Subálgebras maximales de un Algebra de Łukasiewicz trivalente finita

Luiz Monteiro y Sonia Savini

luizmont@criba.edu.ar, ssavini@criba.edu.ar

Resumen

A. Monteiro conjeturó que las subálgebras maximales de un álgebra de Łukasiewicz trivalente A se pueden caracterizar en términos de los filtros primos del reticulado A y que existen tres tipos de subálgebras maximales: Tipo I, Tipo II y Tipo III (ver sección 2).

R. Cignoli y L. Monteiro [4], como consecuencia de resultados mas generales probaron que tal conjectura es verdadera y en el caso en que A es finita no trivial determinaron el cardinal del conjunto de las subálgebras de Tipo I, Tipo II y Tipo III.
En estas notas indicamos (ver secciones 3 y 4) dos formas diferentes de determinar el número de clases de equivalencia por isomorfismos para cada tipo de subálgebras maximales de un álgebra finita no trivial.

1. Preliminares

Si A es un reticulado distributivo acotado no trivial, notaremos con $\mathbf{P}(A)$ el conjunto de todos los filtros primos de A, $B(A)$ el conjunto de todos los elementos booleanos de A y si $a, b \in A$ son tales que $a \leq b$, $[a, b] = \{x \in A : a \leq x \leq b\}$, $[a) = \{x \in A : a \leq x\}$ y $(a] = \{x \in A : x \leq a\}$.
Si A es finito no trivial entonces es bien conocido que $P \in \mathbf{P}(A)$ si y solo si $P = [p)$, donde p es un elemento primo de A.

Si A es un álgebra de De Morgan, (ver por ejemplo [10, 11]), no trivial y $P \in \mathbf{P}(A)$, sea $\varphi(P) = \complement \sim P = \sim \complement P$. Por los resultados de A. Bialynicki-Birula y H. Rasiowa [2, 3] sabemos que $\varphi(P) \in \mathbf{P}(A)$.

Sea B un álgebra de Boole, si $x \in B$ notaremos con $-x$ el complemento booleano de x. Si $X \subseteq B$ notaremos con $BS(X)$ la subálgebra de B generada por X. Si S es una subálgebra de B y $g \in B$ notaremos con $BS(S, g)$ a la subálgebra de B generada por el conjunto $S \cup \{g\}$. Si B es finita no trivial notaremos con $\mathcal{A}(B)$ el conjunto de todos los átomos de B.

Un álgebra de Łukasiewicz trivalente es un álgebra $(L, \wedge, \vee, \sim, \nabla, 1)$ de tipo $(2, 2, 1, 1, 0)$ donde $(L, \wedge, \vee, \sim, 1)$ es un álgebra de De Morgan y ∇ es un operador que verifica:
$\sim x \vee \nabla x = 1$, $x \wedge \sim x = \sim x \wedge \nabla x$ y $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$.
La noción de álgebra de Łukasiewicz trivalente, fue introducida y su teoría desarrollada por Gr. Moisil [5], [6], [7]. Ver también [8, 9, 12],[13].
Es bien conocido que si $\Delta x = \sim \nabla \sim x$ entonces $x \wedge \Delta \sim x = 0$, $x \vee \sim x = x \vee \Delta \sim x$ y $\Delta(x \vee y) = \Delta x \vee \Delta y$.

En toda álgebra de Łukasiewicz trivalente A vale el principio de determinación de Moisil [6], [14], esto es: si $x, y \in A$ son tales que $\nabla x = \nabla y$ y $\Delta x = \Delta y$ entonces $x = y$. Si L y L' son álgebras de Łukasiewicz isomorfas notaremos $L \cong L'$.

Un elemento e de un álgebra de Łukasiewicz trivalente A se dice un *eje* de A, si $\Delta e = 0$ y $\nabla x \leq \Delta x \vee \nabla e$, para todo $x \in A$. Si un álgebra de Łukasiewicz trivalente tiene eje él es único y $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x = (\Delta x \vee \sim e) \wedge \nabla x$, cualquiera que sea $x \in A$. Observemos que $\Delta e = 0$ equivale a $e \leq \sim e$. Si A es finita entonces tiene eje e. Sea $\Delta_0(A) = \{x \in A : \Delta x = 0\}$, entonces (ver [16]):

$$\Delta_0(A) = [0, e]. \tag{1.1}$$

Además $[0, e]$ es un álgebra de Boole donde el complemento booleano de un elemento $x \in [0, e]$ se define por $-x = \sim \nabla x \wedge e$, [1].

Un álgebra de Łukasiewicz trivalente A se dice *centrada* si existe un elemento $c \in A$ denominado *centro* de A, tal que $\sim c = c$, lo que es equivalente a $\Delta c = 0$ y $\nabla c = 1$. Claramente todo centro es un eje de A, pero no todo eje es un centro. Sabemos que toda álgebra de Boole es un álgebra de Łukasiewicz trivalente que tiene por eje a 0. Si L es un álgebra de Łukasiewicz trivalente con eje e que no es centrada ni un álgebra de Boole entonces $e \neq 0, 1$.

Si A tiene centro c entonces [1]

$$\Delta_0(A) = [0, c] \cong B(A). \tag{1.2}$$

Si A es un álgebra de Łukasiewicz trivalente y $X \subseteq A$, notaremos $LS(X)$ a la subálgebra de Łukasiewicz de A generada por X. Si $X = Y \cup \{x\}$, donde $Y \subseteq A$ y $x \in A$, notaremos $LS(Y, x)$ en vez de $LS(Y \cup \{x\})$.

Si A es un álgebra con eje e, S^* una subálgebra booleana de $B(A)$ y $z \in \Delta_0(A)$ entonces ([15], pag. 41)

$$A^* = LS(S^*, z) = \{(s_1 \wedge \sim \nabla z) \vee (s_2 \wedge \nabla z) \vee (s_3 \wedge z) : s_1, s_2, s_3 \in S^*\}.$$

Además:

$$B(A^*) = BS(S^*, \nabla z), \tag{1.3}$$

$$z \text{ es el eje de } A^*, \tag{1.4}$$

Luego

$$LS(B(A), z) = \{s_1 \vee (s_2 \wedge z) : s_1, s_2 \in B(A)\}. \tag{1.5}$$

Si A tiene eje e como $x = \Delta x \vee (\nabla x \wedge e)$, para todo $x \in A$ entonces

$$LS(B(A), e) = A. \tag{1.6}$$

M. Abad, L. Monteiro, S. Savini y J. Sewald [1] indicaron como construir todas las subálgebras de un álgebra de Łukasiewicz trivalente finita no trivial A y además determinaron el número de subálgebras de A. Recordemos la construcción: dada una subálgebra booleana S^* de $B(A)$ y $z \in \Delta_0(A)$ se construye $A^* = LS(S^*, z)$ y todas las subálgebras de A se obtienen de este modo.

Consideremos las siguientes álgebras de Łukasiewicz $L_2 = \{0, 1\}$ y $L_3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Si A es un álgebra de Łukasiewicz trivalente no trivial, entonces es bien conocido que:

$$A \cong (L_2)^m \times (L_3)^{n-m}, \text{ donde } m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \ \ n \geq 1 \text{ y } 0 \leq m \leq n$$

y que $B(A) \cong (L_2)^n$.

Si $n - m = 1$ y e es el eje de A entonces $[0, e] \cong L_2$.

Si $m \geq 1$ y $n - m \geq 1$ entonces A es un álgebra con eje e, que no es un álgebra de Boole ni un álgebra centrada. En [1] (Observación 1.2) se probó que:

$$m = |\{a \in \mathcal{A}(B(A)) : a \leq \sim \nabla e\}| \text{ y } n - m = |\{a \in \mathcal{A}(B(A)) : a \leq \nabla e\}|. \tag{1.7}$$

2. La conjetura de A. Monteiro

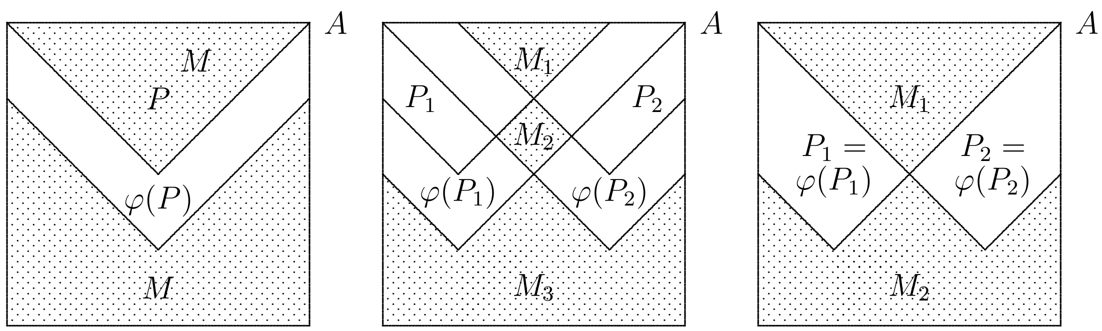
A. Monteiro conjeturó que las subálgebras maximales M de un álgebra de Łukasiewicz trivalente A, tal que $|A| > 2$, son del siguiente tipo:

Tipo I) $M = P \cup \complement\varphi(P) = P \cup \sim P$, donde $P \in \mathbf{P}(A)$, $P \subseteq \varphi(P)$, $P \neq \varphi(P)$,

Tipo II) $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ donde $M_1 = P_1 \cap P_2$, $M_2 = (\varphi(P_1) \setminus P_1) \cap (\varphi(P_2) \setminus P_2)$, $M_3 =\sim P_1 \cap \sim P_2$ y $P_1, P_2 \in \mathbf{P}(A)$ son tales que $P_1 \subseteq \varphi(P_1)$, $P_1 \neq \varphi(P_1)$, $P_2 \subseteq \varphi(P_2)$, $P_2 \neq \varphi(P_2)$, $P_1 \neq P_2$,

Tipo III) $M = M_1 \cup M_2$ donde $M_1 = P_1 \cap P_2$, $M_2 =\sim P_1 \cap \sim P_2$ y $P_1, P_2 \in \mathbf{P}(A)$, $P_1 = \varphi(P_1)$, $P_2 = \varphi(P_2)$, $P_1 \neq P_2$,

y en sus notas solamente aparecen figuras similares a las siguientes:



Tipo I Tipo II Tipo III

Observemos que si A es un álgebra de Łukasiewicz entonces sus subálgebras S de Tipo I verifican $B(A) \subseteq S$ y que las de Tipo II y III verifican $B(A) \not\subseteq S$.
Si p y q son enteros no negativos, pongamos:

$$\binom{p}{q} = \begin{cases} \dfrac{p!}{q!(p-q)!} & \text{si } p \geq q, \\ 0 & \text{si } p < q. \end{cases}$$

R. Cignoli y L. Monteiro [4] como consecuencia de resultados mas generales probaron que la conjetura de Antonio Monteiro es verdadera y además que la cantidad de subálgebras maximales de $A \cong (L_2)^m \times (L_3)^{n-m}$, donde $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \geq 1$ y $0 \leq m \leq n$ es:

Tipo I	Tipo II	Tipo III
$n-m$	$\binom{n-m}{2}$	$\binom{m}{2}$

Tabla 2.1

3. Primera construcción

(A1) Si A es un álgebra de Boole entonces $n = m$ esto es $A \cong (L_2)^m$. Si $m = 1$, entonces A no tiene subálgebras maximales. Si $m > 1$ entonces es bien conocido que las subálgebras maximales de A son isomorfas a $(L_2)^{m-1}$, $|\mathbf{P}((L_2)^m)| = m$ y cualquiera que sea el filtro primo P de $(L_2)^m$ se verifica $\varphi(P) = P$.
Luego si $P, Q \in \mathbf{P}(A)$, $P \neq Q$ entonces $(P \cap Q) \cup (\sim P \cap \sim Q)$, es una subálgebra maximal de A de Tipo III. De este modo obtenemos $\binom{m}{2}$, subálgebras maximales.

(A2) Si A es un álgebra centrada, entonces $m = 0$, esto es $A \cong (L_3)^n$.

(A21) Si $A \cong L_3$ entonces A tiene una sola subálgebra maximal que es $S = \{0, 1\}$ isomorfa a L_2 y de Tipo I.

(A22) Si $A \cong (L_3)^n$, con $n \geq 2$ entonces los elementos primos de A son las siguientes n-uplas

$$p^{(i)} = (p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \ldots, p_n^{(i)}), \;\; 1 \leq i \leq n,$$

donde $p_i^{(i)} = \frac{1}{2}$ y $p_h^{(i)} = 0$, para $h \neq i$, $1 \leq h \leq n$
y

$$q^{(i)} = (q_1^{(i)}, q_2^{(i)}, \ldots, q_n^{(i)}), \;\; 1 \leq i \leq n,$$

donde $q_i^{(i)} = 1$ y $q_h^{(i)} = 0$, para $h \neq i$, $1 \leq h \leq n$.
Luego los filtros primos de A son $P^{(i)} = [p^{(i)})$ y $Q^{(i)} = [q^{(i)})$, para $1 \leq i \leq n$, y es claro que:

$$Q^{(i)} \subseteq \varphi(Q^{(i)}) = P^{(i)}, \;\; Q^{(i)} \neq \varphi(Q^{(i)}), \;\; \text{para } \; 1 \leq i \leq n.$$

Como $|Q^{(i)}| = |[q^{(i)})| = 3^{n-1}$, $| \sim Q^{(i)}| = |(\sim q^{(i)}]| = 3^{n-1}$ y $Q^{(i)} \cap \sim Q^{(i)} = \emptyset$ entonces $|Q^{(i)} \cup \sim Q^{(i)}| = 2 \,.\, 3^{n-1}$. Luego a partir de los filtros primos $Q^{(i)}$, $1 \leq i \leq n$, obtenemos n subálgebras maximales de Tipo I todas isomorfas a $L_2 \times (L_3)^{n-1}$.
Además si $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$, entonces:

$$|M_1^{(i,j)}| = |Q^{(i)} \cap Q^{(j)}| = |[q^{(i)} \vee q^{(j)})| = 3^{n-2},$$

$$|M_2^{(i,j)}| = |\varphi(Q^{(i)}) \cap \complement Q^{(i)} \cap \varphi(Q^{(j)}) \cap \complement Q^{(j)}| = |[p^{(i)}) \cap (\sim p^{(i)}] \cap [p^{(j)}) \cap (\sim p^{(j)}]| =$$
$$|[p^{(i)} \vee p^{(j)}) \cap (\sim p^{(i)} \wedge \sim p^{(j)}]| = |[p^{(i)} \vee p^{(j)}) \cap (\sim (p^{(i)} \vee p^{(j)}]| = 3^{n-2},$$

y

$$|M_3^{(i,j)}| = | \sim Q^{(i)} \cap \sim Q^{(j)}| = |(\sim q^{(i)}] \cap (\sim q^{(j)}]| = |(\sim q^{(i)} \wedge \sim q^{(j)}]| = 3^{n-2}.$$

Como los conjuntos $M_1^{(i,j)}, M_2^{(i,j)}$ y $M_3^{(i,j)}$ son disjuntos dos a dos entonces:

$$|M_1^{(i,j)} \cup M_2^{(i,j)} \cup M_3^{(i,j)}| = 3\ .3^{n-2} = 3^{n-1}.$$

Luego a partir de los filtros primos $Q^{(i)}$, $1 \le i \le n$, obtenemos $\binom{n}{2}$ subálgebras del Tipo II todas isomorfas a $(L_3)^{n-1}$. Luego si $n \geq 2$ existen $n + \binom{n}{2}$ subálgebras maximales de $(L_3)^n$.

		$L_3,\ m=0,\ n=1$	$(L_3)^n,\ m=0,\ n\geq 2$
Tipo	Nro.	subálgebras maximales isomorfas a	
I	n	L_2	$L_2 \times (L_3)^{n-1}$
II	$\binom{n}{2}$	****	$(L_3)^{n-1}$
III	0	****	****

(A3) Si A es un álgebra con eje que no es un álgebra de Boole ni un álgebra con centro, esto es $A \cong (L_2)^m \times (L_3)^{n-m}$, donde $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ y $n - m \geq 1$. Los elementos primos de A son las siguientes n-uplas:

$$p^{(i)} = (p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \ldots, p_m^{(i)}, p_{m+1}^{(i)}, \ldots, p_n^{(i)}), \text{ para } 1 \le i \le m,$$

donde $p_i^{(i)} = 1$, $p_h^{(i)} = 0$, para $h \neq i$, $1 \le h \le n$,

$$q^{(s)} = (q_1^{(s)}, q_2^{(s)}, \ldots, q_m^{(s)}, q_{m+1}^{(s)}, \ldots, q_n^{(s)}), \text{ para } 1 \le s \le n-m$$

donde $q_{m+s}^{(s)} = \frac{1}{2}$ y $q_h^{(s)} = 0$, para $1 \le h \le n$, $h \neq m+s$
y

$$r^{(s)} = (r_1^{(s)}, r_2^{(s)}, \ldots, r_m^{(s)}, r_{m+1}^{(s)}, \ldots, r_n^{(s)}), \text{ para } 1 \le s \le n-m$$

donde $r_{m+s}^{(s)} = 1$ y $r_h^{(s)} = 0$, para $1 \le h \le n$, $h \neq m+s$.

Luego los filtros primos de A son $P^{(i)} = [p^{(i)})$, para $1 \le i \le m$, y $Q^{(s)} = [q^{(s)})$, $R^{(s)} = [r^{(s)})$, para $1 \le s \le n - m$. Es claro que:

$$P^{(i)} = \varphi(P^{(i)}), \text{ para } 1 \le i \le m,$$

y

$$R^{(s)} \subseteq \varphi(R^{(s)}) = Q^{(s)},\ R^{(s)} \neq \varphi(R^{(s)}) = Q^{(s)}, \text{ para } 1 \le s \le n-m.$$

(A31) Si $m = 1$ y $n - m = 1$ entonces en este caso solo tenemos $P^{(1)} = \varphi(P^{(1)})$ y $R^{(1)} \subseteq \varphi(R^{(1)}) = Q^{(1)}$, $R^{(1)} \neq \varphi(R^{(1)})$. Como $|R^{(1)}| = |[r^{(1)})| = 2$ y $| \sim R^{(1)}| = |(\sim r^{(1)}]| = 2$ entonces $|R^{(1)} \cup \sim R^{(1)}| = 2^2$. Luego $R^{(1)} \cup \sim R^{(1)} \cong (L_2)^2$, esto es, $B(A)$ es la única subálgebra maximal de A.

(A32) Si $m = 1$ y $n - m \geq 2$. En este caso tenemos $P^{(1)} = \varphi(P^{(1)})$, $R^{(s)} \subseteq \varphi(R^{(s)}) = Q^{(s)}$,

$R^{(s)} \neq Q^{(s)}$, para $1 \leq s \leq n-1$.
Como $|R^{(s)}| = |[r^{(s)})| = 2 \,.\, 3^{n-2}$, $1 \leq s \leq n-1$ y $|\sim R^{(s)}| = |(\sim r^{(s)}]| = 2 \,.\, 3^{n-2}$, $1 \leq s \leq n-1$ entonces $|R^{(s)} \cup \sim R^{(s)}| = 2^2 \,.\, 3^{n-2}$. Luego a partir de los filtros primos $R^{(s)}$, $1 \leq s \leq n-1$ obtenemos $(n-1)$ subálgebras maximales de Tipo I, todas isomorfas a $(L_2)^2 \times (L_3)^{n-2}$.
Para $1 \leq s, t \leq n-1$, $s \neq t$, sean

$$M_1^{(r,s)} = R^{(s)} \cap R^{(t)} = [r^{(s)} \vee r^{(t)})$$

$$M_2^{(r,s)} = \varphi(R^{(s)}) \cap \complement R^{(s)} \cap \varphi(R^{(t)}) \cap \complement R^{(t)} = [q^{(s)}) \cap [q^{(t)}) \cap (\sim q^{(s)}] \cap (\sim q^{(t)}] =$$
$$[q^{(s)} \vee q^{(t)}) \cap (\sim q^{(s)} \wedge \sim q^{(t)}] = [q^{(s)} \vee q^{(t)}) \cap (\sim (q^{(s)} \vee q^{(t)})].$$
$$M_3^{(r,s)} = \sim R^{(s)} \cap \sim R^{(t)} = (\sim r^{(s)}] \cap (\sim r^{(t)}] = (\sim r^{(s)} \wedge \sim r^{(t)}].$$

Luego

$$|M_1^{(r,s)}| = 2 \,.\, 3^{n-3}, \;\; \text{y} \;\; |M_3^{(r,s)}| = 2 \,.\, 3^{n-3}.$$

El elemento $q^{(s)} \vee q^{(t)}$ tiene coordenadas $w_v, 1 \leq v \leq n$ tales que $w_1 = 0$, $w_{1+s} = \frac{1}{2} = w_{1+t}$ y $w_{1+h} = 0$, para $1 \leq h \leq n-1$, $h \neq s, t$ y el elemento $\sim (q^{(s)} \vee q^{(t)})$ tiene coordenadas $z_v, 1 \leq v \leq n$ tales que $z_1 = 1$, $z_{1+s} = \frac{1}{2} = z_{1+t}$ y $z_{1+h} = 1$, para $1 \leq h \leq n-1$, $h \neq s, t$, luego $|M_2^{(r,s)}| = 2 \,.\, 3^{n-3}$. Como los conjuntos $M_1^{(r,s)}, M_2^{(r,s)}$ y $M_3^{(r,s)}$ son disjuntos dos a dos tenemos:

$$|M_1^{(r,s)} \cup M_2^{(r,s)} \cup M_3^{(r,s)}| = |M_1^{(r,s)}| + |M_2^{(r,s)}| + |M_3^{(r,s)}| = 3 \,.\, 2 \,.\, 3^{n-3} = 2 \,.\, 3^{n-2}.$$

Luego a partir de los filtros primos $R^{(s)}$, $1 \leq s \leq n-1$ obtenemos $\binom{n-1}{2}$ subálgebras maximales de Tipo II y todas ellas son isomorfas a $L_2 \times (L_3)^{n-2}$.

Luego en este caso tenemos un total de $(n-1) + \binom{n-1}{2}$ subálgebras maximales.

(A33) Si $m \geq 2$ y $n - m = 1$, en este caso tenemos $P^{(i)} = \varphi(P^{(i)})$, $1 \leq i \leq m$ y $R^{(1)} \subseteq \varphi(R^{(1)}) = Q^{(1)}$, $R^{(1)} \neq \varphi(R^{(1)})$.
Luego $|R^{(1)}| = |[r^{(1)})| = 2^m$ y $|\sim R^{(1)}| = |(\sim r^{(1)}]| = 2^m$. Como $R^{(1)} \cap \sim R^{(1)} = \emptyset$ entonces $|R^{(1)} \cup \sim R^{(1)}| = 2^{m+1} = 2^n$. Luego tenemos una subálgebra maximal de Tipo I isomorfa a $(L_2)^n$ que es $B(A)$.
Sean $1 \leq u, v \leq m$, $u \neq v$ y

$$M_1^{(u,v)} = P^{(u)} \cap P^{(v)} = [p^{(u)}) \cap [p^{(v)}) = [p^{(u)} \vee p^{(v)}),$$

$$M_2^{(u,v)} = \sim P^{(u)} \cap \sim P^{(v)} = (\sim p^{(u)}] \cap (\sim p^{(v)}] = (\sim (p^{(u)} \vee p^{(v)})].$$

Luego si $m = 2$, $|M_1^{(u,v)}| = 3$ y $|M_2(u,v)| = 3$, y si $m > 2$ entonces $|M_1^{(u,v)}| = 2^{m-2} \,.\, 3$ y $|M_2^{(u,v)}| = 2^{m-2} \,.\, 3$. Como $M_1^{(u,v)} \cap M_2^{(u,v)} = \emptyset$ entonces $|M_1^{(u,v)} \cup M_2^{(u,v)}| = 2 \,.2^{m-2} \,.\, 3 = 2^{m-1} \,.\, 3$.
Luego si $m = 2$ tenemos una subálgebra de Tipo III isomorfa a $L_2 \times L_3$ y si $m > 2$ tenemos $\binom{m}{2}$ subálgebras de Tipo III todas isomorfas a $(L_2)^{m-1} \times L_3$.

Por lo tanto si $m = 2$ tenemos dos subálgebras maximales y si $m > 2$ tenemos $1 + \binom{m}{2}$ subálgebras maximales.

(A34) Si $m \geq 2$ y $n - m \geq 2$, en este caso

$$|P^{(i)}| = |[p^{(i)})| = 2^{m-1} \,.\, 3^{n-m}, \; 1 \leq i \leq m.$$

$$|\sim P^{(i)}| = |(\sim p^{(i)}]| = 2^{m-1} \, . \, 3^{n-m}, \; 1 \leq i \leq m.$$

$$|Q^{(s)}| = |[q^{(s)})| = 2^m \, . \, 3^{n-m-1} \, .2 = 2^{m+1} \, . \, 3^{n-m-1}, \;\; 1 \leq s \leq n-m.$$
$$|\sim Q^{(s)}| = |(\sim q^{(s)}]| = 2^m \, . \, 3^{n-m-1} \, .2 = 2^{m+1} \, . \, 3^{n-m-1}, \;\; 1 \leq s \leq n-m.$$
$$|R^{(s)}| = |[r^{(s)})| = 2^m \, . \, 3^{n-m-1}, \; 1 \leq s \leq n-m.$$
$$|\sim R^{(s)}| = |(\sim r^{(s)}]| = 2^m \, . \, 3^{n-m-1}, \; 1 \leq s \leq n-m.$$

Como $R^{(s)} \cap \sim R^{(s)} = \emptyset$ entonces

$$|R^{(s)} \cup \sim R^{(s)}| = 2^{m+1} \, . \, 3^{n-m-1}.$$

Luego a partir de los filtros primos $R^{(s)}$, $1 \leq s \leq n-m$, obtenemos $n-m$ subálgebras maximales de Tipo I, todas ellas isomorfas a $(L_2)^{m+1} \times (L_3)^{n-m-1}$.
Si $1 \leq s, t \leq n-m$, $s \neq t$, sean

$$M_1^{(r,s)} = R^{(s)} \cap R^{(t)} = [r^{(s)}) \cap [r^{(t)}) = [r^{(s)} \vee r^{(t)}),$$

$$M_2^{(r,s)} = \varphi(R^{(s)}) \cap \complement R^{(s)} \cap \varphi(R^{(t)}) \cap \complement R^{(t)} = Q^{(s)} \cap Q^{(t)} \cap \complement R^{(s)} \cap \complement R^{(t)} =$$
$$[q^{(s)}) \cap [q^{(t)}) \cap (\sim q^{(s)}] \cap (\sim q^{(t)}] = [q^{(s)} \vee q^{(t)}) \cap (\sim q^{(s)} \wedge \sim q^{(t)}] =$$
$$[q^{(s)} \vee q^{(t)}) \cap (\sim (q^{(s)} \vee q^{(t)})],$$
$$M_3^{(r,s)} = \sim R^{(s)} \cap \sim R^{(t)} = (\sim r^{(s)}] \cap (\sim r^{(t)}] = (\sim (r^{(s)} \vee r^{(t)})].$$

Luego
$$|M_1^{(r,s)}| = 2^m \, . \, 3^{n-m-2}, \;\; |M_2^{(r,s)}| = 2^m \, .3^{n-m-2} \;\text{ y }\; |M_3^{(r,s)}| = 2^m \, . \, 3^{n-m-2}.$$
Como los conjuntos $M_1^{(r,s)}, M_2^{(r,s)}$ y $M_3^{(r,s)}$ son disjuntos dos a dos entonces:

$$|M_1^{(r,s)} \cup M_2^{(r,s)} \cup M_3^{(r,s)}| = 2^m \, . \, 3^{n-m-2} \, .3 = 2^m \, . \, 3^{n-m-1}.$$

Luego a partir de los filtros primos $R^{(s)}$, $1 \leq s \leq n-m$, obtenemos $\binom{n-m}{2}$ subálgebras maximales de Tipo II todas ellas isomorfas a $(L_2)^m \times (L_3)^{n-m-1}$.
Si $1 \leq u, v \leq m$, $u \neq v$ sean

$$M_1^{(u,v)} = P^{(u)} \cap P^{(v)} = [p^{(u)}) \cap [p^{(v)}) = [p^{(u)} \vee p^{(v)})$$

y
$$M_2^{(u,v)} = \sim P^{(u)} \cap \sim P^{(v)} = (\sim p^{(u)}] \cap (\sim p^{(v)}] = (\sim (p^{(u)} \vee p^{(v)})]$$

luego $|M_1^{(u,v)}| = 2^{m-2} \, . \, 3^{n-m}$ y $|M_2^{(u,v)}| = 2^{m-2} \, . \, 3^{n-m}$. Como $M_1^{(u,v)} \cap M_2^{(u,v)} = \emptyset$ entonces $|M_1^{(u,v)} \cup M_1^{(u,v)}| = 2^{m-2} \, . \, 3^{n-m} + 2^{m-2} \, . \, 3^{n-m} = 2 \, . \, 2^{m-2} \, . \, 3^{n-m} = 2^{m-1} \, . \, 3^{n-m}$. Luego a partir de los filtros primos $P^{(i)}$, $1 \leq i \leq m$, se obtienen $\binom{m}{2}$ subálgebras maximales de Tipo III y todas ellas isomorfas a $(L_2)^{m-1} \times (L_3)^{n-m}$.
Luego en este caso tenemos un total de $n-m+\binom{n-m}{2}+\binom{m}{2}$ subálgebras maximales. Por lo tanto:

Tipo	Nro.	(A31) $m=1,\ n-m=1$	(A32) $m=1,\ n-m\geq 2$	(A33) $m\geq 2,\ n-m=1$	(A34) $m\geq 2,\ n-m\geq 2$
		subálgebras maximales isomorfas a			
I	$n-m$	$(L_2)^2 \cong B(A)$	$(L_2)^2 \times (L_3)^{n-2}$	$(L_2)^n \cong B(A)$	$(L_2)^{m+1} \times (L_3)^{n-m-1}$
II	$\binom{n-m}{2}$	****	$L_2 \times (L_3)^{n-2}$	****	$(L_2)^m \times (L_3)^{n-m-1}$
III	$\binom{m}{2}$	****	****	$(L_2)^{m-1} \times L_3$	$(L_2)^{m-1} \times (L_3)^{n-m}$

4. Segunda construcción

Lema 4.1 *Sea A un álgebra de Łukasiewicz finita no trivial y e su eje.*

(E1) *Si z_1, z_2 son átomos duales diferentes del álgebra de Boole $[0,e]$ entonces $LS(B(A), z_1)$ y $LS(B(A), z_2)$ son subálgebras diferentes.*

(E2) *Si S_1^* y S_2^* son subálgebras de $B(A)$ diferentes tales que (1) $\nabla e \in S_1^* \cap S_2^*$ entonces $LS(S_1^*, e)$ y $LS(S_2^*, e)$ son subálgebras diferentes.*

Dem.

(E1) En efecto, si $z_1 \in LS(B(A), z_2)$ entonces por (1.5) $z_1 = s_1 \vee (s_2 \wedge z_2)$ donde $s_1, s_2 \in B(A)$. Luego como $\Delta z_2 = 0 = \Delta z_1$ tenemos $0 = \Delta z_1 = s_1 \vee (s_2 \wedge \Delta z_2) = s_1 \vee 0 = s_1$ y por lo tanto $z_1 = s_2 \wedge z_2 \leq z_2$, absurdo, pues z_1 y z_2 son átomos duales diferentes de $[0,e]$.

(E2) En efecto, si (2) $LS(S_1^*, e) = LS(S_2^*, e)$ entonces por (1) y (2) $S_1^* = BS(S_1^*, \nabla e) = B(LS(S_1^*, e)) = B(LS(S_2^*, e)) = BS(S_2^*, \nabla e) = S_2^*$, absurdo.

■

Lema 4.2 *Sea A un álgebra de Łukasiewicz finita no trivial, e su eje, $B(A) \cong (L_2)^n$, con $n \geq 2$. Si S es una subálgebra maximal de $B(A)$ tal que $\nabla z \in S$, donde $z \in [0,e]$ entonces $B(A) \not\subseteq LS(S,z)$ y $B(LS(S,z)) = S$.*

Dem. Como S es subálgebra maximal de $B(A)$ entonces $S \cong (L_2)^{n-1}$ y existen dos átomos b_1, b_2 de $B(A)$ tal $b_1, b_2 \notin S$. Si $b_1 \in LS(S,z)$ entonces $b_1 = (s_1 \wedge \sim \nabla z) \vee (s_2 \wedge \nabla z) \vee (s_3 \wedge z)$ donde $s_1, s_2, s_3 \in S$, luego $b_1 = \Delta b_1 = (s_1 \wedge \sim \nabla z) \vee (s_2 \wedge \nabla z) \in S$, absurdo.
Por (1.3) $B(LS(S,z)) = BS(S, \nabla z)$ y como $\nabla z \in S$ entonces $BS(S, \nabla z) = S$. ■

Lema 4.3 *Si A es un álgebra de Łukasiewicz tal que $A \cong (L_2)^m \times (L_3)^{n-m}$, donde $n-m \geq 2$, e su eje, z un átomo dual de $[0,e]$ y $A^* = LS(B(A), z)$ entonces:*

(F1) *$B(A) \subseteq A^*$ y $B(A^*) = B(A)$,*

(F2) *A^* es subálgebra maximal de A,*

(F3) *A^* no es un álgebra de Boole ni un álgebra centrada, y z es su eje.*

Dem.

(F1) Claramente $B(A) \subseteq LS(B(A), z) = A^*$. Como $\nabla z \in B(A)$, por (1.3) resulta que $B(A^*) = BS(B(A), \nabla z) = BS(B(A)) = B(A)$.

(F2) Como $n - m \geq 2$ entonces $[0, e] \cong (L_2)^r$, con $r \geq 2$. Sea $A^{'}$ una subálgebra de A tal que (1) $A^* = LS(B(A), z) \subseteq A^{'}$, luego (2) $z \in A^{'}$ y (3) $B(A) \subseteq A^{'}$.
Sabemos que $A^{'} = LS(S^{'}, w)$, donde $S^{'}$ es una subálgebra de $B(A)$ y $w \in [0, e]$. De (1) y (F1) resulta que $B(A^*) = B(A) \subseteq B(A^{'}) = BS(S^{'}, \nabla w)$, luego (4) $BS(S^{'}, \nabla w) = B(A)$.
De (2) tenenos que (5) $z = (s_1 \wedge \sim \nabla w) \vee (s_2 \wedge \nabla w) \vee (s_3 \wedge w)$, donde $s_1, s_2, s_3 \in S^{'}$.
Luego (6) $0 = \Delta z = (s_1 \wedge \sim \nabla w) \vee (s_2 \wedge \nabla w)$ y por lo tanto de (5) y (6) resulta $z = s_3 \wedge w \leq w$. Como $z, w \in [0, e]$ y z es átomo dual de $[0, e]$ entonces (6) $z = w$ ó (7) $w = e$.
Si ocurre (6) entonces $A^{'} = LS(S^{'}, w) = LS(S^{'}, z) \subseteq LS(B(A), z) = A^*$, luego $A^{'} = A^*$.
Si ocurre (7) entonces $e \in A^{'}$ y por (4) $B(A) = BS(S^{'}, \nabla e) = S^{'} \subseteq A^{'}$, por lo tanto $A^{'} = A$.

(F3) Por (1.4) z es el eje de A^*. Como $\Delta z = 0 \neq z$ y $z \in A^*$ entonces A^* no es un álgebra de Boole y como $z \neq \sim z$, A^* no es un álgebra centrada.

■

Lema 4.4 *Si A es un álgebra de Łukasiewicz finita, c su centro y S^* es una subálgebra maximal de $B(A)$ entonces $A^* = LS(S^*, c)$ es una subálgebra maximal de A.*

Dem. Sea $A^{'}$ una subálgebra de A tal que (1) $A^* = LS(S^*, c) \subseteq A^{'}$. Por (1) tenemos (2) $c \in A^{'}$ y (3) $S^* \subseteq A^{'}$.
Sabemos que $A^{'} = LS(S^{'}, z)$, donde $S^{'}$ es una subálgebra de $B(A)$ y $z \in [0, c]$. De (1) y el Lema 4.2 resulta $S^* = B(A^*) \subseteq B(A^{'}) = BS(S^{'}, \nabla z)$ y como S^* es maximal entonces (4) $BS(S^{'}, \nabla z) = B(A)$ ó (5) $S^* = BS(S^{'}, \nabla z)$.
Si ocurre (4) entonces (6) $B(A) = BS(S^{'}, \nabla z) = B(A^{'}) \subseteq A^{'}$. De (2) y (6) resulta que $A^{'} = A$.
Si ocurre (5) entonces (7) $S^{'} \subseteq S^*$. Como $c \in A^{'} = LS(S^{'}, z)$ entonces

$$c = (s_1 \wedge \sim \nabla z) \vee (s_2 \wedge \nabla z) \vee (s_3 \wedge z)$$

donde $s_1, s_2, s_3 \in S^{'}$. Luego $0 = \Delta c = (s_1 \wedge \sim \nabla z) \vee (s_2 \wedge \nabla z)$ y por lo tanto $c = s_3 \wedge z \leq z$ y como $z \leq c$ entonces (8) $z = c$ y por lo tanto de (8) y (7) tenemos (9) $A^{'} = LS(S^{'}, z) = LS(S^{'}, c) \subseteq LS(S^*, c) = A^*$. De (1) y (9) resulta $A^{'} = A^*$. ■

(A1) Si A es un álgebra de Boole entonces $n = m$, esto es, $A \cong (L_2)^m$. Si $m = 1$, entonces A no tiene subálgebras maximales. Si $m > 1$, es bien conocido que las subálgebras maximales de A son isomorfas a $(L_2)^{m-1}$, y que si $\mathcal{A}(A) = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ y A^* es una subálgebra maximal de A entonces sus átomos son $a^* = a_s \vee a_t$ con $s \neq t$ y $a_j^* = a_j$ para $1 \leq j \leq m$, $j \neq s, t$. Luego existen $\binom{m}{2}$, subálgebras maximales de A.

(A2) Si A es un álgebra centrada, entonces $m = 0$, esto es, $A \cong (L_3)^n$.

(A21) Si $A = L_3$ entonces la única subálgebra maximal de A es $S = \{0, 1\} \cong L_2$ que es de Tipo I.

(A22) Si $A = (L_3)^n$, con $n \geq 2$ entonces $B(A) \cong (L_2)^n$. Sea c el centro de A. Por (1.2)

$[0,c] = \Delta_0(A) \cong B(A) \cong (L_2)^n$ entonces $[0,c]$ tiene n átomos duales.

(A22a) Sea z un átomo dual de $[0,c]$, en particular $z \neq 0$ y $z \neq c$. Sea $A^* = LS(B(A), z)$, luego $B(A) \subseteq A^*$. Además $c \notin A^*$. En efecto, si $c \in LS(B(A), z)$ entonces $c = s_1 \vee (s_2 \wedge z)$ donde $s_1, s_2 \in B(A)$ luego como $\Delta z = 0$ tenemos $0 = \Delta c = s_1$ y por lo tanto $c = s_2 \wedge z \leq z$. Como por hipótesis $z \leq c$ resulta $z = c$, absurdo.
Por el Lema 4.3, (F3) A^* es un álgebra con eje z que no es un álgebra de Boole ni un álgebra centrada, entonces por los resultados indicados en [15] $A^* \cong (L_2)^j \times (L_3)^k$, donde $j \geq 1$, $k \geq 1$. Además $j + k = n$ ya que por el Lema 4.3, (F1) tenemos

$$(L_2)^n \cong B(A) = B(A^*) = B((L_2)^j \times (L_3)^k) \cong (L_2)^{j+k}.$$

Por (1.7) sabemos que

$$j = |\{a \in \mathcal{A}(B(A)) : a \leq \sim \nabla z\}| \;\text{ y }\; k = |\{a \in \mathcal{A}(B(A)) : a \leq \nabla z\}|.$$

Como $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ es un átomo dual de $[0,c]$ entonces existe un único i, $1 \leq i \leq n$, tal que $z_i = 0$ y $z_s = \frac{1}{2}$, para $1 \leq s \leq n$, $s \neq i$. Luego ∇z es un átomo dual de $B(A)$ y por lo tanto $\sim \nabla z$ es un átomo de $B(A)$, de donde resulta $j = 1$ y $k = n - 1$.
Por el Lema 4.3 sabemos que $A^* = LS(B(A), z)$ es maximal.
Como todo centro es un eje entonces por el Lema 4.1, (E1) sabemos que si z_1, z_2 son átomos duales diferentes de $[0,c]$ entonces $S_1 = LS(B(A), z_1) \neq S_2 = LS(B(A), z_2)$.
De este modo obtenemos n subálgebras maximales de Tipo I de $(L_3)^n$ y observando la Tabla 2.1, con la construcción indicada obtenemos todas las subálgebras maximales de Tipo I de $(L_3)^n$, isomorfas a $L_2 \times (L_3)^{n-1}$.

(A22b) Sea S^* una subálgebra maximal de $B(A)$, sabemos que existen $\binom{n}{2}$ subálgebras maximales de $B(A)$ y que $S^* \cong (L_2)^{n-1}$. Sea $A^* = LS(S^*, c)$ luego por el Lema 4.2 tenemos (1) $B(A^*) = S^* \cong (L_2)^{n-1}$ y (2) $B(A) \nsubseteq A^*$. Por (1.4) sabemos que (3) A^* es un álgebra centrada, luego de (1) y (3) resulta que $A^* \cong (L_3)^{n-1}$. Por el Lema 4.4 $A^* = LS(S^*, c)$ es una subálgebra maximal.
Si S_1^*, S_2^* son subálgebras maximales de $B(A)$ y $S_1^* \neq S_2^*$ entonces como $\nabla c = 1 \in S_1^* \cap S_2^*$ por el Lema 4.1 tenemos que $LS(S_1^*, c) \neq LS(S_2^*, c)$.

De este modo obtenemos $\binom{n}{2}$ subálgebras maximales de $(L_3)^n$ que por (2) no son de Tipo I y teniendo en cuenta la Tabla 2.1 podemos afirmar que con la construcción indicada obtenemos todas las subálgebras maximales de Tipo II de $(L_3)^n$.

(A3) Sea $A \cong (L_2)^m \times (L_3)^{n-m}$, donde $m \geq 1$, $n - m \geq 1$. Entonces:

(B0) Los átomos de $B(A) \cong (L_2)^n$ son $a^{(h)}$, $1 \leq h \leq n$, con coordenadas $a_i^{(h)} = 1$ para $h = i$ y $a_i^{(h)} = 0$, para $1 \leq i \leq n$, $i \neq h$.

(B1) El eje e de A tiene por coordenadas $e_h = 0$, para $1 \leq h \leq m$ y $e_h = \frac{1}{2}$, para $m+1 \leq h \leq n$. Por lo tanto $[0,e] \cong (L_2)^{n-m}$.

(B2) ∇e tiene por coordenadas $f_h = 0$, para $1 \leq h \leq m$ y $f_h = 1$, para $m+1 \leq h \leq n$. Por lo tanto ∇e es supremo de $n - m$ átomos de $B(A)$, que son $a^{(h)}$, para $m + 1 \leq h \leq n$.

(B3) $\sim \nabla e$ tiene por coordenadas $g_h = 1$, para $1 \leq h \leq m$ y $g_h = 0$, para $m + 1 \leq h \leq n$. Por lo tanto $\sim \nabla e$ es supremo de m átomos de $B(A)$, que son $a^{(h)}$, para $1 \leq h \leq m$.

(B4) Los $n-m$ átomos duales de $[0,e]$ que notaremos $w^{(r)}$, $1 \leq r \leq n-m$, tienen coordenadas $w_i^{(r)} = 0$, para $1 \leq i \leq m$, $w_{m+r}^{(r)} = 0$ y $w_s^{(r)} = \frac{1}{2}$ para $m+1 \leq s \leq n$, $s \neq m+r$. Luego:

(B4a) $\nabla w^{(r)}$ tiene por coordenadas $z_i^{(r)} = 0$, para $1 \leq i \leq m$, $z_{m+r}^{(r)} = 0$ y $z_s^{(r)} = 1$, para $m+1 \leq s \leq n$, $s \neq m+r$.

(B4b) $\sim \nabla w^{(r)}$ tiene por coordenadas $x_i^{(r)} = 1$, para $1 \leq i \leq m$, $x_{m+r}^{(r)} = 1$ y $x_s^{(r)} = 0$, para $m+1 \leq s \leq n$, $s \neq m+r$.

(B5) Las subálgebras maximales de $B(A)$ son isomorfas a $(L_2)^{n-1}$. Por lo tanto sus átomos coinciden con los átomos de $B(A)$ salvo uno que es supremo de dos átomos de $B(A)$.

(B5a) Si $n-m \geq 2$, para i,j fijos, $m+1 \leq i,j \leq n$, pongamos $s^{(i,j)} = a^{(i)} \vee a^{(j)}$ y $s^{(k)} = a^{(k)}$, para $1 \leq k \leq n$, $k \neq i,j$. Consideremos $S^*_{(i,j)}$, la subálgebra booleana de $B(A)$ cuyos átomos son estos $n-1$ elementos. Como

$$\nabla e = s^{(i,j)} \vee \bigvee_{\substack{k=m+1 \\ k \neq i,j}}^{n} s^{(k)} \quad \text{y} \quad \sim \nabla e = \bigvee_{k=1}^{m} s^{(k)},$$

es claro que $\nabla e, \sim \nabla e \in S^*_{(i,j)}$ y además

$$|\{a \in \mathcal{A}(S^*_{(i,j)}) : a \leq \nabla e\}| = n-m-1, \quad |\{a \in \mathcal{A}(S^*_{(i,j)}) : a \leq \sim \nabla e\}| = m.$$

Existen $\binom{n-m}{2}$ de estas subálgebras, a las que llamaremos subálgebras de Tipo S. Observemos que si $n-m=1$ entonces no existen subálgebras de este tipo.

(B5b) Si $m \geq 2$, para i,j fijos, $1 \leq i,j \leq m$, pongamos $t^{(i,j)} = a^{(i)} \vee a^{(j)}$ y $t^{(k)} = a^{(k)}$, para $1 \leq k \leq n$, $k \neq i,j$. Consideremos $T^*_{(i,j)}$, la subálgebra booleana de $B(A)$ cuyos átomos son estos $n-1$ elementos. Como

$$\nabla e = \bigvee_{k=m+1}^{n} t^{(k)} \quad \text{y} \quad \sim \nabla e = t^{(i,j)} \vee \bigvee_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{m} t^{(k)},$$

es claro que $\nabla e, \sim \nabla e \in T^*_{(i,j)}$ y además

$$|\{a \in \mathcal{A}(T^*_{(i,j)}) : a \leq \nabla e\}| = n-m, \quad |\{a \in \mathcal{A}(T^*_{(i,j)}) : a \leq \sim \nabla e\}| = m-1.$$

Existen $\binom{m}{2}$ de estas subálgebras, a las que llamaremos subálgebras de Tipo T. Es claro que si $m=1$ no existen subálgebras de este tipo.

(B5c) Si S^* es una subálgebra maximal de $B(A)$, y $b \in \mathcal{A}(S^*)$ es tal que $b = a^{(i)} \vee a^{(j)}$, donde $1 \leq i \leq m$ y $m+1 \leq j \leq n$ entonces $\nabla e \notin S^*$. Los otros átomos de S^* son $b^{(k)} = a^{(k)}$, para $1 \leq k \leq n$, $k \neq i,j$. Los únicos átomos de S^* que preceden a ∇e son $b^{(k)} = a^{(k)}$, para $m+1 \leq k \leq n$, $k \neq j$. Luego si $\nabla e \in S^*$ entonces $\nabla e = \bigvee_{\substack{k=m+1 \\ k \neq j}}^{n} b^{(k)} = \bigvee_{\substack{k=m+1 \\ k \neq j}}^{n} a^{(k)}$, absurdo, dado que $\nabla e = \bigvee_{k=m+1}^{n} a^{(k)}$.

Si $m = 1 = n - m$ entonces es claro que la única subálgebra maximal de $A \cong L_2 \times L_3$ es $B(A) \cong (L_2)^2$.

En adelante supondremos que $m \geq 2$ ó que $n - m \geq 2$.

Si $n-m \geq 2$, sea z un átomo dual de $[0, e]$ y $A^* = LS(B(A), z)$, por el Lema 4.3 sabemos que A^* es una subálgebra maximal que no es un álgebra de Boole ni un álgebra centrada y que z es su eje. Por los resultados indicados en [15] $A^* \cong (L_2)^j \times (L_3)^k$, donde por (1.7)

$$j = |\{a \in \mathcal{A}(B(A^*)) : a \leq\sim \nabla z\}| \text{ y } k = |\{a \in \mathcal{A}(B(A^*)) : a \leq \nabla z\}|.$$

Como $\mathcal{A}(B(A^*)) = \mathcal{A}(B(A))$ entonces por (B4a) $k = n - m - 1$ y por (B4b) $j = m + 1$, luego $A^* \cong (L_2)^{m+1} \times (L_3)^{n-m-1}$.
Si $z_1, z_2 \in [0, e]$ son átomos duales diferentes entonces por el Lema 4.1, (E1) tenemos que $LS(B(A), z_1) \neq LS(B(A), z_2)$.
Por (B1) sabemos que $[0, e] \cong (L_2)^{n-m}$ y por lo tanto $[0, e]$ tiene $n - m$ átomos duales. Luego de este modo obtenemos $n-m$ subálgebras de Tipo I que son isomorfas a $(L_2)^{m+1} \times (L_3)^{n-m-1}$.

Si $m \geq 2, n - m \geq 2$ y S^* es una subálgebra maximal de $B(A)$ de Tipo S ó de Tipo T, en particular (1) $\nabla e \in S^*$.
Sea $A^* = LS(S^*, e)$. Luego por (1.3) y (1) tenemos (2) $B(A^*) = BS(S^*, \nabla e) = BS(S^*) = S^*$.
Por el Lema 4.3 A^* es una subálgebra maximal de A.
Si S_1^* y S_2^* son subálgebras maximales de $B(A)$, diferentes, de Tipo S ó de Tipo T entonces $\nabla e \in S_1^* \cap S_2^*$. Luego por el Lema 4.1, (E2) tenemos que $LS(S_1^*, e) \neq LS(S_2^*, e)$.
Como A^* no es un álgebra de Boole ni un álgebra centrada y e es su eje entonces por los resultados indicados en [15] $A^* \cong (L_2)^j \times (L_3)^k$, donde por (1.7)

$$j = |\{a \in \mathcal{A}(S^*) : a \leq\sim \nabla e\}| \text{ y } k = |\{a \in \mathcal{A}(S^*) : a \leq \nabla e\}|.$$

Si S^* es de Tipo S entonces por (B5a) $k = n-m-1$ y $j = m$. Como existen $\binom{n-m}{2}$ subálgebras maximales de Tipo S de $B(A)$, por el Lema 4.1, (E2) obtenemos $\binom{n-m}{2}$ subálgebras isomorfas a $(L_2)^m \times (L_3)^{n-m-1}$.

Si S^* es de Tipo T entonces por (B5b) $k = n - m$ y $j = m - 1$. Como existen $\binom{m}{2}$ subálgebras maximales de Tipo T de $B(A)$, por el Lema 4.1, (E2) obtenemos $\binom{m}{2}$ subálgebras isomorfas a $(L_2)^{m-1} \times (L_3)^{n-m}$.

Si S_1^* es de Tipo S y S_2^* es de Tipo T entonces $A_1^* = LS(S_1^*, e) \neq LS(S_2^*, e) = A_2^*$. En efecto, si $A_1^* = A_2^*$ entonces $S_1^* = B(A_1^*) = B(A_2^*) = S_2^*$, absurdo.

Luego observando la Tabla 2.1 podemos afirmar que si S^* es de Tipo S entonces $LS(S^*, e)$ es de Tipo II y si S^* es de Tipo T entonces $LS(S^*, e)$ es de Tipo III.

Si $m \geq 2$ y $n - m = 1$ entonces $B(A) \cong (L_2)^n$ es subálgebra maximal de A. En efecto, como $n - m = 1$ entonces (1) $[0, e] = \{0, e\}$. Si A' es una subálgebra de A tal que (2) $B(A) \subseteq A'$, sabemos que (3) $A' = LS(S', w)$ donde S' es una subálgebra de $B(A)$ y $w \in [0, e]$. Si $w = 0$ entonces $A' = S'$ y como $S' \subseteq B(A)$ entonces $A' = B(A)$. Si $w = e$ entonces por (2) y (3) $A = LS(B(A), e) \subseteq A'$ luego $A' = A$.
Sabemos que en este caso no existen subálgebras de Tipo S.

Luego si $A \cong (L_2)^m \times (L_3)^{n-m}$, donde $m \geq 1$, $n - m \geq 1$, entonces:

Tipo	Nro.	(A31) $m=1,\ n-m=1$	(A32) $m=1,\ n-m\geq 2$	(A33) $m\geq 2,\ n-m=1$	(A34) $m\geq 2,\ n-m\geq 2$
		subálgebras maximales			
I	$n-m$	$B(A)$ Isomorfa a $(L_2)^2$	$LS(B(A),z)$, z átomo dual de $[0,e]$. Isomorfas a $(L_2)^2\times(L_3)^{n-2}$	$B(A)$ Isomorfa a $(L_2)^n$	$LS(B(A),z)$, z átomo dual de $[0,e]$. Isomorfas a $(L_2)^{m+1}\times(L_3)^{n-m-1}$
II	$\binom{n-m}{2}$	****	$LS(S^*,e)$, S^* subálgebra de $B(A)$ de Tipo S. Isomorfas a $L_2\times(L_3)^{n-2}$	****	$LS(S^*,e)$, S^* subálgebra de $B(A)$ de Tipo S Isomorfas a $(L_2)^m\times(L_3)^{n-m-1}$
III	$\binom{m}{2}$	****	****	$LS(S^*,e)$, S^* subálgebra de $B(A)$ de Tipo T. Isomorfas a $(L_2)^{m-1}\times L_3$	$LS(S^*,e)$, S^* subálgebra de $B(A)$ de Tipo T. Isomorfas a $(L_2)^{m-1}\times(L_3)^{n-m}$

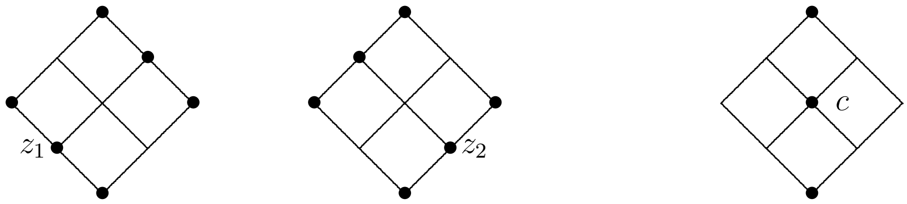
5. Ejemplos

En los siguientes diagramas indicamos con • los elementos de las subálgebras maximales.

Si $A = L_3$ la única subálgebra maximal es isomorfa a L_2.

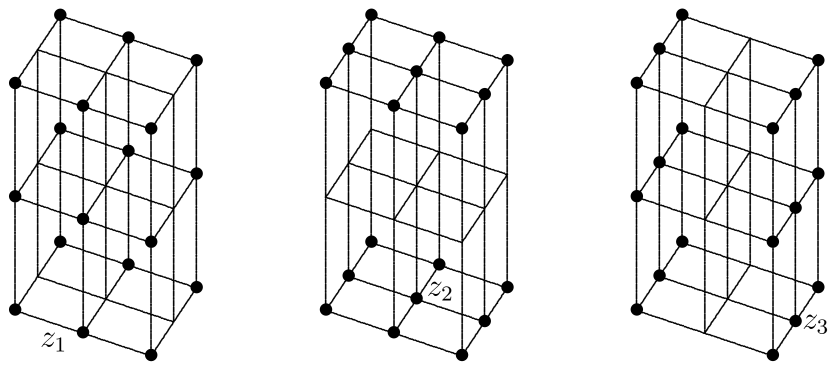
Si $A = (L_3)^2$, tenemos las siguientes subálgebras maximales:

Tipo I, isomorfas a $L_2 \times L_3$ Tipo II, isomorfa a L_3

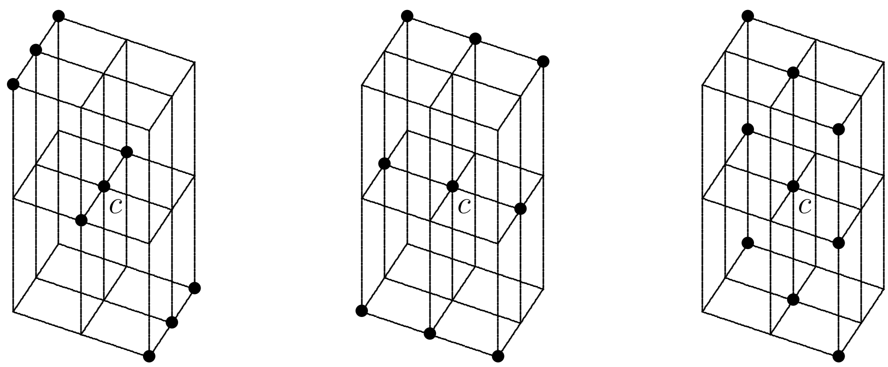


Si $A = (L_3)^3$, tenemos las siguientes subálgebras maximales:

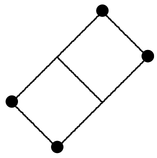
Tipo I, isomorfas a $L_2 \times (L_3)^2$



Tipo II, isomorfas a $(L_3)^2$

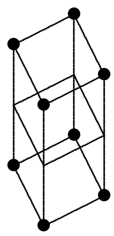


Si $A = L_2 \times L_3$ la única subálgebra maximal es de Tipo I y ella es isomorfa a $(L_2)^2$

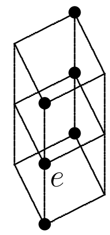


Si $A = (L_2)^2 \times L_3$, entonces las subálgebras maximales son:

Tipo I, isomorfa a $(L_2)^3$

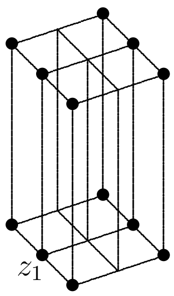


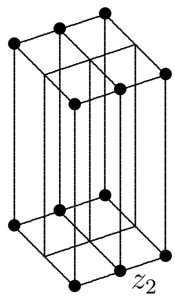
Tipo III, isomorfa a $L_2 \times L_3$



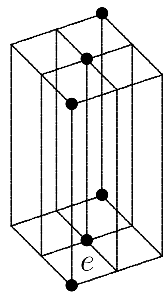
Si $A = L_2 \times (L_3)^2$, entonces A tiene las siguientes subálgebras maximales:

Tipo I, isomorfas a $(L_2)^2 \times L_3$



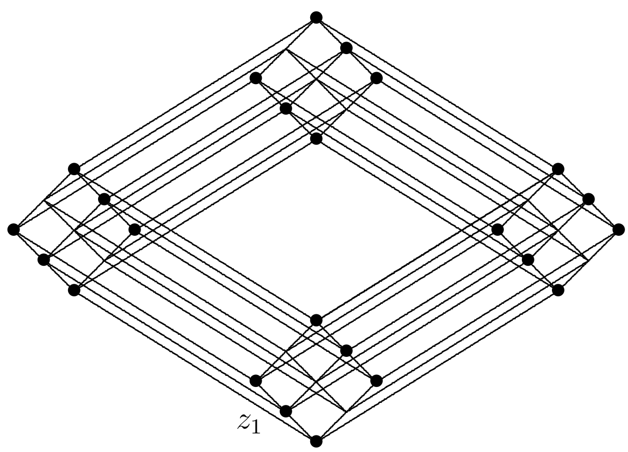


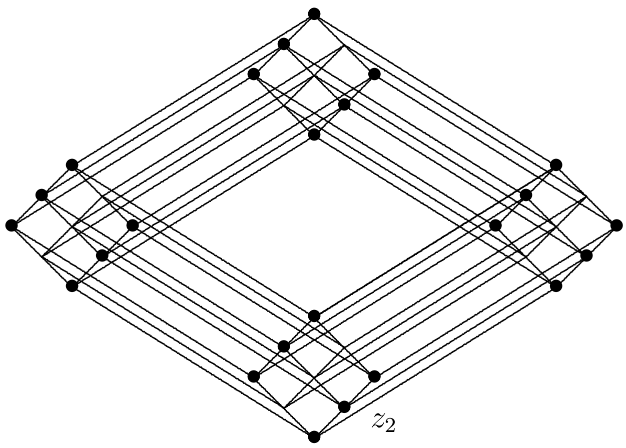
Tipo II, isomorfa a $L_2 \times L_3$



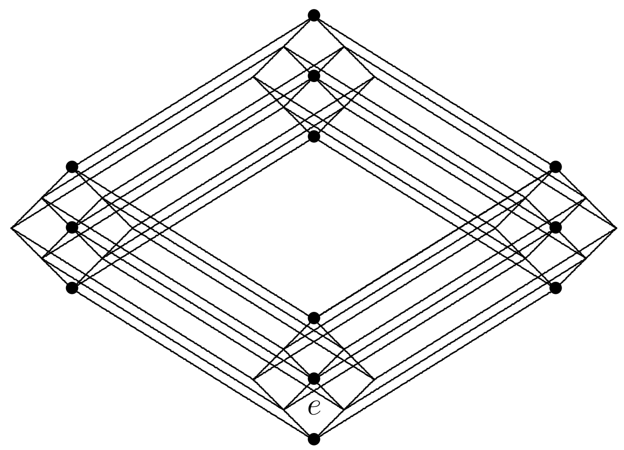
Si $A = (L_2)^2 \times (L_3)^2$, entonces tiene las siguientes subálgebras maximales:

Tipo I, isomorfas a $(L_2)^3 \times L_3$

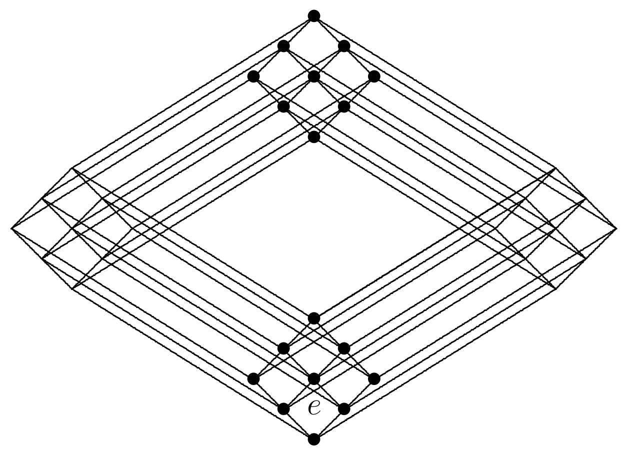




Tipo II, isomorfa a $(L_2)^2 \times L_3$



Tipo III, isomorfa a $L_2 \times (L_3)^2$



Referencias

[1] Abad M., Monteiro L., Savini S. and Sewald J., *Subalgebras of a finite three-valued Łukasiewicz algebra*, Proceedings of the IX Latin American Symposium on Mathematical Logic (Part1), Notas de Lógica Matemática 38, (1993), 181-190, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina.

[2] Bialynicki-Birula A. and Rasiowa H., *Remarks on quasi-Boolean algebras*, Bull Acad. Pol. Sc., casse III, 5 (1957), 615-619.

[3] Bialynicki-Birula A. and Rasiowa H., *On the representation of quasi-boolean algebras*, Bull Acad. Pol. Sc., casse III, 5 (1957), 259-261.

[4] Cignoli R. and Monteiro L., *Maximal Subalgebras of MV_n-algebras. A Proof of a Conjecture of A. Monteiro*, aceptado para su publicación en Studia Logica (2006).

[5] Moisil Gr. C., *Recherches sur les logiques non-chrysipiennes*, Ann. Sc. de l'Université de Yassy, 26 (1940), 431-466.

[6] Moisil Gr. C., *Notes sur les logiques non-chrysipiennes*, Ann. Sc. de l'Université de Yassy, 27 (1941), 86-98.

[7] Moisil Gr. C., *Sur les idéaux des algèbres de Łukasiewicz trivalentes* Analele Universitatii C.I. Parohn. Seria Acta Logica 3 (1969), 83-95.

[8] Monteiro A., Notas del curso *Algebras de Łukasiewicz trivalentes*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, (1963).

[9] Monteiro A., *Sur la définition des algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Notas de Lógica Matemática 21 (1964). Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca. Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P. Roumaine, nouvelle série 7 (55), (1963), 3-12.

[10] Monteiro A., Notas del curso *Algebras de De Morgan*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, (1966).

[11] Monteiro A. y L. Monteiro, *Algebras de De Morgan,* Informes Técnicos Internos 72, INMABB-CONICET-UNS (2000), 77 páginas.

[12] Monteiro A., *Algebras de Łukasiewicz trivalentes*, Informes Técnicos Internos 83, INMABB-CONICET-UNS (2003).

[13] Monteiro L., *Axiomes indépendants pour les algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Notas de Lógica Matemática 22 (1964). Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca. Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P. Roumaine, nouvelle série 7 (55), (1963), 199-202.

[14] Monteiro L., *Sur le principe de determination de Moisil*, Bull. Soc. Math. de Roumaine, T. 13 (61), No. 4, (1969), 447-448.

[15] Monteiro L., *Algebras de Łukasiewicz trivalentes monádicas*, Notas de Lógica Matemática 32, 113 pág. (1974), Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina. Tesis de Doctorado presentada a la Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, julio 1971.

[16] Monteiro L., Savini S. and Sewald J., *Construction of monadic three-valued Łukasiewicz algebras*, Studia Logica L, 3 / 4 (1991), 473-483.