P_0P-reticulados

Luiz F. Monteiro $^{(*)}$, Sonia Savini $^{(**)}$ y Cecilia Cimadamore $^{(***)}$
$^{(*)}$ INMABB-C.O.N.I.C.E.T.-Universidad Nacional del Sur
$^{(**)}$ Departamento de Matemática-Universidad Nacional del Sur
$^{(***)}$ Departamento de Matemática-Universidad Nacional del Sur
luizmont@criba.edu.ar - ssavini@criba.edu.ar - crcima@criba.edu.ar

Resumen

La noción de P_0-reticulado (ver §1) fue introducida en 1963 por T. Traczyk [12]. G. Epstein y A. Horn [4] en 1974 investigaron en detalle la teoría de los P_0-reticulados y utilizaron este concepto para encontrar algunas y nuevas importantes generalizaciones de las álgebras de Post de orden finito. Ellos introducen los conceptos de P_1-reticulados y P_2-reticulados. La noción de P_0P-reticulado (ver §4) fue introducida por J. Klukowski y M. Zworski [8] en 1985. De §1 a §5 hacemos una unificación de los resultados obtenidos por G. Epstein y A. Horn [4, 5], J. Klukowski y M. Zworski [8], T. Traczyk [12] e indicamos algunos resultados originales. En §6 resultados sobre el cardinal de los automorfimos de un PP_0-reticulado finito, que simplifican los obtenidos por K.I. Tabash [10, 11] en 1990 y 2002.

1. Introducción

Recordemos las siguientes definiciones: Si X es un conjunto finito con n elementos notaremos $|X| = n$.
En estas notas representaremos con L, un reticulado distributivo acotado y con 0 y 1, el primer y último elemento de L, respectivamente. Un subconjunto no vacío, S de L, es un subreticulado de L si se verifica: "Si $x, y \in S$ entonces $x \wedge y,\ x \vee y \in S$". Diremos que S es un $(0,1)$-subreticulado de L si es un subreticulado tal que $0, 1 \in S$.
Si X es un subconjunto de L, notaremos con $SL(X)$ al $(0,1)$-subreticulado de L generado por X.
Sea S un $(0,1)$-subreticulado de L, $n \geq 2$, $E_n = \{e_0 = 0, e_1, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1} = 1\} \subseteq L$ y

$$e_0 = 0 < e_1 < \cdots < e_{n-2} < e_{n-1} = 1,$$

notaremos $SL(S, E_n)$ al subreticulado de L generado por el conjunto $S \cup E_n$.

Lema 1.1

(a) $$SL(S, E_n) = \{x \in L : x = \bigvee_{i=1}^{n-1} (s_i \wedge e_i), s_i \in S, 1 \leq i \leq n-1\}$$

(b) $$SL(S, E_n) = \{x \in L : x = \bigwedge_{i=0}^{n-2} (s_i \vee e_i), s_i \in S, 0 \leq i \leq n-2\}$$

Dem. Sea $X = \{x \in L : x = \bigvee_{i=1}^{n-1}(s_i \wedge e_i),\ s_i \in S, 1 \leq i \leq n-1\}$.

<u>(i) $X \subseteq SL(S, E_n)$.</u> Si $x \in X$ entonces $x = \bigvee_{i=1}^{n-1}(s_i \wedge e_i)$, donde $s_i \in S, 1 \leq i \leq n-1$. Como $s_i, e_i \in S \cup E_n \subseteq SL(S, E_n)$, para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ y $SL(S, E_n)$ es un subreticulado, se tiene que $x = \bigvee_{i=1}^{n-1}(s_i \wedge e_i) \in SL(S, E_n)$.

<u>(ii) $S \cup E_n \subseteq X$.</u>

Sea $x \in S \cup E_n$. Si $x \in S$ entonces $x = x \wedge 1 = x \wedge (\bigvee_{i=1}^{n-1} e_i) = \bigvee_{i=1}^{n-1}(x \wedge e_i)$, de donde resulta que $x \in X$.

Si $x = e_j$, $1 \leq j \leq n-1$, considerando $s_i = 0$ para $1 \leq i \leq n-1$, $i \neq j$ y $s_j = 1$, se tiene que $s_i \in S$, para $1 \leq i \leq n-1$ y por lo tanto $e_j = \bigvee_{i=1}^{n-1}(s_i \wedge e_i) \in X$. Además $e_0 = \bigvee_{i=1}^{n-1}(0 \wedge e_i) \in X$.

<u>(iii) X es un $(0,1)$-subreticulado de L.</u>

Por (ii) sabemos que $0, 1 \in X$. Si $x_1, x_2 \in X$ entonces $x_1 = \bigvee_{i=1}^{n-1}(s_i \wedge e_i)$, donde $s_i \in S$, $1 \leq i \leq n-1$ y $x_2 = \bigvee_{j=1}^{n-1}(t_j \wedge e_j)$, donde $t_j \in S, 1 \leq j \leq n-1$.

Luego $x_1 \vee x_2 = \bigvee_{i=1}^{n-1}((s_i \vee t_i) \wedge e_i)$, donde $s_i \vee t_i \in S, 1 \leq i \leq n-1$, por lo tanto $x_1 \vee x_2 \in X$.

$$x_1 \wedge x_2 = (\bigvee_{i=1}^{n-1}(s_i \wedge e_i)) \wedge (\bigvee_{j=1}^{n-1}(t_j \wedge e_j)) =$$

$$\bigvee_{j=1}^{n-1}((\bigvee_{i=1}^{n-1}(s_i \wedge e_i)) \wedge t_j \wedge e_j) = \bigvee_{j=1}^{n-1}(\bigvee_{i=1}^{n-1}(s_i \wedge e_i \wedge t_j \wedge e_j)) =$$

$$\bigvee_{i=1}^{n-1}(s_i \wedge e_i \wedge t_1 \wedge e_1) \vee \bigvee_{i=1}^{n-1}(s_i \wedge e_i \wedge t_2 \wedge e_2) \vee \ldots \vee \bigvee_{i=1}^{n-1}(s_i \wedge e_i \wedge t_{n-1} \wedge e_{n-1}) =$$

$$\bigvee_{i=1}^{n-1}(s_i \wedge t_1 \wedge e_1) \vee (s_1 \wedge t_2 \wedge e_1) \vee \bigvee_{i=2}^{n-1}(s_i \wedge t_2 \wedge e_2) \vee (s_1 \wedge t_3 \wedge e_1) \vee (s_2 \wedge t_3 \wedge e_2) \vee$$

$$\bigvee_{i=3}^{n-1}(s_i \wedge t_3 \wedge e_3) \vee \ldots \vee \bigvee_{i=1}^{n-1}(s_i \wedge e_i \wedge t_{n-1} \wedge e_{n-1}) =$$

$$[(\bigvee_{i=1}^{n-1}(s_i \wedge t_1) \vee (s_1 \wedge t_2) \vee \ldots \vee (s_1 \wedge t_{n-1})) \wedge e_1] \vee$$

$$[(\bigvee_{i=2}^{n-1}(s_i \wedge t_2) \vee (s_2 \wedge t_3) \vee \ldots \vee (s_2 \wedge t_{n-1})) \wedge e_2] \vee \ldots \vee [(s_{n-1} \wedge t_{n-1}) \wedge e_{n-1}] =$$

$$[(\bigvee_{i=1}^{n-1}(s_i \wedge t_1) \vee (s_1 \ \wedge \bigvee_{i=2}^{n-1} t_i)) \ \wedge e_1] \vee$$

$$[(\bigvee_{i=2}^{n-1}(s_i \wedge t_2) \vee (s_2 \ \wedge \bigvee_{i=3}^{n-1} t_i)) \ \wedge e_2] \vee \ldots \vee [(s_{n-1} \ \wedge t_{n-1}) \ \wedge e_{n-1}] =$$

$$[((t_1 \ \wedge \bigvee_{i=1}^{n-1} s_i) \vee (s_1 \ \wedge \bigvee_{i=2}^{n-1} t_i)) \ \wedge e_1] \vee$$

$$[((t_2 \ \wedge \bigvee_{i=2}^{n-1} s_i) \vee (s_2 \ \wedge \bigvee_{i=3}^{n-1} t_i)) \ \wedge e_2] \vee \ldots \vee [(s_{n-1} \ \wedge t_{n-1}) \ \wedge e_{n-1}] \in X.$$

De (ii) e (iii) resulta (iv) $SL(S, E_n) \subseteq X$. Finalmente, de (i) e (iv) se tiene que

$$SL(S, E_n) = X.$$

En forma análoga se demuestra (b). ■

Observación 1.1 *Si S es un $(0,1)$-subreticulado de L tal que $E_n \subseteq S$ entonces $SL(S, E_n) = SL(S) = S$. Por lo tanto el único caso de interés es cuando $S \cap E_n = \{0,1\}$. Supongamos que $T = S \cap E_n = \{0, e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_r}, 1\} \neq \{0,1\}$.*
Sea $E'_{n-r} = (E_n \backslash T) \cup \{0,1\}$. De $E'_{n-r} \subseteq E_n$ resulta (i) $SL(S, E'_{n-r}) \subseteq SL(S, E_n)$.
Sea $x \in SL(S, E_n)$. Por el Lema 1.1,

$$x = \bigvee_{i=1}^{n-1}(s_i \wedge e_i) = \bigvee\{(s_i \wedge e_i) : e_i \in T\} \vee \bigvee\{(s_i \wedge e_i) : e_i \notin T\} = s \vee \bigvee\{(s_i \wedge e_i) : e_i \notin T\},$$

con $s \in S$. Luego $x = (s \wedge 1) \vee \bigvee\{(s_i \wedge e_i) : e_i \notin T\} = \bigvee\{(s_i \wedge e_i) : e_i \in E'_{n-r}\}$ y por lo tanto (ii) $SL(S, E_n) \subseteq SL(S, E'_{n-r})$.
De (i) y (ii) resulta $SL(S, E'_{n-r}) = SL(S, E_n)$, con $S \cap E'_{n-r} = \{0,1\}$.

Corolario 1.1 *Si S es un $(0,1)$-subreticulado de L tal que $SL(S, E_n) = L$ entonces todo elemento de L se puede escribir como*

$$\text{(a)} \quad x = \bigvee_{i=1}^{n-1}(d_i \wedge e_i), \qquad \text{(b)} \quad x = \bigwedge_{i=0}^{n-2}(c_i \vee e_i)$$

donde $d_i \in S, 1 \leq i \leq n-1$, $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_{n-1}$ y $c_i \in S, 0 \leq i \leq n-2$, $c_0 \geq c_1 \geq \cdots \geq c_{n-2}$.

Dem. Por hipótesis si $x \in L$ entonces $x = \bigvee\limits_{i=1}^{n-1}(s_i \wedge e_i)$, donde $s_i \in S$, $1 \leq i \leq n-1$.
Sea $d_i = \bigvee\limits_{j=i}^{n-1} s_j$, para $i = 1, 2, \ldots, n-1$, luego es claro que $d_i \in S, 1 \leq i \leq n-1$ y $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_{n-1}$.

$$\bigvee_{i=1}^{n-1}(d_i \wedge e_i) = \bigvee_{i=1}^{n-1}((\bigvee_{j=i}^{n-1} s_j) \wedge e_i) =$$

$$(s_1 \ \wedge e_1) \vee (s_2 \ \wedge \bigvee_{j=1}^{2} e_j) \vee (s_3 \ \wedge \bigvee_{j=1}^{3} e_j) \vee \ldots \vee (s_{n-1} \ \wedge \bigvee_{j=1}^{n-1} e_j) =$$

$$(s_1 \ \wedge e_1) \vee (s_2 \ \wedge e_2) \vee (s_3 \ \wedge e_3) \vee \ldots \vee (s_{n-1} \ \wedge e_{n-1}) = \bigvee_{i=1}^{n-1} (s_i \wedge e_i) = x.$$

En forma análoga, poniendo $c_i = \bigwedge\limits_{j=0}^{i} s_j$, se demuestra (b). ■

Toda representación de un elemento x de L, del tipo indicado en el Corolario 1.1, se denomina *representación monótona* de x.

Observación 1.2 (G. Epstein y A. Horn, [4]) *Si* $x = \bigvee\limits_{i=1}^{n-1} (d_i \wedge e_i)$ *e* $y = \bigvee\limits_{i=1}^{n-1} (f_i \wedge e_i)$ *son representaciones monótonas de* x *e* y*, respectivamente, entonces* $x \ \wedge y$ *y* $x \vee y$ *tienen la siguiente representación monótona:*

$$x \ \wedge y = \bigvee_{i=1}^{n-1} ((d_i \wedge f_i) \ \wedge e_i)\,, \qquad x \ \vee y = \bigvee_{i=1}^{n-1} ((d_i \vee f_i) \ \wedge e_i).$$

En efecto, por lo indicado en el Lema 1.1 sabemos que

$$x \ \wedge y = [((f_1 \ \wedge \bigvee_{i=1}^{n-1} d_i) \vee (d_1 \ \wedge \bigvee_{i=2}^{n-1} f_i)) \ \wedge e_1] \vee$$

$$[((f_2 \ \wedge \bigvee_{i=2}^{n-1} d_i) \vee (d_2 \ \wedge \bigvee_{i=3}^{n-1} f_i)) \ \wedge e_2] \vee \ldots \vee [(d_{n-1} \ \wedge f_{n-1}) \ \wedge e_{n-1}].$$

Por hipótesis,

(1) $\bigvee\limits_{i=1}^{n-1} f_i = f_1, \ \bigvee\limits_{i=2}^{n-1} f_i = f_2, \ \bigvee\limits_{i=3}^{n-1} f_i = f_3, \ \ldots, \ \bigvee\limits_{i=n-2}^{n-1} f_i = f_{n-2}$, *y*

(2) $\bigvee\limits_{i=1}^{n-1} d_i = d_1, \ \bigvee\limits_{i=2}^{n-1} d_i = d_2, \ \bigvee\limits_{i=3}^{n-1} d_i = d_3, \ \ldots, \ \bigvee\limits_{i=n-2}^{n-1} d_i = d_{n-2}$.

Por (1) y (2) *tenemos:*

$$x \ \wedge y = [((f_1 \ \wedge d_1) \ \vee (d_1 \ \wedge f_2)) \ \wedge e_1] \ \vee [((f_2 \ \wedge d_2) \ \vee (d_2 \ \wedge f_3)) \ \wedge e_2] \ \vee \ldots \vee$$

$$[(d_{n-1} \ \wedge f_{n-1}) \ \wedge e_{n-1}] =$$

$$((d_1 \wedge (f_1 \ \vee f_2)) \ \wedge e_1) \ \vee ((d_2 \wedge (f_2 \ \vee f_3)) \ \wedge e_2) \ \vee \ldots \vee ((d_{n-1} \ \wedge f_{n-1}) \ \wedge e_{n-1}).$$

Luego como $f_i \geq f_{i+1}, \ 1 \leq i \leq n-2$, *se tiene que:*

$$x \wedge y = ((d_1 \wedge f_1) \ \wedge e_1) \vee ((d_2 \wedge f_2) \ \wedge e_2) \vee \ldots \vee ((d_{n-1} \ \wedge f_{n-1}) \ \wedge e_{n-1}) = \bigvee_{i=1}^{n-1} ((d_i \ \wedge f_i) \ \wedge e_i).$$

De la distributividad de L *resulta en forma inmediata que* $x \ \vee y = \bigvee\limits_{i=1}^{n-1} ((d_i \vee f_i) \ \wedge e_i)$.

Notaremos con $B(L)$ el conjunto de todos los elementos booleanos de L, que habitualmente se denomina el centro de L. Si $b \in B(L)$ notaremos con $-b$ al complemento booleano de b en $B(L)$.

2. P_0-reticulados

Definición 2.1 (T. Traczyk, [12])
Si L es un reticulado distributivo acotado, $E_n = \{e_0, e_1, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1}\}$ un subconjunto de L tal que

$$e_0 = 0 < e_1 < \cdots < e_{n-2} < e_{n-1} = 1 \text{ y } SL(B(L), E_n) = L$$

se dice que L es un P_0-reticulado y que E_n es una cadena base de L.

Es claro que si L es un álgebra de Łukasiewicz con eje e, que no es un álgebra de Boole, entonces L es un P_0-reticulado con cadena base $\{e_0 = 0, e_1 = e, e_2 = 1\}$, si L es un álgebra de Łukasiewicz con centro c, entonces L es un P_0-reticulado con cadena base $\{e_0 = 0, e_1 = c, e_2 = 1\}$ (R. Cignoli, [2], L. Monteiro, [6]) y que si B es un álgebra de Boole no trivial entonces B es un P_0-reticulado con cadena base $\{e_0 = 0, e_1 = 1\}$.

Si L es un P_0-reticulado, $E_n = \{e_0 = 0, e_1, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1} = 1\}$ es una cadena base de L y $E_n \cap B(L) \neq \{0, 1\}$, por la Observación 1.1 sabemos que existe una cadena base F de L tal que $F \cap B(L) = \{0, 1\}$. Por lo tanto podemos afirmar que para todo P_0-reticulado L, que no es un álgebra de Boole, existe una cadena base $e_0 = 0, e_1, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1} = 1$ tal que $\{e_1, \ldots, e_{n-2}\} \cap B(L) = \emptyset$.

Si L es un reticulado distributivo acotado finito tal que $B(L) = \{0, 1\}$ entonces L es un P_0-reticulado si y solo si L es una cadena.

En efecto, sea $L = SL(B(L), E_n)$ un P_0-reticulado con cadena base E_n. Por el Corolario 1.1 $x = \bigvee\limits_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i)$ cualquiera sea $x \in L$, donde $b_i \in B(L) = \{0, 1\}$, $1 \leq i \leq n-1$ y $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_{n-1}$.
Consideremos las n sucesiones crecientes posibles:

Si $b_i = 0$, para todo i, $1 \leq i \leq n-1$, entonces $x = 0$.

Si $b_i = 1$, para $1 \leq i \leq k$ y $b_i = 0$, para $k+1 \leq i \leq n-1$, donde $1 \leq k \leq n-2$ se tiene que $x = \bigvee\limits_{i=1}^{k} e_i = e_k$.

Si $b_i = 1$, para todo i, $1 \leq i \leq n-1$ entonces $x = \bigvee\limits_{i=1}^{n-1} e_i = e_{n-1} = 1$.

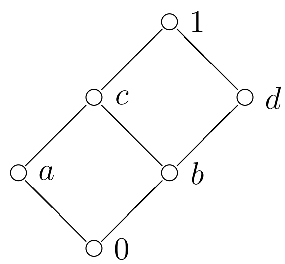
Podemos afirmar entonces que $L \subseteq E_n$ y como $E_n \subseteq L$ se concluye que $L = E_n$, es decir, L es una cadena.
Recíprocamente, como L es finito entonces $L = \{e_0 = 0, e_1, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1} = 1\}$ y $SL(B(L), \{e_0, e_1, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1}\}) = L$, luego L es un P_0-reticulado.

Observación 2.1 *(1) Si L es un P_0-reticulado entonces, por el Corolario 1.1, todo elemento x de L se puede representar de la siguiente forma:*

$$x = \bigvee_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i),$$

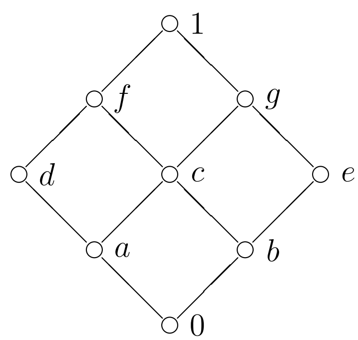
donde $b_i \in B(L), 1 \leq i \leq n-1$ y $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_{n-1}$.
(2) L es un P_0-reticulado finito si y solo si $B(L)$ es finito.

Ejemplo 2.1 Consideremos el reticulado L_1, cuyo diagrama de Hasse se indica a continuación:



entonces $B(L_1) = \{0, a, d, 1\}$.
Si $E_3 = \{e_0 = 0, e_1 = b, e_2 = 1\}$ ó $E_3 = \{e_0 = 0, e_1 = c, e_2 = 1\}$ entonces $SL(B(L_1), E_3) = L_1$. Luego, podemos afirmar, que existe más de una cadena base para L_1.

Ejemplo 2.2 Sea L_2 el reticulado distributivo indicado en el siguiente diagrama:



entonces $B(L_2) = \{0, d, e, 1\}$. Sea $E_3 = \{e_0 = 0, e_1 = c, e_2 = 1\}$ luego $SL(B(L_2), E_3) = L_2$. Si $E_4 = \{e_0 = 0, e_1 = b, e_2 = g, e_3 = 1\}$ ó $E_4 = \{e_0 = 0, e_1 = a, e_2 = f, e_3 = 1\}$ tenemos que $SL(B(L_2), E_4) = L_2$. Si $E_5 = \{e_0 = 0, e_1 = b, e_2 = c, e_3 = f, e_4 = 1\}$ ó $E_5 = \{e_0 = 0, e_1 = a, e_2 = c, e_3 = g, e_4 = 1\}$ también $SL(B(L_2), E_5) = L_2$. Es claro que $n = 3$ es el menor natural tal que $SL(B(L_2), E_n) = L_2$.

Definición 2.2 (G. Epstein y A. Horn, [4]) *Un P_0-reticulado L se dice de orden n, $(n \geq 2)$ si n es el menor natural tal que L tiene una cadena base con n elementos.*

Por lo tanto los reticulados L_1 y L_2, indicados precedentemente, son P_0-reticulados de orden 3.

Es claro que si L es un álgebra de Łukasiewicz con eje ó L es un álgebra de Łukasiewicz con centro entonces L es de orden 3. Si B es un álgebra de Boole no trivial entonces B es de orden 2.

Sea L un reticulado distributivo acotado, $E_n = \{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\} \subseteq L$ tal que $e_0 = 0 < e_1 < \cdots < e_{n-1} = 1$ y B_0 una subálgebra booleana de $B(L)$.

Lema 2.1 (T. Traczyk, [12])

$$SL(B_0, E_n) = \{x \in L \,:\, x = \bigvee_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i),\ b_i \in B_0,\ b_i \wedge b_j = 0\ \ si\ \ i \neq j\}$$

Dem. Sea $X = \{x \in L : x = \bigvee_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i),\ b_i \in B_0,\ b_i \wedge b_j = 0 \ \ si \ \ i \neq j\}$. Es fácil ver que $X \subseteq SL(B_0, E_n)$.

Sea $x \in SL(B_0, E_n)$, como B_0 es en particular un $(0,1)$-subreticulado de L, por el Corolario 1.1, sabemos que x tiene una representación monótona, esto es, $x = \bigvee_{i=1}^{n-1} (d_i \wedge e_i)$ con $d_i \in B_0,\ 1 \leq i \leq n-1$ y $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_{n-1}$.
Sean $c_j = d_j \wedge -d_{j+1}$, $1 \leq j \leq n-2$ y $c_{n-1} = d_{n-1}$, luego $c_j \in B_0$, $1 \leq j \leq n-1$.
Si $1 \leq j \leq n-2$, tenemos que $c_j \wedge c_{n-1} = d_j \wedge -d_{j+1} \wedge d_{n-1}$ y como $d_{j+1} \geq d_{n-1}$ entonces $-d_{j+1} \wedge d_{n-1} = 0$, luego $c_j \wedge c_{n-1} = 0$, $1 \leq j \leq n-2$.
Sean j, h tal que $1 \leq j, h \leq n-2$ y (1) $j \neq h$. Vamos a probar que $c_j \wedge c_h = 0$. En efecto, (2) $c_j \wedge c_h = d_j \wedge -d_{j+1} \wedge d_h \wedge -d_{h+1}$.
Por (1) tenemos que (3) $j < h$ ó (4) $h < j$. Supongamos que se verifica (3). Luego $j+1 \leq h$ y entonces $d_h \leq d_{j+1}$, por lo tanto $d_h \wedge -d_{j+1} \leq d_{j+1} \wedge -d_{j+1} = 0$ de donde resulta (5) $d_h \wedge -d_{j+1} = 0$. De (2) y (5) se tiene que $c_j \wedge c_h = 0$. Si vale (4) se procede en forma análoga.

Si $1 \leq i \leq n-2$ entonces:

$$d_i \wedge e_i = (d_i \wedge e_i) \wedge (-d_{i+1} \vee d_{i+1}) = (d_i \wedge e_i \wedge -d_{i+1}) \vee (d_i \wedge e_i \wedge d_{i+1}) = (c_i \wedge e_i) \vee (d_{i+1} \wedge e_i).$$

Como $e_i < e_{i+1}$ entonces $d_{i+1} \wedge e_i \leq d_{i+1} \wedge e_{i+1}$, luego

$$(d_i \wedge e_i) \vee (d_{i+1} \wedge e_{i+1}) = (c_i \wedge e_i) \vee (d_{i+1} \wedge e_i) \vee (d_{i+1} \wedge e_{i+1}) = (c_i \wedge e_i) \vee (d_{i+1} \wedge e_{i+1}).$$

De aquí resulta que

$$x = \bigvee_{i=1}^{n-1} (d_i \wedge e_i) = \bigvee_{i=1}^{n-2} (d_i \wedge e_i) \vee d_{n-1} =$$

$$(d_1 \wedge e_1) \vee (d_2 \wedge e_2) \vee \ldots \vee (d_{n-3} \wedge e_{n-3}) \vee (d_{n-2} \wedge e_{n-2}) \vee d_{n-1} =$$

$$(c_1 \wedge e_1) \vee (c_2 \wedge e_2) \vee \ldots \vee (c_{n-3} \wedge e_{n-3}) \vee (d_{n-2} \wedge e_{n-2}) \vee d_{n-1} =$$

$$\bigvee_{i=1}^{n-3} (c_i \wedge e_i) \vee ((d_{n-2} \wedge e_{n-2}) \wedge (-d_{n-1} \vee d_{n-1})) \vee d_{n-1} =$$

$$\bigvee_{i=1}^{n-3} (c_i \wedge e_i) \vee (d_{n-2} \wedge -d_{n-1} \wedge e_{n-2}) \vee (d_{n-2} \wedge e_{n-2} \wedge d_{n-1}) \vee d_{n-1} =$$

$$\bigvee_{i=1}^{n-2} (c_i \wedge e_i) \vee d_{n-1} = \bigvee_{i=1}^{n-2} (c_i \wedge e_i) \vee c_{n-1} = \bigvee_{i=1}^{n-1} (c_i \wedge e_i).$$

Por lo tanto $SL(B_0, E_n) \subseteq X$. ■

Toda representación de un elemento x de L, de la forma indicada en el Lema 2.1, se denomina *representación disjunta* de x.

Observemos que, en particular, todo elemento de un P_0-reticulado tiene una representación disjunta.

Lema 2.2 (G. Epstein y A. Horn, [4]) *Si $L_0 = SL(B_0, E_n)$ entonces $B(L_0) = B_0$.*

Dem. Sea $b \in B_0 \subseteq L_0$. Luego $-b \in B_0 \subseteq L_0$ y como $b \vee -b = 1$ y $b \wedge -b = 0$ entonces $b \in B(L_0)$.
Sea (1) $x \in B(L_0) \subseteq L_0$. Por el Lema 2.1, x tiene una representación disjunta, esto es, (2) $x = \bigvee_{j=1}^{n-1} (b_j \wedge e_j)$ donde $b_j \in B_0$, $1 \leq j \leq n-1$ y $b_h \wedge b_k = 0$, para $1 \leq h, k \leq n-1$, $h \neq k$.
Fijado i, $1 \leq i \leq n-1$, entonces $b_i \wedge x = b_i \wedge \bigvee_{j=1}^{n-1} (b_j \wedge e_j) = \bigvee_{j=1}^{n-1} (b_i \wedge b_j \wedge e_j)$. Como $b_i \wedge b_j = 0$, para $j \neq i$, tenemos que $b_i \wedge x = b_i \wedge e_i = s_i$. De $b_i \in B_0 \subseteq B(L_0)$ y (1) resulta que $s_i \in B(L_0)$.
Sea $t_i = -s_i$, luego $t_i \in B(L_0) \subseteq L_0$ y por lo tanto t_i tiene una representación monótona, es decir, $t_i = \bigvee_{j=1}^{n-1} (c_j \wedge e_j)$ donde $c_j \in B_0$, $1 \leq j \leq n-1$ y $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_{n-1}$.
Ahora bien, $0 = s_i \wedge t_i = b_i \wedge e_i \wedge \bigvee_{j=1}^{n-1} (c_j \wedge e_j) = \bigvee_{j=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i \wedge c_j \wedge e_j)$, de donde $b_i \wedge e_i \wedge c_i = 0$, esto es, $s_i \wedge c_i = 0$. Como $s_i, c_i \in B(L_0)$ entonces $s_i \leq -c_i$, luego (3) $s_i = s_i \wedge b_i \leq -c_i \wedge b_i$.
Además

$$1 = s_i \vee t_i = (b_i \wedge e_i) \vee \bigvee_{j=1}^{n-1} (c_j \wedge e_j) \leq e_i \vee \bigvee_{j=1}^{n-1} (c_j \wedge e_j) =$$

$$\bigvee_{j=1}^{n-1} (e_i \vee (c_j \wedge e_j)) = \bigvee_{j=1}^{i-1} (e_i \vee (c_j \wedge e_j)) \vee (e_i \vee (c_i \wedge e_i)) \vee \bigvee_{j=i+1}^{n-1} (e_i \vee (c_j \wedge e_j)) =$$

$$\bigvee_{j=1}^{i-1} (e_i \vee (c_j \wedge e_j)) \vee e_i \vee \bigvee_{j=i+1}^{n-1} (e_i \vee (c_j \wedge e_j)) \leq$$

$$\bigvee_{j=1}^{i-1} (e_i \vee (c_j \wedge e_j)) \vee e_i \vee c_i \vee \bigvee_{j=i+1}^{n-1} (e_i \vee c_j) =$$

$$\bigvee_{j=1}^{i-1} (e_i \vee (c_j \wedge e_j)) \vee e_i \vee c_i \vee (e_i \vee \bigvee_{j=i+1}^{n-1} c_j) =$$

$$\bigvee_{j=1}^{i-1} (e_i \vee (c_j \wedge e_j)) \vee e_i \vee c_i \vee e_i \vee c_{i+1} = \bigvee_{j=1}^{i-1} (e_i \vee (c_j \wedge e_j)) \vee e_i \vee c_i.$$

Si $1 \leq j \leq i-1$ entonces $c_j \wedge e_j \leq e_j \leq e_i$. Luego $\bigvee_{j=1}^{i-1} (e_i \vee (c_j \wedge e_j)) = \bigvee_{j=1}^{i-1} e_i = e_i$, de donde $1 \leq e_i \vee e_i \vee c_i = e_i \vee c_i$, es decir, $1 = e_i \vee c_i$. Por lo tanto $-c_i = -c_i \wedge 1 = -c_i \wedge (e_i \vee c_i) = -c_i \wedge e_i$, esto es, $-c_i \leq e_i$. En consecuencia (4) $b_i \wedge -c_i \leq b_i \wedge e_i = s_i$.
De (3) y (4) resulta que $s_i = b_i \wedge e_i = b_i \wedge -c_i$ y como $b_i, -c_i \in B_0$ tenemos que $s_i = b_i \wedge e_i \in B_0$, $1 \leq i \leq n-1$. Luego por (2) se concluye que $x \in B_0$ y por lo tanto $B(L_0) = B_0$. ■

Corolario 2.1 *L_0 es un P_0-reticulado.*

Dem. Por el Lema 2.2 $B(L_0) = B_0$, luego $L_0 = SL(B_0, E_n) = SL(B(L_0), E_n)$ y por lo tanto L_0 es un P_0-reticulado. ■

Esto nos da un método para construir P_0-reticulados.

Lema 2.3 *Sea L es un reticulado distributivo no trivial y $p, u \in L$ tales que $p \leq u$. Si $L' = [p, u]$ entonces:*

(a) *L' es un reticulado distributivo con primer elemento p y último elemento u. Si $p < u$ entonces L' es no trivial,*

(b) $L' = \{p \vee (x \wedge u) : x \in L\} = \{(p \vee x) \wedge u : x \in L\}$,

(c) $B_0 = \{p \vee (b \wedge u) : b \in B(L)\}$ *es una subálgebra booleana de $B(L')$.*

Dem.

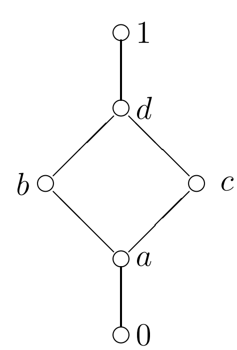
(a) Es bien conocido que se verifica (a).

(b) Sea $T = \{p \vee (x \wedge u) : x \in L\}$, donde $p < u$ y $t \in T$. Entonces $p \leq t = p \vee (x \wedge u) = (p \vee x) \wedge (p \vee u) = (p \vee x) \wedge u \leq u$, luego se tiene que $t \in L'$.
Sea $t \in L'$, esto es, $p \leq t \leq u$. De $t \leq u$ resulta $t = t \wedge u$ y como $p \leq t$ entonces $t = p \vee t = p \vee (t \wedge u)$ y por lo tanto $t \in T$.

(c) Como $p = p \vee (0 \wedge u)$ y $u = p \vee (1 \wedge u)$ entonces $p, u \in B_0$.
Sean $x, y \in B_0$, esto es, $x = p \vee (b_1 \wedge u)$ e $y = p \vee (b_2 \wedge u)$, donde $b_1, b_2 \in B(L)$. Luego $x \vee y = p \vee ((b_1 \vee b_2) \wedge u)$ y $x \wedge y = p \vee ((b_1 \wedge b_2) \wedge u)$, con $b_1 \vee b_2, b_1 \wedge b_2 \in B(L)$ y por lo tanto $x \vee y,\ x \wedge y \in B_0$.
Si $b' \in B_0$ entonces $b' = p \vee (b \wedge u)$, con $b \in B(L)$, de donde por (b) resulta que $b' \in L'$. Sea $b'' = p \vee (-b \wedge u) \in B_0 \cap L'$. Por lo visto precedentemente, $b' \vee b'' = p \vee ((b \vee -b) \wedge u) = p \vee (1 \wedge u) = p \vee u = u$ y $b' \wedge b'' = p \vee (b \wedge -b \wedge u) = p \vee 0 = p$.
Luego $b' \in B(L')$ y por lo tanto $B_0 \subseteq B(L')$.

■

No necesariamente se verifica la igualdad de los conjuntos B_0 y $B(L')$ del lema anterior. En efecto, sea L el reticulado distributivo indicado en el siguiente diagrama:



entonces si $L' = [a, d]$ tenemos que $B_0 = \{a, d\}$ y $B(L') = L'$.

Teorema 2.1 (G. Epstein y A. Horn, [4]) *Si L es un P_0-reticulado con cadena base $e_0 = 0 < e_1 < \cdots < e_{n-1} = 1$, y $L' = [e_i, e_j]$, donde $e_i < e_j$ entonces:*

(a) *L' es un P_0-reticulado con cadena base $e_i < e_{i+1} < \cdots < e_j$, donde $B(L') = \{e_i \vee (b \wedge e_j) : b \in B(L)\}$.*

(b) *Si $e_i = f_0 < \cdots < f_{r-1} = e_j$ es una cadena base de L' entonces $e_0 < \cdots < e_{i-1} < f_0 < \cdots < f_{r-1} < e_{j+1} < \cdots < e_{n-1}$ es una cadena base de L.*

(c) *Si L es de orden n entonces L' es de orden $j - i + 1$.*

Dem. (a) Por el Lema 2.3 (a), sabemos que L' es un reticulado distributivo acotado con primer elemento e_i y último elemento e_j. Si $X \subseteq L'$ notaremos $SL_{L'}(X)$ al $(0,1)$-subreticulado de L' generado por X.
Por el Lema 2.3 (c), $B_0 = \{e_i \vee (b \wedge e_j) : b \in B(L)\}$ es una subálgebra booleana de $B(L')$. Consideremos $L_0 = SL_{L'}(B_0, \{e_i, \ldots, e_j\}) \subseteq L'$ y probemos que $L_0 = L'$.
Sea $x \in L' \subseteq L$, luego x tiene una representación monótona $x = \bigvee\limits_{k=1}^{n-1} (b_k \wedge e_k)$ donde $b_k \in B(L)$, $1 \leq k \leq n-1$ y $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_{n-1}$.
Por el Lema 2.3 (b) tenemos que

$$x = e_i \vee (e_j \wedge x) = e_i \vee (e_j \wedge \bigvee_{k=1}^{n-1} (b_k \wedge e_k)) = e_i \vee \bigvee_{k=1}^{n-1} (b_k \wedge e_k \wedge e_j) =$$

$$e_i \vee \bigvee_{k=1}^{i} (b_k \wedge e_k \wedge e_j) \vee \bigvee_{k=i+1}^{j} (b_k \wedge e_k \wedge e_j) \vee \bigvee_{k=j+1}^{n-1} (b_k \wedge e_k \wedge e_j).$$

Si $1 \leq k \leq i$, como $b_k \wedge e_k \wedge e_j \leq e_k \leq e_i$, luego $\bigvee\limits_{k=1}^{i} (b_k \wedge e_k \wedge e_j) \leq e_i$ y por lo tanto $e_i \vee \bigvee\limits_{k=1}^{i} (b_k \wedge e_k \wedge e_j) = e_i$.
Si $i + 1 \leq k \leq j$ entonces $e_k \leq e_j$, de donde resulta $b_k \wedge e_k \wedge e_j = b_k \wedge e_k$.
Si $j + 1 \leq k \leq n - 1$ entonces $e_j \leq e_{j+1} \leq e_k$ y por lo tanto $\bigvee\limits_{k=j+1}^{n-1} (b_k \wedge e_k \wedge e_j) = \bigvee\limits_{k=j+1}^{n-1} (b_k \wedge e_j) = e_j \wedge \bigvee\limits_{k=j+1}^{n-1} b_k = e_j \wedge b_{j+1}$.
Luego

$$x = e_i \vee \bigvee_{k=i+1}^{j} (b_k \wedge e_k) \vee (e_j \wedge b_{j+1}) = e_i \vee \bigvee_{k=i+1}^{j-1} (b_k \wedge e_k) \vee (b_j \wedge e_j) \vee (e_j \wedge b_{j+1}) =$$

$$e_i \vee \bigvee_{k=i+1}^{j-1} (b_k \wedge e_k) \vee (e_j \wedge (b_j \vee b_{j+1})) = e_i \vee \bigvee_{k=i+1}^{j-1} (b_k \wedge e_k) \vee (e_j \wedge b_j) =$$

$$e_i \vee \bigvee_{k=i+1}^{j} (b_k \wedge e_k).$$

Si $i+1 \le k \le j$ entonces $b_k \wedge e_k = b_k \wedge e_k \wedge e_j$ y como $i < i+1 \le k$ entonces $e_i \vee e_k = e_k$, entonces

$$x = e_i \vee \bigvee_{k=i+1}^{j} (b_k \wedge e_k \wedge e_j) = \bigvee_{k=i+1}^{j} (e_i \vee (b_k \wedge e_k \wedge e_j)) =$$

$$\bigvee_{k=i+1}^{j} ((e_i \vee (b_k \wedge e_j)) \wedge (e_i \vee e_k)) = \bigvee_{k=i+1}^{j} [(e_i \vee (b_k \wedge e_j)) \wedge e_k].$$

Como $b'_k = e_i \vee (b_k \wedge e_j) \in B_0$, $i+1 \le k \le j$ entonces $x = \bigvee\limits_{k=i+1}^{j} (b'_k \wedge e_k) \in L_0$.

Luego $L' = L_0$ y teniendo en cuenta el Lema 2.2 resulta $B(L') = B(L_0) = B_0$, es decir, $L' = SL_{L'}(B_0, \{e_i, \ldots, e_j\}) = SL_{L'}(B(L'), \{e_i, \ldots, e_j\})$ y por lo tanto L' es un P_0-reticulado.

(b) Sea $f_0 = e_i < f_1 < \cdots < f_{r-1} = e_j$ una cadena base de L'. Vamos a probar que (*) $\{e_0, \ldots, e_{i-1}, f_0, \ldots, f_{r-1}, e_{j+1}, \ldots, e_{n-1}\}$ es una cadena base de L, esto es, que todo elemento $x \in L$ se puede escribir del siguiente modo:

$$x = \bigvee_{k=1}^{i} (d_k \wedge e_k) \vee \bigvee_{h=1}^{r-1} (c_h \wedge f_h) \vee \bigvee_{k=j+1}^{n-1} (d_k \wedge e_k),$$

donde $d_k,\, c_h \in B(L)$, para $1 \le k \le i$, $\ j+1 \le k \le n-1$ y $\ 1 \le h \le r-1$.
Como L es un P_0-reticulado con cadena base $e_0 < e_1 < \cdots < e_{n-1}$ entonces x tiene una representación monótona,

$$x = \bigvee_{k=1}^{i} (b_k \wedge e_k) \vee \bigvee_{k=i+1}^{j} (b_k \wedge e_k) \vee \bigvee_{k=j+1}^{n-1} (b_k \wedge e_k).$$

Si $i \le k \le j$ entonces $e_k \in L' = SL_{L'}(B_0, \{f_0, f_1, \ldots, f_{r-1}\})$ luego

$$e_k = \bigvee_{h=1}^{r-1} (d_h^{(k)} \wedge f_h),$$

donde $d_h^{(k)} \in B_0$, es decir, $d_h^{(k)} = e_i \vee (c_h^{(k)} \wedge e_j)$, con $c_h^{(k)} \in B(L)$, luego

$$e_k = \bigvee_{h=1}^{r-1} ((e_i \vee (c_h^{(k)} \wedge e_j)) \wedge f_h) = \bigvee_{h=1}^{r-1} ((e_i \wedge f_h) \vee (c_h^{(k)} \wedge e_j \wedge f_h)) =$$

$$\bigvee_{h=1}^{r-1} e_i \vee \bigvee_{h=1}^{r-1} (c_h^{(k)} \wedge f_h) = e_i \vee \bigvee_{h=1}^{r-1} (c_h^{(k)} \wedge f_h)$$

Luego, para $i+1 \le k \le j$ tenemos

$$b_k \wedge e_k = b_k \wedge (e_i \vee \bigvee_{h=1}^{r-1} (c_h^{(k)} \wedge f_h)) = (b_k \wedge e_i) \vee (b_k \wedge \bigvee_{h=1}^{r-1} (c_h^{(k)} \wedge f_h))$$

entonces

$$\bigvee_{k=i+1}^{j}(b_k \wedge e_k) = \bigvee_{k=i+1}^{j}[(b_k \wedge e_i) \vee \bigvee_{h=1}^{r-1}(b_k \wedge c_h^{(k)} \wedge f_h)] =$$

$$\bigvee_{k=i+1}^{j}(b_k \wedge e_i) \vee \bigvee_{k=i+1}^{j}[\bigvee_{h=1}^{r-1}(b_k \wedge c_h^{(k)} \wedge f_h)] = (e_i \wedge \bigvee_{k=i+1}^{j} b_k) \vee \bigvee_{k=i+1}^{j}[\bigvee_{h=1}^{r-1}(b_k \wedge c_h^{(k)} \wedge f_h)] =$$

$$(e_i \wedge b_{i+1}) \vee \bigvee_{k=i+1}^{j}[\bigvee_{h=1}^{r-1}(b_k \wedge c_h^{(k)} \wedge f_h)] =$$

$$(e_i \wedge b_{i+1}) \vee \bigvee_{h=1}^{r-1}[(\bigvee_{k=i+1}^{j}(b_k \wedge c_h^{(k)})) \wedge f_h]$$

Luego

$$x = \bigvee_{k=1}^{i}(b_k \wedge e_k) \vee \bigvee_{k=i+1}^{j}(b_k \wedge e_k) \vee \bigvee_{k=j+1}^{n-1}(b_k \wedge e_k) =$$

$$\bigvee_{k=1}^{i}(b_k \wedge e_k) \vee (e_i \wedge b_{i+1}) \vee \bigvee_{h=1}^{r-1}[(\bigvee_{k=i+1}^{j}(b_k \wedge c_h^{(k)})) \wedge f_h] \vee \bigvee_{k=j+1}^{n-1}(b_k \wedge e_k) =$$

$$\bigvee_{k=1}^{i-1}(b_k \wedge e_k) \vee (b_i \wedge e_i) \vee (e_i \wedge b_{i+1}) \vee \bigvee_{h=1}^{r-1}[(\bigvee_{k=i+1}^{j}(b_k \wedge c_h^{(k)})) \wedge f_h] \vee \bigvee_{k=j+1}^{n-1}(b_k \wedge e_k) =$$

$$\bigvee_{k=1}^{i-1}(b_k \wedge e_k) \vee (e_i \wedge (b_i \vee b_{i+1})) \vee \bigvee_{h=1}^{r-1}[(\bigvee_{k=i+1}^{j}(b_k \wedge c_h^{(k)})) \wedge f_h] \vee \bigvee_{k=j+1}^{n-1}(b_k \wedge e_k) =$$

$$\bigvee_{k=1}^{i-1}(b_k \wedge e_k) \vee (e_i \wedge b_i) \vee \bigvee_{h=1}^{r-1}[(\bigvee_{k=i+1}^{j}(b_k \wedge c_h^{(k)})) \wedge f_h] \vee \bigvee_{k=j+1}^{n-1}(b_k \wedge e_k) =$$

$$\bigvee_{k=1}^{i}(b_k \wedge e_k) \vee \bigvee_{h=1}^{r-1}[(\bigvee_{k=i+1}^{j}(b_k \wedge c_h^{(k)})) \wedge f_h] \vee \bigvee_{k=j+1}^{n-1}(b_k \wedge e_k),$$

donde $b_k \in B(L)$, $1 \leq k \leq i$, $j+1 \leq k \leq n-1$ y $\bigvee_{k=i+1}^{j}(b_k \wedge c_h^{(k)}) \in B(L)$, $1 \leq h \leq r-1$.
Por lo tanto $\{e_0, \ldots, e_{i-1}, f_0, \ldots, f_{r-1}, e_{j+1}, \ldots, e_{n-1}\}$ es una cadena base de L.
(c) Supongamos que L tiene orden n. Por (a) sabemos que L' tiene una cadena base con $j-i+1$ elementos. Supongamos que L' tiene orden $t < j-i+1$, esto es, existe una cadena $f_0 = e_i, f_1, \ldots, f_{t-1} = e_j$ tal que $L' = SL_{L'}(B(L'), \{f_0, \ldots, f_{t-1}\})$.
Si consideramos $E' = \{e_0, \ldots, e_{i-1}, f_0, f_1 \ldots, f_{t-1}, e_{j+1}, \ldots, e_{n-1} = 1\}$ entonces

$$|E'| < i + t + [(n-1) - (j+1) + 1] = i + t + n - 1 - j < i + j - i + 1 + n - 1 - j = n.$$

Luego por (*), E' es una cadena base de L con un número de elementos menor que n, absurdo. ∎

3. Cadenas base

Sean L_1 y L_2 P_0-reticulados de orden n_1 y n_2, respectivamente, con cadenas base

$$\{0^{(1)} = e_0^{(1)}, e_1^{(1)}, \ldots, e_{n_1-1}^{(1)} = 1^{(1)}\} \text{ y } \{0^{(2)} = e_0^{(2)}, e_1^{(2)}, \ldots, e_{n_2-1}^{(2)} = 1^{(2)}\},$$

donde $n_1 < n_2$, y sea $L = L_1 \times L_2$.
Vamos a considerar los siguientes elementos de L (ver G. Epstein y A. Horn, [4] , Lema 4.9):

$$e_i = \begin{cases} (e_i^{(1)}, e_i^{(2)}) & \text{si } 0 \le i \le n_1 - 1 \\ \\ (1^{(1)}, e_i^{(2)}) & \text{si } n_1 \le i \le n_2 - 1. \end{cases}$$

Es claro que $e_0 < e_1 < \cdots < e_{n_2-1}$. Vamos a probar que ésta es una cadena base de L. Si $(x, y) \in L$ entonces $x = \bigvee_{i=1}^{n_1-1} (b_i^{(1)} \wedge e_i^{(1)})$, donde $b_i^{(1)} \in B(L_1)$ y $b_1^{(1)} \ge \cdots \ge b_{n_1-1}^{(1)}$, e $y = \bigvee_{i=1}^{n_2-1} (b_i^{(2)} \wedge e_i^{(2)})$, donde $b_i^{(2)} \in B(L_2)$ y $b_1^{(2)} \ge \cdots \ge b_{n_2-1}^{(2)}$. Luego

$$(x, y) = (\bigvee_{i=1}^{n_1-1} (b_i^{(1)} \wedge e_i^{(1)}), \bigvee_{i=1}^{n_2-1} (b_i^{(2)} \wedge e_i^{(2)})) =$$

$$(\bigvee_{i=1}^{n_1-1} (b_i^{(1)} \wedge e_i^{(1)}), \bigvee_{i=1}^{n_1-1} (b_i^{(2)} \wedge e_i^{(2)})) \vee (0^{(1)}, \bigvee_{i=n_1}^{n_2-1} (b_i^{(2)} \wedge e_i^{(2)})) =$$

$$\bigvee_{i=1}^{n_1-1} (b_i^{(1)} \wedge e_i^{(1)}, b_i^{(2)} \wedge e_i^{(2)}) \vee \bigvee_{i=n_1}^{n_2-1} (0^{(1)}, b_i^{(2)} \wedge e_i^{(2)}) =$$

$$\bigvee_{i=1}^{n_1-1} ((b_i^{(1)}, b_i^{(2)}) \wedge (e_i^{(1)}, e_i^{(2)})) \vee \bigvee_{i=n_1}^{n_2-1} ((0^{(1)}, b_i^{(2)}) \wedge (1^{(1)}, e_i^{(2)})).$$

Si ponemos $b_i = (b_i^{(1)}, b_i^{(2)})$, $1 \le i \le n_1 - 1$, entonces $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_{n_1-1}$ y si $b_i = (0^{(1)}, b_i^{(2)})$, $n_1 \le i \le n_2 - 1$, se tiene $b_{n_1} \ge \cdots \ge b_{n_2-1}$. Además $b_{n_1-1} \ge b_{n_1}$, luego

$$(x, y) = \bigvee_{i=1}^{n_1-1} (b_i \wedge e_i) \vee \bigvee_{i=n_1}^{n_2-1} (b_i \wedge e_i) = \bigvee_{i=1}^{n_2-1} (b_i \wedge e_i),$$

donde $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_{n_1-1} \ge b_{n_1} \ge \cdots \ge b_{n_2-1}$ y $b_i \in B(L)$, para $1 \le i \le n_2 - 1$.
Luego (1) $SL(B(L), \{e_0, e_1, \ldots, e_{n_2-1}\}) = L$, y por lo tanto L es un P_0-reticulado.

Supongamos que L tiene una cadena base $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ con n elementos, es decir, $SL(B(L), \{f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}\}) = L$, donde $f_0 = (0^{(1)}, 0^{(2)})$, $f_i = (f_i^{(1)}, f_i^{(2)})$, $1 \le i \le n - 2$ y $f_{n-1} = (1^{(1)}, 1^{(2)})$.

Es claro que $0^{(1)}, f_1^{(1)}, \ldots, f_{n-1}^{(1)}$ es una cadena de L_1 y $0^{(2)}, f_1^{(2)}, \ldots, f_{n-1}^{(2)}$ es una cadena de L_2.

Por hipótesis $(x,y) = \bigvee_{i=1}^{n-1}(b_i \wedge f_i)$, con $b_i = (b_i^{(1)}, b_i^{(2)}) \in B(L)$ y $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_{n-1}$.
Esto es,

$$(x,y) = \bigvee_{i=1}^{n-1}((b_i^{(1)}, b_i^{(2)}) \wedge (f_i^{(1)}, f_i^{(2)})) = \bigvee_{i=1}^{n-1}(b_i^{(1)} \wedge f_i^{(1)}, b_i^{(2)} \wedge f_i^{(2)}) =$$

$$(\bigvee_{i=1}^{n-1}(b_i^{(1)} \wedge f_i^{(1)}), \bigvee_{i=1}^{n-1}(b_i^{(2)} \wedge f_i^{(2)})).$$

Luego

$$x = \bigvee_{i=1}^{n-1}(b_i^{(1)} \wedge f_i^{(1)}) \quad \text{e} \quad y = \bigvee_{i=1}^{n-1}(b_i^{(2)} \wedge f_i^{(2)}).$$

De aquí resulta que $SL(B(L_2), \{f_0^{(2)}, f_1^{(2)}, \ldots, f_{n-1}^{(2)}\}) = L_2$ y como L_2 es de orden n_2 entonces $n \geq n_2$. Por lo tanto, como por (1) sabemos que L tiene una cadena base con n_2 elementos resulta que L es un P_0-reticulado de orden n_2.
En general, se puede probar que:

Lema 3.1 (G. Epstein y A. Horn, [4]) *Sea L_j un P_0-reticulado con cadena base $\{e_0^{(j)}, e_1^{(j)}, \ldots, e_{n_j-1}^{(j)}\}$, para $j \in J$, $n = máx\{n_j : j \in J\}$ finito. Si se define $e_k^j = e_{n_j-1}^{(j)}$, para $n_j \leq k \leq n-1$ entonces $L = \prod_{j\in J} L_j$ es un P_0-reticulado con cadena base $E_n = \{e_i = (e_i^j)_{j\in J} : 0 \leq i \leq n-1\}$.*

Consideremos las cadenas

$$C_1 = \{0\} \text{ y para } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ \ C_n = \{\frac{j}{n-1} : 0 \leq j \leq n-1\}. \tag{3.1}$$

Observación 3.1 (1) *Toda cadena con n elementos tiene exactamente una cadena base.*

(2) *Si L_1 y L_2 son P_0-reticulados de orden n entonces $L = L_1 \times L_2$ tiene orden n y una cadena base para L está dada por $E_n = \{e_i = (e_i^{(1)}, e_i^{(2)}), 0 \leq i \leq n-1\}$.*

(3) *Si $L_1 = C_{n_1}$, $L_2 = C_{n_2}$ y $n_1 \leq n_2$ entonces L_1 es de orden n_1, L_2 es de orden n_2 y $L = L_1 \times L_2$ es de orden n_2.*
Sean $n_1, n_2, \ldots, n_r$ números naturales tales que $n_j \neq n_k$, para todo $j \neq k$, $1 \leq j,k \leq r$, m_h, $1 \leq h \leq r$ números naturales y C_{n_h} las cadenas definidas en (3.1). *Si $L = \prod_{h=1}^{r} C_{n_h}^{m_h}$, entonces L es de orden $n = máx\{n_i : 1 \leq i \leq r\}$.*

Sean L_1 y L_2 P_0-reticulados de orden n_1 y n_2, donde $n_1 < n_2$, con cadenas base

$$\{e_0^{(1)}, e_1^{(1)}, \ldots, e_{n_1-1}^{(1)}\} \text{ y } \{e_0^{(2)}, e_1^{(2)}, \ldots, e_{n_2-1}^{(2)}\}$$

respectivamente. Consideremos los siguientes elementos de $L = L_1 \times L_2$ (G. Epstein y A. Horn, [4] , pag. 74):

$$h_i = \begin{cases} (e_0^{(1)}, e_i^{(2)}) & \text{si } \ 0 \leq i \leq n_2 - n_1 \\ \\ (e_{i-n_2+n_1}^{(1)}, e_i^{(2)}) & \text{si } \ n_2 - n_1 + 1 \leq i \leq n_2 - 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Es claro que $\{h_0, h_1, \ldots, h_{n_2-1}\}$ es una cadena de L pues, para $j < k$, $0 \leq j, k \leq n_2 - n_1$ se verifica $h_j < h_k$, $h_{n_2-n_1} = (e_0^{(1)}, e_{n_2-n_1}^{(2)}) < (e_1^{(1)}, e_{n_2-n_1+1}^{(2)}) = h_{n_2-n_1+1}$ y para $j < k$, $n_2 - n_1 + 1 \leq j, k \leq n_2 - 1$ se tiene $h_j < h_k$.
Vamos a probar que esta es una cadena base de L. Si $(x, y) \in L$ entonces

$$x = \bigvee_{i=1}^{n_1-1} (b_i^{(1)} \wedge e_i^{(1)}), \quad \text{donde} \quad b_i^{(1)} \in B(L_1) \ \text{ y } \ b_1^{(1)} \geq b_2^{(1)} \geq \cdots \geq b_{n_1-1}^{(1)}$$

e

$$y = \bigvee_{i=1}^{n_2-1} (b_i^{(2)} \wedge e_i^{(2)}), \quad \text{donde} \quad b_i^{(2)} \in B(L_2) \ \text{ y } \ b_1^{(2)} \geq b_2^{(2)} \geq \cdots \geq b_{n_2-1}^{(2)}.$$

Luego

$$(x, y) = (\bigvee_{i=1}^{n_1-1} (b_i^{(1)} \wedge e_i^{(1)}), \bigvee_{i=1}^{n_2-1} (b_i^{(2)} \wedge e_i^{(2)})) =$$

$$(\bigvee_{i=1}^{n_1-1} (b_i^{(1)} \wedge e_i^{(1)}), \bigvee_{i=1}^{n_2-n_1} (b_i^{(2)} \wedge e_i^{(2)}) \vee \bigvee_{i=n_2-n_1+1}^{n_2-1} (b_i^{(2)} \wedge e_i^{(2)})) =$$

$$(e_0^{(1)}, \bigvee_{i=1}^{n_2-n_1} (b_i^{(2)} \wedge e_i^{(2)})) \vee (\bigvee_{i=n_2-n_1+1}^{n_2-1} (b_{i-n_2+n_1}^{(1)} \wedge e_{i-n_2+n_1}^{(1)}), \bigvee_{i=n_2-n_1+1}^{n_2-1} (b_i^{(2)} \wedge e_i^{(2)})) =$$

$$\bigvee_{i=1}^{n_2-n_1} (e_0^{(1)}, b_i^{(2)} \wedge e_i^{(2)}) \vee \bigvee_{i=n_2-n_1+1}^{n_2-1} (b_{i-n_2+n_1}^{(1)} \wedge e_{i-n_2+n_1}^{(1)}\ ,\ b_i^{(2)} \wedge e_i^{(2)}) =$$

$$\bigvee_{i=1}^{n_2-n_1} ((e_0^{(1)}, b_i^{(2)}) \wedge (e_0^{(1)}, e_i^{(2)})) \vee \bigvee_{i=n_2-n_1+1}^{n_2-1} ((b_{i-n_2+n_1}^{(1)}, b_i^{(2)}) \wedge (e_{i-n_2+n_1}^{(1)}, e_i^{(2)})).$$

Si ponemos $b_i = (e_0^{(1)}, b_i^{(2)})$, $1 \leq i \leq n_2 - n_1$ y $b_i = (b_{i-n_2+n_1}^{(1)}, b_i^{(2)})$, $n_2 - n_1 + 1 \leq i \leq n_2 - 1$ entonces

$$(x, y) = \bigvee_{i=1}^{n_2-n_1} (b_i \wedge h_i) \vee \bigvee_{i=n_2-n_1+1}^{n_2-1} (b_i \wedge h_i) = \bigvee_{i=1}^{n_2-1} (b_i \wedge h_i),$$

lo que prueba que $SL(B(L), \{h_0, h_1, \ldots, h_{n_2-1}\}) = L$.

Del Lema 3.1 y (3.2) resulta (ver G. Epstein y A. Horn, [4]) que si L_1 y L_2 son P_0-reticulados de orden n_1 y n_2, respectivamente, con $2 \leq n_1 < n_2$, entonces $L_1 \times L_2$ tiene más de una cadena base.

Sean C_n y C_m los P_0-reticulados definidos en (3.1). Para simplificar las notaciones vamos a notar $e_j^{(n)} = \dfrac{j}{n-1}$, para $0 \leq j \leq n-1$, a los elementos de C_n y $e_j^{(m)} = \dfrac{j}{m-1}$, para $0 \leq j \leq m-1$, a los elementos de C_m.

Si $1 \leq n < m$, sea $P(n, m) = C_n \times C_m$, entonces $P(n, m)$ es un P_0-reticulado de orden m. Sabemos que $P(n, m)$ tiene mas de una cadena base ([4]). Vamos a determinar el número de cadenas base con m elementos de $P(n, m)$. Notaremos con $C(n, m)$ el conjunto de todas las cadenas base con m elementos de $P(n,m)$. Si $m \geq 2$, como $P(1,m) \cong C_m$ entonces $|C(1,m)| = 1$, para $m \geq 2$.

Es claro que $|C(2,3)| = 2$. Si $n = 2$ y $3 < m$ consideremos los siguientes elementos de $P(2,m)$

$$q_0 = (e_0^{(2)}, e_0^{(m)}), \quad q_1 = (e_0^{(2)}, e_{m-2}^{(m)}), \quad q_2 = (e_0^{(2)}, e_{m-1}^{(m)}),$$

$$q_3 = (e_1^{(2)}, e_0^{(m)}), \quad q_4 = (e_1^{(2)}, e_{m-2}^{(m)}), \quad q_5 = (e_1^{(2)}, e_{m-1}^{(m)}).$$

entonces $B(P(2,m)) = \{q_0, q_2, q_3, q_5\}$.

$(q_4]$ es un subreticulado de $P(2,m)$ isomorfo a $P(2,m-1)$ luego es un P_0-reticulado de orden $m-1$ y $B((q_4]) = \{q_0, q_1, q_3, q_4\}$.

$(q_1]$ es un subreticulado de $P(2,m)$ isomorfo a $P(1,m-1)$ luego es un P_0-reticulado de orden $m-1$ y $B((q_1]) = \{q_0, q_1\}$.

Si $E_m = \{f_0 = q_0, f_1, \ldots, f_{m-1} = q_5\}$ es una cadena base de $P(2,m)$ y $Z_i^{(2)}(E_m) = \{(e_i^{(2)}, y) : y \in C_m\} \cap E_m$, para $i = 0, 1$, entonces

$$Z_i^{(2)}(E_m) \neq \emptyset, \text{ para } \ i = 0, 1. \tag{3.3}$$

dado que $f_0 \in Z_0^{(2)}(E_m)$ y $f_{m-1} \in Z_1^{(2)}(E_m)$. Observemos que

$$Z_0^{(2)}(E_m) \cup Z_1^{(2)}(E_m) = (\{(e_0^{(2)}, y) : y \in C_m\} \cap E_m) \cup (\{(e_1^{(2)}, y) : y \in C_m\} \cap E_m) =$$

$$(\{(e_0^{(2)}, y) : y \in C_m\} \cup \{(e_1^{(2)}, y) : y \in C_m\}) \cap E_m = P(2,m) \cap E_m = E_m.$$

Además $Z_0^{(2)}(E_m) \cap Z_1^{(2)}(E_m) = \emptyset$. Luego $\{Z_0^{(2)}(E_m), Z_1^{(2)}(E_m)\}$ es una 2-partición de E_m. Por lo tanto si $z_i = |Z_i^{(2)}(E_m)|$, $i = 0, 1$, entonces $1 \leq z_i \leq m$ y $z_0 + z_1 = m$.
Además si $x \in Z_0^{(2)}(E_m)$, $y \in Z_1^{(2)}(E_m)$ entonces $x < y$, pues caso contrario, como $x, y \in E_m$, resultaría $x \geq y$, es decir $e_0^{(2)} \geq e_1^{(2)}$, absurdo.
Si $W_j^{(m)}(E_m) = \{(x, e_j^{(m)}) : x \in C_2\} \cap E_m$, para $0 \leq j \leq m-1$, entonces:

$$W_j^{(m)}(E_m) \neq \emptyset, \text{ para } \ 0 \leq j \leq m-1. \tag{3.4}$$

En efecto, $f_0 \in W_0^{(m)}(E_m)$ y $f_{m-1} \in W_{m-1}^{(m)}(E_m)$. Supongamos que existe j_0, $0 < j_0 < m-1$ tal que (1) $W_{j_0}^{(m)}(E_m) = \emptyset$. Consideremos los conjuntos $S_1 = ((e_1^{(2)}, e_{j_0-1}^{(m)})]$ y $S_2 = [(e_0^{(2)}, e_{j_0+1}^{(m)}))$ entonces $S_1 \cup S_2 \neq P(2,m)$ y por (1) $E_m \subseteq S_1 \cup S_2$.
Si $f_i \in S_1$ entonces $f_i^{(2)} \leq e_1^{(2)}$ y $f_i^{(m)} \leq e_{j_0-1}^{(m)}$. Luego si $b \in B(P(2,m))$ resulta que $f_i \wedge b \in \{q_0, (e_0^{(2)}, f_i^{(m)}), (f_i^{(2)}, e_0^{(m)}), f_i\} \subseteq S_1$.
Si $f_i \in S_2$ entonces $e_0^{(2)} \leq f_i^{(2)}$ y $e_{j_0+1}^{(m)} \leq f_i^{(m)}$. Luego si $b \in B(P(2,m))$ resulta que $f_i \wedge b \in \{q_0, (e_0^{(2)}, f_i^{(m)}), (f_i^{(2)}, e_0^{(m)}), f_i\}$.
Como $q_0, (f_i^{(2)}, e_0^{(m)}) \in S_1$ y $(e_0^{(2)}, f_i^{(m)}), f_i \in S_2$ podemos afirmar que (2) $f_i \wedge b \in S_1 \cup S_2$, para todo i, $0 \leq i \leq m-1$.
Es claro que si $x, y \in S_i$ entonces $x \vee y \in S_i$, para $i = 1, 2$. Supongamos ahora que

$x = (x^{(2)}, x^{(m)}) \in S_1$ e $y = (y^{(2)}, y^{(m)}) \in S_2$, entonces $x^{(m)} \leq e^{(m)}_{j_0-1} < e^{(m)}_{j_0+1} \leq y^{(m)}$, luego $x \vee y = (x^{(2)} \vee y^{(2)}, y^{(m)})$ y como $e^{(2)}_0 \leq x^{(2)} \vee y^{(2)}$ y $e^{(m)}_{j_0+1} \leq y^{(m)}$ tenemos que $x \vee y \in S_2$. Por lo tanto si $x, y \in S_1 \cup S_2$ entonces (3) $x \vee y \in S_1 \cup S_2$.

Como $SL(B(P(2,m)), E_m) = P(2,m)$, si $z \in P(2,m)$ resulta que (4) $z = \bigvee\limits_{i=1}^{m-1} (b_i \wedge f_i)$, con $b_i \in B(P(2,m))$, para $1 \leq i \leq m-1$. Luego de (2), (3) y (4) se tiene que $P(2,m) \subseteq S_1 \cup S_2$ y por lo tanto $P(2,m) = S_1 \cup S_2$, contradición. Podemos afirmar entonces que se verifica (3.4).
Observemos que

$$\bigcup_{j=0}^{m-1} W^{(m)}_j(E_m) = \bigcup_{j=0}^{m-1} (\{(x, e^{(m)}_j) : x \in C_2\} \cap E_m) =$$

$$(\bigcup_{j=0}^{m-1} \{(x, e^{(m)}_j) : x \in C_2\}) \cap E_m = P(2,m) \cap E_m = E_m.$$

Si $0 \leq j_1, j_2 \leq m-1$ y $j_1 \neq j_2$ entonces $W^{(m)}_{j_1}(E_m) \cap W^{(m)}_{j_2}(E_m) = \emptyset$. Luego $\{W^{(m)}_j(E_m)\}_{j=0}^{m-1}$ es una m-partición de E_m.

Por lo tanto si $w_j = |W^{(m)}_j(E_m)|$, para $0 \leq j \leq m-1$, entonces (5) $1 \leq w_j \leq m$ y (6) $\sum\limits_{j=0}^{m-1} w_j = m$. De (5) y (6) resulta $w_j = 1$, para $0 \leq j \leq m-1$.

Lema 3.2 *Si $m \geq 3$ entonces $|C(2,m)| = m-1$.*

Dem. Sabemos que $|C(2,3)| = 2$. Sea $m \geq 4$ y supongamos que $|C(2,m-1)| = m-2$. Sea $E_m = \{f_0 = q_0, f_1, \ldots, f_{m-1} = q_5\}$ una cadena base de $P(2,m)$.
Sabemos que $\{Z^{(2)}_0(E_m), Z^{(2)}_1(E_m)\}$ es una 2-partición de E_m, por lo tanto

$$f_{m-2} \in Z^{(2)}_1(E_m) \quad \text{ó} \quad f_{m-2} \in Z^{(2)}_0(E_m).$$

Sea $C^{(1)}(2,m)$ el conjunto de las cadenas base de $P(2,m)$ tales que $f_{m-2} \in Z^{(2)}_1(E_m)$ y $C^{(2)}(2,m)$ el conjunto de las cadenas base de $P(2,m)$ tales que $f_{m-2} \in Z^{(2)}_0(E_m)$. Luego como $C(2,m) = C^{(1)}(2,m) \cup C^{(2)}(2,m)$ y $C^{(1)}(2,m) \cap C^{(2)}(2,m) = \emptyset$ tenemos que:

$$|C(2,m)| = |C^{(1)}(2,m)| + |C^{(2)}(2,m)|.$$

Es claro que $f_{m-2} \notin W^{(m)}_{m-1}(E_m) = \{f_{m-1}\}$. Si $f_{m-2} \in ((e^{(2)}_1, e^{(m)}_{m-3})]$ entonces

$$L = SL(B(L), E_m) \subseteq ((e^{(2)}_1, e^{(m)}_{m-3})] \cup [q_2),$$

absurdo. Luego $f_{m-2} \in W^{(m)}_{m-2}(E_m)$, es decir,

$$f_{m-2} = (e^{(2)}_0, e^{(m)}_{m-2}) = q_1 \text{ ó } f_{m-2} = (e^{(2)}_1, e^{(m)}_{m-2}) = q_4.$$

Si $f_{m-2} = q_1$ entonces $(f_{m-2}] \cong P(1, m-1)$ y por lo tanto

$$(1)\ \ |C^{(2)}(2,m)| = |C(1,m-1)| = 1.$$

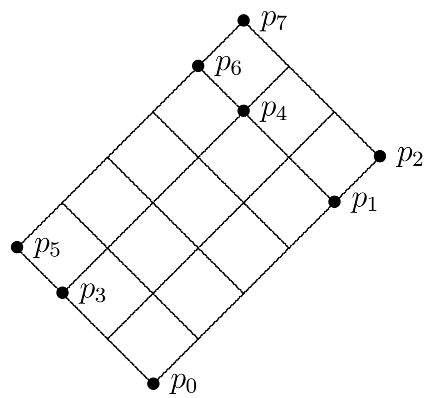
Si $f_{m-2} = q_4$ entonces $(f_{m-2}] \cong P(2, m-1)$, luego (2) $|C^{(1)}(2,m)| = |C(2,m-1)| = m-2$.
De (1) y (2) tenemos $|C(2,m)| = |C^{(1)}(2,m)| + |C^{(2)}(2,m)| = m-2+1 = m-1$. ■

Si $3 \leq n < m$, consideremos los siguientes elementos de $P(n,m)$:

$$p_0 = (e_0^{(n)}, e_0^{(m)}),\quad p_1 = (e_0^{(n)}, e_{m-2}^{(m)}),\quad p_2 = (e_0^{(n)}, e_{m-1}^{(m)}),\quad p_3 = (e_{n-2}^{(n)}, e_0^{(m)}),$$

$$p_4 = (e_{n-2}^{(n)}, e_{m-2}^{(m)}),\quad p_5 = (e_{n-1}^{(n)}, e_0^{(m)}),\quad p_6 = (e_{n-1}^{(n)}, e_{m-2}^{(m)}),\quad p_7 = (e_{n-1}^{(n)}, e_{m-1}^{(m)}).$$

Entonces $B(P(n,m)) = \{p_0, p_2, p_5, p_7\}$.
Por ejemplo, si $n = 4$ y $m = 6$ tenemos:



$(p_6]$ es un subreticulado de $P(n,m)$ isomorfo a $P(n, m-1)$ luego es un P_0-reticulado de orden $m-1$ y $B((p_6]) = \{p_0, p_1, p_5, p_6\}$. Observemos que

$$p_0 = p_0 \wedge p_6,\ p_1 = p_2 \wedge p_6,\ p_5 = p_5 \wedge p_6,\ p_6 = p_7 \wedge p_6,$$

luego

$$b \in B((p_6]) \iff b = b' \wedge p_6,\ \text{donde } b' \in B(P(n,m)). \tag{3.5}$$

$(p_4]$ es un subreticulado de $P(n,m)$ isomorfo a $P(n-1, m-1)$ luego es un P_0-reticulado de orden $m-1$ y $B((p_4]) = \{p_0, p_1, p_3, p_4\}$. Observemos que

$$p_0 = p_0 \wedge p_4,\ p_1 = p_2 \wedge p_4,\ p_3 = p_5 \wedge p_4,\ p_4 = p_7 \wedge p_4,$$

luego

$$b \in B((p_4]) \iff b = b' \wedge p_4 \text{ donde, } b' \in B(P(n,m)). \tag{3.6}$$

Si $E_m = \{f_0 = p_0, f_1, \ldots, f_{m-1} = p_7\}$ es una cadena base de $P(n,m)$ y $Z_i^{(n)}(E_m) = \{(e_i^{(n)}, y) : y \in C_m\} \cap E_m$, para $0 \leq i \leq n-1$, entonces

$$Z_i^{(n)}(E_m) \neq \emptyset,\ \text{para } 0 \leq i \leq n-1. \tag{3.7}$$

En efecto, $f_0 \in Z_0^{(n)}(E_m)$ y $f_{m-1} \in Z_{n-1}^{(n)}(E_m)$. Supongamos que existe i_0, $0 < i_0 < n-1$ tal que (1) $\{(e_{i_0}^{(n)}, y) : y \in C_m\} \cap E_m = \emptyset$. Consideremos los conjuntos $S_1 = ((e_{i_0-1}^{(n)}, e_{m-1}^{(m)})]$ y $S_2 = [(e_{i_0+1}^{(n)}, e_0^{(m)}))$ entonces $S_1 \cup S_2 \neq P(n,m)$ y por la hipótesis (1) tenemos que $f_i \in S_1 \cup S_2$, $0 \leq i \leq m-1$.
Si $f_i \in S_1$ entonces $f_i^{(n)} \leq e_{i_0-1}^{(n)}$ y $f_i^{(m)} \leq e_{m-1}^{(m)}$. Luego si $b \in B(P(n,m))$, resulta $f_i \wedge b \in \{(e_0^{(n)}, e_0^{(m)}), (e_0^{(n)}, f_i^{(m)}), (f_i^{(n)}, e_0^{(m)}), f_i\} \subseteq S_1$.
Si $f_i \in S_2$ entonces $e_{i_0+1}^{(n)} \leq f_i^{(n)}$ y $e_0^{(m)} \leq f_i^{(m)}$.
Si $b \in B(P(n,m))$ se tiene que $f_i \wedge b \in \{(e_0^{(n)}, e_0^{(m)}), (e_0^{(n)}, f_i^{(m)}), (f_i^{(n)}, e_0^{(m)}), f_i\}$.
Como $(e_0^{(n)}, e_0^{(m)}), (e_0^{(n)}, f_i^{(m)}) \in S_1$ y $(f_i^{(n)}, e_0^{(m)}), f_i \in S_2$, podemos afirmar que:
(2) $f_i \wedge b \in S_1 \cup S_2$, para todo i, $0 \leq i \leq m-1$.
Es claro que si $x, y \in S_i$ entonces $x \vee y \in S_i$, para $i = 1, 2$. Supongamos ahora que $x = (x^{(n)}, x^{(m)}) \in S_1$ e $y = (y^{(n)}, y^{(m)}) \in S_2$ entonces $x^{(n)} \leq e_{i_0-1}^{(n)} < e_{i_0+1}^{(n)} \leq y^{(n)}$, luego $x \vee y = (y^{(n)}, x^{(m)} \vee y^{(m)})$ y como $e_{i_0+1}^{(n)} \leq y^{(n)}$ y $e_0^{(m)} \leq x^{(m)} \vee y^{(m)}$ tenemos que $x \vee y \in S_2$.
Por lo tanto si $x, y \in S_1 \cup S_2$ resulta (3) $x \vee y \in S_1 \cup S_2$.
Como $SL(B(P(n,m)), E_m) = P(n,m)$ entonces si $z \in P(n,m)$ tenemos que (4) $z = \bigvee_{i=1}^{m-1} (b_i \wedge f_i)$, con $b_i \in B(P(n,m))$, para $1 \leq i \leq m-1$. Luego de (2), (3) y (4) resulta que $P(n,m) \subseteq S_1 \cup S_2$, y por lo tanto $P(n,m) = S_1 \cup S_2$, contradicción. Podemos entonces afirmar que se verifica (3.7).

Observemos que

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} Z_i^{(n)}(E_m) = \bigcup_{i=0}^{n-1} (\{(e_i^{(n)}, y) : y \in C_m\} \cap E_m) =$$

$$(\bigcup_{i=0}^{n-1} \{(e_i^{(n)}, y) : y \in C_m\}) \cap E_m = P(n,m) \cap E_m = E_m.$$

Es claro que si $0 \leq i, j \leq n-1$ e $i \neq j$ entonces $Z_i^{(n)}(E_m) \cap Z_j^{(n)}(E_m) = \emptyset$. Luego $\{Z_i^{(n)}(E_m)\}_{i=0}^{n-1}$ es una n-partición de E_m. Por lo tanto si $z_i = |Z_i^{(n)}(E_m)|$, $0 \leq i \leq n-1$, entonces $1 \leq z_i \leq m$ y $\sum_{i=0}^{n-1} z_i = m$.

$$\text{Si (1) } x \in Z_i^{(n)}(E_m),\ y \in Z_j^{(n)}(E_m), \text{ donde (2) } i < j \text{ entonces } x < y. \tag{3.8}$$

En efecto, de (1) resulta que $x = (e_i^{(n)}, y_1), y = (e_j^{(n)}, y_2)$, donde $y_1, y_2 \in C_m$ y $x, y \in E_m$. Por lo tanto (3) $x \geq y$ ó $x < y$. Si ocurre (3) entonces $e_i^{(n)} \geq e_j^{(n)}$, absurdo, pues por (2) se tiene $e_i^{(n)} < e_j^{(n)}$. Luego $x < y$.

Si $W_j^{(m)}(E_m) = \{(x, e_j^{(m)}) : x \in C_n\} \cap E_m$, para $0 \leq j \leq m-1$, entonces razonando en forma análoga se tiene que:

$$W_j^{(m)}(E_m) \neq \emptyset, \text{ para } 0 \leq j \leq m-1. \tag{3.9}$$

Observemos que

$$\bigcup_{j=0}^{m-1} W_j^{(m)}(E_m) = \bigcup_{j=0}^{m-1} (\{(x, e_j^{(m)}) : x \in C_n\} \cap E_m) =$$

$$(\bigcup_{j=0}^{m-1} \{(x, e_j^{(m)}) : x \in C_n\}) \cap E_m = P(n,m) \cap E_m = E_m.$$

Si $0 \leq j_1, j_2 \leq m-1$ y $j_1 \neq j_2$ entonces $W_{j_1}^{(m)}(E_m) \cap W_{j_2}^{(m)}(E_m) = \emptyset$. Luego $\{W_j^{(m)}(E_m)\}_{j=0}^{m-1}$ es una m-partición de E_m. Por lo tanto si $w_j = |W_j^{(m)}(E_m)|$, para $0 \leq j \leq m-1$, entonces (4) $1 \leq w_j \leq m$ y (5) $\sum\limits_{j=0}^{m-1} w_j = m$. De (4) y (5) resulta $w_j = 1$, para $0 \leq j \leq m-1$.

En forma análoga a lo indicado en (3.8) se prueba que:

$$\text{Si } \ x \in W_i^{(m)}(E_m), \ y \in W_j^{(m)}(E_m), \ \text{donde } i < j \text{ entonces } x < y. \tag{3.10}$$

Lema 3.3 $|C(n,m)| = |C(n-1,m-1)| + |C(n,m-1)|$, *para* $3 \leq n < m$.

Dem. Sea $E_m = \{f_0 = p_0, f_1, \ldots, f_{m-1} = p_7\}$ una cadena base de $P(n,m)$. Sabemos que $\{Z_i^{(n)}(E_m)\}_{i=0}^{n-1}$ es una n-partición de E_m.
Observemos que $f_{m-2} \in Z_{n-1}^{(n)}(E_m)$ ó $f_{m-2} \in Z_{n-2}^{(n)}(E_m)$. En efecto, si $f_{m-2} \in Z_j^{(n)}(E_m)$, con $j < n-2$ entonces $Z_{n-2}^{(n)}(E_m) = \emptyset$, pues si existiera $f_i \in Z_{n-2}^{(n)}(E_m)$ por (3.8) resulta que $f_{m-2} < f_i$, luego $f_i = f_{m-1}$, contradicción.
Sea $C^{(1)}(n,m)$ el conjunto de las cadenas base de $P(n,m)$ tales que $f_{m-2} \in Z_{n-1}^{(n)}(E_m)$ y $C^{(2)}(n,m)$ el conjunto de las cadenas base de $P(n,m)$ tales que $f_{m-2} \in Z_{n-2}^{(n)}(E_m)$. Luego como $C(n,m) = C^{(1)}(n,m) \cup C^{(2)}(n,m)$ y $C^{(1)}(n,m) \cap C^{(2)}(n,m) = \emptyset$ tenemos que:

$$|C(n,m)| = |C^{(1)}(n,m)| + |C^{(2)}(n,m)|.$$

Caso A) Si $f_{m-2} \in Z_{n-1}^{(n)}(E_m)$, entonces $f_{m-2} = (e_{n-1}^{(n)}, e_j^{(m)}) \in W_j^{(m)}(E_m)$, con $0 \leq j \leq m-1$. Como $f_{m-2} \neq f_{m-1}$ entonces $j \neq m-1$. Si fuera $j < m-2$ resultaría que $W_{m-2}^{(m)}(E_m) = \emptyset$, pues si existiera $f_i \in W_{m-2}^{(m)}(E_m)$, por (3.10) resulta que $f_{m-2} < f_i$, luego $f_i = f_{m-1}$, contradicción. Luego $j = m-2$, esto es, $f_{m-2} = p_6$. Por lo tanto $(f_{m-2}] \cong P(n, m-1)$.

Sea $E_{m-1}^{(1)} = \{f_i : 0 \leq i \leq m-2\}$, luego $E_{m-1}^{(1)} \subseteq (f_{m-2}]$. Probemos que $E_{m-1}^{(1)}$ es una cadena base de $(f_{m-2}] = (p_6]$. En efecto, si $x \in (f_{m-2}] \subset P(n,m)$ entonces

$$x = \bigvee_{i=1}^{m-1} (b_i \wedge f_i), \ \text{donde } b_i \in B(P(n,m)), \ \text{para } 1 \leq i \leq m-1.$$

Luego

$$x = x \wedge p_6 = \bigvee_{i=1}^{m-1} (b_i \wedge p_6 \wedge f_i).$$

Como por (3.5) $c_i = b_i \wedge p_6 \in B((f_{m-2}])$, para $1 \leq i \leq m-1$, entonces

$$x = \bigvee_{i=1}^{m-1}(c_i \wedge f_i) = \bigvee_{i=1}^{m-2}(c_i \wedge f_i) \vee (c_{m-1} \wedge p_7) =$$

$$\bigvee_{i=1}^{m-2}(c_i \wedge f_i) \vee c_{m-1} = \bigvee_{i=1}^{m-2}(c_i \wedge f_i) \vee (c_{m-1} \wedge f_{m-2}).$$

Por lo tanto x es un elemento del $(0,1)$-subreticulado de $(f_{m-2}]$ generado por $B((f_{m-2}])$ y $E^{(1)}_{m-1}$.
Si $E_m \in C^{(1)}(n,m)$, pongamos $\alpha(E_m) = E^{(1)}_{m-1}$. Si $E_m, E^{'}_m \in C^{(1)}(n,m)$, son tales que $E_m \neq E^{'}_m$ entonces existe $i < m-2$ tal que $f_i \in E_m$, $f^{'}_i \in E^{'}_m$ y $f_i \neq f^{'}_i$, luego $\alpha(E_m) \neq \alpha(E^{'}_m)$.

Si $E^{'}_{m-1} = \{g_0 = p_0, g_1, \ldots, g_{m-2} = p_6\}$ es una cadena base de $(p_6]$ entonces $E^{'}_m = \{g_0, g_1, \ldots, g_{m-2}, g_{m-1} = p_7\}$ es una cadena base de $P(n,m)$ y $p_6 = g_{m-2} \in Z^{(n)}_{n-1}(E^{'}_m)$.
En efecto, sea $x \in P(n,m)$. Si $x \in (p_6]$ entonces

$$x = \bigvee_{i=1}^{m-2}(r_i \wedge g_i), \text{ donde } r_i \in B((p_6]), \text{ para } 1 \leq i \leq m-2.$$

Por (3.5) $r_i = b_i \wedge p_6$, donde $b_i \in B(P(n,m))$, para $1 \leq i \leq m-2$. Luego

$$x = \bigvee_{i=1}^{m-2}(b_i \wedge p_6 \wedge g_i),$$

y como $g_i \leq p_6$, para $1 \leq i \leq m-2$, entonces

$$x = \bigvee_{i=1}^{m-2}(b_i \wedge g_i) = \bigvee_{i=1}^{m-2}(b_i \wedge g_i) \vee (p_0 \wedge p_7),$$

luego $x \in SL(B(P(n,m)), E^{'}_m)$.
Si $x \notin (p_6]$ entonces $x \in [p_2)$ y $x = (x \wedge p_5) \vee p_2$. Como $x \wedge p_5 \in (p_6]$ entonces

$$x \wedge p_5 = \bigvee_{i=1}^{m-2}(r_i \wedge g_i), \text{ donde } r_i \in B((p_6]), \text{ para } 1 \leq i \leq m-2.$$

Por (3.5) $r_i = b_i \wedge p_6$, donde $b_i \in B(P(n,m))$, para $1 \leq i \leq m-2$. Luego $x \wedge p_5 = \bigvee_{i=1}^{m-2}(b_i \wedge p_6 \wedge g_i)$, y como $g_i \leq p_6$, para $1 \leq i \leq m-2$, entonces $x \wedge p_5 = \bigvee_{i=1}^{m-2}(b_i \wedge g_i)$ y por lo tanto $x = (\bigvee_{i=1}^{m-2}(b_i \wedge g_i)) \vee p_2 = (\bigvee_{i=1}^{m-2}(b_i \wedge g_i)) \vee (p_2 \wedge p_7)$. Luego $x \in SL(B(P(n,m)), E^{'}_m)$.
Como $p_6 \in E^{'}_m$ y $p_6 = (e^{(n)}_{n-1}, e^{(m)}_{m-2})$ entonces $p_6 \in Z^{(n)}_{n-1}(E^{'}_m)$, es decir, $E^{'}_m \in C^{(1)}(n,m)$.
Además $\alpha(E^{'}_m) = E^{'}_{m-1}$. Por lo tanto $|C^{(1)}(n,m)| = |C(n,m-1)|$.

Caso B) Si $f_{m-2} \in Z^{(n)}_{n-2}(E_m)$, entonces $f_{m-2} = (e^{(n)}_{n-2}, e^{(m)}_j) \in W^{(m)}_j(E_m)$, con $0 \leq j \leq m-1$. Como $W^{(m)}_{m-1}(E_m) = \{f_{m-1}\}$ entonces $j \neq m-1$. Si fuera $j < m-2$ resultaría

que $W^{(m)}_{m-2}(E_m) = \emptyset$, ya que si existe $f_i \in W^{(m)}_{m-2}(E_m)$, por (3.10) se tiene $f_{m-2} < f_i$, luego $f_i = f_{m-1}$, contradicción. Luego $f_{m-2} = (e^{(n)}_{n-2}, e^{(m)}_{m-2}) = p_4$ y por lo tanto $(f_{m-2}] \cong P(n-1, m-1)$.
Sea $E^{(2)}_{m-1} = \{f_i : 0 \leq i \leq m-2\}$, luego $E^{(2)}_{m-1} \subseteq (f_{m-2}]$. Veamos que $E^{(2)}_{m-1}$ es una cadena base de $(f_{m-2}]$.
Si $x \in (f_{m-2}] \subset P(n,m)$ entonces:

$$x = \bigvee_{i=1}^{m-1} (b_i \wedge f_i), \text{ donde } b_i \in B(P(n,m)), \text{ para } 1 \leq i \leq m-1,$$

luego

$$x = x \wedge p_4 = \bigvee_{i=1}^{m-1} (b_i \wedge p_4 \wedge f_i).$$

Como por (3.6) $c_i = b_i \wedge p_4 \in B((p_4])$, para $1 \leq i \leq m-1$, entonces

$$x = \bigvee_{i=1}^{m-1} (c_i \wedge f_i) = \bigvee_{i=1}^{m-2} (c_i \wedge f_i) \vee (c_{m-1} \wedge p_7) =$$

$$\bigvee_{i=1}^{m-2} (c_i \wedge f_i) \vee c_{m-1} = \bigvee_{i=1}^{m-2} (c_i \wedge f_i) \vee (c_{m-1} \wedge f_{m-2}).$$

Por lo tanto x es un elemento del $(0,1)$-subreticulado de $(p_4]$ generado por $B((p_4])$ y $E^{(2)}_{m-1}$.
Si $E_m \in C^{(2)}(n,m)$, pongamos $\beta(E_m) = E^{(2)}_{m-1}$. Claramente si $E_m, E'_m \in C^{(2)}(n,m)$, son tales que $E_m \neq E'_m$ entonces $\beta(E_m) \neq \beta(E'_m)$.
Si $E'_{m-1} = \{h_0 = p_0, h_1, \ldots, h_{m-2} = p_4\}$ es una cadena base de $(p_4]$ entonces $E'_m = \{h_0, h_1, \ldots, h_{m-2}, h_{m-1} = p_7)\}$ es una cadena base de $P(n,m)$ tal que $h_{m-2} = p_4 \in Z^{(n)}_{n-2}(E'_m)$ y por lo tanto pertenece a $C^{(2)}(n,m)$.
En efecto, sea $x \in P(n,m)$. Si $x \in (p_4]$ entonces

$$x = \bigvee_{i=1}^{m-2} (r_i \wedge h_i), \text{ donde } r_i \in B((p_4]), \text{ para } 1 \leq i \leq m-2.$$

Como por (3.6) $r_i = b_i \wedge p_4$, donde $b_i \in B(P(n,m))$, para $1 \leq i \leq m-2$, entonces

$$x = \bigvee_{i=1}^{m-2} (b_i \wedge p_4 \wedge h_i)$$

y como $h_i \leq p_4$ entonces

$$x = \bigvee_{i=1}^{m-2} (b_i \wedge h_i) \vee (p_0 \wedge h_{m-1}).$$

Luego $x \in SL(B(P(n,m)), E'_m)$.
Si $x \notin (p_4]$ entonces $x \in [p_2) \cup [p_5)$.
Si $x = p_7$ entonces $x = \bigvee\limits_{i=1}^{m-1} (s_i \wedge h_i)$ donde $s_i = p_0 \in B(P(n,m))$, para $1 \leq i \leq m-2$ y

$s_{m-1} = p_7$.
Si $x \in [p_2)$ y $x \neq p_7$ entonces $x = (p_3 \wedge x) \vee p_2$. Pero $p_3 \wedge x \in (p_4]$ entonces

$$p_3 \wedge x = \bigvee_{i=1}^{m-2} (s_i \wedge h_i), \text{ donde } s_i \in B((p_4]), \text{ para } 1 \leq i \leq m-2.$$

Por (3.6) $s_i = b_i \wedge p_4$ donde $b_i \in B(P(n,m))$, para $1 \leq i \leq m-2$, luego $p_3 \wedge x = \bigvee_{i=1}^{m-2} (b_i \wedge p_4 \wedge h_i)$ y como $h_i \leq p_4$, para $1 \leq i \leq m-2$, tenemos $p_3 \wedge x = \bigvee_{i=1}^{m-2} (b_i \wedge h_i)$. Luego

$$x = (p_3 \wedge x) \vee p_2 = \bigvee_{i=1}^{m-2} (b_i \wedge h_i) \vee p_2 = \bigvee_{i=1}^{m-2} (b_i \wedge h_i) \vee (p_2 \wedge p_7)$$

luego $x \in SL(, E'_m)$.
Si $x \in [p_5)$ y $x \neq p_7$ entonces $x = (p_1 \wedge x) \vee p_5$ y como $p_1 \wedge x \in (p_4]$ entonces

$$p_1 \wedge x = \bigvee_{i=1}^{m-2} (s_i \wedge h_i), \text{ donde } s_i \in B((p_4]), \text{ para } 1 \leq i \leq m-2.$$

Pero por (3.6) $s_i = b_i \wedge p_4$ con $b_i \in B(P(n,m))$, para $1 \leq i \leq m-2$, luego $p_1 \wedge x = \bigvee_{i=1}^{m-2} (b_i \wedge p_4 \wedge h_i)$ y como $h_i \leq p_4$, para $1 \leq i \leq m-2$, tenemos $p_1 \wedge x = \bigvee_{i=1}^{m-2} (b_i \wedge h_i)$. Luego

$$x = (p_1 \wedge x) \vee p_5 = \bigvee_{i=1}^{m-2} (b_i \wedge h_i) \vee p_5 = \bigvee_{i=1}^{m-2} (b_i \wedge h_i) \vee (p_5 \wedge p_7)$$

y en consecuencia $x \in SL(B(P(n,m)), E'_m)$.
Además $\beta(E'_m) = E'_{m-1}$. Por lo tanto $|C^{(2)}(n,m)| = |C(n-1, m-1)|$. ■

Lema 3.4

(1) $|C(n,n)| = 1$ *para* $n \geq 2$,

(2) $|C(n, n+1)| = n$,

(3) $|C(n,m)| = |C(m-n+1, m)|$, *para* $1 \leq n \leq m$.

Dem.

(1) Es claro que $|C(2,2)| = 1$. Sea $n \geq 3$ y supongamos que $|C(n-1, n-1)| = 1$ y probemos que $|C(n,n)| = 1$.
$P(n,n)$ es de orden n. Por la Observación 3.1, (2) sabemos que $\{(e_i^{(n)}, e_i^{(n)})\}_{i=0}^{n-1}$ es una cadena base de $P(n,n)$.
Sea $E_n = \{f_0 = (e_0^{(n)}, e_0^{(n)}), f_1, \ldots, f_{n-2}, f_{n-1} = (e_{n-1}^{(n)}, e_{n-1}^{(n)})\}$ una cadena base de $P(n,n)$.
Análogamente a lo indicado anteriormente si $Z_i^{(n)}(E_n) = \{(e_i^{(n)}, y) : y \in C_n\} \cap E_n$, para $0 \leq i \leq n$ y $W_j^{(n)}(E_n) = \{(x, e_j^{(n)}) : x \in C_n\} \cap E_n$, para $0 \leq j \leq n-1$ entonces $\{Z_i^{(n)}(E_n)\}_{i=0}^{n-1}$, y $\{W_j^{(n)}(E_n)\}_{j=0}^{n-1}$, son n-particiones de E_n por lo tanto cada uno de

los conjuntos de estas n-particiones tiene un solo elemento.
Como $f_{n-1} = (e_{n-1}^{(n)}, e_{n-1}^{(n)}) \in Z_{n-1}^{(n)}(E_n)$ entonces $f_j \notin Z_{n-1}^{(n)}(E_n)$, para $0 \leq j \leq n-2$ y como $f_{n-1} = (e_{n-1}^{(n)}, e_{n-1}^{(n)}) \in W_{n-1}^{(n)}(E_n)$ entonces $f_j \notin W_{n-1}^{(n)}(E_n)$, para $0 \leq j \leq n-2$.
Sea $g = (e_{n-2}^{(n)}, e_{n-2}^{(n)})$, luego $f_j \in (g]$, para $0 \leq j \leq n-2$.
Por el Teorema 2.1 (a), sabemos que $\{f_0, \ldots, f_{n-2}\}$ es una cadena base de $(g] \cong P(n-1, n-1)$. Por hipótesis $P(n-1, n-1)$ tiene una única cadena base y por la Observación 3.1,(2) $\{(e_i^{(n)}, e_i^{(n)})\}_{i=0}^{n-2}$ es una cadena base de $P(n-1, n-1)$, luego $f_i = (e_i^{(n)}, e_i^{(n)})$, para $0 \leq i \leq n-1$.

(2) Sabemos que $|C(1,2)| = 1$ y que $|C(2,3)| = 2$. Sea $n \geq 3$ y supongamos que (a) $|C(n, n+1)| = n$. De $3 \leq n < n+1 < n+2$ resulta por el Lema 3.3, la hipótesis (a) y (1) $|C(n+1, n+2)| = |C(n, n+1)| + |C(n+1, n+1)| = n+1$.

(3) Si $n = 1$ entonces $|C(m-n+1, m)| = |C(m, m)| = 1 = |C(1, m)|$.
Si $n = m$ entonces $|C(m-n+1, m)| = |C(1, m)| = 1 = |C(m, m)|$.
Si $n = 2$ entonces por el Lema 3.2 $|C(2, m)| = m-1$ y por (2) $|C(m-2+1, m)| = |C(m-1, m)| = m-1$.
Supongamos que $|C(k, m)| = |C(m-k+1, m)|$ para todo k, $3 \leq k \leq n < m$ y probemos que

$$|C(n, m+1)| = |C(m+1-n+1, m+1)| = |C(m-n+2, m+1)|.$$

En efecto, como $3 \leq n < m+1$ por el Lema 3.3,

$$(1) \quad |C(n, m+1)| = |C(n-1, m)| + |C(n, m)|.$$

Como $n-1 < m$ y $n < m$ entonces por la hipótesis

$$(2) \quad |C(n-1, m)| = |C(m-(n-1)+1, m)| = |C(m-n+2, m)|$$

y

$$(3) \quad |C(n, m)| = |C(m-n+1, m)|.$$

De (1), (2) y (3) resulta

$$(4) \quad |C(n, m+1)| = |C(m-n+2, m)| + |C(m-n+1, m)|.$$

Como $2 < 3 \leq n$ luego $-n+2 < 0$ y por lo tanto $m-n+2 < m < m+1$ y como $n < m$ entonces $0 < m-n$ esto es $1 \leq m-n$ y por lo tanto $3 \leq m-n+2$. Luego por el Lema 3.3

$$(5) \quad |C(m-n+2, m+1)| = |C(m-n+2, m)| + |C(m-n+1, m)|.$$

De (4) y (5) resulta $|C(n, m+1)| = |C(m-n+2, m+1)|$.

■

La siguiente tabla indica los valores de $|C(n, m)|$, con $n \leq m$, para $1 \leq n \leq 10$ y $2 \leq m \leq 10$.

$n \mid m$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	–	1	3	6	10	15	21	28	36
4	–	–	1	4	10	20	35	56	84
5	–	–	–	1	5	15	35	70	126
6	–	–	–	–	1	6	21	56	126
7	–	–	–	–	–	1	7	28	84
8	–	–	–	–	–	–	1	8	36
9	–	–	–	–	–	–	–	1	9
10	–	–	–	–	–	–	–	–	1

4. P_0P-reticulados

Sea L un reticulado distributivo acotado y $x, y \in L$. Entonces:

- Si el conjunto $\{b \in B(L) : x \leq b\}$ tiene primer elemento, lo notaremos $\overline{x}$. Luego si existe $\overline{x}$ entonces $\overline{x} \in B(L)$ y $x \leq \overline{x}$, esto es, $x = x \wedge \overline{x}$. Si $x \in B(L)$, resulta $\overline{x} = x$ y si L es finito se tiene que $\overline{x} = \bigwedge\{b \in B(L) : x \leq b\}$.

Si (1) $x \leq y$ y existen $\overline{x}$ e $\overline{y}$ entonces $\overline{x} \leq \overline{y}$. En efecto, como (2) $y \leq \overline{y}$, de (1) y (2) resulta $x \leq \overline{y}$ y por lo tanto $\overline{x} \leq \overline{y}$.

- Si el conjunto $H(x, y) = \{z \in L : x \wedge z \leq y\}$ tiene último elemento lo notaremos $x \to y$. Si $x \to y$ existe para todo par de elementos $x, y \in L$ entonces L se denomina un *álgebra de Heyting* y $\rceil x = x \to 0$ se denomina el pseudo-complemento de x, o negación intuicionista de x. Observemos que $x \wedge \rceil x = 0$.
- Si el conjunto $B(x, y) = \{b \in B(L) : x \wedge b \leq y\}$ tiene último elemento lo notaremos $x \Rightarrow y$. Si $x \Rightarrow y$ existe para todo par de elementos $x, y \in L$ entonces L se denomina una *B-álgebra* y $!x = 1 \Rightarrow x$ se denomina el pseudo-suplemento de x.

Indicamos la tabla de las operaciones $\to$, $\Rightarrow$ y $\overline{x}$ para el reticulado L_1 del Ejemplo 2.1 y de las operaciones $\Rightarrow$ y $\overline{x}$ para el reticulado L_2 del Ejemplo 2.2, respectivamente.

$\to$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	d	1
b	a	a	1	1	1	1
c	0	a	d	1	d	1
d	a	a	c	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

$\Rightarrow$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	d	1
b	a	a	1	1	1	1
c	0	a	d	1	d	1
d	a	a	a	a	1	1
1	0	a	0	a	d	1

x	$\overline{x}$
0	0
a	a
b	d
c	1
d	d
1	1

$\Rightarrow$	0	a	b	c	d	e	f	g	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a	e	1	e	1	1	e	1	1	1
b	d	d	1	1	d	1	1	1	1
c	0	d	e	1	d	e	1	1	1
d	e	e	e	e	1	e	1	e	1
e	d	d	d	d	d	1	d	1	1
f	0	0	e	e	d	e	1	e	1
g	0	d	0	d	d	e	d	1	1
1	0	0	0	0	d	e	d	e	1

x	$\overline{x}$
0	0
a	d
b	e
c	1
d	d
e	e
f	1
g	1
1	1

Lema 4.1 (G. Epstein y A. Horn, [4] ,J. Klukowski y M. Zworski, [8]) *Si L es una B-álgebra entonces:*

(B1) $x \leq y$ *si y solo si* $x \Rightarrow y = 1$,

(B2) $1 \Rightarrow x \leq x$,

(B3) *Si* $b \in B(L)$ *entonces* $b = b \wedge (x \Rightarrow b)$,

(B4) $(x \vee y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)$, (B5) $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)$,

(B6) *Si* $x \leq y$ *entonces* $y \Rightarrow z \leq x \Rightarrow z$,

(B7) *Si* $x \leq y$ *entonces* $z \Rightarrow x \leq z \Rightarrow y$,

(B8) $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z) \leq x \Rightarrow z$,

(B9) *Si* $b, c \in B(L)$ *entonces* $(b \wedge x) \Rightarrow (c \vee y) = -b \vee c \vee (x \Rightarrow y)$,

(B10) *Si* $b, c \in B(L)$ *entonces* $b \Rightarrow c = -b \vee c$,

(B11) $\overline{x} = -(x \Rightarrow 0)$,

(B12) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \vee \overline{y}$,

(B13) $x \Rightarrow (x \Rightarrow y) = x \Rightarrow y$.

Dem.

(B1) Si $x \leq y$ como $x = x \wedge 1 \leq y$ y $1 \in B(L)$ entonces $x \Rightarrow y = 1$. Si $x \Rightarrow y = 1$ entonces $x = x \wedge 1 = x \wedge (x \Rightarrow y) \leq y$.

(B2) Por definición, $!x = 1 \Rightarrow x = 1 \wedge (1 \Rightarrow x) \leq x$.

(B3) Si $b \in B(L)$ como $x \wedge b \leq b$ entonces $b \leq x \Rightarrow b$ y por lo tanto $b = b \wedge (x \Rightarrow b)$.

(B4) Por definición $y \wedge (y \Rightarrow z) \leq z$, luego (1) $y \wedge (x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z) \leq z \wedge (x \Rightarrow z) \leq z$. En forma análoga, se obtiene que (2) $x \wedge (x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z) \leq z \wedge (y \Rightarrow z) \leq z$. De (1) y (2) resulta

$(x \vee y) \wedge ((x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)) = (x \wedge (x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)) \vee (y \wedge (x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)) \leq z$.

Como $(x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z) \in B(L)$, se tiene (3) $(x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z) \in B(x \vee y, z)$.

Sea $b \in B(L)$ tal que $(x \vee y) \wedge b \leq z$, luego

$$x \wedge b \leq (x \wedge b) \vee (y \wedge b) \leq z,$$

y

$$y \wedge b \leq (x \wedge b) \vee (y \wedge b) \leq z.$$

Por lo tanto

$$b \leq x \Rightarrow z \text{ y } b \leq y \Rightarrow z,$$

entonces

$$b \leq (x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z).$$

Luego, teniendo en cuenta (3), queda probada (B4).

(B5) Observemos que por definición

$$x \wedge ((x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)) = x \wedge (x \Rightarrow y) \wedge x \wedge (x \Rightarrow z) \leq y \wedge z.$$

Por lo tanto $(x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z) \in B(x, y \wedge z)$.

Sea $b \in B(L)$ tal que $x \wedge b \leq y \wedge z$, luego

$$x \wedge b \leq y \ \text{ y } \ x \wedge b \leq z,$$

por lo tanto

$$b \leq x \Rightarrow y \ \text{ y } \ b \leq x \Rightarrow z.$$

Es decir, $b \leq (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)$ y entonces $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)$.

(B6) Si $x \leq y$ entonces por (B4) $y \Rightarrow z = (x \vee y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)$, luego $y \Rightarrow z \leq x \Rightarrow z$.

(B7) Si $x \leq y$ entonces por (B5) $z \Rightarrow x = z \Rightarrow (x \wedge y) = (z \Rightarrow x) \wedge (z \Rightarrow y)$, de donde $z \Rightarrow x \leq z \Rightarrow y$.

(B8) De $x \wedge (x \Rightarrow y) \leq y$, se obtiene que $x \wedge ((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z)) \leq y \wedge (y \Rightarrow z) \leq z$. Como $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z) \in B(L)$, de la definición resulta que $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z) \leq x \Rightarrow z$.

(B9) Por hipótesis $-b \vee c \vee (x \Rightarrow y) \in B(L)$.
De $x \wedge (x \Rightarrow y) \leq y$, resulta que $b \wedge x \wedge (x \Rightarrow y) \leq b \wedge y$.

Por lo tanto

$$(b \wedge x) \wedge (-b \vee c \vee (x \Rightarrow y)) = (b \wedge x \wedge -b) \vee (b \wedge x \wedge c) \vee (b \wedge x \wedge (x \Rightarrow y)) =$$

$$0 \vee (b \wedge x \wedge c) \vee (b \wedge x \wedge (x \Rightarrow y)) \leq (b \wedge x \wedge c) \vee (b \wedge y) \leq c \vee y.$$

Se tiene entonces que $-b \vee c \vee (x \Rightarrow y) \in B(b \wedge x, c \vee y)$.

Sea (1) $z \in B(L)$ tal que (2) $(b \wedge x) \wedge z \leq c \vee y$. Por hipótesis (3) $b, c \in B(L)$ luego de (1) y (3) tenemos (4) $b \wedge z \wedge -c \in B(L)$. De (2) resulta

$$(5) \ \ x \wedge b \wedge z \wedge -c \leq (c \vee y) \wedge -c = (c \wedge -c) \vee (y \wedge -c) = y \wedge -c.$$

De (4), (5) y la definición de $\Rightarrow$, tenemos $b \wedge z \wedge -c \leq x \Rightarrow (y \wedge -c)$, luego por (B5)

$$b \wedge z \wedge -c \leq x \Rightarrow (y \wedge -c) = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow -c) \leq x \Rightarrow y.$$

De aquí

$$(6) \ \ c \vee (b \wedge z \wedge -c) \leq c \vee (x \Rightarrow y).$$

Como $c \vee (b \wedge z \wedge -c) = (c \vee (b \wedge z)) \wedge (c \vee -c) = c \vee (b \wedge z) \geq b \wedge z$, de (6) resulta

$$b \wedge z \leq c \vee (x \Rightarrow y).$$

Luego

$$(7) \ -b \vee (b \wedge z) \leq -b \vee c \vee (x \Rightarrow y)$$

y como

$$(8) \ -b \vee (b \wedge z) = (-b \vee b) \wedge (-b \vee z) = -b \vee z \geq z$$

De (7) y (8) se tiene que

$$z \leq -b \vee c \vee (x \Rightarrow y).$$

Por lo tanto se verifica (B9).

(B10) Observemos que por (B2) $1 \Rightarrow 0 \leq 0$, de donde resulta $1 \Rightarrow 0 = 0$. Luego por (B9) $b \Rightarrow c = (b \wedge 1) \Rightarrow (c \vee 0) = -b \vee c \vee (1 \Rightarrow 0) = -b \vee c$.

(B11) Por definición $x \wedge (x \Rightarrow 0) \leq 0$, entonces $x \wedge (x \Rightarrow 0) = 0$. Luego

$$-(x \Rightarrow 0) \vee (x \wedge (x \Rightarrow 0)) = -(x \Rightarrow 0),$$

esto es,

$$(-(x \Rightarrow 0) \vee x) \wedge (-(x \Rightarrow 0) \vee (x \Rightarrow 0)) = -(x \Rightarrow 0).$$

De aquí resulta

$$-(x \Rightarrow 0) \vee x = -(x \Rightarrow 0),$$

y por lo tanto $x \leq -(x \Rightarrow 0)$, donde $-(x \Rightarrow 0) \in B(L)$.
Si $b \in B(L)$ verifica $x \leq b$ entonces $x \wedge -b \leq b \wedge -b = 0$, luego $x \wedge -b = 0$ y por definición $-b \leq x \Rightarrow 0$ y como $x \Rightarrow 0 \in B(L)$ tenemos que $-(x \Rightarrow 0) \leq b$. Luego $-(x \Rightarrow 0)$ es el menor elemento booleano que es mayor o igual que x y por lo tanto $\overline{x} = -(x \Rightarrow 0)$.

(B12) Usando (B11) y (B4) se tiene
$\overline{x \vee y} = -((x \vee y) \Rightarrow 0) = -((x \Rightarrow 0) \wedge (y \Rightarrow 0)) = -(x \Rightarrow 0) \vee -(y \Rightarrow 0) = \overline{x} \vee \overline{y}$.

(B13) Como $x \wedge (x \Rightarrow y) \leq x \Rightarrow y$ entonces (i) $x \Rightarrow y \leq x \Rightarrow (x \Rightarrow y)$.
Como $x \wedge (x \Rightarrow y) \leq y$ entonces por (B7) $x \Rightarrow (x \wedge (x \Rightarrow y)) \leq x \Rightarrow y$ y por (B5) tenemos que $(x \Rightarrow x) \wedge (x \Rightarrow (x \Rightarrow y)) \leq x \Rightarrow y$. Luego por (B1) se concluye (ii) $x \Rightarrow (x \Rightarrow y) \leq x \Rightarrow y$. De (i) e (ii) resulta (B13).

■

Definición 4.1 (G. Epstein y A. Horn, [4]) *Un reticulado distributivo acotado se dice una P-álgebra si es una B-álgebra que verifica:*

$$(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1.$$

Lema 4.2 (J. Klukowski y M. Zworski, [8]) *Si L es una P-álgebra entonces:*

(B14) $x \Rightarrow (y \vee z) = (x \Rightarrow y) \vee (x \Rightarrow z)$,

(B15) $(x \wedge y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \vee (y \Rightarrow z)$,

(B16) $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$.

Dem.

(B14) Como $x \wedge (x \Rightarrow y) \leq y$ y $x \wedge (x \Rightarrow z) \leq z$ entonces

$$x \wedge ((x \Rightarrow y) \vee (x \Rightarrow z)) = (x \wedge (x \Rightarrow y)) \vee (x \wedge (x \Rightarrow z)) \leq y \vee z,$$

y por lo tanto $(x \Rightarrow y) \vee (x \Rightarrow z) \in B(x, y \vee z)$.

Sea $b \in B(L)$ tal que $x \wedge b \leq y \vee z$.
Usando (B1), (B4), la hipótesis, (B6) y (B9) se tiene:

$$\begin{aligned} z \Rightarrow y &= 1 \wedge (z \Rightarrow y) = (y \Rightarrow y) \wedge (z \Rightarrow y) = (y \vee z) \Rightarrow y \leq (x \wedge b) \Rightarrow y = \\ &= (b \wedge x) \Rightarrow (0 \vee y) = -b \vee (x \Rightarrow y). \end{aligned}$$

Luego

$$(1)\ \ b \wedge (z \Rightarrow y) \leq b \wedge (-b \vee (x \Rightarrow y)) = b \wedge (x \Rightarrow y) \leq x \Rightarrow y.$$

Análogamente se obtiene

$$(2)\ \ b \wedge (y \Rightarrow z) \leq x \Rightarrow z.$$

Teniendo en cuenta que L es una P-álgebra, de (1) y (2) resulta

$$b = b \wedge 1 = b \wedge ((z \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow z)) = (b \wedge (z \Rightarrow y)) \vee (b \wedge (y \Rightarrow z)) \leq (x \Rightarrow y) \vee (x \Rightarrow z).$$

(B15) Como $x \wedge (x \Rightarrow z) \leq z$ e $y \wedge (y \Rightarrow z) \leq z$ entonces $x \wedge y \wedge (x \Rightarrow z) \leq y \wedge z \leq z$ y $x \wedge y \wedge (y \Rightarrow z) \leq x \wedge z \leq z$. Luego, $(x \wedge y) \wedge ((x \Rightarrow z) \vee (y \Rightarrow z)) \leq z$ y por lo tanto $(x \Rightarrow z) \vee (y \Rightarrow z) \in B(x \wedge y, z)$.

Sea $b \in B(L)$ tal que $(x \wedge y) \wedge b \leq z$.
De (B1), (B5), la hipótesis y (B7) resulta

$$(x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow b) = (x \Rightarrow x) \wedge (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow b) = x \Rightarrow (x \wedge y \wedge b) \leq x \Rightarrow z.$$

Luego, usando (B3) se obtiene que

$$(1)\ \ (x \Rightarrow y) \wedge b = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow b) \wedge b \leq (x \Rightarrow z) \wedge b \leq x \Rightarrow z.$$

Procediendo en forma análoga se concluye que

$$(2)\ \ (y \Rightarrow x) \wedge b \leq y \Rightarrow z.$$

Como L es una P-álgebra, de (1) y (2) tenemos

$$b = 1 \wedge b = ((x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x)) \wedge b = ((x \Rightarrow y) \wedge b) \vee ((y \Rightarrow x) \wedge b) \leq (x \Rightarrow z) \vee (y \Rightarrow z),$$

lo que termina la demostración.

(B16) De (B11) y (B15) resulta
$\overline{x \wedge y} = -((x \wedge y) \Rightarrow 0) = -((x \Rightarrow 0) \vee (y \Rightarrow 0)) = -(x \Rightarrow 0) \wedge -(y \Rightarrow 0) = \overline{x} \wedge \overline{y}$.

■

Definición 4.2 (J. Klukowski y M. Zworski, [8]) *Un reticulado distributivo acotado se denomina un P_0P-reticulado si es un P_0-reticulado y una P-álgebra.*

Lema 4.3 (J. Klukowski y M. Zworski, [8]) *Si L es una P_0P-reticulado entonces:*

(B17) $(x \Rightarrow 0) \wedge (e_i \Rightarrow x) \leq (y \Rightarrow 0) \vee (e_i \Rightarrow y)$,

(B18) $(\overline{x} \wedge (e_i \Rightarrow y)) \vee (\overline{y} \wedge (e_i \Rightarrow x)) \leq (\overline{x} \wedge (e_i \Rightarrow x)) \vee (\overline{y} \wedge (e_i \Rightarrow y))$.

Dem.

(B17) Por (B8) sabemos que: (1) $(e_i \Rightarrow x) \wedge (x \Rightarrow 0) \leq e_i \Rightarrow 0$. Como $0 \leq y$ entonces por (B7) tenemos: (2) $e_i \Rightarrow 0 \leq e_i \Rightarrow y$. De (1) y (2) resulta

$$(x \Rightarrow 0) \wedge (e_i \Rightarrow x) \leq e_i \Rightarrow y \leq (y \Rightarrow 0) \vee (e_i \Rightarrow y).$$

(B18)

$$[(\overline{x} \wedge (e_i \Rightarrow y)) \vee (\overline{y} \wedge (e_i \Rightarrow x))] \wedge -[(\overline{x} \wedge (e_i \Rightarrow x)) \vee (\overline{y} \wedge (e_i \Rightarrow y))] =$$

$$\begin{gathered}
[(\overline{x} \wedge (e_i \Rightarrow y)) \vee (\overline{y} \wedge (e_i \Rightarrow x))] \wedge (-\overline{x} \vee -(e_i \Rightarrow x)) \wedge (-\overline{y} \vee -(e_i \Rightarrow y)) = \\
[\overline{x} \wedge (e_i \Rightarrow y) \wedge (-\overline{x} \vee -(e_i \Rightarrow x)) \wedge (-\overline{y} \vee -(e_i \Rightarrow y))] \vee \\
[\overline{y} \wedge (e_i \Rightarrow x) \wedge (-\overline{x} \vee -(e_i \Rightarrow x)) \wedge (-\overline{y} \vee -(e_i \Rightarrow y))] = \\
[((\overline{x} \wedge (e_i \Rightarrow y) \wedge -\overline{x}) \vee (\overline{x} \wedge (e_i \Rightarrow y) \wedge -(e_i \Rightarrow x))) \wedge (-\overline{y} \vee -(e_i \Rightarrow y))] \vee \\
[((\overline{y} \wedge (e_i \Rightarrow x) \wedge -\overline{x}) \vee (\overline{y} \wedge (e_i \Rightarrow x) \wedge -(e_i \Rightarrow x))) \wedge (-\overline{y} \vee -(e_i \Rightarrow y))] = \\
[(\overline{x} \wedge (e_i \Rightarrow y) \wedge -(e_i \Rightarrow x) \wedge -\overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge (e_i \Rightarrow y) \wedge -(e_i \Rightarrow x) \wedge -(e_i \Rightarrow y))] \vee \\
[(\overline{y} \wedge (e_i \Rightarrow x) \wedge -\overline{x} \wedge -\overline{y}) \vee (\overline{y} \wedge (e_i \Rightarrow x) \wedge -\overline{x} \wedge -(e_i \Rightarrow y))] = \\
(\overline{x} \wedge (e_i \Rightarrow y) \wedge -(e_i \Rightarrow x) \wedge -\overline{y}) \vee (\overline{y} \wedge (e_i \Rightarrow x) \wedge -\overline{x} \wedge -(e_i \Rightarrow y)).
\end{gathered}$$

Por (B11) $\overline{x} = -(x \Rightarrow 0)$, luego de (B17)

$$-\overline{x} \wedge (e_i \Rightarrow x) = (x \Rightarrow 0) \wedge (e_i \Rightarrow x) \leq (y \Rightarrow 0) \vee (e_i \Rightarrow y) = -\overline{y} \vee (e_i \Rightarrow y),$$

y entonces

$$-\overline{x} \wedge (e_i \Rightarrow x) \wedge -(e_i \Rightarrow y) \wedge \overline{y} = 0.$$

Análogamente

$$-\overline{y} \wedge (e_i \Rightarrow y) \wedge -(e_i \Rightarrow x) \wedge \overline{x} = 0.$$

Por lo tanto

$$[(\overline{x} \wedge (e_i \Rightarrow y)) \vee (\overline{y} \wedge (e_i \Rightarrow x))] \wedge -[(\overline{x} \wedge (e_i \Rightarrow x)) \vee (\overline{y} \wedge (e_i \Rightarrow y))] = 0,$$

de donde resulta (B18).

■

Definición 4.3 *Si L y L' son reticulados distributivos acotados, a toda transformación $H : L \to L'$ que verifica* H0) $H(0) = 0'$, H1) $H(1) = 1'$, H2) $H(x \wedge y) = H(x) \wedge H(y)$ *y* H3) $H(x \vee y) = H(x) \vee H(y)$ *se denomina un R-homomorfismo, si H es suryectiva se denomina R-epimorfismo. Si H es además inyectiva se denomina R-isomorfismo y notaremos $L \cong L'$. A todo R-isomorfismo de L en L se denomina R-automorfismo.*

Recordemos que si L es un reticulado distributivo acotado tal que existe $b \in B(L)\backslash\{0, 1\}$, la aplicación $\varphi : L \to (b] \times (-b]$ definida por $\varphi(x) = (x \wedge b, x \wedge -b)$ es un R-isomorfismo, es decir, $L \cong (b] \times (-b]$, (ver [7]).

Lema 4.4 *Si L es un P_0-reticulado tal que $B(L) \neq \{0,1\}$ entonces $L \cong L_1 \times L_2$, donde L_1 y L_2 son P_0-reticulados.*

Dem. Por hipótesis existe $b \in B(L)\backslash\{0,1\}$. Como L es un reticulado distributivo acotado, basta probar que $L_1 = (b]$ es un P_0-reticulado.

Veamos en primer lugar que $B(L_1) = B(L) \cap L_1$.
Sea $a \in B(L_1)$, entonces (1) $a \leq b$ y existe $a' \in L_1$ tal que (2) $a \wedge a' = 0$ y $a \vee a' = b$. Consideremos $c = a' \vee -b$, luego de (1) y (2) $a \wedge c = a \wedge (a' \vee -b) = (a \wedge a') \vee (a \wedge -b) = 0$ y $a \vee c = a \vee a' \vee -b = 1$, de donde resulta que $a \in B(L) \cap L_1$.
Sea $t \in B(L) \cap L_1$, luego (3) $t \leq b$ y existe $-t \in L$ tal que (4) $t \wedge -t = 0$ y (5) $t \vee -t = 1$. Sea $t' = -t \wedge b \in L_1$, teniendo en cuenta (3), (4) y (5), $t \wedge t' = t \wedge -t \wedge b = 0$ y $t \vee t' = t \vee (-t \wedge b) = (t \vee -t) \wedge (t \vee b) = 1 \wedge b = b$, luego $t \in B(L_1)$.
Sea $E_n = \{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ una cadena base de L y $F_b = \{e_i \wedge b : 0 \leq i \leq n-1\} = \{f_0, f_1, \ldots, f_{t-1}\} \subseteq L_1$, con $1 \leq t \leq n$, tal que $f_0 = 0 < f_1 < \cdots < f_{t-1} = b$.

Como $L = SL(B(L), E_n)$, si $x \in L_1 \subseteq L$, por el Lema 1.1, $x = \bigvee\limits_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i)$, con $b_i \in B(L), 1 \leq i \leq n-1$. Luego $x = x \wedge b = (\bigvee\limits_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i)) \wedge b = \bigvee\limits_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge b \wedge e_i \wedge b) = \bigvee\limits_{i=1}^{t-1} (b_{s_i} \wedge b \wedge f_i)$, donde $b_{s_i} \wedge b \in B(L) \cap L_1 = B(L_1)$, $1 \leq i \leq t-1$.

De aquí resulta que $x \in SL(B(L_1), F_b)$, es decir, $L_1 \subseteq SL(B(L_1), F_b)$ y como $F_b \subseteq L_1$ tenemos $SL(B(L_1), F_b) = L_1$. Análogamente, considerando $L_2 = (-b]$ y $F_{-b} = \{e_i \wedge -b : 0 \leq i \leq n-1\}$ tenemos que $SL(B(L_2), F_{-b}) = L_2$. ■

Definición 4.4 *Si L y L' son P-álgebras, a toda transformación $h : L \to L'$ que es un R-homomorfismo y $h(x \Rightarrow y) = h(x) \Rightarrow h(y)$, para $x, y \in L$ se denomina un P-homomorfismo, y si h es suryectiva un P-epimorfismo.*

Lema 4.5 *Si L es una P-álgebra y $b \in B(L)$ entonces $L_1 = (b]$ es una P-álgebra y $\varphi : L \to L_1$ definida por $\varphi(x) = x \wedge b$ es un P-epimomorfismo.*

Dem. Probemos que L_1 es una P-álgebra, donde para

$$x, y \in L_1, \ \ x \Rightarrow_1 y = (x \Rightarrow y) \wedge b.$$

Sea $B_{L_1}(x,y) = \{z \in B(L_1) : x \wedge z \leq y\}$. Como $(x \Rightarrow y) \wedge b \in B(L_1)$ y $x \wedge (x \Rightarrow y) \wedge b \leq y \wedge b = y$ entonces $b \wedge (x \Rightarrow y) \in B_{L_1}(x,y)$. Sea $t \in B(L_1) = B(L) \cap L_1$ tal que $x \wedge t \leq y$. Como $t \in B(L)$ por definición $t \leq x \Rightarrow y$ y de $t \in L_1$ resulta $t \leq b$, por lo tanto $t \leq b \wedge (x \Rightarrow y)$, es decir, $b \wedge (x \Rightarrow y)$ es el último elemento del conjunto $B_{L_1}(x,y)$. De aquí resulta que L_1 es una B-álgebra. Como L es una P-álgebra se tiene que

$$\begin{aligned}(x \Rightarrow_1 y) \vee (y \Rightarrow_1 x) &= (b \wedge (x \Rightarrow y)) \vee (b \wedge (y \Rightarrow x)) = \\ &= b \wedge ((x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x)) = b \wedge 1 = b,\end{aligned}$$

y por lo tanto L_1 es una P-álgebra.
Es claro que φ_1 respeta el ínfimo y el supremo. Además, usando (B9), (B5) y (B3)

$$\varphi_1(x) \Rightarrow_1 \varphi_1(y) \ = \ (x \wedge b) \Rightarrow_1 (y \wedge b) = ((x \wedge b) \Rightarrow (y \wedge b)) \wedge b =$$

$$
\begin{aligned}
&= ((x \wedge b) \Rightarrow (0 \vee (y \wedge b))) \wedge b = (-b \vee 0 \vee (x \Rightarrow (y \wedge b))) \wedge b = \\
&= (-b \wedge b) \vee ((x \Rightarrow (y \wedge b)) \wedge b) = (x \Rightarrow (y \wedge b)) \wedge b = \\
&= (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow b) \wedge b = (x \Rightarrow y) \wedge b = \varphi_1(x \Rightarrow y).
\end{aligned}
$$

Si $x \in L_1$ esto es $x \leq b$ entonces $\varphi_1(x) = x \wedge b = x$, por lo tanto φ_1 es suryectiva, y más precisamente deja invariantes los elementos de L_1. ■

Teorema 4.1 (G. Epstein y A. Horn, [4]) *Si L es un reticulado distributivo finito entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *L es un P_0-reticulado,*

(b) *L es una P-álgebra,*

(c) *L es producto directo de cadenas.*

Dem. (a) $\Rightarrow$ (b) Como L es un reticulado distributivo finito es claro que L es una B-álgebra. Basta probar que $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1$, para todo $x, y \in L$.
Como L es un P_0-reticulado, si $E_n = \{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ es una cadena base para L por la Observación 2.1 se tiene que $x = \bigvee_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i)$ y (1) $y = \bigvee_{i=1}^{n-1} (c_i \wedge e_i)$, donde (2) $b_i, c_i \in B(L)$ para $1 \leq i \leq n-1$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_{n-1}$ y $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_{n-1}$.
Luego por (B4)

$$x \Rightarrow y = (\bigvee_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i)) \Rightarrow y = \bigwedge_{i=1}^{n-1} ((b_i \wedge e_i) \Rightarrow y).$$

De (B9) y (2) resulta

$$(b_i \wedge e_i) \Rightarrow y = (b_i \wedge e_i) \Rightarrow (0 \vee y) = -b_i \vee 0 \vee (e_i \Rightarrow y) = -b_i \vee (e_i \Rightarrow y).$$

Como de (1) se tiene que $e_i \wedge c_i \leq y$, para todo i, de la definición y (2), $c_i \leq e_i \Rightarrow y$ y entonces $(b_i \wedge e_i) \Rightarrow y = -b_i \vee (e_i \Rightarrow y) \geq -b_i \vee c_i$. Por lo tanto (3) $x \Rightarrow y \geq \bigwedge_{i=1}^{n-1} (-b_i \vee c_i)$.
En forma análoga se prueba que (4) $y \Rightarrow x \geq \bigwedge_{j=1}^{n-1} (-c_j \vee b_j)$.
De (3) y (4)

$$(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) \geq \bigwedge_{i=1}^{n-1} (-b_i \vee c_i) \vee \bigwedge_{j=1}^{n-1} (-c_j \vee b_j) = \bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{j=1}^{n-1} (-b_i \vee c_i \vee -c_j \vee b_j) = 1,$$

pues si $i \geq j$ entonces $b_j \geq b_i$, luego $b_j \vee -b_i \geq b_i \vee -b_i = 1$, es decir, $b_j \vee -b_i = 1$ y si $i < j$ se tiene que $c_i \geq c_j$ de donde resulta $c_i \vee -c_j = 1$.
Por lo tanto $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1$ y L es una P-álgebra.

(b) $\Rightarrow$ (c) Si L una P-álgebra finita vamos a probar, por inducción sobre el número de elementos de L, que es producto directo de cadenas. Si $|L| = 1$ entonces L es una cadena. Supongamos que $|L| = m > 1$ y que toda P-álgebra de cardinal menor que m es producto de cadenas.
Si L es una cadena no hay nada que probar, caso contrario podemos afirmar que $B(L) \neq \{0, 1\}$. En efecto, si fuera $B(L) = \{0, 1\}$, como $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1$ y $x \Rightarrow y$,

$y \Rightarrow x \in B(L)$, para todo $x, y \in L$, entonces debe ser $x \Rightarrow y = 1$ ó $y \Rightarrow x = 1$ y por (B1), $x \leq y$ ó $y \leq x$, contradicción. Luego existe $b \in B(L) \backslash \{0, 1\}$.
Usando el Lema 4.5, $L_1 = (b]$ y $L_2 = (-b]$ son P-álgebras, con cardinal menor que m, y $\varphi_1 : L \to L_1$, y $\varphi_2 : L \to L_2$, definidos por $\varphi_1(x) = x \wedge b$ y $\varphi_2(x) = x \wedge -b$ son P-homomorfismos.
Además $L_1 \times L_2$ es una P-álgebra con las operaciones definidas punto a punto. Consideremos la aplicación $\varphi : L \to L_1 \times L_2$ tal que $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = (x \wedge b, x \wedge -b)$. Sabemos que $L \cong L_1 \times L_2$ como reticulados distributivos y entonces φ es un P-homomorfismo, ([1], pag. 55).
Luego L es producto directo de dos P-álgebras de cardinal menor que m y por la hipótesis inductiva cada una de ellas es producto de cadenas, lo que termina la demostración.

(c) $\Rightarrow$ (a) Como toda cadena finita es un P_0-reticulado, del Lema 3.1 resulta que L es un P_0-reticulado. ■

5. Filtros primos en P_0-reticulados.

Si L es un reticulado distributivo acotado, no trivial, notaremos con $\mathcal{P}(L)$ el conjunto de todos los filtros primos de L.

Lema 5.1 (T. Traczyk, [12]) *Si L es un reticulado distributivo acotado, no trivial, y $P \in \mathcal{P}(L)$ entonces $P' = P \cap B(L)$ es un filtro primo del álgebra de Boole $B(L)$, esto es, un filtro maximal de $B(L)$.*

Dem. Observemos en primer lugar que P' es una parte propia de $B(L)$. En efecto, si $P' = B(L)$ entonces $B(L) = P \cap B(L)$ esto es $B(L) \subseteq P$ y como $0 \in B(L)$ tendríamos que $0 \in P$ y entonces $P = L$, absurdo.
Por definición $P' \subseteq B(L)$ y $1 \in P'$. Sean $a, b \in P'$, luego $a, b \in P$ y $a, b \in B(L)$, de donde resulta que $a \wedge b \in P$ y $a \wedge b \in B(L)$ y por lo tanto $a \wedge b \in P'$.
Sea (1) $a \in P'$ y (2) $b \in B(L)$ tal que (3) $a \leq b$. De (1) resulta (4) $a \in P$ y por (2) tenemos (5) $b \in L$, luego de (4), (5) y (3) se deduce (6) $b \in P$ y por (2) $b \in P'$. Luego P' es un filtro de $B(L)$.
Supongamos que (i) $x, y \in B(L)$ son tales que $x \vee y \in P'$, luego $x \vee y \in P$ y como P es un filtro primo resulta que (ii) $x \in P$ ó (iii) $y \in P$. Por (i), si se verifica (ii) entonces $x \in P'$ y si se verifica (iii) entonces $y \in P'$. ■

Lema 5.2 *Si L es un reticulado distributivo acotado, no trivial, y $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(L)$ verifican $P_2 \subset P_1$ entonces $P_2 \cap B(L) = P_1 \cap B(L)$.*

Dem. Como $P_2 \subset P_1$ entonces $P_2 \cap B(L) \subseteq P_1 \cap B(L)$, luego como por el Lema 5.1 $P_2 \cap B(L)$ y $P_1 \cap B(L)$ son filtros maximales de $B(L)$ resulta $P_2 \cap B(L) = P_1 \cap B(L)$. ■

Lema 5.3 (T. Traczyk, [12]) *Si L es un P_0-reticulado con cadena base $e_0 = 0 < e_1 < \cdots < e_{n-2} < e_{n-1} = 1$ y $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \in \mathcal{P}(L)$, verifican*

$$P_{n-1} \subset P_{n-2} \subset \cdots \subset P_2 \subset P_1$$

entonces $e_i \in P_i$ y $e_{i-1} \notin P_i$ para $1 \leq i \leq n-1$.

Dem. Supongamos que el lema no se verifica, esto es, que existe i, $1 \leq i \leq n-1$ tal que (I) $e_i \notin P_i$ ó (II) $e_{i-1} \in P_i$.
Si se verifica (I), sea i_0 el mayor índice tal que (1) $e_{i_0} \notin P_{i_0}$. Observemos que $i_0 \neq n-1$, pues $e_{n-1} = 1 \in P_{n-1}$, y además (2) $e_{i_0+1} \in P_{i_0+1}$. Como por hipótesis $P_{i_0+1} \subset P_{i_0}$, existe (3) $x_0 \in P_{i_0} \setminus P_{i_0+1}$. Por el Corolario 1.1 $x_0 = \bigwedge\limits_{i=0}^{n-2} (c_i \vee e_i)$, donde $c_i \in B(L)$ para $0 \leq i \leq n-2$ y $c_0 \geq c_1 \geq \cdots \geq c_{n-2}$, luego $x_0 \leq c_{i_0} \vee e_{i_0}$.

Como P_{i_0} es un filtro, de (3) resulta que $c_{i_0} \vee e_{i_0} \in P_{i_0}$ y por ser primo de (1) se deduce (4) $c_{i_0} \in P_{i_0}$.

Por otro lado, si $i_0 + 1 \leq i \leq n-2$ entonces $e_{i_0+1} \leq e_i \leq c_i \vee e_i$, por lo que (5) $e_{i_0+1} \leq \bigwedge\limits_{i=i_0+1}^{n-2} (c_i \vee e_i)$ y si $0 \leq i \leq i_0$ se tiene $c_{i_0} \leq c_i \leq c_i \vee e_i$, es decir, (6) $c_{i_0} \leq \bigwedge\limits_{i=0}^{i_0} (c_i \vee e_i)$.

De (5) y (6) $c_{i_0} \wedge e_{i_0+1} \leq \bigwedge\limits_{i=0}^{i_0} (c_i \vee e_i) \wedge \bigwedge\limits_{i=i_0+1}^{n-2} (c_i \vee e_i) = x_0$, luego si $c_{i_0} \in P_{i_0+1}$ de (2) resulta que $c_{i_0} \wedge e_{i_0+1} \in P_{i_0+1}$ y entonces $x_0 \in P_{i_0+1}$, lo que contradice (3). Por lo tanto (7) $c_{i_0} \notin P_{i_0+1}$.

Finalmente de (4) se tiene que $c_{i_0} \in B(L) \cap P_{i_0}$ y de (7), $c_{i_0} \notin B(L) \cap P_{i_0+1}$, lo cual es una contradicción, pues como $P_{i_0+1}, P_{i_0} \in \mathcal{P}(L)$ y $P_{i_0+1} \subset P_{i_0}$, por el Lema 5.2 $B(L) \cap P_{i_0} = B(L) \cap P_{i_0+1}$.

Supongamos que se verifica (II). Sea i_0 el menor índice tal que (8) $e_{i_0-1} \in P_{i_0}$ y como P_1 es propio $e_0 = 0 \notin P_1$, de donde $i_0 \neq 1$. Observemos que (9) $e_{i_0-2} \notin P_{i_0-1}$. De $P_{i_0} \subset P_{i_0-1}$ existe (10) $x_1 \in P_{i_0-1} \setminus P_{i_0}$. Consideremos una representación monótona de x_1, $x_1 = \bigwedge_{i=0}^{n-2} (d_i \vee e_i)$, luego $x_1 \leq d_{i_0-2} \vee e_{i_0-2}$.

Como $x_1 \in P_{i_0-1}$, por hipótesis $d_{i_0-2} \vee e_{i_0-2} \in P_{i_0-1}$ y teniendo en cuenta (9) entonces (11) $d_{i_0-2} \in P_{i_0-1}$.

Por otra parte, si $i_0 - 1 \leq i \leq n-2$ se tiene que $e_{i_0-1} \leq e_i \leq d_i \vee e_i$, es decir, (12) $e_{i_0-1} \leq \bigwedge_{i=i_0-1}^{n-2} (d_i \vee e_i)$ y si $0 \leq i \leq i_0 - 2$ entonces $d_{i_0-2} \leq d_i \leq d_i \vee e_i$ y por lo tanto (13) $d_{i_0-2} \leq \bigwedge_{i=0}^{i_0-2} (d_i \vee e_i)$. De (12) y (13) $e_{i_0-1} \wedge d_{i_0-2} \leq x_1$, de donde resulta (14) $d_{i_0-2} \notin P_{i_0}$, pues caso contrario, de (8) resultaría que $e_{i_0-1} \wedge d_{i_0-2} \in P_{i_0}$ y entonces $x_1 \in P_{i_0}$, lo que contradice (10).

Luego por (11) $d_{i_0-2} \in P_{i_0-1} \cap B(L)$ y por (14) $d_{i_0-2} \notin P_{i_0} \cap B(L)$, es decir, $P_{i_0-1} \cap B(L) \neq P_{i_0} \cap B(L)$, absurdo. ■

Sean L un P_0-reticulado y Q un filtro de $B(L)$. Fijado k, $1 \leq k \leq n-1$, sea:

$$F_k(Q) = \{x \in L : \text{existe una representación monótona } x = \bigvee_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i) \text{ tal que } b_k \in Q\}.$$

Lema 5.4 (T. Traczyk, [12], R. Cignoli, [2, 3])
$F_k(Q)$ es un filtro de L, $Q \subseteq F_k(Q)$, cualquiera que sea k, $1 \leq k \leq n-1$ y

$$F_{n-1}(Q) \subseteq \cdots \subseteq F_2(Q) \subseteq F_1(Q).$$

Dem.

1) Si $b_i = 1$, para $1 \leq i \leq n-1$, entonces $\bigvee_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i) = \bigvee_{i=1}^{n-1} e_i = 1$ y como $1 \in Q$ tenemos que $1 \in F_k(Q)$.

2) Sean $x, y \in F_k(Q)$, luego (1) $x = \bigvee_{i=1}^{n-1} (a_i \wedge e_i)$, (2) $y = \bigvee_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i)$ donde (3) $a_i, b_i \in B(L)$, para $1 \leq i \leq n-1$, (4) $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{n-1}$, (5) $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_{n-1}$ y (6) $a_k, b_k \in Q$.

   De las hipótesis (1) a (5) resulta por la Observación 1.2 que $x \wedge y = \bigvee_{i=1}^{n-1} ((a_i \wedge b_i) \wedge e_i)$, con $a_i \wedge b_i \in B(L)$, para $1 \leq i \leq n-1$, $a_1 \wedge b_1 \geq a_2 \wedge b_2 \geq \cdots \geq a_{n-1} \wedge b_{n-1}$ y como por (6) $a_k \wedge b_k \in Q$, tenemos que $x \wedge y \in F_k(Q)$.

3) Sea $x \in F_k(Q)$ e $y \in L$ tal que $x \leq y$, luego (1) $x = \bigvee_{i=1}^{n-1} (a_i \wedge e_i)$, (2) $y = \bigvee_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i)$ donde (3) $a_i, b_i \in B(L)$, para $1 \leq i \leq n-1$, (4) $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{n-1}$, (5) $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_{n-1}$ y (6) $a_k \in Q$.

   De las hipótesis resulta por la Observación 1.2 que $y = x \vee y = \bigvee_{i=1}^{n-1} ((a_i \vee b_i) \wedge e_i)$, con $a_i \vee b_i \in B(L)$, para $1 \leq i \leq n-1$, $a_1 \vee b_1 \geq a_2 \vee b_2 \geq \cdots \geq a_{n-1} \vee b_{n-1}$ y como $a_k \leq a_k \vee b_k \in Q$, $a_k, b_k \in B(L)$, resulta que $a_k \vee b_k \in Q$ y por lo tanto $y \in F_k(Q)$.

Si $b \in Q$, como $b = b \wedge 1 = b \wedge \bigvee_{j=1}^{n-1} e_j = \bigvee_{j=1}^{n-1} (b \wedge e_j)$ entonces $b \in F_k(Q)$, cualquiera que sea k, luego $Q \subseteq F_k(Q)$.

Sea $x \in F_k(Q)$, donde $2 \leq k \leq n-1$, luego (1) $x = \bigvee_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i)$ donde $b_i \in B(L)$, para $1 \leq i \leq n-1$, (2) $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_{n-1}$ y (3) $b_k \in Q$. De (2) y (3) resulta $b_{k-1} \in Q$ y por lo tanto $x \in F_{k-1}(Q)$. ■

Observación 5.1 *Si L es un P_0-reticulado y Q es un filtro propio de $B(L)$ entonces $F_k(Q)$ no es necesariamente un filtro propio de L.*
Consideremos el P_0-reticulado L_1 del Ejemplo 2.1, donde $B(L) = \{0, a, d, 1\}$ y $e_0 = 0 < e_1 = b < e_2 = 1$.
En L_1, tenemos las siguientes representaciones monótonas:
(1) $0 = (0 \wedge b) \vee 0$, *(2)* $0 = (a \wedge b) \vee 0$,
(3) $b = (d \wedge b) \vee 0$, *(4)* $b = (1 \wedge b) \vee 0$,
(5) $a = (a \wedge b) \vee a$, *(6)* $c = (1 \wedge b) \vee a$,
(7) $d = (d \wedge b) \vee d$, *(8)* $d = (1 \wedge b) \vee d$,
(9) $1 = (1 \wedge b) \vee 1$.

Si $Q_1 = \{a, 1\}$ entonces por (2) $0 \in F_1(Q_1)$, luego $F_1(Q_1) = L_1$.
Por (5), (6) y (9) $F_2(Q_1) = \{a, c, 1\}$.

Si $Q_2 = \{d, 1\}$ entonces por (4) (ó (3)), (6), (7) (u (8)) y (9), $F_1(Q_2) = \{b, c, d, 1\}$ y por (7) (u (8)) y (9) $F_2(Q_2) = \{d, 1\}$.

Lema 5.5 *Si $Q \in \mathcal{P}(B(L))$ y $F_k(Q)$ es propio, con $1 \leq k \leq n-1$ entonces:*

(a) $F_k(Q) \in \mathcal{P}(L)$, (T. Traczyk, [12])

(b) $F_k(Q) \cap B(L) = Q$, (R. Cignoli, [2, 3])

(c) $F_{n-1}(Q) \neq L$.

Dem. (a) Supongamos que $x \vee y \in F_k(Q)$, luego (1) $x \vee y = \bigvee_{i=1}^{n-1} (c_i \wedge e_i)$, donde (2) $c_i \in B(L)$, para $1 \leq i \leq n-1$, (3) $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_{n-1}$ y (4) $c_k \in Q$.
Como $x, y \in L$ entonces (5) $x = \bigvee_{i=1}^{n-1} (a_i \wedge e_i)$, (6) $y = \bigvee_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i)$ donde (7) $a_i, b_i \in B(L)$, $1 \leq i \leq n-1$, (8) $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{n-1}$, (9) $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_{n-1}$.
Sean

$$x_1 = \bigvee_{r=1}^{n-1} [(c_r \wedge \bigwedge_{j=1}^{r} (a_j \vee -b_j)) \wedge e_r]$$

e

$$y_1 = \bigvee_{r=1}^{n-1} [(c_r \wedge \bigwedge_{j=1}^{r} (b_j \vee -a_j)) \wedge e_r],$$

luego (10) $x_1, y_1 \leq x \vee y$.

Pongamos $z_r = c_r \wedge \bigwedge_{j=1}^{r} (a_j \vee -b_j)$ y $w_r = c_r \wedge \bigwedge_{j=1}^{r} (b_j \vee -a_j)$, luego $z_r, w_r \in B(L)$, para $1 \leq r \leq n-1$. Probemos que $z_{r_1} \geq z_{r_2}$ para $r_1 \leq r_2$. En efecto, como $c_{r_1} \geq c_{r_2}$ entonces

$$z_{r_1} = c_{r_1} \wedge \bigwedge_{j=1}^{r_1} (a_j \vee -b_j) \geq c_{r_1} \wedge \bigwedge_{j=1}^{r_2} (a_j \vee -b_j) \geq c_{r_2} \wedge \bigwedge_{j=1}^{r_2} (a_j \vee -b_j) = z_{r_2}.$$

Análogamente se prueba que $w_{r_1} \geq w_{r_2}$ para $r_1 \leq r_2$.

Vamos a probar que $x = x_1$. Teniendo en cuenta (1), (5) y la Observación 1.2 resulta

$$(11)\quad x = (x \vee y) \wedge x = \bigvee_{r=1}^{n-1} ((c_r \wedge a_r) \wedge e_r) = \bigvee_{r=1}^{n-1} [c_r \wedge (\bigwedge_{j=1}^{r} a_j) \wedge e_r] \leq$$

$$\bigvee_{r=1}^{n-1} [c_r \wedge (\bigwedge_{j=1}^{r} (a_j \vee -b_j)) \wedge e_r] = x_1$$

Por (10) $x_1 = (x \vee y) \wedge x_1$, luego de la Observación 1.2, (5) y (6) se tiene

$$(12)\qquad x_1 = [\bigvee_{r=1}^{n-1} ((a_r \vee b_r) \wedge e_r)] \wedge [\bigvee_{r=1}^{n-1} (c_r \wedge \bigwedge_{j=1}^{r} (a_j \vee -b_j)) \wedge e_r] =$$

$$\bigvee_{r=1}^{n-1} [(a_r \vee b_r) \wedge c_r \wedge \bigwedge_{j=1}^{r} (a_j \vee -b_j) \wedge e_r] \leq$$

$$\bigvee_{r=1}^{n-1} [(a_r \vee b_r) \wedge c_r \wedge (a_r \vee -b_r) \wedge e_r] = \bigvee_{r=1}^{n-1} [(a_r \vee (b_r \wedge -b_r)) \wedge c_r \wedge e_r] =$$

$$\bigvee_{r=1}^{n-1} [(a_r \wedge c_r) \wedge e_r] \leq \bigvee_{r=1}^{n-1} (a_r \wedge e_r) = x.$$

De (11) y (12) resulta que $x_1 = x$. En forma análoga se demuestra que $y = y_1$.

$$z_k \vee w_k = [c_k \wedge \bigwedge_{j=1}^{k} (a_j \vee -b_j)] \vee [c_k \wedge \bigwedge_{j=1}^{k} (b_j \vee -a_j)] =$$

$$c_k \wedge [\bigwedge_{j=1}^{k} (a_j \vee -b_j) \vee \bigwedge_{j=1}^{k} (b_j \vee -a_j)].$$

Teniendo en cuenta (8) y (9) resulta que $(a_j \vee -b_j) \vee (b_i \vee -a_i) = 1$, para $1 \leq i, j \leq n-1$ y entonces $\bigwedge_{j=1}^{k} (a_j \vee -b_j) \vee \bigwedge_{j=1}^{k} (b_j \vee -a_j) = 1$. Luego $z_k \vee w_k = c_k \wedge 1 = c_k \in Q$ y como

$z_k, w_k \in B(L)$ y Q es un filtro primo de $B(L)$ tenemos que $z_k \in Q$ ó $w_k \in Q$ y por lo tanto $x = x_1 \in F_k(Q)$ ó $y = y_1 \in F_k(Q)$.

(b) Por el Lema 5.4, $Q \subseteq F_k(Q)$, cualquiera que sea k. Como $Q \subseteq B(L)$ entonces (i) $Q \subseteq F_k(Q) \cap B(L)$.
Por hipótesis $F_k(Q)$ es propio entonces $F_k(Q)$ es un filtro primo, luego por el Lema 5.1 tenemos (ii) $F_k(Q) \cap B(L)$ es un filtro primo de $B(L)$. De (i) e (ii) resulta por ser Q y $F_k(Q) \cap B(L)$ filtros maximales de $B(L)$ que $F_k(Q) \cap B(L) = Q$.

(c) Si $F_{n-1}(Q) = L$ entonces $0 \in F_{n-1}(Q)$, por lo tanto existe una representación monótona tal que $0 = \bigvee_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i)$ y $b_{n-1} \in Q$, luego $b_i \wedge e_i = 0$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$, en particular $0 = b_{n-1} \wedge e_{n-1} = b_{n-1} \wedge 1 = b_{n-1}$ y entonces $0 \in Q$, absurdo. ■

Lema 5.6 (R. Cignoli, [2, 3]) *Si $P \in \mathcal{P}(L)$ y $P' = P \cap B(L)$ entonces*

$$F_{n-1}(P') \subseteq P \subseteq F_1(P').$$

Dem. Por el Lema 5.1 sabemos que $P' \in \mathcal{P}(B(L))$. Sea $x \in F_{n-1}(P')$, por lo tanto $x = \bigvee_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i)$, donde $b_i \in B(L)$, $1 \leq i \leq n-1$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_{n-1}$ y $b_{n-1} \in P' = P \cap B(L)$, luego (1) $b_{n-1} \in P$. Como (2) $b_{n-1} \leq \bigvee_{i=1}^{n-2} (b_i \wedge e_i) \vee b_{n-1} = x$, de (1) y (2) resulta por ser P un filtro que $x \in P$.
Sea (3) $x = \bigvee_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i) \in P$, donde $b_i \in B(L)$, $1 \leq i \leq n-1$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_{n-1}$.
Como P es un filtro primo, de (3) resulta que existe i_0, tal que $b_{i_0} \wedge e_{i_0} \in P$ y por lo tanto (4) $b_{i_0} \in P$. Como (5) $b_1 \geq b_{i_0}$, de (4) y (5) resulta $b_1 \in P$ y por lo tanto $b_1 \in P \cap B(L) = P'$, luego $x \in F_1(P')$. ■

Si P es un filtro primo de L, entonces P es propio, luego $e_0 = 0 \notin P$ y como P es filtro $e_{n-1} = 1 \in P$.

Definición 5.1 (G. Epstein y A. Horn, [4]) *Si $P \in \mathcal{P}(L)$, se dice que P es de tipo k, $1 \leq k \leq n-1$, si k es el menor natural tal que $e_k \in P$.*

Observación 5.2 *1) Todo filtro primo de L es de tipo k, para algún k, $1 \leq k \leq n-1$.*
2) Si $F_k(Q)$ es propio entonces es de tipo $\leq k$, pues $e_k = \bigvee_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i)$, con $b_i = 1$ para $1 \leq i \leq k$ y $b_i = 0$, para $k+1 \leq i \leq n-1$, esto es, $e_k \in F_k(Q)$.

Lema 5.7 (G. Epstein y A. Horn, [4]) *Si $P \in \mathcal{P}(L)$ es de tipo k entonces existe un único $Q \in \mathcal{P}(B(L))$ tal que $P = F_k(Q)$.*

Dem. Sea $Q = P \cap B(L)$. Por el Lema 5.1, Q es un filtro primo de $B(L)$. Sea $x \in F_k(Q)$ esto es $x = \bigvee_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i)$ y $b_k \in Q$. Como $Q \subseteq P$ entonces (1) $b_k \in P$ y por hipótesis (2) $e_k \in P$. De (1) y (2) resulta por ser P un filtro que $b_k \wedge e_k \in P$ y de $b_k \wedge e_k \leq x$ se tiene que $x \in P$.

Sea $x \in P$ y supongamos que para toda representación monótona de (3) $x = \bigvee_{i=1}^{n-1}(b_i \wedge e_i)$, $b_k \notin Q = P \cap B(L)$, luego $b_k \notin P$ y por lo tanto (4) $b_j \notin P$ para todo $j \geq k$.
De (3) resulta por ser P un filtro primo que existe j_0 tal que $b_{j_0} \wedge e_{j_0} \in P$, luego $b_{j_0} \in P$, de donde por (4) $j_0 < k$. Luego $b_{j_0} \wedge e_{j_0} \in P$ con $j_0 < k$ y por lo tanto $e_{j_0} \in P$, con $j_0 < k$, lo que contradice que P es de tipo k. Luego debe existir por lo menos una representación monótona de x tal que $b_k \in Q$, es decir, $x \in F_k(Q)$.
Supongamos que $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}(B(L))$ son tales $F_k(Q_1) = F_k(Q_2) = P$. Luego por el Lema 5.5, (b) $Q_1 = F_k(Q_1) \cap B(L) = F_k(Q_2) \cap B(L) = Q_2$. ■

Corolario 5.1 *Si $P \in \mathcal{P}(L)$ es de tipo k, $Q \in \mathcal{P}(B(L))$ y $Q \subseteq P$ entonces $P = F_k(Q)$.*

Dem. De $Q \subseteq P$ resulta que (1) $Q = Q \cap B(L) \subseteq P \cap B(L)$. Por el Lema 5.1 se tiene (2) $P \cap B(L) \in \mathcal{P}(B(L))$ y por hipótesis (3) $Q \in \mathcal{P}(B(L))$. Luego de (1), (2) y (3) resulta que $Q = P \cap B(L)$ y por el Lema 5.7 tenemos que $P = F_k(Q)$. ■

Teorema 5.1 (G. Epstein y A. Horn, [4]) *El conjunto de los filtros primos de un P_0-reticulado L con cadena base $e_0 = 0 < e_1 < \cdots < e_{n-1} = 1$ es la unión disjunta de cadenas con a lo sumo $n-1$ elementos cada una.*

Dem. Probemos que dado $Q \in \mathcal{P}(B(L))$ el conjunto $\mathcal{P}(Q) = \{P \in \mathcal{P}(L) : Q \subseteq P\}$ es una cadena con a lo sumo $n-1$ elementos.
Por el Lema 5.5 (c), sabemos que $F_{n-1}(Q)$ es propio luego por el Lema 5.5 (a), resulta que (1) $F_{n-1}(Q) \in \mathcal{P}(L)$. Del Lema 5.4 tenemos (2) $Q \subseteq F_{n-1}(Q)$, luego de (1) y (2) se concluye que $F_{n-1}(Q) \in \mathcal{P}(Q)$.
Por otro lado si $P \in \mathcal{P}(Q)$ entonces por la Observación 5.2 y el Corolario 5.1, $P = F_k(Q)$ para algún k, $1 \leq k \leq n-1$ y por lo tanto el conjunto $\mathcal{P}(Q)$ tiene a lo sumo $n-1$ elementos y $\mathcal{P}(Q) = \{F_k(Q) : F_k(Q) \neq L,\ 1 \leq k \leq n-1\}$. Como por el Lema 5.4

$$F_{n-1}(Q) \subseteq \cdots \subseteq F_2(Q) \subseteq F_1(Q),$$

$\mathcal{P}(Q)$ es una cadena con a lo sumo $n-1$ elementos.
Además si $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}(B(L))$ son tales que $Q_1 \neq Q_2$ entonces $\mathcal{P}(Q_1) \cap \mathcal{P}(Q_2) = \emptyset$. En efecto, si $P \in \mathcal{P}(Q_1) \cap \mathcal{P}(Q_2)$ entonces $F_k(Q_1) = P = F_h(Q_2)$ y por lo tanto por el Lema 5.5 (b), $Q_1 = F_k(Q_1) \cap B(L) = P \cap B(L) = F_h(Q_2) \cap B(L) = Q_2$, contradicción.
Finalmente, por la Observación 5.2 y el Lema 5.7 es fácil ver que

$$\mathcal{P}(L) = \bigcup_{Q \in \mathcal{P}(B(L))} \mathcal{P}(Q)$$

■

Lema 5.8 (G. Epstein y A. Horn, [4]) *Si $Q \in \mathcal{P}(B(L))$ entonces*

(a) $F_k(Q) = \{x \in L : e_k \wedge b \leq x,\ \text{para algún } b \in Q\}$,

(b) $F_{k-1}(Q) = F_k(Q)$ *si y solo si* $e_{k-1} \in F_k(Q)$.

Dem. (a) Si $x \in F_k(Q)$ entonces $x = \bigvee_{i=1}^{n-1}(b_i \wedge e_i)$ donde $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_{n-1}$ y $b_k \in Q$, luego $b_k \wedge e_k \leq x$. Supongamos ahora que $e_k \wedge b \leq x$ para algún $b \in Q$, luego si $b_1 = b_2 = \cdots = b_{k-1} = b_k = b$ y $b_{k+1} = \cdots = b_{n-1} = 0$ entonces $\bigvee_{i=1}^{n-1}(b_i \wedge e_i) \in F_k(Q)$ y

$$\bigvee_{i=1}^{n-1}(b_i \wedge e_i) = \bigvee_{i=1}^{k}(b \wedge e_i) \vee \bigvee_{i=k+1}^{n-1}(0 \wedge e_i) = b \wedge (\bigvee_{i=1}^{k} e_i) = b \wedge e_k \leq x,$$

luego $x \in F_k(Q)$.

(b) Supongamos que (1) $e_{k-1} \in F_k(Q)$ y probemos que $F_{k-1}(Q) = F_k(Q)$. Vimos en el Lema 5.4 que $F_k(Q) \subseteq F_{k-1}(Q)$. Sea $x \in F_{k-1}(Q)$ entonces (2) $e_{k-1} \wedge b \leq x$ para algún $b \in Q$. Como (3) $b \in Q \subseteq F_k(Q)$, de (1) y (3) resulta que (4) $b \wedge e_{k-1} \in F_k(Q)$. Luego de (2) y (4) tenemos que $x \in F_k(Q)$, y por lo tanto $F_{k-1}(Q) \subseteq F_k(Q)$.
Recíprocamente supongamos que (5) $F_{k-1}(Q) = F_k(Q)$, como $e_{k-1} \wedge b \leq e_{k-1}$ cualquiera que sea $b \in Q$ entonces $e_{k-1} \in F_{k-1}(Q)$ luego por (5) $e_{k-1} \in F_k(Q)$. ■

Lema 5.9 *Si L es un P_0-reticulado con cadena base $e_0 = 0 < e_1 < \cdots < e_{n-1} = 1$ entonces $F_k = \{b \in B(L) : e_k \leq b \vee e_{k-1}\}$, $1 \leq k \leq n-1$, es un filtro propio del álgebra de Boole $B(L)$.*

Dem. F1) Como $e_k \leq 1 \vee e_{k-1} = 1$ y $1 \in B(L)$ entonces $1 \in F_k$.
F2) Sean $b_1, b_2 \in F_k$ esto es $e_k \leq b_1 \vee e_{k-1}$ y $e_k \leq b_2 \vee e_{k-1}$, luego $e_k \leq (b_1 \vee e_{k-1}) \wedge (b_2 \vee e_{k-1}) = (b_1 \wedge b_2) \vee e_{k-1}$ y como $b_1 \wedge b_2 \in B(L)$ tenemos que $b_1 \wedge b_2 \in F_k$.
F3) Si $b_1 \in F_k$, esto es, $e_k \leq b_1 \vee e_{k-1}$ y $b \in B(L)$ verifica $b_1 \leq b$, entonces $e_k \leq b_1 \vee e_{k-1} \leq b \vee e_{k-1}$, luego $b \in F_k$.
Supongamos $F_k = B(L)$. Luego $0 \in F_k$, es decir, $e_k \leq 0 \vee e_{k-1} = e_{k-1}$, lo que contradice la hipótesis. ■

Observación 5.3 *Si F y G son filtros de un reticulado distributivo acotado, no trivial, notaremos como es habitual con $F \vee G$ el filtro generado por $F \cup G$. Es bien conocido que $F \vee G = \{x \wedge y : x \in F,\ y \in G\}$.*

Observación 5.4 *Sean $b_1, b_2, \ldots, b_n$ elementos de un álgebra de Boole B tales que (1) $\bigvee_{i=1}^{n} b_i = 1$. Entonces existen elementos $b'_1, b'_2, \ldots, b'_n$ de B tales que $\bigvee_{i=1}^{n} b'_i = 1$, $b'_i \wedge b'_j = 0$, para $i \neq j$ y $b'_i \leq b_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.*
Sea (2) $b'_1 = -\bigvee_{h=2}^{n} b_h$ esto es (3) $b'_1 = \bigwedge_{h=2}^{n} -b_h$. De (1) y (2) resulta $b'_1 \leq b_1$.
Por (3) tenemos que $b'_1 = \bigwedge_{h=2}^{n} -b_h \leq -b_h$ y por lo tanto $b'_1 \wedge b_h \leq -b_h \wedge b_h = 0$, para todo $h \neq 1$, luego $b'_1 \wedge b_h = 0$, para todo $h \neq 1$. Además (4) $b'_1 \vee \bigvee_{h=2}^{n} b_h = -\bigvee_{h=2}^{n} b_h \vee \bigvee_{h=2}^{n} b_h = 1$.
Sea (5) $b'_2 = -(b'_1 \vee \bigvee_{h=3}^{n} b_h)$, esto es, (6) $b'_2 = -b'_1 \wedge \bigwedge_{h=3}^{n} -b_h$. De (4) y (5) es fácil ver que $b'_2 \leq b_2$. De (6) resulta que (7) $b'_2 \leq -b'_1$ y que (8) $b'_2 \leq \bigwedge_{h=3}^{n} -b_h \leq -b_h$, para todo $h \neq 1, 2$.

De (7) tenemos $b'_2 \wedge b'_1 = 0$ *y por (8)* $b'_2 \wedge b_h = 0$, *para* $h \neq 1, 2$. *Además*

$$b'_1 \vee b'_2 \vee \bigvee_{h=3}^{n} b_h = b'_1 \vee (-b'_1 \wedge - \bigvee_{h=3}^{n} b_h) \vee \bigvee_{h=3}^{n} b_h =$$

$$b'_1 \vee - \bigvee_{h=3}^{n} b_h \vee \bigvee_{h=3}^{n} b_h = 1.$$

Repitiendo este procedimiento un número finito de veces se concluye la afirmación.

Lema 5.10 (G. Epstein y A. Horn, [4]) *Si* L *es un* P_0*-reticulado con cadena base* $0 = e_0 < e_1 < \cdots < e_{n-1} = 1$, *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *Toda cadena de* $\mathcal{P}(L)$ *tiene a lo sumo* $n-2$ *elementos,*

(b) *Para todo* $Q \in \mathcal{P}(B(L))$ *existe* $b \in Q$ *y un entero* $k \geq 1$ *tal que* $e_k \wedge b \leq e_{k-1}$,

(c) $F_1 \vee F_2 \vee \cdots \vee F_{n-1} = B(L)$, *donde* F_i *son los filtros definidos en el Lema 5.9.*

(d) L *tiene una cadena base con menos de* n *elementos.*

Dem. (a) $\Rightarrow$ (b) Si $Q \in \mathcal{P}(B(L))$ vimos que

$$(*) \;\; F_{n-1}(Q) \subseteq \cdots \subseteq F_2(Q) \subseteq F_1(Q).$$

Por otro lado, por el Lema 5.5, $F_1(Q) = L$ ó $F_1(Q) \in \mathcal{P}(L)$.
Si $F_1(Q) = L$ entonces $0 \in F_1(Q)$ luego por el Lema 5.8, $e_1 \wedge b \leq 0$, para algún $b \in Q$, esto es, $e_1 \wedge b \leq e_0$.
Si $F_1(Q) \in \mathcal{P}(L)$, como por hipótesis la cadena indicada en $(*)$ tiene a lo sumo $n-2$ elementos, tenemos que $F_{k-1}(Q) = F_k(Q)$ para algún k, $k > 1$. Luego por el Lema 5.8 resulta que $e_{k-1} \in F_k(Q)$ y entonces $e_k \wedge b \leq e_{k-1}$, para algún $b \in Q$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Si $F = F_1 \vee F_2 \vee \cdots \vee F_{n-1} \neq B(L)$, es bien conocido que existe $Q \in \mathcal{P}(B(L))$ tal que $F \subseteq Q$. Luego por (b) existe $b \in Q$ y $k \geq 1$ tal que $e_k \wedge b \leq e_{k-1}$, por lo tanto

$$e_k \leq e_k \vee -b = (e_k \wedge b) \vee -b \leq e_{k-1} \vee -b,$$

de donde por la definición de F_k tenemos $-b \in F_k$. Como $F_k \subseteq F$ y $F \subseteq Q$ entonces $F_k \subseteq Q$ y por lo tanto $-b \in Q$. Luego $0 = b \wedge -b \in Q$ y $Q = B(L)$, absurdo.

(c) $\Rightarrow$ (d) Supongamos que $F_1 \vee F_2 \vee \cdots \vee F_{n-1} = B(L)$, luego como $0 \in B(L)$ resulta por la Observación 5.3 que existen elementos $b_i \in F_i$, $1 \leq i \leq n-1$, tales que $0 = \bigwedge_{i=1}^{n-1} b_i$, luego $1 = \bigvee_{i=1}^{n-1} -b_i$. Por lo visto en la Observación 5.4 podemos suponer que (1) $1 = \bigvee_{i=1}^{n-1} d_i$, con (2) $d_i \wedge d_j = 0$, para $i \neq j$ y (3) $d_i \leq -b_i$, $1 \leq i \leq n-1$.
Pongamos $f_0 = 0$ y $f_k = e_k \vee (e_{k+1} \wedge \bigvee_{j=1}^{k} d_j)$, para $1 \leq k \leq n-2$. Es claro que $f_0 < f_k$ para todo $k = 1, \ldots, n-2$ y que $f_k \leq f_{k+1}$, para $1 \leq k \leq n-3$.
Como $b_k \in F_k$ y por (3) $b_k \leq -d_k$ entonces $-d_k \in F_k$, esto es, (4) $e_k \leq -d_k \vee e_{k-1}$. En

particular, $1 = e_{n-1} \leq -d_{n-1} \vee e_{n-2}$, luego (5) $-d_{n-1} \vee e_{n-2} = 1$. De (1) y (2) resulta que (6) $-d_{n-1} = \bigvee_{j=1}^{n-2} d_j$, luego teniendo en cuenta (6) y (5),

$$f_{n-2} = e_{n-2} \vee (e_{n-1} \wedge \bigvee_{j=1}^{n-2} d_j) = e_{n-2} \vee \bigvee_{j=1}^{n-2} d_j = e_{n-2} \vee -d_{n-1} = 1.$$

Para simplificar la notación pongamos $s_k = \bigvee_{j=k+1}^{n-1} d_j$, para $1 \leq k \leq n-2$, entonces usando (2) y (4) se tiene

$$f_{k-1} \vee (f_k \wedge s_k) = f_{k-1} \vee ((e_k \vee (e_{k+1} \wedge \bigvee_{j=1}^{k} d_j)) \wedge s_k) =$$

$$f_{k-1} \vee (e_k \wedge s_k) \vee (e_{k+1} \wedge \bigvee_{j=1}^{k} d_j \wedge \bigvee_{j=k+1}^{n-1} d_j) =$$

$$f_{k-1} \vee (e_k \wedge s_k) \vee 0 = f_{k-1} \vee (e_k \wedge s_k) =$$

$$e_{k-1} \vee (e_k \wedge \bigvee_{j=1}^{k-1} d_j) \vee (e_k \wedge \bigvee_{j=k+1}^{n-1} d_j) = e_{k-1} \vee (e_k \wedge (\bigvee_{j=1}^{k-1} d_j \vee \bigvee_{j=k+1}^{n-1} d_j)) =$$

$$e_{k-1} \vee (e_k \wedge (\bigvee_{j=1,\, j\neq k}^{n-1} d_j)) = e_{k-1} \vee (e_k \wedge -d_k) =$$

$$(e_{k-1} \vee e_k) \wedge (e_{k-1} \vee -d_k) = e_k \wedge (e_{k-1} \vee -d_k) = e_k.$$

Por lo tanto

$$(7) \;\; e_k = f_{k-1} \vee (f_k \wedge s_k), \;\; 1 \leq k \leq n-2.$$

Como L tiene cadena base $0 = e_0 < e_1 < \cdots < e_{n-1} = 1$, si $x \in L$, entonces (8) $x = \bigvee_{k=1}^{n-1} (r_k \wedge e_k)$, con $r_k \in B(L)$.

Por (7) $r_k \wedge e_k = r_k \wedge (f_{k-1} \vee (f_k \wedge s_k)) = (r_k \wedge f_{k-1}) \vee (f_k \wedge r_k \wedge s_k)$. Luego $r_k \wedge e_k = (r_k \wedge f_{k-1}) \vee (f_k \wedge t_k)$, donde $t_k = r_k \wedge s_k \in B(L)$. Reemplazando en (8) tenemos:

$$x = \bigvee_{k=1}^{n-1} (r_k \wedge e_k) = (\bigvee_{k=1}^{n-2} (r_k \wedge e_k)) \vee r_{n-1} =$$

$$\bigvee_{k=1}^{n-2} ((r_k \wedge f_{k-1}) \vee (f_k \wedge t_k)) \vee r_{n-1} = \bigvee_{k=1}^{n-2} (r_k \wedge f_{k-1}) \vee \bigvee_{k=1}^{n-2} (f_k \wedge t_k) \vee r_{n-1} =$$

$$(r_1 \wedge f_0) \vee \bigvee_{k=2}^{n-2} (r_k \wedge f_{k-1}) \vee \bigvee_{k=1}^{n-2} (f_k \wedge t_k) \vee r_{n-1} = \bigvee_{k=2}^{n-2} (r_k \wedge f_{k-1}) \vee \bigvee_{k=1}^{n-2} (f_k \wedge t_k) \vee r_{n-1} =$$

$$\bigvee_{j=1}^{n-3} (r_{j+1} \wedge f_j) \vee \bigvee_{k=1}^{n-2} (f_k \wedge t_k) \vee r_{n-1} =$$

$$\bigvee_{j=1}^{n-3}((r_{j+1}\vee t_j)\wedge f_j)\vee(t_{n-2}\wedge f_{n-2})\vee r_{n-1}=\bigvee_{j=1}^{n-3}((r_{j+1}\vee t_j)\wedge f_j)\vee(t_{n-2}\wedge 1)\vee r_{n-1}=$$

$$\bigvee_{j=1}^{n-3}((r_{j+1}\vee t_j)\wedge f_j)\vee t_{n-2}\vee r_{n-1}=\bigvee_{j=1}^{n-2}((r_{j+1}\vee t_j)\wedge f_j),$$

donde $r_{j+1}\vee t_j\in B(L)$, $1\leq j\leq n-2$. Luego $f_0=0, f_1,\ldots,f_{n-2}=1$ es una cadena base de L con menos de n elementos.

(d) $\Rightarrow$ (a) Por hipótesis L tiene una cadena base $e'_0=0<e'_1<\cdots<e'_{k-1}=1$, con $k<n$, es decir, $k\leq n-1$. Luego por el Teorema 5.1 toda cadena de $\mathcal{P}(L)$ tiene a lo sumo $k-1$ elementos, donde $k-1\leq n-2$ y por lo tanto vale (a). ■

Lema 5.11 (G. Epstein y A. Horn, [4]) *Sea L un P_0-reticulado. Entonces L es de orden n si y solo si toda cadena de $\mathcal{P}(L)$ tiene a lo sumo $n-1$ elementos y existe al menos una cadena con exactamente $n-1$ elementos.*

Dem. Sea L un P_0-reticulado de orden n. Por el Teorema 5.1 toda cadena de $\mathcal{P}(L)$ tiene a lo sumo $n-1$ elementos. Supongamos que no existe ninguna cadena con $n-1$ elementos, luego se verifica la condición (a) del Lema 5.10, lo que equivale a decir, que L tiene una cadena base con menos de n elementos, lo que contradice la hipótesis.
Probemos la recíproca. Supongamos que L es de orden t. Como por hipótesis toda cadena de $\mathcal{P}(L)$ tiene a lo sumo $n-1$ elementos, por el Lema 5.10 resulta que L tiene una cadena base con menos de $n+1$ elementos. Luego debe ser $t<n+1$, es decir, $t\leq n$. Si fuera $t<n$, por el mismo lema se concluye que toda cadena de $\mathcal{P}(L)$ tiene a lo sumo $n-2$ elementos, contradicción. Luego $t=n$ y por lo tanto L es de orden n. ■

6. P_0P-homomorfismos

Sea L un P_0P-reticulado con una cadena base $e_0 = 0, e_1, \ldots, e_{n-1} = 1$. Como L es una B-álgebra entonces por (B11) existe $\overline{x}$, cualquiera que sea $x \in L$. Pongamos

$$T_i x = \overline{x} \wedge (e_{n-i} \Rightarrow x) \ , \quad \text{para} \ \ 1 \leq i \leq n-1.$$

Como $\overline{x}, e_{n-i} \Rightarrow x \in B(L)$ entonces $T_i x \in B(L)$, para $1 \leq i \leq n-1$.
Por definición $T_i e_j = \overline{e_j} \wedge (e_{n-i} \Rightarrow e_j)$, para $1 \leq i, j \leq n-1$.

Lema 6.1 *Si L es un P_0P-reticulado con cadena base $E_n = \{e_0 = 0, e_1, \ldots, e_{n-1} = 1\}$ entonces:*

(1) $SL(B(L), E_n) = L$,

(2) *Todo elemento $x \in L$ se puede escribir como $x = \bigvee_{i=1}^{n-1} (T_{n-i} x \wedge e_i)$, y se verifican las siguientes propiedades:*

- (T1) $T_1 x \leq T_2 x \leq \cdots \leq T_{n-1} x$,
- (T2) $T_i(x \vee y) = T_i x \vee T_i y$,
- (T3) $T_i(x \wedge y) = T_i x \wedge T_i y$,
- (T4) $T_i b = b$, *para todo* $b \in B(L)$, $1 \leq i \leq n-1$,
- (T5) $T_i 0 = 0$ *y* $T_i 1 = 1$,
- (T6) $T_1 x \leq x$,
- (T7) *Si* $T_i x \leq T_i y$, *para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$ *entonces* $x \leq y$,
- (T8) *Si* $T_i x = T_i y$, *para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$ *entonces* $x = y$,
- (T9) $x \leq T_{n-1} x$,
- (T10) *Si* $x \leq y$ *entonces* $T_h x \leq T_h y$, *para* $1 \leq h \leq n-1$,
- (T11) *Los conjuntos* $\mathcal{T}_h = \{T_h e_j : 0 \leq j \leq n-1\}$ *son cadenas de* $B(L)$, *para* $1 \leq h \leq n-1$,
- (T12) $T_h e_i \wedge T_k e_j \geq T_{min\{h,k\}} e_{min\{i,j\}}$,
- (T13) $T_h e_i \vee T_k e_j \leq T_{max\{h,k\}} e_{max\{i,j\}}$,
- (T14) $T_1 x \leq y \Rightarrow x$,
- (T15) *Si* $T_i x = x$, $1 \leq i \leq n-1$, *entonces* $x \in B(L)$,
- (T16) *Si* $i + j \geq n$ *entonces* $T_i e_j = \overline{e_j}$,
- (T17) *Si* $j < n-1$ *entonces* $T_1 e_j = !e_j$.

Dem. Por definición se verifica (1).
Sea $D_i x = \overline{x} \wedge (e_i \Rightarrow x)$, para $1 \leq i \leq n-1$, entonces:

$$\text{(I)} \qquad\qquad x = \bigvee_{i=1}^{n-1} (D_i x \wedge e_i).$$

A los efectos de facilitar la lectura de estas notas vamos a reproducir la demostración de (I), dada por J. Klukowski y M. Zworski, en [8].

Si $x \in L$, sea $x = \bigvee_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i)$ una representación monótona de x, luego $e_i \wedge b_i \leq x$, para $1 \leq i \leq n-1$, y en consecuencia $b_i \leq e_i \Rightarrow x$. Por lo tanto $b_i \wedge e_i \leq (e_i \Rightarrow x) \wedge e_i$, de donde

$$x = \bigvee_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i) \leq \bigvee_{i=1}^{n-1} ((e_i \Rightarrow x) \wedge e_i)$$

y entonces

$$x = \overline{x} \wedge x \leq \overline{x} \wedge \bigvee_{i=1}^{n-1} ((e_i \Rightarrow x) \wedge e_i) =$$

$$\bigvee_{i=1}^{n-1} (\overline{x} \wedge (e_i \Rightarrow x) \wedge e_i) = \bigvee_{i=1}^{n-1} (D_i x \wedge e_i).$$

Por definición tenemos que $(e_i \Rightarrow x) \wedge e_i \leq x$, luego

$$\bigvee_{i=1}^{n-1} ((e_i \Rightarrow x) \wedge e_i) \leq x$$

y por lo tanto

$$\bigvee_{i=1}^{n-1} (\overline{x} \wedge (e_i \Rightarrow x) \wedge e_i) = (\bigvee_{i=1}^{n-1} ((e_i \Rightarrow x) \wedge e_i)) \wedge \overline{x} \leq x \wedge \overline{x} = x$$

esto es

$$\bigvee_{i=1}^{n-1} (D_i x \wedge e_i) \leq x.$$

Por lo tanto

$$x = \bigvee_{i=1}^{n-1} (D_i x \wedge e_i).$$

Como $T_i x = D_{n-i} x$, para $1 \leq i \leq n-1$ entonces $T_{n-i} x = D_{n-(n-i)} x = D_i x$, luego:

$$x = \bigvee_{i=1}^{n-1} (T_{n-i} x \wedge e_i).$$

(T1) Si $i \leq j$, $1 \leq i, j \leq n-1$ entonces $n-j \leq n-i$, por lo tanto $e_{n-j} \leq e_{n-i}$ y usando (B6), $e_{n-i} \Rightarrow x \leq e_{n-j} \Rightarrow x$, luego

$$T_i x = \overline{x} \wedge (e_{n-i} \Rightarrow x) \leq \overline{x} \wedge (e_{n-j} \Rightarrow x) = T_j x.$$

(T2) Por (B12) y (B14) tenemos
$T_i(x \vee y) = (\overline{x \vee y}) \wedge (e_{n-i} \Rightarrow (x \vee y)) = (\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge ((e_{n-i} \Rightarrow x) \vee (e_{n-i} \Rightarrow y)) =$
$(\overline{x} \wedge (e_{n-i} \Rightarrow x)) \vee (\overline{y} \wedge (e_{n-i} \Rightarrow y)) \vee (\overline{x} \wedge (e_{n-i} \Rightarrow y)) \vee (\overline{y} \wedge (e_{n-i} \Rightarrow x)) =$
$T_i x \vee T_i y \vee (\overline{x} \wedge (e_{n-i} \Rightarrow y)) \vee (\overline{y} \wedge (e_{n-i} \Rightarrow x))$.
Por (B18), $(\overline{x} \wedge (e_{n-i} \Rightarrow y)) \vee (\overline{y} \wedge (e_{n-i} \Rightarrow x)) \leq T_i x \vee T_i y$. Luego $T_i(x \vee y) = T_i x \vee T_i y$.

(T3) Por (B16) y (B5) resulta
$T_i(x \wedge y) = (\overline{x \wedge y}) \wedge (e_{n-i} \Rightarrow (x \wedge y)) = \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge (e_{n-i} \Rightarrow x) \wedge (e_{n-i} \Rightarrow y) = \overline{x} \wedge (e_{n-i} \Rightarrow x) \wedge \overline{y} \wedge (e_{n-i} \Rightarrow y) = T_i x \wedge T_i y$.

(T4) Si $b \in B(L)$ entonces $b = \overline{b}$ luego, por (B3), resulta que $T_i b = \overline{b} \wedge (e_{n-i} \Rightarrow b) = b \wedge (e_{n-i} \Rightarrow b) = b$.

(T5) Es una consecuencia inmediata de (T4) dado que $0, 1 \in B(L)$.

(T6) Teniendo en cuenta (B2), $T_1 x = \overline{x} \wedge (e_{n-1} \Rightarrow x) = \overline{x} \wedge (1 \Rightarrow x) \leq \overline{x} \wedge x = x$.

(T7) De la hipótesis resulta que $x = \bigvee_{i=1}^{n-1} (T_{n-i}x \wedge e_i) \leq \bigvee_{i=1}^{n-1} (T_{n-i}y \wedge e_i) = y$.

(T8) Inmediato de (T7).

(T9) Por (T1) $T_j x \leq T_{n-1}x$, para todo j, $1 \leq j \leq n-1$, y como $T_{n-1}x \in B(L)$ de (T4) resulta $T_j x \leq T_j T_{n-1} x$, para todo j, $1 \leq j \leq n-1$ y por lo tanto de (T7) se tiene que $x \leq T_{n-1}x$.

(T10) Por hipótesis $x \wedge y = x$, luego de (T3) $T_i x \wedge T_i y = T_i(x \wedge y) = T_i x$, de donde $T_i x \leq T_i y$.

(T11) De $0 = e_0 < e_1 < \cdots < e_{n-2} < e_{n-1} = 1$ resulta por (T10) que $T_h e_0 \leq T_h e_1 \leq \cdots \leq T_h e_{n-2} \leq T_h e_{n-1}$, $1 \leq h \leq n-1$.

(T12) De $min\{h,k\} \leq h$ y $min\{h,k\} \leq k$ resulta por (T1) que $T_{min\{h,k\}} e_{min\{i,j\}} \leq T_h e_{min\{i,j\}}$ y $T_{min\{h,k\}} e_{min\{i,j\}} \leq T_k e_{min\{i,j\}}$. Luego

$$(1)\ T_{min\{h,k\}} e_{min\{i,j\}} \leq T_h e_{min\{i,j\}} \wedge T_k e_{min\{i,j\}}.$$

De $min\{i,j\} \leq i$ y $min\{i,j\} \leq j$ resulta por (T10) que $T_h e_{min\{i,j\}} \leq T_h e_i$ y $T_k e_{min\{i,j\}} \leq T_k e_j$ luego

$$(2)\ T_h e_{min\{i,j\}} \wedge T_k e_{min\{i,j\}} \leq T_h e_i \wedge T_k e_j.$$

De (1) y (2) resulta (T12).

(T13) Se prueba en forma análoga a (T12).

(T14) Usando (T6), $y \wedge T_1 x \leq T_1 x \leq x$ y como $T_1 x \in B(L)$ entonces $T_1 x \leq y \Rightarrow x$.

(T15) Inmediato, pues $T_i x \in B(L)$.

(T16) Si $i + j \geq n$ entonces $e_{n-i} \leq e_j$ luego $T_i e_j = \overline{e_j} \wedge (e_{n-i} \Rightarrow e_j) = \overline{e_j} \wedge 1 = \overline{e_j}$. En particular, $T_i e_{n-i} = \overline{e_{n-i}}$.

(T17) Supongamos que $j < n-1$ entonces $T_1 e_j = \overline{e_j} \wedge (e_{n-1} \Rightarrow e_j) = \overline{e_j} \wedge (1 \Rightarrow e_j) = \overline{e_j} \wedge !e_j$. Luego usando (B8) y (B2), $(1 \Rightarrow e_j) \wedge (e_j \Rightarrow 0) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 0$, por lo tanto $(1 \Rightarrow e_j) \wedge (e_j \Rightarrow 0) = 0$ y como $1 \Rightarrow e_j, e_j \Rightarrow 0 \in B(L)$ por (B11) se tiene que $!e_j = 1 \Rightarrow e_j \leq -(e_j \Rightarrow 0) = \overline{e}_j$, de donde $T_1 e_j = !e_j$.

■

De ahora en adelante representaremos con L y L', P_0P-reticulados de orden n con cadenas base

$$E_n = \{e_0 = 0, e_1, \ldots, e_{n-1} = 1\} \text{ y } E'_n = \{e'_0 = 0', e'_1, \ldots, e'_{n-1} = 1'\},$$

respectivamente, donde :

$$B(L) \cap E_n = \{0, 1\} \text{ y } B(L') \cap E'_n = \{0', 1'\}. \tag{6.11}$$

Si $H : L \to L'$ es un R-homomorfismo entonces claramente

$$0' = H(0), H(e_1), \ldots, H(e_{n-2}), H(e_{n-1}) = 1'$$

es una cadena de L', pero no necesariamente

$$H(e_1), \ldots, H(e_{n-2}) \notin B(L').$$

En efecto, consideremos los reticulados L_2 y L_1 indicados en los Ejemplos 2.2 y 2.1. Ambos, son P_0P-reticulados de orden 3 con cadenas base $e_0 = 0, e_1 = c, e_2 = 1$ y $e'_0 = 0, e'_1 = b, e'_2 = 1$, respectivamente.
Sea $H : L_2 \to L_1$ definida por $H(0) = H(a) = H(b) = H(c) = 0$, $H(d) = H(f) = a$, $H(e) = H(g) = d$ y $H(1) = 1$. Entonces $H(e_1) = H(c) = 0 \in B(L_1)$.

Definición 6.1 *Se dice que $H : L \to L'$ es un P_0P-homomorfismo si H es un R-homomorfismo de L en L' que verifica:*

H$_1$) $H(e_1), \ldots, H(e_{n-2}) \notin B(L')$,

H$_2$) $H(x \Rightarrow y) = H(x) \Rightarrow H(y)$.

Si H es epiyectiva entonces se dice que H es un P_0P-epimorfismo. Si H es además inyectiva se dice que H es un P_0P-isomorfismo. A todo P_0P-isomorfismo de L en L se denomina P_0P-automorfismo.

Notaremos:

- $Epi(L, L')$ al conjunto de todos los P_0P-epimorfismos de L en L',
- $Epi(B(L), B(L'))$ al conjunto de todos los B-epimorfismos de $B(L)$ en $B(L')$,
- $Epi^{(E_n, E'_n)}(L, L')$ al siguiente conjunto

$$\{H \in Epi(L, L') : H(e_j) = e'_j, \text{ para } 1 \leq j \leq n-1\}.$$

- $Epi^{(T\,E_n, T\,E'_n)}(B(L), B(L'))$ al siguiente conjunto

$$\{h \in Epi(B(L), B(L')) : h(T_k e_j) = T_k e'_j, \text{ para } 1 \leq k \leq n-1,\ 0 \leq j \leq n-1\}.$$

Lema 6.2 *Si $H \in Epi^{(E_n,E'_n)}(L, L')$ y $h = H_{|B(L)}$ entonces:*

(A) $H(\overline{x}) = \overline{H(x)}$, *cualquiera que sea $x \in L$,*

(B) $h \in Epi(B(L), B(L'))$,

(C) $H(T_k x) = T_k H(x)$, $1 \leq k \leq n-1$,

(D) $H(T_k e_j) = h(T_k e_j) = T_k e'_j$, $1 \leq k \leq n-1$, $0 \leq j \leq n-1$,

(E) $h \in Epi^{(TE_n,TE'_n)}(B(L), B(L'))$,

(F) $H(e_i) \notin B(L')$, *para* $1 \leq i \leq n-2$,

Dem.

(A) Por (B11), el Lema 6.4 y la hipótesis resulta $H(\overline{x}) = H(-(x \Rightarrow 0)) = -H(x \Rightarrow 0) = -(H(x) \Rightarrow H(0)) = -(H(x) \Rightarrow 0') = \overline{H(x)}$.

(B) Dado (1) $b' \in B(L')$ como H es un P_0P-epimorfismo existe $x \in L$ tal que $H(x) = b'$. Por (A) tenemos $H(\overline{x}) = \overline{H(x)} = \overline{b'}$ y de (1), $\overline{b'} = b'$. Luego $H(\overline{x}) = b'$ y como $\overline{x} \in B(L)$, h es epiyectiva.

(C) En efecto, por hipótesis $H(T_k x) = H(\overline{x} \wedge (e_{n-k} \Rightarrow x)) = H(\overline{x}) \wedge H(e_{n-k} \Rightarrow x) = H(\overline{x}) \wedge (H(e_{n-k}) \Rightarrow H(x)) = H(\overline{x}) \wedge (e'_{n-k} \Rightarrow H(x))$. Luego por (A) $H(T_k x) = \overline{H(x)} \wedge (e'_{n-k} \Rightarrow H(x)) = T_k H(x)$.

(D) Como $T_k e_j \in B(L)$, de (C) y la hipótesis se tiene $h(T_k e_j) = H(T_k e_j) = T_k H(e_j) = T_k e'_j$.

(E) Inmediato de (B) y (D).

(F) Por hipótesis $H(e_i) = e'_i$, para $1 \leq i \leq n-2$ y por (6.11) $e'_i \notin B(L')$, para $1 \leq i \leq n-2$.

■

Teorema 6.1 *Si $h \in Epi^{(TE_n,TE'_n)}(B(L), B(L'))$ entonces la transformación $H : L \to L'$ definida por:*

$$H(x) = \bigvee_{i=1}^{n-1} (h(T_{n-i}x) \wedge e'_i)$$

verifica:

(A) $H(b) = h(b)$, *para todo* $b \in B(L)$,

(B) *H es un R-epimorfismo que verifica*

(B1) $H(e_j) = e'_j$,

(B2) $H(e_j) \notin B(L')$, *para* $1 \leq j \leq n-2$,

(B3) $H(x \Rightarrow y) \leq H(x) \Rightarrow H(y)$.

(C) $T_k H(x) = h(T_k x) = H(T_k x)$, $1 \leq k \leq n-1$.

(D) *Si* $H' \in Epi^{(E_n, E'_n)}(L, L')$ *verifica* $H'(b) = h(b)$, *para todo* $b \in B(L)$ *entonces* $H' = H$.

Dem.

(A) Si $b \in B(L)$ entonces por (T4) $T_k b = b$, $1 \leq k \leq n-1$. Luego

$$H(b) = \bigvee_{i=1}^{n-1} (h(T_{n-i} b) \wedge e'_i) = \bigvee_{i=1}^{n-1} (h(b) \wedge e'_i) = h(b) \ \wedge \bigvee_{i=1}^{n-1} e'_i = h(b) \ \wedge 1' = h(b).$$

(B) De (A) resulta en particular que: (H0) $H(0) = 0'$ y (H1) $H(1) = 1'$.
(H3) $\underline{H(x \wedge y) = H(x) \wedge H(y).}$

Como por (T1) $T_{n-1}x \geq T_{n-2}x \geq \cdots \geq T_1 x$, $T_i x \in B(L)$, $1 \leq i \leq n-1$ y h es un homomorfismo booleano entonces $h(T_{n-1}x) \geq h(T_{n-2}x) \geq \cdots \geq h(T_1 x)$ y $h(T_i x) \in B(L')$, $1 \leq i \leq n-1$. Luego $\bigvee_{i=1}^{n-1} (h(T_{n-i}x) \wedge e'_i)$ es una representación monótona de $H(x)$.

Análogamente $\bigvee_{i=1}^{n-1} (h(T_{n-i}y) \wedge e'_i)$ es una representación monótona de $H(y)$. Luego por lo indicado en la Observación 1.2:

$$(1) \ \ H(x) \ \wedge H(y) = \bigvee_{i=1}^{n-1} (h(T_{n-i}x) \ \wedge h(T_{n-i}y) \wedge e'_i).$$

Por otro lado, de (T3) resulta que (2) $H(x \ \wedge y) = \bigvee_{i=1}^{n-1} (h(T_{n-i}(x \ \wedge y)) \wedge e'_i) =$

$$\bigvee_{i=1}^{n-1} (h(T_{n-i}x \ \wedge T_{n-i}y) \ \wedge e'_i) = \bigvee_{i=1}^{n-1} (h(T_{n-i}x) \ \wedge h(T_{n-i}y) \ \wedge e'_i).$$

De (1) y (2) se verifica (H3).

(H4) $\underline{H(x \vee y) = H(x) \vee H(y).}$

$$H(x \ \vee y) = \bigvee_{i=1}^{n-1} (h(T_{n-i}(x \ \vee y)) \wedge e'_i) = \bigvee_{i=1}^{n-1} (h(T_{n-i}x \ \vee T_{n-i}y) \wedge e'_i) =$$

$$\bigvee_{i=1}^{n-1} ((h(T_{n-i}x) \ \vee h(T_{n-i}y)) \wedge e'_i) = \bigvee_{i=1}^{n-1} ((h(T_{n-i}x) \ \wedge e'_i) \vee (h(T_{n-i}y) \wedge e'_i)) =$$

$$\bigvee_{i=1}^{n-1} (h(T_{n-i}x) \ \wedge e'_i) \ \vee \bigvee_{i=1}^{n-1} (h(T_{n-i}y) \wedge e'_i) = H(x) \ \vee H(y).$$

$\underline{H \text{ es sobreyectiva}}$.

Dado $y \in L'$, por el Lema 6.1 $y = \bigvee_{j=1}^{n-1} (T_{n-j}y \wedge e'_j)$. Como $T_j y \in B(L')$, $1 \leq j \leq n-1$ y

h es un B-epimorfismo entonces existen $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1} \in B(L)$ tales que $h(b_j) = T_j y$, para $1 \leq j \leq n-1$.

Sean $z_j = \bigvee_{i=1}^{j} b_i \in B(L)$, $1 \leq j \leq n-1$, luego $z_1 \leq z_2 \leq \cdots \leq z_{n-1}$ y por (T4) $T_k z_j = z_j$, para $1 \leq k, j \leq n-1$. Por lo tanto teniendo en cuenta (T1) $h(z_j) = h(\bigvee_{i=1}^{j} b_i) = \bigvee_{i=1}^{j} h(b_i) = \bigvee_{i=1}^{j} T_i y = T_j y$, para $1 \leq j \leq n-1$.

Sea $x = \bigvee_{j=1}^{n-1} (z_{n-j} \wedge e_j)$, luego por (T2) y (T3), si $1 \leq k \leq n-1$:

$$T_k x = \bigvee_{j=1}^{n-1} (T_k z_{n-j} \wedge T_k e_j) = \bigvee_{j=1}^{n-1} (z_{n-j} \wedge T_k e_j).$$

De la hipótesis y (T4) resulta

$$h(T_k x) = h(\bigvee_{j=1}^{n-1} (z_{n-j} \wedge T_k e_j)) = \bigvee_{j=1}^{n-1} h(z_{n-j} \wedge T_k e_j) = \bigvee_{j=1}^{n-1} (h(z_{n-j}) \wedge h(T_k e_j)) =$$

$$\bigvee_{j=1}^{n-1} (T_{n-j} y \wedge T_k e'_j) = T_k \bigvee_{j=1}^{n-1} (T_{n-j} y \wedge e'_j) = T_k y.$$

Luego $H(x) = \bigvee_{i=1}^{n-1} (h(T_{n-i} x) \wedge e'_i) = \bigvee_{i=1}^{n-1} (T_{n-i} y \wedge e'_i) = y$.

(B1) En efecto, por el Lema 6.1 (2) sabemos que $e'_j = \bigvee_{i=1}^{n-1} (T_{n-i} e'_j \wedge e'_i)$. Como por hipótesis $h(T_{n-i} e_j) = T_{n-i} e'_j$ entonces $e'_j = \bigvee_{i=1}^{n-1} (h(T_{n-i} e_j) \wedge e'_i)$ y teniendo en cuenta la definición de H resulta que $H(e_j) = e'_j$.

(B2) Es una consecuencia inmediata de (B_1) y (6.11).

(B3) Como $x \wedge (x \Rightarrow y) \leq y$ entonces:
(1) $H(x) \wedge H(x \Rightarrow y) = H(x \wedge (x \Rightarrow y)) \leq H(y)$.
Como $x \Rightarrow y \in B(L)$ entonces (2) $H(x \Rightarrow y) \in B(L')$. De (1) y (2) resulta que

$$H(x \Rightarrow y) \leq H(x) \Rightarrow H(y).$$

(C)

$$T_k H(x) = T_k \bigvee_{i=1}^{n-1} (h(T_{n-i} x) \wedge e'_i)$$

luego por (T2) y (T3)

$$T_k H(x) = \bigvee_{i=1}^{n-1} (T_k h(T_{n-i} x) \wedge T_k e'_i).$$

Como $h(T_{n-i}x) \in B(L')$, para $1 \leq i \leq n-1$, entonces $T_k h(T_{n-i}x) = h(T_{n-i}x)$, para $1 \leq i \leq n-1$, por lo tanto

$$T_k H(x) = \bigvee_{i=1}^{n-1} (h(T_{n-i}x) \wedge T_k e'_i) = \bigvee_{i=1}^{n-1} (h(T_{n-i}x) \wedge h(T_k e_i)) =$$

$$h(\bigvee_{i=1}^{n-1} (T_{n-i}x \wedge T_k e_i)) = h(\bigvee_{i=1}^{n-1} T_k(T_{n-i}x \wedge e_i)) = h(T_k \bigvee_{i=1}^{n-1} (T_{n-i}x \wedge e_i)).$$

Como por el Lema 6.1 (2), $x = \bigvee\limits_{i=1}^{n-1} (T_{n-i}x \wedge e_i)$, por (A) resulta que

$$T_k H(x) = h(T_k x) = H(T_k x).$$

(D) De la hipótesis, (A) y (B1) se tiene que $H'(b) = h(b) = H(b)$, para todo $b \in B(L)$ y $H'(e_i) = e'_i = H(e_i)$, $1 \leq i \leq n-1$. Sea $x \in L$ y consideremos una representación monótona de x, $x = \bigvee\limits_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i)$, con $b_i \in B(L)$, para $1 \leq i \leq n-1$. Luego

$$H'(x) = H'(\bigvee_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i)) = \bigvee_{i=1}^{n-1} (H'(b_i) \wedge H'(e_i)) =$$

$$\bigvee_{i=1}^{n-1} (H(b_i) \wedge H(e_i)) = H(\bigvee_{i=1}^{n-1} (b_i \wedge e_i)) = H(x).$$

$\blacksquare$

Lema 6.3 *Si* $h \in Epi^{(T\,E_n, T\,E'_n)}(B(L), B(L'))$ *es biunívoca entonces la transformación* H *definida en el Teorema* 6.1 *verifica:*

(1) H *es biunívoca,*

(2) $H(x) \Rightarrow H(y) \leq H(x \Rightarrow y)$.

Dem. (1) Si $H(x) = H(y)$ entonces por el Teorema 6.1 (C) resulta $h(T_k x) = T_k H(x) = T_k H(y) = h(T_k y)$. Como h es biunívoca tenemos que $T_k x = T_k y$, para $1 \leq k \leq n-1$, luego por (T8) $x = y$.

(2) Sea $b' = H(x) \Rightarrow H(y) \in B(L')$. Como h es sobreyectiva entonces existe $b \in B(L)$ tal que $h(b) = b'$, luego $H(b) = h(b) = b'$. Por lo tanto

$$H(x \wedge b) = H(x) \wedge H(b) = H(x) \wedge (H(x) \Rightarrow H(y)) \leq H(y)$$

y como H es biunívoca $x \wedge b \leq y$, de donde resulta $b \leq x \Rightarrow y$. Luego

$$H(x) \Rightarrow H(y) = b' = H(b) \leq H(x \Rightarrow y).$$

$\blacksquare$

Definición 6.2 *Si B y B' son álgebras de Boole, a toda transformación $h : L \to L'$ que verifica* h0) $h(0) = 0'$, h1) $h(1) = 1'$, h2) $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$, h3) $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$ *y* h4) $h(-x) = -h(x)$ *se denomina un B-homomorfismo, si h es suryectiva se denomina B-epimorfismo. Si h es además inyectiva se denomina B-isomorfismo y notaremos $B \cong B'$. A todo B-isomorfismo de B en B se denomina B-automorfismo.*

Lema 6.4 *Si L y L' son reticulados distributivos acotados, y $H : L \to L'$ un R-homomorfismo entonces $h = H_{|B(L)}$ es un B-homomorfismo de $B(L)$ en $B(L')$.*

Dem. Si $b \in B(L)$ entonces existe $c \in B(L)$ tal que $b \wedge c = 0$ y $b \vee c = 1$, luego por H0), H1), H2) y H3) tenemos que:

$$(1)\ \ H(b) \wedge H(c) = H(b \wedge c) = H(0) = 0'$$

y

$$(2)\ \ H(b) \vee H(c) = H(b \vee c) = H(1) = 1'.$$

De (1) y (2) resulta que $H(c)$ es el complemento booleano de $H(b)$ en L', luego $H(b) \in B(L')$ y $h(-b) = -h(b)$. Por lo tanto $h = H_{|B(L)}$ es un B-homomorfismo. ■

Sea L un P_0-reticulado finito no trivial, de orden n. Notaremos $\mathbf{p}(L)$ al conjunto de sus elementos primos. Por el Teorema 5.1 sabemos que el conjunto $\mathbf{p}(L)$ es la unión disjunta de cadenas con a lo sumo $n-1$ elementos cada una.
Si $x \in L$, notaremos $\mathbf{p}(x) = \{p \in \mathbf{p}(L) : p \leq x\}$. Luego $\mathbf{p}(0) = \emptyset$ y si $x \neq 0$ entonces $x = \bigvee\limits_{p \in \mathbf{p}(x)} p$.

Lema 6.5 *Si L es un reticulado finito no trivial y $e_0 = 0, e_1, \ldots, e_{n-1} = 1$ son elementos de L tales que $e_0 = 0 < e_1 < \cdots < e_{n-1} = 1$, entonces*

$$\{\mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i)\}_{i=0}^{n-2}$$

es una partición de $\mathbf{p}(L)$, donde $\mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i) = \mathbf{p}(e_{i+1}) \cap \complement_{\mathbf{p}(L)}\mathbf{p}(e_i)$.

Dem. <u>(I) $\mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i) \neq \emptyset$, para $0 \leq i \leq n-2$.</u>

Como $\mathbf{p}(e_0) = \emptyset$ entonces $\mathbf{p}(e_1) \setminus \mathbf{p}(e_0) = \mathbf{p}(e_1)$. Como $e_i \neq 0$ para $1 \leq i \leq n-1$ entonces $\mathbf{p}(e_i) \neq \emptyset$. Si $\mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i) = \mathbf{p}(e_{i+1}) \cap \complement_{\mathbf{p}(L)}\mathbf{p}(e_i) = \emptyset$, para $0 \leq i \leq n-2$ entonces $\mathbf{p}(e_{i+1}) \subseteq \mathbf{p}(e_i)$ y por lo tanto $e_{i+1} \leq e_i$, absurdo.

<u>(II) $\bigcup\limits_{i=0}^{n-2} (\mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i)) = \mathbf{p}(L)$.</u>

$$\bigcup_{i=0}^{n-2}(\mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i)) = \bigcup_{i=0}^{n-2}(\mathbf{p}(e_{i+1}) \cap \complement_{\mathbf{p}(L)}\mathbf{p}(e_i)) =$$

$$(\mathbf{p}(e_1) \cap \complement_{\mathbf{p}(L)}\mathbf{p}(e_0)) \cup \bigcup_{i=1}^{n-2}(\mathbf{p}(e_{i+1}) \cap \complement_{\mathbf{p}(L)}\mathbf{p}(e_i)) =$$

$$\mathbf{p}(e_1) \cup (\mathbf{p}(e_2) \cap \complement_{\mathbf{p}(L)}\mathbf{p}(e_1)) \cup \bigcup_{i=2}^{n-2}(\mathbf{p}(e_{i+1}) \cap \complement_{\mathbf{p}(L)}\mathbf{p}(e_i)) = \cdots = \bigcup_{i=0}^{n-2} \mathbf{p}(e_{i+1}) = \mathbf{p}(L).$$

(III) Si $i \neq j,\ 0 \leq i, j \leq n-2$ entonces $(\mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i)) \cap (\mathbf{p}(e_{j+1}) \setminus \mathbf{p}(e_j)) = \emptyset$.

Si $(\mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i)) \cap (\mathbf{p}(e_{j+1}) \setminus \mathbf{p}(e_j)) \neq \emptyset$, esto es,

$$(\mathbf{p}(e_{i+1}) \cap \complement_{\mathbf{p}(L)} \mathbf{p}(e_i)) \cap (\mathbf{p}(e_{j+1}) \cap \complement_{\mathbf{p}(L)} \mathbf{p}(e_j)) \neq \emptyset$$

entonces existe $p \in \mathbf{p}(L)$ tal que

$$p \in (\mathbf{p}(e_{i+1}) \cap \complement_{\mathbf{p}(L)} \mathbf{p}(e_i)) \cap (\mathbf{p}(e_{j+1}) \cap \complement_{\mathbf{p}(L)} \mathbf{p}(e_j)) = \mathbf{p}(e_{i+1}) \cap \mathbf{p}(e_{j+1}) \cap \complement_{\mathbf{p}(L)} (\mathbf{p}(e_i) \cup \mathbf{p}(e_j)).$$

Como $i \neq j$ entonces $i < j$ ó $j < i$. Supongamos que $i < j$ luego $i+1 < j+1$ y por lo tanto

$$\mathbf{p}(e_{i+1}) \cap \mathbf{p}(e_{j+1}) \cap \complement_{\mathbf{p}(L)} (\mathbf{p}(e_i) \cup \mathbf{p}(e_j)) = \mathbf{p}(e_{i+1}) \cap \complement_{\mathbf{p}(L)} \mathbf{p}(e_j)$$

entonces $p \in \mathbf{p}(e_{i+1})$ y $p \notin \mathbf{p}(e_j)$, pero $i+1 \leq j$ luego $\mathbf{p}(e_{i+1}) \subseteq \mathbf{p}(e_j)$, absurdo. ■

Lema 6.6 *Si L es un reticulado finito no trivial, y $e_0 = 0, e_1, \ldots, e_{n-1} = 1$ son elementos de L tales que $e_0 = 0 < e_1 < \cdots < e_{n-1} = 1$, H un R-automorfismo de L tal que $H(e_i) = e_i$, $0 \leq i \leq n-1$, y $h = H_{|\mathbf{p}(L)}$ entonces*

(HA) *h es isomorfismo de orden de $\mathbf{p}(L)$,*

(HB) *$h(\mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i)) = \mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i)$, para $0 \leq i \leq n-2$.*

Dem. Es bien conocido que se verifica (HA).

(HB) Si $p \in \mathbf{p}(L)$ es tal que $p \in h(\mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i))$ entonces $p = h(q)$ con $q \in \mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i)$, es decir, $q \leq e_{i+1}$ y $q \not\leq e_i$. Luego $p = h(q) = H(q) \leq H(e_{i+1}) = e_{i+1}$.
Si $p \leq e_i$ entonces $H(q) = h(q) = p \leq e_i = H(e_i)$ y como H es un R-isomorfismo $q \leq e_i$, absurdo. Luego $p \not\leq e_i$.
Si $p \in \mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i)$ entonces (1) $p \leq e_{i+1}$ y (2) $p \not\leq e_i$. Como h es un isomorfismo de orden existe $q \in \mathbf{p}(L)$ tal que $h(q) = p$. Por (1) resulta $H(q) = h(q) = p \leq e_{i+1} = H(e_{i+1})$, luego como H es un R-automorfismo $q \leq e_{i+1}$. Por (2) $H(q) = h(q) = p \not\leq e_i = H(e_i)$ entonces como H es un R-automorfismo $q \not\leq e_i$. Por lo tanto $q \in \mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i)$ y en consecuencia $p = h(q) \in h(\mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i))$.

■

Lema 6.7 *Si h es isomorfismo de orden de $\mathbf{p}(L)$, entonces la condición* (HB) *del lema precedente es equivalente a* (HC)*: $h(\mathbf{p}(e_i)) = \mathbf{p}(e_i)$, para $1 \leq i \leq n-1$.*

Dem. (HB) $\Rightarrow$ (HC).

En efecto, $h(\mathbf{p}(e_1) \setminus \mathbf{p}(e_0)) = \mathbf{p}(e_1) \setminus \mathbf{p}(e_0)$, y como $\mathbf{p}(e_0) = \emptyset$ tenemos (1) $h(\mathbf{p}(e_1)) = \mathbf{p}(e_1)$. De (HB) y (1) resulta

$$h(\mathbf{p}(e_2)) = h((\mathbf{p}(e_2) \setminus \mathbf{p}(e_1)) \cup \mathbf{p}(e_1)) = h(\mathbf{p}(e_2) \setminus \mathbf{p}(e_1)) \cup h(\mathbf{p}(e_1)) =$$

$$(\mathbf{p}(e_2) \setminus \mathbf{p}(e_1)) \cup \mathbf{p}(e_1) = \mathbf{p}(e_2).$$

En forma análoga se prueba que $h(\mathbf{p}(e_i)) = \mathbf{p}(e_i)$, para $3 \leq i \leq n-1$.

(HC) $\Rightarrow$ (HB).

En efecto, $h(\mathbf{p}(e_1) \setminus \mathbf{p}(e_0)) = h(\mathbf{p}(e_1)) = \mathbf{p}(e_1) = \mathbf{p}(e_1) \setminus \mathbf{p}(e_0)$,
Por hipótesis $h(\mathbf{p}(e_{i+1})) = \mathbf{p}(e_{i+1})$, para $0 \leq i \leq n-2$, luego $\complement_{\mathbf{p}(L)} h(\mathbf{p}(e_i)) = \complement_{\mathbf{p}(L)} \mathbf{p}(e_i)$, para $1 \leq i \leq n-1$, por lo tanto

$$h(\mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i)) = h(\mathbf{p}(e_{i+1})) \cap \complement_{\mathbf{p}(L)} h(\mathbf{p}(e_i)) = \mathbf{p}(e_{i+1}) \cap \complement_{\mathbf{p}(L)} \mathbf{p}(e_i) = \mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i).$$

■

Si H es un P_0P-automorfismo de L tal que (HE): $H(e_i) = e_i$, $0 \leq i \leq n-1$, y $h = H_{|\mathbf{p}(L)}$ notaremos $\varphi(H) = h$.
Si H_1, H_2 son P_0P-automorfismos de L tales que $H_1(e_i) = H_2(e_i) = e_i$ y $H_1 \neq H_2$, $h_1 = H_{1|\mathbf{p}(L)}$, $h_2 = H_{2|\mathbf{p}(L)}$ entonces $h_1 \neq h_2$.
En efecto, por hipótesis existe $x \in L \setminus \{0\}$ tal que $H_1(x) \neq H_2(x)$.
Si $h_1 = h_2$ entonces

$$H_1(x) = H_1(\bigvee_{p \in \mathbf{p}(x)} p) = \bigvee_{p \in \mathbf{p}(x)} h_1(p) = \bigvee_{p \in \mathbf{p}(x)} h_2(p) = H_2(\bigvee_{p \in \mathbf{p}(x)} p) = H_2(x).$$

Lema 6.8 *Si L es un P_0P-reticulado finito no trivial, de orden n con cadena base $e_0 = 0 < e_1 < \cdots < e_{n-1} = 1$, h un isomorfismo de orden de $\mathbf{p}(L)$ que verifica la condición* (HB) *indicada en el Lema 6.6, y*

$$H_h(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ \bigvee\limits_{p \in \mathbf{p}(x)} h(p), & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

entonces H_h es un P_0P-automorfismo de L, tal que $H_h(e_i) = e_i$, $0 \leq i \leq n-1$, y $H_h(p) = h(p)$, para todo $p \in \mathbf{p}(L)$.

Dem. Es bien conocido que H_h es un R-automorfismo del reticulado L.
$H_h(e_0) = H_h(0) = 0$, $H_h(e_{n-1}) = H_h(1) = \bigvee\limits_{p \in \mathbf{p}(1)} h(p) = \bigvee\limits_{p \in \mathbf{p}(L)} p = 1 = e_{n-1}$.

Como $\mathbf{p}(e_i) = h(\mathbf{p}(e_i))$ esto es

$$\{p \in \mathbf{p}(L) : p \leq e_i\} = \{h(q) \in \mathbf{p}(L) : q \in \mathbf{p}(e_i),\ q \leq e_i\}$$

entonces

$$e_i = \bigvee_{p \in \mathbf{p}(e_i)} p = \bigvee_{q \in \mathbf{p}(e_i)} h(q) = H_h(e_i).$$

Probemos que $H_{h|\mathbf{p}(L)} = h$. Si $q \in \mathbf{p}(L)$ entonces

$$H_{h|\mathbf{p}(L)}(q) = H_h(q) = \bigvee_{p \in \mathbf{p}(q)} h(p).$$

Si $p \in \mathbf{p}(q)$, esto es, $p \leq q$ entonces $h(p) \leq h(q)$. Luego

$$h(q) \leq \bigvee_{p \in \mathbf{p}(q)} h(p) \leq h(q),$$

es decir, $H_h(q) = h(q)$.

Como H_h es un R-automorfismo de L, entonces $H_{h|B(L)}$ es un automorfismo booleano.
(I) $H_h(x \Rightarrow y) \leq H_h(x) \Rightarrow H_h(y)$.

Como $x \wedge (x \Rightarrow y) \leq y$ entonces

$$(1) \quad H_h(x) \wedge H_h(x \Rightarrow y) = H_h(x \wedge (x \Rightarrow y)) \leq H_h(y).$$

Como $x \Rightarrow y \in B(L)$ entonces (2) $H_h(x \Rightarrow y) \in B(L)$. De (1) y (2) resulta (I).

(II) $H_h(x) \Rightarrow H_h(y) \leq H_h(x \Rightarrow y)$.

Sea $b' = H_h(x) \Rightarrow H_h(y) \in B(L)$. Como $H_{h|B(L)}$ es suryectiva existe $b \in B(L)$ tal que $H_{h|B(L)}(b) = b'$. Por lo tanto

$$H_h(x \wedge b) = H_h(x) \wedge H_h(b) = H_h(x) \wedge (H_h(x) \Rightarrow H_h(y)) \leq H_h(y)$$

y como H_h es biunívoca $x \wedge b \leq y$, luego $b \leq x \Rightarrow y$, de donde resulta
$H_h(x) \Rightarrow H_h(y) = b' = H_h(b) \leq H_h(x \Rightarrow y)$. ■

Si h es un automorfismo de orden de $\mathbf{p}(L)$ que verifica (HB), notaremos $\varphi(h) = H_h$. φ es inyectiva. En efecto, si h_1, h_2 son dos automorfismos de orden de $\mathbf{p}(L)$ diferentes, esto es existe $p \in \mathbf{p}(L)$ tal que $h_1(p) \neq h_2(p)$, entonces $H_{h_1}(p) = h_1(p) \neq h_2(p) = H_{h_2}(p)$.

Si H es un P_0P-automorfismo de L que verifica $H(e_i) = e_i$, para $0 \leq i \leq n-1$ por el Lema 6.6 sabemos que $h = H_{|\mathbf{p}(L)}$ es un automorfismo de orden de $\mathbf{p}(L)$ que verifica (HB). Veamos que $\varphi(h) = H$, esto es que $H_h = H$. $H_h(0) = 0 = H(0)$ y si $x \neq 0$ $H_h(x) = \bigvee\limits_{p \in \mathbf{p}(x)} h(p) = \bigvee\limits_{p \in \mathbf{p}(x)} H(p) = H(\bigvee\limits_{p \in \mathbf{p}(x)} p) = H(x)$. Por lo tanto φ es una biyección.

Si A es un conjunto ordenado notaremos $Aut(A)$ al conjunto de todos los automorfismos de orden de A. Si $Aut^{(B)}(\mathbf{p}(L))$ es el conjunto de los automorfismos de $\mathbf{p}(L)$ que verifican (HB) y $Aut^{(E)}(L)$ el conjunto de los P_0P-automorfismos que verifican (HE) entonces

$$|Aut^{(B)}(\mathbf{p}(L))| = |Aut^{(E)}(L)|.$$

Si $h \in Aut^{(B)}(\mathbf{p}(L))$, sea h_i, $0 \leq i \leq n-2$, la restricción de h al conjunto $\mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i)$, para $0 \leq i \leq n-2$. Entonces para cada i, $1 \leq i \leq n-2$, h_i es un automorfismo de orden del conjunto ordenado $\mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i)$, que verifica $h_i(\mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i)) = \mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i)$, para $0 \leq i \leq n-2$.
Si $h' \in Aut^{(B)}(\mathbf{p}(L))$, es tal que $h' \neq h$, entonces existe $p \in \mathbf{p}(L)$ tal que $h'(p) \neq h(p)$. Como $p \in \mathbf{p}(L)$ entonces existe i, $0 \leq i \leq n-2$ tal que $p \in \mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i)$, luego $h'_i \neq h_i$.

Si g_i, para $0 \leq i \leq n-2$, son automorfismos de orden de $\mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i)$ que verifican $g_i(\mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i)) = \mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i)$, para $0 \leq i \leq n-2$, entonces la función ω de $\mathbf{p}(L)$ en $\mathbf{p}(L)$ definida por $\omega(p) = g_i(p)$ si y solo si $p \in \mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i)$, para $0 \leq i \leq n-2$, es un automorfismo de orden de $\mathbf{p}(L)$ que verifica (HB). Es claro que, la restrición ω_i, para $0 \leq i \leq n-2$, de ω al conjunto $\mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i)$ verifica $\omega_i = g_i$, para $0 \leq i \leq n-2$. Por lo tanto:

$$|Aut^{(E)}(L)| = |Aut^{(B)}(\mathbf{p}(L))| = \prod_{i=0}^{n-2} |Aut(\mathbf{p}(e_{i+1}) \setminus \mathbf{p}(e_i))|.$$

Si un conjunto ordenado A es la suma cardinal de cadenas K_i, $1 \leq i \leq m$, isomorfas a C_n y h es un automorfismo de orden de A entonces $h(K_i) = K_i$ ó $h(K_i) = K_j$ con $j \neq i$. Por lo tanto el conjunto $Aut(A)$ tiene $m!$ elementos.

Si L es un P_0P-reticulado finito, no trivial, entonces por el Teorema 4.1 $L = \prod_{i=1}^{r} C_{n_i}^{m_i}$, donde $1 < n_1 < n_2 < \cdots < n_r$ y por la Observación 3.1 (3), L es un P_0P-reticulado de orden n_r. Por lo tanto

$$|Aut^{(E)}(L)| \leq \prod_{i=1}^{r} |Aut(\mathbf{p}(C_{n_i}^{m_i}))| = \prod_{i=1}^{r} m_i!.$$

Referencias

[1] Burris S. and Sankappanavar H. P., *A course in universal algebra*, Spinger-Verlag New York Heindelberg Berlin, (1981).

[2] Cignoli R., *Algebras de Moisil de orden n*, Ph. D. Thesis, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina (1969).

[3] Cignoli R., *Moisil Algebras*, Notas de Lógica Matemática 27, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina (1970).

[4] Epstein G. and Horn A., *Chain based lattices*, Pacific J. Math. 55 (1974), 65-84.

[5] Epstein G. and Horn A., *P-algebras, an abstraction from Post algebras*, Algebra Universalis 4 (1974), 195-206.

[6] Monteiro L., *Algebras de Łukasiewicz trivalentes monádicas*, Notas de Lógica Matemática 32 (1974). INMABB-CONICET-UNS. (Tesis Doctoral).

[7] Monteiro L., *Algebras de Boole*, Informes Técnicos Internos 66 (1998). INMABB-CONICET-UNS.

[8] Klukowski J. and Zworski M., *On the representation of P_0-lattices being P-algebras*, Demonstratio Mat. 18 (1985), 103-114.

[9] Sikorski R., *Algebras de Boole*, Notas de Lógica Matemática 4, Instituto de Matemática, UNS, 1968.

[10] Tabash K. I., *Automorphisms of P_0P-lattices with a distinguished chain base*, Demonstratio Mathematica XXIII, 4 (1990), 829-840.

[11] Tabash K. I., *Automorphisms of P_0P-lattices*, Arab. J. Math. Sc. 8, number 2 (2002), 1-13.

[12] Traczyk T., *Axioms and some properties of Post algebras*, Colloq. Math. 10 (1963), 193-209.