Sucesiones graficales I

Luiz F. Monteiro (*), Aída Kremer (**) y Agustín Claverie (***)
(*) INMABB-C.O.N.I.C.E.T.-Universidad Nacional del Sur
(**) Departamento de Matemática-Universidad Nacional del Sur
(***) Laboratorio de Matemática - Departamento de Matemática-Universidad Nacional del Sur
luizmont@criba.edu.ar - akremer@uns.edu.ar - claverie@uns.edu.ar

Resumen

Las sucesiones graficales han sido estudiadas por diversos autores [1], [2], [3], [4, 5],[6], [8], [9], [10]. En particular con A. Claverie [7] obtuvimos diversos resultados sobre la determinación del cardinal del conjunto de las sucesiones graficales con n términos, $1 \leq n \leq 23$, utilizando métodos diferentes a los indicados en [9], [8], [1]. En estas notas indicamos resultados que simplifican los obtenidos en [1] sobre el cardinal del conjunto $S(n)$ de las sucesiones graficales con n términos, una fórmula para determinar $|S(n)|$ y como implementar un programa para el cálculo de $|S(n)|$. Los resultados teóricos fueron obtenidos por los dos primeros autores y la implementación de un programa en lenguaje C y los resultados numéricos por A. Claverie.

1. Introducción

Un grafo simple con n vértices es aquel que no tiene bucles y tal que a lo sumo existe una arista entre dos vértices.
Si G es un grafo simple con n vértices y v es un vértice de G entonces el grado de v, en notación $grad(v)$ es el número de aristas incidentes con v, luego como G no tiene bucles (C1): $0 \leq grad(v) \leq n-1$. Además (C2): $\sum\limits_{v \in G} grad(v)$ es un número par dado que $\sum\limits_{v \in G} grad(v) = 2|A|$, donde A es el conjunto de aristas de G.

Una sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de números enteros no negativos se dice una *sucesión de grado* de un grafo simple G si los vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de G pueden etiquetarse $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de forma tal que $gr(v_i) = x_i$ para $1 \leq i \leq n$.
Una sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de números enteros no negativos se dice una *sucesión grafical* si es la sucesión de grados de algún grafo simple.

Por lo indicado precedentemente toda sucesión grafical claramente verifica las condiciones (C1) y (C2). Sin embargo estas dos condiciones no implican que una sucesión que las verifique, sea grafical. Por ejemplo la sucesión $2, 0, 0$ verifica (C1) y (C2) y no existe ningún grafo simple con 3 vértices tal que uno de sus vértices tenga grado 2 y los restantes grado 0. En efecto, si $G = \{v_1, v_2, v_3\}$ y por ejemplo $grad(v_1) = 2$ entonces necesariamente v_1v_2 y v_1v_3 son aristas de G y por lo tanto $grad(v_2) \geq 1$, $grad(v_3) \geq 1$.

Para indicar una sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de números enteros no negativos vamos a utilizar la notación $x(n)$.

Claramente si $x(n)$ es una sucesión grafical entonces toda permutación de la misma es una sucesión grafical. Si G y G' son dos grafos simples con n vértices, notaremos $G \cong G'$ para indicar que ellos son isomorfos. Si G y G' son dos grafos simples con n vértices entonces $G \cong G'$ si y solo si la sucesión de grados de G es una permutación de la sucesión de grados de G'. Por lo tanto si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es la sucesión de grados de un grafo simple con n vértices, existe un grafo simple G' isomorfo a G cuya sucesión de grados $y_1, y_2, \ldots, y_n$ verifica $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$.

Si $n \in \mathbb{N}$ sea $V(n) = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $\mathbf{G}(V(n))$ el conjunto de todos los grafos simples con n vértices pertenecientes a $V(n)$.
Si $G \in \mathbf{G}(V(n))$ sea $C(G) = \{H \in \mathbf{G}(V(n)) : H \cong G\}$ y $\mathbf{G}(V(n))/\cong$ el conjunto cociente de $\mathbf{G}(V(n))$ por la relación de equivalencia $\cong$. Por lo indicado precedentemente cada clase de equivalencia puede representarse por una sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tal que $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$. Luego $|\mathbf{G}(V(n))/\cong|$ es el cardinal del conjunto de todos los grafos simples no isomorfos con n vértices.

Recordemos que un grafo simple con n vértices, $n \geq 2$, se dice completo si existe una arista para cada par de vértices distintos. Tal grafo se representa por U_n. Luego a U_n le corresponde la sucesión $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = n-1$ y $C(U_n) = \{U_n\}$. Un vértice v de un grafo simple se dice aislado si $grad(v) = 0$. Se denomina grafo simple nulo con n vértices al grafo que no tiene aristas, esto es todos sus vértices son aislados. Lo representaremos con P_n.

Es claro que si $n = 1$ entonces existe un único grafo simple con un vértice, esto es $\mathbf{G}(V(n)) = \{P_1\}$ y si $n = 2$ entonces $\mathbf{G}(V(2)) = \{P_2, U_2\}$ y como $U_2 \ncong P_2$ entonces $|\mathbf{G}(V(2))/\cong| = 2$.

El problema de determinar el cardinal del conjunto de los grafos simples no isomorfos con n vértices, $n \geq 2$, es equivalente (P. Erdös y T. Gallai [3]) a determinar el cardinal del conjunto $S(n)$ de todas las sucesiones $x(n)$ de enteros que verifican:

$$n-1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0, \tag{1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \ \text{ es un número par}, \tag{1.2}$$

$$A_x(j) = \sum_{k=1}^{j} x_k \leq B_x(j) = j(j-1) + \sum_{k=j+1}^{n} (j \wedge x_k) \ \text{ para } \ 1 \leq j \leq n-1. \tag{1.3}$$

$$\text{Esto es, existe una biyección } \Omega : S(n) \to \mathbf{G}(V(n))/\cong . \tag{1.4}$$

2. Resultados

Si $n \geq 2$ sean $S^{(0)}(n) = \{x(n) \in S(n) : x_n = 0\}$ y $S^{(\neq 0)}(n) = \{x(n) \in S(n) : x_n \neq 0\}$. Luego:

$$|S(n)| = |S^{(0)}(n)| + |S^{(\neq 0)}(n)|. \tag{2.1}$$

Es claro que $S^{(0)}(2)=\{0,0\}$, $S^{(\neq 0)}(2)=\{1,1\}$ luego

$$|S(2)|=2. \tag{2.2}$$

Dado $0\leq i\leq n-1$, sean

$S(n,i)=\{x(n)\in S(n): x_1=i\}$,

$S^{(0)}(n,i)=\{x(n)\in S(n,i): x_n=0\}$, $S^{(\neq 0)}(n,i)=\{x(n)\in S(n,i): x_n\neq 0\}$.

Como $S(n,i)$ es la unión disjunta de $S^{(0)}(n,i)$ y $S^{(\neq 0)}(n,i)$, entonces:

$$|S(n,i)|=|S^{(0)}(n,i)|+|S^{(\neq 0)}(n,i)|. \tag{2.3}$$

Luego

$$|S(n)|=\sum_{i=0}^{n-1}|S(n,i)|, \tag{2.4}$$

y

$$|S(n)|=\sum_{i=0}^{n-1}|S^{(0)}(n,i)|+\sum_{i=0}^{n-1}|S^{(\neq 0)}(n,i)|. \tag{2.5}$$

Es claro que:

$$|S^{(0)}(n,0)|=1,\ |S^{(\neq 0)}(n,0)|=0 \text{ y } |S(n,0)|=1, \quad \text{para} \quad n\geq 2. \tag{2.6}$$

Observación 2.1 *Si $x(n)$ es una sucesión tal que $x_1=i\geq\ldots,x_n\geq 1$, donde $1\leq i\leq n-1$ entonces $B_x(1)=\sum_{k=2}^{n}(1\wedge x_k)=n-1\geq i=A_x(1)$.*

Sea $n\geq 2$. Si existiera $x(n)\in S^{(0)}(n,n-1)$ entonces $A_x(1)=n-1$ y $B_x(1)=\sum_{k=2}^{n-1}(1\wedge x_k)\leq n-2$, luego $A_x(1)\nleq B_x(1)$ y por lo tanto

$$|S^{(0)}(n,n-1)|=0. \tag{2.7}$$

Luego

$$|S(n,n-1)|=|S^{(\neq 0)}(n,n-1)|. \tag{2.8}$$

Lema 2.1 $|S^{(\neq 0)}(n, n-1)| = |S(n-1)|$, *para* $n \geq 2$.

Dem. Sea $x(n-1) \in S(n-1)$ y $C(G) = \Omega(x(n-1))$ (ver (1.4)) donde G es un grafo simple con $n-1$ vértices. Sea $G' \in C(G)$ tal que su sucesión de grados verifica $grad(v_1) = x_1 \geq grad(v_2) = x_2 \geq \cdots \geq grad(v_{n-1}) = x_{n-1}$, consideremos el grafo $G_n = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ tal que $grad(v_i) = y_i = x_i$ para $1 \leq i \leq n-1$ y $grad(v_n) = 0$. La sucesión de grados $z_1, z_2, \ldots, z_n$ del grafo G_n^c (complemento de G_n) es $z_i = (n-1) - y_i$, $1 \leq i \leq n$. Observemos que $z_1 \geq 1$. En efecto, si $z_1 = 0$ entonces $0 = (n-1) - y_1$ y por lo tanto $y_1 = n-1$, absurdo pués $y_1 = x_1 \leq n-2$. Además $z_n = n-1$ luego $0 < z_1 \leq z_2 \leq \cdots \leq z_n = n-1$.
Sea $H \in C(G_n^c)$ tal que su sucesión de grados $w(n) = w_1, w_2, \ldots, w_n$ verifica $n-1 = w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n > 0$, luego $z(n) \in S^{(\neq 0)}(n, n-1)$.
Pongamos $\alpha(x(n-1)) = z(n)$, luego $\alpha : S(n-1) \to S^{(\neq 0)}(n, n-1)$. Claramente esta función es inyectiva. Veamos que es suryectiva. Sea $w(n) \in S^{(\neq 0)}(n, n-1)$, $H' = \Omega(w(n))$ y $H \in C(H')$ tal que su sucesión de grados $w_1, \ldots, w_n$ verifica $w_1 = n-1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n \geq 1$. La sucesión de grados $y_1, \ldots, y_n$ del complemento H^c del grafo H verifica $y_1 = (n-1) - (n-1) = 0$, $y_n = n-1-w_n \leq n-1-1 = n-2$. Luego $y_2, \ldots, y_n$ es la sucesión de grados de un grafo G' con $n-1$ vértices y $x_1 = y_n, x_2 = y_{n-1}, \ldots, x_{n-1} = y_2$ es la sucesión de grados de un grafo $G \in C(G')$ y $x(n-1) = \Omega^{-1}(C(G')) \in S(n-1)$. Claramente $\alpha(x(n-1)) = w(n)$. ■

Corolario 2.1 *Si* $n \geq 2$ *entonces* $|S^{(\neq 0)}(n, n-1)| = |S(n-1)| = |S(n, n-1)|$.

Dem. Es una consecuencia inmediata del Lema 2.1 y de (2.8). ■

Observemos que si $n \geq 2$ la sucesión $x(n)$ definida por $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = n-1$ verifica $x(n) \in S^{(\neq 0)}(n, n-1)$. En efecto, claramente, ya sea n par ó impar, ella verifica las condiciones (1.1) y (1.2). Veamos que verifica (1.3). En efecto, por la Observación 2.1 $A_x(1) \leq B_x(1)$. Luego si $n = 2$ entonces ella verifica (1.3). Supongamos que $n \geq 3$ y que $2 \leq j \leq n-1$, entonces $A_x(j) = \sum\limits_{k=1}^{j}(n-1) = j(n-1)$ y $B_x(j) = j(j-1) + \sum\limits_{k=j+1}^{n}(j \wedge x_k) = j(j-1) + \sum\limits_{k=j+1}^{n} j = j(j-1) + (n-j)j = j(j-1+n-j) = j(n-1)$.

Si $n \geq 3$, $1 \leq i \leq n-2$ y $x(n) \in S(n, i)$ sea i_0 el menor subíndice tal que $x_{i_0} = 0$, entonces $x_{i_0} = \cdots = x_n = 0$ y $x_{i_0 - 1} \geq 1$.
Como $B_x(1) = \sum\limits_{k=2}^{n}(1 \wedge x_k) = \sum\limits_{k=2}^{i_0-1}(1 \wedge x_k) + \sum\limits_{k=i_0}^{n}(1 \wedge 0) = i_0 - 1 - 2 + 1 = i_0 - 2$. Entonces para que $A_x(1) \leq B_x(1)$ debe ser $i \leq i_0 - 2$, esto es $i + 2 \leq i_0$. Recíprocamente si $i + 2 \leq i_0$ entonces

$$B_x(1) = \sum_{k=2}^{n}(1 \wedge x_k) = \sum_{k=2}^{i_0-1}(1 \wedge x_k) = i_0 - 2$$

y por lo tanto $A_x(1) = i \leq B_x(1) = i_0 - 2$. Luego

$$A_x(1) \leq B_x(1) \ \text{ si y solo si } \ i + 2 \leq i_0. \tag{2.9}$$

Lema 2.2

$$|S^{(0)}(n,1)| = \begin{cases} \dfrac{n-2}{2}, & \text{si } n \text{ es par}, \quad n \geq 4, \\ \dfrac{n-1}{2}, & \text{si } n \text{ es impar}, \ n \geq 3. \end{cases}$$

Dem. Como $n \geq 3$ entonces $3 \leq i_0 \leq n$. Como $\sum_{i=1}^{n} x_i$ debe ser número par, entonces $i_0 - 1$ debe ser par esto es i_0 debe ser impar, pues

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{i_0-1} x_i = i_0 - 1.$$

Si n es impar $n \geq 3$ entre 3 y n hay $\frac{n-1}{2}$ números impares y si n es par $n \geq 4$ hay $\frac{n-2}{2}$ números impares.

Oservemos además que todos los elementos $x(n) \in S^{(0)}(n,1)$ verifican $A_x(j) \leq B_x(j)$ para $2 \leq j \leq n-1$. En efecto, $A_x(j) = j$ y $B_x(j) = j(j-1) + \sum_{k=j+1}^{i_0-1} (j \wedge x_k) = j(j-1) + i_0 - 1 - (j+1) + 1 = j(j-1) + i_0 - 1 + j = j^2 + i_0$ luego como $j \geq 2$ entonces $j - 1 \geq 1$ y $i_0 - 1 > 0$. Por lo tanto

$$A_x(j) = j \leq j(j-1) \leq j^2 + i_0 = B_x(j).$$

■

Corolario 2.2 *Si $n \geq 3$ y n es impar entonces $|S^{(0)}(n,1)| = |S^{(0)}(n+1,1)|$.*

Dem. Como $n+1$ es par y $n+1 \geq 4$ entonces por el Lema 2.2

$$|S^{(0)}(n+1,1)| = \frac{n+1-2}{2} = \frac{n-1}{2} = |S^{(0)}(n,1)|.$$

■

Lema 2.3

$$|S^{\neq 0)}(n,1)| = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es par}, \quad n \geq 2, \\ 0, & \text{si } n \text{ es impar}, \ n \geq 3. \end{cases}$$

Dem. Sea $n \geq 2$. Si $x(n) \in S^{(\neq 0)}(n,1)$ entonces $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$.
Si n es impar entonces $x(n)$ no verifica (1.2), luego $|S^{(\neq 0)}(n,1)| = 0$. Si n es par, es claro que $x(n)$ verifica (1.1) y (1.2). Probemos que verifica (1.3). En efecto, por la Observación 2.1, $A_x(1) \leq B_x(1)$. Si $2 \leq j \leq n-1$ entonces $A_x(j) = j$ y

$$B_x(j) = j(j-1) + \sum_{k=j+1}^{n} (j \wedge x_k) = j(j-1) + n - (j+1) + 1 = j(j-1) + n - j$$

luego como $j \geq 2$ entonces $j - 1 \geq 1$ luego $j(j-1) \geq j$ y por lo tanto

$$A_x(j) = j \leq j(j-1) \leq j(j-1) + n - j = B_x(j),$$

luego $|S^{(\neq 0)}(n,1)| = 1$, para n par, $n \geq 2$. ■

Corolario 2.3
$$|S(n,1)| = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par}, \ n \geq 2, \\ \dfrac{n-1}{2}, & \text{si } n \text{ es impar}, \ n \geq 3. \end{cases}$$

Dem. Si $n = 2$ sabemos que $|S^{(0)}(2,1)| = 0$ y $|S^{(\neq 0)}(2,1)| = 1$, entonces el resultado es válido para $n = 2$. Si $n \geq 3$ por (2.3) (1) $|S(n,1)| = |S^{(0)}(n,1)| + |S^{(\neq 0)}(n,1)|$. Luego si n es par, de (1) y los lemas 2.2 y 2.3 tenemos $|S(n,1)| = \dfrac{n-2}{2} + 1 = \dfrac{n}{2}$. Si n es impar, de (1) y los lemas 2.2 y 2.3 $|S(n,1)| = \dfrac{n-1}{2} + 0 = \dfrac{n-1}{2}$. ■

Si $n = 3$ las posibles sucesiones $s_1, s_2, 0$ que verifican (1.1) y (1.2) son $x(3) = 0,0,0$, $y(3) = 1,1,0$, y $z(3) = 2,2,0$. Es claro que las dos primeras verifican (1.3) y que la última no la verifica. Luego $|S^{(0)}(3)| = 2$. Las posibles sucesiones s_1, s_2, s_3 donde $s_3 > 0$ que verifican (1.1) y (1.2) son $x(3) = 2,1,1$ e $y(3) = 2,2,2$. Ambas verifican (1.3). En efecto, por la Observación 2.1 $A_x(1) \leq B_x(1)$.
$A_x(2) = 3$, $B_x(2) = 2 + \sum\limits_{k=3}^{3}(2 \wedge x_k) = 3$, $A_y(1) = 2$, $B_y(1) = \sum\limits_{k=2}^{3}(1 \wedge x_k) = 2$, $A_y(2) = 4$, $B_y(2) = 2 + \sum\limits_{k=3}^{3}(2 \wedge x_k) = 4$. Luego $|S^{(\neq 0)}(3)| = 2$ y por (2.1) tenemos:

$$|S(3)| = |S^{(0)}(3)| + |S^{(\neq 0)}(3)| = 2 + 2 = 4. \tag{2.10}$$

Además $S(3,0) = \{0,0,0\}$, $S(3,1) = \{1,1,0\}$ y $S(3,2)$ tiene por elementos a $2,1,1$ y $2,2,2$.

Lema 2.4 *Si $n \geq 3$ entonces $|S^{(0)}(n,i)| = |S(n-1,i)|$, para $1 \leq i \leq n-2$.*

Dem. Sea $x(n) \in S^{(0)}(n,i)$ luego $x_1 = i$, $x_n = 0$ y $\sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ es par. Sea $y(n-1)$ la sucesión definida por $y_k = x_k$ para $1 \leq k \leq n-1$, luego claramente $y(n-1)$ verifica las condiciones (1.1) y (1.2). Probemos que verifica (1.3). Sea $1 \leq j \leq n-2$ entonces $A_y(j) = \sum\limits_{k=1}^{j} y_k = \sum\limits_{k=1}^{j} x_k = A_x(j)$ y como $x_n = 0$ entonces $B_y(j) = j(j-1) + \sum\limits_{k=j+1}^{n-1}(j \wedge y_k) = j(j-1) + \sum\limits_{k=j+1}^{n-1}(j \wedge x_k) = B_x(j)$.
Pongamos $\beta(x(n)) = y(n-1)$ luego $\beta : S^{(0)}(n,i) \to S(n-1,i)$. Si $x(n), z(n) \in S^{(0)}(n,i)$ son tales que $x(n) \neq z(n)$, como $x_n = z_n = 0$ y $x_1 = z_1 = i$ entonces existe $k, 2 \leq k \leq n-1$ tal que $x_i \neq z_i$ y por lo tanto $\beta(x(n)) \neq \beta(z(n))$.
Dada $y(n-1) \in S(n-1,i)$ entonces $y_1 = i$ y $\sum\limits_{k=1}^{n-1} y_k$ es par. Sea $x(n)$ la sucesión definida por $x_k = y_k$ para $1 \leq k \leq n-1$ y $x_n = 0$, luego claramente $x(n)$ verifica las condiciones (1.1) y (1.2). Probemos que verifica (1.3). Sea $1 \leq j \leq n-1$. Si $j = n-1$ entonces $A_x(n-1) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k = \sum\limits_{k=1}^{n-1} y_i = A_y(n-1)$.

Como $y_k \leq i \leq n-2$ entonces $A_x(n-1) \leq (n-1)(n-2)$. Como $x_n = 0$ entonces $B_x(n-1) = (n-1)(n-2)+\sum\limits_{k=n}^{n}(j \wedge x_k) = (n-1)(n-2)$. Si $1 \leq j \leq n-2$. $A_y(j) = \sum\limits_{k=1}^{j} y_k = \sum\limits_{k=1}^{j} x_k = A_x(j)$ y como $x_n = 0$ entonces $B_y(j) = j(j-1)+\sum\limits_{k=j+1}^{n}(j \wedge y_k) = j(j-1)+\sum\limits_{k=j+1}^{n-1}(j \wedge x_k) = B_x(j)$. Por lo tanto $x(n) \in S^{(0)}(n,i)$ y claramente $\beta(x(n)) = y(n-1)$. ■

Sea $\mathbf{G}^*(V(n))$ el conjunto de todos los grafos simples sin vértices aislados con n vértices. Luego $\mathbf{G}^*(V(n))/\cong$ es el conjunto de los grafos simples, sin vértices aislados, no isomorfos con n vértices.
El problema de determinar $|\mathbf{G}^*(V(n))/\cong|$ es equivalente, de acuerdo con los resultados de A. Tripathi y S. Vijay [10]), a determinar el cardinal del conjunto $S^{(*)}(n)$ de todas las sucesiones $x(n)$ de enteros que verifican:

$$n-1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n > 0, \tag{2.11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ es un número par}, \tag{2.12}$$

$$A_x(j) = \sum_{k=1}^{j} x_k \leq j(j-1) + \sum_{k=j+1}^{n}(j \wedge x_k) = B_x(j), \text{ para } 1 \leq j \leq s, \tag{2.13}$$

donde $s \leq n-1$ es el mayor entero tal que $x_s \geq s-1$.

Por lo tanto $S^{(*)}(n) = S^{(\neq 0)}(n)$ y $|S^{(*)}(n)| = \sum\limits_{i=1}^{n-1}|S^{(\neq 0)}(n,i)|$.

Si $1 \leq i \leq n-1$ sean:

- $D(n,i)$ el conjunto de todas las sucesiones $x(n) = x_1, x_2, \ldots, x_n$ de enteros que verifican (2.11) y $x_1 = i$
- $D^{(ev)}(n,i)$ el conjunto de todas las sucesiones $x(n) = x_1, x_2, \ldots, x_n$ de enteros que verifican (2.11), (2.12) y $x_1 = i$
- $D^{(od)}(n,i)$ el conjunto de todas las sucesiones $x(n) = x_1, x_2, \ldots, x_n$ de enteros que verifican (2.11), $x_1 = i$ y $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j$ es impar.

Luego
$$|D(n,i)| = |D^{(ev)}(n,i) + |D^{(od)}(n,i)|.$$

Es bien conocido que si $n \geq 2$

$$|D(n,i)| = \binom{n+i-2}{n-1}.$$

Luego si $i = 2$ tenemos $|D(n,2)| = n$ y por lo tanto

$$|D^{(od)}(n,2)| = n - |D^{(ev)}(n,2)| \tag{2.14}$$

Es claro que

$$\begin{cases} |D^{(ev)}(n,1)| = 1, \quad |D^{(od)}(n,1)| = 0, \text{ si } n \text{ es par,} \\ |D^{(ev)}(n,1)| = 0, \quad |D^{(od)}(n,1)| = 1, \text{ si } n \text{ es impar.} \end{cases} \tag{2.15}$$

Lema 2.5 *Si n es par, $n \geq 2$ entonces:* $|D^{(ev)}(n,2)| = \dfrac{n}{2} = |D^{(od)}(n,2)|$.

Dem. En efecto, $|D^{(ev)}(2,2)| = 1 = \dfrac{2}{2}$.
Supongamos que $|D^{(ev)}(n,2)| = \dfrac{n}{2}$, para n par $n > 2$ y probemos que $|D^{(ev)}(n+2,2)| = \dfrac{n+2}{2}$.
Si $x(n) \in D^{(ev)}(n,2)$ entonces la sucesión $y(n)$ definida por $y_1 = y_2 = 2$, $y_i = x_{i-2}$ para $3 \leq i \leq n+2$ pertenece a $D^{(ev)}(n+2,2)$. Si $x(n) \in D^{(ev)}(n,1)$ entonces la sucesión $z(n)$ definida por $z_1 = z_2 = 2$, $z_i = x_{i-2}$ para $3 \leq i \leq n+2$ pertenece a $D^{(ev)}(n+2,2)$.
Sea $\varphi : D^{(ev)}(n,2) \cup D^{(ev)}(n,1) \to D^{(ev)}(n+2,2)$ definida por

$$\varphi(x(n)) = \begin{cases} y(n+2) \ \text{ si } \ x(n) \in D^{(ev)}(n,2), \\ \\ z(n+2) \ \text{ si } \ x(n) \in D^{(ev)}(n,1). \end{cases}$$

Claramente φ es inyectiva. Veamos que es suryectiva.
Si $w(n+2) \in D^{(ev)}(n+2,2)$ entonces $w_1 = 2$ y $1 \leq w_i \leq 2$ para $2 \leq i \leq n+2$. Observemos que necesariamente $w_2 = 2$ pues si $w_2 = 1$ entonces $\sum_{i=1}^{n+2} w_i$ sería un número impar.
Si $w_3 = 1$ entonces $\sum_{i=3}^{n+2} w_i = n$ y la sucesión $x(n)$ definida por $x_i = w_{i+2}$ para $1 \leq i \leq n$ pertenece a $D^{(ev)}(n,1)$ y $\varphi(x(n)) = w(n+2)$.
Si $w_3 = 2$ entonces la sucesión $y(n)$ definida por $y_i = w_{i+2}$ para $1 \leq i \leq n$ pertenece a $D^{(ev)}(n,2)$ y $\varphi(x(n)) = w(n+2)$. Luego teniendo en cuenta la hipótesis:

$$|D^{(ev)}(n+2,2)| = |D^{(ev)}(n,1)| + |D^{(ev)}(n,2)| = 1 + \frac{n}{2} = \frac{n+2}{2}.$$

Luego por (2.14)

$$|D^{(od)}(n,2)| = n - |D^{(ev)}(n,2)| = n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}.$$

■

Lema 2.6 *Si n es impar y $n \geq 3$ entonces:* $|D^{(ev)}(n,2)| = \dfrac{n+1}{2}$ *y* $|D^{(od)}(n,2)| = \dfrac{n-1}{2}$

Dem. En efecto, veamos que $|D^{(ev)}(n,2)| = |D^{(ev)}(n-1,1)| + |D^{(ev)}(n-1,2)|$.
Por hipótesis $n-1 \geq 2$. Como la sucesión $x(n)$ definida por $x_i = 1$ para $1 \leq i \leq n-1$ pertenece a $D^{(ev)}(n-1,1)$ entonces la sucesión $y(n)$ definida por $y_1 = 2$, $y_i = y_{i-1}$ para $2 \leq i \leq n$ pertenece a $D^{(ev)}(n,2)$ y si $x(n) \in D^{(ev)}(n-1,2)$ entonces la sucesión $y(n)$ definida por $y_1 = 2$, $y_i = x_{i-1}$ para $2 \leq i \leq n$ pertenece a $D^{(ev)}(n,2)$. Recíprocamente si $y(n) \in D^{(ev)}(n,2)$ entonces $y_1 = 2$ y $1 \leq y_i \leq 2$ para $2 \leq i \leq n$. Si $y_2 = 1$ entonces la sucesión $x(n)$ definida por $x_i = y_{i+1}$ para $1 \leq i \leq n$ pertenece a $D^{(ev)}(n-1,1)$, y

si $y_2 = 2$ entonces la sucesión $x(n)$ definida por $x_i = y_{i+1}$ para $1 \leq i \leq n$ pertenece a $D^{(ev)}(n-1, 2)$. Luego teniendo en cuenta el Lema 2.5

$$|D^{(ev)}(n,2)| = |D^{(ev)}(n-1,1)| + |D^{(ev)}(n-1,2)| = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Luego por (2.14)

$$|D^{(od)}(n,2)| = n - |D^{(ev)}(n,2)| = n - \frac{n+1}{2} = \frac{n-1}{2}.$$

■

Observemos que si n es impar, $n \geq 3$ entonces por los Lemas 2.6 y 2.5 tenemos

$$|D^{(ev)}(n,2)| = \frac{n+1}{2} = |D^{(ev)}(n+1,2)|. \tag{2.16}$$

Si $n \geq 3$ y $1 \leq i \leq n-2$ sea $S^{(*)}(n,i) = \{x(n) \in S^{(*)}(n) : x_1 = i\}$. Es claro que si $n \geq 3$:

$$S^{(*)}(n,i) = S^{(\neq 0)}(n,i), \quad \text{para } \ 1 \leq i \leq n-2 \tag{2.17}$$

Luego por (2.3), (2.17) y el Lema 2.4, si $n \geq 3$ y $1 \leq i \leq n-2$ tenemos:

$$|S(n,i)| = |S^{(0)}(n,i)| + |S^{(\neq 0)}(n,i)| = |S(n-1,i)| + |S^{(*)}(n,i)|. \tag{2.18}$$

Lema 2.7 *Si $n \geq 3$ entonces $|S^{(*)}(n,2)| = |D^{(ev)}(n,2)|$.*

Dem. Es claro que si $x(n) \in S^{(*)}(n,2)$ entonces $x(n) \in D^{(ev)}(n,2)$. Sea $x(n) \in D^{(ev)}(n,2)$, luego $x(n)$ verifica (2.11), (2.12) y $x_1 = 2$. Esto es $2 = x_1 \geq \cdots x_n \geq 1$ y $\sum_{k=1}^{n} x_n$ es par.
Si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 2$ veamos que ella verifica (2.13). Por la Observación 2.1 $A_x(1) \leq B_x(1)$.
Sea $s \leq n-1$ el mayor entero tal que $2 = x_s \geq s-1$. Si $n = 3$ entonces $s = 2$ y $A_x(2) = 4$ y $B_x(2) = 2 + \sum_{k=3}^{3}(2 \wedge x_k) = 4$. Luego se verifica (2.13).
Si $n > 3$ entonces $s = 3$.
$A_x(2) = 4$ y $B_x(2) = 2 + \sum_{k=3}^{n}(2 \wedge x_k) = 2 + \sum_{k=3}^{n}(2 \wedge 2) = 2 + (n-2)2 = 2 + 2n - 4 = 2n - 2$ y como $3 \leq n$ entonces $6 \leq 2n$ y por lo tanto $A_x(2) = 4 \leq 2n - 2 = B_x(2)$ y $B_x(3) = 6 + \sum_{k=4}^{n}(3 \wedge x_k) \geq 6 = A_x(3)$.
Supongamos ahora que $x_1 = x_2 = \cdots = x_r = 2$ y $x_{r+1} = \cdots = x_n = 1$. Claramente $t = n - r$ debe ser un número par. Si $n = 3$ entonces $r = 1$, luego $x(3) = 2, 1, 1$ y $s = 2$, luego $B_x(2) = 2 + \sum_{k=3}^{3}(2 \wedge x_k) = 3 = A_x(2)$ y por lo tanto se verifica (2.13).
Si $n > 3$ entonces $s = 3$.
Si n es par, entonces r debe ser par y $r \geq 2$.
Si $r = 2$ entonces $A_x(2) = 4$ y $B_x(2) = 2 + \sum_{k=3}^{n}(2 \wedge x_k) = 2 + \sum_{k=3}^{n}(2 \wedge 1) = 2 + n - 2 = n$ luego $A_x(2) \leq B_x(2)$ y $B_x(3) = 6 + \sum_{k=4}^{n}(2 \wedge x_k) \geq A_x(3) = 5$.

Si $r > 2$ entonces $B_x(2) = 2 + \sum\limits_{k=3}^{n}(2 \wedge x_k) = 2 + \sum\limits_{k=3}^{4}(2 \wedge 2) + \sum\limits_{k=5}^{n}(2 \wedge x_k) = 6 + \sum\limits_{k=5}^{n}(2 \wedge x_k) \geq$ $A_x(2) = 4$ y $B_x(3) = 6 + \sum\limits_{k=4}^{n}(2 \wedge x_k) \geq A_x(3) = 6$.
Si n es impar, entonces r debe ser impar y $r > 2$.
$B_x(2) = 2 + \sum\limits_{k=3}^{n}(2 \wedge x_k) = 2 + 2 + \sum\limits_{k=4}^{n}(2 \wedge x_k) \geq 4 = A_x(2)$ y $B_x(3) = 6 + \sum\limits_{k=4}^{n}(3 \wedge x_k) \geq$ $A_x(3) = 6$.
Luego $D^{(ev)}(n,2) \subseteq S^{(*)}(n,2)$ y por lo tanto $S^{(*)}(n,2) = D^{(ev)}(n,2)$ para $n \geq 3$. ■

Corolario 2.4

$$|S^{(*)}(n,2)| = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par, } n \geq 2, \\[2ex] \dfrac{n+1}{2}, & \text{si } n \text{ es impar, } n \geq 3. \end{cases}$$

Dem. Es una consecuencia inmediata de los Lemas 2.7, 2.5 y 2.6. ■

Corolario 2.5 *Si n es impar, $n \geq 3$ entonces* $|S^{(*)}(n,2)| = |S^{(*)}(n+1,2)|$.

Dem. Si n es impar y $n \geq 3$ entonces $n+1$ es par luego por el Corolario 2.4 $|S^{(*)}(n,2)| = \dfrac{n+1}{2} = |S^{(*)}(n+1,2)|$. ■

Lema 2.8 *Si $n \geq 3$*

$$|S(n,2)| = \begin{cases} \dfrac{n^2+2n}{4} - 2 & \text{si } n \text{ es par} \\[2ex] \dfrac{n^2+2n-7}{4} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Dem. Supongamos que n es par y $n \geq 3$, entonces por (2.18)

$$|S(n,2)| = |S(n-1,2)| + |S^{(*)}(n,2)|.$$

Si $n = 4$ entonces

$$|S(4,2)| = |S(3,2)| + |S^{(*)}(4,2)| = |S(3,2)| + |S(3,2)| = 2 + 2 = \frac{4^2 + 2 \cdot 4}{4} - 2.$$

Si n es par y $n > 4$ aplicando $n-4$ veces (2.18) teniendo en cuenta que $S^{(*)}(n) = S^{(\neq 0)}(n)$ y (2.8) resulta:

$$|S(n,2)| = \sum_{i=3}^{n-2} |S^{(*)}(i,2)| + |S^{(*)}(n,2)|.$$

Como n es par entonces por el Corolario (2.5) $|S^{(*)}(n,2)| = |S^{(*)}(n-1,2)|$ luego

$$|S(n,2)| = \sum_{i=3}^{n-1} |S^{(*)}(i,2)|.$$

Como $|S^{(*)}(i,2)| = |S^{(*)}(i+1,2)|$ para i impar, $3 \le i \le n-1$ entonces

$$|S(n,2)| = 2\left(\sum_{h=1}^{\frac{n-2}{2}} |S^{(*)}(2h+1,2)|\right),$$

luego por Corolario 2.4

$$|S(n,2)| = 2\left(\sum_{h=1}^{\frac{n-2}{2}} \frac{2h+2}{2}\right) = 2\left(\sum_{h=1}^{\frac{n-2}{2}} (h+1)\right) =$$

$$2\left(2+3+\cdots+\frac{n}{2}\right) = 2\left(\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2} - 1\right) = \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) - 2 =$$

$$\frac{n^2+2n}{4} - 2.$$

Supongamos ahora que n es impar, $n \ge 3$.

Si $n = 3$ ya sabemos que $|S^{(0)}(3,2)| = 0$ y $|S^{(\neq 0)}(3,2)| = 2$ luego $|S(3,2)| = 2 = \dfrac{3^2+2.3-7}{4}$.

Si n impar $n > 3$ aplicando $n-4$ veces la ecuación (2.18) tenemos

$$|S(n,2)| = \sum_{i=3}^{n-1} |S^{(*)}(i,2)| + |S^{(*)}(n,2)|.$$

Como $|S^{(*)}(i,2)| = |S^{(*)}(i+1,2)|$ para i impar, $3 \le i \le n-1$ entonces

$$|S(n,2)| = 2\left(\sum_{h=1}^{\frac{n-3}{2}} |S^{(*)}(2h+1,2)|\right) + |S^{(*)}(n,2)|,$$

luego por el Corolario 2.4

$$|S(n,2)| = 2\left(\sum_{h=1}^{\frac{n-3}{2}} \frac{2h+2}{2}\right) + |S^{(*)}(n,2)| = 2\left(\sum_{h=1}^{\frac{n-3}{2}} (h+1)\right) + |S^{(*)}(n,2)| =$$

$$2\left(\sum_{k=2}^{\frac{n-1}{2}} k\right) + |S^{(*)}(n,2)| = 2\left(\frac{\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}{2} - 1\right) + \frac{n+1}{2} =$$

$$\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right) - 2 + \frac{n+1}{2} = \frac{n^2+2n-7}{4}.$$

∎

Luego por (2.4), (2.6), el Corolario 2.3 y el Lema 2.8:

$$|S(3)| = \sum_{h=0}^{2} |S(3,h)| = 1+1+2 = 4. \tag{2.19}$$

Vamos a probar que si n es par $n \geq 6$ entonces $|S^{(\neq 0)}(n,3)| = \dfrac{n^2+2.n}{4}$. Observemos que si $n=4$, por el Lema 2.1 y (2.10) $|S^{(\neq 0)}(4,3)| = |S(3)| = 4$ luego $|S^{(\neq 0)}(4,3)| \neq \dfrac{4^2+2.4}{4}$.

Si $n=6$ entonces es fácil ver que el conjunto de todas las sucesiones $x_1 = 3, \ldots, x_6$ que verifican (2.11) y (2.12) son:

a	3,1,1,1,1,1	d	3,2,2,1,1,1	g	3,3,3,1,1,1	m	3,3,3,3,2,2
b	3,3,1,1,1,1	e	3,3,2,2,1,1	h	3,3,3,2,2,1	p	3,3,3,3,3,1
c	3,2,2,2,2,1	f	3,3,2,2,2,2	j	3,3,3,3,1,1	q	3,3,3,3,3,3

Veamos que todas ellas verifican (2.13). Sea $X = \{a,b,c,d,e,f,g,h,j,m,p,q\}$. Ya sabemos que $A_x(1) \leq B_x(1)$, cualquiera que sea la sucesión $x \in X$.

- Si $x \in \{a,b\}$ el mayor entero $s \leq 5$ tal que $x_s \geq s-1$, es $s=2$

  - a
    $B_a(2) = 2 + \sum_{k=3}^{6}(2 \wedge a_k) = 6 \geq 4 = A_a(2).$
  - b
    $B_b(2) = 2 + \sum_{k=3}^{6}(2 \wedge b_k) = 6 = A_b(2).$

- Si $x \in \{c,d,e,f,g,h\}$ el mayor entero $s \leq 5$ tal que $x_s \geq s-1$, es $s=3$

  - c
    $B_c(2) = 2 + \sum_{k=3}^{6}(2 \wedge c_k) = 7 \geq 5 = A_c(2),$
    $B_c(3) = 6 + \sum_{k=4}^{6}(3 \wedge c_k) = 11 \geq 7 = A_c(3).$
  - d
    $B_d(2) = 2 + \sum_{k=3}^{6}(2 \wedge d_k) = 7 \geq 5 = A_d(2),$
    $B_d(3) = 6 + \sum_{k=4}^{6}(3 \wedge d_k) = 9 \geq 7 = A_d(3).$
  - e
    $B_e(2) = 2 + \sum_{k=3}^{6}(2 \wedge e_k) = 8 \geq 6 = A_e(2),$
    $B_e(3) = 6 + \sum_{k=4}^{6}(3 \wedge e_k) = 10 \geq 8 = A_e(3).$
  - f
    $B_f(2) = 2 + \sum_{k=3}^{6}(2 \wedge f_k) = 10 \geq 6 = A_f(2),$
    $B_f(3) = 6 + \sum_{k=4}^{6}(3 \wedge f_k) = 12 \geq 8 = A_f(3).$

- g

  $B_g(2) = 2 + \sum_{k=3}^{6}(2 \wedge g_k) = 7 \geq 6 = A_g(2),$

  $B_g(3) = 6 + \sum_{k=4}^{6}(3 \wedge g_k) = 9 = A_g(3).$

- h

  $B_h(2) = 2 + \sum_{k=3}^{6}(2 \wedge h_k) = 9 \geq 6 = A_h(2),$

  $B_h(3) = 6 + \sum_{k=4}^{6}(3 \wedge h_k) = 11 \geq 9 = A_h(3).$

- Si $x \in \{j, m, p, q\}$ $s \leq 5$ tal que $x_s \geq s - 1$, es $s = 4$.

  - j

    $B_j(2) = 2 + \sum_{k=3}^{6}(2 \wedge j_k) = 8 \geq 6 = A_j(2),$

    $B_j(3) = 6 + \sum_{k=4}^{6}(3 \wedge j_k) = 11 \geq 9 = A_j(3) = 9,$

    $B_j(4) = 12 + \sum_{k=5}^{6}(4 \wedge j_k) = 14 \geq 12 = A_j(4).$

  - m

    $B_m(2) = 2 + \sum_{k=3}^{6}(2 \wedge m_k) = 10 \geq 6 = A_m(2),$

    $B_m(3) = 6 + \sum_{k=4}^{6}(3 \wedge m_k) = 13 \geq 9 = A_m(3),$

    $B_m(4) = 12 + \sum_{k=5}^{6}(4 \wedge m_k) = 16 \geq 12 = A_m(4).$

  - p

    $B_p(2) = 2 + \sum_{k=3}^{6}(2 \wedge p_k) = 9 \geq 6 = A_p(2),$

    $B_p(3) = 6 + \sum_{k=4}^{6}(3 \wedge p_k) = 13 \geq 9 = A_p(3),$

    $B_p(4) = 12 + \sum_{k=5}^{6}(4 \wedge p_k) = 16 \geq 12 = A_p(4).$

  - q

    $B_q(2) = 2 + \sum_{k=3}^{6}(2 \wedge q_k) = 10 \geq 6 = A_q(2),$

    $B_q(3) = 6 + \sum_{k=4}^{6}(3 \wedge q_k) = 15 \geq 9 = A_q(3),$

    $B_q(4) = 12 + \sum_{k=5}^{6}(4 \wedge q_k) = 18 \geq 12 = A_q(4)\ .$

Por lo tanto todas las sucesiones indicadas verifican (2.13) y en consecuencia:

$$|S^{(\neq 0)}(6,3)| = 12 = \frac{36 + 12}{4}. \tag{2.20}$$

Lema 2.9 *Si $n \geq 6$ y n es par entonces $|S^{(*)}(n,3)| = |D^{(ev)}(n,3)|$.*

Dem. Es claro que si $x(n) \in S^{(*)}(n,3)$ entonces $x(n) \in D^{(ev)}(n,3)$. Sea $x(n) \in D^{(ev)}(n,3)$, luego $x(n)$ verifica (2.11), (2.12) y $x_1 = 3$. Esto es $3 = x_1 \geq \cdots x_n \geq 1$ y $\sum_{k=1}^{n} x_n$ es par.
CASO I) Si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 3$ ella verifica (2.13). En efecto, por la Observación 2.1 $A_x(1) \leq B_x(1)$.
El mayor entero tal que $3 = x_s \geq s-1$ es $s = 4$. Luego
(Ia) $B_x(2) = 2 + \sum_{k=3}^{n}(2 \wedge x_k) = 2 + 2(n-2) = 2n-2$, y como $n \geq 6$ entonces $2n-2 \geq 10 \geq 6 = A_x(2)$.
(Ib) $B_x(3) = 6 + \sum_{k=4}^{n}(3 \wedge x_k) = 6 + 3(n-3) = 3n-3$ y como $n \geq 6$ entonces $3n-3 \geq 15 \geq 9 = A_x(3)$.
(Ic) $B_x(4) = 12 + \sum_{k=5}^{n}(4 \wedge x_k) \geq 12 = A_x(4)$.
Luego se verifica (2.13).
CASO II) Supongamos ahora que $x_1 = x_2 = \cdots = x_r = 3$ con $r < n$ y $x_{r+1} = x_{r+2} = \cdots = x_n = 1$.
(IIa) Si $r = 1$ entonces $s = 2$, luego
$B_x(2) = 2 + \sum_{k=3}^{n}(2 \wedge x_k) = 2 + n - 2 = n \geq 6 \geq 4 = A_x(2)$.
(IIb) Si $r = 2$ entonces $s = 2$, luego
$B_x(2) = 2 + \sum_{k=3}^{n}(2 \wedge x_k) = 2 + n - 2 = n \geq 6 = A_x(2)$.
(IIc) Si $r = 3$ entonces $s = 3$, luego
$B_x(2) = 2 + \sum_{k=3}^{n}(2 \wedge x_k) = 2 + 2 + n - 3 = n + 1 \geq 6 = A_x(2)$.
$B_x(3) = 6 + \sum_{k=4}^{n}(3 \wedge x_k) = 6 + n - 3 = n + 3 \geq 9 = A_x(3)$.
(IId) Si $4 \leq r < n-1$ entonces $s = 4$, luego
$B_x(2) = 2 + \sum_{k=3}^{n}(2 \wedge x_k) = 2 + \sum_{k=3}^{r}(2 \wedge x_k) + \sum_{k=r+1}^{n}(2 \wedge x_k) = 2 + 2(r-2) + n - r = n + r - 2 \geq 6 + 2 = 8 \geq 6 = A_x(2)$.
$B_x(3) = 6 + \sum_{k=4}^{r}(3 \wedge x_k) + \sum_{k=r+1}^{n}(3 \wedge x_k) = 6 + 3(r-3) + n - r = n + 2r - 3 \geq 6 + 5 = 11 \geq 9 = A_x(3)$.
$B_x(4) = 12 + \sum_{k=5}^{r}(4 \wedge x_k) + \sum_{k=r+1}^{n}(4 \wedge x_k) = 12 + 3(r-4) + n - r = n + 2r \geq 12 = A_x(4)$.
Luego se verifica (2.13).
CASO III) Supongamos ahora que $x_1 = x_2 = \cdots = x_r = 3$ con $r < n$, $x_{r+1} = x_{r+2} = \cdots = x_n = 2$. Luego r debe ser par.
(IIIa) Si $r = 2$ entonces $s = 3$, entonces
$B_x(2) = 2 + \sum_{k=3}^{n}(2 \wedge x_k) = 2 + 2(n-2) = 2n - 2 \geq 12 - 2 = 10 \geq 6 = A_x(2)$.
$B_x(3) = 6 + \sum_{k=4}^{n}(3 \wedge x_k) = 6 + 2(n-3) = 2n \geq 12 \geq 8 = A_x(3)$.

(IIIb) Si $r = 4$ entonces $s = 4$, luego
$B_x(2) = 2 + \sum\limits_{k=3}^{4}(2 \wedge x_k) + \sum\limits_{k=5}^{n}(2 \wedge x_k) = 2 + 4 + 2(n-4) = 2n - 2$ y como $n \geq 6$ entonces $2n - 2 \geq 10 \geq 6 = A_x(2)$.
$B_x(3) = 6 + (3 \wedge 3) + \sum\limits_{k=5}^{n}(3 \wedge x_k) = 6 + 3 + 2(n-4) = 2n + 1$ y como $n \geq 6$ entonces $2n + 1 \geq 13 \geq 9 = A_x(3)$.
$B_x(4) = 12 + \sum\limits_{k=5}^{n}(4 \wedge x_k) \geq 12 = A_x(4)$. Luego se verifica (2.13).

(IIIc) Si $r > 4$ y r es par entonces $s = 4$, luego

$$B_x(2) = 2 + \sum_{k=3}^{r}(2 \wedge x_k) + \sum_{k=r+1}^{n}(2 \wedge x_k) = 2 + 3(r-2) + 2(n-r) = 2n + r - 4$$

y como $n \geq 6$, $r > 4$ entonces $2n + r - 4 \geq 12 \geq 6 = A_x(2)$.

$$B_x(3) = 6 + \sum_{k=3}^{r}(3 \wedge x_k) + \sum_{k=r+1}^{n}(3 \wedge x_k) = 6 + 3(r-2) + 2(n-r) = 2n + r$$

y como $n \geq 6$ entonces $2n + r \geq 12 + r \geq 9 = A_x(3)$.

$$B_x(4) = 12 + \sum_{k=5}^{r}(4 \wedge x_k) + \sum_{k=r+1}^{n}(4 \wedge x_k) = 12 + 3(r-4) + 2(n-r) =$$

$$2n + r \geq 12 + r \geq 12 = A_x(4).$$

Luego se verifica (2.13).
CASO IV) Supongamos ahora que $x_1 = x_2 = \cdots = x_r = 3$ con $r < n$, $x_{r+1} = x_2 = \cdots = x_{r+t} = 2$ con $1 \leq t$ y $r + t < n$ y $x_{r+t+1} = x_2 = \cdots = x_n = 1$. Luego $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 3r + 2t + n - (r+t) = 3r + 2t + n - r - t = 2r + t + n$, luego t debe ser un número par $t \geq 2$, para que esta suma sea par.

(IVa) Si $r = 1$ y t par $t \geq 2$ entonces $s = 3$, luego
$B_x(2) = 2 + \sum\limits_{k=3}^{r+t}(2 \wedge x_k) + \sum\limits_{k=r+t+1}^{n}(2 \wedge x_k) = 2 + 2(r+t-2) + n - r - t = n + r + t - 2.$
Como $n \geq 6$ entonces $n - 2 \geq 4$ y como $r + t \geq t \geq 2$ entonces $B_x(2) \geq 6 \geq 5 = A_x(2)$.
$B_x(3) = 6 + \sum\limits_{k=3}^{r+t}(3 \wedge x_k) + \sum\limits_{k=r+t+1}^{n}(3 \wedge x_k) = 6 + 2(r+t-2) + n - r - t = n + r + t + 2.$
Como $n \geq 6$ entonces $n + 2 \geq 8$ y como $r + t \geq 2$ entonces $B_x(3) \geq 10 \geq 5 = A_x(3)$.

(IVb) Si $r = 2$ y t par $t \geq 2$ entonces $s = 3$, luego
$B_x(2) = 2 + \sum\limits_{k=3}^{r+t}(2 \wedge x_k) + \sum\limits_{k=r+t+1}^{n}(2 \wedge x_k) = 2 + 2(r+t-2) + n - r - t = n + r + t - 2.$
Como $n \geq 6$ entonces $n - 2 \geq 4$ y como $r + t \geq 2$ entonces $B_x(2) \geq 6 = A_x(2)$.
$B_x(3) = 6 + \sum\limits_{k=3}^{n}(3 \wedge x_k) = 6 + \sum\limits_{k=3}^{r+t}(3 \wedge x_k) + \sum\limits_{k=r+t+1}^{n}(3 \wedge x_k) = 6 + 2(r+t-2) + n - r - t = n + r + t + 2$ y como $n \geq 6$ entonces $n + 2 \geq 8$ y $r + t \geq 2$ entonces $B_x(3) \geq 10 \geq 8 = A_x(3)$.

(IVc) Si $r = 3$ y t par $t \geq 2$ entonces $s = 3$, luego
$B_x(2) = 2+(2\wedge 3)+\sum_{k=4}^{n}(2\wedge x_k) = 2+2+\sum_{k=4}^{r+t}(2\wedge x_k)+\sum_{k=r+t+1}^{n}(2\wedge x_k) == 4+(r+t-3)2+(n-(r+t)) = n+t+r-2$. Como $n \geq 6$, $t \geq 2$, $r = 3$ resulta $B_x(2) \geq 9 \geq 6 = A_x(2)$.
$B_x(3) = 6+\sum_{k=4}^{n}(3\wedge x_k) = 6+\sum_{k=4}^{r+t}(3\wedge x_k)+\sum_{k=r+t+1}^{n}(3\wedge x_k) = 6+(r+t-3)2+(n-(r+t)) = n+t+r$. Como $n \geq 6$, $t \geq 2$, $r = 3$ resulta $B_x(3) = 11 \geq 9 = A_x(3)$.

(IVd) Si $r \geq 4$ y t par $t \geq 2$ entonces $s = 4$, luego
$B_x(2) = 2+\sum_{k=3}^{r+t}(2\wedge x_k)+\sum_{k=r+t+1}^{n}(2\wedge x_k) = 2+2(r+t-2)+n-r-t = n+r+t-2$
Como $n \geq 6$ entonces $n-2 \geq 4$ y como $r+t \geq 2$ entonces $B_x(2) \geq 6 = A_x(2)$.
$B_x(3) = 6+\sum_{k=4}^{r}(3\wedge x_k)+\sum_{k=r+1}^{r+t}(3\wedge x_k)+\sum_{k=r+t+1}^{n}(3\wedge x_k) = 6+3(r-3)+2t+n-r-t = n+2r+t-3$. Como $n \geq 6$ y $2r \geq 8$ entonces $B_x(3) \geq 6+8+t-3 \geq 9 = A_x(3)$.
$B_x(4) = 12+\sum_{k=5}^{r}(4\wedge x_k)+\sum_{k=r+1}^{r+t}(4\wedge x_k)+\sum_{k=r+t+1}^{n}(4\wedge x_k) = 12+3(r-4)+2t+n-r-t = n+t+2r$. Como $n \geq 6$, $2r \geq 8$ y $t \geq 2$ entonces $n+t+2r \geq 6+8+2 = 16$ entonces $B_x(4) \geq 16 \geq 12 = A_x(4)$. ∎

Lema 2.10 $|D^{(ev)}(n,3)| = \dfrac{n^2+2n}{4}$, *para n par, $n \geq 6$.*

Dem. Ya probamos que $|D^{(ev)}(6,3)| = \dfrac{6^2+2.6}{4}$.
Sea n par, $n > 6$ y supongamos que $|D^{(ev)}(n,3)| = \dfrac{n^2+2n}{4}$. Probemos que

$$|D^{(ev)}(n+2,3)| = \frac{(n+2)^2+2(n+2)}{4} = \frac{n^2+6n+8}{4}.$$

Si $y(n+2) \in D^{(ev)}(n+2,3)$ entonces $y_1 = 3$, $\sum_{i=2}^{n+2} y_i$ es un número impar y $1 \leq y_i \leq 3$ para $2 \leq i \leq n+2$. Sea $x(n)$ la sucesión definida por $x_i = y_{i+2}$ para $1 \leq i \leq n$.

- Si $y_2 = 1$ entonces $y_i = 1$ para $2 \leq i \leq n+2$ y $x(n) \in D^{(ev)}(n,1)$,
- Si $y_2 = 2$ entonces $y_3 = 2$ pués si $y_3 = 1$ entonces $\sum_{i=1}^{n} = 5+(n-2)$ sería impar, luego $x(n) \in D^{(od)}(n,2)$,
- Si $y_2 = 3$ entonces hay tres casos posibles:
  - $y_3 = 3$, entonces $x(n) \in D^{(ev)}(n,3)$,
  - $y_3 = 2$, entonces $x(n) \in D^{(ev)}(n,2)$,
  - $y_3 = 1$, entonces $x(n) \in D^{(ev)}(n,1)$.

Recíprocamente

- Si $x(n) \in D^{(ev)}(n,1)$ entonces la sucesión $y(n+2)$ definida por $y_1 = 3$, $y_2 = 1$, $y_i = x_{i-2} = 1$ para $3 \leq i \leq n+2$ verifica (2.11) y como $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 3 + n - 1 = n + 2$ es par ella verifica (2.12). Luego $y(n+2) \in D^{(ev)}(n+2,3)$.
- Si $x(n) \in D^{(od)}(n,2)$ consideremos la sucesión $y(n+2)$ definida por $y_1 = 3$, $y_2 = 2$, $y_i = x_{i-2}$ para $2 \leq i \leq n+2$. Luego $y_3 = 2$ e $y_i \leq 2$ para $4 \leq i \leq n$. Claramente $y(n+2)$ verifica (2.11) y como $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 5 + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ es par dado que por hipótesis $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ es impar. Luego ella verifica (2.12), por lo tanto $y(n+2) \in D^{(ev)}(n+2,3)$.
- Si $x(n) \in D^{(ev)}(n,3)$ entonces la sucesión $y(n+2)$ definida por $y_1 = y_2 = 3$, $y_i = x_{i-2}$ para $3 \leq i \leq n+2$. Entonces $y_3 = 3$. Claramente $y(n+2)$verifica (2.11) y como $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 6 + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ es par dado que por hipótesis $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ es par. Luego ella verifica (2.12), por lo tanto $y(n+2) \in D^{(ev)}(n+2,3)$.
- Si $x(n) \in D^{(ev)}(n,2)$ entonces la sucesión $y(n+2)$ definida por $y_1 = y_2 = 3$, $y_i = x_{i-2}$ para $3 \leq i \leq n+2$ pertenece a $D^{(ev)}(n+2,3)$.
- Si $x(n) \in D^{(ev)}(n,1)$ entonces la sucesión $y(n+2)$ definida por $y_1 = y_2 = 3$, $y_i = x_{i-2}$ para $3 \leq i \leq n+2$ pertenece a $D^{(ev)}(n+2,3)$.

Luego
$$|D^{(ev)}(n+2,3)| = |D^{(ev)}(n,1)| + |D^{(od)}(n,2)| + |D^{(ev)}(n,3)| + \\ |D^{(ev)}(n,2)| + |D^{(ev)}(n,1)|.$$
Luego por el Lema 2.5, la hipótesis de inducción y $D^{(ev)}(n,1) = 1$, (ver 2.15) resulta:
$$|D^{(ev)}(n+2,3)| = 1 + \frac{n}{2} + \frac{n^2+2n}{4} + \frac{n}{2} + 1 = \frac{n^2+6n+8}{4} = \frac{(n+2)^2+2(n+2)}{4}.$$
■

Corolario 2.6 *Si $n \geq 6$ y n es par entonces* $|S^{(*)}(n,3)| = \dfrac{n^2+2n}{4}$.

Dem. Es una consecuencia inmediata de los Lemas 2.9 y 2.10. ■

Lema 2.11 *Si n es impar, $n > 3$ entonces* $|D^{(ev)}(n,3)| = \dfrac{n^2-1}{4}$.

Dem. Sea n impar, $n > 3$ y supongamos que $|D^{(ev)}(n,3)| = \dfrac{n^2-1}{4}$. Probemos que
$$|D^{(ev)}(n+2,3)| = \frac{(n+2)^2-1}{4} = \frac{n^2+4n+3}{4}.$$

Si $y(n+2) \in D^{(ev)}(n+2,3)$ entonces $y_1 = 3$, $\sum\limits_{i=2}^{n+2} y_i$ es un número impar y $1 \leq y_i \leq 3$ para $2 \leq i \leq n+2$. Si $y_2 = 1$ entonces $\sum\limits_{i=3}^{n+2} y_i$ sería par. Luego $y_2 = 2$ ó $y_2 = 3$. Sea $x(n)$ la sucesión definida por $x_i = y_{i+2}$ para $1 \leq i \leq n$.

- $y_2 = 2$.
  - Si $y_3 = 1$ entonces $x(n) \in D^{(od)}(n,1)$, con n impar,
  - Si $y_3 = 2$ entonces $x(n) \in D^{(od)}(n,2)$, con n impar.

- $y_2 = 3$. Entonces $y_3 \in \{2,3\}$. En efecto, si $y_3 = 1$ entonces $\sum\limits_{i=1}^{n+2} y_i = 6+n$ sería impar, absurdo.
  - Si $y_3 = 2$ entonces $x(n) \in D^{(ev)}(n,2)$.
  - Si $y_3 = 3$ entonces $x(n) \in D^{(ev)}(n,3)$.

Recíprocamente

- Si $x(n) \in D^{(od)}(n,1)$ entonces la sucesión $y(n+2)$ definida por $y_1 = 3$, $y_2 = 2$, $y_i = x_{i-2}$ para $3 \leq i \leq n+2$ pertenece a $D^{(ev)}(n+2,3)$.
- Si $x(n) \in D^{(od)}(n,2)$ entonces la sucesión $y(n+2)$ definida por $y_1 = 3$, $y_2 = 2$, $y_i = x_{i-2}$ para $3 \leq i \leq n+2$ pertenece a $D^{(ev)}(n+2,3)$.
- Si $x(n) \in D^{(ev)}(n,2)$ entonces la sucesión $y(n+2)$ definida por $y_1 = y_2 = 3$, $y_i = x_{i-2}$ para $3 \leq i \leq n+2$ pertenece a $D^{(ev)}(n+2,3)$.
- Si $x(n) \in D^{(ev)}(n,3)$ entonces la sucesión $y(n+2)$ definida por $y_1 = y_2 = 3$, $y_i = x_{i-2}$ para $3 \leq i \leq n+2$ pertenece a $D^{(ev)}(n+2,3)$.

Luego

$$|D^{(ev)}(n+2,3)| = |D^{(od)}(n,1)| + |D^{(od)}(n,2)| + |D^{(ev)}(n,2)| + |D^{(ev)}(n,3)|.$$

Luego por el Lema 2.6, la hipótesis de inducción y $D^{(ev)}(n,1) = 1$, (ver 2.15) resulta:

$$|D^{(ev)}(n+2,3)| = 1 + \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} + \frac{n^2-1}{4} = n+1+\frac{n^2-1}{4} = \frac{n^2+4n+3}{4}.$$

■

Si n es par y $n \geq 6$ entonces por los Lemas 2.11 y 2.10

$$|D^{(ev)}(n+1,3)| = \frac{(n+1)^2-1}{4} = \frac{n^2+2n}{4} = |D^{(ev)}(n,3)|. \tag{2.21}$$

Por (2.18), Lema 2.4 y Lema (2.11)

$$|S(5,3)| = |S^{(0)}(5,3)| + |S^{(\neq 0)}(5,3)| = |S(4,3)| + \frac{5^2-1}{4} = 4+6 = 10. \tag{2.22}$$

Por (2.18) y el Lema 2.4 $|S(6,3)| = |S^{(0)}(6,3)| + |S^{(\neq 0)}(6,3)| = |S(5,3)| + |S^{(\neq 0)}(6,3)|$ luego por (2.22) y (2.20) tenemos:

$$|S(6,3)| = 22. \tag{2.23}$$

Lema 2.12

$$|S(n,3)| = \begin{cases} \dfrac{n^3+3n^2+2n}{12} - 6 & \text{si } n \text{ es par } n \geq 6, \\ \dfrac{n^3+3n^2-n-3}{12} - 6 & \text{si } n \text{ es impar, } n \geq 7. \end{cases}$$

Dem.

Por (2.23) $|S(6,3)| = 22$ y como $\dfrac{6^3+3.6^2+2.6}{12} - 6 = 22$ se verifica el lema para $n = 6$.
Sea n es par, $n > 6$, entonces aplicando $n-5$ veces la ecuación (2.18) y teniendo en cuenta que $S^{(*)}(n) = S^{(\neq 0)}(n)$ y (2.8) resulta:

$$|S(n,3)| = |S(5,3)| + \sum_{i=6}^{n-1} |S^{(*)}(i,3)| + |S^{(*)}(n,3)|.$$

Por (2.21) $|S^{(*)}(i,3)| = |S^{(*)}(i+1,3)|$ para i par $6 \leq i \leq n-1$ entonces por (2.22) y el Corolario 2.6

$$|S(n,3)| = |S(5,3)| + 2\left(\sum_{i=3}^{\frac{n-2}{2}} |S^{(*)}(2i,3)|\right) + |S^{(*)}(n,3)| =$$

$$10 + 2\left(\sum_{i=3}^{\frac{n-2}{2}} \frac{(2i)^2+2(2i)}{4}\right) + \frac{n^2+2n}{4} = 10 + 2\left(\sum_{i=3}^{\frac{n-2}{2}} (i^2+i)\right) + \frac{n^2+2n}{4} =$$

$$10 + 2\sum_{i=3}^{\frac{n-2}{2}} i^2 + 2\sum_{i=3}^{\frac{n-2}{2}} i + \frac{n^2+2n}{4} =$$

$$10 + 2\left(\left(\sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} i^2\right) - 5\right) + 2\left(\left(\sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} i\right) - 3\right) + \frac{n^2+2n}{4} =$$

$$10 + 2\left(\frac{2(\frac{n-2}{2})^3 + 3(\frac{n-2}{2})^2 + \frac{n-2}{2}}{6} - 5\right) + 2\left(\frac{\frac{n-2}{2}(\frac{n-2}{2}+1)}{2} - 3\right) + \frac{n^2+2n}{4} =$$

$$\frac{\frac{(n-2)^3}{4} + 3(\frac{(n-2)^2}{4}) + \frac{2n-4}{4}}{3} + \frac{n-2}{2}\left(\frac{n-2}{2}+1\right) - 6 + \frac{n^2+2n}{4} =$$

$$\frac{n^3-6n^2+12n-8+3n^2-12n+12+2n-4}{12} + \frac{n^2-2n}{4} - 6 + \frac{n^2+2n}{4} =$$

$$\frac{n^3-3n^2+2n}{12} + \frac{3n^2-6n}{12} - 6 + \frac{3n^2+6n}{12} = \frac{n^3+3n^2+2n}{12} - 6.$$

Si $n = 7$ entonces por (2.18), (2.23) y el Lema 2.11

$$|S(7,3)| = |S(6,3)| + |S^{(*)}(7,3)| = 22 + \frac{7^2-1}{4} = 22 + 12 = 34$$

y como

$$\frac{7^3+3.7^2-7-3}{12}-6=\frac{343+147-10}{12}-6=\frac{480}{12}-6=40-6=34,$$

entonces el lema se verifica para $n=7$. Supongamos ahora que n es impar, $n>7$, aplicando $n-6$ veces la ecuación (2.18) y teniendo en cuenta (2.22) tenemos:

$$|S(n,3)|=|S(5,3)|+\sum_{i=6}^{n}|S^{(*)}(i,3)|=10+\sum_{i=6}^{n}|S^{(*)}(i,3)|.$$

Por (2.21) $|S^{(*)}(i,3)|=|S^{(*)}(i+1,3)|$ para i par $6\leq i\leq n-1$ entonces por el Corolario 2.6 resulta:

$$|S(n,3)|=10+2\left(\sum_{i=3}^{\frac{n-1}{2}}|S^{(*)}(2i,3)|\right)=$$

$$10+2\left(\left(\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}i^2\right)-5\right)+2\left(\left(\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}i\right)-3\right)=$$

$$10+2\left(\frac{2(\frac{n-1}{2})^3+3(\frac{n-1}{2})^2+\frac{n-1}{2}}{6}-5\right)+2\left(\frac{\frac{n-1}{2}(\frac{n-1}{2}+1)}{2}-3\right)=$$

$$\frac{\frac{(n-1)^3}{4}+3\frac{(n-1)^2}{4}+\frac{2n-2}{4}}{3}+\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)-6=$$

$$\frac{n^3-3n^2+3n-1+3n^2-6n+3+2n-2}{12}+\frac{(n-1)^2}{4}+\frac{n-1}{2}-6=$$

$$\frac{n^3-n}{12}+\frac{n^2-2n+1}{4}+\frac{n-1}{2}-6=$$

$$\frac{n^3-n+3n^2-6n+3+6n-6}{12}-6=\frac{n^3+3n^2-n-3}{12}-6.$$

■

Por (2.4), (2.6), el Corolario 2.3, el Lema 2.8 y el Corolario 2.1: $|S(4)|=\sum_{h=0}^{3}|S(4,h)|=1+2+4+|S(3)|$, y como por (2.19) $|S(3)|=4$ entonces:

$$|S(4)|=11. \tag{2.24}$$

Por (2.4), (2.6), el Corolario 2.3, el Lema 2.8, el Corolario 2.1, (2.22) y (2.24):

$$|S(5)|=\sum_{h=0}^{4}|S(5,h)|=1+2+7+10+11=31. \tag{2.25}$$

Pongamos

$$F(n)=\begin{cases}\dfrac{(n+2)^2}{4}, & \text{si } n \text{ es par } n\geq 6,\\[2ex] \dfrac{(n+1)^2}{4}, & \text{si } n \text{ es impar } n\geq 7.\end{cases} \tag{2.26}$$

Teorema 2.1 (A) *Si n par, $n \geq 6$:*

$$|S(n)| = 2|S(n-1)| + F(n) + \sum_{h=4}^{n-2} |S^{(\neq 0)}(n,h)|.$$

(B) *Si n es impar, $n \geq 7$:*

$$|S(n)| = 2|S(n-1)| + F(n) + \sum_{h=4}^{n-2} |S^{(\neq 0)}(n,h)|.$$

Dem. Por (2.5):

$$|S(n)| = \sum_{i=0}^{n-1} |S^{(0)}(n,i)| + \sum_{i=0}^{n-1} |S^{(\neq 0)}(n,i)|.$$

De (2.6), el Lema 2.4 y (2.7):

$$\sum_{i=0}^{n-1} |S^{(0)}(n,i)| = |S^{(0)}(n,0)| + \sum_{i=1}^{n-2} |S^{(0)}(n,i)| + |S^{(0)}(n,n-1)| =$$

$$1 + \sum_{i=1}^{n-2} |S(n-1,i)| + 0 = |S(n-1,0)| + \sum_{i=1}^{n-2} |S(n-1,i)| = \sum_{i=0}^{n-2} |S(n-1,i)|.$$

Luego

$$\sum_{i=0}^{n-1} |S^{(0)}(n,i)| = |S(n-1)|. \tag{2.27}$$

Como $|S^{(\neq 0)}(n,0)| = 0$ entonces

$$\sum_{i=0}^{n-1} |S^{(\neq 0)}(n,i)| = \sum_{i=1}^{n-1} |S^{(\neq 0)}(n,i)|.$$

Por el Corolario 2.1

$$\sum_{i=1}^{n-1} |S^{(\neq 0)}(n,i)| = \sum_{i=1}^{n-2} |S^{(\neq 0)}(n,i)| + |S^{(\neq 0)}(n,n-1)| =$$

$$\sum_{i=1}^{n-2} |S^{(\neq 0)}(n,i)| + |S(n-1)|.$$

Luego

$$\sum_{i=1}^{n-1} |S^{(\neq 0)}(n,i)| = \sum_{i=1}^{3} |S^{(\neq 0)}(n,i)| + \sum_{i=4}^{n-2} |S^{(\neq 0)}(n,i)| + |S(n-1)|. \tag{2.28}$$

Si n es par, $n \geq 6$ entonces por el Lema 2.3, Corolario 2.4 y Corolario 2.6

$$\sum_{i=1}^{3} |S^{(\neq 0)}(n,i)| = 1 + \frac{n}{2} + \frac{n^2+2n}{4} = 1 + n + \frac{n^2}{4} = \frac{(n+2)^2}{4} = F(n). \tag{2.29}$$

Luego de (2.27), (2.28) y (2.29) resulta (A).

Si n es impar, $n \geq 7$ como por el Lema 2.3, $|S^{(\neq 0)}(n,1)| = 0$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{3} |S^{(\neq 0)}(n,i)| = \sum_{i=2}^{3} |S^{(\neq 0)}(n,i)|.$$

Luego por Corolario 2.4 y el Lema 2.11

$$\sum_{i=1}^{3} |S^{(\neq 0)}(n,i)| = \frac{n+1}{2} + \frac{n^2-1}{4} = \frac{(n+1)^2}{4} = F(n). \tag{2.30}$$

De (2.30), (2.28) y (2.27) resulta (B).

■

F. Ruskey, R. Cohen, P. Eades y A. Scott [8] implementaron un programa para determinar $|S(n)|$ utilizando que $|S(n)| = \sum\limits_{i=0}^{n-1} |S(n,i)|$, (ver 2.4). Para $1 \leq n \leq 11$ indican la siguiente tabla con los números $|S(n,i)|$, para $0 \leq i \leq n-1$.

	n										
$\|S(n,i)\|$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\|S(n,0)\|$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\|S(n,1)\|$	–	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5
$\|S(n,2)\|$		–	2	4	7	10	14	18	23	28	34
$\|S(n,3)\|$			–	4	10	22	34	54	74	104	134
$\|S(n,4)\|$				–	11	35	78	138	223	333	479
$\|S(n,5)\|$					–	31	110	267	503	866	1.356
$\|S(n,6)\|$						–	102	389	968	1.927	3.417
$\|S(n,7)\|$							–	342	1.352	3.496	7.221
$\|S(n,8)\|$								–	1.213	4.895	12.892
$\|S(n,9)\|$									–	4.361	17.793
$\|S(n,10)\|$										–	16.016
$\|S(n,11)\|$											–
$\|S(n)\|$	1	2	4	11	31	102	342	1.213	4.361	16.016	59.348

F. Ruskey, R. Cohen, P. Eades y A. Scott [8] también indican los valores de $|S(n)|$, para $1 \leq n \leq 16$, pero no indican el tiempo de procesamiento utilizado para determinar $|S(n)|$. Todos sus resultados numéricos coinciden con los indicados en la sucesión A004251 que aparece en la *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*,

(http://www.research.att.com/∼njas/sequences/index.html)

y con nuestros resultados [7].

Por	conocemos
la ecuación (2.6)	$\|S(n,0)\|$
el Corolario 2.3	$\|S(n,1)\|$
el Lema 2.8	$\|S(n,2)\|$
el Lema 2.12	$\|S(n,3)\|$
la ecuación (2.7)	$\|S^{(0)}(n,n-1)\| = 0$
el Corolario 2.1	$\|S^{(\neq 0)}(n,n-1)\| = \|S(n-1)\|$
el Lema 2.4	si $n \geq 4$ entonces $\|S^{(0)}(n,i)\| = \|S(n-1,i)\|$, para $1 \leq i \leq n-2$.

Todos estos resultados y la determinación de los números indicados a continuación en **negrita**, vía el programa realizado por A. Claverie (ver sección 3), nos permiten indicar la siguiente tabla. Por la ecuación (2.3) $|S(n,i)| = |S^{(0)}(n,i)| + |S^{(\neq 0)}(n,i)|$ para $1 \leq n \leq 11$, $0 \leq i \leq n-1$. Estos valores conciden con los indicados en la tabla anterior.

	n										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\|S(n,0)\|$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\|S(n,1)\|$	–	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5
$\|S(n,2)\|$		–	0	4	7	10	14	18	23	28	34
$\|S(n,3)\|$			–	4	10	22	34	54	74	104	134
$\|S^{(0)}(n,4)\|$				–	0	11	35	78	138	223	333
$\|S^{(\neq 0)}(n,4)\|$					11	**24**	**43**	**60**	**85**	**110**	**146**
$\|S^{(0)}(n,5)\|$					–	0	31	110	267	503	866
$\|S^{(\neq 0)}(n,5)\|$						31	**79**	**157**	**236**	**363**	**490**
$\|S^{(0)}(n,6)\|$						–	0	102	389	968	1.927
$\|S^{(\neq 0)}(n,6)\|$							102	**287**	**579**	**959**	**1.490**
$\|S^{(0)}(n,7)\|$							–	0	342	1.352	3.496
$\|S^{(\neq 0)}(n,7)\|$								342	**1.010**	**2.144**	**3.725**
$\|S^{(0)}(n,8)\|$								–	0	1.213	4.895
$\|S^{(\neq 0)}(n,8)\|$									1.213	**3.682**	**7.997**
$\|S^{(0)}(n,9)\|$									–	0	4.361
$\|S^{(\neq 0)}(n,9)\|$										4.361	**13.432**
$\|S^{(0)}(n,10)\|$										–	0
$\|S^{(\neq 0)}(n,10)\|$											16.016
$\|S(n)\|$	1	2	4	11	31	102	342	1.213	4.361	16.016	59.348

Si $n \geq 6$ una vez determinado $|S(n-1)|$, por el Teorema 2.1 para conocer $|S(n)|$ solo hay que determinar el número de elementos de los conjuntos $S^{(\neq 0)}(n,h)$ para $4 \leq h \leq n-2$, esto es, de aquellas sucesiones de n números naturales tales que:

$$h = x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n, \tag{2.31}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ es un número par,} \tag{2.32}$$

$$A_x(j) = \sum_{k=1}^{j} x_k \leq j(j-1) + \sum_{k=j+1}^{n} (j \wedge x_k) = B_x(j), \text{ para } 2 \leq j \leq s, \tag{2.33}$$

donde $s \leq n-1$ es el mayor entero tal que $x_s \geq s-1$.

A continuación indicamos los números

$$|S^{(\neq 0)}(n,h)|, \text{ para } 6 \leq n \leq 18, \; 4 \leq h \leq n-2$$

obtenidos, vía el programa computacional realizado por A. Claverie (ver sección 3).

Tabla A

	n						
h	6	7	8	9	10	11	12
4	24	43	60	85	110	146	182
5	–	79	157	236	363	490	693
6		–	287	579	959	1.490	2.174
7			–	1.010	2.144	3.725	6.049
8				–	3.682	7.997	14.557
9					–	13.432	29.964
10						–	49.753
$\sum_{h=4}^{n-2} \lvert S^{(\neq 0)}(n,h)\rvert$	24	122	504	1.910	7.258	27.280	103.372

Tabla B

	n					
h	13	14	15	16	17	18
4	231	280	344	408	489	570
5	896	1.204	1.512	1.956	2.400	3.015
6	3.104	4.283	5.832	7.752	10.197	13.167
7	9.145	13.551	19.293	27.178	37.220	50.554
8	24.260	38.093	57.762	84.996	122.494	172.958
9	56.254	96.613	155.832	242.496	365.528	539.682
10	112.869	217.711	382.630	632.821	1.005.574	1.550.134
11	185.273	426.873	840.666	1.509.879	2.549.381	4.132.283
12	–	695.550	1.620.898	3.249.216	5.942.684	10.222.980
13		–	2.624.083	6.175.316	12.560.494	23.349.000
14			–	9.950.140	23.599.474	48.603.970
15				–	37.874.735	90.430.591
16					–	144.679.142
$\sum_{h=4}^{n-2} \lvert S^{(\neq 0)}(n,h)\rvert$	392.032	1.494.158	5.708.852	21.882.158	84.070.670	323.748.046

Los tiempos de procesamiento, en una PC (Pentium IV, de 2,4 GHz), para la determinación de los números

$$|S^{(\neq 0)}(n,h)|, \quad \text{para} \;\; 6 \leq n \leq 12, \quad 4 \leq h \leq n-2,$$

fueron inferiores a un segundo. En los restantes casos:

Tiempo de procesamiento		
n	minutos	segundos
13	–	1
14	–	3
15	–	9
16	–	31
17	2	41
18	12	20

Observemos que por la ecuación (2.26):

$$F(n+1) = \begin{cases} F(n), & \text{si } n \text{ es par } n \geq 6, \\ \\ F(n) + n + 2, & \text{si } n \text{ es impar } n \geq 7. \end{cases}$$

Luego a partir de $F(6) = 16$ se obtienen inmediatamente $F(j)$ para, $7 \leq j \leq 18$.

Aplicando el Teorema 2.1 y teniendo en cuenta los valores indicados en las tablas A y B:

n	$2S(n-1)$	$F(n)$	$\sum_{h=4}^{n-2} \lvert S^{(\neq 0)}(n,h) \rvert$	$\lvert S(n) \rvert$
6	62	16	24	102
7	204	16	122	342
8	684	25	504	1.213
9	2.426	25	1.910	4.361
10	8.722	36	7.258	16.016
11	32.032	36	27.280	59.348
12	118.696	49	103.372	222.117
13	444.234	49	392.032	836.315
14	1.672.630	64	1.494.158	3.166.852
15	6.333.704	64	5.708.852	12.042.620
16	24.085.240	81	21.882.158	45.967.479
17	91.934.958	81	84.070.670	176.005.709
18	352.006.418	100	323.748.046	675.759.564

Todos estos resultados numéricos coinciden con los indicados en la sucesión A004251 que aparece en la *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*,

(http://www.research.att.com/∼njas/sequences/index.html)

donde solo se indican los valores $|S(n)|$, para $1 \leq n \leq 18$ y con nuestros resultados [7], donde indicamos los valores $|S(n)|$, para $1 \leq n \leq 23$.

3. El programa de A. Claverie

```
#include <cstdlib>
#include <iostream>
#include <time.h>

using namespace std;

const int TopeLongWord=999999999;
struct SLW // Define LongWord extendido
  {
     int MenosSig;
     int MasSig;

  };

int piso[50];
int rama[50];
SLW h[50];
FILE *fp;

SLW IncrementaSLW(SLW valor)
 {
     if (valor.MenosSig==TopeLongWord)
    {
        valor.MenosSig=0;
        valor.MasSig++;
    }
    else valor.MenosSig++;

    return (valor);
 }

int Min(int a, int b)
 {
    if (a<b) return a; else return b;
 }

bool CondicionV(int N) // CONDICION V
 {
    int k=2,i,xi,mink,s;
    bool aux=1;

    for (i=1;i<=(N-1);i++)
        if (rama[i]>=(i-1))
          s=i;
```

```
        while(aux and (k<=s))
        {
            xi=0; for (i=1;i<=k;i++) xi=xi+rama[i];
            mink=0; for (i=(k+1);i<=N;i++) mink=mink+Min(k,rama[i]);
            aux=(xi<=(k*(k-1)+mink));
            k++;
        }
        return aux;
    }
//Rutina Principal
void EvaluaSucesion(int prof, int sumasucesion, int techo,int N)
 {
    int i;
    for (i=piso[prof];i<=techo;i++)
    {
        rama [prof]=i;
        if (prof<N)
          // Tercer parametro segun CONDICION II
          EvaluaSucesion(prof+1,sumasucesion+i,i,N);
        else
          // si CONDICION IV y CONDICION V
          if ((((sumasucesion+i) %2)==0) and CondicionV(N))
            h[rama[1]]=IncrementaSLW(h[rama[1]]);
    };
 }
//fin de rutina principal
int main(int argc, char *argv[])
 {
    char nombrearchivo[50];
    time_t comienzo, final;
    int i,dt,ddia,dhor,dmin,dseg,N;

    N=atoi(argv[1]);
    //Chequea que el parametro de entrada este entre los valores permitidos
    if ((N < 6) | (N > 32))
    {
        cout<<"Parametro ingresado incorrecto. \n";
        cout<<"El parametro ingresado debe ser un numero entero entre 6 y 32 \n";
        return EXIT_SUCCESS;
    }
    for (i=1;i<=N;i++)
    {
        h[i].MenosSig=0;
        h[i].MasSig=0;
    }
```

```
for (i=1;i<=N;i++)
    piso[i]=1;
piso[1]=4; //x1 >= 4      CONDICION I
piso[2]=1; //x2 >= 1      CONDICION III
piso[3]=1; //x3 >= 1      CONDICION III

//Define el nombre y abre archivo de salida
sprintf(nombrearchivo,"salida %s.txt",argv[1]);
fp=fopen(nombrearchivo,"w");

printf("\n N= %d procesando... n",N);
fprintf(fp,"\n N= %d  n",N);

comienzo=time(NULL); //Marca tiempo de inicio

//Inicia rutina principal (tercer parametro segun condicion I)
EvaluaSucesion(1,0,N-2,N);

final=time(NULL); //Marca tiempo de finalizacion

//Registra en pantalla y archivo los resultados
for (i=1;i<=N;i++)
      if (h[i].MasSig!=0)
      {
            printf("\n h= %3u -> %11u %09u",i,h[i].MasSig,h[i].MenosSig);
            fprintf(fp,"\n h= %3u -> %11u %09u",i,h[i].MasSig,h[i].MenosSig);
      }
      else if (h[i].MenosSig!=0)
            {
                  printf("\n h= %3u -> %20u",i,h[i].MenosSig);
                  fprintf(fp,"\n h= %3u -> %20u",i,h[i].MenosSig);
            }
//Calcula tiempo de procesamiento
dt=difftime(final, comienzo);
ddia=(dt / 86400);
dhor=((dt-ddia*86400)/3600);
dmin=((dt-ddia*86400-dhor*3600)/60);
dseg=(dt-ddia*86400-dhor*3600-dmin*60);

//Registra tiempo de procesamiento en archivo de salida
fprintf(fp, "\n Tiempo de procesamiento:");
if (ddia!=0) fprintf(fp, " %u dia(s)",ddia);
if (dhor!=0) fprintf(fp, " %u hora(s)",dhor);
if (dmin!=0) fprintf(fp," %u minuto(s)",dmin);
fprintf(fp," %u segundo(s) \n",dseg);

fclose(fp);

return EXIT_SUCCESS;
}
```

Referencias

[1] Adams, P., Eggleton, R.B. and MacDougall, J.A. , *Structure of Graph Posets for orders 4 to 8*, Congressus Numeration 166 (2004), 63-81.

[2] Brualdi, R. A. and Ryser H. J., *Combinatorial matrix theory*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Vol. 39, Cambridge University Press (1991).

[3] Erdös P. and Gallai T., *Graphs with given degree vertices*, Math. Lapok 11 (1960), 264-274.

[4] Harary F., *Problems involving graphical numbers*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 4. Combinatorial Theory and its applications II (1970), 625-635.

[5] Harary F. and Palmer E., *Graphical enumeration*, Academic Press, 1973.

[6] Ledley R. S., *Programming and utilizing digital computers*, MacGraw Hill (1962). Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 382-388.

[7] Monteiro L., Kremer A. y Claverie A., *Grafos simples no isomorfos con n vértices y $(0,1)$-matrices booleanas de orden n simétricas con diagonal nula*, Informes Técnicos Internos 91, INMABB-CONICET, (2005), 70 pág.

[8] Ruskey F., Cohen R., Eades P. and Scott A., *Alley CAT's in search of good homes*, 25th. S.E. Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numeratium, 102 (1994), 97-110.

[9] Stein, P. R., *On the number of graphical partitions*, Proc. 9th S-E Conf. Combinatorics, Graph Theory, Computing, Congr. Numer. 21 (1978), 671-684.

[10] Tripathi A., and Vijay S., *A note on a theorem of Erdös* & *Gallai*, Discrete Mathematics 265 (2003), 417-420.