) \in G(n,h)$, entonces $h \geq m+1$.*

**Dem.** En efecto, si $h < m+1$ entonces $h \leq m$. Como $x(h) \in G(n,h)$ entonces $x_1 \leq h-1 \leq m-1$ y $\sum_{i=1}^{m} x_i \leq m(m-1) < m(m-1)+2 \leq n$, luego no se verifica (2.4). ■

**Lema 2.10** *Si $n$ es par, $n \geq 6$, $h = \dfrac{n}{2}$ y $d(h)$ es la sucesión definida por $d_i = 2$, para $1 \leq i \leq h$ entonces $d(h) \in G(n, \frac{n}{2})$. Si $x(h) \in G(n,h)$ y $x_1 = 2$ entonces $x(h) = d(h)$.*

**Dem.** En efecto:

- Se verifica (2.3): Como $h \geq 3$ entonces $h-1 \geq 2 = d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_h = 2 \geq 1$.
- Se verifica (2.4): $\sum_{i=1}^{h} d_i = \dfrac{n}{2} \cdot 2 = n$.
- Se verifica (2.5):
  El mayor entero $s \leq h-1$ tal que $d_s \geq s-1$ es $s = 3$ entonces:
  $A_d(1) = 2 \leq h-1 = \sum_{k=2}^{h}(1 \wedge 2) = B_d(1)$.
  $B_d(2) = 2 + \sum_{k=3}^{h}(2 \wedge 2) = 2 + 2(h-2) = 2h-2$ y como $h \geq 3$ entonces $2h-2 \geq 4 = A_d(2)$.
  $B_d(3) = 3.2 + \sum_{k=4}^{h}(3 \wedge 2) = 6 + 2(h-3) = 2h$ y como $h \geq 3$ entonces $2h \geq 6 = A_d(3)$.

Supongamos que existe $i$, $2 \leq i \leq h$ tal que $x_i = 1$. Sea $i_0$ el menor índice tal que $x_{i_0} = 1$. Si $i_0 = h$ entonces $\sum_{i=1}^{h} x_i$ sería impar, absurdo.

Luego $i_0 < h$ y $n = \sum_{i=1}^{h} x_i = 2(i_0-1)+h-i_0+1 = i_0-1+\frac{n}{2} < h-1+\frac{n}{2} = \frac{n}{2}-1+\frac{n}{2} = n-1$, absurdo. ■

**Lema 2.11** *Si $n$ es par, $n \geq 8$ y $h = \dfrac{n}{2}$ entonces la sucesión $u(h)$ definida por $u_1 = h-1$, $u_2 = u_3 = 2$ y $u_i = 1$, para $4 \leq i \leq h$ pertenece a $G(n, \frac{n}{2})$. Si $x(h) \in G(n, \frac{n}{2})$ y $x_1 = h - 1 = \frac{n}{2} - 1$ entonces $x(h) = u(h)$.*

**Dem.**

- Se verifica (2.3): Como $h \geq 4$ entonces $u_1 = h - 1 \geq 3 \geq u_2 = 2 \geq u_3 = 2 \geq \cdots \geq 1 = x_h$.

- Se verifica (2.4): $\sum_{i=1}^{h} u_i = h - 1 + 4 + h - 3 = 2h = n$.

- Se verifica (2.5): El mayor $s \leq h - 1$ tal que $u_s \geq s - 1$ es $s = 3$ y
  $A_u(1) = h - 1 = \sum_{k=2}^{h} (1 \wedge u_k) = B_u(1)$.
  $B_u(2) = 2 + \sum_{k=3}^{h} (2 \wedge u_k) = 2 + 2 + (h - 3) = h + 1 = A_u(2)$.
  $B_u(3) = 3.2 + \sum_{k=4}^{h} (3 \wedge u_k) = 6 + h - 3 = h + 3 = A_u(3)$.

Si $x_2 = 1$ entonces $\sum_{i=1}^{h} x_i = h - 1 + h - 1 = 2h - 2 = n - 2 \neq n$.

Luego $2 \geq x_2$. Si $2 < x_2$ entonces $2h = n = \sum_{i=1}^{h} x_i = h-1+\sum_{i=2}^{h} x_i > h-1+2(h-1) = 3h-3$ y por lo tanto $3 > h = \frac{n}{2}$ luego $6 > n$, absurdo.
Por lo tanto $x_1 = h - 1 = \frac{n}{2} - 1$ y $x_2 = 2$. Si $x_3 = 1$ entonces $2h = n = \sum_{i=1}^{h} x_i = h - 1 + 2 + h - 2 = 2h - 1$ luego $0 = -1$, absurdo. Por lo tanto $x_1 = h - 1 = \frac{n}{2} - 1$ y $x_2 = x_3 = 2$.
Si $x_4 = 2$ entonces $2h = n = \sum_{i=1}^{h} x_i \geq h - 1 + 6 + h - 4 = 2h + 1$ luego $0 \geq 1$, absurdo.
Luego $x_i = 1$, para $4 \leq i \leq h$. Por lo tanto $x(h) = u(h)$. ■

**Corolario 2.1** $G(8, 4) = \{d(4), u(4)\}$.

**Dem.** En efecto, si $x(4) \in G(8, 4)$ entonces en particular $3 \geq x_1$.

- Si $x_1 = 1$ entonces $\sum_{i=1}^{4} x_i = 4 \neq 8$, absurdo.

- Si $x_1 = 2$ entonces no puede ser $x_2 = 1$ pues en este caso $\sum_{i=1}^{4} x_i = 5 \neq 8$. Luego $x_1 = x_2 = 2$. Si $x_3 = 1$ entonces $\sum_{i=1}^{4} x_i = 6 \neq 8$. Por lo tanto $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$ y en consecuencia $x(4) = d(4)$.

- Si $x_1 = 3$ no puede ser $x_2 = 1$ pues en este caso $\sum_{i=1}^{4} x_i = 6 \neq 8$. Si $x_2 = 3$ entonces para que se verifique (2.4) debe ser $x_3 = x_4 = 1$ pero en este caso

$$B_x(2) = 2 + \sum_{k=3}^{4}(2 \wedge 1) = 4 \not\geq A_x(2) = 6.$$

Luego $x_2 = 2$ y por lo tanto para que se verifiquen (2.3) y (2.4) debe ser $x_3 = 2$ y $x_4 = 1$. Por lo tanto $x(4) = u(4)$.

Entonces por los Lemas 2.10 y 2.11, $G(8,4) = \{d(4), u(4)\}$. ■

Luego por el Teorema 2.1, tenemos

$$|G(8)| = |G(8,4)| + \sum_{h=0}^{3} |P(h)| = 2 + 7 = 9.$$

**Lema 2.12** $|G(10,4)| = 1$.

**Dem.** En efecto, sea $x(4) \in G(10,4)$, luego por (2.3) $x_1 \leq 3$. Si $x_1 = 1$ entonces $\sum_{i=1}^{4} x_i = 4 \neq 10$. Si $x_1 = 2$ entonces $\sum_{i=1}^{4} x_i \leq 8 \neq 10$. Por lo tanto $x_1 = 3$. Si $x_2 = 1$, entonces $\sum_{i=1}^{4} x_i = 6 \neq n = 10$. Si $x_2 = 2$, entonces $10 = \sum_{i=1}^{4} x_i = 5 + x_3 + x_4$ luego $x_3 + x_4 = 5$ y como $2 = x_2 \geq x_3 \geq x_4$ esto es imposible. Luego $x_2 = 3$. Si $x_3 = 1$ entonces, $\sum_{i=1}^{4} x_i = 6 + 2 \neq n = 10$. Luego $x_3 = 2$ y como debe ser $\sum_{i=1}^{4} x_i = 10$ entonces $x_4 = 2$.

La sucesión $x(4) = 3,3,2,2$ verifica (2.5). En efecto, en este caso $s = 3$ y

- $B_x(1) = \sum_{k=2}^{4}(1 \wedge x_k) = 3 = A_x(1)$.
- $B_x(2) = 2 + \sum_{k=3}^{4}(2 \wedge x_k) = 6 = A_x(2)$.
- $B_x(3) = 6 + (3 \wedge x_4) = 8 = A_x(3)$.

Luego $G(10,4) = \{x(4)\}$ y por lo tanto $|G(10,4)| = 1$. ■

**Lema 2.13** $|G(10,5)| = 4$.

**Dem.** Por los Lemas 2.10 y 2.11, sabemos que $d(5), u(5) \in G(10,5)$. Sea $x(5) \in G(10,5) \setminus \{d(5), u(5)\}$, luego por (2.3) $x_1 \leq 4$ y como $x(5) \neq d(5)$ entonces $x_1 \neq 2$. Si $x_1 = 1$ entonces $\sum_{i=1}^{5} x_i = 5 \neq 10$. Luego $x_1 \in \{3,4\}$.

Supongamos que $x_1 = 3$.

Si $x_2 = 1$, entonces $\sum_{i=1}^{5} x_i = 7 \neq 10$. Luego $x_2 \in \{2,3\}$.

- Supongamos que $x_2 = 2$.
  Si $x_3 = 1$ entonces $\sum_{i=1}^{5} x_i = 8 \neq 10$. Luego $x_3 = 2$.
  Si $x_4 = 1$ entonces $\sum_{i=1}^{5} x_i = 9 \neq 10$. Luego $x_4 = 2$ y como $\sum_{i=1}^{5} x_i$ debe ser igual a 10 tenemos que $x_5 = 1$.
  Veamos que esta sucesión verifica (2.5). El mayor $s$ tal que $x_s \geq s - 1$ es $s = 3$.
  - $B_x(1) = \sum_{k=2}^{5}(1 \wedge x_k) = 4 \geq 3 = A_x(1)$.
  - $B_x(2) = 2 + \sum_{k=3}^{5}(2 \wedge x_k) = 7 \geq 5 = A_x(2)$.
  - $B_x(3) = 6 + \sum_{k=4}^{5}(3 \wedge x_k) = 9 \geq 7 = A_x(3)$.
- Supongamos que $x_2 = 3$.
  Si $x_3 = 1$ entonces $\sum_{i=1}^{5} x_i = 9 \neq 10$. Luego $x_3 = 2$.
  Si $x_4 = 2$ entonces $\sum_{i=1}^{5} x_i \geq 10$. Luego $x_4 = x_5 = 1$.
  Veamos que esta sucesión verifica (2.5). El mayor $s$ tal que $x_s \geq s - 1$ es $s = 3$.
  - $B_x(1) = \sum_{k=2}^{5}(1 \wedge x_k) = 4 \geq 3 = A_x(1)$.
  - $B_x(2) = 2 + \sum_{k=3}^{5}(2 \wedge x_k) = 6 = A_x(2)$.
  - $B_x(3) = 6 + \sum_{k=4}^{5}(3 \wedge x_k) = 8 = A_x(3)$.

Supongamos que $x_1 = 4$. Luego $x_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$.
Si $x_2 = 1$ entonces $\sum_{i=1}^{5} x_i = 8 \neq 10$.
Si $x_2 = 3$ entonces para que $\sum_{i=1}^{5} x_i = 10$, debe ser $\sum_{i=3}^{5} x_i = 3$ luego $x_3 = x_4 = x_5 = 1$. Pero en este caso la sucesión no verifica (2.5), dado que $B_x(2) = 2+\sum_{k=3}^{5}(2\wedge x_k) = 5 \ngeq 7 = A_x(2)$.
Si $x_2 = 4$ entonces $\sum_{i=1}^{5} x_i > 10$.
Por lo tanto $x_2 = 2$. Si $x_3 = 1$ entonces $\sum_{i=1}^{5} x_i = 9 \neq 10$. Luego $x_3 = 2$. Si $x_4 = 2$ entonces $\sum_{i=1}^{5} x_i > 10$ y por lo tanto $x_4 = x_5 = 1$, esto es $x(5) = u(5)$. ■

Por el Lema 2.12, $G(10, 4)$ tiene un solo elemento que es: $3, 3, 2, 2$ y por el Lema 2.13, los elementos de $G(10, 5)$ son

$$3, 2, 2, 2, 1 \quad 3, 3, 2, 1, 1, \quad 2, 2, 2, 2, 2, \quad 4, 2, 2, 1, 1$$

Luego:

$$|G(10)| = \sum_{h=4}^{5} |G(10,h)| + \sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1} P(h) = 1 + 4 + 12 = 17.$$

Si $n$ es par, sea $\Lambda(n)$ el menor número tal que $|G(n,\Lambda(n))| \neq 0$. Vimos que: $\Lambda(2) = 1,\ \Lambda(4) = 3,\ \Lambda(6) = 3,\ \Lambda(8) = 4,\ \Lambda(10) = 4.$

- Si $n = m(m-1)$ donde $m \geq 4$, por los Lemas 2.6 y 2.7, $\Lambda(m(m-1)) = m$,
- si $2 \leq r < 2m$ y $m(m-1)+2 \leq n = m(m-1)+r \leq (m+1)m$, por los Lemas 2.8 y 2.9, $\Lambda(m(m-1)+r) = m+1$.

Luego:

**Teorema 2.2** *Si $n$ es par, $12 \leq n$, entonces*

$$|G(n)| = \sum_{h=\Lambda(n)}^{\frac{n}{2}} |G(n,h)| + \sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1} |P(h)|.$$

**Lema 2.14** *Si $n$ es par, $n \geq 12$, $h \leq \frac{n}{2}$, $x(h) \in G(n,h)$ y $x(h) \notin \{d(\frac{n}{2}), u(\frac{n}{2})\}$, entonces $3 \leq x_1 \leq \frac{n}{2} - 2$, $x_2 \geq 2$ y $x_3 \geq 2$.*

**Dem.** Como $x(h) \in G(n,h)$ con $h \leq \frac{n}{2}$, entonces $x_1 \neq 1$. Luego $x_1 \geq 2$. Si $x_1 = 2$ como $x(h) \neq d(\frac{n}{2})$ entonces existe i, $2 \leq i \leq h$, tal que $x_i \neq d_i = 2$. Sea $i_0$ el menor índice tal que $x_{i_0} \neq d_i = 2$. Luego $n = \sum\limits_{i=1}^{h} x_i = \sum\limits_{i=1}^{i_0-1} x_i + \sum\limits_{i=i_0}^{h} x_i = i_0 - 1 + h \leq i_0 - 1 + \frac{n}{2}$ entonces $\frac{n}{2} \leq i_0 - 1$ y por lo tanto $n \leq 2i_0 - 2 \leq 2h - 2 \leq n - 2$, absurdo. Luego $x_1 \geq 3$.
Por (2.3) sabemos que (1) $x_1 \leq h - 1$.
Como $x(h) \neq u(\frac{n}{2})$ entonces $x_i \neq h-1$, para $1 \leq i \leq h$, en particular (2) $x_1 \neq h-1$. De (1) y (2) resulta que $x_1 < h-1$ esto es $x_1 \leq h - 2 \leq \frac{n}{2} - 2$.

Si $x_2 = 1$ entonces $x_i = 1$, para $2 \leq i \leq h$, luego

$$n = \sum_{i=1}^{h} x_i = x_1 + \sum_{i=2}^{h} x_i \leq \frac{n}{2} - 2 + h - 1 = \frac{n}{2} + h - 3$$

y por lo tanto $\frac{n}{2} \leq h - 3$ y como $h \leq \frac{n}{2}$ entonces $h \leq h-3$, absurdo. Luego $x_2 \geq 2$.

Si $x_3 = 1$ entonces $x_i = 1$, para $3 \leq i \leq h$. Como $x(h) \in G(n,h)$ entonces debe verificar (2.5), en particular

$$A_x(2) = x_1 + x_2 \leq B_x(2) = 2 + \sum_{k=3}^{h} (2 \wedge x_k) = 2 + h - 2 = h,$$

y como $h \leq \frac{n}{2}$ entonces $x_1 + x_2 \leq \frac{n}{2}$ y por lo tanto (3) $\frac{n}{2} = n - \frac{n}{2} \leq n - (x_1 + x_2)$ y como $n = \sum\limits_{i=1}^{h} x_i = x_1 + x_2 + \sum\limits_{i=3}^{h} x_i$ entonces (4) $n - (x_1 + x_2) = \sum\limits_{i=3}^{h} x_i = h - 2$. De (3) y (4) resulta $\frac{n}{2} \leq h - 2$ y por lo tanto $\frac{n}{2} + 2 \leq h$ y como por hipótesis $h \leq \frac{n}{2}$ tendríamos que $\frac{n}{2} + 2 \leq \frac{n}{2}$, absurdo. Luego $x_3 \geq 2$. ■

Si $n$ par, $n \geq 12$, $h \leq \frac{n}{2}$, $p \leq h-1$ sea $G(n,h,p) = \{x(h) \in G(n,h) : x_1 = p\}$. Luego $|G(n,h)| = \sum_{p=2}^{h-1} |G(n,h,p)|$.

**Lema 2.15** $|G(n, \frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 2)| = 2$, *para* $n$ *par*, $n \geq 12$.

**Dem.** Sea $h = \frac{n}{2}$ .

- Sea $x(h)$ definida por $x_1 = \frac{n}{2} - 2$, $x_2 = x_3 = x_4 = 2$ y $x_i = 1$, para $5 \leq i \leq h$. Luego $x(h)$ verifica (2.3) y $\sum_{i=1}^{h} x_i = \frac{n}{2} - 2 + 6 + h - 4 = \frac{n}{2} + h = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$, por lo tanto $x(h)$ verifica (2.4).

  El mayor $s$ tal que $x_s \geq s - 1$ es $s = 3$.

  - $B_x(1) = \sum_{k=2}^{h} (1 \wedge x_k) = h - 1 > h - 2 = A_x(1)$.
  - $B_x(2) = 2 + \sum_{k=3}^{h} (2 \wedge x_k) = \frac{n}{2} + 2 \geq \frac{n}{2} = A_x(2)$.
  - $B_x(3) = 6 + \sum_{k=4}^{h} (3 \wedge x_k) = \frac{n}{2} + 4 \geq \frac{n}{2} + 2 = A_x(3)$.

  Luego $x(h)$ verifica (2.5).

- Sea $y(h)$ definida por $y_1 = \frac{n}{2} - 2$, $y_2 = 3$, $y_3 = 2$ e $y_i = 1$, para $4 \leq i \leq h$.
  Como $n \geq 12$ $y_1 \geq 3$, entonces se verifica (2.3). Como $\sum_{i=1}^{h} y_i = \frac{n}{2} - 2 + 5 + h - 3 = \frac{n}{2} + h = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$, entonces se verifica (2.4).

  El mayor $s$ tal que $y_s \geq s - 1$ es $s = 3$.

  - $B_y(1) = \sum_{k=2}^{h} (1 \wedge y_k) = h - 1 > h - 2 = A_y(1)$.
  - $B_y(2) = 2 + \sum_{k=3}^{h} (2 \wedge y_k) = \frac{n}{2} + 1 = A_y(2)$.
  - $B_y(3) = 6 + \sum_{k=4}^{h} (3 \wedge y_k) = \frac{n}{2} + 3 = A_y(3)$.

  Luego $y(h)$ verifica (2.5).

- Sea $z(h) \in G(n,h)$ tal que $z_1 = \frac{n}{2} - 2$.

  - Si $z_2 = 1$ entonces $\sum_{i=1}^{h} z_i = \frac{n}{2} - 2 + h - 1 = n - 3 \neq n$. Luego $z_2 \geq 2$.

- Si $z_2 \geq 4$ entonces $n = \sum\limits_{i=1}^{h} z_i \geq \frac{n}{2} - 2 + 4 + \sum\limits_{i=3}^{h} z_i$ luego $\frac{n}{2} - 2 \geq \sum\limits_{i=3}^{h} z_i$ y como los $z_i \geq 1$ entonces $\sum\limits_{i=3}^{h} z_i \geq \frac{n}{2} - 2$. Luego $\sum\limits_{i=3}^{h} z_i = \frac{n}{2} - 2$ y por lo tanto $z_i = 1$, para $3 \leq i \leq h$.

  Luego $B_z(2) = 2 + \sum\limits_{k=3}^{h} (2 \wedge z_k) = \frac{n}{2} \ngeq A_z(2) = \frac{n}{2} + 2$. En consecuencia $z_2 = 2$ ó $z_2 = 3$.
- Si $z_2 = 2$ y $z_3 = 1$ entonces $\sum\limits_{i=1}^{h} z_i = n - 2 \neq n$. Luego $z_2 = z_3 = 2$.
- Si $z_4 = 1$ entonces $\sum\limits_{i=1}^{h} z_i = n - 1 \neq n$. Luego $z_2 = z_3 = z_4 = 2$.
- Si $z_5 = 2$ entonces $\sum\limits_{i=1}^{h} z_i = n + 1 \neq n$. Luego $z_i = 1$, para $5 \leq i \leq h$.
- Si $z_2 = 3$ y $z_3 = 1$ entonces $\sum\limits_{i=1}^{h} z_i = n - 1 \neq n$.
- Si $z_2 = 3$ y $z_3 = 3$ entonces $\sum\limits_{i=1}^{h} z_i = n + 1 \neq n$. Luego $z_2 = 3,\ z_3 = 2$.
- Si $z_4 = 2$ entonces $\sum\limits_{i=1}^{h} z_i = n + 1 \neq n$. Luego $z_2 = 3,\ z_3 = 2$ y $z_i = 1$, para $4 \leq i \leq h$.

Esto es, si $n$ es par y $n \geq 12$ los únicos elementos de $G(n, \frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 2)$ son las sucesiones

$$\underbrace{\frac{n}{2} - 2, 2, 2, 2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{\frac{n}{2}-4}}_{\frac{n}{2}} \qquad \text{y} \qquad \underbrace{\frac{n}{2} - 2, 3, 2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{\frac{n}{2}-3}}_{\frac{n}{2}}.$$

■

**Lema 2.16** $|G(n, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} - 2)| = 2$, *para $n$ par, $n \geq 12$.*

**Dem.** Sea $h = \frac{n}{2} - 1$.

- Si $n = 12$ entonces $h = 5$.
  - Sea $x(5)$ definida por $x_1 = 4, x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 2$. Luego $x(5)$ verifica (2.3) y (2.4).
    El mayor $s$ tal que $x_s \geq s - 1$ es $s = 3$.
    - $B_x(1) = \sum\limits_{k=2}^{5} (1 \wedge x_k) = 4 = A_x(1)$.
    - $B_x(2) = 2 + \sum\limits_{k=3}^{5} (2 \wedge x_k) = 8 \geq 6 = A_x(2)$.

- $B_x(3) = 6 + \sum_{k=4}^{5}(3 \wedge x_k) = 10 \geq 8 = A_x(3)$.

Luego $x(5)$ verifica (2.5).

- Sea $y(5)$ definida por $y_1 = 4$, $y_2 = 3$, $y_3 = y_4 = 2$ e $y_5 = 1$. Luego verifica (2.3) y (2.4).

El mayor $s$ tal que $y_s \geq s - 1$ es $s = 3$.

- $B_y(1) = \sum_{k=2}^{5}(1 \wedge y_k) = 4 = A_y(1)$.
- $B_y(2) = 2 + \sum_{k=3}^{5}(2 \wedge y_k) = 2 + 5 = 7 = A_y(2)$.
- $B_y(3) = 6 + \sum_{k=4}^{5}(3 \wedge y_k) = 6 + 3 = 9 = A_y(3)$.

Luego $y(5)$ verifica (2.5).

- Sea $z(5) \in G(12, 5)$ tal que $z_1 = 4$.

Si $z_2 = 1$ entonces $\sum_{i=1}^{5} z_i = 8 \neq 12$. Luego $z_2 \geq 2$.

Si $z_2 = 4$ y $z_3 = 1$ entonces $\sum_{i=1}^{5} z_i = 11 \neq 12$.

Si $z_2 = 4$ y $z_3 = 2$ entonces para que $\sum_{i=1}^{5} z_i = 12$ deben ser $x_4 = x_5 = 1$, pero en este caso $B_z(2) = 6 \ngeq A_z(2) = 8$.

Si $z_2 = 4$ y $z_3 = 3$ entonces $\sum_{i=1}^{5} z_i > 12$.

Si $z_2 = 4$ y $z_3 = 4$ entonces $\sum_{i=1}^{5} z_i > 12$.

Luego $z_2 = 2$ ó $z_2 = 3$.

Si $z_2 = 2$ y $z_3 = 1$ entonces $\sum_{i=1}^{5} z_i = 9 \neq 12$.

Si $z_2 = z_3 = 2$ y $z_4 = 1$ entonces $\sum_{i=1}^{5} z_i = 10 \neq 12$.

Si $z_2 = z_3 = z_4 = 2$ y $z_5 = 1$ entonces $\sum_{i=1}^{5} z_i = 11 \neq 12$.

Luego solo puede ser $z_5 = 2$ y por lo tanto $z(5) = x(5)$.

Si $z_2 = 3$ $z_3 = 1$ entonces $\sum_{i=1}^{5} z_i = 10 \neq 12$.

Si $z_2 = 3$,$z_3 = 3$ y $z_4 = 1$ entonces $\sum_{i=1}^{5} z_i = 10$, pero $B_z(2) = 6 \ngeq 7 = A_z(2)$

Si $z_2 = 3$,$z_3 = 3$ y $z_4 = 3$ entonces $\sum_{i=1}^{5} z_i > 12$.

Si $z_2 = 3$, $z_3 = 2$ y $z_4 = 1$ entonces $\sum_{i=1}^{5} z_i = 11$.

Si $z_2 = 3$, $z_3 = z_4 = z_5 = 2$ entonces $\sum_{i=1}^{5} z_i = 13$.

Luego $z_2 = 3, z_3 = z_4 = 2$ y $z_5 = 1$ y por lo tanto $z(5) = y(5)$.

Por lo tanto si $n = 12$ los únicos elementos de $G(12, 5, 4)$ son las sucesiones

$$4, 2, 2, 2, 2 \qquad \text{y} \qquad 4, 3, 2, 2, 1$$

- Supongamos ahora que $n$ es par, $n \geq 14$, luego $h \geq 6$.

  - Sea $x_1 = \frac{n}{2} - 2$, $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 2$ y $x_i = 1$, para $6 \leq i \leq h$. Luego $x(h)$ verifica (2.3) y $\sum_{i=1}^{h} x_i = \frac{n}{2} - 2 + 8 + h - 5 = \frac{n}{2} + 1 + h = \frac{n}{2} + 1 + \frac{n}{2} - 1 = n$, luego se verifica (2.4).
    El mayor $s$ tal que $x_s \geq s - 1$ es $s = 3$.
    - $B_x(1) = \frac{n}{2} - 2 = A_x(1)$.
    - $B_x(2) = 2 + \sum_{k=3}^{h} (2 \wedge x_k) = \frac{n}{2} + 2 \geq \frac{n}{2} = A_x(2)$.
    - $B_x(3) = 6 + \sum_{k=4}^{h} (3 \wedge x_k) = 6 + 4 + h - 5 = h + 5 = \frac{n}{2} - 1 + 5 = \frac{n}{2} + 4 \geq \frac{n}{2} + 2 = A_x(3)$.

    Luego $x(h)$ verifica (2.5).
  - Sea $y(h)$ definida por $y_1 = \frac{n}{2} - 2$, $y_2 = 3$, $y_3 = y_4 = 2$ e $y_i = 1$, para $5 \leq i \leq h$. Como $n \geq 12$ entonces se verifica (2.3). Como $\sum_{i=1}^{h} y_i = n$, $y(h)$ verifica (2.4).

    El mayor $s$ tal que $y_s \geq s - 1$ es $s = 3$.
    - $B_y(1) = \frac{n}{2} - 2 = A_x(1)$.
    - $B_y(2) = 2 + \sum_{k=3}^{h} (2 \wedge y_k) = \frac{n}{2} + 1 = A_y(2)$.
    - $B_y(3) = 6 + \sum_{k=4}^{h} (3 \wedge y_k) = \frac{n}{2} + 3 = A_y(3)$.

    Luego $y(h)$ verifica (2.5).
  - Sea $z(h) \in G(n, h)$ tal que $z_1 = \frac{n}{2} - 2$.

    <u>Si $z_2 = 1$,</u> entonces $\sum_{i=1}^{h} z_i = n - 4 \neq n$. Luego $z_2 \geq 2$.

    <u>Si $z_2 \geq 4$,</u> entonces $n = \sum_{i=1}^{h} z_i \geq \frac{n}{2} - 2 + 4 + \sum_{i=3}^{h} z_i$ luego $\frac{n}{2} - 2 \geq \sum_{i=3}^{h} z_i$. Como $z_i \geq 1$, para $3 \leq i \leq h$ entonces $\sum_{i=3}^{h} z_i \geq \frac{n}{2} - 3$ luego (1) $\sum_{i=3}^{h} z_i = \frac{n}{2} - 2$ ó

(2) $\sum_{i=3}^{h} z_i = \frac{n}{2} - 3$. Si ocurre (1) entonces $z_3 = 2$ y $z_i = 1$, para $1 \leq i \leq h$ y entonces $B_z(2) = 2 + 2 + h - 3 = \frac{n}{2}$ y como $A_z(2) \geq \frac{n}{2} + 2$ no se verifica (2.5). Si ocurre (2) entonces $z_i = 1$, para $3 \leq i \leq h$ y $B_z(2) = 2 + h - 2 = h = \frac{n}{2} - 1$ y como $A_z(2) \geq \frac{n}{2} + 2$ no se verifica (2.5).

Luego (A) $z_2 = 2$ ó (B) $z_2 = 3$.

CASO (A) $\underline{\text{Si } z_2 = 2 \text{ y } z_3 = 1,}$ entonces $\sum_{i=1}^{h} z_i = n - 3 \neq n$. Luego $\underline{z_2 = z_3 = 2.}$

$\underline{\text{Si } z_4 = 1,}$ entonces $\sum_{i=1}^{h} z_i = n - 2 \neq n$. Luego $\underline{z_2 = z_3 = z_4 = 2.}$

$\underline{\text{Si } z_5 = 1}$ entonces $\sum_{i=1}^{h} z_i = n - 1 \neq n$. Luego $\underline{z_5 = 2.}$

$\underline{\text{Si } z_6 = 2 \text{ y } n = 14,}$ como $h = 6$ entonces $\sum_{i=1}^{h} z_i = 15$, absurdo. Luego en este caso $z_6 = 1$. $\underline{\text{Si } z_6 = 2, n \text{ par y } n > 14,}$ como $z_i \geq 1$ entonces $n = \sum_{i=1}^{h} z_i = \frac{n}{2} + 8 + \sum_{i=7}^{h} z_i \geq \frac{n}{2} + 8 + h - 6 = n + 1$, absurdo. Luego $z_i = 1$, para $6 \leq i \leq h$. Por lo tanto $z(h) = x(h)$.

CASO (B) $\underline{\text{Si } z_2 = 3 \text{ y } z_3 = 1,}$ entonces $\sum_{i=1}^{h} z_i = n - 2 \neq n$.

$\underline{\text{Si } z_2 = z_3 = 3,}$ entonces como $z(h)$ verifica (2.4), $n = \sum_{i=1}^{h} z_i = \frac{n}{2} + 4 + \sum_{i=4}^{h} z_i$ luego $\frac{n}{2} - 4 = \sum_{i=4}^{h} z_i$ y si $z_i \geq 2$ para $4 \leq i \leq h$ entonces $\frac{n}{2} - 4 \geq n - 8$, absurdo. Luego $z_i = 1$ para $4 \leq i \leq h$ y en este caso $B_z(2) = \frac{n}{2} \not\geq A_z(2) = \frac{n}{2} + 1$.

Luego $\underline{z_2 = 3 \text{ y } z_3 = 2.}$

$\underline{\text{Si } z_4 = 1,}$ entonces $\sum_{i=1}^{h} z_i = n - 1 \neq n$.

Luego $\underline{z_4 = 2.}$

$\underline{\text{Si } z_5 = 2,}$ entonces como $z_i \geq 1$ tendríamos $n = \sum_{i=1}^{h} z_i = \frac{n}{2} + 7 + \sum_{i=6}^{h} z_i \geq \frac{n}{2} + 7 + h - 5 = n + 1$, absurdo.

Luego $\underline{z_2 = 3,\ z_3 = 2 \text{ y } z_i = 1, \text{ para } 5 \leq i \leq h.}$ Por lo tanto $z(h) = y(h)$.

Luego si $n$ es par, $n \geq 14$ los únicos elementos de $G(n, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} - 2)$ son las sucesiones

$$\underbrace{\frac{n}{2} - 2, 2, 2, 2, 2, 2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{\frac{n}{2}-6}}_{\frac{n}{2}-1} \qquad \text{y} \qquad \underbrace{\frac{n}{2} - 2, 3, 2, 2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{\frac{n}{2}-5}}_{\frac{n}{2}-1}.$$

■

**Lema 2.17** *Si $n$ es par, $n \geq 12$, y $h < \frac{n}{2}$ entonces $|G(n,h,2)| = 0$. Si $h = \frac{n}{2}$ entonces $|G(n, \frac{n}{2}, 2)| = 1$.*

**Dem.** Supongamos que existe $x(h) \in G(n,h,2)$ luego $x_1 = 2$. Sea $i_0$ el mayor índice tal que $x_{i_0} = 2$. Si $i_0 = h$ entonces $n = \sum\limits_{i=1}^{h} x_i = 2h$, absurdo. Luego $1 \leq i_0 < h$ y por lo tanto $n = \sum\limits_{i=1}^{h} x_i = 2i_0 + h - i_0 = i_0 + h < 2h$,luego $\frac{n}{2} < h$, absurdo. Por lo tanto $|G(n,h,2)| = 0$. Si $h = \frac{n}{2}$ entonces por el Lema 2.10: $|G(n, \frac{n}{2}, 2)| = 1$. ■

Luego si $n$ par, $n \geq 12$, $h = \frac{n}{2}$, $p \leq h-1$ entonces como por el Lema 2.17, $|G(n, \frac{n}{2}, 2)| = 1$ y por el Lema 2.11, $|G(n, \frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 1)| = 1$ tenemos:

$$|G(n, \frac{n}{2})| = 2 + \sum_{p=3}^{\frac{n}{2}-2} |G(n, \frac{n}{2}, p)|, \tag{2.7}$$

y si $h < \frac{n}{2}$

$$|G(n,h)| = \sum_{p=3}^{h-1} |G(n,h,p)|. \tag{2.8}$$

Si $n$ es par, $n \geq 12$, $h \leq \frac{n}{2}$ y $x(h) \notin G(n, \frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 2) \cup G(n, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} - 2)$ entonces $3 \leq x_1 \leq \frac{n}{2} - 3$.

Luego

$$|G(n, \frac{n}{2})| = 4 + \sum_{p=3}^{\frac{n}{2}-3} |G(n, \frac{n}{2}, p)|, \tag{2.9}$$

y

$$|G(n, \frac{n}{2} - 1)| = 2 + \sum_{p=3}^{\frac{n}{2}-3} |G(n, \frac{n}{2} - 1, p)|. \tag{2.10}$$

**Lema 2.18** *Si $n$ es par, $n \geq 12$, $h \leq \frac{n}{2}$, $x_1 \geq \cdots \geq x_h \geq 1$, $\sum\limits_{i=1}^{h} x_i = n$ y $j \geq 2$ entonces:*

$$x_j \leq x_{j-1} \wedge (n - \sum_{i=1}^{j-1} x_i).$$

**Dem.** En efecto, $n - (\sum\limits_{i=1}^{j-1} x_i) = \sum\limits_{i=j}^{h} x_i \geq x_j$ y como $x_j \leq x_{j-1}$ entonces:

$$x_j \leq x_{j-1} \wedge (n - \sum_{i=1}^{j-1} x_i).$$

■

**Lema 2.19** *Si $n$ es par, $n \geq 12$, $p \leq h \leq \frac{n}{2}$, $x_1 \geq \cdots \geq x_h \geq 1$, $\sum_{i=1}^{h} x_i = n$ entonces:*

$$x_j \leq x_{j-1} \wedge (j - p + n - \sum_{i=1}^{j-1} x_i).$$

**Dem.** Supongamos que $j - p + n - \sum_{i=1}^{j-1} x_i < x_j$ luego $j - p + n - \sum_{i=1}^{j} x_i < 0$, esto es $n - \sum_{i=1}^{j} x_i < p - j$ y como $h - j \leq \sum_{i=j+1}^{h} x_i$ entonces $h - j < p - j$ y por lo tanto $h < p$, absurdo, luego $x_j \leq (j - p + n - \sum_{i=1}^{j-1} x_i)$, y en consecuencia:

$$x_j \leq x_{j-1} \wedge (j - p + n - \sum_{i=1}^{j-1} x_i).$$

■

**Observación 2.2** *Si $2 \leq j \leq p$ entonces $j - p \leq 0$ luego $j - p + n - \sum_{i=1}^{j-1} x_i \leq n - \sum_{i=1}^{j-1} x_i$ y si $p < j \leq h$ entonces $j - p > 0$ luego $j - p + n - \sum_{i=1}^{j-1} x_i \geq n - \sum_{i=1}^{j-1} x_i$.*

**Corolario 2.2** *Si $n \in \mathbb{N}$, $n$ par, $n \geq 12$, $x(h) \in G(n, h)$ donde $\Lambda(n) \leq h \leq \frac{n}{2}$, entonces:*

- *Para $2 \leq j \leq \Lambda(n)$, $x_j \leq x_{j-1} \wedge (j - \Lambda(n) + n - \sum_{i=1}^{j-1} x_i)$,*
- *y para $\Lambda(n) < j \leq h$, $x_j \leq x_{j-1} \wedge (n - \sum_{i=1}^{j-1} x_i)$.*

**Dem.** Consecuencia inmediata de los Lemas 2.18 y 2.19. ■

Si $n \in \mathbb{N}$, $n$ par, $n \geq 12$ sea $M(n, h)$ el conjunto de todas las sucesiones de números enteros $x_1, x_2, \ldots, x_h$, donde $\Lambda(n) \leq h \leq \dfrac{n}{2}$, que verifican:

(A) $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_h \geq 1$,

(B) $3 \leq x_1 \leq \frac{n}{2} - 3$,

(C) $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 2$,

(D) $\sum_{i=1}^{h} x_i = n$,

(E) • Para $2 \leq j \leq \Lambda(n)$, $x_j \leq x_{j-1} \wedge (j - \Lambda(n) + n - \sum_{i=1}^{j-1} x_i)$,

- y para $\Lambda(n) < j \leq h$, $\;x_j \leq x_{j-1} \wedge (n - \sum_{i=1}^{j-1} x_i)$.

(F) $A_x(j) = \sum_{k=1}^{j} x_k \leq j(j-1) + \sum_{k=j+1}^{h} (j \wedge x_k) = B_x(j)$, para $1 \leq j \leq s$, donde $s \leq h-1$ es el mayor entero tal que $x_s \geq s-1$.

Sea $N(n,h) = |M(n,h)|$, para $n$ par, $n \geq 12$ y $\Lambda(n) \leq h \leq \dfrac{n}{2}$.
Por la ecuación (2.9) y lo precedente, tenemos:

$$|G(n, \frac{n}{2})| = 4 + \sum_{p=3}^{\frac{n}{2}-3} |G(n, \frac{n}{2}, p)| = 4 + N(n, \frac{n}{2}).$$

Por la ecuación (2.10) y lo precedente, tenemos:

$$|G(n, \frac{n}{2}-1)| = 2 + \sum_{p=3}^{\frac{n}{2}-3} |G(n, \frac{n}{2}-1, p)| = 2 + N(n, \frac{n}{2}-1).$$

Es claro que, si $h \leq \frac{n}{2} - 2$ entonces $|G(n,h)| = N(n,h)$. Luego por el Teorema 2.2:

$$|G(n)| = \sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1} P(h) + \sum_{h=\Lambda(n)}^{\frac{n}{2}} N(n,h) + 6. \tag{2.11}$$

Por lo tanto, para conocer $|G(n)|$, donde $n$ par, $n \geq 12$, basta determinar los números $N(n,h)$, donde $\Lambda(n) \leq h \leq \dfrac{n}{2}$.

Luego si $n$ es par, $m \geq 4$, y

- $n = m(m-1)$ entonces $\Lambda(n) = m$ y

$$|G(n)| = |G(m(m-1))| = \sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1} |P(h)| + \sum_{h=m}^{\frac{n}{2}} N(n,h) + 6.$$

- $r$ par, $2 \leq r < 2m$ y $m(m-1)+2 \leq n = m(m-1)+r \leq (m+1)m$, entonces $\Lambda(n) = m+1$ y

$$|G(n)| = |G(m(m-1)+r)| = \sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1} |P(h)| + \sum_{h=m+1}^{\frac{n}{2}} N(n,h) + 6.$$

Los valores dados por Barnes y Savage para $|G(n)|$, con $n$ par, corresponden a la sucesión A000569 indicada en la *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*,

(http://www.research.att.com/∼njas/sequences/index.html)

A continuación indicamos los resultados obtenidos vía el programa (ver Sección 3) realizado por A. Claverie.

| N(n,h) | n | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 |
| 4 | 1 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – |
| 5 | 2 | 4 | 2 | 1 | 1 | – | – | – | – | – | – | – | – | – |
| 6 | 3 | 7 | 11 | 11 | 9 | 7 | 5 | 2 | 1 | 1 | – | – | – | – |
| 7 | – | 7 | 13 | 22 | 26 | 29 | 29 | 26 | 23 | 18 | 13 | 8 | 5 | 2 |
| 8 | | – | 13 | 23 | 38 | 49 | 63 | 74 | 81 | 83 | 84 | 77 | 69 | 57 |
| 9 | | | – | 21 | 35 | 58 | 81 | 110 | 142 | 174 | 201 | 224 | 245 | 250 |
| 10 | | | | – | 32 | 53 | 87 | 124 | 176 | 239 | 311 | 387 | 470 | 548 |
| 11 | | | | | – | 46 | 75 | 123 | 179 | 261 | 365 | 492 | 647 | 825 |
| 12 | | | | | | – | 66 | 106 | 172 | 253 | 373 | 530 | 736 | 991 |
| 13 | | | | | | | – | 90 | 144 | 233 | 345 | 513 | 740 | 1.039 |
| 14 | | | | | | | | – | 123 | 196 | 314 | 465 | 695 | 1.008 |
| 15 | | | | | | | | | – | 164 | 259 | 413 | 615 | 919 |
| 16 | | | | | | | | | | – | 218 | 343 | 543 | 806 |
| 17 | | | | | | | | | | | – | 284 | 445 | 701 |
| 18 | | | | | | | | | | | | – | 371 | 578 |
| 19 | | | | | | | | | | | | | – | 476 |
| Suma | 6 | 18 | 39 | 78 | 141 | 242 | 406 | 655 | 1.041 | 1.622 | 2.483 | 3.736 | 5.581 | 8.200 |

| N(n,h) | n | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h | 40 | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 |
| 7 | 1 | 1 | – | – | – | – | – | – | – |
| 8 | 44 | 34 | 24 | 15 | 9 | 5 | 2 | 1 | 1 |
| 9 | 253 | 241 | 223 | 197 | 169 | 138 | 109 | 83 | 59 |
| 10 | 627 | 692 | 745 | 780 | 790 | 782 | 746 | 705 | 636 |
| 11 | 1.021 | 1.229 | 1.461 | 1.677 | 1.903 | 2.100 | 2.270 | 2.399 | 2.492 |
| 12 | 1.310 | 1.685 | 2.119 | 2.612 | 3.164 | 3.754 | 4.390 | 5.038 | 5.664 |
| 13 | 1.431 | 1.932 | 2.556 | 3.308 | 4.214 | 5.256 | 6.485 | 7.847 | 9.388 |
| 14 | 1.429 | 1.990 | 2.730 | 3.669 | 4.851 | 6.317 | 8.082 | 10.200 | 12.706 |
| 15 | 1.339 | 1.910 | 2.685 | 3.715 | 5.060 | 6.778 | 8.976 | 11.689 | 15.038 |
| 16 | 1.205 | 1.757 | 2.516 | 3.550 | 4.947 | 6.785 | 9.183 | 12.287 | 16.208 |
| 17 | 1.041 | 1.555 | 2.271 | 3.253 | 4.610 | 6.447 | 8.897 | 12.114 | 16.341 |
| 18 | 903 | 1.339 | 1.995 | 2.909 | 4.172 | 5.915 | 8.295 | 11.481 | 15.701 |
| 19 | 739 | 1.149 | 1.702 | 2.530 | 3.687 | 5.282 | 7.500 | 10.526 | 14.604 |
| 20 | 612 | 945 | 1.460 | 2.155 | 3.195 | 4.646 | 6.650 | 9.433 | 13.247 |
| 21 | – | 777 | 1.194 | 1.835 | 2.706 | 3.998 | 5.805 | 8.296 | 11.763 |
| 22 | | – | 986 | 1.509 | 2.304 | 3.386 | 4.988 | 7.222 | 10.303 |
| 23 | | | – | 1.239 | 1.888 | 2.869 | 4.207 | 6.177 | 8.926 |
| 24 | | | | – | 1.558 | 2.361 | 3.567 | 5.215 | 7.629 |
| 25 | | | | | – | 1.941 | 2.930 | 4.405 | 6.424 |
| 26 | | | | | | – | 2.418 | 3.633 | 5.433 |
| 27 | | | | | | | – | 2.992 | 4.475 |
| 28 | | | | | | | | – | 3.699 |
| Suma | 11.955 | 17.236 | 24.667 | 34.953 | 49.227 | 68.760 | 95.500 | 131.743 | 180.737 |

| N(n,h) | n | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 |
| 9 | 42 | 27 | 16 | 9 | 5 | 2 | 1 | 1 |
| 10 | 567 | 488 | 407 | 327 | 260 | 196 | 146 | 105 |
| 11 | 2.518 | 2.510 | 2.448 | 2.333 | 2.188 | 1.999 | 1.799 | 1.576 |
| 12 | 6.290 | 6.842 | 7.343 | 7.727 | 8.048 | 8.199 | 8.268 | 8.185 |
| 13 | 11.033 | 12.819 | 14.651 | 16.543 | 18.416 | 20.234 | 21.939 | 23.505 |
| 14 | 15.600 | 18.941 | 22.727 | 26.870 | 31.487 | 36.408 | 41.679 | 47.102 |
| 15 | 19.079 | 23.976 | 29.708 | 36.522 | 44.319 | 53.269 | 63.386 | 74.708 |
| 16 | 21.141 | 27.248 | 34.733 | 43.814 | 54.753 | 67.731 | 83.062 | 100.856 |
| 17 | 21.743 | 28.668 | 37.356 | 48.208 | 61.558 | 78.012 | 97.809 | 121.796 |
| 18 | 21.283 | 28.513 | 37.847 | 49.728 | 64.759 | 83.513 | 106.881 | 135.547 |
| 19 | 20.024 | 27.254 | 36.659 | 48.922 | 64.657 | 84.770 | 110.141 | 142.093 |
| 20 | 18.388 | 25.263 | 34.448 | 46.479 | 62.239 | 82.611 | 108.820 | 142.171 |
| 21 | 16.508 | 22.936 | 31.524 | 43.053 | 58.197 | 78.128 | 104.000 | 137.483 |
| 22 | 14.585 | 20.457 | 28.402 | 39.048 | 53.350 | 72.200 | 97.065 | 129.467 |
| 23 | 12.705 | 17.967 | 25.166 | 34.924 | 47.994 | 65.590 | 88.801 | 119.497 |
| 24 | 10.991 | 15.617 | 22.035 | 30.823 | 42.723 | 58.675 | 80.144 | 108.517 |
| 25 | 9.367 | 13.464 | 19.083 | 26.884 | 37.540 | 51.980 | 71.315 | 97.355 |
| 26 | 7.896 | 11.474 | 16.444 | 23.253 | 32.684 | 45.565 | 62.988 | 86.320 |
| 27 | 6.661 | 9.658 | 13.985 | 19.991 | 28.203 | 39.566 | 55.050 | 75.997 |
| 28 | 5.508 | 8.157 | 11.787 | 17.011 | 24.243 | 34.122 | 47.757 | 66.321 |
| 29 | 4.546 | 6.741 | 9.940 | 14.324 | 20.603 | 29.288 | 41.119 | 57.433 |
| 30 | – | 5.584 | 8.242 | 12.095 | 17.376 | 24.907 | 35.301 | 49.447 |
| 31 | | – | 6.822 | 10.030 | 14.657 | 20.997 | 30.001 | 42.408 |
| 32 | | | – | 8.328 | 12.191 | 17.738 | 25.329 | 36.073 |
| 33 | | | | – | 10.122 | 14.758 | 21.386 | 30.456 |
| 34 | | | | | – | 12.288 | 17.845 | 25.751 |
| 35 | | | | | | – | 14.861 | 21.499 |
| 36 | | | | | | | – | 17.954 |
| Suma | 246.475 | 334.604 | 451.773 | 607.246 | 812.572 | 1.082.746 | 1.436.893 | 1.899.623 |

| N(n,h) | n | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 |
| 10 | 71 | 47 | 29 | 17 | 9 | 5 | 2 |
| 11 | 1.365 | 1.141 | 945 | 759 | 593 | 454 | 340 |
| 12 | 7.981 | 7.664 | 7.252 | 6.741 | 6.177 | 5.576 | 4.939 |
| 13 | 24.858 | 25.948 | 26.809 | 27.283 | 27.496 | 27.337 | 26.872 |
| 14 | 52.771 | 58.354 | 63.999 | 69.373 | 74.491 | 79.172 | 83.333 |
| 15 | 87.122 | 100.695 | 115.303 | 130.801 | 147.093 | 163.941 | 181.189 |
| 16 | 121.515 | 144.990 | 171.725 | 201.500 | 234.763 | 271.147 | 310.906 |
| 17 | 150.281 | 183.982 | 223.486 | 269.505 | 322.421 | 383.014 | 451.812 |
| 18 | 170.609 | 213.131 | 264.348 | 325.287 | 397.866 | 483.028 | 582.744 |
| 19 | 181.682 | 230.804 | 290.950 | 364.503 | 453.340 | 560.390 | 688.290 |
| 20 | 184.515 | 237.488 | 303.750 | 385.814 | 486.929 | 610.684 | 761.486 |
| 21 | 180.327 | 235.091 | 304.132 | 391.086 | 499.565 | 634.464 | 800.675 |
| 22 | 171.539 | 225.649 | 295.138 | 383.225 | 494.831 | 634.936 | 810.170 |
| 23 | 159.576 | 211.783 | 279.148 | 365.962 | 476.489 | 617.147 | 794.630 |
| 24 | 146.056 | 195.180 | 259.279 | 342.195 | 449.323 | 586.172 | 760.889 |
| 25 | 131.765 | 177.354 | 237.053 | 315.064 | 416.147 | 547.003 | 714.555 |
| 26 | 117.716 | 159.232 | 214.228 | 286.306 | 380.544 | 502.827 | 661.312 |
| 27 | 104.000 | 141.685 | 191.492 | 257.479 | 343.966 | 457.118 | 604.024 |
| 28 | 91.389 | 124.893 | 169.917 | 229.423 | 308.212 | 411.498 | 546.602 |
| 29 | 79.596 | 109.506 | 149.416 | 203.020 | 273.800 | 367.496 | 490.261 |
| 30 | 68.897 | 95.294 | 130.857 | 178.265 | 241.848 | 325.778 | 436.762 |
| 31 | 59.256 | 82.393 | 113.720 | 155.889 | 212.014 | 287.218 | 386.377 |
| 32 | 50.845 | 70.876 | 98.314 | 135.421 | 185.273 | 251.563 | 340.243 |
| 33 | 43.235 | 60.780 | 84.525 | 116.992 | 160.808 | 219.618 | 297.680 |
| 34 | 36.559 | 51.737 | 72.526 | 100.622 | 138.948 | 190.595 | 259.788 |
| 35 | 30.908 | 43.757 | 61.734 | 86.318 | 119.473 | 164.624 | 225.345 |
| 36 | 25.870 | 37.047 | 52.294 | 73.551 | 102.558 | 141.630 | 194.701 |
| 37 | 21.614 | 31.033 | 44.279 | 62.330 | 87.411 | 121.573 | 167.501 |
| 38 | – | 25.991 | 37.179 | 52.855 | 74.185 | 103.731 | 143.892 |
| 39 | | – | 31.161 | 44.417 | 69.928 | 88.089 | 122.820 |
| 40 | | | – | 37.313 | 53.000 | 74.827 | 104.450 |
| 41 | | | | – | 44.558 | 63.080 | 88.771 |
| 42 | | | | | – | 53.148 | 74.986 |
| 43 | | | | | | – | 63.235 |
| Suma | 2.501.918 | 3.283.525 | 4.294.988 | 5.599.316 | 7.277.039 | 9.428.863 | 12.181.562 |

| N(n,h) | n | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h | 88 | 90 | 92 | 94 | 96 | 98 | 100 |
| 10 | 1 | 1 | – | – | – | – | – |
| 11 | 247 | 176 | 121 | 78 | 50 | 30 | 17 |
| 12 | 4.324 | 3.705 | 3.135 | 2.595 | 2.122 | 1.688 | 1.330 |
| 13 | 26.058 | 25.035 | 23.683 | 22.192 | 20.514 | 18.732 | 16.893 |
| 14 | 86.795 | 89.561 | 91.539 | 92.560 | 92.800 | 92.094 | 90.526 |
| 15 | 198.514 | 215.811 | 232.412 | 248.555 | 263.410 | 277.102 | 288.984 |
| 16 | 353.578 | 399.435 | 447.639 | 498.228 | 550.581 | 604.016 | 658.248 |
| 17 | 529.080 | 615.524 | 711.187 | 816.334 | 930.932 | 1.055.232 | 1.188.089 |
| 18 | 698.207 | 831.684 | 984.032 | 1.157.694 | 1.353.371 | 1.573.202 | 1.818.090 |
| 19 | 840.289 | 1.019.706 | 1.230.060 | 1.475.605 | 1.760.145 | 2.088.069 | 2.463.517 |
| 20 | 943.466 | 1.162.956 | 1.425.089 | 1.737.037 | 2.105.702 | 2.540.214 | 3.047.853 |
| 21 | 1.005.254 | 1.254.697 | 1.557.742 | 1.924.123 | 2.364.496 | 2.891.170 | 3.518.069 |
| 22 | 1.027.737 | 1.297.109 | 1.628.233 | 2.033.822 | 2.527.473 | 3.126.577 | 3.849.094 |
| 23 | 1.017.691 | 1.296.199 | 1.642.969 | 2.071.494 | 2.599.972 | 3.247.611 | 4.037.923 |
| 24 | 982.172 | 1.261.528 | 1.611.707 | 2.049.672 | 2.593.696 | 3.267.436 | 4.097.868 |
| 25 | 928.989 | 1.201.458 | 1.546.357 | 1.980.387 | 2.525.040 | 3.204.227 | 4.048.833 |
| 26 | 864.585 | 1.125.269 | 1.457.135 | 1.878.302 | 2.409.677 | 3.078.498 | 3.914.985 |
| 27 | 794.582 | 1.039.347 | 1.353.554 | 1.754.297 | 2.263.696 | 2.907.825 | 3.720.174 |
| 28 | 722.104 | 949.871 | 1.242.621 | 1.618.803 | 2.099.095 | 2.710.442 | 3.484.598 |
| 29 | 650.830 | 859.449 | 1.130.207 | 1.478.417 | 1.926.065 | 2.498.113 | 3.226.791 |
| 30 | 582.135 | 772.201 | 1.019.097 | 1.339.520 | 1.751.690 | 2.281.701 | 2.959.275 |
| 31 | 517.417 | 688.944 | 913.076 | 1.204.153 | 1.581.797 | 2.067.597 | 2.692.266 |
| 32 | 457.088 | 611.334 | 813.105 | 1.076.552 | 1.418.557 | 1.862.077 | 2.432.508 |
| 33 | 401.992 | 539.286 | 720.346 | 956.986 | 1.265.742 | 1.666.326 | 2.185.519 |
| 34 | 351.533 | 473.928 | 634.876 | 846.876 | 1.123.724 | 1.484.601 | 1.952.528 |
| 35 | 306.591 | 414.150 | 557.455 | 745.669 | 993.323 | 1.316.410 | 1.737.177 |
| 36 | 265.970 | 361.167 | 487.035 | 654.455 | 874.135 | 1.162.803 | 1.539.057 |
| 37 | 229.776 | 313.237 | 424.573 | 571.554 | 766.781 | 1.022.631 | 1.358.453 |
| 38 | 197.801 | 270.732 | 368.328 | 498.286 | 669.640 | 896.866 | 1.194.336 |
| 39 | 169.946 | 233.098 | 318.366 | 432.256 | 583.710 | 783.097 | 1.047.120 |
| 40 | 145.225 | 200.431 | 274.304 | 373.828 | 506.549 | 682.743 | 914.419 |
| 41 | 123.586 | 171.362 | 235.934 | 322.184 | 438.168 | 592.561 | 797.233 |
| 42 | 105.179 | 146.037 | 201.941 | 277.346 | 377.925 | 512.878 | 692.245 |
| 43 | 88.937 | 124.360 | 172.225 | 237.533 | 325.457 | 442.540 | 599.351 |
| 44 | 75.148 | 105.353 | 146.862 | 202.853 | 279.048 | 381.429 | 517.559 |
| 45 | – | 89.107 | 124.541 | 173.098 | 238.501 | 327.256 | 446.301 |
| 46 | | – | 105.530 | 147.051 | 203.782 | 280.069 | 383.339 |
| 47 | | | – | 124.726 | 173.295 | 239.482 | 328.337 |
| 48 | | | | – | 147.244 | 203.987 | 281.110 |
| 49 | | | | | – | 173.496 | 239.695 |
| 50 | | | | | | – | 204.196 |
| Suma | 15.692.807 | 20.163.228 | 25.836.996 | 33.025.101 | 42.107.885 | 53.562.808 | 67.973.886 |

Teniendo en cuenta (2.11) y las tablas precedentes tenemos:

| $n$ | $\sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1} P(h)$ | $\sum_{h=\Lambda(n)}^{\frac{n}{2}} N(n,h)$ | $\|G(n)\|$ | $n$ | $\sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1} P(h)$ | $\sum_{h=\Lambda(n)}^{\frac{n}{2}} N(n,h)$ | $\|G(n)\|$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 19 | 6 | 31 | 58 | 18.460 | 246.475 | 264.941 |
| 14 | 30 | 18 | 54 | 60 | 23.025 | 334.604 | 357.635 |
| 16 | 45 | 39 | 90 | 62 | 28.629 | 451.773 | 480.408 |
| 18 | 67 | 78 | 151 | 64 | 35.471 | 607.246 | 642.723 |
| 20 | 97 | 141 | 244 | 66 | 43.820 | 812.572 | 856.398 |
| 22 | 139 | 242 | 387 | 68 | 53.963 | 1.082.746 | 1.136.715 |
| 24 | 195 | 406 | 607 | 70 | 66.273 | 1.436.893 | 1.503.172 |
| 26 | 272 | 655 | 933 | 72 | 81.156 | 1.899.623 | 1.980.785 |
| 28 | 373 | 1.041 | 1.420 | 74 | 99.133 | 2.501.918 | 2.601.057 |
| 30 | 508 | 1.622 | 2.136 | 76 | 120.770 | 3.283.525 | 3.404.301 |
| 32 | 684 | 2.483 | 3.173 | 78 | 146.785 | 4.294.988 | 4.441.779 |
| 34 | 915 | 3.736 | 4.657 | 80 | 177.970 | 5.599.316 | 5.777.292 |
| 36 | 1.212 | 5.581 | 6.799 | 82 | 215.308 | 7.277.059 | 7.492.373 |
| 38 | 1.597 | 8.200 | 9.803 | 84 | 259.891 | 9.428.883 | 9.688.780 |
| 40 | 2.087 | 11.955 | 14.048 | 86 | 313.065 | 12.181.582 | 12.494.653 |
| 42 | 2.714 | 17.236 | 19.956 | 88 | 376.326 | 15.692.827 | 16.069.159 |
| 44 | 3.506 | 24.667 | 28.179 | 90 | 451.501 | 20.163.248 | 20.614.755 |
| 46 | 4.508 | 34.953 | 39.467 | 92 | 540.635 | 25.837.016 | 26.377.657 |
| 48 | 5.763 | 49.227 | 54.996 | 94 | 646.193 | 33.025.121 | 33.671.320 |
| 50 | 7.338 | 68.760 | 76.104 | 96 | 770.947 | 42.107.905 | 42.878.858 |
| 52 | 9.296 | 95.500 | 104.802 | 98 | 918.220 | 53.562.828 | 54.481.054 |
| 54 | 11.732 | 131.743 | 143.481 | 100 | 1.091.745 | 67.973.906 | 69.065.657 |
| 56 | 14.742 | 180.737 | 195.485 | | | | |

Por los resultados precedentes si $n$ es par, $n \geq 12$, tenemos:

$$|G(n,h)| = \begin{cases} N(n,h), & \text{if } \Lambda(n) \leq h < \frac{n}{2} - 2, \\ N(n,h) + 2, & \text{if } h = \frac{n}{2} - 1, \\ N(n,h) + 4, & \text{if } h = \frac{n}{2}, \\ |P(n-h)|, & \text{if } \frac{n}{2} + 1 \leq h \leq n. \end{cases}$$

Lo que nos da una información mas detallada sobre $|G(n)|$.

Además por (2.1) sabemos que $|G(2)| = |G(2,2)| = 1 = |P(0)|$, $|G(4,3)| = 1 = |P(1)|, |G(4,4)| = 1 = |P(0)|$, $|G(6,3)| = 1$.
Por los Lemas 2.3 y 2.4, si $n$ es par, $6 \leq n \leq 10$ entonces $|G(n,h)| = |P(n-h)|$, para $\frac{n}{2} + 1 \leq h \leq n$, por el Corolario 2.1, $|G(8,4)| = 2$ y por los Lemas 2.12 y 2.13, $|G(10,4)| = 1, |G(10,5)| = 4$.

En la siguiente tabla indicamos los números $|G(n,h)|$ para $n$ par, $2 \leq n \leq 22$. Los números $|P(n-h)|$, estan marcados con gris.

| $\|G(n,h)\|$ | $n$ | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 |
| 2 | 1 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 3 | — | 1 | 1 | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 4 | — | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | — | — | — | — | — |
| 5 | — | — | 1 | 3 | 4 | 4 | 4 | 2 | 1 | 1 | — |
| 6 | — | — | 1 | 2 | 5 | 7 | 9 | 11 | 11 | 9 | 7 |
| 7 | — | — | — | 1 | 3 | 7 | 11 | 15 | 22 | 26 | 29 |
| 8 | — | — | — | 1 | 2 | 5 | 11 | 17 | 25 | 38 | 49 |
| 9 | — | — | — | — | 1 | 3 | 7 | 15 | 25 | 37 | 58 |
| 10 | — | — | — | — | 1 | 2 | 5 | 11 | 22 | 36 | 55 |
| 11 | — | — | — | — | — | 1 | 3 | 7 | 15 | 30 | 50 |
| 12 | — | — | — | — | — | 1 | 2 | 5 | 11 | 22 | 42 |
| 13 | — | — | — | — | — | — | 1 | 3 | 7 | 15 | 30 |
| 14 | — | — | — | — | — | — | 1 | 2 | 5 | 11 | 22 |
| 15 | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 3 | 7 | 15 |
| 16 | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 2 | 5 | 11 |
| 17 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 3 | 7 |
| 18 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 2 | 5 |
| 19 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 3 |
| 20 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 2 |
| 21 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 |
| 22 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 |
| $\|G(n)\|$ | 1 | 2 | 5 | 9 | 17 | 31 | 54 | 90 | 151 | 244 | 387 |

T. M. Barnes y C. D. Savage [3] determinaron $|G(100)|$ en un tiempo inferior a 4 minutos mediante un programa realizado en PASCAL y procesado en una Sparcstation.

Mediante el procesamiento en una PC (Pentium IV, de 2,4 GHz) del programa de A. Claverie, realizado en Lenguaje C, se determinó $|G(100)|$ en un tiempo de 4 minutos con 40 segundos. Pero como dijeramos precedentemente tenemos una información mas detallada sobre $|G(n)|$.

Los tiempos de procesamiento, para la determinación de los números

$$\sum_{h=\Lambda(n)}^{\frac{n}{2}} N(n,h), \quad \text{para } n \text{ par}, \quad 12 \leq n \leq 58,$$

fueron inferiores a un segundo, y para $n$ par, $60 \leq n \leq 100$:

| Tiempos de procesamiento | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | ' | " | n | ' | " | n | ' | " |
| 60 | – | 1 | 74 | – | 7 | 88 | – | 57 |
| 62 | – | 1 | 76 | – | 10 | 90 | 1 | 17 |
| 64 | – | 2 | 78 | – | 13 | 92 | 1 | 44 |
| 66 | – | 2 | 80 | – | 18 | 94 | 2 | 10 |
| 68 | – | 3 | 82 | – | 25 | 96 | 2 | 51 |
| 70 | – | 5 | 84 | – | 32 | 98 | 4 | 19 |
| 72 | – | 5 | 86 | – | 43 | 100 | 4 | 40 |

# 3. El programa de A. Claverie

```
#include <cstdlib>
#include <iostream>
#include <time.h>

using namespace std;

int piso[210];
int rama[210];
int h[210];
int sumah=0;
int sumaparcial[210];
int lambda_n; // Lambda(n)

FILE  *fp;

int Min(int a, int b)
{
        if (a<b) return a; else return b;
}

bool CondicionF (int h)
{
         int j,k,mink,s;
         bool aux=1;

         for (j=1;j<=(h-1);j++)
               if (rama[j]>=(j-1))
                  s=j;
         j=1;
         while(aux and (j<=s))
         {
               mink=0; for (k=(j+1);k<=h;k++) mink=mink+Min(j,rama[k]);
               aux=(sumaparcial[j]<=(j*(j-1)+ mink));
               j++;
         }

         return aux;
}
```

```
bool  CondicionD (int N, int pr)
{
        int j=2,mink;
        bool aux=1;

        while(aux and (j <=pr))
        {
              if (j>=(lambda_n+1))
               mink=Min(rama[j-1],N-sumaparcial[j-1]);
              else
               mink=Min(rama[j-1],j-lambda_n+N-sumaparcial[j-1]);

              aux=(rama[j]<=mink);
              j++;
        }
        return aux;
}
//Rutina Principal
void EvaluaSucesion(int prof, int techo, int N)
{
    int i;
    for (i=piso[prof];i<=techo;i++)
    {
        sumaparcial[prof]=sumaparcial[prof-1]+i;
        rama[prof]=i;
        if (sumaparcial[prof]==N) // Condicion  E
        {
            if (prof>=lambda_n)
            // Condicion  B, si la sucesion tiene Lambda(n) terminos
                if (condicionF  (prof))
                 if (condicionD (N,prof))
                    h[prof]++;
        }
        else
            if(prof<(N/2))
                EvaluaSucesion  (prof+1,Min(i,N-sumaparcial[prof], N));
    };
}
// fin de rutina principal
```

```
int main(int argc, char *argv[ ])
{
    char nombrearchivo[50];
    time_t comienzo, final;
    int i,dt,ddia,dhor,dmin,dseg,N;

    N=atoi(argv[1]);
    // Chequea que el parametro de entrada este entre los valores permitidos
    if (  (N < 12) | (N > 200)) | ((N%2)!=0) )
    {
        cout<<"Parametro ingresado incorrecto. \n";
        cout<<"El parametro ingresado debe ser un numero entero par
        entre 12 y 200 \n";
        return EXIT_SUCCESS;
    }
    for (i=1;i<=N/2;i++)
        h[i]=0;

    for (i=0;i<=N;i++)
        sumaparcial[i]=0;

    lambda_n=0;

    while (N>(lambda_n*(lambda_n-1)))
        lambda_n++;

    printf("lambda( % u)= %u\n",N,lambda_n);

    for (i=1;i<=N;i++)
        piso[i]=1;
    piso[1]=3; //x1 >= 3     CONDICION B
    piso[2]=2; //x2 >= 2     CONDICION C
    piso[3]=2; //x3 >= 2     CONDICION C

    //Define el nombre y abre archivo de salida
    sprintf(nombrearchivo,"salida%s.txt",argv[1]);
    fp=fopen(nombrearchivo,"w");

    printf("\n N= %d procesando... \n",N);
    fprintf(fp,"\n N= %d  n",N);

    comienzo=time(NULL); //Marca tiempo de inicio
```

```
    //Inicia rutina principal (tercer parametro segun condicion B)
    EvaluaSucesion(1,(N / 2)-3,N);

    final=time(NULL); //Marca tiempo de finalizacion

    //Registra en archivo los resultados
    for (i=1;i<=N;i++)
    {
        if (h[i]!=0)
            fprintf(fp,"\n h= %3d -> %20u",i,h[i]);
        sumah=sumah+h[i];
    }
    fprintf(fp; "\nSumatoria N(n,h)= %u",sumah);

    //Calcula tiempo de procesamiento
    dt=difftime(final, comienzo);
    ddia=(dt / 86400);
    dhor=((dt-ddia*86400)/3600);
    dmin=((dt-ddia*86400-dhor*3600)/60);
    dseg=(dt-ddia*86400-dhor*3600-dmin*60);

    //Registra tiempo de procesamiento en archivo de salida
    fprintf(fp, "\n Tiempo de procesamiento:");
    if (ddia!=0) fprintf(fp, " %u dia(s)",ddia);
    if (dhor!=0) fprintf(fp, " %u hora(s)",dhor);
    if (dmin!=0) fprintf(fp," %u minuto(s)",dmin);
    fprintf(fp," %u segundo(s) \n",dseg);

    fclose(fp);

    return EXIT_SUCCESS;
}
```

## Referencias


[1] Abad, M. and Monteiro, L., *Monadic epimorphisms and applications*, Portugaliae Mathematica 39, Fasc. 1-4 (1980), 525-538.

[2] Barnes, T. M. and Savage, C. D., *A recurrence for counting graphical partitions.* Electronic J. Combinatorics 2 (1995), 1-10.

[3] Barnes, T. M. and Savage, C. D., *Efficient generation of graphical partitions.* Disc. Appl. Math. 78 (1997), 17-25.

[4] Bertier, P. *Partages, parties, partitions, décomptes et représentations*, Metra VI, 1 (1967), 107-129.

[5] Chiappa, R., *On the partitions of an integer*, Rev. Unión Mate. Arg. 27 (1974), 33-40.

[6] Erdös P. and Gallai T., *Graphs with given degree vertices*, Math. Lapok 11 (1960), 264-274.

[7] Rousseau C.C. and Ali F., *A note on graphical partitions*, J.Comb. Theory Ser. B 64 (1995), 314-318.

[8] Sierksma G. and Hoogeveen H., *Seven criteria for integer sequences being graphic*, J. Graph Theory 15 (2) (1991), 223-231.

[9] Tripathi A., and Vijay S., *A note on a theorem of Erdös* & *Gallai*, Discrete Mathematics 265 (2003), 417-420.