Grafos simples no isomorfos con n vértices y $(\mathbf{0},\mathbf{1})$-matrices booleanas de orden n simétricas con diagonal nula

Luiz F. Monteiro $^{(*)}$, Aída Kremer $^{(**)}$ y Agustín Claverie $^{(***)}$
$^{(*)}$ INMABB-C.O.N.I.C.E.T.-Universidad Nacional del Sur
$^{(**)}$ Departamento de Matemática-Universidad Nacional del Sur
$^{(***)}$ Laboratorio de Matemática - Departamento de Matemática-Universidad Nacional del Sur
luizmont@criba.edu.ar - akremer@uns.edu.ar - claverie@uns.edu.ar

Resumen

Si $\mathbf{2}$ denota el álgebra de Boole $\{0,1\}$ sea $M_n^s(\mathbf{2})$ el conjunto de todas las matrices de orden n simétricas con diagonal nula. A cada $A \in M_n^s(\mathbf{2})$ le corresponde una sucesión de n términos formada por la suma de los elementos de sus filas. Bajo una cierta relación de equivalencia $\sim$ definida sobre $M_n^s(\mathbf{2})$ el cardinal del conjunto cociente $M_n^s(\mathbf{2})/\sim$ es igual al cardinal del conjunto de todos los grafos simples no isomorfos con n vértices. Indicamos una fórmula para determinar $|M_n^s(\mathbf{2})/\sim|$.
Los resultados teóricos fueron obtenidos por los dos primeros autores y la implementación de un programa en lenguaje C y los resultados numéricos por A. Claverie.

Temas similares han sido estudiados por T. M. Barnes y C. D. Savage [4, 5], R. A. Brualdi y H. J. Ryser [7].

1. Introducción

Si $\mathbf{B}$ es un álgebra de Boole y $n \in \mathbb{N}$ notaremos con $M_n(\mathbf{B})$ el conjunto de todas las matrices (a_{ij}), $n \times n$ tales que $a_{ij} \in \mathbf{B}$, para $1 \leq i, j \leq n$. Las matrices booleanas han sido estudiadas entre otros por [3], [10], [12], [13], [16], [17], [18],[20],[22, 23].
Como es habitual notaremos $\mathbf{2}$ al álgebra de Boole $\{0,1\}$ donde $-0 = 1$. Dado $n \in \mathbb{N}$ sea $M_n^s(\mathbf{2})$ el conjunto de todas las matrices simétricas (a_{ij}), $n \times n$ tales que $a_{ij} \in \mathbf{2}$ y $a_{ii} = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Si $n = 1$ entonces $|M_1^s(\mathbf{2})| = 1$. Supongamos que $n \geq 2$ luego si $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n^s(\mathbf{2})$ y definimos:

$$A \wedge B = (a_{ij} \wedge b_{ij}), \quad A \vee B = (a_{ij} \vee b_{ij}),$$

entonces $A \wedge B, A \vee B \in M_n^s(\mathbf{2})$. Sean $P_n = (p_{ij})$ donde $p_{ij} = 0$ para $1 \leq i, j \leq n$ y $U_n = (u_{ij})$ donde $u_{ii} = 0$ y $u_{ij} = 1$ para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$, luego $P_n, U_n \in M_n^s(\mathbf{2})$.
Es claro que $(M_n^s(\mathbf{2}), \wedge, \vee, P_n, U_n)$ es un reticulado distributivo con primer elemento P_n y último elemento U_n.

Dada $A = (a_{ij}) \in M_n^s(\mathbf{2})$ sea $-A = (b_{ij})$ la matriz definida por $b_{ii} = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $b_{ij} = -a_{ij}$ para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$, entonces es claro que $-A \in M_n^s(\mathbf{2})$ y que $(M_n^s(\mathbf{2}), \wedge, \vee, -, P_n, U_n)$ es un álgebra de Boole que tiene $a(n) = \dfrac{n^2 - n}{2}$ átomos y por lo tanto $2^{a(n)}$ elementos.

Por definición $a(1) = 0$, luego $a(1)$ es par. Si en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros consideramos la relación $\equiv$ de congruencia módulo 4, es fácil ver que para $n \geq 2$ se verifica:

- Si n es par y $a(n)$ es par entonces $n \equiv 0$ (mód. 4),
- Si n es impar y $a(n)$ es par entonces $n \equiv 1$ (mód. 4).
- Si n es par y $a(n)$ es impar entonces $n \equiv 2$ (mód. 4),
- Si n es impar y $a(n)$ es impar entonces $n \equiv 3$ (mód. 4),

Lema 1.1 *Dado* $n \in \mathbb{N}$, (I) *si* $n \geq 2$, *entonces* $a(n) = a(n-1) + n - 1$.
(II) *Si* $n \geq 4$ *entonces* $\left[\frac{a(n)}{2}\right] \leq a(n-1)$.

Dem. (I)

$$a(n-1) + n - 1 = \frac{(n-1)^2 - (n-1)}{2} + n - 1 = \frac{n^2 - 2n + 1 - n + 1 + 2n - 2}{2} =$$

$$\frac{n^2 - n}{2} = a(n).$$

Observemos que si $n = 2$ ó $n = 3$ no se verifica (II). Supongamos que $n \geq 4$.

Primer Caso: $a(n)$ es par. Si

$$a(n-1) < \left[\frac{a(n)}{2}\right] = \frac{a(n)}{2} = \frac{a(n-1) + n - 1}{2}$$

luego

$$0 < \frac{a(n-1) + n - 1 - 2a(n-1)}{2} = \frac{-a(n-1) + n - 1}{2}$$

y por lo tanto $0 < -a(n-1) + n - 1$ luego $\dfrac{(n-1)^2 - (n-1)}{2} = a(n-1) < n - 1$ y por lo tanto $(n-1)^2 - (n-1) < 2(n-1)$ luego $(n-1)^2 < 3(n-1)$ y en consecuencia $n - 1 < 3$ y por lo tanto $n < 4$, absurdo.

Segundo Caso: $a(n)$ es impar. Si

$$\frac{(n-1)^2 - (n-1)}{2} = a(n-1) < \left[\frac{a(n)}{2}\right] = \frac{a(n) - 1}{2} = \frac{n^2 - n - 2}{4}$$

luego

$$2n^2 - 6n + 4 = 2((n-1)^2 - (n-1)) < n^2 - n - 2$$

y por lo tanto $(n-2)(n-3) = n^2 - 5n + 6 < 0$ luego $2 < n < 3$ absurdo. $\blacksquare$

Si $A=(a_{ij})\in M_n^s(\mathbf{2})$ sea $F_i(A)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij},\ 1\le i\le n$ luego como $a_{ii}=0$ para $1\le i\le n$ entonces

$$0\le F_i(A)\le n-1, \text{ para } 1\le i\le n. \tag{1.1}$$

A cada $A\in M_n^s(\mathbf{2})$ le podemos asignar la sucesión

$$F_1(A),F_2(A),\ldots,F_n(A).$$

Sobre el conjunto $M_n^s(\mathbf{2})$ vamos a definir la siguiente relación binaria:
dadas $A,B\in M_n^s(\mathbf{2})$ notaremos $A\sim B$ si y sólo si $F_1(A),F_2(A),\ldots,F_n(A)$ es una permutación de $F_1(B),F_2(B),\ldots,F_n(B)$. Claramente $\sim$ es una relación de equivalencia. Notaremos con $E(A)=\{B\in M_n^s(\mathbf{2}): B\sim A\}$, y con $M(n)$ al conjunto cociente de $M_n^s(\mathbf{2})$ por la relación de equivalencia $\sim$. Vamos a a indicar una forma de determinar $|M(n)|$.

Como $|M_1^s(\mathbf{2})|=1$ entonces $|M(1)|=1$ y como $M_2^s(\mathbf{2})=\{P_2,U_2\}$ y $P_2\not\sim U_2$ entonces $|M(2)|=2$.

Si $A\in M_n^s(\mathbf{2})$, sea $S(A)=\sum_{i=1}^{n}F_i(A)$, como $a_{ii}=0$ para $i=1,\ldots,n$ y A es simétrica entonces $S(A)=2t$, con $0\le t\le a(n)$. Además $0\le S(A)\le n^2-n$.
Es claro que si $A\sim B$ entonces $S(A)=S(B)$, pero $S(A)=S(B)$ no necesariamente implica que $A\sim B$.

Un grafo simple con n vértices es aquel que no tiene bucles y tal que a lo sumo existe una arista entre dos vértices.
Si G es un grafo simple con n vértices y v es un vértice de G entonces el grado de v, en notación $grad(v)$ es el número de aristas incidentes con v, luego como G no tiene bucles $0\le grad(v)\le n-1$. $\sum_{v\in G} grad(v)$ es un número par dado que $\sum_{v\in G} grad(v)=2|A|$, donde A es el conjunto de aristas de G.

Es bien conocido [14, 15] que existe una biyección entre el conjunto de todos los grafos simples etiquetados con n vértices y el conjunto $M_n^s(\mathbf{2})$.
El problema de determinar el cardinal del conjunto $M(n)$ es equivalente al de determinar el cardinal del conjunto de los grafos simples no isomorfos con n vértices [7]. A su vez este problema según P. Erdös y T. Gallai [9] es equivalente a determinar el cardinal de todas las sucesiones $x_1,x_2,\ldots,x_n$ de enteros que verifican:

$$n-1\ge x_1\ge x_2\ge\cdots\ge x_n\ge 0, \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ es un número par,} \tag{1.3}$$

$$\sum_{k=1}^{i} x_k\le i(i-1)+\sum_{k=i+1}^{n}(i\wedge x_k) \text{ para } 1\le i\le n-1. \tag{1.4}$$

2. Resultados

Si $A = (a_{ij}), C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbf{B})$, el producto de matrices se define del siguiente modo:

$$A \times C = (a_{ij}) \times (c_{ij}) = (d_{ik} = \bigvee_{j=1}^{n} (a_{ij} \wedge c_{jk})) \in M_n(\mathbf{B}).$$

Sea $E^{(n)} = (e_{ij})$ la matriz de $M_n(\mathbf{2})$, definida por:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{para } i = j, \\ 0, & \text{para } \ i \neq j. \end{cases}$$

Si $1 \leq h, k \leq n$ y $h \neq k$ sea $E^{(n)}_{hk} = (e_{ij})$, la matriz $n \times n$ que se obtiene a partir de $E^{(n)}$ intercambiando las columnas h y k esto es:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{para } (i, j) = (h, k) \text{ y } (i, j) = (k, h) \\ 1, & \text{para } \ i = j, \ i \neq h, k \\ 0, & \text{para los restantes casos} \end{cases}$$

A estas matrices las denominaremos *matrices elementales*. Como $E^{(n)}_{hk} = E^{(n)}_{kh}$ entonces existen $\binom{n}{2}$ matrices elementales.

Las matrices elementales tienen la siguiente propiedad: Si $A \in M_n(\mathbf{B})$ entonces $E^{(n)}_{hk} \times A$ es la matriz que se obtiene a partir de A intercambiando las filas h, k entre sí y dejando fijas a las demás y $A \times E^{(n)}_{hk}$ es la matriz que se obtiene a partir de A intercambiando las columnas h, k entre sí y dejando fijas a las demás. Además:

$$E^{(n)}_{hk} \times E^{(n)}_{hk} = E^{(n)}. \tag{2.1}$$

Lema 2.1 *Si $A \in M^s_n(\mathbf{2})$ existe $B \in M^s_n(\mathbf{2})$ tal que $B \sim A$ y*

$$F_1(B) \geq F_2(B) \geq \cdots \geq F_n(B).$$

Dem. Sea $A = (a_{ij}) \in M^s_n(\mathbf{2})$. Si $F_1(A) \geq F_2(A) \geq \cdots \geq F_n(A)$, no hay nada que probar. Supongamos que $F_h(A) \leq F_k(A)$ con $h < k$, entonces la matriz $A' = (a'_{ij}) = E^{(n)}_{hk} \times A$ verifica $F_h(A') \geq F_k(A')$. Sea $C = (c_{ij}) = A' \times E^{(n)}_{hk}$ entonces

(1) $C \in M^s_n(\mathbf{2})$,

(2) $C \sim A$,

(3) $F_h(C) \geq F_k(C)$.

(1) Probemos que:

(1a) $c_{ii} = 0$, para $i = 1, \ldots, n$,

(1b) $c_{ij} = c_{ji}$, para $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$.

(1a) Como $a_{hh} = 0 = a_{kk}$ entonces $a'_{hk} = 0 = a'_{kh}$. Por construcción $a'_{ii} = 0$ para $i \neq h, k$ y $a'_{ij} = a_{ij}$ para $i \neq h, k$ y $a'_{hj} = a_{kj}$, $a'_{kj} = a_{hj}$, para todo j. Por construcción $c_{ii} = a'_{ii} = 0$ para $i \neq h, k$, $c_{hh} = a'_{hk} = 0$ y $c_{kk} = a'_{kh} = 0$.

(1b) Si $i \neq h,k$ y $j \neq h,k$, entonces $c_{ij} = a'_{ij} = a'_{ji} = c_{ji}$.
Si $i = h$ ó $i = k$ y $j = h$ ó $j = k$, como $i \neq j$ tenemos dos casos a considerar: (I) $i = h$ y $j = k$. (II) $i = k$ y $j = h$.
En efecto, si se verifica (I) entonces $c_{ij} = c_{hk} = a'_{hh} = a_{kh} = a_{hk} = a'_{kk} = c_{kh} = c_{ji}$.
Si se verifica (II) la demostración es análoga.
Por la construcción de C es claro que se verifican (2) y (3). Luego mediante un número finito de pasos podemos determinar una matriz $B \in M_n^s(\mathbf{2})$ tal que $F_1(B) \geq F_2(B) \geq \cdots \geq F_n(B)$.

■

Por el Lema 2.1 si $A \in M_n^s(\mathbf{2})$ entonces $E(A) = E(B)$ donde $B \in M_n^s(\mathbf{2})$ verifica

$$n-1 \geq F_1(B) \geq F_2(B) \geq \cdots \geq F_n(B) \geq 0,$$

Dado $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$ y $0 \leq i \leq n-1$ sean

$$D(n,i) = \{E(A) \in M(n) : F_1(A) = i\},$$

$$D^{(0)}(n,i) = \{E(A) \in M(n) : F_1(A) = i \text{ y } F_n(A) = 0\},$$

y

$$D^{(\neq 0)}(n,i) = \{E(A) \in M(n) : F_1(A) = i \text{ y } F_n(A) \neq 0\}.$$

Por lo tanto si $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$

$$|M(n)| = \sum_{i=0}^{n-1} |D(n,i)|. \tag{2.2}$$

Luego $D^{(\neq 0)}(n,0) = \emptyset$, $|D^{(0)}(n,0)| = 1$ y $|D(n,0)| = 1$.
Si $i = n-1$ entonces $D^{(0)}(n,n-1) = \emptyset$ y $D(n,n-1) = D^{(\neq 0)}(n,n-1)$.

Es claro que $D(n,i)$ es la unión disjunta de los conjuntos $D^{(0)}(n,i)$ y $D^{(\neq 0)}(n,i)$, luego $|D(n,i)| = |D^{(0)}(n,i)| + |D^{(\neq 0)}(n,i)|$, y por lo tanto:

$$|M(n)| = \sum_{i=0}^{n-1} |D(n,i)| = \sum_{i=0}^{n-1} |D^{(0)}(n,i)| + \sum_{i=1}^{n-1} |D^{(\neq 0)}(n,i)|. \tag{2.3}$$

Lema 2.2 *Si $n \geq 3$ es impar entonces $D^{(\neq 0)}(n,1) = \emptyset$.*

Dem. En efecto si $E(A) \in D^{(\neq 0)}(n,1)$ entonces $F_i(A) = 1$ para $1 \leq i \leq n$ y por lo tanto $S(A) = n$ esto es $S(A)$ sería un número impar, absurdo. ■

Observación 2.1 *Si $E(A) \in D(n,1)$ entonces $F_1(A) = 1$ y $F_j(A) \leq 1$ para $2 \leq j \leq n$. Si $F_j(A) = 0$ para $2 \leq j \leq n$ entonces $S(A) = 1$ y $S(A)$ no sería un número par, luego debe existir $h,\ 2 \leq h \leq n$ tal que $F_h(A) = 1$ y como $F_1(A) \geq F_2(A) \geq \cdots \geq F_n(A)$ entonces $F_1(A) = \cdots = F_h(A) = 1$, con h par, $2 \leq h \leq n$.*

Si $n \geq 3$ y h es un número par tal que $2 \leq h \leq n$, sea $U(n,h) = (u_{ij})$ la matriz definida por

$u_{(2r+1)(2r+2)} = u_{(2r+2)(2r+1)} = 1$ para $0 \leq r \leq \frac{h}{2} - 1$ y $u_{ij} = 0$ en los restantes casos. Luego $U(n,h) \in M_n^s(\mathbf{2})$ verifica $E(U(n,h)) \in D(n,1)$ y $F_i(U(n,h)) = 1$ para $i = 1,2,\ldots,h$. Luego

$$\bigcup_{h=2}^{n} \{E(U(n,h)) : h \text{ par}\} \subseteq D(n,1) \tag{2.4}$$

Si n es par entonces $E(U(n,h)) \in D^{(0)}(n,1)$ para $h < n$ y $E(U(n,n)) \in D^{(\neq 0)}(n,1)$. Si n es impar entonces $E(U(n,h)) \in D^{(0)}(n,1)$ para $2 \leq h \leq n$.

Lema 2.3 *Si $n \geq 3$ y h es un número par tal que $2 \leq h \leq n$ entonces*

$$|\bigcup_{h=2}^{n} \{E(U(n,h)) : \ h \text{ par}\}| = \left[\frac{n}{2}\right] \ \text{ y } \ S(U(n,h)) = h.$$

Dem. Ya sea n par ó impar entre 2 y n existen $\left[\frac{n}{2}\right]$ números pares. Luego existen $\left[\frac{n}{2}\right]$ matrices $U(n,h)$. Si h, h' son números pares tales que $2 \leq h, h' \leq n$ y $h \neq h'$, es claro que $E(U(n,h)) \cap E(U(n,h')) = \emptyset$. Luego

$$|\bigcup_{h=2}^{n} \{E(U(n,h)) : \ h \text{ par}\}| = \sum_{h=2}^{n} |\{E(U(n,h)) : \ h \text{ par}\}| = \left[\frac{n}{2}\right].$$

Si n es par y $h = n$ entonces $F_i(U(n,h)) = 1$ para $1 \leq i \leq n$ y por lo tanto $S(U(n,h)) = n$. Si $h < n$ entonces $F_i(U(n,h)) = 0$ para $h+1 \leq i \leq n$ y por lo tanto $S(U(n,h)) = h$. ■

Lema 2.4 *Si $n \geq 3$ entonces $|D(n,1)| = \left[\frac{n}{2}\right]$ y si n es par entonces $|D(n,1)| = |D(n+1,1)|$.*

Dem. Si $E(A) \in D(n,1)$ entonces $A \sim U(n,h)$ donde $2 \leq h \leq n$, luego $E(A) = E(U(n,h))$ y por lo tanto $D(n,1) \subseteq \bigcup_{h=2}^{n} \{E(U(n,h)) : h \ \text{ par}\}$, entonces por (2.4) tenemos $D(n,1) = \bigcup_{h=2}^{n} \{E(U(n,h)) : h \ \text{ par}\}$, luego teniendo en cuenta el Lema 2.3

$$|D(n,1)| = |\bigcup_{h=2}^{n} \{E(U(n,h)) : h \text{ par}\}| = \left[\frac{n}{2}\right].$$

Además si n es par entonces $|D(n+1,1)| = \left[\frac{n+1}{2}\right] = \frac{n+1-1}{2} = \frac{n}{2} = |D(n,1)|$. ■

Si $n \geq 3$ y $A = (a_{ij}) \in M_{n-1}^s(\mathbf{2})$ sea $\psi_0(A) = (b_{ij})$ la matriz de $M_n(\mathbf{2})$ definida por $b_{ij} = a_{ij}$ para $1 \leq i,j \leq n-1$, $b_{in} = 0$ para $1 \leq i \leq n$ y $b_{nj} = 0$ para $1 \leq j \leq n$ esto es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{1(n-1)} \\ a_{21} & 0 & a_{2(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & 0 \end{pmatrix}; \quad \psi_0(A) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{1(n-1)} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{2(n-1)} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $\psi_0(A) \in M_n^s(\mathbf{2})$ y

$$F_i(\psi_0(A)) = F_i(A), \ 1 \leq i \leq n-1 \ \text{ y } \ F_n(\psi_0(A)) = 0. \tag{2.5}$$

Observación 2.2 *Si la matriz* $A \in M^s_{n-1}(\mathbf{2})$ *verifica* $F_1(A) \geq F_2(A) \geq \cdots \geq F_{n-1}(A)$ *entonces* $\psi_0(A)$ *verifica:*

- $\psi_0(A) \in M^s_n(\mathbf{2})$,
- $F_1(\psi_0(A)) \geq F_2(\psi_0(A)) \geq \cdots \geq F_n(\psi_0(A)) = 0$,
- $S(\psi_0(A)) = S(A)$.

Observación 2.3 *Si* $n \geq 2$ *y* $B \in M^s_n(\mathbf{2})$ *verifica* $F_n(B) = 0$ *sea* $\varphi_0(B) = A \in M_{n-1}(\mathbf{2})$ *definida por* $a_{ij} = b_{ij}$ *para* $1 \leq i, j \leq n-1$*. Luego es claro que* $A \in M^s_{n-1}(\mathbf{2})$ *y* $\psi_0(A) = B$*.*

Lema 2.5 (A1) *Si* $B \in M^s_{n-1}(\mathbf{2})$ *y* $A \sim B$ *entonces* $\psi_0(A), \psi_0(B) \in M^s_n(\mathbf{2})$ *verifican* $\psi_0(A) \sim \psi_0(B)$*.*

(A2) *Si* $B \in M^s_n(\mathbf{2})$ *verifica* $F_n(B) = 0$ *entonces existe* $A \in M_{n-1}(\mathbf{2})$ *tal que* $\psi_0(A) = B$ *y* $S(A) = S(B) = 2t$*, donde* $0 \leq t \leq a(n-1)$*.*

(A3) *Si* $A, B \in M^s_n(\mathbf{2})$ *son tales que* $F_n(A) = F_n(B) = 0$ *y* $A \sim B$ *entonces* $\varphi_0(A) \sim \varphi_0(B)$*.*

Dem.

(A1) En efecto $F_1(A), \ldots, F_{n-1}(A)$ es una permutación de $F_1(B), \ldots, F_{n-1}(B)$ luego como se verifica (2.5)

$$F_1(\psi_0(A)), \ldots, F_{n-1}(\psi_0(A)), F_n(\psi_0(A)) = 0$$

es una permutación de

$$F_1(\psi_0(B)), \ldots, F_{n-1}(\psi_0(B)), F_n(\psi_0(B)) = 0.$$

(A2) Si $B \in M^s_n(\mathbf{2})$ verifica (1) $F_n(B) = 0$ entonces por la Observación 2.3 $A = \varphi_0(B) \in M_{n-1}(\mathbf{2})$ verifica (2) $A \in M^s_{n-1}(\mathbf{2})$ y $\psi_0(A) = B$.
Por (2) tenemos $S(A) = 2t$ con (3) $0 \leq t \leq a(n-1)$. De (1) y la definición de A resulta que (4) $S(A) = S(B)$. De (3) y (4) resulta que $S(B) = 2t$ con $0 \leq t \leq a(n-1)$.

(A3) Por la ecuación (2.5):
$F_i(\psi_0(A)) = F_i(A), F_i(\psi_0(B)) = F_i(B)$ para $1 \leq i \leq n-1$, luego como
$F_1(B), \ldots, F_n(B) = 0$ es una permutación de $F_1(A), \ldots, F_n(A) = 0$ entonces

$$F_1(\varphi_0(B)), \ldots, F_{n-1}(\varphi_0(B))$$

es una permutación de

$$F_1(\varphi_0(A)), \ldots, F_{n-1}(\varphi_0(A)).$$

■

Lema 2.6 *Si* $n \geq 3$ *entonces* $|M(n-1)| = |D(n, n-1)|$*.*

Dem. Dada $E(A) \in M(n-1)$ entonces $A \in M_{n-1}^s(\mathbf{2})$ y $S(A) = 2t$ con $0 \le t \le a(n-1)$. Sabemos que $\psi_0(A) \in M_n^s(\mathbf{2})$ y $F_n(\psi_0(A)) = 0$, luego $-\psi_0(A) \in M_n^s(\mathbf{2})$ y $F_n(-\psi_0(A)) = n-1$. Por el Lema 2.1 existe $A' \in M_n^s(\mathbf{2})$ tal que $A' \sim -\psi_0(A)$ y $n-1 = F_1(A')$ luego $E(A') \in D(n, n-1)$.
Pongamos $\Theta(E(A)) = E(A') = E(-\psi_0(A))$, luego Θ es una función de $M(n-1)$ en $D(n, n-1)$.
Probemos ahora que Θ es una biyección. Si $E(A), E(B) \in M(n-1)$, supongamos que $E(A') = \Theta(E(A)) = \Theta(E(B)) = E(B')$, esto es $-\psi_0(A) \sim A' \sim B' \sim -\psi_0(B)$ luego por el Lema 2.6,(II) $\psi_0(A) \sim \psi_0(B)$ luego $A \sim B$ y por lo tanto $E(A) = E(B)$.
Dado $E(C) \in D(n, n-1)$ entonces $F_1(C) = n-1$ y por lo tanto $-C \in M_n^s(\mathbf{2})$ verifica $F_1(-C) = 0$. Por el Lema 2.1 existe $B \in M_n^s(\mathbf{2})$ tal que (1) $B \sim -C$ y $F_n(B) = 0$, luego $B \in M_n^s(\mathbf{2})$ con $0 \le t \le a(n)$. Sea $D \in M_{n-1}^s(\mathbf{2})$ definida por $d_{ij} = b_{ij}$ para $1 \le i, j \le n-1$, luego (2) $\psi_0(D) = B$. De (2) y (1) resulta $-\psi_0(D) = -B \sim C$. Luego $\Theta(E(D)) = E(-\psi_0(D)) = E(C)$. ∎

Luego:

$$\boxed{|M(3)| = \sum_{i=0}^{2} |D(3,i)| = 1 + \left[\tfrac{3}{2}\right] + |M(2)| = 1 + 1 + 2 = 4.}$$

Observemos que $|D^{(0)}(3,2)| = 0$ y que si

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $D^{(\neq 0)}(3,2) = \{E(M_1), E(M_2)\}$ y por lo tanto $|D(3,2)| = |D^{(\neq 0)}(3,2)| = 2$.
Un vértice v de un grafo G se dice aislado si $grad(v) = 0$. Según A. Tripathi y S. Vijay [25]) el cardinal del conjunto de los grafos simples, sin vértices aislados, no isomorfos con n vértices es equivalente a determinar el cardinal de todas las sucesiones $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de enteros que verifican:

$$n - 1 \ge x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n > 0, \tag{2.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ es un número par,} \tag{2.7}$$

$$A(i) = \sum_{k=1}^{i} x_k \le i(i-1) + \sum_{k=i+1}^{n} (i \wedge x_k) = B(i), \text{ para } 1 \le i \le s, \tag{2.8}$$

donde $s \le n-1$ es el mayor entero tal que $x_s \ge s-1$.

Si $E(A) \in D^{(\neq 0)}(4,2)$, luego $F_1(A) = 2 \ge F_2(A) \ge F_3(A) \ge F_4(A) \ge 1$ y $S(A) = \sum_{i=1}^{4} F_i(A)$ es un número par. Si $F_2(A) = 1$ entonces $S(A)$ sería impar, luego $F_2(A) = 2$. Luego $F_3(A) + F_4(A)$ debe ser un número par y por lo tanto las únicas posibilidades son $F_1(A) = F_2(A) = 2, F_3(A) = F_4(A) = 1$ ó $F_i(A) = 2$ para $1 \le i \le 4$. Veamos que todas ellas verifican la condición (2.8):

	sucesiones	
	2211	2222
	s=2	s=3
$A(1)$	2	2
$B(1)$	3	3
$A(2)$	4	4
$B(2)$	4	6
$A(3)$	–	6
$B(3)$	–	8

Luego $|D^{\neq 0}(4,2)| = 2$.

Lema 2.7 *Sea* $n \geq 2$ *y* $0 \leq i \leq n-2$ *entonces* $|D^{(0)}(n,i)| = |D(n-1,i)|$.

Dem. Si $E(B) \in D^{(0)}(n,i)$ entonces $F_1(B) = i$ y $F_n(B) = 0$. Sea $A = \varphi_0(B) \in M_{n-1}(\mathbf{2})$ la matriz definida en la Observación 2.3. Luego por el Lema 2.5,(A2) tenemos que $A \in M^s_{n-1}(\mathbf{2})$, $\psi_0(A) = B$ y $F_1(A) = i$. Luego $E(A) \in D(n-1,i)$.
Pongamos $\Gamma(E(B)) = E(\varphi_0(B))$ luego Γ es una función de $D^{(0)}(n,i)$ en $D(n-1,i)$. Probemos que Γ es una biyección.
Si $E(B), E(C) \in D^{(0)}(n,i)$ y supongamos que $E(\varphi_0(B)) = \Gamma(E(B)) = \Gamma(E(C)) = E(\varphi_0(C))$, luego $\varphi_0(B) \sim \varphi_0(C)$ y como

$$F_1(\varphi_0(B)) = F_1(B), F_2(\varphi_0(B)) = F_2(B), \ldots F_{n-1}(\varphi_0(B)) = F_{n-1}(B)$$

es una permutación de

$$F_1(\varphi_0(C)) = F_1(C), F_2(\varphi_0(C)) = F_2(C), \ldots F_{n-1}(\varphi_0(C)) = F_{n-1}(C)$$

y $F_n(B) = 0 = F_n(C)$ entonces $B \sim C$ y por lo tanto $E(B) = E(C)$.
Dado $E(C) \in D(n-1,i)$ entonces $F_1(C) = i$ y por lo tanto $\psi_0(C) \in M^s_n(\mathbf{2})$ verifica $F_1(\psi_0(C)) = i$ y $F_n(\psi_0(C)) = 0$ luego $E(\psi_0(C)) \in D^{(0)}(n,i)$, luego la matriz $A = \varphi_0(\psi_0(C))$ verifica $A \in M^s_{n-1}(\mathbf{2})$, $\psi_0(A) = \psi_0(C)$ y $F_1(A) = i$ luego $E(A) \in D(n,i)$.
Por lo tanto $\Gamma(E(A)) = E(\varphi_0(\psi_0(A))) = E(\varphi_0(\psi_0(C)) = E(C)$. ∎

Por el Lema 2.7, si $n \geq 4$

$$|D(n,2)| = |D^{(0)}(n,2)| + |D^{(\neq 0)}(n,2)| = |D(n-1,2)| + |D^{(\neq 0)}(n,2)|. \tag{2.9}$$

Luego $|D(4,2)| = |D(3,2)| + 2 = 4$ y por lo tanto:

$$\boxed{|M(4)| = \sum_{i=0}^{3} = 1 + \left[\tfrac{4}{2}\right] + 4 + |M(3)| = 1 + 2 + 4 + 4 = 11.}$$

Si $E(A) \in D^{(\neq 0)}(5,2)$, luego $F_1(A) = 2 \geq F_2(A) \geq F_3(A) \geq F_4(A) \geq F_5(A) \geq 1$ y $S(A) = \sum_{i=1}^{5} F_i(A)$ es un número par. Si $F_2(A) = 1$ entonces $F_i(A) = 1$ para $2 \leq i \leq 5$ y $S(A)$ es par. Si $F_2(A) = 2$ entonces no puede ser $F_3(A) = 1$ pues en ese caso $S(A)$ sería impar, luego las únicas posibilidades son: $F_1(A) = 2$, $F_2(A) = \cdots = F_5(A) = 1$, $F_1(A) = F_2(A) = F_3(A) = 2$, $F_4(A) = F_5(A) = 1$ ó $F_i(A) = 2$ para $1 \leq i \leq 5$. Veamos que todas ellas verifican la condición (2.8):

	sucesiones		
	21111	22211	22222
	s=2	s=3	s=3
$A(1)$	2	2	2
$B(1)$	4	4	4
$A(2)$	3	4	4
$B(2)$	5	6	8
$A(3)$	—	6	6
$B(3)$	—	8	10

Luego $|D^{\neq 0}(5,2)| = 3$ y por lo tanto $|D(5,2)| = |D^{(0)}(5,2)|+|D^{(\neq 0)}(5,2)| = |D(4,2)|+3 = 4+3 = 7$.
Si $E(A) \in D^{(\neq 0)}(5,3)$ luego $F_1(A) = 3$ y $\sum\limits_{i=1}^{5} F_i(A)$ es un número par. Si $F_2(A) = 1$ entonces $\sum\limits_{i=1}^{5} F_i(A) = 7$. Luego $F_2(A) \geq 2$ por lo tanto las posibles sucesiones que verifican $F_1(A) = 3 \geq F_2(A) \geq F_3(A) \geq F_4(A) \geq F_5(A) \geq 1$ y tales que $\sum\limits_{i=1}^{5} F_i(A)$ es un número par son:

sucesión	$\sum\limits_{i=1}^{5} x_i$	sucesión	$\sum\limits_{i=1}^{5} x_i$
32111	8	33222	12
32221	10	33321	12
33211	10	33332	14

Veamos que todas ellas verifican la condición (2.8):

	sucesiones					
	32111	32221	33211	33222	33321	33332
	s=2	s=3	s=3	s=3	s=3	s=4
$A(1)$	3	3	3	3	3	3
$B(1)$	4	4	4	4	4	4
$A(2)$	5	5	6	6	6	6
$B(2)$	5	7	6	8	7	8
$A(3)$	–	7	8	8	9	9
$B(3)$	–	9	8	10	9	11
$A(4)$	–	–	–	–	–	12
$B(4)$	–	–	–	–	–	14

Luego $|D(5,3)| = |D^{(0)}(5,3)| + |D^{(\neq 0)}(5,3)| = 4+6 = 10$ y por lo tanto:

$$\boxed{|M(5)| = \sum_{i=0}^{4} |D(5,i)| = 1 + \left[\tfrac{5}{2}\right] + 7 + 10 + 11 = 31.}$$

Sea $M(n, 2t) = \{E(A) : S(A) = 2t\}$ para $0 \leq t \leq a(n)$ entonces:

$$|M(n)| = \sum_{t=0}^{a(n)} |M(n, 2t)|. \tag{2.10}$$

Si $0 \leq t \leq a(n)$ sean:

$$M^{(0)}(n, 2t) = \{E(A) \in M(n) : F_1(A) \geq \cdots \geq F_{n-1}(A) \geq F_n(A) = 0 \text{ y } S(A) = 2t\},$$

$$M^{(\neq 0)}(n, 2t) = \{E(A) \in M(n) : F_1(A) \geq \cdots \geq F_{n-1}(A) \geq F_n(A) \neq 0 \text{ y } S(A) = 2t\}.$$

Luego si $E(A) \in M^{(\neq 0)}(n, 2t)$ entonces $n \leq 2t$ y

$$|M(n, 2t)| = |M^{(0)}(n, 2t)| + |M^{(\neq 0)}(n, 2t)| \text{ para } 0 \leq t \leq a(n). \tag{2.11}$$

y por lo tanto

$$|M(n)| = \sum_{t=0}^{a(n)} |M(n, 2t)| = \sum_{t=0}^{a(n)} |M^{(0)}(n, 2t)| + \sum_{t=0}^{a(n)} |M^{(\neq 0)}(n, 2t)|. \tag{2.12}$$

Lema 2.8 *Si* $A, B \in M_n^s(\mathbf{2})$ *entonces*

(I) $S(-A) = n^2 - n - S(A)$,

(II) *si* $A \sim B$ *entonces* $-A \sim -B$.

Dem.

(I) Por definición $F_i(-A) = (n-1) - F_i(A)$, $1 \leq i \leq n$ luego

$$S(-A) = \sum_{i=1}^{n} ((n-1) - F_i(A)) = n(n-1) - \sum_{i=1}^{n} F_i(A) = n^2 - n - S(A).$$

(II) Por hipótesis $F_1(A), \ldots, F_n(A)$ es una permutación de $F_1(B), \ldots, F_n(B)$ luego por (I) $F_1(-A), \ldots, F_n(-A)$ es una permutación de $F_1(-B), \ldots, F_n(-B)$.

$\blacksquare$

Lema 2.9 $|M(n, 2t)| = |M(n, 2(a(n) - t))|$, *para* $0 \leq t \leq a(n)$,

Dem. Dada $E(B) \in \{E(A) : S(A) = 2t\}$ sea $H(E(B)) = E(-B)$ luego como

$$S(-B) = n^2 - n - S(B) = 2\left(\frac{n^2 - n - S(B)}{2}\right) = 2(a(n) - t)$$

tenemos que $H(E(B)) = E(-B) \in \{E(D) : S(D) = 2(a(n) - t)\}$.
Luego $H : M(n, 2t) \to M(n, 2(a(n) - t))$.

Si $E(D) \in \{E(F) : S(F) = 2(a(n) - t)\}$ entonces

$$S(-D) = n^2 - n - S(F) = n^2 - n - 2(a(n) - t) = n^2 - n - (n^2 - n - 2t) = 2t$$

luego $E(-D) \in \{E(A) : S(A) = 2t\}$ y $H(E(-D)) = E(D)$.

Supongamos ahora que $B_1, B_2 \in \{E(A) : S(A) = 2t\}$ son tales que $H(B_1) = H(B_2)$ esto es $E(-B_1) = E(-B_2)$ luego $-B_1 \sim -B_2$ y por lo tanto por el Lema 2.8,(II) $B_1 \sim B_2$ y en consecuencia $E(B_1) = E(B_2)$, luego H establece una biyección entre $M(n, 2t)$ y $M(n, 2(a(n) - t))$.

Observemos además que $H(H(E(A)) = E(A)$. ■

Corolario 2.1 $|M(n, 2a(n))| = 1$

Dem. Por el Lema 2.9 $|M(n, 2a(n))| = |M(n, 2(a(n) - a(n))| = |M(n, 0)| = 1$. ■

Lema 2.10 *La función H definida en el Lema 2.9 verifica $H(M(n, 2t)) = M(n, 2t)$ si y sólo si $2t = a(n)$.*

Dem. Si $H(M(n, 2t)) = M(n, 2t)$ entonces $M(n, 2(a(n) - t)) = M(n, 2t)$, luego $2t = 2(a(n) - t)$ y por lo tanto $2t = a(n)$, esto es $a(n)$ es un número par. Si $2t = a(n)$ entonces

$$H(M(n, a(n))) = M\left(n, 2\left(a(n) - \frac{a(n)}{2}\right)\right) = M(n, a(n)).$$

■

Teorema 2.1 *Si $a(n)$ es par*

$$|M(n)| = 2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M(n, 2t)|\right) + |M(n, a(n))| \tag{2.13}$$

y si $a(n)$ es impar

$$|M(n)| = 2\sum_{t=0}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M(n, 2t)|. \tag{2.14}$$

Dem. Es una consecuencia de los Lemas 2.9 y 2.10, dado que:

si $a(n)$ es impar y $\dfrac{a(n)-1}{2} + 1 \leq t \leq a(n)$, entonces $0 \leq a(n) - t \leq \dfrac{a(n)-1}{2}$,

y si $a(n)$ es par y $\dfrac{a(n)}{2} + 1 \leq t \leq a(n)$ entonces $0 \leq a(n) - t \leq \dfrac{a(n)}{2} - 1$. ■

Del Teorema 2.1 resulta que si $a(n)$ es impar entonces $|M(n)|$ es un número par.

Lema 2.11 *Si $n \geq 4$ entonces: $|M^{(0)}(n, 2t)| = |M(n-1, 2t)|$, para $0 \leq t \leq \left[\frac{a(n)}{2}\right]$.*

Dem. Si $t \leq \left[\frac{a(n)}{2}\right]$ como $n \geq 4$ por el Lema 1.1, (II): $\left[\frac{a(n)}{2}\right] \leq a(n-1)$, luego $t \leq a(n-1)$. Sea $A \in M^s_{n-1}(\mathbf{2})$ tal que $E(A) \in M(n-1, 2t)$ donde $0 \leq t \leq \left[\frac{a(n)}{2}\right]$. Pongamos $\Psi_0(E(A)) = E(\psi_0(A))$. De acuerdo con la definición de ψ_0 es claro que $E(\psi_0(A)) \in M^{(0)}(n, 2t)$, con $0 \leq t \leq \left[\frac{a(n)}{2}\right]$. Ψ_0 está bien definida porque si $B \in M^s_{n-1}(\mathbf{2})$ es tal que $E(B) \in M(n-1, 2t)$ y $B \sim A$ entonces por el Lema 2.5 (A1), $\Psi_0(E(B)) = E(\psi_0(B)) = E(\psi_0(A))$. Por el Lema 2.5,(A2), dada $E(B) \in M^{(0)}(n, 2t)$ donde $0 \leq t \leq \left[\frac{a(n)}{2}\right]$ entonces, $A = \varphi_0(B)$ verifica $E(A) \in M(n-1, 2t)$, $0 \leq t \leq \left[\frac{a(n)}{2}\right]$ y $\psi_0(A) = B$, luego $\Psi_0(E(A)) = E(\psi_0(A)) = E(B)$.
Sean $C, D \in M^s_{n-1}(\mathbf{2})$ tales que $E(B), E(D) \in M(n-1, 2t)$ y $E(B) \neq E(D)$.
Si $\Psi_0(E(B)) = \Psi_0(E(D))$ esto es $E(\psi_0(B)) = E(\psi_0(D))$ entonces $\psi_0(B) \sim \psi_0(D)$ luego por el Lema 2.5,(A3) $B \sim D$ y en consecuencia $E(B) = E(D)$, absurdo. ■

Lema 2.12 *$|M^{(\neq 0)}(n, 2t)| = 0$ para $t < \left[\frac{n}{2}\right]$. Por lo tanto en este caso $|M(n, 2t)| = |M^{(0)}(n, 2t)|$.*

Dem. Si n es par entonces por hipótesis $t < \frac{n}{2}$ esto es (1) $2t < n$ y si n es impar entonces por hipótesis $t < \frac{n-1}{2}$ esto es (2) $2t < n-1$. Supongamos que existe $A \in M^s_n(\mathbf{2})$ tal que $E(A) \in M^{(\neq 0)}(n, 2t)$ entonces $n \leq \sum_{i=1}^{n} F_i(A) = S(A) = 2t$, lo que contradice (1) y (2). ■

Dado un número entero m, $m > 0$ se denomina k-partición de m, donde $1 \leq k \leq m$, a toda sucesión de números enteros $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tales que $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = m$.
Representemos con $P(m, k)$ el conjunto de las k-particiones de m y pongamos por definición $|P(m, k)| = 0$ si $m < k$. Se conocen distintos modos de calcular $|P(m, k)|$, ver por ejemplo [6], [8], [1]. Designemos con $P(m)$ el conjunto de las particiones de un entero $m > 0$. Por definición $|P(0)| = 1$. Es bien conocido que $|P(m, m)| = 1 = |P(m, 1)|$ y , ver por ejemplo [6], que

$$|P(m, k)| = \sum_{q=1}^{m-k} |P(m-k, q)| = |P(m-k)| \text{ para } \left[\frac{m}{2}\right] < k \leq m. \tag{2.15}$$

En la sección 7 indicamos, a título de ejemplo, la tabla de $|P(m, k)|$ para $0 \leq m \leq 20$ y $1 \leq k \leq m$.

Lema 2.13 *Si $n \leq 2t$ entonces $|M^{(\neq 0)}(n, 2t)| \leq |P(2t, n)|$.*

Dem. Dada $E(A) \in M^{(\neq 0)}(n, 2t)$ entonces $F_i(A) \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$F_1(A) \geq F_2(A) \geq \ldots \geq F_n(A) \text{ y } S(A) = 2t.$$

Por lo tanto

$$F_1(A), F_2(A), \ldots, F_n(A) \in P(2t, n).$$

Pongamos $\Omega(E(A)) = F_1(A), F_2(A), \ldots, F_n(A)$. Luego $\Omega : M^{(\neq 0)}(n, 2t) \to P(2t, n)$. Probemos que Ω es inyectiva. En efecto si $E(B) \in M^{(\neq 0)}(n, 2t)$ es tal que $E(B) \neq E(A)$ entonces $A \not\sim B$ y por lo tanto la n-partición de $2t$, $F_1(A), F_2(A), \ldots, F_n(A)$ no es una permutación de la n-partición de $2t$, $F_1(B), F_2(B), \ldots, F_n(B)$ esto es $\Omega(E(B)) \neq \Omega(E(A))$. Luego $|M^{(\neq 0)}(n, 2t)| \leq |P(2t, n)|$. ■

Lema 2.14 *Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una n-partición de $2t$ tal que $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$ y $t \leq n-1$ entonces $x_n = 1$ y $n \leq 2t$.*

Dem. Por hipótesis $\sum_{i=1}^{n} x_i = 2t$. Si $x_n \geq 2$ entonces $x_i \geq 2$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ luego $2t = \sum_{i=1}^{n} x_i \geq 2n$ y por lo tanto $t \geq n$ y como por hipótesis $t \leq n-1$ tendríamos $n \leq n-1$, absurdo. Luego $x_n = 1$ y por lo tanto $x_i \geq 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y en consecuencia $2t = \sum_{i=1}^{n} x_i \geq n$. ■

Sean

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces $N_1 \in M^{(\neq 0)}(5,6)$, $N_2, N_3, N_4 \in M^{(\neq 0)}(5,8)$.
Sea $E(A) \in M^{(\neq 0)}(5,6)$, luego no puede ser $F_1(A) = 1$ pues en este caso $S(A) = 5$. Luego $2 \leq F_1(A) \leq 4$. Si $F_1(A) = 4$ entonces $S(A) \geq 8$. Si $F_1(A) = 3$ entonces $S(A) \geq 7$. Luego $F_1(A) = 2$. Si $F_2(A) = 2$ entonces $S(A) \geq 7$, luego $F_2(A) = 1$ y por lo tanto $F_i(A) = 1$ para $2 \leq i \leq 5$. En consecuencia $A \sim N_1$ y por lo tanto

$$|M^{(\neq 0)}(5,6)| = 1 = |P(6,5)|. \tag{2.16}$$

Sea $E(A) \in M^{(\neq 0)}(5,8)$, luego no puede ser $F_1(A) = 1$ pues en este caso $S(A) = 5$. Luego $2 \leq F_1(A) \leq 4$. Si $F_1(A) = 4$ entonces como $S(A) = 8$ debe ser $F_i(A) = 1$ para $2 \leq i \leq 5$ y por lo tanto $A \sim N_4$. Si $F_1(A) = 3$ no puede ser $F_2(A) = 3$ porque entonces $S(A) \geq 6 + 3 = 9$. Si $F_2(A) = 2$ entonces no puede ser $F_3(A) = 2$ porque entonces $S(A) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$. Luego debe ser $F_3(A) = 1$ y por lo tanto $F_i(A) = 1$ para $3 \leq i \leq 5$ y en consecuencia $A \sim N_3$. Si $F_1(A) = 2$ entonces no puede ser $F_2(A) = 1$ pues en ese caso $S(A) = 6$. Si $F_2(A) = 2$ y $F_3(A) = 1$ entonces $S(A) = 7$, luego debe ser $F_3(A) = 2$. Si $F_4(A) = 2$ entonces $S(A) \geq 9$ entonces $F_4(A) = F_5(A) = 1$ y por lo tanto $A \sim N_1$. Luego

$$|M^{(\neq 0)}(5,8)| = 3 = |P(8,5)|. \tag{2.17}$$

Lema 2.15 *Si $n \geq 5$, $t \leq n-1$ y $n \leq 2t$ entonces: $|M^{(\neq 0)}(n,2t)| = |P(2t,n)|$.*

Dem. Por el Lema 2.13 sabemos que la función $\Omega : M^{(\neq 0)}(n,2t) \to P(2t,n)$ es inyectiva. Probemos que en este caso Ω es una función suryectiva.
Por (2.16) y (2.17) sabemos que vale para $n = 5$, $t \leq 4$ y $5 \leq 2t$, esto es $t = 3$ ó $t = 4$. Si $n \geq 6$ supongamos que para toda $(n-1)$-partición $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ de $2r$, donde $1 \leq n-1 \leq 2r$ y $r \leq n-2$, existe $E(A) \in M^{(\neq 0)}(n-1,2r)$ tal que $\Omega(E(A)) = y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$.

Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una n-partición de $2t$ donde (I) $t \leq n-1$ y $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$. Entonces por el Lema 2.14 $x_n = 1$.
Si $x_1 = 1$ entonces $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ y por lo tanto $2t = n$ esto es n es par. Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{2})$ definida del siguiente modo:

- Si i es impar, $1 \leq i \leq n$. $a_{i(i+1)} = a_{(i+1)i} = 1$ y $a_{ij} = 0$ para $1 \leq j \leq n$, $j \neq i+1$,
- Si i es par, $1 \leq i \leq n$. $a_{i(i-1)} = a_{(i-1)i} = 1$, $a_{ij} = 0$ para $1 \leq j \leq n$, $j \neq i-1$.

luego $A \in M_n^s(\mathbf{2})$, $F_i(A) = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, $E(A) \in M^{(\neq 0)}(n, 2t) = M^{(\neq 0)}(n, n)$ y $\Omega(E(A)) = x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Si $x_1 \geq 2$ consideremos $y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1}$, luego $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ es una $(n-1)$-partición de $2t - 2 = 2(t-1) = 2r$. De (I) resulta que (II) $r = t - 1 \leq n - 2$. Sea $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ una permutación de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ tal que $z_1 \geq z_2 \geq \cdots \geq z_{n-1}$ e i_0 tal que $z_{i_0} = y_1$, luego por la hipótesis de inducción existe $A = (a_{ij}) \in M_{n-1}^s(\mathbf{2})$ tal que $E(A) \in M^{(\neq 0)}(n-1, 2r)$ y $\Omega(E(A)) = z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$.
Sea $B = (b_{ij}) \in M_n^s(\mathbf{2})$ definida por $b_{ij} = a_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq n-1$, $b_{in} = b_{ni} = 0$ si $i \neq i_0$ y $b_{i_0 n} = b_{n i_0} = 1$. Luego $E(B) \in M^{(\neq 0)}(n, 2t)$ y $F_1(B) = z_1, F_2(B) = z_2, \ldots, F_{i_0}(B) = y_1 + 1, \ldots, F_n(B) = 1$. Por el Lema 2.1 existe $C \in M_n^s(\mathbf{2})$ tal que $C \sim B$ y $F_1(C) \geq F_2(C) \geq \cdots \geq F_n(C)$ luego $E(B) = E(C)$ y $\Omega(E(C)) = x_1, x_2, \ldots, x_n$. ■

Observación 2.4 *Si $n \geq 5$ y n es par entonces*

$$t \leq n-1,\ n \leq 2t \ \text{ si y solo si } \ \frac{n}{2} \leq t \leq n-1.$$

Si n es impar entonces

$$t \leq n-1,\ n \leq 2t \ \text{ si y solo si } \ \left[\frac{n}{2}\right] + 1 \leq t \leq n-1.$$

Lema 2.16 *Si n es par, $n \geq 4$ y $0 \leq h \leq \dfrac{n-2}{2}$ entonces $|P(n+2h, n)| = |P(2h)|$ y si n es impar, $n \geq 5$ y $0 \leq h \leq \dfrac{n-3}{2}$ entonces $|P(n+1+2h, n)| = |P(2h+1)|$.*

Dem. De $h \leq \dfrac{n-2}{2} = \dfrac{n}{2} - 1$ resulta

$$\left[\frac{n+2h}{2}\right] = \frac{n}{2} + h \leq \frac{n}{2} - 1 + \frac{n}{2} = n - 1 < n$$

Por otro lado $n \leq n + 2h$ y por lo tanto por la ecuación (2.15)

$$|P(n+2h, n)| = |P(n+2h-n)| = |P(2h)|, \ \text{ para } \ 0 \leq h \leq \frac{n-2}{2}.$$

Supongamos ahora que n es impar, $n \geq 5$, y $0 \leq h \leq \dfrac{n-3}{2}$. De $h \leq \dfrac{n-3}{2}$ resulta $2h \leq n-3$ luego $n+1+2h \leq n-3+n+1 = 2n-2 = 2(n-1)$ y por lo tanto $\left[\dfrac{n+1+2h}{2}\right] = \dfrac{n+1+2h}{2} \leq n-1 < n$. Además $n \leq n+1+2h$. Luego por la ecuación (2.15)

$$|P(n+1+2h, n)| = |P(n+1+2h-n)| = |P(2h+1)| \ \text{ para } \ 0 \leq h \leq \frac{n-3}{2}.$$

■

Lema 2.17 *Si $n \geq 6$, $n \leq 2t$ y $t \leq n-1$ entonces*

$$|M(n, 2t)| = |M(n-1, 2t)| + |P(2t, n)|.$$

Dem. Por (2.11) y el Lema 2.11

$$|M(n, 2t)| = |M^{(0)}(n, 2t)| + |M^{(\neq 0)}(n, 2t)| = |M(n-1, 2t)| + |M^{(\neq 0)}(n, 2t)|$$

luego por el Lema 2.15, $|M(n, 2t)| = |M(n-1, 2t)| + |P(2t, n)|$. ■

Lema 2.18 *Si n es impar no existe $E(A) \in M^{(\neq 0)}(n, 2t)$ tal que $F_1(A) = 1$ y si n es par y $F_1(A) = 1$ entonces $S(A) < 2n$.*

Dem. Si n es impar y existiera $E(A) \in M^{(\neq 0)}(n, 2t)$ tal que $F_1(A) = 1$ entonces como

$$F_1(A) = 1 \geq F_2(A) \geq \ldots \geq F_n(A) \neq 0$$

resulta que $F_i(A) = 1$ para todo i luego (1) $S(A) = n$. Por otro lado sabemos (2) $S(A)$ es un número par. (1) y (2) se contradicen.
Supongamos ahora que n es par y que $F_1(A) = 1$, luego $S(A) = n < 2n$. ■

Observación 2.5 *A toda sucesión $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 2$, con $n \geq 3$ le corresponde una matriz $T(n, 2n) \in M_n^s(\mathbf{2})$ tal que $F_1(T(n, 2n)) = \ldots = F_n(T(n, 2n)) = 2$ y por lo tanto $S(T(n, 2n)) = 2n$. En efecto sea $T(n, 2n)$ definida por $t_{i(i+1)} = t_{(i+1)i} = 1$, para $i = 1, \ldots, n-1$, $t_{1n} = t_{n1} = 1$ y $t_{ij} = t_{ji} = 0$ para los restantes casos, luego $E(T(n, 2n)) \in M(n, 2n)$ para $n \geq 3$.*

Lema 2.19 *Si $E(A) \in M^{(\neq 0)}(n, 2n)$ es tal que $F_1(A) = 2$ y existe j, $1 < j \leq n$ tal que $F_j(A) = 1$ entonces $S(A) < 2n$.*

Dem. En efecto, si existe j, $1 < j \leq n$ tal que $F_j(A) = 1$ entonces $F_h(A) = 1$ para todo h, $j \leq h \leq n$. Luego $S(A) \leq= 2(j-1) + n - j + 1 = j - 1 + n$. Si $2n \leq S(A) = j - 1 + n$ entonces $n + 1 \leq j$, absurdo. ■

Corolario 2.2 *Si $E(A) \in M^{(\neq 0)}(n, 2n)$ es tal que $F_1(A) = 2$ entonces $F_i(A) = 2$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, luego $A \sim T(n, 2n)$.*

Dem. Es una consecuencia inmediata del Lema 2.19. ■

Luego por los Lemas 2.18 y 2.19 si $E(A) \in M^{(\neq 0)}(n, 2t)$, $n < t \leq \left[\frac{a(n)}{2}\right]$ entonces $F_1(A) \geq 3$.

Lema 2.20 *Si $n \geq 4$ y n es par entonces*

$$\sum_{t=\frac{n}{2}}^{n-1} |M^{(\neq 0)}(n, 2t)| = \sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1} |P(2h)|,$$

y si $n \geq 5$ y n es impar

$$\sum_{t=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1} |M^{(\neq 0)}(n, 2t)| = \sum_{h=0}^{\frac{n-3}{2}} |P(2h+1)|.$$

Dem. Si $n \geq 4$, $\underline{n \text{ es par}}$ y $\frac{n}{2} \leq t \leq n-1$ entonces $n \leq 2t$ luego por el Lema 2.15, $|M^{(\neq 0)}(n,2t)| = |P(2t,n)|$ y por lo tanto

$$\sum_{t=\frac{n}{2}}^{n-1} |M^{(\neq 0)}(n,2t)| = \sum_{t=\frac{n}{2}}^{n-1} |P(2t,n)|.$$

Sea $h = t - \frac{n}{2}$, luego si $t = \frac{n}{2}$ entonces $h = 0$ y si $t = n-1$ entonces $h = \frac{n}{2} - 1$ luego como $2t = 2h + n$ tenemos $\sum\limits_{t=\frac{n}{2}}^{n-1} |P(2t,n)| = \sum\limits_{h=0}^{\frac{n}{2}-1} |P(2h+n,n)|$.
Como $0 \leq h \leq \frac{n-2}{2}$ entonces por el Lema 2.16 $|P(2h+n,n)| = |P(2h)|$, luego

$$\sum_{t=\frac{n}{2}}^{n-1} |M^{(\neq 0)}(n,2t)| = \sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1} |P(2h+n,n)| = \sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1} |P(2h)|.$$

Si $n \geq 5$ $\underline{n \text{ es impar}}$ y $\frac{n+1}{2} = \left[\frac{n}{2}\right] + 1 \leq t \leq n-1$ entonces $n \leq n+1 \leq 2t$ luego por el Lema 2.15, $|M^{(\neq 0)}(n,2t)| = |P(2t,n)$ y por lo tanto

$$\sum_{t=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1} |M^{(\neq 0)}(n,2t)| = \sum_{t=\frac{n+1}{2}}^{n-1} |P(2t,n)|.$$

Sea $h = t - \frac{n+1}{2}$, luego si $t = \frac{n+1}{2}$ entonces $h = 0$ y si $t = n-1$ entonces $h = n - 1 - \frac{n+1}{2} = \frac{n-3}{2}$, luego como $2t = 2h + 1 + n$ tenemos

$$\sum_{t=\frac{n+1}{2}}^{n-1} |P(2t,n)| = \sum_{h=0}^{\frac{n-3}{2}} |P(2h+1+n,n)|.$$

Como $0 \leq h \leq \frac{n-3}{2}$ entonces por el Lema 2.16 $|P(2h+1+n,n)| = |P(2h+1)|$ luego

$$\sum_{t=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1} |M^{(\neq 0)}(n,2t)| = \sum_{h=0}^{\frac{n-3}{2}} |P(2h+1+n,n)| = \sum_{h=0}^{\frac{n-3}{2}} |P(2h+1)|.$$

■

Si $6 \leq n \leq t \leq \left[\frac{a(n)}{2}\right]$, sean

- $M_1(n,2t) = \{E(A) \in M^{(\neq 0)}(n,2t) : F_1(A) = n-1\}$,
- $M_2(n,2n) = \{E(T(n,2n))\}$,
- $M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t) = \{E(A) \in M^{(\neq 0)}(n,2t) : 3 \leq F_1(A) \leq n-2\}$.

Luego si $6 \leq n \leq t \leq \left[\frac{a(n)}{2}\right]$ entonces $M^{(\neq 0)}(n,2t) = \bigcup\limits_{i=1}^{3} M_i(n,2t)$ y como $M_1(n,2t) \cap M_2(n,2t) = M_1(n,2t) \cap M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t) = M_2(n,2t) \cap M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t) = \emptyset$, tenemos

$$|M^{(\neq 0)}(n,2t)| = |M_1(n,2t)| + |M_2(n,2t)| + |M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)| \ \text{ para } \ 4 \leq n \leq t \leq \left[\frac{a(n)}{2}\right].$$

Como $|M_2(n,2n)| = 1$ y por el Corolario 2.1 $|M(n-1, 2a(n-1))| = 1$ entonces

$$|M^{(\neq 0)}(n,2n)| = |M_1(n,2n)| + |M(n-1,2a(n-1))| + |M^{(n-2)}_{(3)}(n,2n)| \qquad (2.18)$$

Si $n < t \leq \left[\frac{a(n)}{2}\right]$ entonces $M^{(\neq 0)}(n,2t) = M_1(n,2t) \cup M^{(n-2)}_{(3)}(n,2t)$ y como $M_1(n,2t) \cap M^{(n-2)}_{(3)}(n,2t) = \emptyset$, tenemos

$$|M^{(\neq 0)}(n,2t)| = |M_1(n,2t)| + |M^{(n-2)}_{(3)}(n,2t)| \text{ para } n < t \leq \left[\frac{a(n)}{2}\right] \qquad (2.19)$$

Lema 2.21 *Si $t \geq n$ entonces $|M_1(n,2t)| = |M(n-1, 2t-2(n-1))|$.*

Dem. Si $A = (a_{ij}) \in M_n^s(\mathbf{2})$ es tal que $E(A) \in M_1(n,2t)$ entonces la matriz $B = (b_{ij})$ definida por $b_{ij} = a_{(i+1)(j+1)}$ para $1 \leq i,j \leq n-1$ claramente verifica $B \in M^s_{n-1}(\mathbf{2})$ y $E(B) \in M(n-1, 2t-2(n-1))$. Pongamos $\Lambda(E(A)) = E(B)$. Además si $A, C \in M_n^s(\mathbf{2})$ son tales que $E(A), E(C) \in M_1(n,2t)$ y $E(A) \neq E(C)$ entonces es claro que $\Lambda(E(A)) \neq \Lambda(E(C))$. Por otro lado si $B = (b_{ij}) \in M^s_{n-1}(\mathbf{2})$ es tal que $E(B) \in M(n-1, 2t-2(n-1))$ entonces la matriz $A = (a_{ij})$ definida por $a_{11} = 0$, $a_{1j} = a_{j1} = 1$ para $2 \leq j \leq n$ y $a_{ij} = b_{(i-1)(j-1)}$ para $2 \leq i,j \leq n$ verifica $E(A) \in M_1(n,2t)$ y $\Lambda(E(A)) = E(B)$. ■

Corolario 2.3 *Si $a(n)$ es impar entonces* $\displaystyle\sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M_1(n,2t)| = \sum_{t=\frac{a(n)+1}{2}}^{a(n-1)-1} |M(n-1,2t)|$.

Si $a(n)$ es par entonces $\displaystyle\sum_{t=n}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M_1(n,2t)| = \sum_{t=\frac{a(n)}{2}}^{a(n-1)-1} |M(n-1,2t)|$.

Dem. Si $a(n)$ es impar sea (i) $h = a(n) - t$ luego si $t = n$ teniendo en cuenta el Lema 1.1 $h = a(n) - n = a(n-1) + n - 1 - n = a(n-1) - 1$. Si $t = \frac{a(n)-1}{2}$ entonces $h = a(n) - \frac{a(n)-1}{2} = \frac{2a(n)-a(n)+1}{2} = \frac{a(n)+1}{2}$.
Análogamente si $a(n)$ es par poniendo $h = a(n) - t$ resulta que si $t = n$ entonces $h = a(n-1) - 1$ y si $t = \frac{a(n)}{2} - 1$ entonces $h = \frac{a(n)}{2} + 1$.
Por el Lema 2.21

$$\text{(ii)} \quad \sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M_1(n,2t)| = \sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M(n-1, 2t-2(n-1))|.$$

De (i) resulta teniendo en cuenta el Lema 1.1 $2t = 2a(n) - 2h = 2a(n-1) + 2(n-1) - 2h$ luego $2t - 2(n-1) = 2a(n-1) - 2h = 2(a(n-1) - h)$. Por lo tanto si $a(n)$ es impar

$$\text{(iii)} \quad \sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M(n-1, 2t-2(n-1))| = \sum_{h=\frac{a(n)+1}{2}}^{a(n-1)-1} |M(n-1, 2(a(n-1)-h)|.$$

y por el Lema 2.9

$$\text{(iv)} \quad \sum_{h=\frac{a(n)+1}{2}}^{a(n-1)-1} |M(n-1, 2(a(n-1)-h)| = \sum_{h=\frac{a(n)+1}{2}}^{a(n-1)-1} |M(n-1,2h)|.$$

De (ii), (iii) y (iv) resulta:

$$\sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M_1(n,2t)| = \sum_{h=\frac{a(n)+1}{2}}^{a(n-1)-1} |M(n-1,2h)| = \sum_{t=\frac{a(n)+1}{2}}^{a(n-1)-1} |M(n-1,2t)|.$$

En forma análoga si $a(n)$ es par se prueba que

$$\sum_{t=n}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M_1(n,2t)| = \sum_{t=\frac{a(n)}{2}+1}^{a(n-1)-1} |M(n-1,2t)|.$$

$\blacksquare$

Lema 2.22 *Si* $n \geq 5$ *y* $a(n)$ *es par entonces* $|M^{(0)}(n,a(n))| = |M_1(n,a(n))|$.

Dem. Sea $t = \frac{a(n)}{2}$ luego $t \geq n$ entonces por el Lema 2.21 tenemos

$$(1) \quad |M_1(n,a(n))| = |M(n-1,a(n)-2(n-1)| =$$

$$|M(n-1,2(\frac{a(n)}{2}-(n-1))|.$$

Por el Lema 2.9

$$|M(n-1,2(\frac{a(n)}{2}-(n-1)))| = |M(n-1,2\left(a(n-1)-\frac{a(n)}{2}+n-1\right)|.$$

Como

$$2\left(a(n-1)-\frac{a(n)}{2}+n-1\right) = (n-1)^2-(n-1)-a(n)+2(n-1) =$$

$$(n-1)^2-a(n)+n-1 = \frac{2(n-1)^2-n^2+n+2n-2}{2} =$$

$$\frac{2n^2-4n+2-n^2+3n-2}{2} = \frac{n^2-n}{2} = a(n),$$

entonces

$$(2) \quad |M(n-1,2\left(\frac{a(n)}{2}-(n-1)\right)\big)| = |M(n-1,a(n)|.$$

Como por el Lema 2.11

$$(3) \quad |M^{(0)}(n,a(n))| = |M(n-1,a(n)|,$$

luego de (1), (2) y (3) resulta: $|M^{(0)}(n,a(n))| = |M_1(n,a(n))|$. $\blacksquare$

Lema 2.23 *Si* $n \geq 6$ *y* $a(n)$ *es par entonces*

$$|M(n,a(n))| = 2|M(n-1,a(n))| + |M_{(3)}^{(n-2)}(n,a(n))|.$$

Dem. Si $a(n)$ es par y $t = \frac{a(n)}{2}$ entonces por (2.11)

$$|M(n, a(n))| = |M^{(0)}(n, a(n))| + |M^{(\neq 0)}(n, a(n))|.$$

Como $n \geq 4$ entonces por el Lema 1.1,(II) $0 \leq t = \frac{a(n)}{2} \leq a(n-1)$ luego por el Lema 2.11

$$|M^{(0)}(n, a(n))| = |M(n-1, a(n))|,$$

luego

$$|M(n, a(n))| = |M(n-1, a(n))| + |M^{(\neq 0)}(n, a(n))|.$$

Como $a(n)$ es par y $n \geq 6$ $n < t = \frac{a(n)}{2}$ entonces por la ecuación (2.19)

$$|M^{(\neq 0)}(n, a(n))| = |M_1(n, a(n))| + |M_{(3)}^{(n-2)}(n, a(n))|,$$

luego

$$|M(n, a(n))| = |M(n-1, a(n))| + |M_1(n, a(n))| + |M_{(3)}^{(n-2)}(n, a(n))|.$$

Por los Lemas 2.22 y 2.11:

$$|M_1(n, a(n))| = |M^{(0)}(n, a(n))| = |M(n-1, a(n))|$$

entonces

$$|M(n, a(n))| = 2|M(n-1, a(n))| + |M_{(3)}^{(n-2)}(n, a(n))|.$$

■

Lema 2.24 *Si $n \geq 6$,*

- *y $a(n)$ es impar entonces*

$$\sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M^{(\neq 0)}(n, 2t)| = \sum_{t=\frac{a(n)+1}{2}}^{a(n-1)} |M(n-1, 2t)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M_{(3)}^{(n-2)}(n, 2t)|.$$

- *y $a(n)$ es par entonces*

$$\sum_{t=n}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M^{(\neq 0)}(n, 2t)| =$$

$$\sum_{t=\frac{a(n)}{2}+1}^{a(n-1)} |M(n-1, 2t)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M_{(3)}^{(n-2)}(n, 2t)|.$$

Dem. Supongamos que $a(n)$ es impar, luego teniendo en cuenta (2.18), (2.19) y el Corolario 2.3

$$\sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M^{(\neq 0)}(n, 2t)| = |M^{(\neq 0)}(n, 2n)| + \sum_{t=n+1}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M^{(\neq 0)}(n, 2t)| =$$

$$|M_1(n,2n)| + |M(n-1,2a(n-1))| + |M_{(3)}^{(n-2)}(n,2n)| + \sum_{t=n+1}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M_1(n,2t)| +$$

$$\sum_{t=n+1}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)| =$$

$$\sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M_1(n,2t)| + |M(n-1,2a(n-1))| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)| =$$

$$\sum_{t=\frac{a(n)-1}{2}}^{a(n-1)} |M(n-1,2t)| + |M(n-1,2a(n-1))| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)| =$$

$$\sum_{t=\frac{a(n)-1}{2}}^{a(n-1)} |M(n-1,2t)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|.$$

Supongamos que $a(n)$ es par, luego teniendo en cuenta (2.18), (2.19) y el Corolario 2.3

$$\sum_{t=n}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M^{(\neq 0)}(n,2t)| = |M^{(\neq 0)}(n,2n)| + \sum_{t=n+1}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M^{(\neq 0)}(n,2t)| =$$

$$|M_1(n,2n)| + |M(n-1,2a(n-1))| + |M_{(3)}^{(n-2)}(n,2n)| + \sum_{t=n+1}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M_1(n,2t)| +$$

$$\sum_{t=n+1}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)| =$$

$$\sum_{t=n}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M_1(n,2t)| + |M(n-1,2a(n-1))| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)| =$$

$$\sum_{t=\frac{a(n)}{2}-1}^{a(n-1)} |M(n-1,2t)| + |M(n-1,2a(n-1))| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)| =$$

$$\sum_{t=\frac{a(n)}{2}-1}^{a(n-1)} |M(n-1,2t)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|.$$

$\blacksquare$

Teorema 2.2 *Sea* $n \geq 6$*.*
Primer caso: *$a(n)$ es impar.*
Si n es impar entonces:

$$|M(n)| = 2\left(|M(n-1)| + \sum_{h=0}^{\frac{n-3}{2}} |P(2h+1)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|\right). \tag{2.20}$$

Si n es par entonces

$$|M(n)| = 2\left(|M(n-1)| + \sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1}|P(2h)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}}|M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|\right). \tag{2.21}$$

Segundo caso: *$a(n)$ es par.*
Si n es impar entonces

$$|M(n)| = 2\left(|M(n-1)| + \sum_{h=0}^{\frac{n-3}{2}}|P(2h+1)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)}{2}-1}|M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|\right) + |M_{(3)}^{(n-2)}(n,a(n))|. \tag{2.22}$$

Si n es par entonces

$$|M(n)| = 2\left(|M(n-1)| + \sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1}|P(2h)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)}{2}-1}|M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|\right) + |M_{(3)}^{(n-2)}(n,a(n))|. \tag{2.23}$$

Dem. Si $a(n)$ es impar.
Por la ecuación (2.14) indicada en el Teorema 2.1 y la ecuación (2.11), tenemos:

$$|M(n)| = 2\sum_{t=0}^{\frac{a(n)-1}{2}}|M(n,2t)| =$$

$$2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)-1}{2}}|M^{(0)}(n,2t)| + \sum_{t=0}^{\frac{a(n)-1}{2}}|M^{(\neq 0)}(n,2t)|\right).$$

Luego por el Lema 2.11

$$|M(n)| = 2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)-1}{2}}|M(n-1,2t)| + \sum_{t=0}^{\frac{a(n)-1}{2}}|M^{(\neq 0)}(n,2t)|\right). \tag{2.24}$$

Si n es impar. Por el Lema 2.12

$$|M(n)| = 2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)-1}{2}}|M(n-1,2t)| + \sum_{t=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{\frac{a(n)-1}{2}}|M^{(\neq 0)}(n,2t)|\right) =$$

$$2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)-1}{2}}|M(n-1,2t)| + \sum_{t=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1}|M^{(\neq 0)}(n,2t)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}}|M^{(\neq 0)}(n,2t)|\right).$$

Luego por el Lema 2.20

$$|M(n)| = 2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)-1}{2}}|M(n-1,2t)| + \sum_{h=0}^{\frac{n-3}{2}}|P(2h+1)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}}|M^{(\neq 0)}(n,2t)|\right).$$

Como $a(n)$ es impar, por el Lema 2.24:

$$|M(n)| = 2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M(n-1,2t)| + \sum_{t=\frac{a(n)+1}{2}}^{a(n-1)} |M(n-1,2t)|\right) +$$

$$2\left(\sum_{h=0}^{\frac{n-3}{2}} |P(2h+1)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|\right) =$$

$$2\left(\sum_{t=0}^{a(n-1)} |M(n-1,2t)| + \sum_{h=0}^{\frac{n-3}{2}} |P(2h+1)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|\right).$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2.10) tenemos finalmente:

$$|M(n)| = 2\left(|M(n-1)| + \sum_{h=0}^{\frac{n-3}{2}} |P(2h+1)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|\right).$$

Si $\underline{n \text{ es par}}$, entonces de (2.24) y el Lema 2.12 resulta

$$|M(n)| = 2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M(n-1,2t)| + \sum_{t=\frac{n}{2}+1}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M^{(\neq 0)}(n,2t)|\right) =$$

$$2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M(n-1,2t)| + \sum_{t=\frac{n}{2}+1}^{n-1} |M^{(\neq 0)}(n,2t)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M^{(\neq 0)}(n,2t)|\right).$$

Luego por el Lema 2.20

$$|M(n)| = 2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M(n-1,2t)| + \sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1} |P(2h)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M^{(\neq 0)}(n,2t)|\right).$$

Como $a(n)$ es impar, por el Lema 2.24:

$$|M(n)| = 2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M(n-1,2t)| + \sum_{t=\frac{a(n)}{2}+1}^{a(n-1)} |M(n-1,2t)|\right) +$$

$$2\left(\sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1} |P(2h)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|\right) =$$

$$2\left(\sum_{t=0}^{a(n-1)} |M(n-1,2t)| + \sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1} |P(2h)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|\right).$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2.10) tenemos finalmente:

$$|M(n)| = 2\left(|M(n-1)| + \sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1}|P(2h)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M^{(n-2)}_{(3)}(n,2t)|\right).$$

Si $a(n)$ es par.
Por la ecuación (2.13) indicada en el Teorema 2.1 y la ecuación (2.11), tenemos:

$$|M(n)| = 2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M(n,2t)|\right) + |M(n,a(n))| =$$

$$2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M^{(0)}(n,2t)| + \sum_{t=0}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M^{(\neq 0)}(n,2t)|\right) + |M(n,a(n))|.$$

Luego por el Lema 2.11

$$|M(n)| = 2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M(n-1,2t)| + \sum_{t=0}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M^{(\neq 0)}(n,2t)|\right) + |M(n,a(n))|. \tag{2.25}$$

Si n es impar por el Lema 2.12

$$|M(n)| = 2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M(n-1,2t)| + \sum_{t=[\frac{n}{2}]+1}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M^{(\neq 0)}(n,2t)|\right) + |M(n,a(n))| =$$

$$2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M(n-1,2t)| + \sum_{t=[\frac{n}{2}]+1}^{n-1} |M^{(\neq 0)}(n,2t)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M^{(\neq 0)}(n,2t)|\right) + |M(n,a(n))|.$$

Por el Lema 2.20

$$|M(n)| = 2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M(n-1,2t)| + \sum_{h=0}^{\frac{n-3}{2}}|P(2h+1)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M^{(\neq 0)}(n,2t)|\right) +$$

$$|M(n,a(n))|.$$

Como $a(n)$ es par, por el Lema 2.24:

$$|M(n)| = 2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M(n-1,2t)| + \sum_{h=0}^{\frac{n-3}{2}}|P(2h+1)|\right) +$$

$$2\left(\sum_{t=\frac{a(n)}{2}+1}^{a(n-1)} |M(n-1,2t)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M^{(n-2)}_{(3)}(n,2t)|\right) + |M(n,a(n))|.$$

Como $n \geq 6$ y $a(n)$ es par, por el Lema 2.23:

$$|M(n)| = 2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M(n-1,2t)| + \sum_{h=0}^{\frac{n-3}{2}} |P(2h+1)|\right) +$$

$$2\left(\sum_{t=\frac{a(n)}{2}+1}^{a(n-1)} |M(n-1,2t)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|\right) +$$

$$2|M(n-1,a(n))| + |M_{(3)}^{(n-2)}(n,a(n))| =$$

$$2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M(n-1,2t)| + \sum_{t=\frac{a(n)}{2}+1}^{a(n-1)} |M(n-1,2t)| + |M(n-1,a(n))|\right) +$$

$$2\left(\sum_{h=0}^{\frac{n-3}{2}} |P(2h+1)| + \sum_{t=n+1}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|\right) + |M_{(3)}^{(n-2)}(n,a(n))| =$$

$$2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M(n-1,2t)| + |M(n-1,2\frac{a(n)}{2})| + \sum_{t=\frac{a(n)}{2}+1}^{a(n-1)} |M(n-1,2t)|\right) +$$

$$2\left(\sum_{h=0}^{\frac{n-3}{2}} |P(2h+1)| + \sum_{t=n+1}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|\right) + |M_{(3)}^{(n-2)}(n,a(n))| =$$

$$2\left(\sum_{t=0}^{a(n-1)} |M(n-1,2t)| + \sum_{h=0}^{\frac{n-3}{2}} |P(2h+1)| + \sum_{t=n+1}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|\right) + |M_{(3)}^{(n-2)}(n,a(n))| =$$

$$2\left(M(n-1) + \sum_{h=0}^{\frac{n-3}{2}} |P(2h+1)| + \sum_{t=n+1}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|\right) + |M_{(3)}^{(n-2)}(n,a(n))|.$$

Si n es par entonces de (2.25) y el Lema 2.12 resulta

$$|M(n)| = 2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M(n-1,2t)| + \sum_{t=\frac{n}{2}+1}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M^{(\neq 0)}(n,2t)|\right) + |M(n,a(n))| =$$

$$2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M(n-1,2t)| + \sum_{t=\frac{n}{2}+1}^{n-1} |M^{(\neq 0)}(n,2t)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M^{(\neq 0)}(n,2t)|\right) + |M(n,a(n))|.$$

Por el Lema 2.20

$$|M(n)| = 2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M(n-1,2t)| + \sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1} |P(2h)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)}{2}-1} |M^{(\neq 0)}(n,2t)|\right) +$$

$$|M(n,a(n))|.$$

Como $a(n)$ es par, por el Lema 2.24:

$$|M(n)| = 2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)}{2}-1}|M(n-1,2t)| + \sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1}|P(2h)|\right) +$$

$$2\left(\sum_{t=\frac{a(n)}{2}+1}^{a(n-1)}|M(n-1,2t)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)}{2}-1}|M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|\right) + |M(n,a(n))|.$$

Como $n \geq 6$ y $a(n)$ es par, por el Lema 2.23:

$$|M(n)| = 2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)}{2}-1}|M(n-1,2t)| + \sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1}|P(2h)|\right) +$$

$$2\left(\sum_{t=\frac{a(n)}{2}+1}^{a(n-1)}|M(n-1,2t)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)}{2}-1}|M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|\right) +$$

$$2|M(n-1,a(n))| + |M_{(3)}^{(n-2)}(n,a(n))| =$$

$$2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)}{2}-1}|M(n-1,2t)| + \sum_{t=\frac{a(n)}{2}+1}^{a(n-1)}|M(n-1,2t)| + |M(n-1,a(n))|\right) +$$

$$2\left(\sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1}|P(2h)| + \sum_{t=n+1}^{\frac{a(n)}{2}-1}|M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|\right) + |M_{(3)}^{(n-2)}(n,a(n))| =$$

$$2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)}{2}-1}|M(n-1,2t)| + |M(n-1,2\frac{a(n)}{2})| + \sum_{t=\frac{a(n)}{2}+1}^{a(n-1)}|M(n-1,2t)|\right) +$$

$$2\left(\sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1}|P(2h)| + \sum_{t=n+1}^{\frac{a(n)}{2}-1}|M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|\right) + |M_{(3)}^{(n-2)}(n,a(n))| =$$

$$2\left(\sum_{t=0}^{a(n-1)}|M(n-1,2t)| + \sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1}|P(2h)| + \sum_{t=n+1}^{\frac{a(n)}{2}-1}|M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|\right) + |M_{(3)}^{(n-2)}(n,a(n))| =$$

$$2\left(M(n-1) + \sum_{h=0}^{\frac{n}{2}-1}|P(2h)| + \sum_{t=n+1}^{\frac{a(n)}{2}-1}|M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|\right) + |M_{(3)}^{(n-2)}(n,a(n))|.$$

$\blacksquare$

Por lo tanto si $n \geq 6$ determinado el número $|M(n-1)|$ para conocer $|M(n)|$ basta utilizar una tabla que contenga los valores de las particiones de un entero positivo y determinar los números $|M_3^{(n-2)}(n,2t)|,\ n \leq t \leq \left[\frac{a(n)}{2}\right]$.

Vamos a indicar algunos resultados que nos permitirán construir un programa para la determinación de estos números. El programa será indicado en la sección 3 y los resultados numéricos en la sección 4.

Si $n \geq 6$ y $x_1, \ldots, x_n$ es una sucesión de números naturales tales que $x_1 = 3 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 1$ y $\sum_{i=1}^{n} x_i$ es un número par entonces ella verifica la condición (2.8) esto es

$$A(i) = \sum_{k=1}^{i} x_k \leq i(i-1) + \sum_{k=i+1}^{n} (i \wedge x_k) = B(i) \ \text{ para } \ 1 \leq i \leq s. \tag{2.26}$$

donde $s \leq n-1$ es el mayor entero tal que $x_s \geq s-1$. Como $x_1 = 3$ entonces a lo sumo $s = 4$.

CASO (I): $i = 1$

Como $x_1 = 3$ y $1 \leq x_k$ para todo k entonces $\sum_{k=2}^{n}(1 \wedge x_k) = \sum_{k=2}^{n} 1 = n-1$ y como $6 \leq n$ entonces $A(1) = x_1 = 3 \leq 5 = 6-1 =\leq n-1 = B(1)$.

CASO (II): $i = 2$

	(IIa)	(IIb)	(IIc)	(IId)
	$x_2 = 1$	$x_2 = 2, x_3 = 1$	$x_2 = x_3 = 2, x_4 = 1$	$x_2 = x_3 = x_4 = 2$
$A(2)$	4	5	5	5
$B(2)$	n	n	$n+1$	$6 + \sum_{k=5}^{n}(2 \wedge x_k)$

	(IIe)	(IIf)	(IIg)
	$x_2 = 3, x_3 = 1$	$x_2 = 3, x_3 = 2$	$x_2 = x_3 = 3$
$A(2)$	6	6	6
$B(2)$	n	$4 + \sum_{k=4}^{n}(2 \wedge x_k)$	$5 + \sum_{k=4}^{n}(2 \wedge x_k)$

Caso (IIa) Como $6 \leq n$ entonces $A(2) = 6-2 = 4 \leq 6 \leq n = B(2)$.
Como $5 \leq 6 \leq n \leq n+1$ entonces es claro que se verifican los casos (IIb)y (IIc). Como $5 \leq 6 + \sum_{k=5}^{n}(2 \wedge x_k)$ se verifica (IId).

Como $5 \leq 6 \leq n$ entonces se verifica (IIe). Como $4+\sum_{k=4}^{n}(2\wedge x_k) \geq 4+(n-3) = n+1 \geq 7 \geq 6$ entonces se verifica (IIf). Como $5 \leq 5 + \sum_{k=4}^{n}(2 \wedge x_k)$ entonces se verifica (IIg).

CASO (III): $i = 3$

	(IIIa)	(IIIb)	(IIIc)
	$x_2 = 1$	$x_2 = 2, x_3 = 1$	$x_2 = x_3 = 2$
$A(3)$	5	6	7
$B(3)$	$n + 3$	$n + 3$	$6 + \sum_{k=4}^{n} x_k$

	(IIId)	(IIIe)	(IIIf)
	$x_2 = 3, x_3 = 1$	$x_2 = 3, x_3 = 2$	$x_2 = x_3 = 3$
$A(3)$	7	8	9
$B(3)$	$n + 3$	$6 + \sum_{k=4}^{n} (3 \wedge x_k)$	$6 + \sum_{k=4}^{n} (3 \wedge x_k)$

Como $5 \leq 6 \leq n \leq n + 3$ se verifican los casos (IIIa), (IIIb) y (IIId). Como $1 \geq \sum_{k=4}^{n} x_k$ entonces se verifica (IIIc). Es claro que se verifican (IIIe) y (IIIf).

CASO (IV): $i = 4$

	(IVa)	(IVb)	(IVc)	(IVd)	(IVe)
	$x_2 = 1$	$x_2 = 2, x_3 = 1$	$x_2 = x_3 = 2$ $x_4 = 1$	$x_2 = x_3 = 2$ $x_4 = 2$	$x_2 = 3$
$A(4)$	6	7	8	9	$6 + x_3 + x_4$
$B(4)$	$n + 8$	$n + 8$	$n + 8$	$12 + \sum_{k=5}^{n} x_k$	$12 + \sum_{k=5}^{n} x_k$

Como $6 \leq n \leq n + 8$ es claro que se verifica (IVa). Como $7 \leq 8 + n$ se verifican (IVb) y (IVc). Es claro que se verifica (IVd). Como $x_3, x_4 \leq 3$ entonces $6 + x_3 + x_4 \leq 12 \leq B(4)$.

Si $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 6$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una sucesión de números naturales tal que (a) $x_1 = 3 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$, (b) $\sum_{i=1}^{n} x_i$ es un número par, y (c) $2n \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 2\left[\frac{a(n)}{2}\right]$, donde $a(n) = \frac{n^2 - n}{2}$, entonces no puede ocurrir que $x_2 = 1$. En efecto si $x_2 = 1$ entonces $x_i = 1$ para $2 \leq i \leq n$ y por lo tanto $\sum_{i=1}^{n} x_i = n + 2$. Si n es impar $n + 2$ es impar y no se verifica (b). Si n es par y se verificara (c) en particular $2n \leq n + 2$ y por lo tanto $n \leq 2$ absurdo. Luego $x_2 \geq 2$.

Si $x_2 = 2$ y $x_3 = 1$ entonces $\sum_{i=1}^{n} x_i = n + 3$, luego si n es par no se verifica (b) y si n es

impar y se verificara (c) en particular $2n \leq n+3$ y por lo tanto $n \leq 3$, absurdo.
Si $x_2 = 3$, $x_3 = 1$ entonces $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = n+4$ luego si n es impar no se verifica (b) y si n es par y se verificara (c) en particular $2n \leq n+4$ y por lo tanto $n \leq 4$, absurdo.
Luego $x_2 \geq 2$ y $x_3 \geq 2$.

Si $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 6$ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una sucesión de números naturales que verifican

(I) $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$,

(II) $3 \leq x_1 \leq n-2, \quad x_2 \geq 2, \quad x_3 \geq 2$

(III) $2n \leq \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq 2\left[\dfrac{a(n)}{2}\right]$, donde $a(n) = \dfrac{n^2-n}{2}$,

(IV) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ es un número par,

entonces se verifica (2.8) para $i = 1$. En efecto $A(1) = x_1$ y $B(1) = \sum\limits_{k=2}^{n}(1 \wedge x_k) = n-2$.
Además el mayor s indicado en (2.8) es $s = x_1 + 1$. En efecto si para $s > x_1 + 1$ se verificara que $x_s \geq s-1$ como $x_s \leq x_{x_1+1}$ entonces $s-1 \leq x_s \leq x_{x_1+1} \leq x_1$ y por lo tanto (ii) $s \leq x_1 + 1$ absurdo.

Acabamos así de probar que las sucesiones de números naturales que verifican (I) a (IV) y $x_1 = 3$ verifican la condición (2.8).

Para las sucesiones de números naturales que verifican (I) a (IV) y $4 \leq x_1 \leq n-2$ solo hay que verificar la condición (2.8) para $2 \leq i \leq x_1 + 1$, esto es:

(V) $A(i) = \sum\limits_{k=1}^{i} x_k \leq i(i-1) + \sum\limits_{k=i+1}^{n}(i \wedge x_k) = B(i)$ para $2 \leq i \leq x_1 + 1$.

Sea $\mathbf{S}(n, 2t)$, donde $n \leq t \leq \left[\frac{a(n)}{2}\right]$ el conjunto de todas las sucesiones $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de enteros positivos que verifican (I) a (V). Luego $|\mathbf{S}(n, 2t)| = |M_{(3)}^{(n-2)}(n, 2t)|$.
El programa computacional que se indica en la próxima sección determina $|\mathbf{S}(n, 2t)|$ para $n \leq t \leq \left[\frac{a(n)}{2}\right]$ y $n \geq 6$.

3. El programa de A. Claverie

```
#include <cstdlib>
#include <iostream>
#include <time.h>

using namespace std;

const int MaximaSumaDeElementos= 500; //SumaDeElementos= (n^2 - n)/2
const int TopeLongWord= 999999999; //

struct SLW // Define Super LongWord
    {
     int MenosSig;
     int MasSig;
    };

int piso[50];
SLW Sucesiones[1500];
int rama[50];
int N,an;

SLW IncrementaSLW(SLW valor)
{
  if (valor.MenosSig==TopeLongWord)
  {
     valor.MenosSig=0;
     valor.MasSig++;
  }
  else valor.MenosSig++;

  return(valor);
}

SLW SumaDosSLW(SLW v1,SLW v2)
{
  int aux=v1.MenosSig+v2.MenosSig;
  v1.MenosSig=aux % (TopeLongWord+1);
  v1.MasSig=v1.MasSig+v2.MasSig+(aux / (TopeLongWord+1));
  return v1;
}

int Min(int a, int b)
{
    if (a<b) return a; else return b;
}
```

```
bool CondicionV(int N) / / *** Condición (V)
{
  int k=2,i,xi,mink;
  bool aux=1;
  while (aux and (k <=(rama[1]+1)))
  {
   xi=0; for (i=1;i<= k;i++) xi=xi+rama[i];
   mink=0; for (i=(k+1);i<= N;i++) mink=mink+Min(k,rama[i]);
   aux=(xi<=(k*(k-1)+mink));
   k++;
  }
  return aux;
}
void EvaluaMarcoSerie(int prof, int sumaserie, int techo,int N)
{
  int i;
  for (i=piso[prof];i¡=techo;i++)
  {
   sumaserie=sumaserie+i;
   rama[prof]=i;
   if (sumaserie<=an) / / *** Condición (III)
      if (prof<N)
         EvaluaMarcoSerie(prof+1,sumaserie,i,N); /* Condición (I) al pasar i
como tercer parámetro (techo) */
      else if (
               ((sumaserie %2)==0) and /* *** Condición (IV) */
                (CondicionV(N) and (sumaserie>=(2*N)))) /* *** Condición (III) * /))
            Sucesiones[sumaserie]=IncrementaSLW(Sucesiones[sumaserie]);
   sumaserie=sumaserie-i;
  };
}
int main(int argc, char *argv[ ])
{
   char nombrearchivo[50];
   time_t comienzo, final;
   int i,dt,ddia,dhor,dmin,dseg,param;
   SLW cumplen;
   FILE *fp;
   param=atoi(argv[1]);
   if ((param < 6) |(param > 32))
   {
     cout << "Parametro ingresado incorrecto. n";
     cout << "El parametro ingresado debe ser un número entero entre 6 y 32 n":
     return EXIT_SUCCESS;
}
```

```
sprintf(nombrearchivo, "salida %s.txt", argv[1];
strcat(nombrearchivo,argv[1]);
strcat(nombrearchivo,".txt");
fp=fopen(nombrearchivo,"w");

an=(param*param-param)/ 2;

cumplen.MenosSig=0;cumplen.MasSig=0;

for (i=1;i<=MaximaSumaDeElementos;i++)
{
  Sucesiones[i].MenosSig=0;
  Sucesiones[i].MasSig=0;
}

for (i=1;i<=param;i++)
  piso[i]=1;
piso[1]=3;  // x1 >= 3 *** Condición (II)
piso[2]=2;  // x2 > 2
piso[3]=2;  // x3 > 2

printf("\n N= %d a(n)= %d procesando... \n",param,an);
fprintf(fp,"\n N= %d a(n)= %d \n",param,an);

comienzo=time(NULL); // Marca tiempo de inicio
EvaluaMarcoSerie(1,0,param-2,param);
final=time(NULL); //Marca tiempo de finalización

for (i=1;i<=MaximaSumaDeElementos;i++)
     cumplen=SumaDosSLW(cumplen,Sucesiones[i]); //Suma total

for (i=1;i<=MaximaSumaDeElementos;i++)
     if (Sucesiones[i].MasSig!=0) //Formatea salida de SuperLongWord
          fprintf(fp,"\n  %8d  %11u %09u",i,Sucesiones[i]. MasSig,
Sucesiones[i].MenosSig);
     else if (Sucesiones[i].MenosSig!=0)
            fprintf(fp,"\n  %8d  %20u",i,Sucesiones[i].MenosSig);

if (cumplen.MasSig!=0)
     fprintf(fp,"\n Sucesiones que cumplen  %11u %09u ", cumplen.MasSig,
cumplen.MenosSig);
else if (cumplen.MenosSig!=0)
          fprintf(fp,"\n Sucesiones que cumplen  %20u", cumplen.MenosSig);
```

```
    dt=difftime(final, comienzo);
    ddia=(dt / 86400);
    dhor=((dt-ddia*86400)/3600);
    dmin=((dt-ddia*86400-dhor*3600)/60);
    dseg=(dt-ddia*86400-dhor*3600-dmin*60);

    fprintf(fp, "\n Tiempo transcurrido:"); //Imprime salida en archivo
    if (ddia!=0) fprintf(fp, " %u dia(s)",ddia);
    if (dhor!=0) fprintf(fp, " %u hora(s)",dhor);
    if (dmin!=0) fprintf(fp," %u minuto(s)",dmin);
    fprintf(fp," %u segundo(s) \ n",dseg);
    fclose(fp);

    return EXIT_SUCCESS;
}
```

4. Resultados computacionales

Los resultados computacionales que se indican a continuación fueron obtenidos por Agustín Claverie, quien con dedicación, eficiencia y entusiasmo realizó un programa en Pascal, que fue procesado en una PC (Pentium IV, de 2,4 GHz).
Después de una primera implementación de un programa, Claverie obtuvo un listado de las sucesiones correspondientes a las clases $E(A) \in M^{(\neq 0)}(7, 2t)$, $7 \le t \le 13$ y $E(A) \in M^{(\neq 0)}(8, 2t)$, $8 \le t \le 14$. La observación de estos datos motivaron la demostración de varios lemas y los resultados obtenidos permitieron cambiar el enfoque del programa y reducir considerablemente los tiempos de procesamiento. Posteriormente Claverie implementó el programa en Lenguaje C, indicado en el párrafo precedente, consiguiendo una nueva e importante reducción en los tiempos de procesamiento.

Para $6 \leq n \leq 23$ Claverie determinó $|M_{(3)}^{(n-2)}(n, 2t)| = |\mathbf{S}(n, 2t)|$ para $n \leq t \leq \left[\frac{a(n)}{2}\right]$:

	n						
2t	6	7	8	9	10	11	12
12	5						
14	7	9					
16		13	15				
18		17	23	23			
20		19	33	35	34		
22			41	53	53	48	
24			50	72	82	75	68
26			55	95	115	118	106
28			57	118	160	170	167
30				139	212	244	244
32				156	269	336	356
34				165	327	445	500
36				171	386	576	686
38					437	719	913
40					484	874	1.189
42					514	1.031	1.508
44					533	1.196	1.871
46						1.341	2.270
48						1.480	2.705
50						1.585	3.152
52						1.661	3.614
54						1.703	4.064
56							4.476
58							4.854
60							5.160
62							5.397
64							5.530
66							5.595

	n					n			
2t	13	14	15	16	2t	13	14	15	16
26	92				74	18.079	42.522	74.864	108.972
28	144	125			76	18.431	46.319	85.595	129.017
30	228	196	166		78	18.583	49.997	96.951	151.565
32	336	309	259	220	80		53.300	108.717	176.370
34	496	456	408	343	82		56.251	120.820	203.703
36	709	678	606	538	84		58.722	132.995	233.185
38	987	977	902	797	86		60.647	145.139	264.922
40	1.348	1.376	1.308	1.188	88		61.930	156.887	298.449
42	1.800	1.904	1.856	1.726	90		62.622	168.219	333.832
44	2.357	2.591	2.597	2.462	92			178.603	370.339
46	3.018	3.455	3.571	3.461	94			188.151	407.897
48	3.802	4.531	4.835	4.800	96			196.372	445.858
50	4.689	5.849	6.436	6.553	98			203.270	483.709
52	5.711	7.421	8.466	8.826	100			208.510	521.030
54	6.818	9.280	10.951	11.747	102			212.139	557.121
56	8.041	11.444	13.991	15.414	104			213.961	591.466
58	9.315	13.908	17.619	19.993	106				623.367
60	10.647	16.710	21.970	25.620	108				652.536
62	11.978	19.815	27.012	32.466	110				677.937
64	13.287	23.158	32.915	40.705	112				699.723
66	14.534	26.800	39.599	50.531	114				716.906
68	15.662	30.594	47.153	62.092	116				729.600
70	16.658	34.551	55.582	75.607	118				737.124
72	17.470	38.513	64.850	91.142	120				739.931

	n				n		
2t	17	18	19	2t	17	18	19
34	286			104	1.223.586	2.069.680	3.026.647
36	445	373		106	1.340.820	2.336.150	3.497.598
38	696	578	478	108	1.460.004	2.622.373	4.020.466
40	1.032	898	739	110	1.580.368	2.927.217	4.598.891
42	1.538	1.330	1.144	112	1.699.791	3.250.426	5.233.882
44	2.240	1.978	1.693	114	1.817.812	3.589.436	5.928.554
46	3.199	2.878	2.513	116	1.932.138	3.943.348	6.681.589
48	4.520	4.118	3.656	118	2.041.449	4.308.827	7.496.051
50	6.298	5.825	5.228	120	2.144.580	4.684.727	8.369.317
52	8.660	8.145	7.410	122	2.239.482	5.066.273	9.301.526
54	11.746	11.241	10.375	124	2.325.006	5.452.049	10.289.581
56	15.779	15.326	14.362	126	2.399.824	5.836.415	11.332.010
58	20.907	20.706	19.644	128	2.463.074	6.217.757	12.423.128
60	27.443	27.647	26.666	130	2.512.724	6.590.026	13.559.155
62	35.593	36.566	35.771	132	2.549.465	6.951.082	14.734.102
64	45.719	47.864	47.599	134	2.571.263	7.294.485	15.939.977
66	58.104	62.094	62.716	136	2.578.893	7.619.073	17.171.232
68	73.247	79.771	81.970	138		7.917.876	18.417.259
70	91.364	101.669	106.168	140		8.189.529	19.669.970
72	113.136	128.401	136.506	142		8.428.680	20.917.575
74	138.810	160.908	173.956	144		8.634.318	22.153.238
76	168.923	200.105	220.200	146		8.801.085	23.360.899
78	203.963	247.018	276.585	148		8.928.853	24.534.308
80	244.398	302.511	345.178	150		9.014.788	25.657.753
82	290.506	368.149	427.655	152		9.058.225	26.724.207
84	342.771	444.666	526.501	154			27.718.073
86	401.563	533.604	644.013	156			28.634.414
88	466.888	635.844	782.854	158			29.457.037
90	539.254	753.151	945.862	160			30.182.822
92	618.336	886.019	1.135.826	162			30.799.566
94	704.301	1.036.175	1.356.309	164			31.302.266
96	796.787	1.203.982	1.610.113	166			31.683.349
98	895.756	1.390.849	1.900.833	168			31.941.260
100	1.000.051	1.597.056	2.231.436	170			32.070.349
102	1.109.895	1.823.404	2.605.969				

$n = 20$							
2t		2t		2t		2t	
40	614	78	292.405	116	9.875.994	154	65.176.576
42	945	80	370.300	118	11.312.413	156	69.291.686
44	1.455	82	465.902	120	12.903.324	158	73.398.427
46	2.146	84	582.469	122	14.653.464	160	77.470.988
48	3.178	86	723.910	124	16.572.125	162	81.478.555
50	4.615	88	893.907	126	18.662.861	164	85.390.035
52	6.596	90	1.098.021	128	20.933.038	166	89.172.026
54	9.343	92	1.340.719	130	23.380.577	168	92.795.264
56	13.096	94	1.628.199	132	26.013.488	170	96.229.014
58	18.145	96	1.966.382	134	28.824.700	172	99.437.393
60	24.880	98	2.362.928	136	31.816.370	174	102.401.473
62	33.853	100	2.823.958	138	34.979.599	176	105.082.402
64	45.576	102	3.358.561	140	38.312.693	178	107.464.162
66	60.886	104	3.974.075	142	41.798.192	180	109.517.800
68	80.614	106	4.679.599	144	45.433.609	182	111.230.744
70	105.919	108	5.484.043	146	49.195.529	184	112.573.471
72	138.022	110	6.396.816	148	53.073.193	186	113.550.531
74	178.631	112	7.426.439	150	57.043.033	188	114.134.066
76	229.282	114	8.583.163	152	61.087.746	190	114.333.706

$n=21$							
2t		2t		2t		2t	
42	779	86	770.305	130	35.328.585	174	253.202.844
44	1.194	88	964.483	132	40.057.564	176	266.811.321
46	1.830	90	1.200.492	134	45.254.543	178	280.283.808
48	2.697	92	1.486.157	136	50.939.079	180	293.545.807
50	3.981	94	1.830.320	138	57.132.663	182	306.496.104
52	5.774	96	2.242.411	140	63.851.073	184	319.054.268
54	8.242	98	2.733.462	142	71.109.534	186	331.124.284
56	11.673	100	3.315.520	144	78.918.313	188	342.618.084
58	16.357	102	4.002.658	146	87.281.319	190	353.453.394
60	22.692	104	4.808.781	148	96.205.636	192	363.539.184
62	31.139	106	5.751.386	150	105.681.213	194	372.802.018
64	42.453	108	6.846.612	152	115.705.546	196	381.160.024
66	57.283	110	8.115.148	154	126.257.158	198	388.559.161
68	76.753	112	9.576.051	156	137.323.720	200	394.918.736
70	101.961	114	11.252.666	158	148.866.226	202	400.206.150
72	134.505	116	13.165.501	160	160.866.527	204	404.356.653
74	176.043	118	15.341.754	162	173.266.922	206	407.357.321
76	228.976	120	17.803.058	164	186.036.244	208	409.157.057
78	295.541	122	20.578.411	166	199.106.562	210	409.769.320
80	379.125	124	23.690.918	168	212.434.038		
82	483.104	126	27.170.694	170	225.933.264		
84	611.977	128	31.039.542	172	239.554.297		

$n = 22$							
2t		2t		2t		2t	
44	988	92	1.570.030	140	94.512.618	188	814.736.266
46	1.509	94	1.956.432	142	107.034.335	190	860.326.980
48	2.299	96	2.425.374	144	120.831.941	192	906.025.273
50	3.377	98	2.992.729	146	135.961.448	194	951.633.467
52	4.971	100	3.674.878	148	152.510.655	196	996.867.347
54	7.191	102	4.492.179	150	170.531.321	198	1.041.534.528
56	10.249	104	5.465.520	152	190.098.781	200	1.085.311.352
58	14.495	106	6.621.518	154	211.254.861	202	1.128.006.384
60	20.306	108	7.986.737	156	234.062.573	204	1.169.290.913
62	28.158	110	9.592.817	158	258.542.543	206	1.208.967.124
64	38.662	112	11.473.691	160	284.742.960	208	1.246.722.280
66	52.747	114	13.668.050	162	312.667.595	210	1.282.369.338
68	71.279	116	16.216.529	164	342.329.840	212	1.315.594.907
70	95.675	118	19.164.957	166	373.715.649	214	1.346.245.742
72	127.398	120	22.562.264	168	406.814.479	216	1.374.048.629
74	168.505	122	26.459.847	170	441.572.098	218	1.398.850.654
76	221.264	124	30.916.566	172	477.944.557	220	1.420.438.323
78	288.847	126	35.990.147	174	515.861.086	222	1.438.695.678
80	374.337	128	41.746.630	176	555.226.383	224	1.453.443.828
82	482.380	130	48.249.626	178	595.941.874	226	1.464.615.243
84	617.694	132	55.573.977	180	637.875.615	228	1.472.105.071
86	786.487	134	63.783.293	182	680.894.180	230	1.475.865.102
88	995.532	136	72.962.839	184	724.825.180		
90	1.253.632	138	83.177.394	186	769.515.856		

$n = 23$							
2t		2t		2t		2t	
46	1.241	98	3.138.290	150	247.308.977	202	2.578.618.866
48	1.888	100	3.893.772	152	279.816.830	204	2.728.687.427
50	2.864	102	4.810.218	154	315.683.402	206	2.880.722.751
52	4.198	104	5.916.166	156	355.144.115	208	3.034.107.033
54	6.160	106	7.245.075	158	398.409.628	210	3.188.280.323
56	8.895	108	8.835.221	160	445.709.355	212	3.342.501.077
58	12.651	110	10.732.005	162	497.249.273	214	3.496.124.701
60	17.877	112	12.982.056	164	553.249.658	216	3.648.392.351
62	25.015	114	15.644.374	166	613.876.978	218	3.798.625.334
64	34.680	116	18.778.708	168	679.354.754	220	3.945.967.595
66	47.607	118	22.457.529	170	749.807.642	222	4.089.778.152
68	64.985	120	26.756.994	172	825.411.589	224	4.229.158.000
70	87.875	122	31.766.627	174	906.259.534	226	4.363.457.666
72	118.096	124	37.575.470	176	992.486.123	228	4.491.830.590
74	157.485	126	44.295.752	178	1.084.103.651	230	4.613.638.438
76	208.707	128	52.034.795	180	1.181.209.189	232	4.728.038.585
78	274.686	130	60.921.520	182	1.283.741.067	234	4.834.513.365
80	359.536	132	71.086.090	184	1.391.705.624	236	4.932.265.305
82	467.370	134	82.679.101	186	1.504.987.722	238	5.020.808.156
84	604.311	136	95.845.954	188	1.623.500.100	240	5.099.520.658
86	776.761	138	110.762.950	190	1.747.020.180	242	5.167.983.553
88	993.018	140	127.595.259	192	1.875.396.044	244	5.225.667.023
90	1.262.483	142	146.533.770	194	2.008.313.633	246	5.272.311.590
92	1.597.188	144	167.768.576	196	2.145.482.345	248	5.307.525.271
94	2.009.905	146	191.505.177	198	2.286.537.796	250	5.331.139.168
96	2.517.594	148	217.943.506	200	2.431.074.046	252	5.342.995.992

A partir de las tablas precedentes obtenemos:

$a(n)$ par			$a(n)$ impar	
n	$\sum_{t=n}^{\frac{a(n)}{2}-1} \lvert M_3^{(n-2)}(n,2t)\rvert$	$\lvert M_3^{(n-2)}(n,a(n))\rvert$	n	$\sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} \lvert M_3^{(n-2)}(n,2t)\rvert$
			6	12
8	217	57	7	58
9	856	171	10	3.606
12	48.830	5.595	11	13.602
13	186.637	18.583	14	746.951
16	10.570.859	739.931	15	2.854.245
17	40.745.540	2.578.893	18	161.873.547
20	2.357.076.155	114.333.706	19	624.575.979
21	9.142.136.653	409.769.320	22	36.241.354.863
			23	140.706.666.256

Tabla 4.1

Para $6 \leq n \leq 14$ el tiempo de procesamiento fue inferior a 1 segundo y para $15 \leq n \leq 23$ el tiempo de procesamiento fue:

n	Horas	Minutos	Segundos
15	–	–	3
16	–	–	12
17	–	–	53
18	–	3	37
19	–	5	25
20	1	6	24
21	4	39	15
22	19	3	32
23	78	57	15

Es bien conocido que (ver por ejemplo [11]):

m	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$\lvert P(m)\rvert$	1	2	5	11	22	42	77	135	231	385	627
m	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
$\lvert P(m)\rvert$	1	3	7	15	30	56	101	176	297	490	792

Tabla 4.2

Por lo tanto, teniendo en cuenta el Teorema 2.2 y las tablas 4.1 y 4.2

$$|M(6)| = 2(31 + 8 + 12) = 102$$

$$|M(7)| = 2(102 + 11 + 58) = 342$$

$$|M(8)| = 2(342 + 19 + 217) + 57 = 1.213$$

$$|M(9)| = 2(1.213 + 26 + 856) + 171 = 4.361$$

$$|M(10)| = 2(4.361 + 41 + 3.606) = 16.016$$

$$|M(11)| = 2(16.016 + 56 + 13.602) = 59.348$$

$$|M(12)| = 2(59.348 + 83 + 48.830) + 5.595 = 222.117$$

$$|M(13)| = 2(222.117 + 112 + 186.637) + 18.583 = 836.315$$

$$|M(14)| = 2(836.315 + 160 + 746.951) = 3.166.852$$

$$|M(15)| = 2(3.166.852 + 213 + 2.854.245) = 12.042.620$$

$$|M(16)| = 2(12.042.620 + 295 + 10.570.859) + 739.931 = 45.967.479$$

$$|M(17)| = 2(45.967.479 + 389 + 40.745.540) + 2.578.893 = 176.005.709$$

$$|M(18)| = 2(176.005.709 + 526 + 161.873.547) = 675.759.564$$

$$|M(19)| = 2(675.759.564 + 686 + 624.575.979) = 2.600.672.458$$

$$|M(20)| = 2(2.600.672.458 + 911 + 2.357.076.155) + 114.333.706 = 10.029.832.754$$

$$|M(21)| = 2(10.029.832.754 + 1.176 + 9.142.136.653) + 409.769.320 = 38.753.710.486$$

$$|M(22)| = 2(38.753.710.486 + 1.538 + 36.241.354.863) = 149.990.133.774$$

$$|M(23)| = 2(149.990.133.774 + 1.968 + 140.706.666.256) = 581.393.603.996$$

Tenemos así:

n	$\|M(n)\|$	n	$\|M(n)\|$
1	1	13	836.315
2	2	14	3.166.852
3	4	15	12.042.620
4	11	16	45.967.479
5	31	17	176.005.709
6	102	18	675.759.564
7	342	19	2.600.672.458
8	1.213	20	10.029.832.754
9	4.361	21	38.753.710.486
10	16.016	22	149.990.133.774
11	59.348	23	581.393.603.996
12	222.117		

Para $1 \leq n \leq 18$ los números $|M(n)|$ que determinamos coinciden con los números indicados en la sucesión A004251, que tiene exactamente 18 términos, que aparece en la *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*

http://www.research.att.com/∼njas/sequences/index.html

que dirige N.J.A. Sloane.

En 1978 P. R. Stein [24], determina $|M(n)|$ para $1 \leq n \leq 12$. En 1994, F. Ruskey F., R. Cohen, P. Eades y A. Scott [21], determinan vía un programa realizado en Pascal $|M(n)|$ para $1 \leq n \leq 16$. En 2004 P. Adams, R. B. Eggleton y J.A. MacDougall. [2], determinan $|M(n)|$ para $1 \leq n \leq 8$.

5. Algunas sucesiones que corresponden a los elementos de $M(n)$, para $2 \leq n \leq 9$

A continuación indicamos para $2 \leq n \leq 6$ todas las sucesiones correspondientes a las clases $E(A) \in M(n)$. Para $3 \leq n \leq 6$, estas sucesiones fueron obtenidas por L. Monteiro, hace algunos años, mediante un programa realizado en cobol y procesado en una PC 286.

$n=2$				
Suc.	$S(A)$	Cant.	$S(A)$	Suc.
00	0	1	2	11

$n=3$				
Suc.	$S(A)$	Cant.	$S(A)$	Suc.
000	0	1	6	222
110	2	1	4	211

$n=4$				
Suc.	$S(A)$	Cant.	$S(A)$	Suc.
0000	0	1	12	3333
1100	2	1	10	3322
2110	4	2	8	2222
1111				3221
2220	6	3		
2211				
3111				

$n=5$				
Suc.	$S(A)$	Cant.	$S(A)$	Suc.
00000	0	1	20	44444
11000	2	1	18	44433
11110	4	2	16	43333
21100				44332
22110	6	4	14	33332
22200				43322
31110				43331
21111				44222
22220	8	5	12	33330
32210				33222
22211				33321
32111				42222
41111				43221
33220	10	5		
22222				
32221				
33211				
42211				

$n = 6$										
Suc.	$S(A)$	Cant.	$S(A)$	Suc.		Suc.	$S(A)$	Cant.	$S(A)$	Suc.
000000	0	1	30	555555		332220	12	12	18	533322
110000	2	1	28	555544		333210				543222
111100	4	2	26	554444		333300				552222
211000				555443		422220				533331
211110	6	5	24	544443		432210				543321
221100				554433		222222				333333
222000				555333		322221				433332
311100				554442		332211				443322
111111				444444		333111				444222
222110	8	7	22	544333		422211				443331
222200				553333		432111				444321
321110				544432		522111				444330
322100				554332		333320	14	13	16	532222
411110				544441		433220				533221
221111				444433		433310				542221
311111				444442		442220				533311
222220	10	10	20	533333		332222				333322
322210				543332		333221				433222
332110				544322		333311				442222
332200				553322		422222				333331
422110				544331		432221				433321
222211				443333		433211				443221
322111				444332		442211				443311
331111				444422		522221				433330
421111				444431		532211				443320
511111				444440						

Las siguientes sucesiones fueron determinadas por A. Claverie.

Para $n = 7$ tenemos las siguientes sucesiones correspondientes a las clases:

$$E(A) \in M^{(\neq 0)}(7, 2t), \quad \text{para } 7 \leq t \leq \frac{a(7)-1}{2}.$$

	$S(A) = 14$	$S(A) = 16$	$S(A) = 18$	$S(A) = 20$
1	2222222	3322222	3333222	3333332
2	3222221	3332221	3333321	4333322
3	3322211	3333211	4332222	4333331
4	3332111	4222222	4333221	4433222
5	4222211	4322221	4333311	4433321
6	4322111	4332211	4422222	4442222
7	4331111	4333111	4432221	4443221
8	4421111	4422211	4433211	4443311
9	5222111	4432111	4442211	4444211
10	5321111	5222221	4443111	5333222
11		5322211	5322222	5333321
12		5332111	5332221	5432222
13		5422111	5333211	5433221
14			5422221	5433321
15			5432211	5442221
16			5433111	5443211
17			5522211	5522222
18				5532221
19				5533211

Para n= 8 tenemos las siguientes sucesiones correspondientes a las clases:

$$E(A) \in M^{(\neq 0)}(8, 2t), \quad \text{para} \ \ 8 \leq t \leq \frac{a(8)}{2}.$$

	$S(A) = 16$	$S(A) = 18$	$S(A) = 20$	$S(A) = 22$
1	22222222	33222222	33332222	33333322
2	32222221	33322221	33333221	33333331
3	33222211	33332211	33333311	43333222
4	33322111	33333111	43322222	43333321
5	33331111	42222222	43332221	44332222
6	42222211	43222221	43333211	44333221
7	43222111	43322211	44222222	44333311
8	43321111	43332111	44322221	44422222
9	44221111	44222211	44332211	44432221
10	44311111	44322111	44333111	44433211
11	52222111	44331111	44422211	44442211
12	53311111	44421111	44432111	44443111
13	53221111	52222221	44441111	53332222
14	54211111	53222211	53222222	53333221
15	62221111	53322111	53322221	53333311
16	63211111	53331111	53332211	54322222
17		54222111	53333111	54332221
18		54321111	54222221	54333211
19		55221111	54322211	54422221
20		62222211	54332111	54432211
21		63222111	54422111	54433111
22		63321111	54431111	54442111
23		64221111	55222211	55222222
24			55322111	55322221
25			55331111	55332211
26			62222222	55333111
27			63222221	55422211
28			63322211	55432111
29			63332111	63322222
30			64222211	63332221
31			64322111	63333211
32			64331111	64222222
33			65222111	64322221
34				64332211
35				64333111
36				64422211
37				64432111
38				65222221
39				65322211
40				65332111
41				66222211

$S(A)=24$				$S(A)=26$			
1	33333333	38	64432221	1	44333333	38	64444211
2	43333332	39	64433211	2	44433332	39	65333222
3	44333322	40	64442211	3	44443322	40	65333321
4	44333331	41	64443111	4	44443331	41	65432222
5	44433222	42	65322222	5	44444222	42	65433221
6	44433321	43	65332221	6	44444321	43	65433311
7	44442222	44	65333211	7	44444411	44	65442221
8	44443221	45	65422221	8	53333333	45	65443211
9	44443311	46	65432211	9	54333332	46	65444111
10	44444211	47	65433111	10	54433322	47	65522222
11	53333322	48	66222222	11	54433331	48	65532221
12	53333331	49	66322221	12	54443222	49	65533211
13	54333222	50	66332211	13	54443321	50	66332222
14	54333321			14	54444221	51	66333221
15	54432222			15	54444311	52	66333311
16	54433221			16	55333322	53	66422222
17	54433311			17	55333331	54	66432221
18	54442221			18	55433222	55	66433211
19	54443211			19	55433321		
20	54444111			20	55442222		
21	55332222			21	55443221		
22	55333221			22	55443311		
23	55333311			23	55444211		
24	55422222			24	55532222		
25	55432221			25	55533221		
26	55433211			26	55533311		
27	55442211			27	55542221		
28	55443111			28	55543211		
29	55522221			29	55544111		
30	55532211			30	63333332		
31	55533111			31	64333322		
32	63333222			32	64333331		
33	63333321			33	64433222		
34	64332222			34	64433321		
35	64333221			35	64442222		
36	64333311			36	64443221		
37	64422222			37	64443311		

$S(A) = 28$							
1	44443333	16	55444411	31	64444222	46	65544211
2	44444332	17	55533322	32	64444321	47	66333322
3	44444422	18	55533331	33	64444411	48	66333331
4	44444431	19	55543222	34	65333332	49	66433222
5	54433333	20	55543321	35	65433322	50	66433321
6	54443332	21	55544221	36	65433331	51	66442222
7	54444322	22	55544311	37	65443222	52	66443221
8	54444331	23	55552222	38	65443321	53	66443311
9	54444421	24	55553221	39	65444221	54	66444211
10	55333333	25	55553311	40	65444311	55	66532222
11	55433332	26	55554211	41	65533222	56	66533221
12	55443322	27	64333333	42	65533321	57	66533311
13	55443331	28	64433332	43	65542222		
14	55444222	29	64443322	44	65543221		
15	55444321	30	64443331	45	65543311		

Para n= 9 tenemos las siguientes sucesiones correspondientes a las clases:

$$E(A) \in M^{(\neq 0)}(9, 2t), \text{ para } 9 \leq t \leq \frac{a(9)}{2}.$$

$S(A) = 18$		$S(A) = 20$		$S(A) = 22$			
1	222222222	1	332222222	1	333322222	36	633331111
2	322222221	2	333222221	2	333332221	37	642222211
3	332222211	3	333322211	3	333333211	38	643222111
4	333222111	4	333332111	4	433222222	39	643321111
5	333321111	5	422222222	5	433322221	40	644221111
6	422222211	6	432222221	6	433332211	41	644311111
7	432222111	7	433222211	7	433333111	42	652222111
8	433221111	8	433322111	8	442222222	43	653221111
9	433311111	9	433331111	9	443222221	44	653311111
10	442221111	10	442222211	10	443322211	45	662221111
11	443211111	11	443222111	11	443332111	46	722222221
12	444111111	12	443321111	12	444222211	47	732222211
13	522222111	13	444221111	13	444322111	48	733222111
14	532221111	14	444311111	14	444331111	49	733321111
15	533211111	15	522222221	15	444421111	50	742222111
16	542211111	16	532222211	16	532222222	51	743221111
17	543111111	17	533222111	17	533222221	52	743311111
18	552111111	18	533321111	18	533322211	53	752221111
19	622221111	19	542222111	19	533332111		
20	632211111	20	543221111	20	542222221		
21	633111111	21	543311111	21	543222211		
22	642111111	22	544211111	22	543322111		
23	722211111	23	552221111	23	543331111		
24	732111111	24	553211111	24	544222111		
		25	622222211	25	544321111		
		26	632222111	26	544411111		
		27	633221111	27	552222211		
		28	633311111	28	553222111		
		29	642221111	29	553321111		
		30	643211111	30	554221111		
		31	652211111	31	554311111		
		32	722222111	32	622222222		
		33	732221111	33	632222221		
		34	733211111	34	633222211		
		35	742211111	35	633322111		

$S(A) = 24$									
1	333333222	16	533322222	31	553332111	46	644222211	61	733322211
2	333333321	17	533332221	32	554222211	47	644322111	62	733332111
3	433332222	18	533333211	33	554322111	48	644331111	63	742222221
4	433333221	19	543222222	34	554331111	49	644421111	64	743222211
5	433333311	20	543322221	35	554421111	50	652222221	65	743322111
6	443322222	21	543332211	36	555222111	51	653222211	66	743331111
7	443332221	22	543333111	37	555321111	52	653322111	67	744222111
8	443333211	23	544222221	38	633222222	53	653331111	68	744321111
9	444222222	24	544322211	39	633322221	54	654222111	69	752222211
10	444322221	25	544332111	40	633332211	55	654321111	70	753222111
11	444332211	26	544422111	41	633333111	56	662222211	71	753321111
12	444333111	27	544431111	42	642222222	57	663222111	72	762222111
13	444422211	28	552222222	43	643222221	58	663321111		
14	444432111	29	553222221	44	643322211	59	732222222		
15	444441111	30	553322211	45	643332111	60	733222221		

$S(A) = 26$									
1	333333332	20	544332221	39	555422111	58	654222221	77	743322221
2	433333322	21	544333211	40	555431111	59	654322211	78	743332211
3	433333331	22	544422221	41	633332222	60	654332111	79	743333111
4	443333222	23	544432211	42	633333221	61	654422111	80	744222221
5	443333321	24	544433111	43	633333311	62	654431111	81	744322211
6	444332222	25	544442111	44	643322222	63	655222211	82	744332111
7	444333221	26	553322222	45	643332221	64	655322111	83	744422111
8	444333311	27	553332221	46	643333211	65	655331111	84	744431111
9	444422222	28	553333211	47	644222222	66	662222222	85	752222222
10	444432221	29	554222222	48	644322221	67	663222221	86	753222221
11	444433211	30	554322221	49	644332211	68	663322211	87	753322211
12	444442211	31	554332211	50	644333111	69	663332111	88	753332111
13	444443111	32	554333111	51	644422211	70	664222211	89	754222211
14	533333222	33	554422211	52	644432111	71	664322111	90	754322111
15	533333321	34	554432111	53	644441111	72	664331111	91	754331111
16	543332222	35	554441111	54	653222222	73	733322222	92	762222221
17	543333221	36	555222221	55	653322221	74	733332221	93	763222211
18	543333311	37	555322211	56	653332211	75	733333211	94	763322111
19	544322222	38	555332111	57	653333111	76	743222222	95	772222211

$S(A) = 28$									
1	433333333	25	554333221	49	644422222	73	663333211	97	753332221
2	443333332	26	554333311	50	644433221	74	664222222	98	753333211
3	444333322	27	554422222	51	644433211	75	664322221	99	754222222
4	444333331	28	554432221	52	644442211	76	664332211	100	754322221
5	444433222	29	554433211	53	644443111	77	664333111	101	754332211
6	444433321	30	554442211	54	653332222	78	664422211	102	754333111
7	444442222	31	554443111	55	653333221	79	664432111	103	754422211
8	444443221	32	555322222	56	653333311	80	664441111	104	754432111
9	444443311	33	555332221	57	654322222	81	665222221	105	754441111
10	444444211	34	555333211	58	654332221	82	665322211	106	755222221
11	533333332	35	555422221	59	654333211	83	665332111	107	755322211
12	543333322	36	555432211	60	654422221	84	733333222	108	755332111
13	543333331	37	555433111	61	654432211	85	733333321	109	763222222
14	544333222	38	555442111	62	654433111	86	743332222	110	763322221
15	544333321	39	555522211	63	654442111	87	743333221	111	763332211
16	544432222	40	555532111	64	655222222	88	743333311	112	763333111
17	544433221	41	555541111	65	655322221	89	744322222	113	764222221
18	544433311	42	633333322	66	655332211	90	744332221	114	764322211
19	544442221	43	633333331	67	655333111	91	744333211	115	764332111
20	544443211	44	643333222	68	655422211	92	744422221	116	772222222
21	544444111	45	643333321	69	655432111	93	744432211	117	773222221
22	553333222	46	644332222	70	655441111	94	744433111	118	773322211
23	553333321	47	644333221	71	663322222	95	744442111		
24	554332222	48	644333311	72	663332221	96	753322222		

$S(A) = 30$									
1	444333333	29	555433311	57	654443211	85	665432211	113	755322222
2	444433332	30	555442221	58	654444111	86	665433111	114	755332221
3	444443322	31	555443211	59	655332222	87	665442111	115	755333211
4	444443331	32	555444111	60	655333221	88	666222222	116	755422221
5	444444222	33	555522222	61	655333311	89	666322221	117	755432211
6	444444321	34	555532221	62	655422222	90	666332211	118	755433111
7	444444411	35	555533211	63	655432221	91	666333111	119	755442111
8	543333333	36	555542211	64	655433211	92	733333332	120	763332222
9	544333332	37	555543111	65	655442211	93	743333322	121	763333221
10	544433322	38	555552111	66	655443111	94	743333331	122	763333311
11	544433331	39	633333333	67	655522221	95	744333222	123	764322222
12	544443222	40	643333332	68	655532211	96	744333321	124	764332221
13	544443321	41	644333322	69	655533111	97	744432222	125	764333211
14	544444221	42	644333331	70	655542111	98	744433221	126	764422221
15	544444311	43	644433222	71	663333222	99	744433311	127	764432211
16	553333332	44	644433321	72	663333321	100	744442221	128	764433111
17	554333322	45	644442222	73	664332222	101	744443211	129	764442111
18	554333331	46	644443221	74	664333221	102	744444111	130	765222222
19	554433222	47	644443311	75	664333311	103	753333222	131	765322221
20	554433321	48	644444211	76	664422222	104	753333321	132	765332211
21	554442222	49	653333322	77	664432221	105	754332222	133	765333111
22	554443221	50	653333331	78	664433211	106	754333221	134	773322222
23	554443311	51	654333222	79	664442211	107	754333311	135	773332221
24	554444211	52	654333321	80	664443111	108	754422222	136	773333211
25	555333222	53	654432222	81	665322222	109	754432221	137	774222222
26	555333321	54	654433221	82	665332221	110	754433211	138	774322221
27	555432222	55	654433311	83	665333211	111	754442211	139	774332211
28	555433221	56	654442221	84	665422221	112	754443111		

$S(A) = 32$									
1	444443333	33	644333333	65	664333322	97	744433331	129	764433221
2	444444332	34	644433332	66	664333331	98	744443222	130	764433311
3	444444422	35	644443322	67	664433222	99	744443321	131	764442221
4	444444431	36	644443331	68	664433321	100	744444221	132	764443211
5	544433333	37	644444222	69	664442222	101	744444311	133	764444111
6	544443332	38	644444321	70	664443221	102	753333332	134	765332222
7	544444322	39	644444411	71	664443311	103	754333322	135	765333221
8	544444331	40	653333333	72	664444211	104	754333331	136	765333311
9	544444421	41	654333332	73	665333222	105	754433222	137	765422222
10	554333333	42	654433322	74	665333321	106	754433321	138	765432221
11	554433332	43	654433331	75	665432222	107	754442222	139	765433211
12	554443322	44	654443222	76	665433221	108	754443221	140	765442211
13	554443331	45	654443321	77	665433311	109	754443311	141	765443111
14	554444222	46	654444221	78	665442221	110	754444211	142	766322222
15	554444321	47	654444311	79	665443211	111	755333222	143	766332221
16	554444411	48	655333322	80	665444111	112	755333321	144	766333211
17	555333332	49	655333331	81	665522222	113	755432222	145	773333222
18	555433322	50	655433222	82	665532221	114	755433221	146	773333321
19	555433331	51	655433321	83	665533211	115	755433311	147	774332222
20	555443222	52	655442222	84	665542211	116	755442221	148	774333221
21	555443321	53	655443221	85	665543111	117	755443211	149	774333311
22	555444221	54	655443311	86	666332222	118	755444111	150	774422222
23	555444311	55	655444211	87	666333221	119	755522222	151	774432221
24	555533222	56	655532222	88	666333311	120	755532221	152	774433211
25	555533321	57	655533221	89	666422222	121	755533211	153	774442211
26	555542222	58	655533311	90	666432221	122	755542211	154	775322222
27	555543221	59	655542221	91	666433211	123	755543111	155	775332221
28	555543311	60	655543211	92	666442211	124	763333322	156	775333211
29	555544211	61	655544111	93	666443111	125	763333331		
30	555552221	62	655552211	94	743333333	126	764333222		
31	555553211	63	655553111	95	744333332	127	764333321		
32	555554111	64	663333332	96	744433322	128	764432222		

$S(A) = 34$									
1	444444433	36	655433332	71	665543311	106	755443321	141	766333321
2	444444442	37	655443322	72	665544211	107	755444221	142	766432222
3	544444333	38	655443331	73	665552221	108	755444311	143	766433221
4	544444432	39	655444222	74	665553211	109	755533222	144	766433311
5	544444441	40	655444321	75	665554111	110	755533321	145	766442221
6	554443333	41	655444411	76	666333322	111	755542222	146	766443211
7	554444332	42	655533322	77	666333331	112	755543221	147	773333332
8	554444422	43	655533331	78	666433222	113	755543311	148	774333322
9	554444431	44	655543222	79	666433321	114	755544211	149	774333331
10	555433333	45	655543321	80	666442222	115	755552221	150	774433222
11	555443332	46	655544221	81	666443221	116	755553211	151	774433321
12	555444322	47	655544311	82	666443311	117	755554111	152	774442222
13	555444331	48	655552222	83	666444211	118	763333333	153	774443221
14	555444421	49	655553221	84	666532222	119	764333332	154	774443311
15	555533332	50	655553311	85	666833221	120	764433322	155	774444211
16	555543322	51	655554211	86	666533311	121	764433331	156	775333222
17	555543331	52	655555111	87	666542221	122	764443222	157	775333321
18	555544222	53	664333333	88	666543211	123	764443321	158	775432222
19	555544321	54	664433332	89	666544111	124	764444221	159	775433221
20	555544411	55	664443322	90	744433333	125	764444311	160	775433311
21	555553222	56	664443331	91	744443332	126	765333322	161	775442221
22	555553321	57	664444222	92	744444322	127	765333331	162	775443211
23	555554221	58	664444321	93	744444331	128	765433222	163	776332222
24	555554311	59	664444411	94	744444421	129	765433321	164	776333221
25	555555211	60	665333332	95	754333333	130	765442222	165	776333311
26	644443333	61	665433322	96	754433332	131	765443221		
27	644444332	62	665433331	97	754443322	132	765443311		
28	644444422	63	665443222	98	754443331	133	765444211		
29	644444431	64	665443321	99	754444222	134	765532222		
30	654433333	65	665444221	100	754444321	135	765533221		
31	654443332	66	665444311	101	754444411	136	765533311		
32	654444322	67	665533222	102	755333332	137	765542221		
33	654444331	68	665533321	103	755433322	138	765543211		
34	654444421	69	665542222	104	755433331	139	765544111		
35	655333333	70	665543221	105	755443222	140	766333222		

$S(A) = 36$									
1	444444444	36	655554321	71	666544221	106	755555211	141	766543311
2	544444443	37	655554411	72	666544311	107	764433333	142	766544211
3	554444433	38	655555221	73	666552222	108	764443332	143	774333333
4	554444442	39	655555311	74	666553221	109	764444322	144	774433332
5	555444333	40	664443333	75	666553311	110	764444331	145	774443322
6	555444432	41	664444332	76	666554211	111	764444421	146	774443331
7	555444441	42	664444422	77	666555111	112	765333333	147	774444222
8	555543333	43	664444431	78	666633222	113	765433332	148	774444321
9	555544332	44	665433333	79	666633321	114	765443322	149	774444411
10	555544422	45	665443332	80	666642222	115	765443331	150	775333332
11	555544431	46	665444322	81	666643221	116	765444222	151	775433322
12	555553332	47	665444331	82	666643311	117	765444321	152	775433331
13	555554322	48	665444421	83	666644211	118	765444411	153	775443222
14	555554331	49	665533332	84	744444333	119	765533322	154	775443321
15	555554421	50	665543322	85	744444432	120	765533331	155	775444221
16	555555222	51	665543331	86	744444441	121	765543222	156	775444311
17	555555321	52	665544222	87	754443333	122	765543321	157	775533222
18	555555411	53	665544321	88	754444332	123	765544221	158	775533321
19	644444433	54	665544411	89	754444422	124	765544311	159	775542222
20	644444442	55	665553222	90	754444431	125	765552222	160	775543221
21	654444333	56	665553321	91	755433333	126	765553221	161	775543311
22	654444432	57	665554221	92	755443332	127	765553311	162	775544211
23	654444441	58	665554311	93	755444322	128	765554211	163	776333322
24	655443333	59	665555211	94	755444331	129	765555111	164	776333331
25	655444332	60	666333333	95	755444421	130	766333332	165	776433222
26	655444422	61	666433332	96	755533332	131	766433322	166	776433321
27	655444431	62	666443322	97	755543322	132	766433331	167	776442222
28	655533333	63	666443331	98	755543331	133	766443222	168	776443221
29	655543332	64	666444222	99	755544222	134	766443321	169	776443311
30	655544322	65	666444321	100	755544321	135	766444221	170	777333222
31	655544331	66	666444411	101	755544411	136	766444311	171	777333321
32	655544421	67	666533322	102	755553222	137	766533222		
33	655553322	68	666533331	103	755553321	138	766533321		
34	655553331	69	666543222	104	755554221	139	766542222		
35	655554222	70	666543321	105	755554311	140	766543221		

6. Otro método para determinar $|M(n)|$

Por las tablas indicadas en la sección anterior tenemos:

$n=2$			
$2t$	$\lvert M(2,2t)\rvert$	$2t$	$\lvert M(2,2t)\rvert$
0	1	2	1

$n=3$			
$2t$	$\lvert M(3,2t)\rvert$	$2t$	$\lvert M(3,2t)\rvert$
0	1	6	1
2	1	4	1

Luego $|M(2)| = 2, \;\; |M(3)| = 4.$

$n=4$			
$2t$	$\lvert M^{(0)}(4,2t)\rvert$	$\lvert M^{(\neq 0)}(4,2t)\rvert$	$\lvert M(4,2t)\rvert$
0	1	0	1
2	1	0	1
4	1	1	2
TOTAL	3	1	4
6	1	2	3

Luego por el Teorema 2.1, (2.13) tenemos $|M(4)| = 2 \times 4 + 3 = 11$.

$n=5$			
	$\lvert M^{(0)}(5,2t)\rvert$	$\lvert M^{(\neq 0)}(5,2t)\rvert$	$\lvert M(5,2t)\rvert$
0	1	0	1
2	1	0	1
4	2	0	2
6	3	1	4
8	2	3	5
TOTAL	9	4	13
10	1	4	5

Luego por el Teorema 2.1, (2.13): $|M(5)| = 2 \times 13 + 5 = 31$.

Teorema 6.1 *Sea* $n \geq 6$
Primer caso: $\underline{a(n) \text{ es impar.}}$
Si n *es impar entonces*

$$|M(n)| = 2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M(n-1,2t)| + \sum_{t=\frac{n+1}{2}}^{n-1} |P(2t-n)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M(n-1,2t-2(n-1)))|\right) +$$

$$2\left(1 + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|\right).$$

Si n *es par entonces*

$$|M(n)| = 2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M(n-1,2t)| + \sum_{t=\frac{n}{2}}^{n-1} |P(2t-n)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M(n-1,2t-2(n-1))|\right) +$$

$$2\left(1 + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)-1}{2}} |M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|\right).$$

Segundo caso: $\underline{a(n) \text{ es par.}}$
Si n *es impar entonces*

$$|M(n)| = 2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)}{2}} |M(n-1,2t)| + \sum_{t=\frac{n+1}{2}}^{n-1} |P(2t-n)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)}{2}} |M(n-1,2t-2(n-1))|\right) +$$

$$2\left(1+\sum_{t=n}^{\frac{a(n)}{2}-1}|M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|\right)+|M_{(3)}^{(n-2)}(n,a(n))|.$$

Si n *es par entonces*

$$|M(n)| = 2\left(\sum_{t=0}^{\frac{a(n)}{2}}|M(n-1,2t)| + +\sum_{t=\frac{n}{2}}^{n-1}|P(2t-n)| + \sum_{t=n}^{\frac{a(n)}{2}}|M(n-1,2t-2(n-1))|\right)+$$

$$2\left(1+\sum_{t=n}^{\frac{a(n)}{2}}|M_{(3)}^{(n-2)}(n,2t)|\right)+|M_{(3)}^{(n-2)}(n,a(n))|.$$

En las siguientes tablas:

- en la columna C_1 ponemos los números $|M(n-1,2t)|$, para $0\leq t\leq \frac{a(n)-1}{2}$ si $a(n)$ es impar y $|M(n-1,2t)|$, para $0\leq t\leq \frac{a(n)}{2}$ si $a(n)$ es par,
- en la columna C_2 fila $2t$ ponemos los números $|P(2t-n)|$ para $\frac{n+1}{2}\leq t\leq n-1$ si n es impar y $|P(2t-n)|$ para $\frac{n}{2}\leq t\leq n-1$ si n es par,
- en la columna C_3 fila $2t$ ponemos los números $|M(n-1,2t-2(n-1))|$ para $n\leq t\leq \frac{a(n)-1}{2}$ si $a(n)$ es impar y para $n\leq t\leq \frac{a(n)}{2}$ si $a(n)$ es par,
- en la columna C_4 y fila $2n$ ponemos el número 1 que corresponde a $|E(T(n,2n))|$,
- en la columna C_5 fila $2t$ ponemos los números $|M_3^{(n-2)}(n,2t)|$, para $n\leq t\leq \frac{a(n)-1}{2}$ si $a(n)$ es impar y para $n\leq t\leq \frac{a(n)}{2}$ si $a(n)$ es par, que fueron determinados por A. Claverie (ver sección 2).

Por el Lema 2.9 sabemos que $|M(n,2t)| = |M(n,n^2-n-2t)|$ para $0\leq t\leq a(n)$. Luego si $2t+2q=n^2-n$ entonces $|M(n,2t)| = |M(n,n^2-n-2t)| = |M(n,2q)|$.
Observemos que si $n\geq 6$, $a(n)$ es par y $t=\frac{a(n)}{2}$ entonces los valores que van en la columna C_1 fila $2t=a(n)$ y columna C_3 fila $2t=a(n)$ son los mismos, pues

$$2\left(\frac{a(n)}{2}+\frac{a(n)-2(n-1)}{2}\right) = a(n)+a(n)-2(n-1) = (n-1)^2-(n-1)$$

luego $|M(n-1,a(n))| = |M(n-1,a(n)-2(n-1))|$.

$n=6$						
	$\lvert M^{(0)}(6,2t)\rvert$	$\lvert M^{(\neq 0)}(6,2t)\rvert$				
$2t$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	$\lvert M(6,2t)\rvert$
0	1					1
2	1					1
4	2					2
6	4	1				5
8	5	2				7
10	5	5				10
12	5		1	1	5	12
14	4		2		7	13
TOTAL	27	8	3	1	12	51

Tabla 6.6

Luego $|M(6)| = 2 \times 51 = 102$.
Teniendo en cuenta los valores de $|M^{(0)}(7, 2t)| = |M(6, 2t)|$ para $0 \leq t \leq 10$, indicados en la tabla 5.6 y los resultados computacionales tenemos:

$n = 7$						
	$\|M^{(0)}(7,2t)\|$	$\|M^{(\neq 0)}(7,2t)\|$				
$2t$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	$\|M(7,2t)\|$
0	1					1
2	1					1
4	2					2
6	5					5
8	7	1				8
10	10	3				13
12	12	7				19
14	13		1	1	9	24
16	13		2		13	28
18	12		5		17	34
20	10		7		19	36
TOTAL	86	11	15	1	58	171

Tabla 6.7

Luego por el Teorema 6.1: $|M(7)| = 2 \times 171 = 342$.
Teniendo en cuenta los números indicados en la tabla 5.7 y los resultados computacionales tenemos:

$n = 8$						
	$\|M^{(0)}(8,2t)\|$	$\|M^{(\neq 0)}(8,2t)\|$				
$2t$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	$\|M(8,2t)\|$
0	1					1
2	1					1
4	2					2
6	5					5
8	8	1				9
10	13	2				15
12	19	5				24
14	24	11				35
16	28		1	1	15	45
18	34		2		23	59
20	36		5		33	74
22	36		8		41	85
24	34		13		50	97
26	28		19		55	102
TOTAL	269	19	48	1	217	554
28	24		24		57	105

Tabla 6.8

Luego por el Teorema 6.1: $|M(8)| = (2 \times (554 + 24)) + 57 = 1.213$.
Teniendo en cuenta los números indicados en la tabla 5.8 y los resultados computacionales tenemos:

$n = 9$						
	$\lvert M^{(0)}(9,2t)\rvert$	$\lvert M^{(\neq 0)}(9,2t)\rvert$				
$2t$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	$\lvert M(9,2t)\rvert$
0	1					1
2	1					1
4	2					2
6	5					5
8	9					9
10	15	1				16
12	24	3				27
14	35	7				42
16	45	15				60
18	59		1	1	23	84
20	74		2		35	111
22	85		5		53	143
24	97		9		72	178
26	102		15		95	212
28	105		24		118	247
30	102		35		139	276
32	97		45		156	298
34	85		59		165	309
TOTAL	943	26	195	1	856	2.021
36	74		74		171	319

Tabla 6.9

Luego por el Teorema 6.1: $|M(9)| = (2 \times (2.021 + 74)) + 171 = 4.361$.

Teniendo en cuenta los números indicados en la tabla 5.9 y los resultados computacionales tenemos:

$n=10$						
	$\vert M^{(0)}(10,2t)\vert$	$\vert M^{(\neq 0)}(10,2t)\vert$				
$2t$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	$\vert M(10,2t)\vert$
0	1					1
2	1					1
4	2					2
6	5					5
8	9					9
10	16	1				17
12	27	2				29
14	42	5				47
16	60	11				71
18	84	22				106
20	111		1	1	34	147
22	143		2		53	198
24	178		5		82	265
26	212		9		115	336
28	247		16		160	423
30	276		27		212	515
32	298		42		269	609
34	309		60		327	696
36	319		84		386	789
38	309		111		437	857
40	298		143		484	925
42	276		178		514	968
44	247		212		533	992
TOTAL	3.470	41	890	1	3.606	8.008

Tabla 6.10

Luego por el Teorema 6.1: $|M(10)| = 2 \times 8.008 = 16.016$.

Teniendo en cuenta los números indicados en la tabla 5.10 y los resultados computacionales tenemos:

$n = 11$						
	$\|M^{(0)}(11, 2t)\|$	$\|M^{(\neq 0)}(11, 2t)\|$				
$2t$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	$\|M(11, 2t)\|$
0	1					1
2	1					1
4	2					2
6	5					5
8	9					9
10	17					17
12	29	1				30
14	47	3				50
16	71	7				78
18	106	15				121
20	147	30				177
22	198		1	1	48	248
24	265		2		75	342
26	336		5		118	459
28	423		9		170	602
30	515		17		244	776
32	609		29		336	974
34	696		47		445	1.188
36	789		71		576	1.436
38	857		106		719	1.682
40	925		147		874	1.946
42	968		198		1.031	2.197
44	992		265		1.196	2.453
46	992		336		1.341	2.669
48	968		423		1.480	2.871
50	925		515		1.585	3.025
52	857		609		1.661	3.127
54	789		696		1.703	3.188
TOTAL	12.539	56	3.476	1	13.602	29.674

Tabla 6.11

Luego por el Teorema 6.1: $|M(11)| = 2 \times 29.674 = 59.348$.

Teniendo en cuenta los números indicados en la tabla 5.11 y los resultados computacionales tenemos:

$n = 12$						
	$\lvert M^{(0)}(12,2t)\rvert$	$\lvert M^{(\neq 0)}(12,2t)\rvert$				
$2t$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	$\lvert M(12,2t)\rvert$
0	1					1
2	1					1
4	2					2
6	5					5
8	9					9
10	17					17
12	30	1				31
14	50	2				52
16	78	5				83
18	121	11				132
20	177	22				199
22	248	42				290
24	342		1	1	68	412
26	459		2		106	567
28	602		5		167	774
30	776		9		244	1.029
32	974		17		356	1.347
34	1.188		30		500	1.718
36	1.436		50		686	2.172
38	1.682		78		913	2.673
40	1.946		121		1.189	3.256
42	2.197		177		1.508	3.882
44	2.453		248		1.871	4.572
46	2.669		342		2.270	5.281
48	2.871		459		2.705	6.035
50	3.025		602		3.152	6.779
52	3.127		776		3.614	7.517
54	3.188		974		4.064	8.226
56	3.188		1.188		4.476	8.852
58	3.127		1.436		4.854	9.417
60	3.025		1.682		5.160	9.867
62	2.871		1.946		5.397	10.214
64	2.669		2.197		5.530	10.396
TOTAL	44.554	83	12.340	1	48.830	105.808
66	2.453		2.453		5.595	10.501

Tabla 6.12

Luego por el Teorema 6.1: $|M(12)| = (2 \times (105.808 + 2.453)) + 5.595 = 222.117.$

Teniendo en cuenta los números indicados en la tabla 5.12 y los resultados computacionales tenemos:

$n=13$						
	$\lvert M^{(0)}(13,2t)\rvert$	$\lvert M^{(\neq 0)}(13,2t)\rvert$				
$2t$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	$\lvert M(13,2t)\rvert$
0	1					1
2	1					1
4	2					2
6	5					5
8	9					9
10	17					17
12	31					31
14	52	1				53
16	83	3				86
18	132	7				139
20	199	15				214
22	290	30				320
24	412	56				468
26	567		1	1	92	661
28	774		2		144	920
30	1.029		5		228	1.262
32	1.347		9		336	1.692
34	1.718		17		496	2.231
36	2.172		31		709	2.912
38	2.673		52		987	3.712
40	3.256		83		1.348	4.687
42	3.882		132		1.800	5.814
44	4.572		199		2.357	7.128
46	5.281		290		3.018	8.589
48	6.035		412		3.802	10.249
50	6.779		567		4.689	12.035
52	7.517		774		5.711	14.002
54	8.226		1.029		6.818	16.073
56	8.852		1.347		8.041	18.240
58	9.417		1.718		9.315	20.450
60	9.867		2.172		10.647	22.686
62	10.214		2.673		11.978	24.865
64	10.396		3.256		13.287	26.939
66	10.501		3.882		14.534	28.917
SUBTOTAL	116.309	112	18.651	1	100.337	235.410

$n = 13$ (continuación)						
	$\lvert M^{(0)}(13,2t)\rvert$	$\lvert M^{(\neq 0)}(13,2t)\rvert$				
$2t$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	$\lvert M(13,2t)\rvert$
68	10.396		4.572		15.662	30.630
70	10.214		5.281		16.658	32.153
72	9.867		6.035		17.470	33.372
74	9.417		6.779		18.079	34.275
76	8.852		7.517		18.431	34.800
TOTAL	165.055	112	48.835	1	186.637	400.640
78	8.226		8.226		18.583	35.035

Tabla 6.13

Luego por el Teorema 6.1:

$$|M(13)| = (2 \times (400.640 + 8.226)) + 18.583 = 836.315.$$

Teniendo en cuenta los números indicados en la tabla 5.13 y los resultados computacionales tenemos:

$n = 14$						
	$\lvert M^{(0)}(14,2t)\rvert$	$\lvert M^{(\neq 0)}(14,2t)\rvert$				
$2t$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	$\lvert M(14,2t)\rvert$
0	1					1
2	1					1
4	2					2
6	5					5
8	9					9
10	17					17
12	31					31
14	53	1				54
16	86	2				88
18	139	5				144
20	214	11				225
22	320	22				342
24	468	42				510
26	661	77				738
28	920		1	1	125	1.047
30	1.262		2		196	1.460
32	1.692		5		309	2.006
34	2.231		9		456	2.696
36	2.912		17		678	3.607
38	3.712		31		977	4.720
40	4.687		53		1.376	6.116
SUBTOTAL	19.423	160	118	1	4.117	23.819

$n = 14$ (continuación)						
	$\lvert M^{(0)}(14,2t)\rvert$	$\lvert M^{(\neq 0)}(14,2t)\rvert$				
$2t$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	$\lvert M(14,2t)\rvert$
42	5.814		86		1.904	7.804
44	7.128		139		2.591	9.858
46	8.589		214		3.455	12.258
48	10.249		320		4.531	15.100
50	12.035		468		5.849	18.352
52	14.002		661		7.421	22.084
54	16.073		920		9.280	26.273
56	18.240		1.262		11.444	30.946
58	20.450		1.692		13.908	36.050
60	22.686		2.231		16.710	41.627
62	24.865		2.912		19.815	47.592
64	26.939		3.712		23.158	53.809
66	28.917		4.687		26.800	60.404
68	30.630		5.814		30.594	67.038
70	32.153		7.128		34.551	73.832
72	33.372		8.589		38.513	80.474
74	34.275		10.249		42.522	86.046
76	34.800		12.035		46.319	93.154
78	35.035		14.002		49.997	99.034
80	34.800		16.073		53.300	104.173
82	34.275		18.240		56.251	108.766
84	33.372		20.450		58.722	112.544
86	32.153		22.686		60.647	115.486
88	30.630		24.865		61.930	117.425
90	28.917		26.939		62.622	118.478
TOTAL	629.822	160	206.492	1	746.951	1.583.426

Tabla 6.14

Luego por el Teorema 6.1: $|M(14)| = 2 \times 1.583.426 = 3.166.852$.
Este fue el primer camino seguido. La observación de las tablas precedentes motivaron la demostración de diversos resultados que nos condujeron a la demostración del Teorema 2.2.

7. Número de k-particiones de un entero $m > 0$

Dado un número entero m, $m > 0$ se denomina k-partición de m, donde $1 \leq k \leq m$, a toda sucesión de números enteros $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tales que $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = m$.
Representamos con $P(m,k)$ el conjunto de las k-particiones de m y pusimos por definición $|P(m,k)| = 0$ si $m \leq k$. Se conocen distintos modos de calcular $|P(m,k)|$, ver por ejemplo [6], [8], [1]. Designemos con $P(m)$ el conjunto de las particiones de un entero $m \geq 0$. Por definición $|P(0)| = 1$. Es bien conocido que $|P(m,m)| = 1 = |P(m,1)|$.

Vamos a indicar la tabla de $|P(m,k)|$ para $0 \leq m \leq 20$ y $1 \leq k \leq m$, siguiendo el método indicado en [1]. Es claro que $|P(1)| = 1, |P(2,1)| = 1 = |P(2,2)|$ y por lo tanto $|P(2)| = 2$.

$k\backslash m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		*	1	1	2	2	3	3	4	4	5
3			*	1	1	2	3	4	5	7	8
4				*	1	1	2	3	5	6	9
5					*	1	1	2	3	5	7
6						*	1	1	2	3	5
7							*	1	1	2	3
8								*	1	1	2
9									*	1	1
10										*	1
11											*
12											
13											
14											
15											
16											
17											
18											
19											
20											
$\lvert P(m)\rvert$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

$k\backslash m$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10
3	10	12	14	16	19	21	24	27	30	33
4	11	15	18	23	27	34	39	47	54	64
5	10	13	18	23	30	37	47	57	70	84
6	7	11	14	20	26	35	44	58	71	90
7	5	7	11	15	21	28	38	49	65	82
8	3	5	7	11	15	22	29	40	52	70
9	2	3	5	7	11	15	22	30	41	54
10	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42
11	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30
12	*	1	1	2	3	5	7	11	15	22
13		*	1	1	2	3	5	7	11	15
14			*	1	1	2	3	5	7	11
15				*	1	1	2	3	5	7
16					*	1	1	2	3	5
17						*	1	1	2	3
18							*	1	1	2
19								*	1	1
20									*	1
$\|P(m)\|$	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627

Estas tablas se construyen del siguiente modo: si se conocen los números $|P(t)|$ para $t < m$, ponemos el número

$$\left|P\left(\left[\frac{m}{2}\right]\right)\right| = \begin{cases} \text{en la columna } m \text{ y fila } \frac{m}{2} \text{ si } m \text{ es par} \\[2ex] \text{en la columna } m \text{ y fila } \left[\frac{m}{2}\right]+1 \text{ si } m \text{ es impar} \end{cases}$$

y luego debajo de él los números

$$\left|P\left(\left[\frac{m}{2}\right]-1\right)\right|, \left|P\left(\left[\frac{m}{2}\right]-2\right)\right|, \ldots, |P(0)|$$

Los demás números de la columna m se calculan del siguiente modo:

$$\begin{cases} \text{Si } m \text{ es par } |P(m,k)| = \sum\limits_{j=1}^{k} |P(m-k,j)|, \text{ para } 1 \le k < \frac{m}{2}, \\[2ex] \text{si } m \text{ es impar } |P(m,k)| = \sum\limits_{j=1}^{k} |P(m-k,j)|, \text{ para } 1 \le k < \left[\frac{m}{2}\right]+1. \end{cases}$$

Luego si $m \geq 4$ y m es par tenemos:

$$|P(m)| = \left|P\left(\frac{m}{2}\right)\right| + \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} \left|P\left(\frac{m}{2}-j\right)\right| + \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} |P(m,k)|.$$

Y si $m \geq 3$ y m es impar tenemos:

$$|P(m)| = \left|P\left(\left[\frac{m}{2}\right]\right)\right| + \sum_{j=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left|P\left(\left[\frac{m}{2}\right]-j\right)\right| + \sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} |P(m,k)|.$$

8. Otros Resultados

Sea $M_{n,1}(\mathbf{2})$ el conjunto de todas las matrices simétricas (a_{ij}), $n \times n$, $n \in \mathbb{N}$, cuyos elementos pertenecen al álgebra de Boole $\mathbf{2} = \{0,1\}$ y tales que $a_{ii} = 1$ para todo i. A. Petrovich en su Tesis Doctoral [19] a los efectos de determinar la cantidad de cierto tipo de álgebras de De Morgan monádicas simples finitas no isomorfas entre sí, definió la siguiente relación de equivalencia $\equiv^{(P)}$, sobre el conjunto $M_{n,1}(\mathbf{2})$:

Si $A, B \in M_{n,1}(\mathbf{2})$ entonces $A \equiv^{(P)} B$ si y sólo si la matriz B se obtiene a partir de A aplicando a A la siguiente operación un número finito de veces: *si se permuta la fila i-ésima con la fila j-ésima entonces también se permuta la columna i-ésima con la columna j-ésima,* y planteó el problema de determinar el cardinal del conjunto cociente:

$$M_{n,1}(\mathbf{2})/\equiv^{(P)} .$$

Si consideramos el conjunto $M_n^s(\mathbf{2})$ la definición de Petrovich es equivalente a la siguiente (ver sección 2):
Si $A, B \in M_n^s(\mathbf{2})$ entonces $A \equiv B$ si y solo si:

$$E^{(n)}_{h_tk_t} \times \cdots \times E^{(n)}_{h_1k_1} \times A \times E^{(n)}_{h_1k_1} \times \cdots \times E^{(n)}_{h_tk_t} = B.$$

Si $A = (a_{ij}) \in M_n^s(\mathbf{2})$ sabemos que:

$$0 \leq F_i(A) \leq n-1, \text{ para } 1 \leq i \leq n. \tag{8.1}$$

Observemos que si $A \in M_n^s(\mathbf{2})$ entonces:

$$E^{(n)}_{hk} \times A \times E^{(n)}_{hk} \sim A, \tag{8.2}$$

donde $\sim$ es la relación definida en la sección 2.
Si $A = (a_{ij}) \in M_n^s(\mathbf{2})$ sea $C_i(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}$, $1 \leq i \leq n$. Es claro que $F_i(A) = C_i(A)$ para $1 \leq i \leq n$.

Lema 8.1 *Las relaciones de equivalencia $\equiv$ y $\sim$ coinciden.*

Dem. Sean $A, B \in M_n^s(\mathbf{2})$ tales que $A \equiv B$, esto es

$$E^{(n)}_{h_tk_t} \times \cdots \times E^{(n)}_{h_1k_1} \times A \times E^{(n)}_{h_1k_1} \times \cdots \times E^{(n)}_{h_tk_t} = B.$$

Sean $H = E^{(n)}_{h_tk_t} \times \cdots \times E^{(n)}_{h_1k_1}$ y $J = E^{(n)}_{h_1k_1} \times \cdots \times E^{(n)}_{h_tk_t}$, luego $H \times A \times J = B$.
Por la ecuación (8.2) tenemos

$$E^{(n)}_{h_1k_1} \times A \times E^{(n)}_{h_1k_1} \sim A$$

luego

$$E^{(n)}_{h_2k_2} \times (E^{(n)}_{h_1k_1} \times A \times E^{(n)}_{h_1k_1}) \times E^{(n)}_{h_2k_2} \sim E^{(n)}_{h_1k_1} \times A \times E^{(n)}_{h_1k_1} \sim A.$$

Aplicando en forma reiterada la ecuación (8.2) llegamos a:

$$B = E^{(n)}_{h_tk_t} \times \cdots \times E^{(n)}_{h_1k_1} \times A \times E^{(n)}_{h_1k_1} \times \cdots \times E^{(n)}_{h_tk_t} \sim A.$$

Supongamos que $A \sim B$ esto es $F_1(A), F_2(A)\ldots, F_n(A)$ es una permutación de $F_1(B), F_2(B), \ldots, F_n(B)$. Supongamos que

$$F_1(A) = F_{i_1}(B), F_2(A) = F_{i_2}(B), \ldots, F_n(A) = F_{i_n}(B),$$

donde $i_1, i_2, \ldots i_n$ es una permutación de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Como toda permutación es producto de trasposiciones $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s$ donde $s \leq n$ entonces si $\tau_t = (h_t, k_t)$ para $t = 1, 2, \ldots, s$, donde $h_t, k_t \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tenemos que

$$E^{(n)}_{h_s k_s} \times \cdots \times E^{(n)}_{h_1 k_1} \times A \times E^{(n)}_{h_1 k_1} \times \cdots \times E^{(n)}_{h_s k_s} = B$$

y por lo tanto $A \equiv B$. ■

Referencias

[1] Abad, M. and Monteiro, L., *Monadic epimorphisms and applications*, Portugaliae Mathematica 39, Fasc. 1-4 (1980)525-538.

[2] Adams, P., Eggleton, R.B. and MacDougall, J.A. , *Structure of Graph Posets for orders 4 to 8*, Congressus Numeration 166 (2004), 63-81.

[3] Blyth T. S., *Matrices over ordered algebraic structures*, J. London Math. Soc 39, part 3 (1964), 427-432.

[4] Barnes, T. M. and Savage, C. D., *A recurrence for counting graphical partitions.* Electronic J. Combinatorics 2 (1995), 1-10.

[5] Barnes, T. M. and Savage, C. D., *Efficient generation of graphical partitions.* Disc. Appl. Math. 78 (1997), 17-25.

[6] Bertier, P. *Partages, parties, partitions, décomptes et représentations*, Metra VI, 1 (1967), 107-129.

[7] Brualdi, R. A. and Ryser H. J., *Combinatorial matrix theory*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Vol. 39, Cambridge University Press (1991).

[8] Chiappa, R., *On the partitions of an integer*, Rev. Unión Mate. Arg. 27 (1974), 33-40.

[9] Erdös P. and Gallai T., *Graphs with given degree vertices*, Mat. Lapok 11 (1960), 264-274.

[10] Give'on Y. , *Lattice matrices*, Information and Control 7, (1964), 477-484.

[11] Gupta, H., *A table of partitions*, Proc. London Math. Soc. 39, (1935), 142-149.

[12] Hammer P. L. et Rudeanu S., *Méthodes booléenes en recherche opérationelle*, Dunod 1970.

[13] Ivanescu P. L. and Rudeanu S., *Pseudo-Boolean methods for bivalent programming*, Lecture Notes in Mathematics 23, (1966).

[14] Harary F., *Problems involving graphical numbers*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 4. Combinatorial Theory and its applications II (1970), 625-635.

[15] Harary F. and Palmer E., *Graphical enumeration*, Academic Press, 1973.

[16] Ledley R. S., *Programming and utilizing digital computers*, MacGraw Hill (1962).

[17] Luce R. D., *A note on Boolean matrix theory*, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 382-388.

[18] Monteiro, L. and Kremer, A., *Boolean Matrices*, Bull. Math. Soc. Sc. Math. Roumaine 44 (92),no.2 (2001), 105-118.

[19] Petrovich, A., *Reticulados distributivos con un operador y álgebras de De Morgan monádicas*, Tesis Doctoral, Universidad de Buenos Aires, (1997).

[20] Rudeanu S. , *On Boolean matrix equations*, Rev. Roum. Math. Pures and Appl. 17 (1972), 1075-1090.

[21] Ruskey F., Cohen R., Eades P. and Scott A., *Alley CAT's in search of good homes*, 25th. S.E. Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numeratium, 102 (1994), 97-110.

[22] Rutherford D. E. , *Inverse of Boolean matrices*, Proc. Glasgow Math. Assoc., 6 (1963), 49-53.

[23] Rutherford D. E. , *Orthogonal Boolean matrices*, Proc. Roy. Soc. Edinburg, 67 (1964/65), 126-135.

[24] Stein, P. R., *On the number of graphical partitions*, Proc. 9th S-E Conf. Combinatorics, Graph Theory, Computing, Congr. Numer. 21 (1978), 671-684.

[25] Tripathi A., and Vijay S., *A note on a theorem of Erdös & Gallai*, Discrete Mathematics 265 (2003), 417-420.