Sobre álgebras de Łukasiewicz trivalentes

Luiz F. Monteiro (*) y Sonia Savini (**)
(*) INMABB-C.O.N.I.C.E.T.-Universidad Nacional del Sur
(**) Departamento de Matemática-Universidad Nacional del Sur
luizmont@criba.edu.ar - ssavini@criba.edu.ar

Resumen

En estas notas indicamos resultados originales de diversas propiedades de las álgebras de Łukasiewicz trivalentes, álgebras de Moisil (trivalentes) y álgebras de Post (trivalentes).

1. Introducción

Si X es un conjunto finito con n elementos notaremos $|X| = n$. Si R es un reticulado distributivo acotado notaremos con 0, (1) el primer y último elemento respectivamente. Diremos que un subconjunto S de R es un $(0,1)$-subreticulado de R si S es un subreticulado de R y $0, 1 \in S$.

Si $x \in R$ entonces es bien conocido que $[x), (x]$ son reticulados distributivos acotados. Si $b \in R$ es booleano notaremos con $-b$ a su complemento y con $B(R)$ al conjunto de todos los elementos booleanos de R. Es claro que $0, 1 \in B(R)$ y que $B(R)$ es un álgebra de Boole. Si $a, b \in R$ y $a \leq b$ notaremos $[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$.

Recordemos algunos lemas de la teoría de reticulados y a los efectos de facilitar la lectura de estas notas indicaremos las demostraciones de los mismos.

Lema 1.1 *Si R es un reticulado distributivo acotado, no trivial, tal que existe $b \in B(R) \setminus \{0,1\}$ entonces $R \cong (b] \times (-b]$, donde $(b]$ y $(-b]$ son reticulados distributivos acotados no triviales.*

Dem. Sea $P = (b] \times (-b]$. Dado $r \in R$, sea $h(r) = (r \wedge b, r \wedge -b)$ luego $h : R \to P$.
<u>h es sobreyectiva.</u> Dado $p = (r_1, r_2) \in P$, entonces $r = r_1 \vee r_2 \in R$, y como $r_1 \in (b]$ y $r_2 \in (-b]$ tenemos que $r_1 = r \wedge b$ y $r_2 = r \wedge -b$, luego $h(r) = (r \wedge b, r \wedge -b) = (r_1, r_2) = p$.
<u>Si $x \leq y$ donde $x, y \in R$ entonces $h(x) \leq h(y)$.</u> De $x \leq y$ resulta que $x \wedge b \leq y \wedge b$ y $x \wedge -b \leq y \wedge -b$ por lo tanto $h(x) = (x \wedge b, x \wedge -b) \leq (y \wedge b, y \wedge -b) = h(y)$.
<u>Si $x, y \in R$ son tales que $h(x) \leq h(y)$ entonces $x \leq y$.</u>
De $h(x) = (x \wedge b, x \wedge -b) \leq (y \wedge b, y \wedge -b) = h(y)$, resulta que $x \wedge b \leq y \wedge b$ y $x \wedge -b \leq y \wedge -b$, luego

$$x = x \wedge (b \vee -b) = (x \wedge b) \vee (x \wedge -b) \leq (y \wedge b) \vee (y \wedge -b) = y \wedge (b \vee -b) = y.$$

Por lo tanto h es un isomorfismo, de orden, entre los conjuntos ordenados R y $(b] \times (-b]$ luego es un isomorfismo de reticulado. ■

Lema 1.2 *Si R es un reticulado distributivo acotado y $b \in B(R) \setminus \{0,1\}$ entonces $[b)$ y $(-b]$ son reticulados distributivos acotados no triviales, isomorfos.*

Dem. Sea $h : [b) \to (-b]$ definida por $h(x) = x \wedge -b$. Claramente h es una función de $[b)$ en $(-b]$.
(I) $\underline{h \text{ es suryectiva.}}$
Sea $y \in (-b]$ esto es $y \leq -b$. Luego $b \leq y \vee b = x$ y $h(x) = (y \vee b) \wedge -b = y \wedge -b = y$.
(II) $\underline{\text{Si } x_1, x_2 \in [b) \text{ verifican } x_1 \leq x_2 \text{ entonces es claro que } h(x_1) \leq h(x_2).}$
(III) $\underline{\text{Si } x_1, x_2 \in [b) \text{ son tales que } h(x_1) \leq h(x_2) \text{ entonces } x_1 \leq x_2.}$
En efecto, por hipótesis $x_1 \wedge -b \leq x_2 \wedge -b$ luego

$$x_1 = x_1 \vee b = (x_1 \wedge -b) \vee b \leq (x_2 \wedge -b) \vee b = x_2 \vee b = x_2.$$

De (I), (II) y (III) resulta que h es un isomorfismo, de orden, entre los conjuntos ordenados $[b)$ y $(-b]$ luego es un isomorfismo de reticulado. ■

Corolario 1.1 $R \cong [-b) \times [b)$.

Dem. Por el Lema 1.1 (1) $R \cong (b] \times (-b]$. Por el Lema 1.2 tenemos que (2) $[b) \cong (-b]$ y $[-b) \cong (b]$. Luego de (1) y (2) resulta $R \cong (b] \times (-b] \cong [-b) \times [b)$. ■

Un álgebra de Łukasiewicz (trivalente) [3, 4, 5],[6, 7, 8],[9], es un álgebra $(L, \wedge, \vee, \sim, \nabla, 1)$ de tipo $(2,2,1,1,0)$ donde $(L, \wedge, \vee, \sim, 1)$ es un álgebra de De Morgan y ∇ es un operador que verifica: $\sim x \vee \nabla x = 1$, $x \wedge \sim x = \sim x \wedge \nabla x$ y $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$. Es bien conocido que:

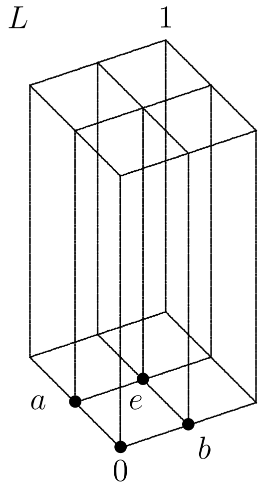
- Si se define $\Delta x = \sim \nabla \sim x$ entonces $x \wedge \Delta \sim x = 0$, $x \vee \sim x = x \vee \Delta \sim x$ y $\Delta(x \vee y) = \Delta x \vee \Delta y$.
- Toda álgebra de Łukasiewicz L es un álgebra de Kleene, esto es $x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y$ cualesquiera que sean $x, y \in L$.
- $B(L) = \{x \in L : \nabla x = x\} = \{x \in L : \Delta x = x\}$.
- Si $b \in B(L)$ entonces su complemento booleano $-b$ es precisamente $\sim b$, esto es $-b = \sim b$.
- Si $\nabla x = \nabla y$ y $\Delta x = \Delta y$ entonces $x = y$, (Principio de Determinación de Moisil). [4], [10].

Si $B(L)$ es finita, no trivial, representaremos por $\mathcal{A}(B(L))$ el conjunto de los átomos del álgebra de Boole $B(L)$ y si $b \in B(L)$, $b \neq 0$ notaremos con $\mathcal{A}(b)$ el conjunto de los átomos de $B(L)$ que preceden a b.
Si el álgebra de Łukasiewicz L tiene un elemento c, que verifica $\sim c = c$, entonces L es un álgebra de Post (trivalente). Este elemento se denomina *centro* del álgebra y se verifica que $x = (\Delta x \vee c) \wedge \nabla x$, cualquiera que sea $x \in L$. [6, 9, 11]. Sea $\mathbf{T} = \{0, c, 1\}$, donde $0 < c < 1$, y $\sim 0 = 1, \sim 1 = 0, \sim c = c$, $\nabla 0 = 0, \nabla c = \nabla 1 = 1$. Entonces $\mathbf{T}$ es un álgebra de Post.

Si el álgebra de Łukasiewicz tiene un elemento e que verifica $\Delta e = 0$ y $\nabla x \leq \Delta x \vee \nabla e$, para todo $x \in L$ diremos que e es el *eje* del álgebra y que L es un álgebra de Łukasiewicz con eje (Gr. Moisil [5]) ó siguiendo a A. Monteiro que L es un álgebra de Moisil (trivalente), [11]. L. Monteiro [11] probó que en las álgebras de Moisil se verifica que $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x = \Delta x \vee (\nabla x \wedge e)$ y $x = \Delta x \vee (\nabla x \wedge \sim e) = \nabla x \wedge (\Delta x \vee \sim e)$, cualquiera que sea $x \in L$. Si M es un álgebra de Moisil y e su eje, entonces $[0, e]$ es un subreticulado de M y un reticulado acotado. M. Abad, L. Monteiro, S. Savini y J. Sewald [2] probaron:

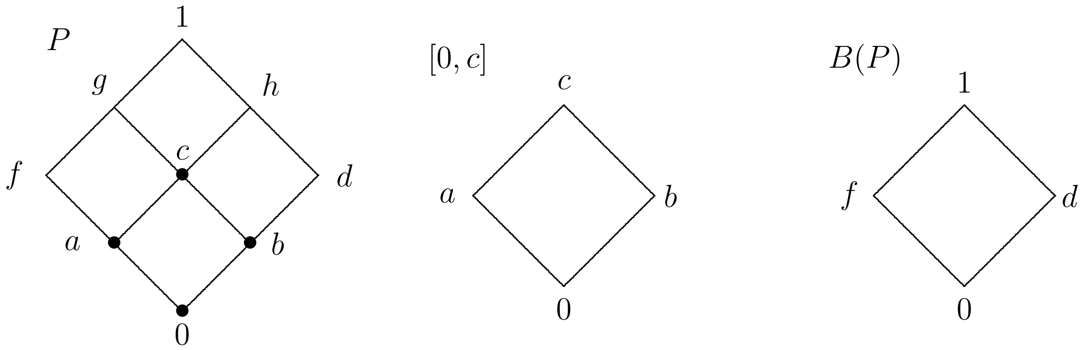
- Si $x \in [0, e]$ y ponemos por definición $-x = \sim \nabla x \wedge e$ entonces $[0, e]$ es un álgebra de Boole.

Ejemplo 1.1



- Si P es un álgebra de Post y c su centro entonces $[0, c]$ y $[c, 1]$ son álgebras de Boole isomorfas a $B(P)$.

Ejemplo 1.2



L. Monteiro, S. Savini y J. Sewald [12] probaron que: Si M es álgebra de Moisil, e su eje y $\Delta_0(M) = \{x \in M : \Delta x = 0\}$ entonces $\Delta_0(M) = [0, e]$.

Observación 1.1 *Es bien conocido que si L es un álgebra de Łukasiewicz, y $v, w \in B(L)$ son tales que $v \leq w$ entonces $S = [v, w]$ es un álgebra de Łukasiewicz, con primer elemento v, último elemento w y donde las operaciones $\wedge, \vee, \nabla$ son las operaciones $\wedge, \vee, \nabla$ de L y la negación de $x \in S$ está definida por:*

$$\sim_S x = v \vee (\sim x \wedge w).$$

1) *Si* $b \in B(L)$ *entonces* $[b) = [b, 1]$ *es un álgebra de Łukasiewicz donde* $\sim_{[b)} x = \sim x \vee b$ *para* $x \in [b)$.

2) *Si* $b \in B(L)$ *entonces* $(b] = [0, b]$ *es un álgebra de Łukasiewicz donde* $\sim_{(b]} x = \sim x \wedge b$ *para* $x \in (b]$.

3) *Si* M *es un álgebra de Moisil y* e *su eje entonces* $S = [0, \nabla e]$ *es un álgebra de Post. Por* 2) S *es un álgebra de Łukasiewicz. Como* e *es un eje entonces* $e \leq \sim e$ *y por lo tanto* $\sim_S e = \sim e \wedge \nabla e = \sim e \wedge e = e$*, luego* e *es el centro de* S.

Lema 1.3 *Si* L *es un álgebra de Łukasiewicz y* $b \in B(L)$*, entonces* $[b)$ *y* $(\sim b]$ *son álgebras de Łukasiewicz isomorfas.*

Dem. Sea $h : [b) \to (\sim b]$ definida por $h(x) = x \wedge \sim b$. Por el Lema 1.2 sabemos que h establece un isomorfismo entre los reticulados distributivos acotados $[b)$ y $(\sim b]$.
<u>Si $x \in [b)$ entonces $h(\sim_{[b)} x) = \sim_{(\sim b]} h(x)$.</u>
Como $b \leq x$ entonces $\sim x \leq \sim b$ luego $h(\sim_{[b)} x) = h(\sim x \vee b) = (\sim x \vee b) \wedge \sim b = \sim x \wedge \sim b = \sim x$ y $\sim_{(\sim b]} h(x) = \sim h(x) \wedge \sim b = \sim (x \wedge \sim b) \wedge \sim b = (\sim x \vee b) \wedge \sim b = \sim x \wedge \sim b = \sim x$.
<u>Si $x \in [b)$ entonces $h(\nabla x) = \nabla h(x)$.</u>
En efecto, $h(\nabla x) = \nabla x \wedge \sim b = \nabla x \wedge \nabla \sim b = \nabla (x \wedge \sim b) = \nabla h(x)$. ■

Un filtro F de un álgebra de Łukasiewicz L se dice un Δ-*filtro* de L si se verifica: Si $x \in F$ entonces $\Delta x \in F$. [8]
Si F es un Δ-filtro de L y $a, b \in L$ notaremos $a \equiv b$ (mód. F) si y solo si existe $f \in F$ tal que $a \wedge f = b \wedge f$. La relación $\equiv$ es una congruencia. Observemos que $x \equiv y$ si y solo si $\nabla \sim x \vee y \in F$, $\nabla x \vee \sim y \in F$, $\nabla \sim y \vee x \in F$ y $\nabla y \vee \sim x \in F$, [8]. Al conjunto cociente de L por la relación de congruencia $\equiv$ lo notaremos L/F o $L/\equiv$. Si $x \in L$ entonces la clase de equivalencia que contiene al elemento x la notaremos $C_F(x) = \{y \in L : y \equiv x\}$ o simplemente $C(x)$. El conjunto L/F algebrizado en la forma habitual es un álgebra de Łukasiewicz, y si definimos $h(x) = C(x)$, cualquiera que sea $x \in L$ entonces $h : L \to L/F$ es un homomorfismo suryectivo que tiene por núcleo a F.
Observemos que si F es un filtro principal, esto es $F = [b)$ entonces F es un Δ-filtro si y solo si $b \in B(L)$. Además $x \equiv y$ (mód. $[b)$) si y solo si $x \wedge b = y \wedge b$. Si $F = [b)$, y $b \in B(L)$ entonces $L/[b) \cong (b]$, vía la transformación $g(C_F(x)) = x \wedge b$ para toda $C_F(x) \in L/F$, [8].

Si M es un álgebra de Moisil M que no es un álgebra de Boole ni un álgebra de Post [11], [8] entonces $M \cong M/[\sim \nabla e) \times M/[\nabla e)$ donde $M/[\sim \nabla e)$ es un álgebra de Boole, $M/[\nabla e)$ es un álgebra de Post y e es el eje de M. Como $M/[\sim \nabla e) \cong (\sim \nabla e]$, $M/[\nabla e) \cong (\nabla e]$ y por el Lema 1.3 $(\sim \nabla e] \cong [\nabla e)$ entonces $M \cong [\nabla e) \times (\nabla e]$.

2. Resultados

Lema 2.1 *Si* $b \in B(L)$ *y* $x \in (b]$ *entonces* $C_{[b)}(x) = [x, x \vee \sim b]$, [8].

Dem. Vamos a indicar una demostración mas sencilla y diferente, que la indicada en [8]. Si $y \in [x, x \vee \sim b]$, esto es (1) $x \leq y$ e (2) $y \leq x \vee \sim b$. De (1) resulta (3) $x \wedge b \leq y \wedge b$

y de (2) resulta

$$(4)\ y \wedge b \leq (x \vee \sim b) \wedge b = (x \wedge b) \vee 0 = x \wedge b.$$

Luego de (3) y (4) resulta $x \wedge b = y \wedge b$ y por lo tanto $x \equiv y$ (mód. $[b)$), luego $y \in C_{[b)}(x)$. Supongamos ahora que $y \in C_{[b)}(x)$ esto es (5) $y \wedge b = x \wedge b$ entonces

$$(6)\ y \leq y \vee \sim b = (y \wedge b) \vee \sim b = (x \wedge b) \vee \sim b = x \vee \sim b.$$

Como $x \in (b]$ esto es $x \leq b$ entonces de (5) concluímos (7) $x = x \wedge b = y \wedge b \leq y$. De (7) y (6) resulta $y \in [x, x \vee \sim b]$. ■

Este resultado fué probado por L. Monteiro en 2002, lo que generalizó un resultado del mismo para las álgebras de Boole, [13].

En 1978, Antonio Monteiro probó que si B es un álgebra de Boole y F un filtro de B entonces toda clase de equivalencia módulo F es coordinable con F. Su demostración fué publicada en 2000 por L. Monteiro, [13].

Problema: ¿Será que cualquiera que sea el álgebra de Łukasiewicz trivalente L y F un Δ-filtro de L entonces todas las clases de equivalencia módulo F son coordinables? Esto generalizaría el resultado de Antonio Monteiro.

Lema 2.2 *Si F es un Δ-filtro de un álgebra de Łukasiewicz L y C una clase de equivalencia módulo F, tal que $C \cap B(L) \neq \emptyset$, entonces $|F| = |C|$.*

Dem. Sea b un elemento fijo de $C \cap B(L)$. Si $f \in F$ pongamos por definición:

$$H(f) = (\sim f \vee b) \wedge (\sim b \vee f).$$

Entonces siguiendo el mismo procedimiento que el indicado por A. Monteiro [13] tenemos:

$$H(f) \wedge \Delta f = (\sim f \vee b) \wedge (\sim b \vee f) \wedge \Delta f =$$
$$(\sim f \vee b) \wedge \Delta f = (\sim f \wedge \Delta f) \vee (b \wedge \Delta f) = b \wedge \Delta f.$$

Luego como $\Delta f \in F$ tenemos que $H(f) \equiv b$ y por lo tanto $H(f) \in C$.

(1) <u>H es suryectiva</u>
Sea $c \in C$ luego $c \equiv b$ y por lo tanto en particular $\nabla \sim b \vee c \in F$ y $\nabla b \vee \sim c \in F$, y como $b \in B(L)$ entonces $\sim b \vee c \in F$ y $b \vee \sim c \in F$, luego $f = (\sim b \vee c) \wedge (b \vee \sim c) \in F$. Luego

$$H(f) = (\sim f \vee b) \wedge (\sim b \vee f) =$$
$$[(b \wedge \sim c) \vee (\sim b \wedge c) \vee b] \wedge [\sim b \vee ((\sim b \vee c) \wedge (b \vee \sim c))] =$$
$$((\sim b \wedge c) \vee b) \wedge (\sim b \vee c) = (c \vee b) \wedge (\sim b \vee c) = c \vee (b \wedge \sim b) = c$$

Luego H es suryectiva.

(2) <u>H es inyectiva</u>
Supongamos que $f_1, f_2 \in F$ son tales que $H(f_1) = H(f_2)$, esto es

$$\text{(I)} \qquad (\sim f_1 \vee b) \wedge (\sim b \vee f_1) = (\sim f_2 \vee b) \wedge (\sim b \vee f_2)$$

Haciendo el ínfimo de ambos miembros con b tenemos:

$$b \wedge (\sim b \vee f_1) = b \wedge (\sim b \vee f_2)$$

luego

$$\text{(II)} \qquad b \wedge f_1 = b \wedge f_2$$

Haciendo el ínfimo de ambos miembros de (I) con $\sim b$ tenemos:

$$\sim b \wedge (\sim f_1 \vee b) = \sim b \wedge (\sim f_2 \vee b)$$

esto es

$$\sim b \wedge \sim f_1 = \sim b \wedge \sim f_2$$

luego

$$\text{(III)} \qquad b \vee f_1 = b \vee f_2$$

De (II) y (III) resulta que $f_1 = f_2$. ■

Si probaramos que si C es una clase de equivalencia tal que $C \cap B(L) = \emptyset$ entonces $|C| = |F|$ ó $|C| = |C'|$ donde C' es una clase de equivalencia tal que $C' \cap B(L) \neq \emptyset$, entonces el problema estaría resuelto.

Recordemos el siguiente resultado:

Lema 2.3 *Si L es un álgebra de Łukasiewicz, $b \in B(L)$ y C es una clase de equivalencia, módulo el Δ-filtro $[b)$, entonces $|C \cap (b]| = 1$.* (ver [8]).

Lema 2.4 *Si L es un álgebra de Łukasiewicz, $b \in B(L)$ y C es una clase de equivalencia, módulo el Δ-filtro $F = [b)$, entonces $|C| = |F|$.*

Dem. Por el Lema 2.3, $C \cap (b] = \{x\}$, luego es claro que $C = C_{[b)}(x)$.
Por el Lema 2.1 $C_{[b)}(x) = [x, x \vee \sim b]$. Si $y \in C_{[b)}(x)$ pongamos $J(y) = y \vee b$, luego $J(y) \in F$.
Dado $z \in F = [b)$, consideremos el elemento $y = z \wedge (x \vee \sim b)$, por lo tanto $y \leq x \vee \sim b$.
Como $x \leq b \leq z$ entonces $y = (z \wedge x) \vee (z \wedge \sim b) = x \vee (z \wedge \sim b) \geq x$, luego $y \in [x, x \vee \sim b] = C_{[b)}(x)$ y $J(y) = (z \wedge (x \vee \sim b)) \vee b = z \vee b = z$. Por lo tanto J es suryectiva.
Sean $y_1, y_2 \in C_{[b)}(x)$ tales que $J(y_1) = J(y_2)$ esto es (1) $y_1 \vee b = y_2 \vee b$. Como $x \leq y_1 \leq x \vee \sim b$ entonces $\sim x \wedge b \leq \sim y_1 \leq \sim x$ luego:

$$\sim x \vee \sim b = (\sim x \wedge b) \vee \sim b \leq \sim y_1 \vee \sim b \leq \sim x \vee \sim b$$

y por lo tanto (2) $\sim x \vee \sim b = \sim y_1 \vee \sim b$. Análogamente (3) $\sim x \vee \sim b = \sim y_2 \vee \sim b$. De (2) y (3) resulta $\sim y_1 \vee \sim b = \sim y_2 \vee \sim b$ y por lo tanto (4) $y_1 \wedge b = y_2 \wedge b$. De (1) y (4) resulta $y_1 = y_2$. ■

Corolario 2.1 *Si L es un álgebra de Łukasiewicz finita, F un Δ-filtro y C una clase de equivalencia módulo F entonces $|C| = |F|$.*

Dem. Como L es finita entonces $F = [b)$, con $b \in B(L)$, luego por el Lema 2.4, $|C| = |F|$. ■

Si L es álgebra de Łukasiewicz y $a \in L$ es tal que $a \leq \sim a$, entonces $[a, \sim a]$ es un subreticulado de L con primer elemento a y último elemento $\sim a$. Si $a = 0$ se tiene $[a, \sim a] = L$ y si $a \neq 0$ entonces $[a, \sim a] \neq L$.
Sea $a \neq 0$ tal que $a \leq \sim a$ esto equivale a decir que $\Delta a = 0$ ó que $a \in \Delta_0(L) \setminus \{0\}$.
Es claro que $[a, \sim a]$ es un álgebra de De Morgan donde la negación en $[a, \sim a]$ es la misma que la negación en L. Si $z \in [a, \sim a]$ pongamos por definición:

$$\nabla^{(a)} z = \nabla z \wedge \sim a.$$

Si $z \in [a, \sim a]$ entonces $a \leq z \leq \nabla z$ luego $a = a \wedge \sim a \leq \nabla z \wedge \sim a \leq \sim a$ y por lo tanto $\nabla^{(a)} z \in [a, \sim a]$.

Lema 2.5 *Si L es un álgebra de Łukasiewicz, $a \in \Delta_0(L)$ y $a \neq 0$ entonces:*

$$([a, \sim a],\ \wedge, \vee, \sim, \nabla^{(a)}, \sim a)$$

es un álgebra de Łukasiewicz.

Dem. Sean $z, w \in [a, \sim a]$ entonces:
$\sim z \ \vee \nabla^{(a)} z = \sim z \ \vee (\nabla z \ \wedge \sim a) = (\sim z \ \vee \nabla z) \ \ \wedge (\sim z \vee \sim a) = 1 \ \ \wedge (\sim z \vee \sim a) = \sim z \vee \sim a = \sim (z \ \wedge a) = \sim a$.
$\sim z \ \ \wedge \nabla^{(a)} z = \sim z \ \wedge \nabla z \ \wedge \sim a = \sim (z \ \vee a) \ \wedge \nabla z = \sim z \ \wedge \nabla z = \sim z \ \ \wedge z$.
$\nabla^{(a)} z \ \ \wedge \nabla^{(a)} w = \nabla z \ \wedge \ \sim a \ \wedge \nabla w \ \wedge \sim a = (\nabla z \ \ \wedge \nabla w) \wedge \sim a = \nabla(z \ \wedge w) \wedge \sim a = \nabla^{(a)}(z \ \wedge w)$.
Luego $[a, \sim a]$ es un álgebra de Łukasiewicz, donde el operador $\Delta^{(a)}$ está definido por: $\Delta^{(a)} z = \sim \nabla^{(a)} \sim z = \sim (\nabla \sim z \wedge \sim a) = \sim \nabla \sim z \ \vee a = \Delta z \ \vee a$. ■

Lema 2.6 *Si M es álgebra de Moisil y e su eje entonces $[e, \sim e]$ es un álgebra de Boole.* [1].

Dem. Vamos a indicar una demostración diferente a la dada en [1].
Como $\Delta e = 0 \leq \Delta \sim e$ y $\nabla e \leq 1 = \sim 0 = \sim \Delta e = \ \nabla \sim e$ tenemos que $e \leq \sim e$, luego por el Lema 2.5, $[e, \sim e]$ es un álgebra de Łukasiewicz. Vamos a probar que $\nabla^{(e)} z = z$ para todo $z \in [e, \sim e]$, esto es que $\nabla z \wedge \sim e = z$, para todo $z \in [e, \sim e]$.
Para ello usaremos el principio de determinación de Moisil, esto es probaremos que:

$$(1)\ \nabla z \ \wedge \nabla \sim e = \nabla(\nabla z \wedge \sim e) = \nabla z$$

y

$$(2)\ \nabla z \ \wedge \Delta \sim e = \Delta(\nabla z \wedge \sim e) = \Delta z.$$

De (3) $z \leq \sim e$ resulta $\nabla z \leq \nabla \sim e$ y por lo tanto se verifica (1). De (3) también resulta $\Delta z \leq \Delta \sim e$ y por lo tanto (4) $\Delta z = \Delta z \ \wedge \nabla z \leq \nabla z \ \wedge \Delta \sim e$. Como M tiene eje e entonces $z = \Delta z \ \vee (\nabla z \wedge \sim e)$, luego $\Delta z = \Delta z \ \vee (\nabla z \ \wedge \Delta \sim e)$, y por lo tanto (5) $\nabla z \ \wedge \Delta \sim e \leq \Delta z$. De (4) y (5) resulta (2). ■

Lema 2.7 *Si L es álgebra de Lukasiewicz y $a \in \Delta_0(L) \setminus \{0\}$ entonces las álgebras de Lukasiewicz $[a, \sim a]$ y $[\nabla a)$ son isomorfas.*

Dem. Pongamos por definición:

$$H(x) = (x \ \wedge \ \sim a) \ \vee a, \quad \text{para} \quad x \in L.$$

Luego $a \leq (x \ \wedge \ \sim a) \ \vee a = H(x)$. Como $a \in \Delta_0(L)$ entonces $a \leq \sim a$ luego $H(x) = (x \ \vee a) \ \wedge (a \vee \sim a) = (x \ \vee a) \wedge \sim a \leq \sim a$. Por lo tanto $H(x) \in [a, \sim a]$ cualquiera que sea $x \in L$. Sea h la restricción de la función H al conjunto $[\nabla a)$, luego $h : [\nabla a) \to [a, \sim a]$.

h es suryectiva. Dado $y \in [a, \sim a]$, esto es $a \leq \ y \leq \sim a$, sea $x = y \ \vee \ \nabla a$. Luego $x \in [\nabla a)$ y $h(x) = ((y \ \vee \nabla a) \wedge \ \sim a) \ \vee a = (y \ \vee \nabla a \ \vee a) \ \wedge (\sim a \ \vee a) = (y \ \vee \nabla a) \wedge \sim a = (y \wedge \sim a) \ \vee (\nabla a \wedge \ \sim a) = (y \wedge \sim a) \ \vee (a \wedge \ \sim a) = y \ \vee a = y$.

h es biyectiva. Sean $x, y \in [\nabla a)$ tales que $h(x) = h(y)$ esto es:

$$(x \ \wedge \ \sim a) \ \vee a = (y \ \wedge \ \sim a) \ \vee \ a.$$

Luego

$$\nabla \left((x \ \wedge \sim a) \ \vee \ a \right) = \nabla \left((y \ \wedge \sim a) \ \vee a \right) \tag{2.1}$$

y

$$\Delta \left((x \wedge \sim a) \ \vee a \right) = \Delta \left((y \wedge \sim a) \ \vee a \right) \tag{2.2}$$

De (2.1) resulta

$$(\nabla x \ \wedge \ \nabla \sim a) \ \vee \ \nabla a = (\nabla y \ \wedge \ \nabla \sim a) \ \vee \ \nabla a$$

esto es

$$(\nabla x \ \vee \ \nabla a) \ \wedge \ (\nabla \sim a \ \vee \nabla a) = (\nabla y \ \vee \ \nabla a) \ \wedge \ (\nabla \sim a \ \vee \nabla a).$$

Como $\nabla \sim a \ \vee \nabla a = \nabla(\nabla \sim a \ \vee a) = \nabla 1 = 1$ entonces

$$\nabla x \ \vee \nabla a = \nabla y \ \vee \nabla a,$$

y de $\nabla a \leq x, y$ resulta $\nabla a \leq \nabla x$ y $\nabla a \leq \nabla y$, luego tenemos que

$$\nabla x = \nabla y. \tag{2.3}$$

De (2.2) se deduce que

$$(\Delta x \ \wedge \ \Delta \sim a) \ \vee \ \Delta a = (\Delta y \ \wedge \ \Delta \sim a) \ \vee \ \Delta a$$

luego

$$(\Delta x \ \vee \ \Delta a) \ \wedge \ (\Delta \sim a \ \vee \ \Delta a) = (\Delta y \ \vee \ \Delta a) \ \wedge \ (\Delta \sim a \ \vee \ \Delta a)$$

y por lo tanto haciendo el supremo de ambos miembros con ∇a tenemos

$$\Delta x \ \vee \ \nabla a = \Delta x \ \vee \ \Delta a \ \vee \nabla a = \Delta y \ \vee \Delta a \ \vee \nabla a = \Delta y \ \vee \nabla a$$

y como $\nabla a \leq x, y$ entonces $\Delta a \leq \ \nabla a \leq \Delta x$ y $\Delta a \leq \ \nabla a \leq \Delta y$, por lo tanto

$$\Delta x = \Delta y. \tag{2.4}$$

De (2.3) y (2.4) se deduce por el principio de determinación de Moisil que $x = y$.
$h(1) = \sim a$. En efecto, $h(1) = (1 \wedge \sim a) \vee a = \sim a \vee a = \sim a$.
$h(\nabla a) = a$. En efecto, $h(\nabla a) = (\nabla a \wedge \sim a) \vee a = (a \wedge \sim a) \vee a = a$.
$h(\sim_{[\nabla a)} x) = \sim h(x)$. Observemos en primer lugar que si $x \in [\nabla a)$ esto es $\nabla a \leq x$, como $a \leq \nabla a$ entonces $a \leq x$, y por lo tanto (3) $a \vee x = x$. Luego teniendo en cuenta (3) y $a \leq \sim a$ tenemos que: $h(\sim_{[\nabla a)} x) = h(\sim x \vee \nabla a) = ((\sim x \vee \nabla a) \wedge \sim a) \vee a = (\sim x \vee \nabla a \vee a) \wedge (\sim a \vee a) = (\sim x \vee \nabla a) \wedge \sim a = (\sim x \wedge \sim a) \vee (\nabla a \wedge \sim a) = \sim (x \vee a) \vee (a \wedge \sim a) = \sim x \vee a$.
$\sim h(x) = \sim ((x \wedge \sim a) \vee a) = (\sim x \vee a) \wedge \sim a = (\sim x \wedge \sim a) \vee (a \wedge \sim a) = (\sim x \wedge \sim a) \vee a = \sim (x \vee a) \vee a = \sim x \vee a$.
$h(\nabla x) = \nabla^{(a)} h(x)$.
En efecto, $\nabla^{(a)} h(x) = \nabla^{(a)}((x \wedge \sim a) \vee a) = \nabla((x \wedge \sim a) \vee a) \wedge \sim a = ((\nabla x \wedge \nabla \sim a) \vee \nabla a) \wedge \sim a = (\nabla x \wedge \nabla \sim a \wedge \sim a) \vee (\nabla a \wedge \sim a) = (\nabla x \wedge \sim a) \vee (a \wedge \sim a) = (\nabla x \wedge \sim a) \vee a = h(\nabla x)$.
$h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$.
En efecto, $h(x \wedge y) = ((x \wedge y) \wedge \sim a) \vee a = (x \wedge \sim a \wedge y \wedge \sim a) \vee a = ((x \wedge \sim a) \vee a) \wedge ((y \wedge \sim a) \vee a) = h(x) \wedge h(y)$. ∎

Corolario 2.2 *Si L es un álgebra de Lukasiewicz y $a \in \Delta_0(L) \setminus \{0\}$ entonces $[a, \sim a]$ es isomorfa a $(\sim \nabla a]$.*

Dem. Consecuencia inmediata de los Lemas 2.7 y 1.3. ∎

L. Monteiro, S. Savini y J. Sewald [12] probaron:

Lema 2.8 *Sea M un álgebra de Moisil, con eje e y $a \in \mathcal{A}(B(M))$. Si $a \leq \sim \nabla e$ entonces $[0, a] = \{0, a\}$ y si $a \leq \nabla e$ entonces $[0, a] = \{0, a \wedge e, a\}$.*

Lema 2.9 *Sea M es un álgebra de Moisil con eje e, que no es un álgebra de Boole ni un álgebra de Post. Entonces $\nabla e \in \mathcal{A}(B(M))$ si y solo si $M = B \times \mathbf{T}$.*

Dem. En efecto, si $M = B \times \mathbf{T}$, donde B es un álgebra de Boole no trivial, entonces su eje es $e = (0, c)$ luego $\nabla e = (0, 1)$ y claramente ∇e es un átomo de $B(M)$.

Recíprocamente si M es un álgebra de Moisil, que no es un álgebra de Boole ni un álgebra de Post, e su eje entonces sabemos que $M \cong M/[\sim \nabla e) \times M/[\nabla e)$, $M/[\sim \nabla e)$ es un álgebra de Boole no trivial y $M/[\nabla e) \cong (\nabla e]$ es un álgebra de Post. Por hipótesis (1) ∇e es un átomo de $B(M)$ luego por el Lema 2.8 $[0, \nabla e] = (\nabla e] = \{0, e, \nabla e\}$. Además $e \neq \nabla e$ pués si $e = \nabla e$ entonces $0 = \Delta e = \nabla e$, lo que contradice (1). Luego $M/[\nabla e) \cong \mathbf{T}$. ∎

Corolario 2.3 *Si B es un álgebra de Boole no trivial y e el eje del álgebra de Moisil $M = B \times \mathbf{T}$ entonces $[0, \nabla e] = \{0, e, \nabla e\}$.*

Dem. Por el Lema 2.9, ∇e es un átomo de $B(M)$. Luego por el Lema 2.8 $[0, \nabla e] = \{0, e, \nabla e\}$. ∎

Corolario 2.4 *Si M es un álgebra de Moisil tal que $M = B \times \mathbf{T}$, $e = (0, c)$ su eje entonces*

I) $[e, \sim e]$, $[\nabla e)$ *y* $(\sim \nabla e]$ *son álgebras de Boole isomorfas,*

II) $\{[e, \sim e], [\nabla e), (\sim \nabla e]\}$ *es una partición de* M*,*

III) $B(M) = [\nabla e) \cup (\sim \nabla e]$.

Dem.

I) Es una consecuencia inmediata de los Lemas 1.3, 2.6 y el Corolario 2.2.
Es claro que:

$$X_0 = \{(b, 0) : b \in B\} \cong B,\ X_c = \{(b, c) : b \in B\} \cong B,\ X_1 = \{(b, 1) : b \in B\} \cong B$$

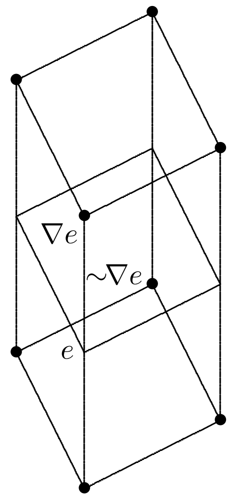
y que $\{X_0, X_c, X_1\}$ es una partición de $M = B \times \mathbf{T}$. Probemos que $X_0 = (\sim \nabla e]$, $X_c = [e, \sim e]$ y $X_1 = [\nabla e)$.
Como $e = (0, c)$ entonces $\sim e = (1, c)$,$\nabla e = \nabla(0, c) = (0, 1)$ y $\sim \nabla e = (1, 0)$. Es claro que $x = (b, 0) \in X_0$ si y solo si $x \leq (1, 0) =\sim \nabla e$, $x = (b, 1) \in X_1$ si y solo si $\nabla e = (0, 1) \leq x$ y que $x = (b, c) \in X_c$ si y solo si $e = (0, c) \leq (b, c) \leq (1, c) =\sim e$.

II) Sabemos que $M/[\nabla e) \cong (\nabla e]$ y como ∇e es un átomo de $B(M)$ por el Corolario 2.3 $(\nabla e] = \{0, e, \nabla e\}$ y por el Lema 2.1 $C_{[\nabla e)}(e) = [e, e \vee \sim \nabla e] = [e, e\ \vee \Delta \sim e] = [e, e \vee \sim e] = [e, \sim e]$ y $C_{[\nabla e)}(0) = [0, 0 \vee \sim \nabla e] = [0, \sim \nabla e]$.

III) Sea $A = [\nabla e) \cup (\sim \nabla e]$. Luego $0, 1 \in A$. Si $x, y \in A$ entonces (1) $x, y \in [\nabla e)$, (2) $x, y \in (\sim \nabla e]$ ó (3) $x \in [\nabla e)$ e $y \in (\sim \nabla e]$. En el caso (1) $x\ \wedge y, x\ \vee y \in [\nabla e)$. En el caso (2) $x\ \wedge y, x\ \vee y \in (\sim \nabla e]$. En el caso (3) como $x \leq x\ \vee y$ entonces $x\ \vee y \in [\nabla e)$ y como $x\ \wedge y \leq y$ entonces $x\ \wedge y \in (\sim \nabla e]$. Por lo tanto A es un $(0, 1)$-subreticulado de M.
En las álgebras de Moisil se verifica (4) $\nabla x \leq \Delta x\ \vee \nabla e$, luego si $x \in [\nabla e)$ esto es (5) $\nabla e \leq x$ entonces de (4) y (5) resulta $\nabla x \leq \Delta x\ \vee x = x$ y por lo tanto $\nabla x = x$, esto es $x \in B(M)$.
Si $x \in (\sim \nabla e]$ entonces (6) $x \leq\sim \nabla e$. Como en las álgebras de Moisil se verifica $\nabla \sim x \leq \Delta \sim x\ \vee \nabla e$, luego (7) $\sim \nabla e\ \wedge \nabla x \leq \Delta x$. De (7) y (6) resulta $x = x\ \wedge \nabla x \leq\sim \nabla e\ \wedge \nabla x \leq \Delta x$ y por lo tanto $\Delta x = x$, esto es $x \in B(M)$. Luego $[\nabla e) \cup (\sim \nabla e] \subseteq B(M)$.
Sea $b \in B(M)$ y supongamos que $b \in [e, \sim e]$ esto es (8) $e \leq b$ y (9) $b \leq\sim e$. De (8) resulta $e \wedge \sim b \leq b \wedge\ \sim b = 0$, luego (10) $e \wedge \sim b = 0$ y de (9) resulta (11) $e \leq\sim b$. Finalmente por (10) y (11) tenemos $e = 0$, absurdo. Por lo tanto si $b \in B(M)$ entonces $b \in \complement[e, \sim e] = [\nabla e) \cup (\sim \nabla e]$.
Luego $B(M) = [\nabla e) \cup (\sim \nabla e]$.

■

Ejemplo 2.1 *Consideremos el álgebra de Moisil M cuyo diagrama se indica. Los elementos de $[\nabla e) \cup (\sim \nabla e]$ están marcados con $\bullet$.*

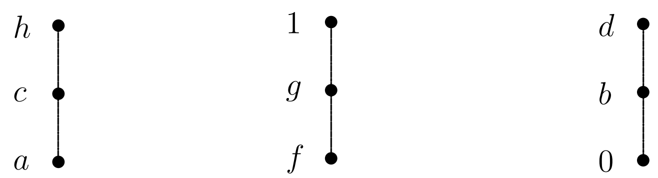


Lema 2.10 *Si P es un álgebra de Post, no trivial, $P \neq \mathbf{T}$, c su centro y $a \in [0, c] \setminus \{0, c\}$ entonces $[a, \sim a]$ es un álgebra de Post no trivial y $[a, \sim a] \cap B(P) = \emptyset$.*

Dem. Cualquiera que sea $x \in [0, c]$ se tiene que $\Delta x = 0$. Sea (1) $a \in [0, c]$, tal que (2) $a \neq 0$ y (3) $a \neq c$. De (1) resulta que $a \leq c$ y por lo tanto $c = \sim c \leq \sim a$, luego (4) $a \leq c \leq \sim a$ entonces por el Lema 2.5, $S = [a, \sim a]$ es un álgebra de Łukasiewicz. Por (2) $S \neq P$, por (3) $|S| > 1$ y por (4) $c \in S$ luego S es un álgebra de Post no trivial.
Si $b \in S \cap B(P)$ tenemos que (5) $b \in [a, \sim a]$ y (6) $b \in B(P)$. De (5) resulta (7) $a \leq b$ y (8) $b \leq\sim a$. De (8) resulta (9) $a \leq \sim b$. De (7), (9) y (6) resulta $a \leq b \wedge \sim b = 0$, lo que contradice la hipótesis (2). ■

Consideremos el álgebra de Post P cuyo diagrama fué indicado en el Ejemplo 1.2. Entonces a es un átomo del álgebra de Boole $[0, c]$ y los conjuntos $[a, \sim a]$, $[\nabla a]$, $(\sim \nabla a]$ tienen los siguientes diagramas.

$[a, \sim a]$ $\qquad$ $[\nabla a) = [f)$ $\qquad$ $(\sim \nabla a] = (d]$



La observación de este ejemplo motivó el siguiente:

Lema 2.11 *Sea P un álgebra de Post y c su centro. Si a es un átomo del álgebra de Boole $[0, c]$ y $M(P) = \complement[a, \sim a]$, entonces*

A) $\{[\nabla a), (\sim \nabla a], [a, \sim a]\}$ *es una partición de P, donde $[\nabla a)$, $(\sim \nabla a]$ y $[a, \sim a]$ son álgebras de Post isomorfas.*

B) $M(P) = [\nabla a) \cup (\sim \nabla a]$, *es un álgebra de Moisil, que no es un álgebra de Boole,*

C) $B(M(P)) = B(P)$.

Dem. A) Si $a \in [0, c]$ es un átomo entonces en particular $a \neq 0$. En el Lema 2.10 probamos que $a \leq \sim a$, $a \neq \sim a$ y $[a, \sim a]$ es un álgebra de Post no trivial, cuyo centro es c.
Probemos que:

$$([\nabla a) \cup (\sim \nabla a]) \cap [a, \sim a] = \emptyset. \tag{2.5}$$

y

$$[\nabla a) \cup (\sim \nabla a] \cup [a, \sim a] = P \tag{2.6}$$

I) $[\nabla a) \cap [a, \sim a] = \emptyset$.
Si $t \in [\nabla a) \cap [a, \sim a]$ entonces (1) $\nabla a \leq t$ y (2) $a \leq t \leq \sim a$. De (1) resulta que $1 = \nabla a \vee \sim a \leq t \vee \sim a$, luego $t \vee \sim a = 1$. Por (2) $t \vee \sim a = \sim a$, por lo tanto $\sim a = 1$ y en consecuencia $a = 0$, absurdo.

II) $(\sim \nabla a] \cap [a, \sim a] = \emptyset$.
Si $t \in (\sim \nabla a] \cap [a, \sim a]$ entonces (3) $t \leq \sim \nabla a$ y (4) $a \leq t \leq \sim a$. De (3) resulta que $t \wedge a \leq \sim \nabla a \wedge a = \Delta \sim a \wedge a = 0$, luego $t \wedge a = 0$, y como por (4) $a \wedge t = a$, se tiene que $a = 0$, absurdo.

De (I) y (II) resulta (2.5).

III) $[\nabla a) \cap (\sim \nabla a] = \emptyset$.
Si $t \in [\nabla a) \cap (\sim \nabla a]$ entonces $\nabla a \leq t \leq \sim \nabla a$, luego $0 = \sim \nabla a \wedge \nabla a = \nabla a$, y en consecuencia $a = 0$, absurdo.

Sea $X = [\nabla a) \cup (\sim \nabla a] \cup [a, \sim a]$, luego $X \subseteq P$. Sea $t \in P$, si $t \in [\nabla a)$ entonces $t \in X$. Si $t \in (\sim \nabla a]$ entonces $t \in X$. Supongamos ahora que $t \notin [\nabla a) \cup (\sim \nabla a]$ y probemos que $t \in [a, \sim a]$. Por hipótesis (i) $\nabla a \not\leq t$ y (ii) $t \not\leq \sim \nabla a$. Observemos que como $a \in [0, c]$ entonces

$$(1) \;\; \Delta a = 0 \leq \Delta t \;\; \text{y} \;\; (2) \;\; \nabla t \leq 1 = \sim 0 = \sim \Delta a = \nabla \sim a.$$

Vamos a probar que (3) $\nabla a \leq \nabla t$ y que (4) $\Delta t \leq \Delta \sim a$.
Si $\nabla t \leq \Delta \sim a$ como $t \leq \nabla t$ entonces $t \leq \Delta \sim a = \sim \nabla a$, lo que contradice (ii) luego (5) $\nabla t \not\leq \Delta \sim a$. Como $a \leq \sim a$ entonces (6) $a = a \wedge \sim a \leq \nabla t \vee \sim \nabla t = 1$. Como a es un átomo de $[0, c]$ entonces es un elemento primo de P, luego de (6) resulta que (7) $a \leq \nabla t$ ó (8) $a \leq \sim \nabla t$. Si ocurre (8) entonces $\nabla t \leq \sim a$ y en consecuencia $\nabla t \leq \Delta \sim a$, lo que contradice (5). Por lo tanto se verifica (7) y en consecuencia (4) $\nabla a \leq \nabla t$.
Si $\nabla a \leq \Delta t$ como $\Delta t \leq t$ entonces $\nabla a \leq t$ lo que contradice (i). Luego (9) $\nabla a \not\leq \Delta t$. Análogamente de $a = a \wedge \sim a \leq \Delta t \vee \sim \Delta t$, se deduce que (10) $a \leq \Delta t$ ó (11) $a \leq \sim \Delta t$. Si ocurre (10) entonces $\nabla a \leq \Delta t$ lo que contradice (9), luego se verifica (11) y por lo tanto $\Delta t \leq \sim a$ y en consecuencia (4) $\Delta t \leq \Delta \sim a$.
De (1) y (3) resulta $a \leq t$ y de (2) y (4) $t \leq \sim a$, por lo tanto $t \in [a, \sim a]$. Acabamos de probar que $P \subseteq X$ y por lo tanto se verifica (2.6).

De (I), (II), (III) y (2.6) resulta que $\{[\nabla a), (\sim \nabla a], [a, \sim a]\}$ es una partición de P, donde por los Lemas 2.7, 2.10 y el Corolario 2.1, $[\nabla a)$, $(\sim \nabla a]$ y $[a, \sim a]$ son álgebras de Post isomorfas. Observemos que $c \vee \nabla a$ es el centro de $[\nabla a)$ y que $c \wedge \sim \nabla a$ es el centro de $(\sim \nabla a]$, ya que $\sim_{[\nabla a)} (c \vee \nabla a) = \sim (c \vee \nabla a) \vee \nabla a = \sim c \vee \nabla a = c \vee \nabla a$ y

$\sim_{(\sim\nabla a]} (c \wedge \sim \nabla a) =\sim (c \wedge \sim \nabla a) \wedge \sim \nabla a = \sim c \vee \sim \nabla a = c \vee \sim \nabla a$, lo que prueba A).

B) Probemos ahora que $M(P)$ es una subálgebra de P.
$\underline{0, 1 \in M(P)}$. Como $a \neq c$, por el Lema 2.10 $[a, \sim a] \cap B(P) = \emptyset$ entonces $0, 1 \in M(P)$.
$\underline{\text{Si } z \in M(P) \text{ entonces } \sim z \in M(P)}$. Como $z \in M(P)$ entonces $z \in P$ y $z \notin [a, \sim a]$. Si $\sim z \notin M(P)$ entonces $\sim z \in [a, \sim a]$ esto es $a \leq \sim z \leq \sim a$ y por lo tanto $a \leq z \leq \sim a$ esto es $z \in [a, \sim a]$, absurdo.
$\underline{\text{Si } z \in M(P) \text{ entonces } \nabla z \in M(P)}$. Si $z \in M(P)$ como $\nabla z \in B(P)$ entonces $\nabla z \notin [a, \sim a]$ y por lo tanto $\nabla z \in M(P)$.
$\underline{\text{Si } z, w \in M(P) \text{ entonces } z \wedge w \in M(P)}$. Si $z, w \in M(P)$ entonces (1) $z, w \in [\nabla a)$, (2) $z, w \in (\sim \nabla a]$ ó (3) $z \in [\nabla a)$ y $w \in (\sim \nabla a]$.
Si ocurre (1) ya sabemos que $z \wedge w \in [\nabla a) \subseteq M(P)$ y en el caso (2) $z \wedge w \in (\sim \nabla a] \subseteq M(P)$. En el caso (3) tenemos $z \wedge w \leq w \leq\sim \nabla a$ luego $z \wedge w \in (\sim \nabla a] \subseteq M(P)$.

Sea a' el complemento booleano de a en $[0, c]$ esto es (4) $a' \vee a = c$ y (5) $a' \wedge a = 0$. Si $a' \notin M(P)$ entonces $a' \in [a, \sim a]$ en particular (6) $a \leq a'$. De (6) y (5) resulta $a = a \wedge a' = 0$, lo que contradice que a es un átomo. Luego $a' \in M(P)$.
$\underline{a' \text{ es el eje de } M(P)}$. Como $a' \leq c$ entonces $\Delta a' = 0$, luego solo nos resta probar que cualquiera que sea $x \in M(P)$:

$$\Delta x \vee (\nabla x \wedge a') = x. \tag{2.7}$$

Como $a' \vee a = c$, si $x \in M(P)$ tenemos

$$(\nabla x \wedge a') \vee (\nabla x \wedge a) = \nabla x \wedge (a' \vee a) = \nabla x \wedge c$$

Luego como P es un álgebra de Post:

$$\Delta x \vee (\nabla x \wedge a') \vee (\nabla x \wedge a) = \Delta x \vee (\nabla x \wedge c) = x$$

y por lo tanto

$$\Delta x \vee (\nabla x \wedge a') \vee (\nabla x \wedge a) = x.$$

Ahora bien como $0 \leq \nabla x \wedge a \leq a$ y a es un átomo de $[0, c]$ y en consecuencia un átomo de P entonces (7) $\nabla x \wedge a = 0$ ó (8) $\nabla x \wedge a = a$.

Si ocurre (7) entonces claramente se verifica (2.7). Si ocurre (8) ello equivale a $a \leq \nabla x$ y por lo tanto $\nabla a \leq \nabla x$ y como $\Delta a = 0 \leq \Delta x$ entonces (9) $a \leq x$. Como $x \in M(P) = \complement[a, \sim a]$ entonces $x \in [\nabla a) \cup (\sim \nabla a]$ esto es (10) $\nabla a \leq x$ ó (11) $x \leq \sim \nabla a$. Si ocurre (11) entonces $x \wedge \nabla a = 0$ luego $\nabla x \wedge \nabla a = 0$ y por lo tanto $0 = \nabla(\nabla x \wedge a) = \nabla a$, absurdo. Luego se verifica (10). Por lo tanto $a \leq \nabla a \leq \Delta x$, es decir $a \vee \Delta x = \Delta x$.

Entonces

$$x = \Delta x \vee (\nabla x \wedge a') \vee (\nabla x \wedge a) = \Delta x \vee (\nabla x \wedge a') \vee a =$$
$$\Delta x \vee a \vee (\nabla x \wedge a') = \Delta x \vee (\nabla x \wedge a'),$$

y por lo tanto tambien en este caso se verifica (2.7). Luego a' es el eje de $M(P)$. Además como a es un átomo de $[0, c]$ y a' su complemento en $[0, c]$ resulta que $a' \neq 0$, y por lo tanto $M(P)$ no es un álgebra de Boole, lo que prueba B).

Observemos que como $[a, \sim a] \cap B(P) = \emptyset$ entonces C) $B(M(P)) = B(P)$. ■

Lema 2.12 *Si $P = \mathbf{T}^n$, $n > 1$, c' el centro de P, $0'$ y $1'$ son el primer y último elemento de P y a es un átomo de $[0', c']$ entonces $[a, \sim a] \cong \mathbf{T}^{n-1}$.*

Dem. Si $p \in P$ entonces $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ donde $p_i \in \mathbf{T}$, $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto si $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es un átomo de $[0', c']$ entonces deben ser $n-1$ coordenadas de a iguales a 0 y una sola igual a c. Supongamos por ejemplo que $a = (c, 0, \ldots, 0)$ luego $\nabla a = (1, 0, \ldots, 0) \in B(P) \setminus \{0', 1'\}$. Luego por el Corolario 1.1 $P \cong [\nabla a) \times (\nabla a]$ y por el Lema 2.8 $\{0, a, \nabla a\} = (\nabla a]$ y a es el centro de $(\nabla a]$, y por lo tanto $(\nabla a] \cong \mathbf{T}$. Luego $\mathbf{T}^n = P \cong [\nabla a) \times (\nabla a] \cong [\nabla a) \times \mathbf{T}$ entonces $[\nabla a) \cong \mathbf{T}^{n-1}$. Por el Corolario 2.2 y el Lema 1.3 $[a, \sim a] \cong (\sim \nabla a] \cong [\nabla a)$ entonces $[a, \sim a] \cong \mathbf{T}^{n-1}$. ■

Si L es un álgebra de Łukasiewicz y $X \subseteq L$ notaremos con $SL(X)$ a la subálgebra de Łukasiewicz de L generada por el conjunto X, si $y \in L$ notaremos $SL(X, y)$ en vez de $SL(X \cup \{y\})$. M. Abad, L. Monteiro, S. Savini y J. Sewald [2] probaron:

Lema 2.13 *Si M es un álgebra de Moisil, S^* una subálgebra booleana de $B(M)$, $y \in \Delta_0(M)$, entonces y es el eje de $M^* = SL(S^*, y)$.*

Es claro que si $y = 0$ entonces $M^* = S^*$.
L. Monteiro [11] probó que si M es un álgebra de Moisil, e su eje y M no es un álgebra de Boole entonces $e \neq 0$.

Lema 2.14 *Sean M y M' álgebras de Moisil, que no son álgebras de Boole, e el eje de M, e' el eje de M. Si $H : M \to M'$ es un homomorfismo inyectivo tal que $H(B(M)) = B(M')$ entonces la restricción h de H a $B(M)$ es un isomorfismo booleano de $B(M)$ en $B(M')$ tal que $h(\nabla e) = \nabla e^*$, donde $e^* \in \Delta_0(M') \setminus \{0\}$ y $H(M) = SL(B(M'), e^*)$.*

Dem. Es claro que $H(M)$ es una subálgebra de M' y que h es un isomorfismo booleano de $B(M)$ en $B(M')$. El elemento $e^* = H(e)$ verifica $\Delta H(e) = H(\Delta e) = H(0) = 0$ entonces por el Lema 2.13, $SL(B(M'), e^*)$ es un álgebra con eje e^*. Además $h(\nabla e) = H(\nabla e) = \nabla H(e) = \nabla e^*$.
Veamos que $H(e) \neq 0$. En efecto, si $H(e) = 0 = H(0)$ como H es inyectiva, entonces $e = 0$ absurdo, dado que M no es un álgebra de Boole.
Como $B(M') = H(B(M)) \subseteq H(M)$ y $e^* = H(e) \in H(M)$ entonces (1) $SL(B(M'), e^*) \subseteq H(M)$. Si $y \in H(M)$ entonces $y = H(m)$, con $m \in M$. Luego $m = (\Delta m \ \vee e) \ \wedge \nabla m$ y por lo tanto $H(m) = (H(\Delta m) \ \vee H(e)) \ \wedge H(\nabla m) = (H(\Delta m) \ \vee e^*) \ \wedge H(\nabla m)$, como $\Delta m, \nabla m \in B(M)$ y por hipótesis $H(B(M)) = B(M')$ entonces $H(\Delta m), H(\nabla m) \in B(M')$ de donde resulta $y = H(m) \in SL(B(M'), e^*)$. ■

Sean B y B' álgebras de Boole, $b \in B$ y $b' \in B'$. Notaremos con $Epi^{(b,b')}(B, B')$ el conjunto de todos los epimorfimos booleanos h de B en B' tales que $h(b) = b'$.

L. Monteiro ([14], lema 3.1) probó, el siguiente resultado:

Lema 2.15 *Si M y M' son álgebras de Moisil, que no son álgebras de Boole, con ejes e y e' respectivamente y $h \in Epi^{(\nabla e, \nabla e')}(B(M), B(M'))$ entonces la transformación H de M en M' definida por $H(x) = (h(\Delta x) \ \vee e') \wedge h(\nabla x)$ verifica* (I) *H es una extensión de h,* (II) *$H \in Epi(M, M')$, y* (III) *H es la única extensión de h.*

Lema 2.16 *Sea M un álgebra de Moisil, que no es un álgebra de Boole, e el eje de M, P un álgebra de Post y c su centro. Si $h : B(M) \to B(P)$ es un isomorfismo booleano que verifica $h(\nabla e) = \nabla e^*$, donde $e^* \in \Delta_0(P) \setminus \{0\}$ entonces:*

$$H(x) = (h(\Delta x) \ \vee e^*) \ \ \wedge h(\nabla x)$$

es un isomorfismo de M en la subálgebra $S = SL(B(P), e^*)$ de P, que extiende a h y además es único.

Dem. Por el Lema 2.13, sabemos que $S = SL(B(P), e^*)$ es un álgebra de Moisil, cuyo eje es e^*. Por hipótesis $h \in Epi^{(\nabla e, \nabla e^*)}(B(M), B(P))$. Como $h(\Delta x), h(\nabla x) \in B(P) \subseteq S$ y $e^* \in S$ entonces $H : M \to S$.
<u>H es suryectiva.</u>
Si $y \in S$, como S tiene por eje al elemento e^* entonces $y = (\Delta y \ \vee e^*) \ \wedge \nabla y$. Como $\Delta y, \nabla y \in B(P)$ existen $b_i \in B(M)$, $i = 1, 2$ tales que $h(b_1) = \Delta y$ y $h(b_2) = \nabla y$. Además es claro que $b_1 \leq b_2$.
Sea $x = (b_1 \ \vee e) \ \wedge b_2 \in M$. Entonces

$$\Delta x = b_1 \ \ \wedge b_2 = b_1 \quad \text{y} \quad \nabla x = (b_1 \ \vee \nabla e) \ \wedge b_2$$

y en consecuencia

$$h(\Delta x) = h(b_1) = \Delta y \quad \text{y} \quad h(\nabla x) = (h(b_1) \ \vee h(\nabla e)) \ \wedge h(b_2) = (\Delta y \ \vee \nabla e^*) \ \wedge \nabla y$$

luego

$$H(x) = (h(\Delta x) \ \vee e^*) \ \ \wedge h(\nabla x) = (\Delta y \ \vee e^*) \ \wedge (\Delta y \ \vee \nabla e^*) \ \wedge \nabla y =$$

$$(\Delta y \ \vee (e^* \ \wedge \nabla e^*)) \ \ \wedge \nabla y = (\Delta y \ \vee e^*) \ \ \wedge \nabla y = y.$$

<u>H es inyectiva.</u>
Supongamos que $H(x) = H(y)$, luego $\nabla H(x) = \nabla H(y)$ y $\Delta H(x) = \Delta H(y)$, esto es, $h(\nabla x) = H(\nabla x) = H(\nabla y) = h(\nabla y)$ y $h(\Delta x) = H(\Delta x) = H(\Delta y) = h(\Delta y)$. Como h es inyectiva tenemos que $\nabla x = \nabla y$ y $\Delta x = \Delta y$ de donde resulta por el principio de determinación de Moisil que $x = y$.
Por el Lema 2.15 sabemos que H es un epimorfismo de M en S que extiende a h y que además es único. Luego H es un isomorfismo de M en S. ■

Referencias

[1] Abad M. and Monteiro L., *On three-valued Moisil algebras*, Logique et Analyse 108 (1984), 407-414.

[2] Abad M., Monteiro L., Savini S. and Sewald J., *Subalgebras of a finite three-valued Łukasiewicz algebra*, Proceedings of the IX Latin American Symposium on Mathematical Logic (Part1), Notas de Lógica Matemática 38, (1993), 181-190, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina.

[3] Moisil Gr. C., *Recherches sur les logiques non chrysippiennes*, Annales Scientifiques de l'Université de Jassy, 26 (1940), 431-466.

[4] Moisil Gr. C., *Notes sur les logiques non chrysippiennes*, Annales Scientifiques de l'Université de Jassy, 27 (1941), 86-98.

[5] Moisil Gr. C., *Sur les anneaux de caractéristiques 2 ou 3 et leurs applications*, Bulletin de l'École Polytechnique de Bucarest 12 (1941), 66-90.

[6] Monteiro A., *Sur la définition des algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phy. R.P. Roumaine 7(55), (1963), 3-12.

[7] Monteiro A., Notas del curso *Algebras de Łukasiewicz trivalentes.* Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, (1963).

[8] Monteiro A., *Algebras de Łukasiewicz trivalentes.* Informes Técnicos Internos 83, INMABB-CONICET, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, (2003).

[9] Monteiro L., *Axiomes indépendants pour les algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phy. R.P. Roumaine 7(55), (1963), 199-202.

[10] Monteiro L., *Sur le principe de determination de Moisil*, Bull. Soc. Math. de Roumaine, T. 13 (61), No. 4, (1969), 447-448.

[11] Monteiro L., *Algebras de Łukasiewicz trivalentes monádicas.* Notas de Lógica Matemática 32, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, (1974).

[12] Monteiro L., Savini S. and Sewald J., *Construction of monadic three-valued Łukasiewicz algebras*, Studia Logica, L 3/4 (1991), 473-483.

[13] Monteiro L., *Algebras de Boole.* Informes Técnicos Internos 66, INMABB-CONICET-UNS, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, (1998). (versión corregida 2000-2001-2002).

[14] Monteiro L., *Número de epimorfimos entre álgebras de Łukasiewicz finitas.* Informes Técnicos Internos 82, INMABB-CONICET-UNS, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, (2003).