Cálculo Proposicional Implicativo Clásico

Antonio A. R. Monteiro

Estas notas reproducen el curso [13] *que dictara en la Universidad Nacional del Sur, en 1960 el Dr. Antonio A. R. Monteiro, donde presentó resultados originales, que nunca fueron publicados.*
Este curso tuvo gran influencia en la formación de sus discípulos, en particular en la Tesis Doctoral de Antonio Diego sobre álgebras de Hilbert [5, 6].

En la transcrpición de las notas del curso colaboraron los siguientes docentes del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur: Dr. Aldo V. Figallo, Magister Martín Figallo, Magister Sonia Savini, Lic. Julio Sewald y Dra. Alicia N. Ziliani.

Agradezco a todos ellos y muy especialmente a la Magister Sonia Savini por el esmero y dedicación puestos en la revisión y corrección.

En los Apéndices, páginas 106-107, indicamos una lista bibliográfica relativa a las álgebras de Hilbert que nos fuera suministrada por el Dr. A. V. Figallo. El Apéndice I contiene algunos trabajos publicados después de 1960 donde aparecen resultados que ya habían sido obtenidos y expuestos por Antonio Monteiro en este curso, y como dijeramos antes nunca fueron publicados. El Apéndice II contiene otros trabajos sobre álgebras de Hilbert.

Redactor: Luiz F. Monteiro

INMABB - CONICET - UNS

2.005

Índice

1. LOGICA IMPLICATIVA POSITIVA

El objetivo principal de esta parte es el estudio del cálculo proposicional clásico, no obstante lo cual indicaremos a título informativo las definiciones de otros cálculos proposicionales que se encuentran con frecuencia en la literatura.

1.1. Introducción

Podemos decir que la lógica formal tiene por objeto estudiar las leyes del razonamiento. Se observa que existen reglas de razonamiento que se aplican en las cirscunstancias más variadas y en teorías de naturaleza esencialmente distintas. Así por ejemplo en la teoría de los números naturales, en las teorías de grupos, anillos, cuerpos, etc. Por lo tanto es importante saber cuales son las reglas válidas en circunstancias variadas.
Empezaremos este estudio con la teoría del cálculo proposicional implicativo positivo, introducido por D. Hilbert y P. Bernays [8], que pasamos a describir.

1.2. Alfabeto

La lógica implicativa positiva será estudiada como una teoría deductiva, por lo tanto comenzaremos por indicar la lista de los símbolos de los cuales se ocupa esta teoría, al conjunto de los cuales se dá el nombre de *alfabeto*, el que está constituído por símbolos de tres categorías, que pasamos a indicar:

(1) *Las variables* (de enunciado), que forman un conjunto $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in I}$ de naturaleza no especificada y tal que $|\mathcal{G}| > 0$. Entonces podemos hacer diversas hipótesis sobre $|\mathcal{G}|$, por ejemplo que $\mathcal{G}$ es finito, numerable ó que tiene un cardinal superior al numerable, por ejemplo que $\mathcal{G}$ tiene la potencia del contínuo. En general se supone que $\mathcal{G}$ es numerable.
Aunque los elementos g_i son símbolos abstractos debemos observar que en las aplicaciones los g_i son enunciados especifícos, por ejemplo podemos suponer que $\mathcal{G}$ es el conjunto de los enunciados de los cuales se ocupa una teoría deductiva bien determinada, como por ejemplo la teoría de grupos o de anillos, etc.
Como queremos elaborar una teoría de los enunciados que se aplique a varias ramas de la matemática o de otras teorías deductivas entonces es natural no especificar la naturaleza de los enunciados que vamos a considerar y es por ello que varios autores dicen que los g_i son variables de enunciado, no obstante esta designación, los g_i son para nosotros elementos fijos.

(2) *El símbolo* $\rightarrow$ denominado *implicación*

(3) *Los símbolos* (,) denominados paréntesis ó símbolos auxiliares.

1.3. Fórmulas ó enunciados

Sea $\mathcal{L}$ el menor conjunto que verifica las dos condiciones siguientes:

(1) $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{L}$,

Si a, b son elementos arbitrarios de $\mathcal{L}$, observemos que a, b no son variables de enunciado, sino que son variables del lenguaje que estamos hablando. Teniendo en cuenta esta observación, enunciaremos:

(2) Si $a, b \in \mathcal{L}$ entonces $(a \to b) \in \mathcal{L}$.

Al conjunto $\mathcal{L}$ se le dá el nombre de conjunto de todas las fórmulas, entre las cuales figuran por ejemplo:
$(g_1 \to g_1)$, $(g_1 \to g_2)$, $((g_1 \to g_1) \to (g_1 \to g_2))$, etc.

Observación 1.3.1 (1) *Algunos autores dan a las fórmulas el nombre de palabras, otros dan el nombre de fórmula a toda sucesión finita de símbolos del alfabeto indicado, así por ejemplo A. Church, Kleene, llaman fórmula a la sucesión* $)g_1(\to (g_1,$ *y dan el nombre de fórmula bien formada, a cualquiera de las que hemos definido anteriormente como fórmulas.*

(2) *Aún en el caso en que* $\mathcal{G}$ *es finito, el conjunto de las fórmulas es infinito. Supongamos por ejemplo que* $\mathcal{G} = \{g_1\}$, *entonces son fórmulas:*

$$g_1, \ (g_1 \to g_1),$$
$$((g_1 \to g_1) \to g_1), \ \ (g_1 \to \ (g_1 \to g_1)), \ \ \text{etc.}$$

1.4. Tautologías

Sabemos que en la lógica existen fórmulas que son universalmente verdaderas, esto es que son verdaderas independientemente de las interpretaciones que se den a las variables de enunciado que figuran en la fórmula.
En particular la fórmula $(g_1 \to g_1)$ es siempre verdadera. Necesitamos por lo tanto indicar algunas de las fórmulas que son universalmente verdaderas, a las cuales daremos el nombre de *tautologías* ó *tesis* y también indicar procedimientos para obtener las restantes.
Representemos por $\mathcal{T}$ al conjunto de las tautologías, que se define por las condiciones que se indican a continuación, donde g_1, g_2, g_3 son elementos fijos de $\mathcal{G}$.

Axioma L_1: $(g_1 \to \ (g_2 \to g_1)) \in \mathcal{T}$,

Axioma L_2: $((g_1 \to \ (g_2 \to g_3)) \to \ ((g_1 \to g_2) \ \to (g_1 \to g_3))) \in \mathcal{T}$.

Tenemos así exactamente dos tautologías y vamos a indicar dos reglas denominadas *reglas de formación* ó de *producción*, que permiten obtener nuevas tautologías a partir de las dos tautologías dadas. Para indicar estas reglas representaremos nuevamente por letras $a, b, c, \ldots$ elementos arbitrarios de $\mathcal{L}$.

Regla 1 (regla de sustitución): Si a es una tautología en la cuál figuran las variables de enunciado g_i, $1 \leq i \leq k$ y si b_i, $1 \leq i \leq k$ es una fórmula arbitraria entonces la fórmula que se obtiene reemplazando simultáneamente a g_i por b_i, $1 \leq i \leq k$ también es una tautología.

Ejemplo 1.4.1 *Reemplazando en* L_1, g_1 *por* g_2 *obtenemos la tautología:*
$(g_2 \to \ (g_2 \to g_2))$.
Reemplazando en L_1, g_1 *por* $(g_2 \to g_3)$ *obtenemos la tautología:*
$((g_2 \to g_3) \to \ (g_2 \to (g_2 \to g_3)))$.

Regla 2 (Modus Ponens): Si $a \in \mathcal{T}$ y $a \to b \in \mathcal{T}$ entonces $b \in \mathcal{T}$.

Por definición $\mathcal{T}$ es el menor conjunto de fórmulas que verifican los axiomas L_1 y L_2 y las reglas 1 y 2.

Observemos que la regla de sustitución permite a partir de los dos axiomas L_1 y L_2 que son tautologías, obtener una infinidad de tautologías.

Nosotros estamos interesados en suprimir la regla de sustitución sin alterar el sistema que queremos estudiar adoptando un procedimiento seguido por Von Neuman.

Observemos que de la tautología L_1 se deduce por sustitución la siguiente tautología: $(a \to \ (g_2 \to a))$ donde a es un elemento fijo de $\mathcal{L}$. Si a es variable entonces el símbolo $(a \to \ (g_2 \to a))$ no es una fórmula pero se transforma en una fórmula si reemplazamos a por un elemento fijo de $\mathcal{L}$, por ello diremos como Von Neuman que es un esquema de axioma.
Si reemplazamos g_2 por b variable tenemos el siguiente esquema de axioma:

$L_1^* :\quad (a \to \ (b \to a))$.

Con un procedimiento análogo obtenemos el esquema de axioma:

$L_2^* :\quad ((a \to \ (b \to c)) \to \ ((a \to b) \ \to (a \to c)))$.

Los resultados precedentes nos conducen a otro modo de formular la definición de tautología, que pasamos a enunciar:

1) El conjunto $\mathcal{T}$ de todas las tautologías es el menor conjunto que verifica las siguientes condiciones, donde $a, b, c \in \mathcal{L}$

$L_1 :\quad (a \to \ (b \to a)) \in \mathcal{T}$.

$L_2 :\quad ((a \to \ (b \to c)) \to \ ((a \to b) \ \to (a \to c))) \in \mathcal{T}$.

Como $\mathcal{L}$ tiene una infinidad de elementos, en las condiciones L_1 y L_2 figuran una infinidad de tautologías.

2) Regla del modus ponens: Si $a \in \mathcal{T}$ y $(a \to b) \in \mathcal{T}$ entonces $b \in \mathcal{T}$.

Se demuestra que estas dos definiciones de lógica implicativa positiva son equivalentes, si el número de variables de enunciado es mayor o igual que 3, esto es el conjunto de tautologías es el mismo, lo cuál no vamos a demostrar.
Nota: La axiomática anterior fue dada a título informativo.

Teorema 1.4.1 $(a \to a) \in \mathcal{T}$ *para todo* $a \in \mathcal{L}$.

Dem. Si reemplazamos en L_1, b por $(a \to a)$ tenemos

$$(a \to ((a \to a) \to a)) \in \mathcal{T}. \tag{1}$$

Reemplazando b por a en L_1, tenemos

$$(a \to (a \to a)) \in \mathcal{T}. \tag{2}$$

Reemplazando en L_2, b por $(a \to a)$ y c por a tenemos

$$((a \to ((a \to a) \to a)) \to ((a \to (a \to a)) \to (a \to a))) \in \mathcal{T}. \tag{3}$$

Luego de (1) y (3) se deduce por la regla de modus ponens

$$((a \to (a \to a)) \to (a \to a)) \in \mathcal{T}. \tag{4}$$

De (2) y (4) se deduce por la regla de modus ponens

$$(a \to a) \in \mathcal{T}.$$

■

Teorema 1.4.2 *Si $t \in \mathcal{T}$ entonces $(b \to t) \in \mathcal{T}$ cualquiera que sea $b \in \mathcal{L}$.*

Dem. Reemplazando en L_1, a por t resulta $(t \to (b \to t)) \in \mathcal{T}$ y como por hipótesis $t \in \mathcal{T}$, entonces por modus ponens tenemos $(b \to t) \in \mathcal{T}$ ■

Definición 1.4.1 *Si $(a \to b) \in \mathcal{T}$ notaremos $a \leq b$ y diremos que b es una consecuencia de a.*

Teorema 1.4.3 *$\leq$ es una relación de pre-orden.*

Dem. Por el Teorema 1.4.1 $(a \to a) \in \mathcal{T}$ para todo $a \in \mathcal{L}$, luego P1) $a \leq a$ cualquiera que sea $a \in \mathcal{L}$.
Probemos ahora que:
P2) Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$, donde $a, b, c \in \mathcal{L}$.
Por hipótesis (1) $(a \to b) \in \mathcal{T}$ y (2) $(b \to c) \in \mathcal{T}$. De (2) resulta por el Teorema 1.4.2 que (3) $(a \to (b \to c)) \in \mathcal{T}$. De (3) y L_2 resulta por modus ponens que (4) $((a \to b) \to (a \to c)) \in \mathcal{T}$. De (1) y (4) resulta por modus ponens que $(a \to c) \in \mathcal{T}$, esto es $a \leq c$. ■

Definición 1.4.2 *Si $a \leq b$ y $b \leq a$ notaremos $a \equiv b$ (mód. $\mathcal{T}$) y diremos que a, es lógicamente equivalente a b.*

Teorema 1.4.4 *$\equiv$ es una relación de equivalencia.*

Dem. En efecto por el Teorema 1.4.1:
1) $a \equiv a$ (mód. $\mathcal{T}$).
2) Si $a \equiv b$ (mód. $\mathcal{T}$) entonces $b \equiv a$ (mód. $\mathcal{T}$).
Por hipótesis $a \leq b$ y $b \leq a$ luego $b \leq a$ y $a \leq b$ y en consecuencia $b \equiv a$ (mód. $\mathcal{T}$).
3) Si $a \equiv b$ (mód. $\mathcal{T}$) y $b \equiv c$ (mód. $\mathcal{T}$) entonces $a \equiv c$ (mód. $\mathcal{T}$).
Por hipótesis (1) $a \leq b$, (2) $b \leq a$, (3) $b \leq c$, (4) $c \leq b$. De (1) y (3) resulta por el Teorema 1.4.3 que (5) $a \leq c$ y de (2) y (4) resulta por el Teorema 1.4.3 que (6) $c \leq a$. De (5) y (6) se concluye $a \equiv c$ (mód. $\mathcal{T}$). ■

Esta relación de equivalencia dá origen a una partición de $\mathcal{L}$ en clases de equivalencia, por lo tanto dos fórmulas que pertenezcan a una misma clase de equivalencia son indistinguibles bajo el punto de vista de la lógica. Si $a \in \mathcal{L}$ notaremos con $C(a)$ a la clase de equivalencia que contiene a a. Como $\to$ es una operación binaria definida sobre $\mathcal{L}$, entonces $(\mathcal{L}, \to)$ es un sistema algebraico.
Como acabamos de definir una relación de equivalencia sobre $\mathcal{L}$, es natural averiguar si esta relación es compatible con la operación binaria $\to$ definida sobre $\mathcal{L}$, esto es si se verifica la siguiente propiedad:
Si $a \equiv a_1$ (mód. $\mathcal{T}$) y $b \equiv b_1$ (mód. $\mathcal{T}$) entonces $(a \to b) \equiv (a_1 \to b_1)$ (mód. $\mathcal{T}$). Con el fin de demostrar la validez de esta propiedad vamos a probar los siguientes resultados:

Teorema 1.4.5 *Si $t \in \mathcal{T}$ y $a \equiv t$ (mód. $\mathcal{T}$) entonces $a \in \mathcal{T}$.*

Dem. Por hipótesis (1) $t \in \mathcal{T}$ y (2) $t \to a \in \mathcal{T}$. De (1) y (2) resulta por modus ponens que $a \in \mathcal{T}$. ■

Teorema 1.4.6 *Si $t \in \mathcal{T}$ entonces $C(t) = \mathcal{T}$.*

Dem. Probemos que: (i) Si $t \in \mathcal{T}$ entonces $C(t) \subseteq \mathcal{T}$. Sea $a \in C(t)$ esto es $a \equiv t$ (mód. $\mathcal{T}$) luego como por hipótesis $t \in \mathcal{T}$ entonces por el Teorema 1.4.5 podemos afirmar que $a \in \mathcal{T}$.
Probemos ahora que: (ii) Si $t \in \mathcal{T}$ entonces $\mathcal{T} \subseteq C(t)$. Sea $t_1 \in \mathcal{T}$ luego por el Teorema 1.4.2 $(t \to t_1) \in \mathcal{T}$ y $(t_1 \to t) \in \mathcal{T}$, luego $t_1 \in C(t)$. De (i) e (ii) resulta que $\mathcal{T} = C(t)$. ■

Teorema 1.4.7 *Si $t \in \mathcal{T}$ entonces $(t \to a) \equiv a$ (mód. $\mathcal{T}$).*

Dem. Por el axioma L_1, tenemos

$$a \leq (t \to a). \tag{1}$$

Reemplazando a por $(t \to a)$, b por t y c por a en el axioma L_2 tenemos:

$$((t \to a) \to (t \to a)) \to \ (((t \to a) \to t) \to ((t \to a) \to a)) \in \mathcal{T}. \tag{2}$$

Por el Teorema 1.4.1

$$((t \to a) \to (t \to a)) \in \mathcal{T}. \tag{3}$$

Luego de (2) y (3) resulta por modus ponens

$$(((t \to a) \to t) \to ((t \to a) \to a)) \in \mathcal{T}. \tag{4}$$

Como $t \in \mathcal{T}$ entonces por el Teorema 1.4.2

$$((t \to a) \to t) \in \mathcal{T}. \tag{5}$$

Luego de (4) y (5) resulta por modus ponens que $((t \to a) \to a) \in \mathcal{T}$ esto es

$$(t \to a) \leq a. \tag{6}$$

De (1) y (6) resulta finalmente que $(t \to a) \equiv a$ (mód. $\mathcal{T}$). ■

Teorema 1.4.8 *Si $b \leq c$ entonces $(a \to b) \leq (a \to c)$.*

Dem. Por el axioma L_2

$$((a \to (b \to c)) \to \ ((a \to b) \to (a \to c))) \in \mathcal{T}. \tag{1}$$

Como por hipótesis $(b \to c) \in \mathcal{T}$ entonces por el Teorema 1.4.2

$$(a \to (b \to c)) \in \mathcal{T}. \tag{2}$$

De (1) y (2) resulta por modus ponens que $((a \to b) \to (a \to c)) \in \mathcal{T}$, esto es $(a \to b) \leq (a \to c)$. ■

Teorema 1.4.9 *Si $a \leq b$ entonces $(b \to c) \leq (a \to c)$.*

Dem. Por hipótesis
$$(a \to b) \in \mathcal{T}. \tag{1}$$
Por el axioma L_1, $(a \to (b \to a)) \in \mathcal{T}$, esto es $a \leq (b \to a)$. Reemplazando a por $(b \to c)$ y b por a tenemos
$$(b \to c) \leq (a \to (b \to c)). \tag{2}$$
Por el axioma L_2, tenemos
$$(a \to (b \to c)) \leq ((a \to b) \to (a \to c)). \tag{3}$$
De (1) resulta por el Teorema 1.4.7
$$((a \to b) \to (a \to c)) \equiv (a \to c) \text{ (mód. } \mathcal{T})$$
y en particular
$$((a \to b) \to (a \to c)) \leq (a \to c). \tag{4}$$
De (2), (3) y (4) aplicando el Teorema 1.4.3, dos veces, resulta que $(b \to c) \leq (a \to c)$. ■

Teorema 1.4.10 *Si $a \equiv a_1$ (mód. $\mathcal{T}$) y $b \equiv b_1$ (mód. $\mathcal{T}$) entonces $(a \to b) \equiv (a_1 \to b_1)$ (mód. $\mathcal{T}$).*

Dem. Por hipótesis tenemos que (1) $a \leq a_1$, (2) $a_1 \leq a$, (3) $b \leq b_1$, (4) $b_1 \leq b$.
De (2) y el Teorema 1.4.9: (5) $(a \to b) \leq (a_1 \to b)$.
De (3) y el Teorema 1.4.8: (6) $(a_1 \to b) \leq (a_1 \to b_1)$.
Luego de (5) y (6) resulta teniendo en cuenta el Teorema 1.4.3: (i) $(a \to b) \leq (a_1 \to b_1)$.
De (1) y el Teorema 1.4.9: (7) $(a_1 \to b_1) \leq (a \to b_1)$.
De (4) y el Teorema 1.4.8: (8) $(a \to b_1) \leq (a \to b)$.
Luego de (7) y (8) resulta teniendo en cuenta el Teorema 1.4.3: (ii) $(a_1 \to b_1) \leq (a \to b)$.
De (i) e (ii) resulta $(a \to b) \equiv (a_1 \to b_1)$ (mód. $\mathcal{T}$). ■

Muchos autores dan a las tautologías el nombre de teoremas ó tesis de $\mathcal{L}$ y dan a los teoremas 1.4.1 a 1.4.10 el nombre de meta-teoremas.

1.5. Algebra de Lindenbaum de $\mathcal{L}$

Como es habitual notaremos con $\mathcal{L}/\equiv$ el conjunto cociente de $\mathcal{L}$ por la relación de equivalencia $\equiv$.

Definición 1.5.1 *Dados $C(a), C(b) \in \mathcal{L}/\equiv$ pongamos $C(a) \Rightarrow C(b) = C(a \to b)$.*

Observemos que el elemento $C(a) \Rightarrow C(b)$ queda unívocamente determinado en virtud del Teorema 1.4.10, el cuál expresa que la clase de equivalencia $C(a) \Rightarrow C(b) = C(a \to b)$ no depende de los elementos elegidos en $C(a)$ y en $C(b)$.

Definición 1.5.2 *Al par $(\mathcal{L}/\equiv, \Rightarrow)$ se dá el nombre de álgebra de Lindenbaum de $\mathcal{L}$.*

Indiquemos algunas de las propiedades del sistema algebraico que acabamos de definir. Notaremos a la clase de equivalencia $\mathcal{T}$ por $\mathbf{1}$.

Propiedad H_1) $C(a) \Rightarrow (C(b) \Rightarrow C(a)) = \mathbf{1}$.
En efecto,

$$C(a) \Rightarrow (C(b) \Rightarrow C(a)) = C(a) \Rightarrow C(b \to a) = C(a \to (b \to a))$$

y como por axioma L_1, $(a \to (b \to a)) \in \mathcal{T}$ entonces $C(a \to (b \to a)) = \mathbf{1}$.

Propiedad H_2) $(C(a) \Rightarrow (C(b) \Rightarrow C(c))) \Rightarrow ((C(a) \Rightarrow C(b)) \Rightarrow (C(a) \Rightarrow C(c))) = \mathbf{1}$.
En efecto,

$$C(a \to (b \to c)) \Rightarrow C((a \to b) \to (a \to c)) =$$
$$C((a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)))$$

luego teniendo en cuenta el axioma L_2 queda probada la propiedad H_2.

Propiedad H_3) $C(a) \Rightarrow \mathbf{1} = \mathbf{1}$.
En efecto, si $t \in \mathcal{T} = \mathbf{1}$ entonces $C(a) \Rightarrow \mathbf{1} = C(a) \Rightarrow C(t) = C(a \to t)$ y por el Teorema 1.4.2 $C(a \to t) = C(t)$. Luego $C(a) \Rightarrow \mathbf{1} = \mathbf{1}$.

Propiedad H_4) Si $C(a) \Rightarrow C(b) = \mathbf{1}$ y $C(b) \Rightarrow C(a) = \mathbf{1}$ entonces $C(a) = C(b)$.
Por hipótesis

$$C(a \to b) = C(a) \Rightarrow C(b) = \mathbf{1} = C(t), \text{ con } t \in \mathcal{T}$$

y

$$C(b \to a) = C(b) \Rightarrow C(a) = \mathbf{1} = C(t), \text{ con } t \in \mathcal{T}.$$

Luego $(a \to b) \in \mathcal{T}$ y $(b \to a) \in \mathcal{T}$, esto es $a \equiv b$ (mód. $\mathcal{T}$) y por lo tanto $C(a) = C(b)$.

2. ALGEBRAS IMPLICATIVAS O ALGEBRAS DE HILBERT

2.1. Definición

El resultado que acabamos de indicar nos conduce según León Henkin (1950) [7] a la siguiente:

Definición 2.1.1 *Daremos el nombre de álgebra implicativa (intuicionista) ó álgebra de Hilbert a toda terna* $(A, 1, \to)$ *formada por un conjunto no vacío* A*, un elemento fijo de* A *designado por el símbolo* 1 *y una operación binaria* $\to$ *definida sobre* A *que verifica los siguientes axiomas (donde* x, y, z *designan elementos arbitrarios de* A*):*

Axioma H_1 : $x \to (y \to x) = 1.$

Axioma H_2 : $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1.$

Axioma H_3 : $x \to 1 = 1.$

Axioma H_4 : *Si* $x \to y = 1$ *e* $y \to x = 1$ *entonces* $x = y$.

Para abreviar diremos a menudo álgebra implicativa A ó álgebra A. L. Henkin [7] a un álgebra implicativa le dá el nombre de *modelo implicativo*.
En virtud de la Definición 2.1.1 podemos decir que el álgebra de Lindembaum $\mathcal{L}/\equiv$ es un álgebra implicativa (intuicionista). A los elementos de $\mathcal{L}/\equiv$, esto es, a las clases de equivalencia módulo $\mathcal{T}$, daremos el nombre de *proposiciones* (P. Halmos).
El estudio del cálculo proposicional implicativo (intuicionista) consiste precisamente en el estudio del álgebra implicativa $\mathcal{L}/\equiv$. Necesitamos en particular saber si el álgebra implicativa $\mathcal{L}/\equiv$ tiene propiedades que permitan distinguirlas de otras álgebras implicativas y la única forma de lograr este objetivo es empezar por estudiar las álgebras implicativas.

2.2. Propiedades de las álgebras implicativas

Teorema 2.2.1 *(modus ponens) Si* $x = 1$ *y* $x \to y = 1$ *entonces* $y = 1$.

Dem. Por las hipótesis $x = 1$ y $x \to y = 1$ tenemos (1) $1 \to y = 1$ y por H_3 tenemos (2) $y \to 1 = 1$. De (1) y (2) resulta por H_4 que $y = 1$. ■

Teorema 2.2.2 $x \to x = 1$.

Dem. La demostración de esta propiedad sigue en líneas generales la indicada en el Teorema 1.4.1.

Reemplazando en H_1 y por x tenemos: (1) $x \to (x \to x) = 1$ y reemplazando en el mismo axioma y por $x \to x$ tenemos (2) $x \to ((x \to x) \to x) = 1$. Reemplazando en el axioma H_2, y por $x \to x$ y z por x tenemos

$$(3)\ \ (x \to ((x \to x) \to x)) \to ((x \to (x \to x)) \to (x \to x)) = 1.$$

De (2) y (3) resulta por modus ponens que (4) $(x \to (x \to x)) \to (x \to x) = 1$. De (1) y (4) resulta por modus ponens que $x \to x = 1$ esto es $x \leq x$.

■

Definición 2.2.1 *Dados $x, y \in A$ notaremos $x \leq y$ para indicar que $x \to y = 1$.*

De acuerdo con esta definición los axiomas H_1 a H_4 se pueden escribir del siguiente modo:
Axioma H_1' : $x \leq y \to x$,
Axioma H_2' : $x \to (y \to z) \leq (x \to y) \to (x \to z)$,
Axioma H_3' : $x \leq 1$,
Axioma H_4' : Si $x \leq y$ e $y \leq x$ entonces $x = y$.
Y el modus ponens indicado en el Teorema 2.2.1 puede expresarse del siguiente modo:
Modus Ponens Si $x = 1$ y $x \leq y$ entonces $y = 1$.

Teorema 2.2.3 *La relación binaria indicada en la Definición 2.2.1 es una relación de orden.*

Dem. (O1) $x \leq x$.

Es una consecuencia inmediata del Teorema 2.2.2.
(O2) Si $x \leq y$ e $y \leq x$ entonces $x = y$.
Consecuencia del axioma H_4.
(O3) Si $x \leq y$ e $y \leq z$ entonces $x \leq z$.
Por el axioma H_2 $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1$, y como por hipótesis $x \to y = 1$ e $y \to z = 1$ tenemos $(x \to 1) \to (1 \to (x \to z)) = 1$, luego por H_3 $1 \to (1 \to (x \to z)) = 1$, luego por modus ponens $1 \to (x \to z) = 1$, y aplicando nuevamente el modus ponens $x \to z = 1$, esto es $x \leq z$. ■

Teorema 2.2.4 $1 \to x = x$.

Dem. Reemplazando en el axioma H_1 y por 1 tenemos $x \to (1 \to x) = 1$, esto es (1) $x \leq 1 \to x$.
Por el axioma H_2 reemplazando x por $1 \to x$, y por 1 y z por x tenemos

$$((1 \to x) \to (1 \to x)) \to (((1 \to x) \to 1) \to ((1 \to x) \to x)) = 1.$$

Luego por los Teoremas 2.2.2, 2.2.1 y el axioma H_3 tenemos

$$(1 \to ((1 \to x) \to x)) = 1,$$

luego por modus ponens $(1 \to x) \to x = 1$, esto es (2) $1 \to x \leq x$. De (1) y (2) resulta $1 \to x = x$. ■

Teorema 2.2.5 $x \to (x \to y) = x \to y$.

Dem. Por el Axioma H_1, reemplazando x por $x \to y$ e y por x tenemos

$$(x \to y) \to (x \to (x \to y)) = 1,$$

esto es

$$(1) \;\; (x \to y) \leq x \to (x \to y).$$

Por el Axioma H_2 reemplazando y por x y z por y tenemos

$$(x \to (x \to y)) \to ((x \to x) \to (x \to y)) = 1.$$

Luego por los Teoremas 2.2.4 y 2.2.2 tenemos

$$(x \to (x \to y)) \to (x \to y) = 1,$$

esto es

$$(2)\;\; x \to (x \to y) \leq x \to y.$$

De (1) y (2) resulta $x \to (x \to y) = x \to y$. ■

Corolario 2.2.1 *$x \leq y$ si y solo si $x \leq x \to y$.*

Dem. Supongamos que $x \leq y$, esto es (1) $x \to y = 1$. Por el Teorema 2.2.5 y (1) $x \to (x \to y) = x \to y = 1$, luego $x \leq x \to y$.
Si (2) $x \leq x \to y$ entonces del Teorema 2.2.5 y (2) resulta $x \to y = x \to (x \to y) = 1$ luego $x \leq y$. ■

Teorema 2.2.6 *Si $y \leq z$ entonces $x \to y \leq x \to z$.*

Dem. Por el axioma H_2 tenemos

$$(1)\;\; (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1,$$

y como por hipótesis (2) $y \to z = 1$ tenemos

$$(x \to 1) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1.$$

Luego por el Axioma H_3

$$1 \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1,$$

y por el Teorema 2.2.4

$$(x \to y) \to (x \to z) = 1,$$

esto es $x \to y \leq x \to z$. ■

Teorema 2.2.7 *Si $x \leq y$ entonces $y \to z \leq x \to z$.*

Dem. Por el axioma H_2 tenemos

$$(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1,$$

y como por hipótesis $x \to y = 1$ resulta teniendo en cuenta el Teorema 2.2.4 que

$$(x \to (y \to z)) \to (x \to z) = 1,$$

esto es

$$(1)\;\; x \to (y \to z) \leq x \to z.$$

Por el axioma H_1

$$(y \to z) \to (x \to (y \to z)) = 1,$$

esto es

$$(2)\;\; y \to z \leq x \to (y \to z).$$

De (1) y (2) resulta por el Teorema 2.2.3 que $y \to z \leq x \to z$. ■

Teorema 2.2.8 $x \to (y \to z) = y \to (x \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.

Dem. Por el axioma H_2 tenemos

$$(1) \;\; x \to (y \to z) \leq (x \to y) \to (x \to z)$$

y por el axioma H_1: (2) $y \leq x \to y$. De (2) resulta por el Teorema 2.2.7 que:

$$(3) \;\; (x \to y) \to (x \to z) \leq y \to (x \to z).$$

De (1) y (3) resulta

$$(4) \;\; x \to (y \to z) \leq (x \to y) \to (x \to z) \leq y \to (x \to z).$$

Por el axioma H_2 tenemos

$$(5) \;\; y \to (x \to z) \leq (y \to x) \to (y \to z)$$

y por el axioma H_1: (6) $x \leq y \to x$. De (6) resulta por el Teorema 2.2.7 que:

$$(7) \;\; (y \to x) \to (y \to z) \leq x \to (y \to z).$$

De (5) y (7) resulta

$$(8) \;\; y \to (x \to z) \leq (y \to x) \to (y \to z) \leq x \to (y \to z).$$

De (4) y (8) resulta el teorema. ■

Corolario 2.2.2 *Cualquiera de los términos de la expresión indicada en el* Teorema 2.2.8 *es igual a* $(y \to x) \to (y \to z)$.

Teorema 2.2.9 $x \leq (x \to y) \to y$.

Dem. Por el Teorema 2.2.8

$$(1) \;\; x \to ((x \to y) \to y) = (x \to (x \to y)) \to (x \to y).$$

Por los Teoremas 2.2.5 y 2.2.2 tenemos

$$(2) \;\; (x \to (x \to y)) \to (x \to y) = (x \to y) \to (x \to y) = 1.$$

De (1) y (2) $x \to ((x \to y) \to y) = 1$, esto es $x \leq (x \to y) \to y$. ■

Teorema 2.2.10 $((x \to y) \to y) \to y = x \to y$.

Dem. Por el Teorema 2.2.9 sabemos que $x \leq (x \to y) \to y$, luego por el Teorema 2.2.7 resulta:

$$(1) \quad ((x \to y) \to y) \to y \leq x \to y.$$

Por el Teorema 2.2.9

$$(2) \quad x \to y \leq ((x \to y) \to y) \to y.$$

De (1) y (2) resulta el teorema. ■

Teorema 2.2.11 $(x \to y) \to ((y \to x) \to x) = (y \to x) \to ((x \to y) \to y)$.
Th. Skolem [17]

Dem. Aplicando tres veces el Teorema 2.2.8 tenemso

$$((x \to y) \to ((y \to x) \to x)) \to ((y \to x) \to ((x \to y) \to y)) =$$

$$((y \to x) \to ((x \to y) \to x)) \to ((y \to x) \to ((x \to y) \to y)) =$$

$$(y \to x) \to (((x \to y) \to x) \to ((x \to y) \to y)) =$$

$$(y \to x) \to ((x \to y) \to (x \to y)).$$

Por el Teorema 2.2.2 y el axioma H_3 tenemos que

$$(y \to x) \to ((x \to y) \to (x \to y)) = (y \to x) \to 1 = 1.$$

Luego

$$((x \to y) \to ((y \to x) \to x)) \to ((y \to x) \to ((x \to y) \to y)) = 1,$$

esto es

$$(1) \;\; (x \to y) \to ((y \to x) \to x) \leq (y \to x) \to ((x \to y) \to y).$$

En forma análoga cambiando x por y e y por x se obtiene

$$(2) \;\; (y \to x) \to ((x \to y) \to y) \leq (x \to y) \to ((y \to x) \to x).$$

De (1) y (2) resulta el teorema. ■

Teorema 2.2.12 $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1$.

Dem.

$$(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) =$$

por el Teorema 2.2.8

$$(y \to z) \to ((x \to y) \to (x \to z)) =$$

por el Teorema 2.2.8 y el axioma H_1

$$(y \to z) \to (x \to (y \to z)) = 1.$$

■

Lema 2.2.1 *Si $z \leq x \to y$ entonces $x \leq z \to y$.* (L. Henkin, [7])

Dem. Por hipótesis (1) $z \to (x \to y) = 1$. Por el Teorema 2.2.8 (2) $x \to (z \to y) = z \to (x \to y)$. De(1) y (2) resulta $x \to (z \to y) = 1$ luego $x \leq z \to y$. ■

2.3. Independencia de los axiomas de Henkin

Se plantea en forma natural el problema de saber si los axiomas indicados por Henkin para definir un álgebra implicativa son independientes. L. Iturrioz en 1960 demostró que H_3 es el único axioma que no es independiente.

Teorema 2.3.1 *Si el sistema* $(A, 1, \to)$ *verifica los axiomas* H_1 *y* H_4 *entonces verifica* H_3. (L. Iturrioz, (1960))

Dem. (A) Supongamos que (1) $x = 1$ y (2) $x \to y = 1$. Luego de (1) y (2) resulta (3) $1 \to y = 1$. Por el axioma H_1 tenemos (4) $y \to (1 \to y) = 1$, luego por (3) y (4) tenemos (5) $y \to 1 = 1$. De (3) y (5) resulta por el axioma H_4 que $y = 1$.
(B) Probemos ahora que se verifica H_3, esto es que $x \to 1 = 1$. Por el axioma H_1 tenemos (6) $1 \to (x \to 1) = 1$, luego de (6) y (A) resulta $x \to 1 = 1$. ■

Probemos ahora que cada uno de los axiomas H_1, H_2 y H_4 son independientes.

Independencia de H_1.

Sea $A = \{0, a, 1\}$ y consideremos la operación binaria $\to$ definida sobre A por la siguiente tabla:

$\to$	0	a	1
0	1	1	1
a	0	1	1
1	0	0	1

Se verifican H_2 y H_4, pero no se verifica H_1. En efecto:
$a \to (1 \to a) = a \to 0 = 0 \neq 1$.

Independencia de H_2.

Sea $A = \{0, a, 1\}$ y consideremos la operación binaria $\to$ definida sobre A por la siguiente tabla:

$\to$	0	a	1
0	1	1	1
a	a	1	1
1	a	a	1

Se verifican H_1 y H_4, pero no se verifica H_2. En efecto:
$(a \to (1 \to 0)) \to ((a \to 1) \to (a \to 0)) =$
$(a \to a) \to (1 \to a) = 1 \to a = a \neq 1$.

Independencia de H_4.

Sea $A = \{0, 1\}$ y consideremos la operación binaria $\to$ definida sobre A por la siguiente tabla:

$\to$	0	1
0	1	1
1	1	1

Se verifican H_1 y H_2, pero no se verifica H_4. En efecto:
$0 \to 1 = 1$ y $1 \to 0 = 1$, pero $0 \neq 1$.

En virtud de los resultados que acabamos de indicar podemos adoptar según L. Iturrioz la siguiente definición de álgebra implicativa.

Definición 2.3.1 *Daremos el nombre de álgebra implicativa (intuicionista) ó álgebra de Hilbert a toda terna* $(A, 1, \to)$ *formada por un conjunto no vacío* A*, un elemento fijo de* A *designado por el símbolo* 1 *y una operación binaria* $\to$ *definida sobre* A *que verifica los siguientes axiomas (donde* x, y, z *designan elementos arbitrarios de* A*):*

Axioma H_1 : $x \to (y \to x) = 1$.

Axioma H_2 : $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1$.

Axioma H_4 : *Si* $x \to y = 1$ *e* $y \to x = 1$ *entonces* $x = y$.

2.4. Caracterización de un álgebra implicativa por medio de igualdades

Los tres primeros axiomas indicados por L. Henkin para definir un álgebra implicativa tienen la forma de igualdades, pero no ocurre lo mismo con el cuarto axioma. Se plantea el problema de encontrar axiomas que caractericen un álgebra implicativa y que todos tengan la forma de una igualdad.
A continuación indicamos la solución de este problema dada por A. Diego en 1960, [4].

Teorema 2.4.1 *Sea* $(A, \to)$ *un par formado por un conjunto no vacío* A *y una operación binaria* $\to$ *definida sobre* A *en forma tal que se verifiquen los siguientes axiomas, donde* $p, q, r \in A$*:*

(I) $(p \to p) \to p = p$,

(II) $p \to p = q \to q$

(III) $p \to (q \to r) = (p \to q) \to (p \to r)$,

(IV) $(p \to q) \to ((q \to p) \to p) = (q \to p) \to ((p \to q) \to q)$.

entonces el sistema $(A, 1, \to)$ *es un álgebra implicativa donde* $1 = p \to p$. A. Diego [4, 5, 6]

Dem. El axioma (II) expresa que $p \to p$ es un elemento fijo de A cualquiera que sea $p \in A$. Vamos a designar este elemento por 1. Vamos a probar que se verifican los axiomas H_1, H_2, H_3, H_4 indicados en la Definición 2.1.1.

H_3) $p \to 1 = 1$.
Por (III) $p \to 1 = p \to (p \to p) = (p \to p) \to (p \to p) = 1$.

H_4) Si $p \to q = 1$ y $q \to p = 1$ entonces $p = q$.
De las hipótesis hechas y el axioma (IV) tenemos $1 \to (1 \to p) = 1 \to (1 \to q)$, y como por el axioma (I) tenemos que $1 \to p = p$ entonces $1 \to p = 1 \to q$, y aplicando nuevamente el axioma (I) $p = q$.

H_1) $p \to (q \to p) = 1$.
Por (III) y H_3: $p \to (q \to p) = (p \to q) \to (p \to p) = (p \to q) \to 1 = 1$.

H_2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)) = 1$. Por (III)

$$(p \to (q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r)) =$$

$$((p \to q) \to (p \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)) = 1.$$

■

Observemos que si $(A, 1, \to)$ es un álgebra implicativa, entonces se verifican los axiomas I, II, III y IV. En efecto, como por el Teorema 2.2.2 $x \to x = 1$ entonces por el Teorema 2.2.4 (I) $(p \to p) \to p = 1 \to p = p$ y (II) $p \to p = 1 = q \to q$. La propiedad (III) coincide con el Teorema 2.2.8, y la propiedad (IV) coincide con el Teorema 2.2.11. Por lo tanto la axiomática de A. Diego es equivalente a la axiomática de L. Henkin indicada en la Definición 2.1.1.

Los axiomas I, II, III y IV son independientes, A.Diego [4, 5, 6].

Independencia del Axioma I.

Sea $A = \{0, 1\}$ y consideremos la operación binaria $\to$ definida sobre A por la siguiente tabla:

$\to$	0	1
0	1	1
1	1	1

Se verifican II, III y IV, pero no se verifica I. En efecto: $(0 \to 0) \to 0 = 1 \neq 0$.

Independencia del Axioma II.

Sea $A = \{0, 1\}$ y consideremos la operación binaria $\to$ definida sobre A por la siguiente tabla:

$\to$	0	1
0	0	1
1	1	1

Se verifican I, III y IV, pero no se verifica II. En efecto: $0 \to 0 = 0 \neq 1 = 1 \to 1$.

Independencia del Axioma III.

Sea $A = \{1, a, b\}$ y consideremos la operación binaria $\to$ definida sobre A por la siguiente tabla:

$\to$	1	a	b
1	1	a	b
a	1	1	a
b	1	a	1

Se verifican I, II y IV, pero no se verifica III. En efecto:
$a \to (a \to b) = a \to a = 1$ y
$(a \to a) \to (a \to b) = 1 \to a = a$.

Independencia del Axioma IV.

Sea $A = \{1, a, b\}$ y consideremos la operación binaria $\to$ definida sobre A por la siguiente tabla:

$\to$	1	a	b
1	1	a	b
a	1	1	1
b	1	1	1

Se verifican I, II y III, pero no se verifica IV. En efecto:
$(a \to b) \to ((b \to a) \to a) = 1 \to (1 \to a) = a$ y
$(b \to a) \to ((a \to b) \to b) = 1 \to (1 \to b) = b$.

2.5. Imposibilidad de determinar el operador $\to$ a partir de la relación de orden inducida

Un álgebra implicativa A es un conjunto ordenado por medio de la relación $\leq$ definida por: $a \leq b$ si solo si $a \to b = 1$ y por lo tanto el operador $\to$ determina un ordenamiento natural sobre A.
Es lógico averiguar si el conocimiento del orden determina el operador $\to$. A. Diego en 1960, [4] dió una respuesta negativa, que pasamos a describir.

Teorema 2.5.1 *Todo conjunto ordenado con último elemento es un álgebra implicativa, que tiene por orden inducido el orden dado.* [4]

Dem. Sea A un conjunto ordenado con último elemento que designaremos por 1 y definamos la operación $\to$ del siguiente modo:

$$a \to b = \begin{cases} 1, & \text{si } a \leq b \\ b, & \text{si } a \not\leq b. \end{cases}$$

Vamos a probar que $\to$ verifica los axiomas de L. Henkin.
Axioma H_3 : $a \to 1 = 1$.

Como $a \leq 1$ cualquiera que sea $a \in A$ entonces $a \rightarrow 1 = 1$.

Axioma H_1 : $\quad a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$.

Si $b \leq a$ entonces $b \rightarrow a = 1$, luego usando H_3 $a \rightarrow (b \rightarrow a) = a \rightarrow 1 = 1$.
Si $b \not\leq a$ entonces $a \rightarrow (b \rightarrow a) = a \rightarrow a = 1$, ya que $a \leq a$.

Axioma H_4 : $\quad$ Si $a \rightarrow b = 1$ y $b \rightarrow a = 1$ entonces $a = b$.

Por hipótesis $a \leq b$ y $b \leq a$, luego $a = b$.

Axioma H_2 : $\quad (a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) = 1$.

Supongamos que $a \leq b \leq c$ entonces

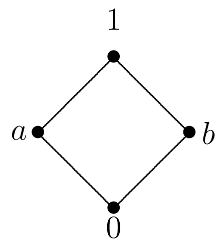
$$(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) =$$

$$(a \rightarrow 1) \rightarrow (1 \rightarrow 1) = 1 \rightarrow 1 = 1.$$

La comprobación de los demás casos queda a título de ejercicio.
De acuerdo a la definición, el orden inducido por el operador $\rightarrow$ coindice con el orden dado. ■

Teorema 2.5.2 *Sobre un conjunto A pueden existir dos operaciones $\rightarrow, \Rightarrow$ tales que $(A, \rightarrow)$ y $(A, \Rightarrow)$ son álgebras implicativas distintas y la relación de orden inducida por las dos operaciones es la misma.* A. Diego, [4]

Dem. Consideremos el conjunto ordenado $A = \{0, a, b, 1\}$ cuyo diagrama de Hasse se indica en la figura adjunta y definamos sobre A las dos operaciones binarias $\rightarrow$ y $\Rightarrow$ indicadas en las siguientes tablas:



$\rightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	b	1	b	1
b	a	a	1	1
1	0	a	b	1

$\Rightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	0	1	b	1
b	0	a	1	1
1	0	a	b	1

Obtenemos así dos álgebras implicativas distintas $(A, \rightarrow)$ y $(A, \Rightarrow)$ que inducen sobre A el mismo orden. ■

2.6. Álgebras implicativas lineales

Es interesante considerar álgebras implicativas en las cuales el orden inducido por el operador $\rightarrow$ es un orden total.

Definición 2.6.1 *Un álgebra implicativa $(A, \rightarrow)$ se dice lineal si el orden inducido por el operador $\rightarrow$ es un orden total.*

Teorema 2.6.1 *Si un álgebra implicativa $(A, \rightarrow)$ es lineal y $a, b \in A$ entonces:*
(I) $\quad a \rightarrow b = 1$ *si* $a \leq b$,
(II) $\quad a \rightarrow b = b$ *si* $b < a$. (J. McKinsey y A. Tarski, [10])

Dem. La condición (I) es evidente. Para demostrar la condición (II) vamos a probar previamente tres propiedades:

(IIa) <u>Si $b < a$ entonces $a \to b < a$.</u>
En efecto, si no se verifica $a \to b < a$ entonces como el orden es lineal $a \leq a \to b$, luego por los Teoremas 2.2.6 y 2.2.2:

$$1 = a \to a \leq a \to (a \to b) = a \to b$$

y por lo tanto $a \to b = 1$, es decir $a \leq b$ lo que contradice la hipótesis hecha. Luego $a \to b < a$.

(IIb) <u>$b \leq a \to b$.</u>
Por el axioma H_1 sabemos que $b \to (a \to b) = 1$, luego se verifica (IIb).

(IIc) <u>$a \to b = b$.</u>
En efecto, si $b < a \to b$ entonces por (IIa) tenemos (1) $(a \to b) \to b < a \to b$. Por otro lado por el Teorema 2.2.9 (2) $a \leq (a \to b) \to b$. De (1) y (2) resulta $a < a \to b$, lo que contradice (IIa), por lo tanto $a \to b = b$. ■

Teorema 2.6.2 *Si A es un conjunto totalmente ordenado con último elemento* 1*, entonces existe una única operación binaria $\to$ tal que* $(A, 1, \to)$ *es un álgebra implicativa que tiene por orden inducido al orden dado* (A. Tarski).

Dem. Por el Teorema 2.6.1 si el álgebra implicativa $(A, 1, \to)$ induce un orden lineal sobre A, entonces la operación $\to$ queda unívocamente determinada por las siguientes reglas:
(I) $a \to b = 1$ si $a \leq b$,
(II) $a \to b = b$ si $b < a$.
Basta entonces verificar que esta operación binaria verifica los axiomas de un álgebra implicativa, lo cual ya fué demostrado en el Teorema 2.5.1 para el caso de conjuntos ordenados. ■

3. CONSTRUCCION DE ALGEBRAS IMPLICATIVAS

3.1. Introducción

Es de gran importancia indicar procedimientos que permitan obtener nuevas álgebras implicativas a partir de álgebras implicativas conocidas. Vamos a estudiar en este capítulo varios procedimientos de esta naturaleza. Estas construcciones constituyen al mismo tiempo técnicas de utilización corriente en este tipo de estudio.

3.2. Producto cartesiano de álgebras implicativas

Dada una familia $\{(A_i, \to_i)\}_{i \in I}$ no vacía de álgebras implicativas, sea $A = \prod_{i \in I} A_i$. Si $a, b \in A$ entonces $a = (a_i)_{i \in I}$ donde $a_i \in A_i$, $b = (b_i)_{i \in I}$ donde $b_i \in A_i$.

Si ponemos por definición $a \to b = (a_i \to_i b_i)_{i \in I}$, entonces:

Teorema 3.2.1 *El sistema $(A, \to)$ es un álgebra implicativa.*

El álgebra implicativa que acabamos de definir se denomina *producto directo o cartesiano* de las álgebras implicativas $\{(A_i, \to_i)\}_{i \in I}$ y se nota $A = \prod_{i \in I} A_i$.

3.3. Subálgebras implicativas

Definición 3.3.1 *Si $(A, \to)$ es un álgebra implicativa a todo subconjunto S, no vacío, de A que verifica: Si $x, y \in S$ entonces $x \to y \in S$ se denomina subálgebra (implicativa ó de Hilbert) de A .*

Lema 3.3.1 *Toda subálgebra S de un álgebra implicativa A es un álgebra implicativa.*

Lema 3.3.2 *La intersección de una familia, no vacía de subálgebras de un álgebra A es una subálgebra de A.*

Definición 3.3.2 *Dado un subconjunto, no vacío, G de un álgebra A se denomina subálgebra generada por G a la intersección de todas las subálgebras de A que contienen a G, y la notaremos $SH(G)$.*

Observemos que esta es una buena definición porque siempre existe una subálgebra de A que contiene a G, a saber la subálgebra A. Claramente $SH(G)$ es la menor subálgebra que contiene a G. Pero la Definición 3.3.2 tiene el inconveniente de hacer intervenir todas las subálgebras de A que contienen a G. Se plantea entonces el problema de obtener $SH(G)$ directamente a partir de los elementos de G. Para ello imitaremos el procedimiento que utilizamos para definir las fórmulas del cálculo proposicional implicativo positivo.
Dado un subconjunto G de un álgebra implicativa A sea L el subconjunto de A definido por:

L1) $G \subseteq L$,

L2) Si $a, b \in L$ entonces $a \to b \in L$,

L3) Todo elemento de L se obtiene de esta forma.

Es claro que L es el conjunto de todos los elementos que se obtienen efectuando un número finito de veces la operación $\to$ sobre un número finito de elementos de G.

Lema 3.3.3 $SH(G) = L$.

Dem. De la definición de L resulta que L es una subálgebra que contiene a G, luego (1) $SH(G) \subseteq L$. Por otro lado como $G \subseteq SH(G)$ todos los elementos que se pueden obtener a partir de G en la forma indicada en L1, L2 y L3 pertenecen a $SH(G)$, por lo tanto (2) $L \subseteq SH(G)$. De (1) y (2) resulta el lema. ■

Luego $SH(G)$ es el conjunto de todos los elementos que se obtienen efectuando un número finito de veces la operación $\to$ sobre un número finito de elementos de G. Este resultado nos permite construir ejemplos de álgebras implicativas, pero antes de indicarlos recordemos que:

Definición 3.3.3 *Un álgebra de Heyting es un reticulado* R *con primer elemento* 0 *y último elemento* 1, *en el cual para cada par ordenado* (x, y) *de elementos de* R *existe un elemento* $z \in R$ *tal que:*

AH1) $x \wedge z \leq y$,

AH2) *Si* $x \wedge a \leq y$ *entonces* $a \leq z$.

Ver por ejemplo [14] y [16].
Para indicar el elemento z *notaremos* $z = x \Rightarrow y$. *Se dice que* z *es la implicación intuicionista de* x *e* y.

Observemos que el reticulado R es necesariamente distributivo.

Toda álgebra de Boole A es un álgebra de Heyting, donde $x \Rightarrow y = -x \vee y$.

Teorema 3.3.1 *Todo reticulado distributivo finito* $(R, \wedge, \vee, 0, 1)$ *es un álgebra de Heyting, donde la operación* $x \Rightarrow y$ *se define por* $x \Rightarrow y = \bigvee\{z \in R : x \wedge z \leq y\}$.

La Definición 3.3.3 es equivalente a la siguiente:

Definición 3.3.4 *Un álgebra* $(A, \wedge, \vee, \Rightarrow, 0, 1)$ *de tipo* $(2, 2, 2, 0, 0)$ *se dice un álgebra de Heyting,* (A. Monteiro [11, 12, 14]) *ó un reticulado relativamente pseudo complementado con primer elemento* 0 (G. Birkhoff, [3]) *si verifica:*

H_0) $0 \wedge x = 0$

H_1) $x \Rightarrow x = 1$

H_2) $(x \Rightarrow y) \wedge y = y$

H_3) $x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y$

H_4) $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow z) \wedge (x \Rightarrow y)$

$H_5)$ $(x \vee y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)$

Es bien conocido que en las álgebras de Heyting se verifican:

- $x \Rightarrow (y \Rightarrow x) = 1$.
- $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z)) = 1$.
- $x \Rightarrow 1 = 1$.
- Si $x \Rightarrow y = 1$ e $y \Rightarrow x = 1$ entonces $x = y$.

Por lo tanto si $(A, \wedge, \vee, \Rightarrow, 0, 1)$ es un álgebra de Heyting entonces $(A, 1, \Rightarrow)$ es un álgebra implicativa.

Ejemplo 3.3.1

Sea A el álgebra de Boole indicada en la figura, sobre la cual se define el operador $\rightarrow$ por $x \rightarrow y = -x \vee y$. Luego el sistema $(A, 1, \rightarrow)$ donde 1 es el último elemento de A es un álgebra implicativa. Sea $G = \{a, b\}$, vamos a determinar $SH(G)$.

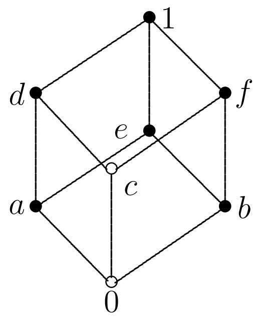


Figura 3.1

El operador $\rightarrow$ definido en A tiene la siguiente tabla:

$\rightarrow$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
a	f	1	f	f	1	1	f	1
b	d	d	1	d	d	1	1	1
c	e	e	e	1	1	e	1	1
d	b	e	b	f	1	e	f	1
e	c	d	f	c	d	1	f	1
f	a	a	e	d	d	e	1	1
1	0	a	b	c	d	e	f	1

Tabla 3.1

Por lo tanto $SH(\{a,b\}) = \{a,b,e,d,f,1\}$, cuyos elementos están indicados con $\bullet$ en el diagrama precedente, y su diagrama es:

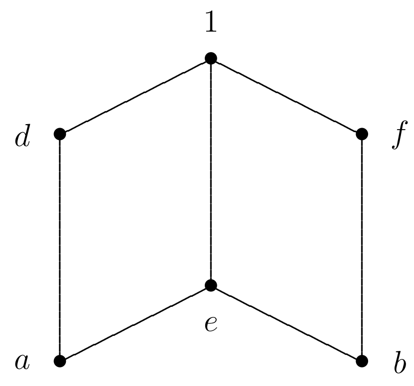


Figura 3.2

Ejemplo 3.3.2 *Consideremos el reticulado distributivo R que se obtiene haciendo el producto cartesiano de dos cadenas con tres elementos y una cadena con dos elementos, cuyo diagrama se indica a continuación. Por lo indicado precedentemente R es un álgebra de Heyting y por lo tanto un álgebra implicativa.*

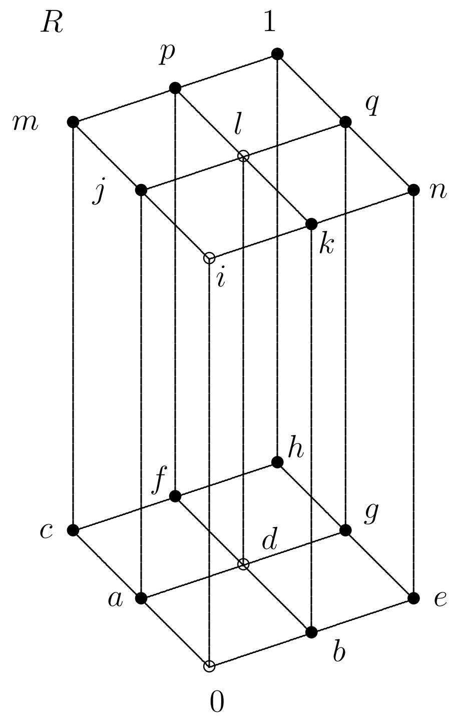


Figura 3.3

$\Rightarrow$	0	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a	n	1	n	1	1	n	1	1	1	n	1	n	1	1	n	1	1	1
b	m	m	1	m	1	1	1	1	1	m	m	1	1	m	1	1	1	1
c	n	q	n	1	q	n	1	q	1	n	q	n	q	1	n	1	q	1
d	i	m	n	m	1	n	1	1	1	i	m	n	1	m	n	1	1	1
e	m	m	p	m	p	1	p	1	1	m	m	p	p	m	1	p	1	1
f	i	j	n	m	q	n	1	q	1	i	j	n	q	m	n	1	q	1
g	i	m	k	m	p	n	p	1	1	i	m	k	p	m	n	p	1	1
h	i	j	k	m	l	n	p	q	1	i	j	k	l	m	n	p	q	1
i	h	h	h	h	h	h	h	h	h	1	1	1	1	1	1	1	1	1
j	e	h	e	h	h	e	h	h	h	e	1	n	1	1	n	1	1	1
k	c	c	h	c	h	h	h	h	h	m	m	1	1	m	1	1	1	1
l	0	c	e	c	h	e	h	h	h	i	m	n	1	m	n	1	1	1
m	e	g	e	h	g	e	h	g	h	n	q	n	q	1	n	1	q	1
n	c	c	f	c	f	h	f	h	h	m	m	p	p	m	1	p	1	1
p	0	a	e	c	g	e	h	g	h	i	j	n	q	m	n	1	q	1
q	0	c	b	c	f	e	f	h	h	i	m	k	p	m	n	p	1	1
1	0	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	1

Tabla 3.2

Luego $SH(\{a,b\})$ tiene el siguiente diagrama

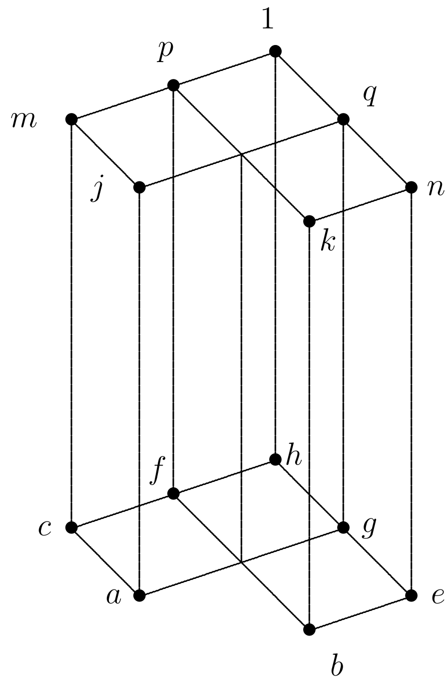


Figura 3.4

$\Rightarrow$	a	b	c	e	f	g	h	j	k	m	n	p	q	1
a	1	n	1	n	1	1	1	1	n	1	n	1	1	1
b	m	1	m	1	1	1	1	m	1	m	1	1	1	1
c	q	n	1	n	1	q	1	q	n	1	n	1	q	1
e	m	p	m	1	p	1	1	m	p	m	1	p	1	1
f	j	n	m	n	1	q	1	j	n	m	n	1	q	1
g	m	k	m	n	p	1	1	m	k	m	n	p	1	1
h	j	k	m	n	p	q	1	j	k	m	n	p	q	1
j	h	e	h	e	h	h	h	1	n	1	n	1	1	1
k	c	h	c	h	h	h	h	m	1	m	1	1	1	1
m	g	e	h	e	h	g	h	q	n	1	n	1	q	1
n	c	f	c	h	f	h	h	m	p	m	1	p	1	1
p	a	e	c	e	h	g	h	j	n	m	n	1	q	1
q	c	k	m	e	p	q	h	m	k	m	n	p	1	1
1	a	b	c	e	f	g	h	j	k	m	n	p	q	1

Tabla 3.3

a	b	$a \to a = b \to b = 1$
$a \to b = n$	$b \to a = m$	$(a \to b) \to a = c$
$(a \to b) \to b = f$	$(b \to a) \to a = g$	$(b \to a) \to b = e$
$((a \to b) \to a) \to a = q$	$((a \to b) \to b) \to a = j$	$((b \to a) \to b) \to b = p$
$((b \to a) \to a) \to b = k$	$(((b \to a) \to a) \to b) \to b =$ $(((a \to b) \to b) \to a) \to a = h$	

El diagrama de la Figura 3.4, así como la Tabla 3.3 del operador $\Rightarrow$ definido sobre este conjunto fué indicado por T. Skolem en 1952, [17], quien afirma haber demostrado que en toda álgebra implicativa A toda subálgebra generada por dos elementos tiene a lo sumo catorce elementos.

Si A es un álgebra implicativa e I un conjunto no vacío, sea $\mathcal{F} = A^I$ el conjunto de todas las funciones definidas sobre I y que toman sus valores en A. Si $f, g \in \mathcal{F}$ pongamos por definición $(f \to g)(i) = f(i) \to g(i)$, para todo $i \in I$. Entonces $f \to g \in \mathcal{F}$. Sea $\mathbf{1} \in \mathcal{F}$ definida por $\mathbf{1}(i) = 1$ para todo $i \in I$. Claramente $(\mathcal{F}, \mathbf{1}, \to)$ es un álgebra implicativa.

Teorema 3.3.2 *Si $\mathcal{F}'$ es una subálgebra de $\mathcal{F}$ e i es un elemento fijo de A entonces el conjunto $A' = \{f(i) : f \in \mathcal{F}'\}$ es una subálgebra de A.*

Dem. Sean $a, b \in A'$ luego existen $f, g \in \mathcal{F}'$ tales que $a = f(i)$ y $b = g(i)$. Como $\mathcal{F}'$ es una subálgebra de $\mathcal{F}$ entonces $f \to g \in \mathcal{F}'$ y por lo tanto $(f \to g)(i) \in A'$ esto es $a \to b = f(i) \to g(i) \in A'$. ■

3.4. Homomorfismos

Definición 3.4.1 *Si $(A, \to)$ es un álgebra implicativa y $(A', \Rightarrow)$ es un sistema algebraico formado por un conjunto no vacío A' y una operación binaria $\Rightarrow$ definida sobre A', se* *dice que A' es una imágen homomórfica de A si existe una función suryectiva h de A en A' que verifica:*

$$h(a \to b) = h(a) \Rightarrow h(b),$$

y se dice que h es un epimorfismo de A en A'.

Teorema 3.4.1 *Toda imágen homomórfica de un álgebra implicativa es un álgebra implicativa.*

Dem. Hacerla como ejercicio. ■

Si A y A' son álgebras implicativas y $h : A \to A'$ es una biyección que verifica la condición indicada en la Definición 3.4.1 se dice que h es un isomorfismo y que las álgebras A y A' son isomorfas, en este caso notaremos $A \cong A'$.

Se plantea en forma natural el problema de determinar todas las imagenes homomórficas de un álgebra implicativa A a partir de una construcción efectuada sobre A.

Definición 3.4.2 *Si $(A, 1, \to)$ y $(A', 1', \Rightarrow)$ son álgebras implicativas y h es un epimorfismo de A en A', se denomina núcleo de h al siguiente conjunto:*

$$Nuc(h) = h^{-1}(1') = \{x \in A : h(x) = 1'\}.$$

Teorema 3.4.2 *El núcleo $Nuc(h)$ de un epimorfismo h tiene las siguientes propiedades:*

D1) *$1 \in Nuc(h)$,*

D2) *Si $a \in Nuc(h)$ y $a \to b \in Nuc(h)$ entonces $b \in Nuc(h)$.*

Dem. Hacerla como ejercicio. ■

Definición 3.4.3 *Un subconjunto D de un álgebra implicativa A se dice un sistema deductivo de A si verifica:*

D1) *$1 \in D$,*

D2) *Si $a \in D$ y $a \to b \in D$ entonces $b \in D$. (modus ponens)*

(A. Tarski)

Por lo tanto todo núcleo de un epimorfismo es un sistema deductivo.

Sean $(A, 1, \to)$ y $(A', 1', \Rightarrow)$ álgebras implicativas y h es un epimorfismo de A en A'. Claramente $\{h^{-1}(a')\}_{a' \in A'}$ constituye una partición de A la cuál dá origen a una relación de equivalencia R_h sobre A, definida por $a \; R_h \; b$ si y solo si $h(a) = h(b)$. Notaremos las clases de equivalencia por $C(a) = \{b \in A : b \; R_h \; a\}$. Claramente si $h(a) = a'$ entonces $C(a) = h^{-1}(a')$. Una de las clases de equivalencia es precisamente $Nuc(h) = h^{-1}(1')$.

Si queremos recuperar el álgebra A' a partir de A, lo natural es considerar el conjunto cociente A/R_h y tratar de definir una operación $\to$ sobre A/R_h de forma que A/R_h sea un álgebra implicativa isomorfa a A'.
El problema fundamental es saber si es posible determinar esta relación de equivalencia a partir de $Nuc(h)$.

Observación 3.4.1 *Por lo indicado precedentemente para que $a, b \in A$ pertenezcan a una misma clase de equivalencia es necesario y suficiente que $h(a) = h(b)$ y por lo tanto es necesario y suficiente que:*

$$h(a) \Rightarrow h(b) = 1' = h(a \rightarrow b)$$

y

$$h(b) \Rightarrow h(a) = 1' = h(b \rightarrow a).$$

Esto es, la condición necesaria y suficiente para que a y b pertenezcan a la misma clase de equivalencia es que $a \rightarrow b \in Nuc(h)$ y $b \rightarrow a \in Nuc(h)$.

Definición 3.4.4 *Dado un sistema deductivo D de un álgebra implicativa A, y $a, b \in A$ diremos que a es congruente con b, módulo D, y notaremos $a \equiv b$ (mód. D) si se verifican:*

C1) $a \rightarrow b \in D$,

C2) $b \rightarrow a \in D$.

Si D es un sistema deductivo fijo notaremos $a \equiv b$ en vez de $a \equiv b$ (mód. D). Se dice que a y b son lógicamente equivalentes con respecto al sistema deductivo D.

3.5. Álgebras cociente

Lo indicado en la sección precedente nos conduce en forma natural a la siguiente construcción:

Dado un sistema deductivo D de un álgebra implicativa A, se trata de determinar si existe un álgebra implicativa A' que sea una imagen homomórfica de A y tal que si h es el epimorfismo de A en A' entonces $Nuc(h) = D$.

Teorema 3.5.1 (Teorema de la congruencia) *Si D es un sistema deductivo de un álgebra implicativa A, la relación binaria $\equiv$ indicada en la Definición 3.4.4 es una relación de equivalencia compatible con la operación $\rightarrow$, esto es*

E1) $a \equiv a$, *para todo* $a \in A$,

E2) *Si* $a, b \in A$ *son tales que* $a \equiv b$ *entonces* $b \equiv a$,

E3) *Si* $a, b, c \in A$ *son tales que* $a \equiv b$ *y* $b \equiv c$ *entonces* $a \equiv c$,

E4) *Si* $a, a_1, b, b_1 \in A$ *son tales que* $a \equiv a_1$ *y* $b \equiv b_1$ *entonces* $a \rightarrow b \equiv a_1 \rightarrow b_1$.

Dem.

E1) Como $a \rightarrow a = 1 \in D$ entonces $a \equiv a$.

E2) Por hipótesis $a \rightarrow b \in D$ y $b \rightarrow a \in D$ luego $b \rightarrow a \in D$ y $a \rightarrow b \in D$ luego $b \equiv a$.

E3) Por hipótesis (1) $a \to b \in D$, (2) $b \to a \in D$, (3) $b \to c \in D$ y (4) $c \to b \in D$.
Por el Teorema 2.2.12

$$(5)\ \ (a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1 \in D,$$

luego de (1) y (5) resulta por modus ponens

$$(6)\ \ (b \to c) \to (a \to c) \in D,$$

De (3) y (6) resulta por modus ponens que (7) $a \to c \in D$.
En forma análoga por los Teoremas 2.2.12 y 2.2.8

$$(c \to b) \to ((b \to a) \to (c \to a)) = (b \to a) \to ((c \to b) \to (c \to a)) = 1 \in D.$$

Luego de (2) y (4) se deduce (8) $c \to a \in D$. Finalmente de (7) y (8) resulta que $a \equiv c$.

Vamos a demostrar dos propiedades que nos serán de utilidad para probar E4.

4a) Si $a \equiv a_1$ entonces $a \to b \equiv a_1 \to b$.
Por hipótesis (1) $a \to a_1 \in D$ y (2) $a_1 \to a \in D$. Por el Teorema 2.2.12 tenemos

$$(3)\ \ (a_1 \to a) \to ((a \to b) \to (a_1 \to b)) = 1 \in D.$$

De (2) y (3) resulta por modus ponens: (4) $(a \to b) \to (a_1 \to b) \in D$.
Análogamente de

$$(a \to a_1) \to ((a_1 \to b) \to (a \to b)) = 1 \in D,$$

y (1) resulta (5) $(a_1 \to b) \to (a \to b) \in D$. De (4) y (5) resulta $a \to b \equiv a_1 \to b$.

4b) Si $a \equiv a_1$ entonces $b \to a \equiv b \to a_1$.
Por hipótesis (1) $a \to a_1 \in D$ y (2) $a_1 \to a \in D$. Por el Axioma H_1 tenemos que:

$$(3)\ \ (a \to a_1) \to (b \to (a \to a_1)) = 1 \in D$$

y

$$(4)\ \ (a_1 \to a) \to (b \to (a_1 \to a)) = 1 \in D.$$

De (1) y (3) resulta por modus ponens que

$$(5)\ \ (b \to a) \to (b \to a_1) = b \to (a \to a_1) \in D$$

y de (2) y (4) resulta por modus ponens que

$$(6)\ \ (b \to a_1) \to (b \to a) = b \to (a_1 \to a) \in D.$$

De (5) y (6) resulta $b \to a \equiv b \to a_1$.

E4) Por hipótesis (1) $a \equiv a_1$ y (2) $b \equiv b_1$. De (1) resulta por 4a) que (3) $a \to b \equiv a_1 \to b$ y de (2) resulta por 4b) que (4) $a_1 \to b \equiv a_1 \to b_1$. De (3) y (4) resulta que $a \to b \equiv a_1 \to b_1$.

■

Sea $A' = A/\equiv$ el conjunto cociente, también notaremos $A' = A/D$. Representemos por $C(a) = \{x \in A : x \equiv a\}$. Dadas $C(a)$ y $C(b)$ pongamos por definición:

$$C(a) \to C(b) = C(a \to b).$$

Por la propiedad E4) esta operación está unívocamente determinada, esto es la clase de equivalencia $C(a \to b)$ no depende de los elementos elegidos en las clases de equivalencia $C(a)$ y $C(b)$.

Teorema 3.5.2 *El sistema $(A/D, \to)$ es una imagen homomórfica de A.*

Dem. Sea $\varphi : A \to A'$ la función definida por $\varphi(a) = C(a)$, con $a \in A$. Es claro que φ es suryectiva. Además:

$$\varphi(a \to b) = C(a \to b) = C(a) \to C(b) = \varphi(a) \to \varphi(b).$$

Luego por el Teorema 3.4.1 el sistema $(A/D, \to)$ es un álgebra implicativa, que se denomina álgebra implicativa cociente de A por D.
Observemos que $C(1) = D$. En efecto, si $x \in C(1)$ en particular $1 \to x \in D$ y como $1 \in D$ resulta por modus ponens que $x \in D$, luego $C(1) \subseteq D$. Si $x \in D$ como $x \to 1 = 1 \in D$ y $1 \to x = x \in D$ entonces $x \equiv 1$, luego $x \in C(1)$ y por lo tanto $D \subseteq C(1)$. Al epimorfismo φ se denomina epimorfismo natural de A en A' para distinguirlo de cualquier otro epimorfismo de A en A'. ■

Corolario 3.5.1 *El álgebra cociente $(A/D, \to)$ es un álgebra implicativa, cuyo último elemento es $C(1)$.*

Corolario 3.5.2 *Dado un sistema deductivo D de un álgebra implicativa A existe por lo menos un álgebra implicativa A' que es una imagen homomórfica de A y tal que si h es el epimorfismo de A en A' entonces $Nuc(h) = D$.*

Dem. Basta considerar $A' = A/D$. ■

Lema 3.5.1 *Para que un epimorfismo h de un álgebra implicativa A en un álgebra implicativa A' sea un isomorfismo es necesario y suficiente que $Nuc(h) = \{1\}$.*

Dem. <u>La condición es necesaria.</u> Sabemos que $1 \in Nuc(h)$, luego $\{1\} \subseteq Nuc(h)$. Si $x \in Nuc(h)$ esto es $h(x) = 1'$, como $h(1) = 1'$ y h es inyectiva tenemos que $x = 1$, luego $Nuc(h) \subseteq \{1\}$.
<u>La condición es suficiente.</u> Supongamos que $h(a) = h(b)$ luego $h(a \to b) = h(a) \to h(b) = 1'$ y $h(b \to a) = h(b) \to h(a) = 1'$, esto es, $a \to b \in Nuc(h)$ y $b \to a \in Nuc(h)$ y como por hipótesis $Nuc(h) = \{1\}$ tenemos que $a \to b = 1$ y $b \to a = 1$, es decir $a = b$. ■

Teorema 3.5.3 *Si A, A_1 y A_2 son álgebras implicativas tales que:*

(1) *existe un epimorfismo h_1 de A en A_1,*

(2) *existe un epimorfismo h_2 de A en A_2,*

(3) $Nuc(h_1) = Nuc(h_2)$,

entonces las álgebras A_1 y A_2 son isomorfas.

Dem.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "h_2"'] & A_1 \arrow[dl, "h"] \\ A_2 & \end{tikzcd}$$

Si $a \in A$ notaremos $C_1(a) = \{x \in A : h_1(x) = h_1(a)\}$ y $C_2(a) = \{x \in A : h_2(x) = h_2(a)\}$. Por (3) $C_1(a) = C_2(a)$.
Sea $a_1 \in A_1 = h_1(A)$, luego $a_1 = h_1(a)$ con $a \in A$ y por lo tanto $h_2(a) = a_2 \in A_2$. Pongamos por definición:

$$h(a_1) = a_2 = h_2(a).$$

Probemos que h está bien definida, esto es que si $b \in A$ es tal que $h_1(b) = a_1$ entonces $h_2(b) = h_2(a)$.
En efecto, si $b \in A$ es tal que $h_1(b) = a_1 = h_1(a)$ entonces $b \in C_1(a) = C_2(a)$ y por lo tanto $h_2(b) = h_2(a)$. Luego h es una función de A_1 en A_2.
Sea $a \in A$, como $h_1(a) = a_1 \in A_1$, entonces por la definición de h tenemos $h(a_1) = h_2(a)$, esto es $h(h_1(a)) = h_2(a)$, y por lo tanto $(h \circ h_1)(a) = h_2(a)$.
De aquí resulta que h es suryectiva, ya que si $a_2 \in A_2$ entonces $a_2 = h_2(a)$, con $a \in A$, y por lo tanto $h_1(a) = a_1$, luego $h(a_1) = (h(h_1(a)) = h_2(a) = a_2$.
<u>h es única.</u> Supongamos que $g : A_1 \to A_2$ verifica $g \circ h_1 = h_2$, y probemos que $h(a_1) = g(a_1)$, para todo $a_1 \in A_1$. En efecto, $a_1 = h_1(a)$ con $a \in A$ entonces por hipótesis $g(a_1) = g(h_1(a)) = h_2(a) = h(h_1(a)) = h(a_1)$, luego $h = g$.
Probemos que $h(a_1 \to b_1) = h(a_1) \to h(b_1)$ donde $a_1, b_1 \in A_1$. Sean $a, b \in A$ tales que $h_1(a) = a_1$ y $h_1(b) = b_1$ luego

$$h(a_1) \to h(b_1) = h(h_1(a)) \to h(h_1(b)) = h_2(a) \to h_2(b) = h_2(a \to b) =$$

$$h(h_1(a \to b)) = h(h_1(a) \to h_1(b)) = h(a_1 \to b_1.$$

Sean $1, 1_1$ y 1_2 los últimos elementos de A, A_1 y A_2, respectivamente. Probemos que $Nuc(h) = \{1_1\}$ de donde resultará por el Lema 3.5.1 que h es inyectiva. Sabemos que $1_1 \in Nuc(h) = \{x \in A_1 : h(x) = 1_2\}$. Si $a_1 \in Nuc(h)$ esto es $1_2 = h(a_1) = h(h_1(a)) = h_2(a)$ donde $a \in A$ verifica $h_1(a) = a_1$. Además $h_1(1) = 1_1$ luego $h_2(a) = h(h_1(a)) = 1_2 = h(h_1(1)) = h_2(1)$ y por lo tanto $C_2(a) = C_2(1)$ esto es $C_1(a) = C_1(1)$ luego $a_1 = h_1(a) = h_1(1) = 1_1$. ∎

Lema 3.5.2 *Si A y A_1 son álgebras implicativas, h es un epimorfismo de A en A_1 y $D = Nuc(h)$ entonces A/D y A_1 son isomorfas.*

Dem. Sea φ la transformación canónica de A sobre A/D, luego $\varphi(A) = A/D$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi"'] & A_1 \\ A/D & \end{tikzcd}$$

Por hipótesis $Nuc(h) = D$ y como φ es el epimorfismo natural de A en A/D entonces $Nuc(\varphi) = D$, luego por el Teorema 3.5.3 las álgebras A/D y A_1 son isomorfas. ■

Teorema 3.5.4 *Sean A, A' álgebras de Hilbert, $h : A \to A'$ un homomorfismo de A en A'. Si $G \subseteq A$ es tal que $SH(G) = A$ entonces $SH(h(G)) = h(A)$. (esto es, si G genera A entonces $h(G)$ genera al álgebra de Hilbert $h(A)$). Si h es un epimorfismo entonces $A' = h(A) = SH(h(G))$.*

Dem. Sea $A'_1 = SH(h(G))$ luego A'_1 es una subálgebra de A' y en consecuencia $A_1 = h^{-1}(A'_1)$ es una subálgebra de A. Además (1) $G \subseteq A_1$. En efecto, si $g \in G$ entonces $h(g) \in h(G) \subseteq A'_1$ y por lo tanto $g \in h^{-1}(A'_1) = A_1$. De (1) resulta que $A = SH(G) \subseteq A_1$, esto es $A_1 = A$, y en consecuencia como h es una función de A sobre $h(A)$:

$$h(A) = h(A_1) = h(h^{-1}(A'_1)) = A'_1 = SH(h(G)).$$

■

3.6. Suma ordinal de álgebras implicativas

Sean A y B álgebras implicativas. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A \cap B = \emptyset$. Representaremos con 1_A (1_B) el último elemento de A (B).

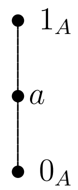
Definición 3.6.1 *Se denomina suma ordinal de las álgebras implicativas $(A, \to_A)$ y $(B, \to_B)$ al conjunto $A \cup B$ sobre el cuál se define el operador $\Rightarrow$ del siguiente modo:*

- *Si $a \in A$ y $b \in B$ entonces $a \Rightarrow b = 1_B$, $b \Rightarrow a = a$,*
- *Si $b, b' \in B$ entonces $b \Rightarrow b' = b \to_B b$,*
- *Si $a, a' \in A$ y $a \to a' \neq 1_A$ entonces $a \Rightarrow a' = a \to_A a'$,*
- *Si $a, a' \in A$ y $a \to a' = 1_A$ entonces $a \Rightarrow a' = 1_B$*

Se verifica sin dificultad que $(A \cup B, \Rightarrow)$ es un álgebra implicativa la cuál también será notada por $A \oplus B$.

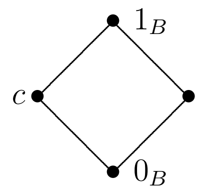
Ejemplo 3.6.1 *Sean $(A, \to_A)$ y $(B, \to_B)$ las álgebras implicativas cuyos diagramas y operaciones se indican a continuación*

A



$\to_A$	0_A	a	1_A
0_A	1_A	1_A	1_A
a	0_A	1_A	1_A
1_A	0_A	a	1_A

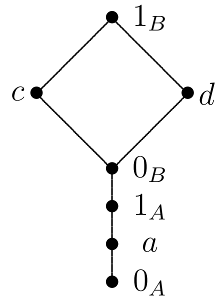
B



$\to_B$	0_B	c	d	1_B
0_B	1_B	1_B	1_B	1_B
c	d	1_B	d	1_B
d	c	c	1_B	1_B
1_B	0_B	c	d	1_B

La tabla del operador $\Rightarrow$ definido sobre $A \cup B$ y el diagrama de $A \oplus B$ se indican a continuación:

$\Rightarrow$	0_A	a	1_A	0_B	c	d	1_B
0_A	1_B	1_B	1_B	1_B	1_B	1_B	1_B
a	0_A	1_B	1_B	1_B	1_B	1_B	1_B
1_A	0_A	a	1_B	1_B	1_B	1_B	1_B
0_B	0_A	a	1_A	1_B	1_B	1_B	1_B
c	0_A	a	1_A	d	1_B	d	1_B
d	0_A	a	1_A	c	c	1_B	1_B
1_B	0_A	a	1_A	0_B	c	d	1_B



4. TEOREMA DE LA DEDUCCION

4.1. Consecuencias de un conjunto de elementos de un álgebra implicativa

Indicaremos en este capítulo métodos para obtener sistemas deductivos.
En la elaboración de una teoría deductiva como las que se presentan en matemática, se considera siempre un conjunto no vacío H de enunciados, a cada uno de los cuales se dá el nombre de *axioma* o *hipótesis*. Los enunciados que figuran en H no son, en general, tesis del cálculo proposicional, y por eso se dice que son *verdaderos por hipótesis*.
Se trata entonces de obtener *consecuencias lógicas* de las hipótesis que figuran en H, lo cual se hace por medio de *demostraciones*.
Esta situación tiene su traducción en las álgebras implicativas de acuerdo a las definiciones que vamos a indicar.
Consideremos en primer lugar el caso en que H es una sucesión finita, no vacía, de elementos de un álgebra implicativa A. Esto es, $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$, donde $h_i \in A$, $1 \leq i \leq n$.

Definición 4.1.1 *Dada una sucesión, no vacía, $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ de elementos de un álgebra implicativa A, se dice que el elemento x de A es una consecuencia de la sucesión H si: $h_1 \to (h_2 \to (\cdots \to (h_n \to x) \cdots) = 1$.*

Para indicar este hecho usaremos la siguiente notación: $h_1, h_2, \ldots, h_n \vdash x$, y diremos también que x es una consecuencia lógica de la sucesión de hipótesis $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

La primera idea intuitiva que tenemos al respecto de consecuencia lógica x de una sucesión de hipótesis $h_1, h_2, \ldots, h_n$, es que si alteramos el orden en que se indican inicialmente las hipótesis, entonces las consecuencias lógicas no se alteran.
Comenzaremos por demostrar que esto sucede si alteramos el orden de dos hipótesis consecutivas.

Lema 4.1.1 *Si $h_1, h_2, \ldots, h_k, h_{k+1}, \ldots, h_n \vdash x$ entonces $h_1, h_2, \ldots, h_{k+1}, h_k, \ldots, h_n \vdash x$.*

Dem. Se basa en la siguiente fórmula: (1) $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$.
Por hipótesis tenemos que

$$h_1 \to (h_2 \to (\cdots \to (h_{k-1} \to (h_k \to (h_{k+1} \to (\cdots \to (h_n \to x) \cdots) = 1,$$

luego aplicando la fórmula (1) se tiene:

$$h_1 \to (h_2 \to (\cdots \to (h_{k-1} \to (h_{k+1} \to (h_k \to (\cdots \to (h_n \to x) \cdots) = 1,$$

o sea que

$$h_1, h_2, \ldots, h_{k+1}, h_k, \ldots, h_n \vdash x.$$

■

Basados en este lema se demuestra por procedimientos triviales el siguiente:

Lema 4.1.2 *Si $h_1, h_2, \ldots, h_n \vdash x$ y $k_1, k_2, \ldots, k_n$ es una permutación de la sucesión $h_1, h_2, \ldots, h_n$ entonces $k_1, k_2, \ldots, k_n \vdash x$.*

Vemos así que el hecho de que x sea una consecuencia lógica de las hipótesis que figuran en la sucesión $h_1, h_2, \ldots, h_n$ no depende del orden en que están indicadas las hipótesis, sino solamente del conjunto $\{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ de las hipótesis en cuestión. Podemos por lo tanto reemplazar la Definición 4.1.1 por la siguiente:

Definición 4.1.2 *Diremos que x es una consecuencia del conjunto finito $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ si:*

$$\text{(C)} \quad h_1 \to (h_2 \to (\cdots \to (h_n \to x) \cdots) = 1$$

y lo representaremos por la siguiente notación: $h_1, h_2, \ldots, h_n \vdash x$.

El Lema 4.1.2 muestra que la Definición 4.1.2 no es ambigua.

Observación 4.1.1 *Dar un conjunto $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ no implica dar ningún ordenamiento de sus elementos, si bien es cierto que al escribir $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ los elementos $h_1, h_2, \ldots, h_n$ se encuentran indicados en un cierto orden, pero ello se debe solamente a una cuestión de notación.*
Por otro lado en la fórmula (C) *figura un ordenamiento bien determinado de $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Si hubiéramos escrito $H = \{h_2, h_1, \ldots, h_n\}$ la fórmula correspondiente a* (C) *sería* (C_1) $h_2 \to (h_1 \to (\cdots \to (h_n \to x) \cdots) = 1$, *lo cual motiva naturalmente el problema de saber si las fórmulas* (C) *y* (C_1) *son equivalentes. El Lema 4.1.2 tiene por objetivo mostrar que en la Definición 4.1.2 el orden en que están indicados los elementos del conjunto H no altera el significado de la Definición 4.1.2.*

Acabamos por lo tanto de indicar el concepto de consecuencia x de una parte finita no vacía H, de A.
Ampliaremos este concepto introduciendo la siguiente:

Definición 4.1.3 *Diremos que x es una consecuencia de la parte $\emptyset$ de A, si $x = 1$. Indicaremos este hecho del siguiente modo $\emptyset \vdash x$.*

Indiquemos ahora la definición de consecuencia de una parte cualquiera H de A.

Definición 4.1.4 *Si H es una parte cualquiera de A, diremos que x es una consecuencia de H, si x es consecuencia de una parte finita de H. Para indicar este hecho escribiremos $H \vdash x$.*

Finalmente es natural introducir la siguiente:

Definición 4.1.5 *Dada una parte cualquiera H de A representaremos por $\mathbb{C}(H)$ el conjunto de todas las consecuencias de H.*

Al operador $\mathbb{C}$ así definido le daremos el nombre de *operador de consecuencia*.

Teorema 4.1.1 $\mathbb{C}(H)$ *es un sistema deductivo que contiene a H.*

Dem. Consideremos en primer lugar el caso en que $H = \emptyset$, entonces de las definiciones 4.1.3 y 4.1.5 resulta que $\mathbb{C}(\emptyset) = \{1\}$ y el teorema queda probado, ya que $\{1\}$ es un sistema deductivo y $\emptyset \subseteq \{1\}$.
Supongamos ahora que $H \neq \emptyset$.
(A) $H \subseteq \mathbb{C}(H)$.

Sea $h \in H$, luego como $h \to h = 1$ podemos afirmar que $h \vdash h$, esto es, h es una consecuencia de la parte finita $\{h\}$ de H. Entonces $H \vdash h$, es decir, $h \in \mathbb{C}(H)$ y por lo tanto $H \subseteq \mathbb{C}(H)$.

(B) $\mathbb{C}(H)$ es un sistema deductivo.
D1) $1 \in \mathbb{C}(H)$. En efecto, como $H \neq \emptyset$ existe $h \in H$ y como $h \to 1 = 1$ entonces $h \vdash 1$, luego $1 \in \mathbb{C}(H)$.
D2) Si $x \in \mathbb{C}(H)$ y $x \to y \in \mathbb{C}(H)$ entonces $y \in \mathbb{C}(H)$.
De $x \in \mathbb{C}(H)$ resulta que existen elementos $h_1, h_2, \ldots, h_m \in H$ tales que

$$h_1 \to (h_2 \to (\cdots \to (h_m \to x) \cdots) = 1. \tag{1}$$

De $x \to y \in \mathbb{C}(H)$ resulta que existen elementos $g_1, g_2, \ldots, g_n \in H$ tales que

$$g_1 \to (g_2 \to (\cdots \to (g_n \to (x \to y) \cdots) = 1. \tag{2}$$

De (2) y el axioma H_3

$$h_1 \to (h_2 \to (\cdots \to (h_m \to (g_1 \to (g_2 \to (\cdots \to (g_n \to (x \to y) \cdots) = 1,$$

o equivalentemente

$$g_1 \to (g_2 \to (\cdots \to (g_n \to (h_1 \to (h_2 \to (\cdots \to (h_m \to (x \to y) \cdots) = 1.$$

Luego por el Teorema 2.2.8

$$g_1 \to (g_2 \to (\cdots \to (g_n \to ((h_1 \to (h_2 \to (\cdots \to (h_m \to x) \cdots) \to$$

$$(h_1 \to (h_2 \to (\cdots \to (h_m \to y)) \cdots) = 1.$$

Por lo tanto teniendo en cuenta la hipótesis (1) se tiene

$$g_1 \to (g_2 \to (\cdots \to (g_n \to (1 \to (h_1 \to (h_2 \to (\cdots \to (h_m \to y) \cdots) = 1.$$

O sea

$$g_1 \to (g_2 \to (\cdots \to (g_n \to (h_1 \to (h_2 \to (\cdots \to (h_m \to y) \cdots) = 1.$$

Es decir, $g_1, g_2, \ldots, g_n, h_1, h_2, \ldots, h_m \vdash y$, lo cual implica que $H \vdash y$, o sea $y \in \mathbb{C}(H)$. ■

Teorema 4.1.2 *Teorema de la deducción* (A. Tarski)

(1) *Si* $h_1, h_2, \ldots, h_n, x \vdash y$ *entonces* $h_1, h_2, \ldots, h_n \vdash (x \to y)$.

(2) *Si* $h_1, h_2, \ldots, h_n \vdash (x \to y)$ *entonces* $h_1, h_2, \ldots, h_n, x \vdash y$.

Dem. Resulta inmediato de la definición de consecuencia. En efecto, $h_1, h_2, \ldots, h_n, x \vdash y$ es equivalente por definición a $h_1 \to (h_2 \to (\cdots \to (h_n \to (x \to y) \cdots) = 1$ lo cual es equivalente a $h_1, h_2, \ldots, h_n \vdash (x \to y)$. ■

Corolario 4.1.1 *Si* H *es una parte no vacía de* A *entonces las afirmaciones* (1) $H, x \vdash y$ *y* (2) $H \vdash (x \to y)$ *son equivalentes.*

Dem. (1)$\Rightarrow$(2). Por hipótesis existe un número finito de elementos del conjunto $H \cup \{x\}$ que tiene por consecuencia y.
Si x figura en la parte finita entonces $h_1, h_2, \ldots, h_n, x \vdash y$ y por lo tanto

$$h_1, h_2, \ldots, h_n \vdash (x \to y),$$

o sea $H \vdash (x \to y)$, luego se verifica (2).
Supongamos ahora que x no figura en la parte finita considerada, entonces tendremos que $h_1, h_2, \ldots, h_m \vdash y$, esto es, $h_1 \to (h_2 \to (\cdots \to (h_m \to y)\cdots) = 1$.
Luego $x \to (h_1 \to (h_2 \to (\cdots \to (h_m \to y)\cdots) = 1$, lo que equivale a $x, h_1, h_2, \ldots, h_m \vdash y$, o sea $h_1, h_2, \ldots, h_m, x \vdash y$ y por lo tanto $h_1, h_2, \ldots, h_m \vdash (x \to y)$, es decir, $H \vdash (x \to y)$, esto es se verifica (2).

(2)$\Rightarrow$(1). Por hipótesis $H \vdash (x \to y)$, o sea existen $h_1, h_2, \ldots, h_n \in H$ tales que

$$h_1, h_2, \ldots, h_n \vdash (x \to y),$$

luego $h_1, h_2, \ldots, h_n, x \vdash y$, es decir, $H, x \vdash y$ y por lo tanto se verifica (1). ■

4.2. Sistema deductivo generado por una parte de un álgebra implicativa

Definición 4.2.1 *Se da el nombre de sistema deductivo generado por una parte H de A a la intersección de todos los sistemas deductivos que contienen a H.*

Esta es una buena definición porque la intersección de una familia cualquiera de sistemas deductivos es un sistema deductivo.
Entre los sistemas deductivos figura el sistema deductivo formado por el elemento 1, que es el menor de todos los sistemas deductivos.
Para indicar el sistema deductivo generado por H usaremos la notación $D(H)$. Si $H = \{a\}$ notaremos $D(a)$ en vez de $D(\{a\})$, a estos sistemas deductivos se denominan sistemas deductivos principales.

Un subconjunto no vacío X de un conjunto ordenado A se dice una sección superior si verifica: Si $x \in X$ e $y \in A$ es tal que $x \leq y$ entonces $y \in X$. Es claro que si $x \in A$ entonces $[x) = \{y \in A : x \leq y\}$ es una sección superior.
Observemos que toda sección superior S de un álgebra implicativa A es una subálgebra de A. En efecto si $x, y \in S$ como $y \leq x \to y$ entonces $x \to y \in S$.

Lema 4.2.1 *En un álgebra implicativa A todo sistema deductivo D es una sección superior.*

Dem. Si (1) $x \in D$ y $x \leq y$ entonces (2) $x \to y = 1 \in D$. De (1) y (2) resulta por modus ponens que $y \in D$. ■

Lema 4.2.2 *Si A es un álgebra implicativa y $a \in A$ entonces $D(a) = [a)$.*

Dem. $[a)$ es un sistema deductivo. En efecto, como $a \leq 1$ entonces $1 \in [a)$.
Si $x, x \to y \in [a)$ entonces $a \leq x$ y $a \leq x \to y$, esto es (1) $a \to x = 1$ y $a \to (x \to y) = 1$.
Del Teorema 2.2.8, (1) y el Teorema 2.2.4 tenemos:

$$1 = a \to (x \to y) = (a \to x) \to (a \to y) = 1 \to (a \to y) = a \to y,$$

esto es $y \in [a)$. Como $a \in [a)$ y $[a)$ es un sistema deductivo resulta $D(a) \subseteq [a)$. Recíprocamente si $y \in [a)$ entonces $a \to y = 1 \in D(a)$ y como $a \in D(a)$ resulta por modus ponens que $y \in D(a)$ ■

Teorema 4.2.1 $D(H) = \mathbb{C}(H)$.

Dem. Ya sabemos que $\mathbb{C}(H)$ es un sistema deductivo y que $H \subseteq \mathbb{C}(H)$, luego como de la definición de $D(H)$ surge que $D(H)$ es el menor sistema deductivo que contiene a H tendremos que (1) $D(H) \subseteq \mathbb{C}(H)$.
Probemos ahora que (2) $\mathbb{C}(H) \subseteq D(H)$. Basta observar que todo sistema deductivo que contiene a H contiene a $\mathbb{C}(H)$. Luego como $D(H)$ es un sistema deductivo que contiene a H resulta que $\mathbb{C}(H) \subseteq D(H)$.
De (1) y (2) se tiene $D(H) = \mathbb{C}(H)$. ■

Teorema 4.2.2 (A. Monteiro) *Dado un sistema deductivo C y un elemento b, entonces el sistema deductivo generado por $C \cup \{b\}$ es el conjunto D de todos los $x \in A$ tales que $b \to x \in C$.*

Dem. Queremos probar que $D(\{C, b\}) = \{x \in A : b \to x \in C\} = D$.
(A) D es un sistema deductivo.
D1) $1 \in D$. En efecto, como $b \to 1 = 1 \in C$ entonces $1 \in D$.
D2) Si $x \in D$ y $x \to y \in D$ entonces $y \in D$.
Por hipótesis (1) $b \to x \in C$ y $b \to (x \to y) \in C$. Por el Teorema 2.2.8, $b \to (x \to y) = (b \to x) \to (b \to y)$ entonces (2) $(b \to x) \to (b \to y) \in C$. De (1) y (2), por ser C un sistema deductivo resulta que $b \to y \in C$, esto es, $y \in D$.

(B) $\{C, b\} \subseteq D$.
Como $b \to b = 1 \in C$ entonces (3) $\{b\} \subseteq D$.
Veamos que (4) $C \subseteq D$. En efecto, sea $c \in C$, sabemos que $c \to (b \to c) = 1 \in C$, luego por modus ponens se tiene $b \to c \in C$. Por lo tanto $c \in D$, es decir, $C \subseteq D$.
De (3) y (4) resulta que $\{C, b\} \subseteq D$.

(C) Si D' es un sistema deductivo tal que $\{C, b\} \subseteq D'$ entonces $D \subseteq D'$.
Dea $d \in D$, esto es $b \to d \in C$. Como $\{C, b\} \subseteq D'$ resulta $b \in D'$ y $C \subseteq D'$, por lo tanto tenemos que $b,\ b \to d \in D'$. Luego por modus ponens $d \in D'$, es decir, $D \subseteq D'$. ■

Observación 4.2.1 *Sabemos que si $x = 1$ entonces $x \in \mathbb{C}(\emptyset)$. Ahora bien, si $x \in \mathbb{C}(\emptyset) = D(\emptyset) = \{1\}$ entonces $x = 1$.*

Luego es natural introducir la siguiente

Definición 4.2.2 $\emptyset \vdash x$ *es equivalente a* $x = 1$.

$\mathbb{C}(H)$ es la reunión de los conjuntos $\mathbb{C}(F)$, donde F es una parte finita de H, entre las cuales figura la parte vacía:

$$\mathbb{C}(H) = \bigcup_{\substack{F \subseteq H \\ |F| < \chi_0}} \mathbb{C}(F),$$

donde χ_0 es el cardinal de los números naturales.
De aquí resulta que el operador de consecuencia $\mathbb{C}$ tiene las propiedades siguientes:

C1) $\mathbb{C}$ está definido para todas las partes de A,

C2) $H \subseteq \mathbb{C}(H)$,

C3) $\mathbb{C}(H) = \bigcup\limits_{\substack{F \subseteq H \\ |F| < \chi_0}} \mathbb{C}(F)$,

C4) $\mathbb{C}(\emptyset) \neq \emptyset$,

C5) $\mathbb{C}(\mathbb{C}(H)) = \mathbb{C}(H)$.

Observación 4.2.2 *(1) En estas cinco propiedades del operador* $\mathbb{C}$ *no interviene el operador* $\rightarrow$.
(2) El operador $\mathbb{C}$ *de consecuencia definido en la teoría de los conjuntos reticulados inferiormente con último elemento, también tiene estas propiedades. Recordemos que* $\mathbb{C}(H)$ *es el filtro generado por* H.

Tarski fue llevado a dar las siguientes definiciones:

Definición 4.2.3 *Al par* $(A, \mathbb{C})$ *formado por un conjunto cualquiera* A *y un operador* $\mathbb{C}$ *definido sobre* 2^A *que a cada parte* H *de* A *hace corresponder una parte* $\mathbb{C}(H)$ *de* A *en forma tal que se cumplan las propiedades* C1 *a* C5 *se le da el nombre de teoría deductiva.*

Definición 4.2.4 X *es un sistema deductivo si* $\mathbb{C}(X) = X$.

Definición 4.2.5 *Un sistema deductivo* D *se dice axiomatizable si existe una parte finita* $F = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ *tal que* $D = \mathbb{C}\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$.

Definición 4.2.6 *Dos partes* H_1 *y* H_2 *de* A *se dicen equivalentes si* $\mathbb{C}(H_1) = \mathbb{C}(H_2)$.

Definición 4.2.7 *Se dice que una parte* H *de* A *es independiente si para todo* $a \in H$ *se tiene que* $\mathbb{C}(H) \neq \mathbb{C}(H \setminus \{a\})$.

Sea A un álgebra implicativa y $f \in A$. Consideremos la transformación $F(x)$ de A en A definida por medio de la siguiente fórmula: $F(x) = f \rightarrow x$, donde f es un elemento fijo de A. En virtud del Teorema 2.2.8 tenemos que:

$F(x \rightarrow y) = f \rightarrow (x \rightarrow y) = (f \rightarrow x) \rightarrow (f \rightarrow y) = F(x) \rightarrow F(y)$, por lo tanto F es un homomorfismo de A en A.
Sea $A' = \{F(x) : x \in A\}$. Veamos que A' es una subálgebra de A. En efecto, sean $a', b' \in A'$, esto es, $a' = F(a), b' = F(b)$, donde $a, b \in A$. Luego $a' \rightarrow b' = F(a) \rightarrow F(b) = F(a \rightarrow b)$ y como $a \rightarrow b \in A$ entonces $a' \rightarrow b' \in A'$.
En estas condiciones F es un homomorfismo de A sobre A'. Luego

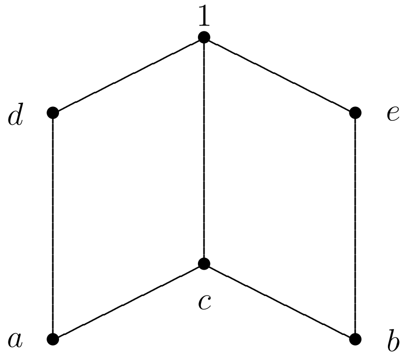
$$Nuc(F) = \{x \in A : F(x) = 1\} = \{x \in A : f \rightarrow x = 1\} = \{x \in A : f \leq x\} = [f) = D(f).$$

Podemos por lo tanto afirmar que el álgebra $A/[f)$ es isomorfa a una subálgebra de A.
Al homomorfismo $F(x) = f \rightarrow x$ le daremos el nombre de *homomorfismo principal* (determinado por f). Por lo tanto cada elemento f de A dá origen a un homomorfismo de A en A.

Observación 4.2.3 *La transformación $G(x) = x \to f$, donde f es un elemento fijo de A, no es en general un homomorfismo.*
Probemos que $G(x)$ es un homomorfismo solamente en el caso en que $f = 1$.
En efecto, supongamos que $G(x)$ es un homomorfismo, tendremos entonces que $x \to f = G(x) = G(1 \to x) = G(1) \to G(x) = (1 \to f) \to (x \to f) = f \to (x \to f) = 1$, para todo $x \in A$, esto es $x \to f = 1$, para todo $x \in A$, en particular para $x = 1$, o sea $1 \to f = 1$, esto es $f = 1$, como queríamos probar.
En estas condiciones $G(x) = x \to 1 = 1$, para todo $x \in A$, luego el núcleo de éste es el álgebra A, por lo tanto $A/Nuc(G) = A/A = \{1\}$ y tenemos así una imagen homomórfica trivial, formada por un solo elemento.

Aunque $G(x)$ no es en general un homomorfismo, se trata de una transformación que tiene su importancia y que será estudiada mas adelante en forma detallada.

Ejemplo 4.2.1 *Sea A el álgebra implicativa indicada en la figura, sobre la cual la operación $\to$ está definida por la tabla siguiente:*



$\to$	a	b	c	d	e	1
a	1	e	1	1	e	1
b	d	1	1	d	1	1
c	d	e	1	d	e	1
d	c	b	c	1	e	1
e	a	c	c	d	1	1
1	a	b	c	d	e	1

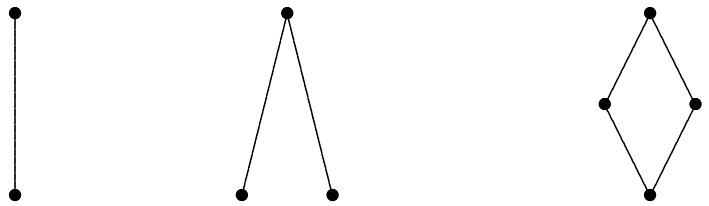
Determinemos todos sus sistemas deductivos.

X	$D(X)$	X	$D(X)$	X	$D(X)$
$\emptyset$	$\{1\}$	$\{a,b\}$	A	$\{b,e\}$	$D(b)$
$\{a\}$	$\{a,c,d,1\}$	$\{a,c\}$	$D(a)$	$\{b,1\}$	$D(b)$
$\{b\}$	$\{b,c,e,1\}$	$\{a,d\}$	$D(a)$	$\{c,d\}$	$D(a)$
$\{c\}$	$\{c,1\}$	$\{a,e\}$	A	$\{c,e\}$	$D(b)$
$\{d\}$	$\{d,1\}$	$\{a,1\}$	$D(a)$	$\{c,1\}$	$D(c)$
$\{e\}$	$\{e,1\}$	$\{b,c\}$	$D(b)$	$\{d,e\}$	$\{d,e,1\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{b,d\}$	A	$\{d,1\}$	$D(d)$
				$\{e,1\}$	$D(e)$

Es fácil ver que si $X \subseteq A$ es tal que $3 \leq |X| \leq 6$ entonces $D(X)$ coincide con alguno de los sistemas deductivos A, $D(1) = \{1\}$, $D(a) = \{a,c,d,1\}$, $D(b) = \{b,c,e,1\}$, $D(c) = \{c,1\}$, $D(d) = \{d,1\}$, $D(e) = \{e,1\}$, $D(\{d,e\}) = \{d,e,1\}$. Por lo tanto existen 9 sistemas deductivos.

Determinemos todas sus imágenes homomórficas principales. Claramente $A/\{1\}$ es isomorfa a A y las otras imágenes homomórficas tienen los siguientes diagramas de Hasse

$A/D(a),\ A/D(b)$ $\quad$ $A/D(c)$ $\quad$ $A/D(d),\ A/D(c)$



Sea A el álgebra de Hilbert indicada en la Figura 3.4. Claramente $A/\{1\}$ es una imagen homomórfica de A. A continuación indicamos algunas imágenes homomórficas de A.

$A/D(a),\ A/D(b)$ $\quad$ $A/D(c),\ A/D(e)$ $\quad$ $A/D(j),\ A/D(k)$

5. ARITMETICA DE LOS SISTEMAS DEDUCTIVOS

5.1. Reticulado de los sistemas deductivos

Sea $\Phi(A)$ la familia de todos los sistemas deductivos de un álgebra implicativa A.

Definición 5.1.1 *Dados $D_1, D_2 \in \Phi(A)$ diremos que D_2 es una consecuencia de D_1 o que D_1 divide a D_2 y escribiremos $D_1 \leq D_2$ si $D_2 \subseteq D_1$.*

Diremos también que D_1 es más fino que D_2.
En lo sucesivo supondremos que $\Phi(A)$ está ordenado de la manera indicada en la Definición 5.1.1.

Veamos ahora que si $a, b \in A$ entonces: $a \leq b$ si y solo si $D(a) \leq D(b)$.
Probemos que si (1) $a \leq b$ entonces $D(a) \leq D(b)$.
Sea $x \in D(b)$, esto es, $b \leq x$, luego por (1) resulta $a \leq x$, de donde $x \in D(a)$ o sea $D(b) \subseteq D(a)$ y por lo tanto $D(a) \leq D(b)$.
Recíprocamente, si $D(a) \leq D(b)$ entonces $D(b) \subseteq D(a)$, luego como $b \in D(b)$ resulta que $b \in D(a)$, esto es, $a \leq b$.

Este es uno de los motivos por lo cual ordenamos $\Phi(A)$ de acuerdo a la Definición 5.1.1.
Es claro que los sistemas deductivos $\mathbf{0} = A$ y $\mathbf{1} = \{1\}$ verifican la condición $\mathbf{0} \leq D \leq \mathbf{1}$, para todo $D \in \Phi(A)$. Por lo tanto $\Phi(A)$ es un conjunto ordenado por la relación $\leq$, con primer y último elemento.

Teorema 5.1.1 *Toda familia no vacía $\{D_i\}_{i\in I}$ de sistemas deductivos tiene un supremo.*

Dem. En efecto, sea $D = \bigcap_{i\in I} D_i$. Probemos que D es un sistema deductivo y que es el supremo de los D_i.
D1) $1 \in D$.
Como $1 \in D_i$ para todo $i \in I$ entonces $1 \in \bigcap_{i\in I} D_i = D$.
D2) Si $a \in D$ y $a \to b \in D$ entonces $b \in D$.
Por hipótesis $a \in D = \bigcap_{i\in I} D_i$, $a \to b \in D = \bigcap_{i\in I} D_i$, luego $a, a \to b \in D_i$ para todo $i \in I$.
Por lo tanto $b \in D_i$ para todo $i \in I$, es decir, $b \in D$.
D1 y D2 prueban que D es un sistema deductivo.

S1) $D_i \leq D$ para todo $i \in I$.
Como $D = \bigcap_{i\in I} D_i$ entonces $D \subseteq D_i$ para todo $i \in I$, luego por la Definición 5.1.1 resulta que $D_i \leq D$ para todo $i \in I$.
S2) Si X es un sistema deductivo tal que $D_i \leq X$ para todo $i \in I$ entonces $D \leq X$.
En efecto, por hipótesis $X \subseteq D_i$ para todo $i \in I$, luego $X \subseteq \bigcap_{i\in I} D_i = D$, esto es $D \leq X$.
S1 y S2 prueban que D es el supremo de los D_i, esto es, $D = \bigcap_{i\in I} D_i = \bigvee_{i\in I} D_i$. ■

Como $\Phi(A)$ es un conjunto ordenado completo superiormente, con primer elemento, entonces por el teorema de Birkhoff podemos afirmar que $\Phi(A)$ es un reticulado completo.
Recordemos como se obtiene el ínfimo de una familia no vacía $\{D_i\}_{i\in I}$ de sistemas deductivos. Basta considerar el conjunto $G = \bigcup_{i\in I} D_i$ y determinar el menor sistema deductivo

que contiene a G, esto es, el sistema deductivo generado por G.
Veamos que $D(G) = \bigwedge_{i \in I} D_i$.
I1) $D(G) \leq D_i$ para todo $i \in I$. Sabemos que $D(G)$ es un sistema deductivo y que $G \subseteq D(G)$, esto es, $\bigcup_{i \in I} D_i \subseteq D(G)$, por lo tanto $D_i \subseteq D(G)$ para todo $i \in I$, o sea, $D(G) \leq D_i$ para todo $i \in I$.
I2) Si H es un sistema deductivo tal que $H \leq D_i$ para todo $i \in I$ entonces $H \leq D(G)$. En efecto, si H es un sistema deductivo tal que $H \leq D_i$ para todo $i \in I$ entonces $D_i \subseteq H$ para todo $i \in I$. Luego $\bigcup_{i \in I} D_i \subseteq H$, esto es, $G \subseteq H$ y como $D(G)$ es el menor sistema deductivo que contiene a G resulta que $G \subseteq D(G) \subseteq H$. Luego $H \leq D(G)$ y por lo tanto $\bigwedge_{i \in I} D_i = D(\bigcup_{i \in I} D_i)$.

5.2. Sistemas deductivos irreducibles y completamente irreducibles

Definición 5.2.1 *Se dice que un sistema deductivo $D \neq A$ es irreducible si la condición $D = D_1 \vee D_2$ implica que $D = D_1$ o $D = D_2$.*

Definición 5.2.2 *Se dice que un sistema deductivo $D \neq A$ es completamente irreducible si la condición $\bigvee_{i \in I} D_i$ implica que existe un índice $i \in I$ tal que $D = D_i$.*

Teorema 5.2.1 *Si D es un sistema deductivo propio y c es un elemento de A que no pertenece a D entonces existe un sistema deductivo completamente irreducible C que contiene a D sin contener a c.*

Dem. Sea $\Pi = \{D_i\}_{i \in I}$ la familia de todos los sistemas deductivos que contienen a D sin contener a c. Esta familia es no vacía porque $D \in \Pi$. Probemos que Π es una familia de conjuntos inductiva superiormente, cuando está ordenada por la relación de inclusión. Para ellos basta probar que si $K = \{K_j\}_{j \in J}$ es una cadena de Π, esto es una familia de elementos de Π tales que dados dos elementos de K uno de ellos contiene al otro, y si $K_0 = \bigcup_{j \in J} K_j$ entonces $K_0 \in \Pi$.

(A) K_0 es un sistema deductivo.

D1) Como los K_j son sistemas deductivos entonces $1 \in K_j$ para todo $j \in J$, luego $1 \in \bigcup_{j \in J} K_j = K_0$.

D2) Supongamos que $a \in K_0, a \to b \in K_0$ y probemos que $b \in K_0$.
De $a \in K_0$ resulta que existe un índice $j_1 \in J$ tal que $a \in K_{j_1}$.
De $a \to b \in K_0$ resulta que existe un índice $j_2 \in J$ tal que $a \to b \in K_{j_2}$. Como $K_{j_1}, K_{j_2} \in K_0$ uno de ellos debe contener al otro, supongamos por ejemplo que $K_{j_1} \subseteq K_{j_2}$, entonces tendremos que $a, a \to b \in K_{j_2}$ y como K_{j_2} es un sistema deductivo resulta que $b \in K_{j_2}$, y por los tanto $b \in \bigcup_{j \in J} K_j = K_0$.

(B) $D \subseteq K_0$.
Como los $K_j \in \Pi$ para todo $j \in J$, entonces $D \subseteq K_j$ para todo $j \in J$, luego $D \subseteq \bigcup_{j \in J} K_j = K_0$.

(C) $c \notin K_0$.
Como $K_j \in \Pi$ para todo $j \in J$ podemos afirmar que $c \notin K_j$ para todo $j \in J$, luego $c \notin \bigcup_{j \in J} K_j = K_0$.

Las condiciones (A), (B) y (C) expresan que $K_0 \in \Pi$, luego podemos afirmar que Π es un conjunto ordenado inductivo superiormente y por lo tanto Π contiene un elemento máximo C. Acabamos así de probar que dado un sistema deductivo propio D y un elemento $c \in A$ tal que $c \notin D$ existe un sistema deductivo máximo C entre los que contienen a D sin contener a c.
Probemos que C es completamente irreducible.
Supongamos para ello que $C = \bigvee_{h \in H} D_h = \bigcap_{h \in H} D_h$, donde D_h es un sistema deductivo, para todo $h \in H$. Como (1) $c \notin C = \bigcap_{h \in H} D_h$, entonces existe un índice $h_0 \in H$ tal que (2) $c \notin D_{h_0}$. De (1) resulta (3) $C \subseteq D_{h_0}$, luego tenemos en particular (4) $D \subseteq C \subseteq D_{h_0}$.
De (2) y (4) se tiene que $D_{h_0} \in \Pi$, y como C es máximo en Π se tiene que $C = D_{h_0}$, lo cual significa que C es completamente irreducible. ■

Teorema 5.2.2 *Todo sistema deductivo propio D, es intersección de sistemas deductivos completamente irreducibles.*

Dem. Sea $\{C_i\}_{i \in I}$ la familia de todos los sistemas deductivos completamente irreducibles que contienen al sistema deductivo propio D. Por el Teorema 5.2.1 esta familia es no vacía. Probemos que $D = \bigcap_{i \in I} C_i$. Como $D \subseteq C_i$ para todo $i \in I$ entonces $D \subseteq \bigcap_{i \in I} C_i$. Resta probar que $\bigcap_{i \in I} C_i \subseteq D$, o sea que $\complement D \subseteq \complement \bigcap_{i \in I} C_i = \bigcup_{i \in I} \complement C_i$.
Sea $x \in \complement D$, luego $x \notin D$, entonces por el Teorema 5.2.1 existe un $i \in I$ tal que $x \notin C_i$, esto es $x \in \complement C_i$, por lo tanto $x \in \bigcup_{i \in I} \complement C_i$, esto es $\complement D \subseteq \bigcup_{i \in I} \complement C_i$, luego $D = \bigcap_{i \in I} C_i$. ■
De este teorema resulta que $D = \bigvee_{i \in I} C_i$.

Teorema 5.2.3 *Si C es un sistema deductivo completamente irreducible entonces existe un elemento $c \in A$ y $c \notin C$ tal que C es un sistema deductivo máximo entre los que no contienen a c.*

Dem. Sea C un sistema deductivo completamente irreducible. Para cada $c \notin C$ existe un sistema deductivo C_c máximo entre los que contienen a C sin contener a c. En estas condiciones se ve de inmediato que $C = \bigcap_{c \notin C} C_c$. Como C es completamente irreducible existe un índice c tal que $C = C_c$, y por lo tanto C es un sistema deductivo máximo entre los que no contienen a c. ■

Teorema 5.2.4 *Para que un sistema deductivo C sea un sistema deductivo máximo entre los sistemas deductivos que no contienen un elemento $c \in A$, $c \neq 1$, es necesario y suficiente que:*

(1) $c \notin C$.

(2) *Si* $x \notin C$ *entonces* $x \to c \in C$.

Dem. Sea C un sistema deductivo máximo entre los que no contienen un elemento fijo $c \neq 1$. Es evidente que se verifica (1).
Si $x \notin C$, entonces el conjunto $C \cup \{x\}$ genera un sistema deductivo D, esto es $D = D(C \cup \{x\})$. Como C es un sistema deductivo máximo entre los que no contienen a c, entonces $c \in D = D(C \cup \{x\}) = \mathbb{C}(C \cup \{x\})$, esto es $C, x \vdash c$ o sea $C \vdash x \to c$ lo cual significa que $x \to c \in C$.
Sea C un sistema deductivo con las propiedades (1) y (2) indicadas en el enunciado. Por hipótesis $c \notin C$, luego teniendo en cuenta el Teorema 5.2.3 podemos afirmar que existe un sistema deductivo M que contiene a C y que es máximo entre los que no contienen a c. Supongamos que $C \neq M$ y sea $x \in M \setminus C$, entonces $x \notin C$, luego por (2) $x \to c \in C \subseteq M$, por lo tanto tendremos que x, $x \to c \in M$ entonces por modus ponens $c \in M$, absurdo visto que $c \notin M$. Esto muestra que $C = M$ y por lo tanto C es un sistema deductivo máximo entre los que no contienen a c. ■

Es evidente que todo sistema deductivo completamente irreducible es irreducible.

Problema: ¿ Existirán sistemas deductivos irreducibles que sean irreducibles mínimos, esto es, sistemas deductivos P tales que cualquier sistema deductivo D que sea una parte propia de P sea reducible ?

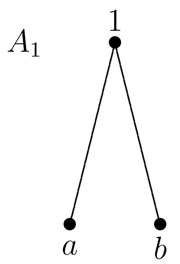
En general, en un álgebra implicativa, existen sistemas deductivos completamente irreducibles incomparables. Para ver que así es, demostraremos el siguiente:

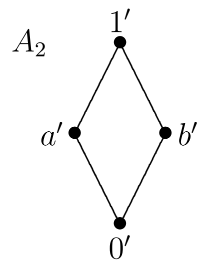
Teorema 5.2.5 *Para que un álgebra implicativa A sea lineal (ver Definición 2.6.1) es necesario y suficiente que dos sistemas deductivos completamente irreducibles de A sean siempre comparables.*

Dem. Sea A un álgebra implicativa lineal, sean D y D' dos sistemas deductivos completamente irreducibles y supongamos que D y D' son incomparables. Entonces existen elementos a y b tales que $a \in D \setminus D'$, $b \in D' \setminus D$. Como $a, b \in A$, que es lineal, entonces a y b son comparables. Si suponemos $a \leq b$, entonces como $a \in D$ resulta que $b \in D$, absurdo pues $b \in D' \setminus D$. De manera análoga se razona si $b \leq a$, luego los sistemas deductivos D y D' son comparables.
Recíprocamente, sea A un álgebra implicativa en la cual dos sistemas deductivos completamente irreducibles son siempre comparables y probemos que es lineal. Supongamos que el álgebra A no es lineal, entonces existirán por lo menos dos elementos a y b tales que: (1) $a \not\leq b$ y (2) $b \not\leq a$. De (1) resulta que $b \notin D(a)$, luego existe un sistema deductivo completamente irreducible D tal que (3) $a \in D$ y $b \notin D$. De (2) resulta que $a \notin D(b)$, luego existe un sistema deductivo completamente irreducible D' tal que (4) $b \in D'$ y $a \notin D'$. De (3) y (4) resulta que D y D' son incomparables lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto A es un álgebra implicativa lineal. ■

5.3. Imposibilidad de determinar un álgebra implicativa A a partir de $\Phi(A)$.

Sean A_1 y A_2 las álgebras implicativas cuyos diagramas de Hasse se indican a continuación:





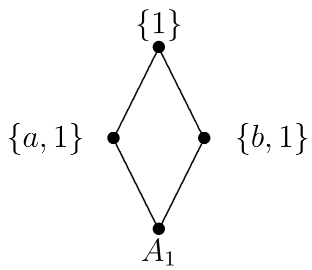
A continuación indicamos la tabla del operador $\to$ en ambas álgebras:

$\to$	a	b	1
a	1	b	1
b	a	1	1
1	a	b	1

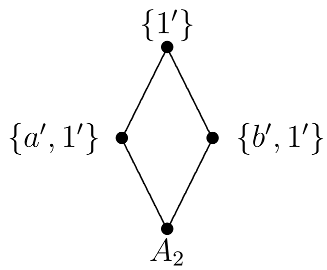
$\to$	$0'$	a'	b'	$1'$
$0'$	$1'$	$1'$	$1'$	$1'$
a'	b'	$1'$	b'	$1'$
b'	a'	a'	$1'$	$1'$
$1'$	$0'$	a'	b'	$1'$

Los diagramas de Hasse de $\Phi(A_1)$ y $\Phi(A_2)$ son:

$\Phi(A_1)$



$\Phi(A_2)$



Los reticulados $\Phi(A_1)$ y $\Phi(A_2)$ son isomorfos, pero las álgebras implicativas A_1 y A_2 no lo son. Observemos que A_1 es una subálgebra implicativa de A_2.

5.4. Los sistemas deductivos máximos y las álgebras simples

Se reconoce fácilmente que el conjunto formado por un solo elemento que designaremos por 1, sobre el cual se define la operación binaria $\to$ de la única manera posible a saber: $1 \to 1 = 1$, es un álgebra implicativa. Para que el álgebra cociente A/D sea el álgebra que acabamos de indicar es necesario y suficiente que exista una única clase de equivalencia, o lo que es lo mismo que $D = A$.

En estas condiciones toda álgebra implicativa A tiene por imagen homomórfica el álgebra impropia $\{1\}$, y el núcleo correspondiente es evidentemente A.

Si en un álgebra implicativa A consideramos el sistema deductivo $\{1\}$ entonces el álgebra cociente $A/\{1\}$ es isomorfa a A. Por lo tanto podemos afirmar que un álgebra implicativa A tiene siempre las imágenes homomórficas $A/A = \{1\}$ y $A/\{1\} = A$, llamadas triviales, y que para que estas dos imágenes sean distintas es necesario y suficiente que el álgebra A tenga más de un elemento.

Definición 5.4.1 *Un álgebra implicativa A se dice simple si tiene más de un elemento y si sus únicas imágenes homomórficas son las triviales.*

Al efecto de determinar las álgebras implicativas simples indicaremos el siguiente:

Teorema 5.4.1 *Para que un álgebra implicativa A sea simple es necesario y suficiente que A contenga solamente dos elementos.*

Dem. Sea A un álgebra implicativa simple. Entonces A contiene por lo menos dos elementos distintos que designaremos 0 y 1. Supongamos que A tiene un tercer elemento a distinto de 0 y 1. Entonces a genera un sistema deductivo propio $D(a)$, formado por todos los $x \in A$ tales que $a \leq x$. El álgebra $A/D(a)$ tiene más de un elemento y como A es simple tendríamos que $A/D(a) = A$. Ahora bien, para que un homomorfismo sea un isomorfismo es necesario y suficiente que el núcleo sea $\{1\}$, o sea $D(a) = \{1\}$ y por lo tanto $a = 1$, lo que contradice la hipótesis. Luego podemos afirmar que A tiene solamente dos elementos.
Recíprocamente, sea A el álgebra implicativa formada por dos elementos distintos 0 y 1, y probemos que A es simple. En el orden natural inducido por la operación implicación tendremos que $0 < 1$, y por lo tanto la tabla de la implicación es:

$\to$	0	1
0	1	1
1	0	1

Ahora bien, los dos únicos sistemas deductivos de esta álgebra son A y $\{1\}$, y por lo tanto es simple. ■

Veamos ahora como determinar las imágenes homomórficas simples de un álgebra implicativa dada.

Definición 5.4.2 *Un sistema deductivo M se dice máximo, si M es un sistema deductivo propio y si no existe ningún sistema deductivo propio que contenga a M como parte propia.*

Observación 5.4.1 *Un álgebra implicativa puede no tener sistemas deductivos máximos. Es lo que ocurre con el conjunto ordenado formado por los números reales x tales que $0 < x \leq 1$. Por el Lema 4.2.1 sabemos que todo sistema deductivo es una sección superior. En este ejemplo el sistema deductivo $F(1)$ es irreducible, pero no es completamente irreducible ya que $F(1 - \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ verifica la siguiente condición: $F(1) = \bigcap_{n=2}^{\infty} F(1 - \frac{1}{n})$ y para ningún n se tiene que $F(1) = F(1 - \frac{1}{n})$.*

Teorema 5.4.2 *Para que un sistema deductivo propio M sea máximo es necesario y suficiente que si $x, y \notin M$ entonces $x \to y \in M$.*

Dem. Como M es máximo en el álgebra, sean $x, y \notin M$. Entonces M es máximo entre los que no contienen al elemento y, luego como $x \notin M$ por el Teorema 5.2.4 $x \to y \in M$. Recíprocamente, supongamos que M no es máximo, esto es que existe un sistema deductivo M_1 propio tal que $M \subset M_1$. Sean $a, b \in A$ tales que $a \in M_1 \setminus M$, $b \in A \setminus M_1$. Entonces $a, b \notin M$, luego $a \to b \in M$ y por lo tanto (1) $a \to b \in M_1$. Ahora bien como (2) $a \in M_1$, de (1) y (2) resulta por modus ponens que $b \in M_1$, lo que contradice la hipótesis. Es decir, M es máximo. ■

Observación 5.4.2 *Si M es un sistema deductivo máximo, entonces el álgebra cociente A/M tiene solamente dos elementos, visto que si $a, b \notin M$ entonces $a \to b \in M$ y $b \to a \in M$, y por lo tanto $a \equiv b$ (mod. M). Esto significa que existen solamente dos clases de equivalencia, a saber: M y $A \setminus M$ que representaremos $C(1)$ y $C(0)$, respectivamente. Entonces tendremos que $A/M = \{C(1), C(0)\}$. La tabla $\to$ para estos elementos es:*

$\to$	$C(0)$	$C(1)$
$C(0)$	$C(1)$	$C(1)$
$C(1)$	$C(0)$	$C(1)$

Como el álgebra A/M tiene solamente dos elementos, y se verifica que $C(0) < C(1)$ entonces A/M es un álgebra de Boole. Además, como la operación $\to$ definida por: $x \to y = -x \vee y$ en el álgebra de Boole coincide con la operación $\to$ indicada en la tabla precedente, resulta que A/M es isomorfa al álgebra implicativa que se obtiene considerando el álgebra de Boole $\{0, 1\}$ donde la operación $x \to y$ se define como $-x \vee y$.

5.5. El radical y las álgebras semisimples

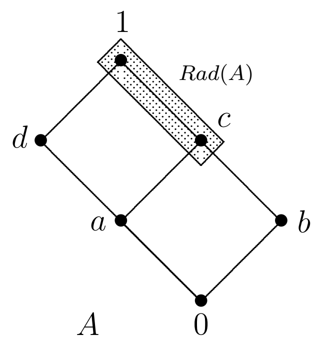
La consideración de los sistemas deductivos máximos nos lleva a la siguiente:

Definición 5.5.1 *Se denomina radical de A a la intersección $Rad(A)$ de todos los sistemas deductivos máximos de A.*

De acuerdo a esta definición, si A no tiene sistemas deductivos máximos, $Rad(A)$ será la intersección de una familia vacía de partes de A y por lo tanto $Rad(A) = A$. Es lo que ocurre con el álgebra implicativa lineal formada por los números reales x tales que $0 < x \leq 1$.

Definición 5.5.2 *Un álgebra implicativa A se dice semisimple si $Rad(A) = \{1\}$.*

En general las álgebras implicativas no son semisimples. Es lo que ocurre en el caso de una cadena sin primer elemento, ya que $Rad(A) = A$. Otro ejemplo se obtiene considerando el álgebra de Heyting finita cuyo diagrama de Hasse se indica a continuación.



En este caso los sistemas deductivos son los filtros. Como el álgebra de Heyting A es finita, todos los ultrafiltros son principales. Los ultrafiltros, que son los sistemas deductivos máximos, son generados por los átomos de A. Como existen solamente dos átomos a y b, entonces el radical de A es la intersección de los filtros $F(a)$ y $F(b)$, es decir $Rad(A) = \{c, 1\} = F(c)$.

Se plantea naturalmente el problema de caracterizar algebraicamente a las álgebras implicativas semisimples. Con ese objetivo en vista, demostraremos en primer lugar el siguiente:

Teorema 5.5.1 $((a \to b) \to a) \to a \in Rad(A)$, *cualquiera que sean los elementos* $a, b \in A$.

Dem. Supongamos que el elemento $r = ((a \to b) \to a) \to a \notin Rad(A)$ entonces existe un sistema deductivo máximo M tal que $r \notin M$. Como $a \leq r$, podemos afirmar que
(1) $a \notin M$ y por lo tanto $r \to a \in M$, por el Teorema 2.2.10

$$r \to a = (((a \to b) \to a) \to a) \to a = (a \to b) \to a,$$

luego (2) $(a \to b) \to a \in M$. Entonces (3) $(a \to b) \notin M$, ya que si $(a \to b) \in M$, entonces de (2), por modus ponens, $a \in M$, lo que contradice (1). De (1), (3) y el Teorema 2.2.5 se deduce por ser M un sistema deductivo máximo que $a \to (a \to b) = a \to b \in M$, lo que contradice (3). Luego $r \in Rad(A)$. ■

De este teorema se deduce inmediatamente:

Corolario 5.5.1 $(a \to b) \to a \equiv a$ $(mod.\ Rad(A))$.

Dem. Por el Axioma H_1 $a \to ((a \to b) \to a) = 1 \in Rad(A)$.
Esta observación junto con el Teorema 5.5.1 prueban el corolario. ■

Definición 5.5.3 *Un álgebra implicativa A se dice un álgebra de Tarski si se verifica*
T) $(a \to b) \to a = a$.

Observación 5.5.1 *Existen álgebras implicativas que no son álgebras de Tarski. Consideremos por ejemplo la cadena con tres elementos* 0, a, 1, *con el orden siguiente* $0 < a < 1$. *Entonces se verifica que:* $(a \to 0) \to a = 0 \to a = 1 \neq a$.

De esta observación resulta que toda cadena con más de dos elementos no es un álgebra de Tarski y tenemos así numerosos ejemplos de álgebras implicativas que no son álgebras de Tarski.

Demostremos ahora un teorema que permite obtener álgebras de Tarski a partir de álgebras implicativas.

Teorema 5.5.2 *El álgebra cociente $A/Rad(A)$ es un álgebra de Tarski.*

Dem. Sea $T = A/Rad(A)$. Entonces usando el Corolario 5.5.1 tendremos que $(C(a) \to C(b)) \to C(a) = C(a \to b) \to C(a) = C((a \to b) \to a) = C(a)$. Lo que muestra que $A/Rad(A)$ es un álgebra de Tarski. ■

Vamos a generalizar este teorema:

Teorema 5.5.3 *Si D es un sistema deductivo tal que $Rad(A) \subseteq D$ entonces A/D es un álgebra de Tarski.*

Dem. Como $Rad(A) \subseteq D$, de la condición $(a \to b) \to a \equiv a$ $(mod.\, Rad(A))$ se deduce que $(a \to b) \to a \equiv a$ $(mod.\, D)$, entonces en A/D $(C(a) \to C(b)) \to C(a) = C((a \to b) \to a) = C(a)$, luego A/D es un álgebra de Tarski. ■

Vamos a indicar ahora una caracterización aritmética de las álgebras semisimples. Con este objetivo comencemos por demostrar el siguiente:

Lema 5.5.1 *En un álgebra de Tarski todo sistema deductivo completamente irreducible es máximo.*

Dem. Sea C un sistema deductivo completamente irreducible. Entonces por el Teorema 5.2.3 C es un sistema deductivo máximo entre los que no contienen un elemento fijo c. Si C no es un sistema deductivo máximo entonces existe un sistema deductivo M propio, tal que $C \subset M$. Es claro que $c \in M$. Sea $n \in A \setminus M$. Como $n \notin M$, entonces se deduce por modus ponens que $c \to n \notin M$, y en particular $c \to n \notin C$, entonces por el Teorema 5.2.4 podemos afirmar que: $(c \to n) \to c = c \in C$, absurdo. ■

Corolario 5.5.2 *Toda álgebra de Tarski es semisimple.*

Dem. Como el sistema deductivo $\{1\}$ es intersección de sistemas deductivos completamente irreducibles y como éstos son máximos, resulta que $Rad(A) = \{1\}$. ■

Corolario 5.5.3 *El álgebra $A/Rad(A)$ es semisimple.*

Dem. Basta observar que $A/Rad(A)$ es un álgebra de Tarski. ■

Teorema 5.5.4 *Para que un álgebra implicativa A sea semisimple es necesario y suficiente que sea un álgebra de Tarski.*

Dem. El Corolario 5.5.2 muestra que la condición es suficiente. Para probar la condición necesaria supongamos que A es un álgebra semisimple, esto es $Rad(A) = \{1\}$. Por el Teorema 5.5.2 podemos afirmar que $A/Rad(A)$ es un álgebra de Tarski, y como $Rad(A) = \{1\}$, entonces $A/Rad(A) = A$, luego A es un álgebra de Tarski. ■

Este teorema muestra que las álgebras de Tarski ocupan un lugar especial entre las álgebras implicativas y su estudio será objeto de un próximo capítulo.

Teorema 5.5.5 *Todo sistema deductivo completamente irreducible que contiene al radical es máximo.*

Dem. Sea C un sistema deductivo completamente irreducible que contiene a $Rad(A)$. De aquí resulta en particular que $Rad(A) \neq A$. Entonces C es un sistema deductivo máximo entre los que no contienen a un cierto elemento fijo c. Si C no es máximo, entonces existe un sistema deductivo propio M tal que $C \subset M$, y es claro que $c \in M$. Sea $n \in A \setminus M$. Entonces $c \to n \notin M$, luego $c \to n \notin C$ y por lo tanto (1) $(c \to n) \to c \in C$, por el Teorema 5.5.1 (2) $((c \to n) \to c) \to c \in Rad(A)$, y como $Rad(A) \subseteq C$, se tiene (3) $((c \to n) \to c) \to c \in C$. De (1) y (3) resulta por modus ponens que, $c \in C$, absurdo. Luego C es un sistema deductivo máximo. ■

Teorema 5.5.6 *Si D es un sistema deductivo de un álgebra implicativa A tal que A/D es un álgebra de Tarski entonces $Rad(A) \subseteq D$.*

Dem. Sea h el homomorfismo de A sobre A/D, h establece una correspondencia biunívoca entre los sistemas deductivos de A/D y los sistemas deductivos D' de A que contienen a D. Luego si M' es un sistema deductivo máximo de A/D, $M = h^{-1}(M')$ es un sistema deductivo máximo de A que contiene a D. Como $\{1'\} \subseteq A/D$ es la intersección de los sistemas deductivos máximos de A/D entonces D es la intersección de los sistemas deductivos máximos que contienen a $A/D = h^{-1}(M')$, luego $Rad(A) \subseteq D$. ■

Teorema 5.5.7 *$Rad(A)$ es el sistema deductivo generado por los elementos de la forma $((a \to b) \to a) \to a$.*

Dem. Sea D el sistema deductivo generado por los elementos de la forma indicada anteriormente. Por el Teorema 5.5.1 $D \subseteq Rad(A)$. Probemos que A/D es un álgebra de Tarski. Para ello basta ver que: $(a \to b) \to a \equiv a \ (mod.\, D)$.
En efecto: $((a \to b) \to a) \to a \in D$ y $a \to ((a \to b) \to a) = 1 \in D$, luego $(a \to b) \to a \equiv a$ y A/D es un álgebra de Tarski. Por lo tanto por el Teorema 5.5.6 $Rad(A) \subseteq D$, lo que muestra que $Rad(A) = D$. ■

6. REPRESENTACION DEL CALCULO PROPOSICIONAL IMPLICATIVO

6.1. Funciones polinómicas

En el Capítulo 1 hemos considerado el cálculo proposicional implicativo asociado a un conjunto no vacío $G = \{g_i\}_{i \in I}$ de variables de enunciado. Vamos a suponer, por ahora, que I es un conjunto finito, esto es $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$. A los símbolos $g_1, \ldots, g_n$ les hemos dado el nombre de *variables de enunciado*, pero hemos señalado al mismo tiempo que se trataba de símbolos fijos, bien determinados, que no "variaban"en lo más mínimo.
Hemos representado también por $\mathcal{L}$ el conjunto de todas las fórmulas (bien formadas). En este capítulo daremos a las fórmulas de $\mathcal{L}$ el nombre de *fórmulas polinomiales implicativas*, o más sencillamente el nombre de *polinomios* de las n variables $g_1, \ldots, g_n$. Para poner en evidencia este hecho representaremos un polinomio p por la notación: $p(g_1, \ldots, g_n)$.
El objetivo que tenemos en vista es indicar una "interpretación"de $\mathcal{L}$.

Sea A un álgebra implicativa fija y supongamos que $g_1, \ldots, g_n$ representan variables sobre A. en estas condiciones si en el polinomio $p(g_1, \ldots, g_n)$ reemplazamos las variables $g_1, \ldots, g_n$ por elementos fijos de A, esto es si reemplazamos g_1 por un elemento $a_1 \in A, \ldots$, g_n por $a_n \in A$, entonces $p(a_1, \ldots, a_n)$ será un elemento bien determinado de A.

Para describir esta situación en forma sencilla, consideremos el producto cartesiano A^n de n álgebras implicativas iguales a A. En virtud de la definición de producto cartesiano un elemento $a \in A^n$ es una sucesión de n elementos de A, esto es: $a = (a_1, \ldots, a_n)$ donde $a_i \in A$, $1 \leq i \leq n$. En estas condiciones si consideramos las variables de enunciado $g_1, \ldots, g_n$ como variables sobre A a cada polinomio $p = p(g_1, \ldots, g_n) \in \mathcal{L}$ corresponde una función p_A definida sobre A^n y tomando sus valores en A, que queda unívocamente determinada por medio de la igualdad:

$$\text{si } a \in A^n \text{ entonces } p_A(a) = p(a_1, \ldots, a_n).$$

A esta función así definida le daremos el nombre de *función polinomial* p_A. Diremos algunas veces que p_A es una *interpretación o representación de* p en el álgebra A. Somos así naturalmente llevados a considerar el conjunto $\mathcal{P}_A$ de todas las funciones polinomiales p_A, que quedan unívocamente determinadas por el álgebra A.
De acuerdo a las notaciones que hemos adoptado, a los polinomios: g_1, $(g_1 \to g_1)$, $(g_1 \to g_2)$, $((g_1 \to g_2) \to g_1)$, ... corresponden respectivamente las funciones polinomiales g_{1A}, $(g_1 \to g_1)_A$, $(g_1 \to g_2)_A$, $((g_1 \to g_2) \to g_1)_A$, ...
De acuerdo a la definición general de igualdad de funciones, dos funciones polinomiales p_A y q_A son iguales, si $p_A(a) = q_A(a)$ para todo $a \in A^n$ y para indicar esta relación escribiremos $p_A = q_A$.
Recordemos ahora que dado un conjunto, no vacío, E y un álgebra implicativa A, el conjunto A^E de todas las funciones definidas sobre E y tomando sus valores en A, es un álgebra implicativa cuando se define sobre A^E la operación de implicación en la forma siguiente: dadas las funciones $f, g \in A^E$ representaremos por $h = f \to g$ la función $h \in A^E$ definida por la fórmula: si $x \in E$ entonces $h(x) = f(x) \to g(x)$. Y sabemos que $(A^E, \to)$ es un álgebra implicativa.
Entonces dada un álgebra implicativa A podemos considerar el conjunto A^{A^n} de todas las funciones definidas sobre A^n y tomando sus valores en A.

Teorema 6.1.1 *$\mathcal{P}_A$ es una subálgebra de A^{A^n}.*

Dem. Basta demostrar que si $p_A, q_A \in \mathcal{P}_A$ entonces $p_A \to q_A \in \mathcal{P}_A$.
Sea $a \in A^n$ entonces:
$(1)(p_A \to q_A)(a) = p_A(a) \to q_A(a) = p(a_1, \ldots, a_n) \to q(a_1, \ldots, a_n)$.
Como $p_A, q_A \in \mathcal{P}_A$, entonces p y q son polinomios. $p = p(g_1, \ldots, g_n)$, $q = q(g_1, \ldots, g_n)$ y por lo tanto $(p \to q) = p(g_1, \ldots, g_n) \to q(g_1, \ldots, g_n)$ es un polinomio.
La función polinomial correspondiente será definida por:
(2) $(p \to q)_A(a) = (p(a_1, \ldots, a_n) \to q(a_1, \ldots, a_n))$.
Las fórmulas (1) y (2) muestran que:
$(p_A \to q_A)(a) = (p \to q)_A(a)$ para todo $a \in A^n$, esto es: $p_A \to q_A = (p \to q)_A$.
Como $(p \to q)_A \in \mathcal{P}_A$, podemos afirmar que $p_A \to q_A \in \mathcal{P}_A$. Lo que termina la demostración. ■

Este teorema sugiere naturalmente el problema de saber si $\mathcal{P}_A = A^{A^n}$. Veremos más adelante que la respuesta en general es negativa.

Para concretar estas nociones vamos a indicar algunos ejemplos:

Ejemplo 6.1.1 *Sea $n = 2$, esto es $G = \{g_1, g_2\}$ y A el álgebra implicativa formada por dos elementos distintos 0 y 1. En este caso $A^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$.*
En la Tabla 6.1 figuran en la primera columna los elementos de A^2. Para cada polinomio $p(g_1, g_2)$ y cada elemento $a \in A^2$ tenemos que calcular $p(a) = p(a_1, a_2)$.
Consideremos en primer lugar el polinomio g_1, entonces la función polinomial correspondiente g_{1A} queda definida por:

$$g_{1A}(0,0) = 0, \;\; g_{1A}(0,1) = 0, \;\; g_{1A}(1,0) = 1, \;\; g_{1A}(1,1) = 1.$$

En la segunda columna de la Tabla 6.1, están indicados los valores que la función polinomial g_{1A} toma en los diversos elementos de A^2. Los valores de la función g_{2A}están indicados en la tercera columna.
Consideremos ahora el polinomio $(g_1 \to g_1)$, la función polinomial correspondiente será definida por:

$$(g_1 \to g_1)_A(0,0) = 0 \to 0 = 1, \quad (g_1 \to g_1)_A(0,1) = 0 \to 0 = 1,$$

$$(g_1 \to g_1)_A(1,0) = 1 \to 1 = 1, \quad (g_1 \to g_1)_A(1,1) = 1 \to 1 = 1,$$

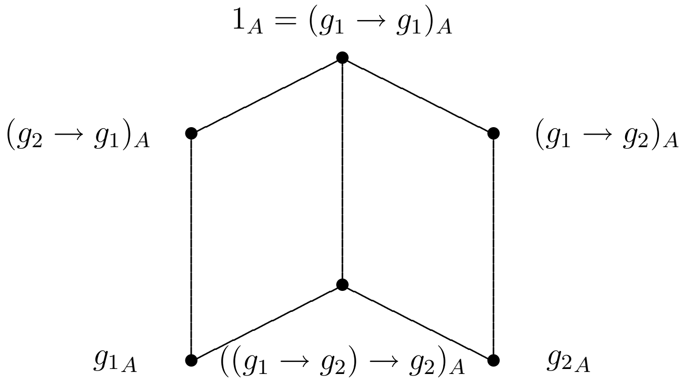
y sus valores están indicados en la cuarta columna. Finalmente en las columnas restantes están indicados los valores de las funciones polinomiales:

$$(g_1 \to g_2)_A, \;\; (g_2 \to g_1)_A \;\text{ y }\; ((g_1 \to g_2) \to g_2)_A.$$

a	g_{1A}	g_{2A}	$g_{1A} \to g_{1A}$	$g_{1A} \to g_{2A}$	$g_{2A} \to g_{1A}$	$(g_{1A} \to g_{2A}) \to g_{2A}$
$(0,0)$	0	0	1	1	1	0
$(0,1)$	0	1	1	1	0	1
$(1,0)$	1	0	1	0	1	1
$(1,1)$	1	1	1	1	1	1

Tabla 6.1

Ahora es fácil comprobar que si p_A y q_A son dos funciones polinomiales de las indicadas en la tabla, la función polinomial $p_A \to q_A$ es una de ellas; de donde resulta que la tabla contiene todas las funciones polinomiales. Podemos entonces afirmar que en este caso existen solamente 6 funciones polinomiales distintas. Mientras que el número total de funciones definidas sobre A^2 y tomando valores en A es $2^4 = 16$, y por lo tanto $\mathcal{P}_A \neq A^{A^2}$, como habíamos mencionado.
Indiquemos el diagrama de $\mathcal{P}_A$. Cada función polinomial es una función definida sobre el conjunto A^2 y tomando sus valores en A. Dadas dos funciones polinomiales p_A y q_A tendremos $p_A \leq q_A$ si y sólo si (1) $p_A \to q_A = 1_A$, donde 1_A representa la función polinomial idénticamente igual a $1 \in A$, esto es: $1_A(a) = 1$ para todo $a \in A^2$. La condición (1) es equivalente a: (2) $p_A(a) \to q_A(a) = 1$ para todo $a \in A^2$, o sea (3) $p_A(a) \leq q_A(a)$ para todo $a \in A^2$.
Por medio de esta fórmula podemos determinar la relación de orden $\leq$ entre las 6 funciones polinomiales indicadas en la Tabla 6.1, y obtendremos así el diagrama del álgebra $\mathcal{P}_A$ que se indica a continuación:

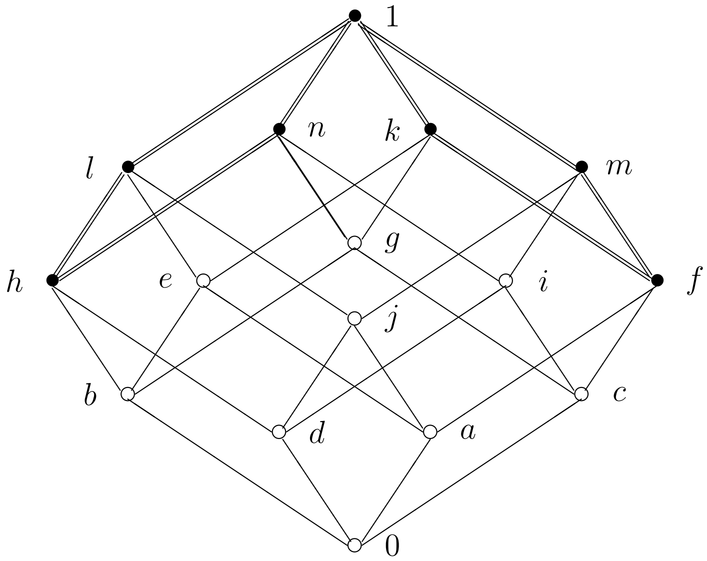


Tiene interés construir el diagrama del álgebra A^{A^2} y localizar en este diagrama la subálgebra $\mathcal{P}_A$. El conjunto A^2 tiene 4 elementos $1 = (0,0)$, $2 = (0,1)$, $3 = (1,0)$, $4 = (1,1)$.
Luego cada función $f \in A^{A^2}$ queda unívocamente determinada por $f(1) = f_1$, $f(2) = f_2$, $f(3) = f_3$, $f(4) = f_4$.
Existe entonces una correspondencia biunívoca entre las funciones $f \in A^{A^2}$ y las sucesiones (f_1, f_2, f_3, f_4) de cuatro elementos de A y por lo tanto cada función f se puede representar por un elemento (f_1, f_2, f_3, f_4) del producto cartesiano $A^4 = A \times A \times A \times A$. Tendremos entonces un total de $16 = 2^4$ funciones que representaremos por las letras siguientes:

$0 = (0,0,0,0)$	$a = (1,0,0,0)$	$b = (0,1,0,0)$	$c = (0,0,1,0)$
$d = (0,0,0,1)$	$e = (1,1,0,0)$	$f = (1,0,1,0)$	$g = (0,1,1,0)$
$h = (0,1,0,1)$	$i = (0,0,1,1)$	$j = (1,0,0,1)$	$k = (1,1,1,0)$
$l = (1,1,0,1)$	$m = (1,0,1,1)$	$n = (0,1,1,1)$	$1 = (1,1,1,1)$

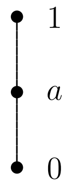
Es claro que dadas dos funciones f y g por medio de sus coordenadas: $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, $g = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ tendremos que $f \leq g$ si y sólo si $f_i \leq g_i$, $1 \leq i \leq 4$. Esta relación de orden permite construir el diagrama de A^{A^2} que está indicado en la siguiente figura. Como se observa F es un álgebra de Boole con cuatro átomos. Por la Tabla 6.1 se reconoce que

g_{1A} queda representado por el elemento i y g_{2A} por el elemento h, etc. Luego la subálgebra $\mathcal{P}_A$ está formada por los elementos $h, i, l, m, n, 1$.



Ejemplo 6.1.2 *Sea $n = 2$ y A el álgebra implicativa lineal cuyo diagrama está indicado en la siguiente figura:*

A



$\to$	0	a	1
0	1	1	1
a	0	1	1
1	0	a	1

En este caso $A^2 = \{(0,0),(0,a),(a,0),(a,a),(a,1),(1,0),(1,a),(0,1),(1,1)\}$. Vamos a determinar la familia de todas las funciones polinomiales de dos variables sobre el álgebra A dada. Para simplificar la escritura; pongamos $1 = a = g_{1A}$, $2 = b = g_{2A}$.

$3 = (a \to b) \to a = 8 \to 1$	$4 = (b \to a) \to b = 7 \to 2$
$5 = ((a \to b) \to b) \to a = 9 \to 1$	$6 = ((b \to a) \to a) \to b = 10 \to 2$
$7 = b \to a = 2 \to 1$	$8 = a \to b = 1 \to 2$
$9 = (a \to b) \to b = 8 \to 2$	$10 = (b \to a) \to a = 7 \to 1$
$11 = ((b \to a) \to b) \to b = 4 \to 2$	$12 = ((a \to b) \to a) \to a = 3 \to 1$
$13 = (((b \to a) \to a) \to b) \to b = 6 \to 2$	$14 = a \to a = 1 \to 1$

De manera análoga a la que fue indicada en el Ejemplo 6.1.1 obtenemos la siguiente tabla:

E	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$(0,0)$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
$(0,a)$	0	a	0	1	0	a	0	1	a	1	a	1	1	1
$(0,1)$	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
$(a,0)$	a	0	1	0	a	0	1	0	1	a	1	a	1	1
(a,a)	a	a	a	a	1	1	1	1	a	a	1	1	a	1
$(a,1)$	a	1	a	1	a	1	a	1	1	1	1	1	1	1
$(1,0)$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
$(1,a)$	1	a	1	a	1	a	1	a	1	1	1	1	1	1
$(1,1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

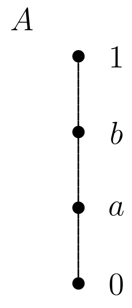
Tabla 6.2

Una vez calculadas las catorce funciones polinomiales se comprueba que si p_A y q_A son funciones polinomiales indicadas en la tabla, entonces la función polinomial $p_A \to q_A$ es una de las funciones polinomiales indicadas en la tabla y por lo tanto podemos afirmar que en este caso $\mathcal{P}_A$ tiene catorce elementos distintos. El álgebra $\mathcal{P}_A$ coincide con el álgebra de Skolem cuyo diagrama fue el indicado en el Capítulo 3.

Como A^2 tiene nueve elementos y A tiene tres elementos, el álgebra A^{A^2} tiene $3^9 = 19.683$ elementos. Los elementos de A^{A^2} pueden ser descriptos como sucesiones de nueve elementos $(f_1, \ldots, f_9)$ donde $f_i \in \{0, a, 1\} = A$, $1 \leq i \leq 9$.

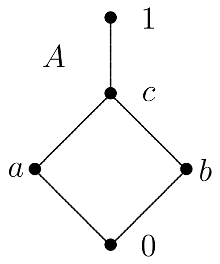
El diagrama de A^{A^2} es el producto cartesiano de nueve cadenas iguales a A que no es fácil de dibujar.

Ejemplo 6.1.3 *Sea $n = 2$ y A el álgebra implicativa lineal cuyo diagrama está indicado en la figura:*



Dejamos a cargo del lector verificar que en este caso $\mathcal{P}_A$ tiene, como en el caso anterior, catorce elementos.

Ejemplo 6.1.4 *Sea $n = 2$ y A el álgebra de Heyting cuyo diagrama está indicado en la figura:*



$\to$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	b	1	b	1	1
b	a	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

Verificar en este caso que $\mathcal{P}_A$ tiene también catorce elementos.

6.2. Funciones polinomiales: caso general

Ya hemos definido las funciones polinomiales en el caso del cálculo proposicional con n variables de enunciado. Consideremos ahora el caso general en que el conjunto $G = \{g_i\}_{i\in I}$ tiene un cardinal arbitrario. Para esto sea A un álgebra implicativa y A^I el producto cartesiano de tantas álgebras A como índices $i \in I$ haya. Un elemento $a \in A^I$ es una función definida sobre I y tomando valores en A. Pongamos $a(i) = a_i$, podemos escribir entonces $a = (a_i)_{i\in I}$. Se dice que a_i es la *coordenada de índice i del elemento $a \in A^I$*.

Sea $p = p(g_{i_1}, \ldots, g_{i_n})$ un polinomio, esto es una fórmula de $\mathcal{L}$ en la cual figuran las variables de enunciado $g_{i_1}, \ldots, g_{i_n}$ distintas dos a dos, $i_1, \ldots, i_n \in I$. A este polinomio le corresponde una función p_A definida de la siguiente manera: $p_A(a) = p(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$.
A esta función p_A así definida le daremos el nombre de *función polinomial* p_A.

Sea $b = b(i)_{i\in I} \in A^I$ tal que $b(i)_1 = a(i)_1, \ldots, b(i)_n = a(i)_n$, entonces es claro que $p_A(a) = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) = p_A(b)$. Esto significa que el valor de p_A en el elemento a depende sólo de las coordenadas de a cuyos índices son $i_1, \ldots, i_n$ que son precisamente los índices de las variables de enunciado que figuran en p.

Supongamos que $I = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ que es el caso más común en el cálculo proposicional, en que existe un conjunto numerable de variables de enunciado: $g_1, \ldots, g_n, \ldots$. Sea $A = \{0, 1\}$ y sea dado el polinomio $p = g_1 \to g_2$. Calculemos el valor del polinomio p_A en un cierto elemento $a \in A^I$. En este caso el elemento a tiene una infinidad numerable de coordenadas $a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$, donde cada a_i pertenece a A, esto es, $a_i = 0$ o $a_i = 1$. Elijamos entonces por ejemplo el elemento $a = (0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$, en este caso $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \ldots = a_n = \ldots = 0$. Luego para calcular $p_A(a) = (g_1 \to g_2)_A$ debemos reemplazar g_1 por $a_1 = 0$ y g_2 por $a_2 = 1$, entonces tenemos $p_A(a) = 0 \to 1 = 1$.
Sea ahora $a' = (0, 1, 1, \ldots, 1, \ldots)$, entonces tenemos también que $p_A(a') = 0 \to 1 = 1$.
De un modo general si $a'' = (0, 1, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$, $p_A(a'') = 0 \to 1 = 1$. Se observa así que el valor de la función polinomial $p_A = (g_1 \to g_2)_A$ en un elemento $a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ depende solamente de las coordenadas a_1, a_2 que tienen índices iguales a los índices de las variables g_1 y g_2 que figuran en el polinomio $p = g_1 \to g_2$.

Sea A^{A^I} el álgebra implicativa de todas las funciones definidas sobre A^I y tomando sus valores en A. La operación de implicación se define punto por punto: Esto es, si $f, g \in A^{A^I}$, entonces $h = f \to g$ es la función de A^{A^I} definida por: $h(x) = f(x) \to g(x)$ para $x \in A^I$.

Se reconoce como en el caso anterior que la familia $\mathcal{P}_A$ de todas las funciones polinomiales es una subálgebra de A^{A^I}.
Si $p = g_1 \to g_2$ y $q = g_3 \to g_4$ entonces $p_A = (g_1 \to g_2)_A$ y $q_A = (g_3 \to g_4)_A$.
Luego $p_A \to q_A = (g_1 \to g_2)_A \to (g_3 \to g_4)_A = ((g_1 \to g_2) \to (g_3 \to g_4))_A$, es también una función polinomial.

6.3. Tautologías de una matriz

A un álgebra implicativa A le daremos ahora el nombre de *matriz*.

Definición 6.3.1 *Diremos que el polinomio o fórmula $p(g_1, \ldots, g_n) \in \mathcal{L}$ es una tautología o una tesis de la matriz A si la función polinomial $p_A(g_1, \ldots, g_n)$ es idénticamente igual a 1 sobre A, esto es si: $p_A(g_1, \ldots, g_n) \equiv 1 \in A$ para todo $g_1, \ldots, g_n \in A$. Representaremos por la notación $\mathcal{T}_A$ al conjunto de todas las tautologías de A. Cuando $p(g_1, \ldots, g_n) \in \mathcal{T}_A$ diremos también que la fórmula $p(g_1, \ldots, g_n)$ es válida en A.*

Indiquemos una propiedad importante de $\mathcal{T}_A$.

Teorema 6.3.1 *Todas las tesis del cálculo proposicional implicativo son válidas en cualquier matriz, esto es, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_A$, cualquiera que sea la matriz A.*

Dem. Comencemos por demostrar que:
(A) Si $p \in \mathcal{T}_A$ y $p \to q \in \mathcal{T}_A$ entonces $q \in \mathcal{T}_A$. Esto es, $\mathcal{T}_A$ verifica el modus ponens.
Para eso recordemos que p_A es una función polinomial definida sobre el conjunto A^I y tomando sus valores en A. Por hipótesis (1) $p_A(x) = 1 \in A$ y $(p \to q)_A(x) = 1 \in A$, para todo $x \in A^I$.
Como $(p \to q)_A = p_A \to q_A$ entonces

$$(2) \ \ (p \to q)_A(x) = (p_A \to q_A)(x) = p_A(x) \to q_A(x) = 1.$$

De (1) y (2) se deduce que $1 \to q_A(x) = 1$, para todo $x \in A^I$, esto es, $q_A(x) = 1$ para todo $x \in A^I$, o sea que $q \in \mathcal{T}_A$.

Probemos ahora que:
(B) Cualquiera sean los polinomios $p, q, r \in \mathcal{T}_A$, se verifica:
L_1) $p \to (q \to p) \in \mathcal{T}_A$.
En efecto, para todo $x \in A^I$ se tiene

$$(1) \ \ (p \to (q \to p))_A(x) = (p_A \to (q \to p)_A)(x) = p_A(x) \to ((q \to p)_A(x)) =$$

$$p_A(x) \to (q_A(x) \to p_A(x))$$

y como $p_A(x)$ y $q_A(x)$ son elementos del álgebra implicativa A se tiene:

$$(2) \ \ p_A(x) \to (q_A(x) \to p_A(x)) = 1, \ \text{ para todo } \ x \in A^I.$$

De (1) y (2) resulta que $(p \to (q \to p))_A(x) = 1$, para todo $x \in A^I$ y por lo tanto $(p \to (q \to p)) \in \mathcal{T}_A$.
Análogamente se demuestra L_2) $((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))) \in \mathcal{T}_A$.
Recordemos ahora que $\mathcal{T}$ es por definición el menor conjunto de fórmulas que verifica el modus ponens y que contiene todas las fórmulas:

$$(p \to (q \to p)) \ \text{ y } \ ((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))).$$

Como $\mathcal{T}_A$ tiene las propiedades indicadas podemos afirmar que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_A$. ■

Indiquemos ahora algunas consecuencias importantes de este teorema. En primer lugar observemos que como todas las tautologías del cálculo proposicional implicativo son válidas en cualquier matriz A entonces para probar que una cierta fórmula p no es una tautología basta indicar una matriz A en la cual no sea válida la fórmula p.
Probemos ahora que:

(1) Las fórmulas g_i no son tautologías del cálculo proposicional implicativo, cualquiera sea el índice $i \in I$.

En efecto, sea A la matriz $\{0, 1\}$. Cada elemento $x \in A^I$ es una función definida sobre I y tomando sus valores en A.
Dado $j \in I$, pongamos $x(j) = x_j$, entonces $x = (x_j)_{j \in I}$. Para probar que $g_i \notin \mathcal{T}_A$ basta indicar un elemento $x_0 \in A^I$ tal que $g_{iA}(x_0) \neq 1$. Sea entonces x_0 el elemento cuyas coordenadas son todas iguales a 0. En virtud de la definición de g_{iA} sabemos que $g_{iA}(x) = x_i$ y por lo tanto $g_{iA}(x_0) = 0$ y esto muestra que la fórmula g_i no es válida en A, cualquiera sea el índice $i \in I$. Queda así demostrado que existen fórmulas que no son tautologías, esto es $\mathcal{T} \neq \mathcal{L}$.
Este resultado se puede expresar diciendo que el cálculo proposicional implicativo es *consistente*. Recordemos que un cálculo proposicional se dice inconsistente si todas las fórmulas son tautologías.

(2) Si $i \neq j$ entonces $C(g_i) \neq C(g_j)$, considerando la relación de congruencia módulo $\mathcal{T}$.
Para que sea $C(g_i) = C(g_j)$ es necesario y suficiente que $g_i \to g_j \in \mathcal{T}$ y $g_j \to g_i \in \mathcal{T}$.
Retomando la matriz A, basta indicar un elemento $x_0 \in A^I$ tal que $(g_i \to g_j)_A(x_0) \neq 1$.
Elijamos el elemento x_0 que tiene por coordenada de índice i, $x_i = 1$ y por coordenada de índice j , $x_j = 0$. Entonces $(g_i \to g_j)_A(x_0) = g_{iA}(x_0) \to g_{jA}(x_0) = 1 \to 0 = 0 \neq 1$ y por lo tanto $g_i \to g_j \notin \mathcal{T}$. Queda así probado que $C(g_i) \neq C(g_j)$.

(3) $((g_1 \to g_2) \to g_1) \to g_1 \notin \mathcal{T}$.
Recordando los resultados indicados en la Tabla 6.1 del Ejemplo 6.1.1, se comprueba de inmediato que esta fórmula es válida en la matriz $A = \{0, 1\}$. Pero si consideramos la matriz $A = \{0, a, 1\}$ del Ejemplo 6.1.2 se comprueba que esta fórmula no es válida en A, lo que demuestra (3).

De aquí resulta que el esquema $((p \to q) \to p) \to p$, con $p, q \in \mathcal{L}$, no es una tautología del cálculo proposicional implicativo intuicionista. Para que el esquema fuese una tautología sería necesario que eso ocurriera cuando se reemplaza a p y q por fórmulas arbitrarias. Pero por (3) si reemplazamos p por g_1 y q por g_2 obtenemos una fórmula que no es una tautología, lo que demuestra lo afirmado.

Este ejemplo muestra que una fórmula puede ser válida en una cierta álgebra implicativa sin que ella sea válida en todas las álgebras implicativas. Esta situación nos conduce a la siguiente:

Definición 6.3.2 *Diremos que una fórmula es válida si ella es válida en todas las álgebras implicativas.*

En estas condiciones el teorema anterior se puede enunciar diciendo:

Todas las tautologías son válidas.

¿Podemos afirmar la recíproca? Esto es, ¿toda fórmula válida es una tautología? La respuesta es afirmativa y así lo demostraremos mas adelante.

6.4. Matrices características

Se plantea el problema de saber si habrá alguna matriz A tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_A$. Esta posibilidad nos conduce a la siguiente:

Definición 6.4.1 *Se dice que A es una matriz característica para el cálculo proposicional implicativo si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_A$.*

Vamos a demostrar que existe por lo menos una matriz característica para el cálculo proposicional implicativo. Mas precisamente mostraremos que el álgebra de Lindenbaum $\mathbf{L} = \mathcal{L}/\equiv$ es una matriz característica. Para eso tenemos necesidad de considerar el conjunto $\mathbf{L}^I$.
Entre los elementos del álgebra $\mathbf{L}$ figuran las clases de equivalencia $C(g_i)$, con $i \in I$.
Un elemento $x \in \mathbf{L}^I$ tendrá ciertas coordenadas $x = (C(x_i))_{i\in I}$, donde $C(x_i) \in \mathbf{L}$. Al elemento $g = (C(g_i))_{i\in I} \in \mathbf{L}^I$ le daremos el nombre de *elemento característico* de $\mathbf{L}^I$, de acuerdo a la terminología de H. Rasiowa.
Demostraremos ahora el siguiente

Lema 6.4.1 *Dada una fórmula $p \in \mathcal{L}$ entonces el valor de la función polinomial $p_\mathbf{L}$ en el elemento característico g es igual a la clase de equivalencia que contiene a la fórmula p, esto es: (1) $p_\mathbf{L}(g) = C(p) \in \mathbf{L}$.*

Dem. Sea L_1 el conjunto de todas las fórmulas para las cuales vale la igualdad (1). Probemos que:

(A) $g_i \in L_1$, para todo $i \in I$.
En efecto, por la definición de función polinomial $g_{i\mathbf{L}}(g) = C(g_i)$ y por lo tanto (1) vale para $p = g_i$.

(B) Si $p \in L_1$ y $q \in L_1$ entonces $p \to q \in L_1$.
Supongamos entonces que $p_\mathbf{L}(g) = C(p)$, $q_\mathbf{L}(g) = C(q)$ y sea $r = p \to q$. Luego

$$r_\mathbf{L}(g) = (p \to q)_\mathbf{L}(g) = (p_\mathbf{L} \to q_\mathbf{L})(g) = (p_\mathbf{L}(g) \to q_\mathbf{L}(g)) =$$

$$C(p) \to C(q) = C(p \to q) = C(r).$$

Por lo tanto $r = p \to q \in L_1$.

Como $\mathcal{L}$ es el menor conjunto de fórmulas que verifica las condiciones (A) y (B), entonces $\mathcal{L} \subseteq L_1$. Por otro lado como L_1 es un conjunto de fórmulas podemos escribir $L_1 \subseteq \mathcal{L}$ y entonces $\mathcal{L} = L_1$. Esto significa que (1) vale para todas las fórmulas, como queríamos demostrar. ■

Probemos ahora que:

Teorema 6.4.1 $\mathbf{L} = \mathcal{L}/\equiv$ *es una matriz característica para el cálculo proposicional implicativo.*

Dem. Queremos probar que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathbf{L}}$. Ya sabemos que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\mathbf{L}}$, resta probar que (1) $\mathcal{T}_{\mathbf{L}} \subseteq \mathcal{T}$.
Sea $p \in \mathcal{T}_{\mathbf{L}}$, esto es, sea p una fórmula tal que $p_{\mathbf{L}}(x) = 1 \in \mathbf{L}$, para todo $x \in \mathbf{L}^I$. En particular, reemplazando x por el elemento característico g, tendremos $p_{\mathbf{L}}(g) = 1 \in \mathbf{L}$, o sea por el teorema anterior $C(p) = 1 \in \mathbf{L}$. Esto significa que $p \in \mathcal{T}$, lo que demuestra (1) y por lo tanto $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathbf{L}}$. Luego $\mathbf{L}$ es una matriz característica. ■

Sabemos ahora que existe por lo menos una matriz característica, a saber $\mathcal{L}/\equiv$.
Una matriz característica es útil si ella permite determinar fácilmente si una fórmula dada p es o no una tautología, esto es, si $p \in \mathcal{T}$ o $p \notin \mathcal{T}$. Esto no ocurre con la matriz característica $\mathbf{L} = \mathcal{L}/\equiv$, porque su conocimiento implica ya el conocimiento de $\mathcal{T}$. Somos llevados entonces a considerar si existe o no una matriz característica mas simple que $\mathcal{L}/\equiv$.

Veamos que pasa en el caso del cálculo proposicional con $n = 2$ variables de enunciado: g_1, g_2.
Siguiendo los resultados de Skolem, el álgebra $\mathcal{L}/\equiv$ tiene catorce elementos y por lo tanto $\mathcal{L}/\equiv$ es una matriz característica. Por otro lado ya hemos visto en el Ejemplo 6.1.2 que si $A = \{0, a, 1\}$ entonces $\mathcal{P}_A$ tiene también catorce elementos y es isomorfa a $\mathcal{L}/\equiv$. Esto nos conduce a estudiar las relaciones que existen entre $\mathcal{L}/\equiv$ y $\mathcal{P}_A$.

6.5. Relación entre $\mathcal{L}/\equiv$ y $\mathcal{P}_A$

Sea A una matriz dada y sea $\mathcal{T}_A$ el conjunto de todas las fórmulas válidas en A. Hemos probado anteriormente que:

$$\text{si } p \in \mathcal{T}_A \text{ y } p \to q \in \mathcal{T}_A \text{ entonces } q \in \mathcal{T}_A,$$

esto es, $\mathcal{T}_A$ es cerrado con respecto al modus ponens. Representemos por $C(\mathcal{T}_A)$ el conjunto de todas las fórmulas que son equivalentes a alguna fórmula de $\mathcal{T}_A$. Ahora es fácil reconocer que $C(\mathcal{T}_A)$ es un sistema deductivo de $\mathbf{L} = \mathcal{L}/\equiv$.
Demostraremos ahora el importante

Teorema 6.5.1 *Si A es un álgebra implicativa entonces $\mathbf{L}/\, C(\mathcal{T}_A) \cong \mathcal{P}_A$.*

Dem. Para cada $C(p) \in \mathbf{L}$ pongamos $\varphi(C(p)) = p_A$. Es evidente que φ es una transformación de $\mathbf{L}$ sobre $\mathcal{P}_A$. En efecto, dada una función polinomial p_A ella está asociada a un polinomio p, luego $\varphi(C(p)) = p_A$.
Probemos ahora que

(A) φ es un homomorfismo.
En efecto

$$\varphi(C(p) \to C(q)) = \varphi(C(p \to q)) = (p \to q)_A = p_A \to q_A = \varphi(C(p)) \to \varphi(C(q)).$$

(B) $C(\mathcal{T}_A)$ es el núcleo de φ.
$C(p) \in Nuc(\varphi)$ si y solo si $\varphi(C(p)) = 1 \in \mathcal{P}_A$, o sea si y solo si $p_A = 1 \in \mathcal{P}_A$ y esto ocurre si y solo si $p_A(x) = 1$, para todo $x \in A^I$. Esto significa que $p \in \mathcal{T}_A$, lo que es equivalente a decir que $C(p) \in C(\mathcal{T}_A)$. Por lo tanto $Nuc(\varphi) = C(\mathcal{T}_A)$. De (A) y (B) resulta $\mathbf{L}/\, C(\mathcal{T}_A) \cong \mathcal{P}_A$. ■

Corolario 6.5.1 *Para que A sea una matriz característica para el cálculo proposicional implicativo es necesario y suficiente que $\mathcal{P}_A = \mathcal{L}/\equiv$.*

Dem. Supongamos que A es una matriz característica, esto es que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_A$. Entonces $C(\mathcal{T}_A) = 1 \in \mathcal{L}/\equiv$ y por lo tanto $\mathcal{P}_A \cong \mathbf{L}/\ C(\mathcal{T}_A) = \mathbf{L}/\ C(\mathcal{T}) = \mathbf{L}/\ \{1\} \cong \mathbf{L}$. Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{P}_A \cong \mathcal{L}/\equiv = \mathbf{L}$, entonces $\mathbf{L}/\ C(\mathcal{T}_A) \cong \mathcal{L}/\equiv$. En este caso el homomorfismo φ es un isomorfismo, luego $C(\mathcal{T}_A) = 1 \in \mathbf{L}$, es decir, $C(\mathcal{T}_A) = C(\mathcal{T})$, o sea $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}$. ■

Corolario 6.5.2 $\mathcal{P}_{\mathbf{L}} = \mathbf{L}$.

Dem. Resulta del Corolario 6.5.1, teniendo en cuenta que $\mathbf{L} = \mathcal{L}/\equiv$ es una matriz característica. ■

Recordemos que de acuerdo a Skolem el álgebra de Lindenbaum $\mathcal{L}/\equiv$ del cálculo proposicional implicativo con dos variables g_1, g_2 tiene catorce elementos. Por otro lado tenemos visto que si A representa la cadena con tres elementos $0 < a < 1$ entonces $\mathcal{P}_A = \mathcal{L}/\equiv$, luego del Corolario 6.5.1 resulta que A es una matriz característica de este cálculo, que es mas simple que $\mathcal{L}/\equiv$.

Observación 6.5.1 *Sea p una fórmula válida entonces p será válida en $\mathcal{L}/\equiv$, esto es $p_{\mathbf{L}}(x) = 1 \in \mathbf{L}$, para todo $x \in \mathbf{L}^I$. En particular $p_{\mathbf{L}}(g) = C(p) = 1 \in \mathbf{L}$, donde g es el elemento característico, luego $p \in \mathcal{T}$. Así toda fórmula válida es una tautología.*

Problema (21/6/1960). Sea $\mathcal{L}_n$ el cálculo proposicional implicativo con n variables. ¿Existe alguna matriz característica finita para este cálculo?
Si así fuese del Corolario 6.5.1 resultaria que $\mathcal{L}/\equiv = \mathcal{P}_A$ es finita.

A esta teoría de representación del cálculo proposicional implicativo algunos autores le dan el nombre de *semántica del cálculo proposicional implicativo.*

7. ALGEBRAS DE HILBERT LIBRES

7.1. Definición y resultados preliminares

Definición 7.1.1 *Un subconjunto G de un álgebra de Hilbert L se dice un conjunto de generadores libres de L si:*

L1) $SH(G) = L$, (esto es, G es un conjunto de generadores de L.)

L2) Dada una función f de L en un álgebra de Hilbert arbitraria A existe un homomorfismo $h_f : L \to A$ que extiende a f, esto es $f(g) = h_f(g)$, para todo $g \in G$.

En este caso se suele decir que L es un *álgebra de Hilbert libre* o que L es un álgebra de Hilbert con un conjunto G de generadores libres.

Teorema 7.1.1 *(de Birkhoff) Para toda "álgebra" definida por igualdades existe siempre el álgebra libre con un conjunto de generadores de cardinal prefijado.*

Lema 7.1.1 *Si L es un álgebra de Hilbert con un conjunto de generadores libres G, A un álgebra de Hilbert con un conjunto G' de generadores y $f : G \to G'$ es una función suryectiva, entonces A es una imagen homomórfica de L.*

Dem. Como L es un álgebra libre la función f se extiende a un homomorfismo $h_f : L \to A$, luego (1) $h_f(g) = f(g)$, para todo $g \in G$. Entonces por el Teorema 3.5.4 $SH(h_f(G)) = h_f(L)$, pero por (1) $h_f(G) = f(G) = G'$, luego $SH(G') = h_f(L)$ y como $SH(G') = A$ tenemos finalmente que $h_f(L) = A$. ■

Observación 7.1.1 *Este lema significa que L es la mayor álgebra entre las que contienen un conjunto de generadores de cardinal igual al cardinal de G.*

Teorema 7.1.2 *Sea G un conjunto de generadores de un álgebra de Hilbert A y $f : G \to A'$ una función de G en un álgebra de Hilbert arbitraria A'. Si existe un homomorfismo de $A \to A'$ que extiende a f, él es único.*

Dem. Sean h', h'' homomorfismos de A en A' que extienden a f, esto es, para todo $g \in G$:

$$(i)\ \ h'(g) = f(g) \quad ; \ (ii)\ \ h''(g) = f(g).$$

Consideremos el conjunto $X = \{x \in A : h'(x) = h''(x)\} \subseteq A$, entonces (1) $G \subseteq X$. En efecto, si $g \in G$ entonces $h'(g) = f(g) = h''(g)$ y por lo tanto $g \in X$.
Sean $x, y \in X$ entonces $h'(x \to y) = h'(x) \to h'(y) = h''(x) \to h''(y) = h''(x \to y)$ luego, $x \to y \in X$. Luego (2) X es subálgebra de A. De (1) y (2) resulta $A = SH(G) \subseteq X$ y por lo tanto $A = X$, esto es, $h'(x) = h''(x)$, para todo $x \in A$. ■

Teorema 7.1.3 *Si L_1 es un álgebra de Hilbert con un conjunto de generadores libres G_1, L_2 un álgebra de Hilbert con un conjunto de generadores libres G_2 y si existe una biyección $f : G_1 \to G_2$, entonces $L_1 \cong L_2$.*

Dem. Como L_1 es libre y $f : G_1 \to L_2$, esta función se puede extender a un homomorfismo $h_f : L_1 \to L_2$.
Como f es una biyección, entonces también $f^{-1} : G_2 \to G_1$ es una biyección.
Entonces como L_2 es libre y $f^{-1} : G_2 \to L_1$, esta función se puede extender a un homomorfismo $h_{f^{-1}} : L_2 \to L_1$.
Consideremos el homomorfismo $h = h_{f^{-1}} \circ h_f : L_1 \to L_1$, y sea:

$$X = \{x \in L_1 : h(x) = x\} \subseteq L_1.$$

a) $G_1 \subseteq X$.
Sea $g \in G_1$ luego $h(g) = h_{f^{-1}}(h_f(g)) = h_{f^{-1}}(f(g))$ y como $f(g) \in G_2$ tenemos finalmente $h(g) = f^{-1}(f(g)) = g$, luego $g \in X$.

b) X es subálgebra de L_1.
Su demostración es obvia.

De a) y b) resulta que $L_1 = SH(G_1) \subseteq X$ y por lo tanto $L_1 = X$, y en consecuencia:

c) $h(x) = x$, para todo $x \in L_1$.

d) h_f es inyectiva.
Si $h_f(x) = h_f(y)$ entonces $h_{f^{-1}}(h_f(x)) = h_{f^{-1}}(h_f(y))$, esto es $h(x) = h(y)$ de donde resulta por c) que $x = y$.

e) h_f es suryectiva.
Como $SH(G_1) = L_1$ y $h_f : L_1 \to L_2$ es un homomorfismo entonces por el Teorema 3.5.4: $h_f(L_1) = SH(h_f(G_1)) = SH(f(G_1)) = SH(G_2) = L_2$.

■

Esto nos prueba que *el álgebra de Hilbert con un conjunto de generadores libres* G, *es única a menos de isomorfismos.*

7.2. Determinación del álgebra libre

Teorema 7.2.1 (L.Henkin, [7]) $\mathcal{L}/\equiv$ *es un álgebra de Hilbert libre.*

Dem. Sea $\mathcal{L}$ el conjunto de todas las fórmulas del cálculo proposicional implicativo (ver capítulo 1), $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in I}$ el conjunto de las variables de enunciado, $|\mathcal{G}| \neq 0$. Por lo indicado en el capítulo 1 sabemos que $(\mathcal{L}/\equiv, \Rightarrow)$ es un álgebra de Hilbert.
Por definición $\mathcal{L}$ es el menor subconjunto de fórmulas que verifica (I) $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{L}$ y (II) si $x, y \in \mathcal{L}$ entonces $x \to y \in \mathcal{L}$ entonces $\mathcal{G}' = \{C(g_i)\}_{i \in I}$ es un conjunto de generadores de $\mathcal{L}/\equiv$, esto es (1) $SH(\mathcal{G}') = \mathcal{L}/\equiv$. Por lo indicado en el párrafo 6.3 si $g_i \neq g_j$ entonces $C(g_i) \neq C(g_j)$, por lo tanto $|\mathcal{G}'| = |\{C(g_i)\}_{i \in I}| = |\mathcal{G}|$.
Si A es un álgebra de Hilbert y $f : \mathcal{G}' \to A$, entonces $f(C(g_i)) \in A$ para todo $i \in I$. Sea $\mathcal{P}_A$ el álgebra de todas las funciones polinomiales definidas sobre A^I y que toman sus valores en A. Por el Teorema 6.5.1 sabemos que la función $\varphi(C(p)) = p_A$, donde $p \in \mathcal{L}/\equiv$ es un isomorfismo de $(\mathcal{L}/\equiv)/C(\mathcal{T}_A)$ en $\mathcal{P}_A$. En particular $\varphi(C(g_i)) = g_{iA}$.
Como φ es un epimorfismo, de (1) y el Teorema 3.5.4 resulta que $SH(\{g_{iA}\}_{i \in I}) = \mathcal{P}_A$.
Sea $k \in A^I$ definido por $k(i) = f(C(g_i))$, para todo $i \in I$. Por 6.2 sabemos que $\mathcal{P}_A \subseteq A^{A^I}$

y $\mathcal{P}_A$ es una subálgebra de A^{A^I}.
Observemos ahora que ${g_i}_A(k) = f(C(g_i)) = k(i)$ para todo $i \in I$.

Sea $\varphi_0 : \mathcal{P}_A \to A$ definida por $\varphi_0(p_A) = p_A(k)$. Luego como $\varphi_0(p_A \to q_A) = \varphi((p \to q)_A) = (p \to q)_A(k) = p_A(k) \to q_A(k) = \varphi_0(p_A) \to \varphi_0(q_A)$, entonces φ_0 es un homomorfismo de $\mathcal{P}_A$ en A, luego la transformación $h = \varphi_0 \circ \varphi$ es un homomorfismo de $\mathcal{L}/\equiv$ en A. Veamos que h prolonga a f. En efecto $h(C(p)) = (\varphi_0 \circ \varphi)(C(p)) = \varphi_0(p_A) = p_A(k)$, y en particular $h(C(g_i)) = {g_i}_A(k) = f(C(g_i))$.

$\blacksquare$

8. EL CALCULO PROPOSICIONAL IMPLICATIVO CLASICO

Vamos a considerar ahora el cálculo proposicional implicativo clásico, cuyo estudio fue iniciado por A. Tarski en 1920.
El alfabeto de este cálculo es el mismo que el del cálculo proposicional implicativo intuicionista, a saber: $\rightarrow$, (,) y un conjunto $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in I}$ de variables de enunciado. La letra $\mathcal{L}$ representará como en el Capítulo 1 el conjunto de todas las fórmulas.
Los axiomas son:

L1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$,

L2) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$,

L3) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$, (Ley de Pierce),

donde p, q, r designan elementos arbitrarios de $\mathcal{L}$. Además se tiene también la regla de modus ponens: si $p \in \mathcal{T}$ y $p \rightarrow q \in \mathcal{T}$ entonces $q \in \mathcal{T}$.
El conjunto $\mathcal{T}$ de todas las tesis y el álgebra de Lindenbaum de $\mathcal{L}$ se define como en el Capítulo 1.

8.1. Algebra de Lindenbaum de $\mathcal{L}$

Como valen los axiomas L1) y L2) podemos afirmar que $\mathcal{L}/\equiv$ es un álgebra implicativa y como se verifica el axioma L3) resulta que se trata de un álgebra especial.

Teorema 8.1.1 *El álgebra de Lindenbaum $\mathcal{L}/\equiv$, del cálculo proposicional implicativo clásico, es un álgebra de Tarski.*

Dem. Sabemos que $\mathcal{L}/\equiv$ es un álgebra implicativa. Para probar que $\mathcal{L}/\equiv$ es un álgebra de Tarski tenemos que probar que: $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha = \alpha$, donde $\alpha = C(a)$, $\beta = C(b)$ son elementos de $\mathcal{L}/\equiv$.
Como $\mathcal{L}/\equiv$ es un álgebra implicativa, se verifica: $\alpha \leq (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha$.
Resta probar que: $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \leq \alpha$, esto es, $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha = 1$. En efecto, usando L3)

$$((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha = ((C(a) \rightarrow C(b)) \rightarrow C(a)) \rightarrow C(a) =$$
$$(C(a \rightarrow b) \rightarrow C(a)) \rightarrow C(a) = C((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow C(a) =$$
$$C(((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a) = 1.$$

■

8.2. Representación de un álgebra de Tarski como subproducto directo de álgebras simples

Hemos demostrado anteriormente que en un álgebra de Tarski todo sistema deductivo completamente irreducible es un sistema deductivo máximo y por lo tanto todo sistema deductivo propio de un álgebra de Tarski es intersección de sistemas deductivos máximos.
Recordemos también que toda álgebra de Tarski es semisimple, esto es, el sistema deductivo formado por el elemento 1 es intersección de sistemas deductivos máximos, o lo que

es equivalente a decir que el radical de un álgebra de Tarski contiene solo el elemento 1. En general pueden existir varias familias de sistemas deductivos máximos cuya intersección sea $\{1\}$.

Definición 8.2.1 *Una familia* $\{M_i\}_{i\in I}$ *de sistemas deductivos máximos se dice separadora si* $\{1\} = \bigcap_{i\in I} M_i$.

Teorema 8.2.1 *Si un álgebra de Tarski A con más de un elemento no es simple entonces es isomorfa a un subproducto directo de álgebras simples.*

Dem. Sea $\mathcal{M}$ una familia separadora de sistemas deductivos máximos. Podemos suponer, por ejemplo, que se trata de la familia de todos los sistemas deductivos máximos.
Sabemos que para cada $M \in \mathcal{M}$, $A/M = B_M$ es un álgebra simple formada por dos elementos: $B_M = \{0_M, 1_M\}$.
Como todas estas álgebras B_M son isomorfas podemos escribir $B_M = \{0, 1\}$. A cada una de ellas daremos el nombre de *eje coordenado* B_M.
Sea $\mathcal{P} = \prod_{M\in\mathcal{M}} B_M$ y sea m el homomorfismo natural de A sobre el álgebra cociente $A/M = B_M$. Como $\mathcal{P}$ es producto directo de álgebras de Tarski entonces $\mathcal{P}$ es un álgebra de Tarski. Vamos a representar el álgebra A como una subálgebra A' del álgebra de Tarski $\mathcal{P}$.
Dado un elemento $f \in A$, sea $\varphi(f) = F \in \mathcal{P}$ donde F que tiene por coordenada en el eje B_M: $F(M) = m(f) \in B_M$. Es claro que $F = \{(F(M))\}_{M\in\mathcal{M}}$, donde F es una función definida sobre $\mathcal{M}$ y tomando sus valores en $B_M = \{0, 1\}$.

Probemos que:
(1) φ es un homomorfismo de A en $\mathcal{P}$, esto es: $\varphi(f \to g) = \varphi(f) \to \varphi(g)$, cualesquiera que sean $f, g \in A$.
Sea $h = f \to g$, entonces $\varphi(h) = H$. Teniendo en cuenta la definición de φ se tiene

$$H(M) = m(h) = m(f \to g) = m(f) \to m(g) = F(M) \to G(M)$$

y por lo tanto $H = F \to G$, esto es, $\varphi(h) = \varphi(f \to g) = \varphi(f) \to \varphi(g)$.

(2) φ es biunívoca, esto es, si $\varphi(f) = \varphi(g)$ entonces $f = g$.
En efecto, de $\varphi(f) = \varphi(g)$ resulta $\varphi(f) \to \varphi(g) = 1$ y $\varphi(g) \to \varphi(f) = 1$.
Como φ es un homomorfismo tenemos que $\varphi(f \to g) = 1$, $\varphi(g \to f) = 1$, esto es $f \to g \in M$ y $g \to f \in M$, para todo $M \in \mathcal{M}$ y por lo tanto $f \to g \in \bigcap_{M\in\mathcal{M}} M = \{1\}$ y $g \to f \in \bigcap_{M\in\mathcal{M}} M = \{1\}$. Luego $f \to g = 1$ y $g \to f = 1$, y por lo tanto $f = g$.

Sea A' la familia de todos los elementos de $\mathcal{P}$ de la forma $\{\varphi(f)\}_{f\in A}$. Entonces de (1) y (2) resulta que A' es una subálgebra de $\mathcal{P}$ isomorfa a A.
Recordemos que una subálgebra A' de un producto directo $\mathcal{P}$ se dice un subproducto directo, si la proyección de A' sobre cada eje es el eje todo y no es un isomorfismo. Veamos que esto sucede.
Sea el eje B_M, donde M es un sistema deductivo máximo. Si $f \in M$, la proyección de $\varphi(f) = F$ sobre el eje B_M es $F(M) = 1_M \in B_M$ y si $f \notin M$ se tiene $F(M) = 0_M \in B_M$.
Además como el álgebra A tiene más de un elemento y A no es simple, todo sistema deductivo máximo M de A verifica $M \neq \{1\}$, luego M tiene más de un elemento, y la

proyección de A' sobre el eje B_M no puede ser un isomorfismo, visto que todos los elementos $f \in M$ dan origen a los elementos $\varphi(f) = F$ que tienen por proyección $1_M \in B_M$. ■

8.3. Matrices características para el cálculo proposicional clásico

El teorema de representación indicado en el párrafo 8.2 tiene una gran importancia como veremos a continuación.
Observemos en primer lugar que si una regla de cálculo vale en las álgebras de Tarski, en particular ella vale en el álgebra de Tarski $B = \{0, 1\}$.
Supongamos ahora que una cierta regla de cálculo vale en el álgebra $B = \{0, 1\}$, entonces ella vale en cualquier producto directo $\mathcal{P}$ de álgebras $\{0, 1\}$, y también en todas las subálgebras de $\mathcal{P}$. Como cualquier álgebra de Tarski con más de un elemento es isomorfa a un subproducto directo de álgebras $\{0, 1\}$ podemos afirmar que toda regla de cálculo que vale en $B = \{0, 1\}$ vale en todas las álgebras de Tarski. Acabamos así de probar que:

Teorema 8.3.1 *Para que una igualdad sea válida en todas las álgebras de Tarski es necesario y suficiente que sea válida en el álgebra* $\{0, 1\}$.

Corolario 8.3.1 *El álgebra* $\{0, 1\}$ *es una matriz característica para el cálculo proposicional implicativo clásico (Wajsberg).*

Consideremos por ejemplo la fórmula: $((a \to b) \to b) \to a = b \to a$.

Podemos verificar que ella es demostrable en las álgebras de Tarski comprobando que vale en el álgebra $\{0, 1\}$. Como la fórmula tiene dos variables, a y b, tenemos que calcular las funciones polinomiales $b \to a$ y $((a \to b) \to b) \to a$ sobre el álgebra $B = \{0, 1\}$. Para eso tenemos que considerar el conjunto $E = B^2$ que tiene cuatro puntos: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$.

Cálculo de $b \to a$ y $((a \to b) \to b) \to a$.

E	a	b	$b \to a$	$a \to b$	$(a \to b) \to b$	$((a \to b) \to b) \to a$
$(0,0)$	0	0	1	1	0	1
$(0,1)$	0	1	0	1	1	0
$(1,0)$	1	0	1	0	1	1
$(1,1)$	1	1	1	1	1	1

y comprobamos así que $((a \to b) \to b) \to a = b \to a$, sin necesidad de hacer la demostración correspondiente, a partir de los postulados que caracterizan a un álgebra de Tarski.
En particular, tenemos un criterio de decisión para las tesis del cálculo proposicional implicativo clásico. En efecto, una fórmula $p(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ será una tautología de este cálculo si y solo si $C(p(g_1, g_2, \ldots, g_n)) = 1 \in \mathcal{L}/\equiv$. Basta por lo tanto verificar que la función polinomial $p_B(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ es idénticamente igual a 1 en el álgebra $B = \{0, 1\}$. Esto significa que las tesis de B coinciden con las tesis de $\mathcal{L}$, es decir, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_B$, lo que puede expresarse diciendo que: *la matriz* $B = \{0, 1\}$ *es una matriz característica para el cálculo proposicional implicativo clásico*, y por lo tanto el álgebra libre $\mathcal{L}/\equiv$ coincide con

el álgebra $\mathcal{P}_B$ de todas las funciones polinomiales definidas sobre $B = \{0, 1\}$.
Si el número de variables de enunciado es finito $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, entonces $\mathcal{P}_B$ es el álgebra de Tarski libre con n generadores. En el caso $n = 2$ el álgebra $\mathcal{P}_B$ ha sido determinada en el Capítulo 6. Hemos visto que $\mathcal{P}_B = \mathcal{L}/\equiv \neq B^{B^2}$, este hecho se expresa diciendo que $\mathcal{L}/\equiv$ *no es funcionalmente completa*.
Tenemos así un método mecánico para averiguar si una fórmula del cálculo proposicional implicativo clásico es o no una tautología, pero es claro que no indicamos un método mecánico para demostrar cualquier tautología a partir de los postulados del cálculo proposicional implicativo clásico. Tales métodos existen y son estudiados en la teoría de Gentzen.

8.4. Axiomática del cálculo proposicional implicativo clásico

1. **Axiomática de Tarski (1920):** En el sistema original de Tarski los axiomas eran los siguientes:

   T1) $p \to (q \to p) \in \mathcal{T}$,

   T2) $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)) \in \mathcal{T}$,

   T3) $((p \to q) \to r) \to ((p \to r) \to r) \in \mathcal{T}$.

2. **Axiomática de Tarski–Bernays (1930):** Una simplificación de los axiomas de Tarski fue obtenida por Bernays en 1930, reemplazando T3) por B3):

   B1) $p \to (q \to p) \in \mathcal{T}$,

   B2) $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)) \in \mathcal{T}$,

   B3) $((p \to q) \to p) \to p \in \mathcal{T}$ (regla conocida por Pierce- *collected Papers 3– 384*).

3. **Axiomática de Wajsberg:** contiene un solo axioma W):

   $((p \to q) \to ((r \to s) \to t)) \to ((u \to ((r \to s) \to t)) \to ((p \to u) \to (s \to t))) \in \mathcal{T}$.

   que en la notación de Łukasiewicz $Cpq = p \to q$ es :

   $$CCCpqCCrstCCuCCrstCCpuCst.$$

4. **Axiomática de J. Łukasiewicz**: Un solo axioma

   $$CCCpCqpCCCCCrstuCCsuCrvv$$

5. **Axiomática de J. Łukasiewicz (1948),[9]**: Un solo axioma

   $$((p \to q) \to r) \to ((r \to p) \to (s \to p))$$

   $$CCCpqrCCrpCsp.$$

8.5. Axiomas de Łukasiewicz para el cálculo proposicional implicativo clásico.

L1) $p \to (q \to p)$,

L2) $(((p \to q) \to r) \to s) \to ((q \to s) \to (p \to s))$.

Juntamente con la regla de sustitución y modus ponens.

La demostración de este Teorema no fue dada pero A. N. Prior en 1961 la reproduce [15]. En este trabajo también se prueba que los axiomas

L1) $p \to (q \to p)$,

M2) $(((p \to q) \to r) \to q) \to ((q \to s) \to (p \to s))$

son suficientes.

Problema no resuelto: Saber si este cálculo puede ser caracterizado por el axioma Cpp y otro axioma conteniendo ocho símbolos de implicación (C).

Wajsberg probó que en los axiomas de Tarski–Bernays, el axioma B1 puede sustituirse por uno cualquiera de los siguientes axiomas:

$p \to ((p \to q) \to q)$,

$p \to ((q \to p) \to p)$,

$p \to ((q \to q) \to p)$,

$q \to (p \to p)$,

$q \to (((p \to p) \to p) \to p)$,

$q \to (((p \to p) \to p) \to ((p \to p) \to p))$,

$q \to ((p \to p) \to (p \to p))$,

$q \to ((p \to p) \to ((p \to p) \to (p \to p)))$,

$p \to ((p \to p) \to p)$,

$p \to (p \to p)$,

(ver Łukasiewicz 1948,[9]).

8.6. Nueva axiomática para las álgebras de Tarski

Un álgebra de Tarski fue definida como un álgebra de Hilbert (Definición 2.1.1) que verifica T) $(a \to b) \to a = a$ (Definición 5.5.3), por lo tanto es un sistema $(A, \to, 1)$ que verifica:

$H_1)$ $x \to (y \to x) = 1$,

$H_2)$ $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1$,

H_3) $x \to 1 = 1$,

H_4) Si $x \to y = 1$ e $y \to x = 1$ entonces $x = y$,

T) $(x \to y) \to x = x$.

Teorema 8.6.1 (A. Monteiro, 1960) *Un sistema* $(A, \to, 1)$ *es un álgebra de Tarski si:*

M1) $1 \to x = x$,

M2) $x \to x = 1$,

M3) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$,

M4) $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$.

Dem. Veamos que de H_1, H_2, H_3, H_4 y T se deducen M1) a M4).

M1) Utilizando sucesivamente T y H_3 tenemos:
$x = (x \to 1) \to x = 1 \to x$.

M2) Utilizando sucesivamente H_1 y M1 tenemos:
$1 = x \to (1 \to x) = x \to x$.

Antes de probar M3 y M4, necesitamos probar algunas reglas de cálculo.

M5) $x \to (x \to y) = x \to y$.
Es una consecuencia de H_1, H_2, H_4, M1 y M2. En efecto:
Por H_1 tenemos : (i) $1 = (x \to y) \to (x \to (x \to y))$.
Por H_2 tenemos : $(x \to (x \to y)) \to ((x \to x) \to (x \to y)) = 1$. Luego aplicando M2, $(x \to (x \to y)) \to (1 \to (x \to y)) = 1$, de donde resulta, teniendo en cuenta M1, que : (ii) $(x \to (x \to y)) \to (x \to y) = 1$. De (i) e (ii) resulta por H_4 que se verifica M5.

M6) Si $y \to z = 1$ entonces $(x \to y) \to (x \to z) = 1$.
Utilizando sucesivamente H_2, la hipótesis, H_3 y M1 tenemos:
$1 = (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = (x \to 1) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1 \to ((x \to y) \to (x \to z)) = (x \to y) \to (x \to z)$.

M7) Si $x \to y = 1$ e $y \to z = 1$ entonces $x \to z = 1$.
Utilizando sucesivamente H_2, las hipótesis, H_3, M1, y M1 tenemos:
$1 = (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = (x \to 1) \to (1 \to (x \to z)) = 1 \to (x \to z) = x \to z$.

M8) Si $x \to y = 1$ entonces $(y \to z) \to (x \to z) = 1$.
Es una consecuencia de H_1, H_2, M1 y M7. En efecto :
Por H_1 tenemos (i) $(y \to z) \to (x \to (y \to z)) = 1$.
Por H_2, $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1$, luego aplicando la hipótesis $(x \to (y \to z)) \to (1 \to (x \to z)) = 1$, luego por M1:
(ii) $(x \to (y \to z)) \to (x \to z) = 1$. De (i) e (ii) resulta, aplicando M7, que se verifica M8.

M9) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$.
Es una consecuencia de H_2, H_1, M7 , M8 y H_4.
Por H_2 : (i) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1$.
Por H_1 sabemos que $y \to (x \to y) = 1$. De aquí resulta por M8 que :
(ii) $((x \to y) \to (x \to z)) \to (y \to (x \to z)) = 1$. De (i) e (ii) resulta por M7 que :
(iii) $(x \to (y \to z)) \to (y \to (x \to z)) = 1$.
Luego también se verifica : (iv) $(y \to (x \to z)) \to (x \to (y \to z)) = 1$.
De (iii) y (iv) resulta por H_4 la propiedad M9.

M3) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.
Es una consecuencia de H_1, H_2, H_4, M8 y M9.
Por H_2, (i) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1$.
En la demostración de M9 vimos que utilizando H_1 y M8, resulta:
$((x \to y) \to (x \to z)) \to (y \to (x \to z)) = 1$, luego por M9 tenemos
(ii) $((x \to y) \to (x \to z)) \to (x \to (y \to z)) = 1$. De (i) e (ii) resulta por H_4 la propiedad M3.

M4) $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$.
Utilizando sucesivamente T, M9, M3, M3, M2 y H_3 tenemos:
$((x \to y) \to y) \to ((y \to x) \to x) =$
$[(x \to y) \to ((y \to x) \to y)] \to [(y \to x) \to ((x \to y) \to x)] =$
$[(x \to y) \to ((y \to x) \to y)] \to [(x \to y) \to ((y \to x) \to x)] =$
$(x \to y) \to [((y \to x) \to y) \to ((y \to x) \to x)] =$
$(x \to y) \to ((y \to x) \to (y \to x)) =$
$(x \to y) \to 1 = 1$.
Cambiando x por y en la igualdad anterior tenemos:
$((y \to x) \to x) \to ((x \to y) \to y) = 1$.
Luego aplicando H_4, resulta M4.

Veamos ahora que de M1 a M4 se deducen H_1 a H_4 y T.

H_3) Utilizando sucesivamente M2, M3 y M2 tenemos:
$x \to 1 = x \to (x \to x) = (x \to x) \to (x \to x) = 1$.

H_4) Supongamos que $x \to y = 1$ e $y \to x = 1$. Por M4 sabemos que
$(y \to x) \to x = (x \to y) \to y$, luego utilizando las hipótesis : $1 \to x = 1 \to y$,
de donde resulta por M1 que $x = y$.

H_1) Utilizando sucesivamente M3, M2 y H_3 tenemos:
$x \to (y \to x) = (x \to y) \to (x \to x) = (x \to y) \to 1 = 1$.

H_2) Utilizando sucesivamente M3 y M2 tenemos:
$(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) =$
$(x \to (y \to z)) \to (x \to (y \to z)) = 1$.

T) Utilizando sucesivamente M4, M3, M2 , M1 y M2 tenemos:
i) $((x \to y) \to x) \to x = (x \to (x \to y)) \to (x \to y) =$
$((x \to x) \to (x \to y)) \to (x \to y) =$
$(1 \to (x \to y)) \to (x \to y) = (x \to y) \to (x \to y) = 1$.

Utilizando sucesivamente M3, M2, y H_3 tenemos:
ii) $x \to ((x \to y) \to x) = (x \to (x \to y)) \to (x \to x) = (x \to (x \to y)) \to 1 = 1$.
Luego de i) y ii) resulta por H_4 que se verifica T.

■

8.7. Reglas de cálculo para las álgebras de Tarski

Indiquemos ahora algunas reglas de cálculo válidas en un álgebra de Tarski.

Teorema 8.7.1 M10) $((a \to b) \to b) \to a = b \to a$.

Dem. De T) $a = (a \to b) \to a$, resulta, aplicando el Teorema 2.2.8 :

$$b \to a = b \to ((a \to b) \to a) = (a \to b) \to (b \to a) =$$

$$((a \to b) \to b) \to ((a \to b) \to a).$$

Como en un álgebra de Tarski se T) entonces:

$$b \to a = ((a \to b) \to b) \to a.$$

■

Teorema 8.7.2 M11) $((a \to b) \to b) \to b = a \to b$.

Dem. Por M4 y el Teorema 8.7.1 tenemos $((a \to b) \to b) \to b = ((b \to a) \to a) \to b = a \to b$. ■

Observemos que en un álgebra implicativa en general no existe el supremo de dos elementos. En un álgebra de Boole el supremo "$\vee$" se puede expresar en términos de la implicación por medio de la fórmula $a \vee b = (a \to b) \to b$. Una afirmación semejante fue hecha por Russell en 1904 con respecto al cálculo proposicional clásico.

Teorema 8.7.3 *Un álgebra de Tarski es un conjunto reticulado superiormente, y el supremo de a y b está dado por la fórmula siguiente: $a \vee b = (a \to b) \to b$.*

Dem. Probemos que $s = (a \to b) \to b$ es el supremo de a y b.
(S1) $a \leq (a \to b) \to b$, $b \leq (a \to b) \to b$ se verifica en toda álgebra implicativa.
(S2) Si $a \leq x$, $b \leq x$ entonces $(a \to b) \to b \leq x$.
De la hipótesis $a \leq x$ se tiene (1) $s \to a \leq s \to x$. Por el Teorema 8.7.1:
(2) $s \to a = ((a \to b) \to b) \to a = b \to a$.
De (1) y (2) resulta (3) $b \to a \leq s \to x$.
Análogamente a partir de la hipótesis: $b \leq x$ se prueba: (4) $a \to b \leq s \to x$.
De (3), (4) y M12 resulta $1 = (a \to b) \vee (b \to a) \leq s \to x$ luego $s \to x = 1$, esto es $s \leq x$.
■

Teorema 8.7.4 M12) $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$.

Dem. Tenemos entonces que probar que valen las siguientes condiciones:

S1) $a \to b \leq 1$, $b \to a \leq 1$,

S2) Si $a \to b \leq x$ y $b \to a \leq x$, entonces $1 \leq x$.

La condición S1 se verifica trivialmente. Para probar S2, sea x un elemento de A que verifica:

$$(1) \quad a \to b \leq x, \quad \text{y} \quad (2) \quad b \to a \leq x.$$

De (1), se deduce (3) $x \to a \leq (a \to b) \to a = a$. Sabemos que en toda álgebra implicativa (4) $a \leq x \to a$. De (3) y (4) se deduce: (5) $x \to a = a$.
Análogamente de (2) se deduce: (6) $x \to b \leq (b \to a) \to b = b$ y como (7) $b \leq x \to b$, de (6) y (7) resulta (8), $x \to b = b$.
Luego por M3, (5), (8) y (1)

$$x \to (a \to b) = (x \to a) \to (x \to b) \leq x,$$

de aquí usando M2, M8 y T se tiene

$$1 = x \to x \leq (x \to (a \to b)) \to x = x$$

lo que demuestra S2. ■

Teorema 8.7.5 *En un álgebra de Tarski se verifica M13)* $a \to (b \vee c) = (a \to b) \vee (a \to c)$.

Dem. Del Teorema 8.7.3 y M3 resulta

$$(a \to b) \vee (a \to c) = ((a \to b) \to (a \to c)) \to (a \to c) = (a \to (b \to c)) \to (a \to c) =$$

$$a \to ((b \to c) \to c) = a \to (b \vee c).$$

■

Teorema 8.7.6 *En un álgebra de Tarski se verifica* M14) $a \vee (a \to b) = 1$.

Dem. Aplicando sucesivamente el Teorema 8.7.3, M3, M2, M1 y M2 tenemos:

$$a \vee (a \to b) = (a \to (a \to b)) \to (a \to b) = ((a \to a) \to (a \to b)) \to (a \to b) =$$

$$(1 \to (a \to b)) \to (a \to b) = (a \to b) \to (a \to b) = 1.$$

■

Teorema 8.7.7 $(a \to b) \to b = (b \to a) \to a$.

Dem. Del Teorema 8.7.1, M3, M9 y T resulta:

$$\begin{aligned} 1 &= (b \to a) \to (((a \to b) \to b) \to a) = \\ &\quad ((b \to a) \to ((a \to b) \to b)) \to ((b \to a) \to a) = \\ &\quad ((a \to b) \to ((b \to a) \to b)) \to ((b \to a) \to a) = \\ &\quad ((a \to b) \to b) \to ((b \to a) \to a). \end{aligned}$$

Por lo tanto: (1) $(a \to b) \to b \leq (b \to a) \to a$.

Intercambiando a con b tenemos: (2) $(b \to a) \to a \leq (a \to b) \to b$.
De (1) y (2) resulta $(a \to b) \to b = (b \to a) \to a$. ■

Los ejemplos de álgebras de Tarski que hemos indicado muestran que un álgebra de Tarski no es necesariamente un reticulado, visto que puede contener dos elementos para los cuales no existe el ínfimo.

Definición 8.7.1 *Dado un elemento b de un conjunto ordenado con último elemento 1 y un elemento $x \in [b)$ se dice que $y \in [b)$ es un complemento de x relativo a b si existen el supremo y el ínfimo de x e y, y además*

$$x \vee y = 1 \quad \text{y} \quad x \wedge y = b.$$

Notaremos $y = \sim_{[b)} x$.

Teorema 8.7.8 *En un álgebra de Tarski $a \vee b = (a \to b) \to b$ es un complemento de $a \to b$ relativo a b.*

Dem. Observemos que como (A) $b \leq a \to b$ y (B) $b \leq (a \to b) \to b$ entonces $a \to b$, $(a \to b) \to b \in [b)$. Queremos probar que:

$$(1) \ \ ((a \to b) \to b) \vee (a \to b) = 1 \quad \text{y} \quad (2) \ \ ((a \to b) \to b) \wedge (a \to b) = b.$$

(1) En virtud del Teorema 8.7.3

$$(a \to b) \vee ((a \to b) \to b) = ((a \to b) \to ((a \to b) \to b)) \to ((a \to b) \to b) =$$

$$((a \to b) \to b) \to ((a \to b) \to b) = 1.$$

(2) De (A) y (B) resulta que I1) b es una cota inferior del conjunto

$$\{a \to b, (a \to b) \to b\}.$$

Probemos I2) si $x \leq a \to b$ y $x \leq (a \to b) \to b$, entonces $x \leq b$.
De las hipótesis resulta:

$$1 = x \to ((a \to b) \to b) = (x \to (a \to b)) \to (x \to b) = 1 \to (x \to b) = x \to b,$$

luego $x \leq b$.

■

Es bien conocido que si $(A, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ es un álgebra de Boole y ponemos por definición $x \to y = -x \vee y$, $x, y \in A$ entonces $(A, \to, 1)$ es un álgebra de Tarski.

Para ver como la noción de álgebra de Tarski está cerca de la noción de álgebra de Boole, probemos que:

Teorema 8.7.9 *Toda álgebra de Tarski A con primer elemento es un álgebra de Boole, donde, para $a, b \in A$:*

el complemento de a es $-a = a \to 0$, *el ínfimo de* a *y* b *es* $a \wedge b = -(b \to -a)$,

$a \to b = -a \vee b$.

Dem. Sea 0 el primer elemento de A. La definición de complemento de un elemento a es en virtud del Teorema 8.7.8: $-a = a \to 0$.
Probemos los siguientes resultados :

A) $- - a = a$.
En efecto, reemplazando en el Teorema 8.7.1 b por 0 tenemos:
$- - a \to a = 0 \to a = 1$, luego (1) $- - a \leq a$. Como $a \leq (a \to b) \to b$ si $b = 0$ tenemos (2) $a \leq - - a$. De (1) y (2) resulta $a = - - a$.

B) $a \leq b$ si y solo si $-b \leq -a$.
En efecto, de $a \leq b$ resulta $-b = b \to 0 \leq a \to 0 = -a$. De $-b \leq -a$ resulta teniendo en cuenta A) $a = - - a \leq - - b = b$.

C) A es un conjunto reticulado inferiormente, más precisamente: todo par de elementos a y $b \in A$ tienen un ínfimo dado por la fórmula $a \wedge b = -(b \to -a)$. Para eso probemos que:
I1) $-(b \to -a) \leq a$, $-(b \to -a) \leq b$. Por A) y B) basta probar:

$$(1) \quad -a \leq b \to -a \quad \text{y} \quad (2) \quad -b \leq b \to -a.$$

La fórmula (1) se verifica trivialmente, y como $b \to -a = b \to (a \to 0) = a \to (b \to 0) = a \to -b \geq -b$, entonces se verifica (2).
I2) si (i) $x \leq a$ e (ii) $x \leq b$ entonces $x \leq -(b \to -a)$. De (i) resulta: $-a \leq -x$, luego $b \to -a \leq b \to -x$ de donde (3) $-(b \to -x) \leq -(b \to -a)$, pero teniendo en cuenta (ii) y A) se tiene

$$(4) \quad -(b \to -x) = (b \to (x \to 0)) \to 0 = (x \to (b \to 0)) \to 0 =$$

$$((x \to b) \to (x \to 0)) \to 0 = (1 \to (x \to 0)) \to 0 =$$

$$(x \to 0) \to 0 = - - x = x.$$

De (3) y (4) se deduce $x \leq -(b \to -a)$.
De I1) e I2) resulta que A es un reticulado inferior. Podemos así afirmar que A es un reticulado con primer y último elemento en el cual cada elemento tiene un complemento.

Para probar que A es un álgebra de Boole basta demostrar que A es un reticulado distributivo. Para eso es suficiente probar que A es un álgebra de Heyting. Comencemos por demostrar las siguientes fórmulas:

D) $a \wedge (a \to b) = a \wedge b$.
En efecto, de $b \leq a \to b$ resulta (i) $a \wedge b \leq a \wedge (a \to b)$.
Probemos (ii) $a \wedge (a \to b) \leq a \wedge b$.

$$(1) \quad (a \wedge (a \to b)) \to (a \wedge b) = -(a \to -(a \to b)) \to (a \wedge b).$$

(2) $-(a \to -(a \to b)) = (a \to ((a \to b) \to 0)) \to 0 =$
$((a \to (a \to b)) \to (a \to 0)) \to 0 =$
$((a \to b) \to (a \to 0)) \to 0 = (a \to (b \to 0)) \to 0 = -(a \to -b) = a \wedge b.$

Por lo tanto de (1) y (2)
$(a \wedge (a \to b)) \to (a \wedge b) = (a \wedge b) \to (a \wedge b) = 1$, lo que demuestra (ii).

E) $a \to (a \wedge b) = a \to b$,
Por C) $a \wedge b = b \wedge a = -(a \to -b) = (a \to -b) \to 0 = (a \to (b \to 0)) \to 0$, luego aplicando el Teorema 2.2.8 dos veces, el Teorema 2.2.2, el Teorema 2.2.4, y nuevamente el Teorema 2.2.8 tenemos:

$$a \to (a \wedge b) = a \to ((a \to (b \to 0)) \to 0) = (a \to (a \to (b \to 0))) \to (a \to 0) =$$

$$(a \to (b \to 0)) \to (a \to 0) = a \to ((b \to 0) \to 0) =$$

$$a \to - - b = a \to b.$$

De D) resulta que (I) $a \wedge (a \to b) \leq b$. Probemos (II) si $a \wedge x \leq b$ entonces $x \leq a \to b$.
De $a \wedge x \leq b$ resulta $a \wedge x = a \wedge x \wedge b = x \wedge (a \wedge b)$, luego teniendo en cuenta D) $a \wedge x = x \wedge (a \wedge (a \to b)) = (a \wedge x) \wedge (a \to b)$, esto es $a \wedge x \leq a \to b$, de donde $a \to (a \wedge x) \leq a \to (a \to b) = a \to b$. Luego teniendo en cuenta E) tenemos $a \to x \leq a \to b$, y como $x \leq a \to x$ resulta $x \leq a \to b$.
De la definición de supremo, M4, M9, M3 y A resulta:

$$-a \vee b = (-a \to b) \to b = (b \to -a) \to -a = (b \to (a \to 0)) \to (a \to 0) =$$

$$(a \to (b \to 0)) \to (a \to 0) = a \to ((b \to 0) \to 0) = a \to - - b = a \to b.$$

■

Teorema 8.7.10 *Si A es un álgebra de Tarski A y $p \in A$ entonces:*

$$[p) = \{x \in A : p \leq x\}, \ \textit{es un álgebra de Boole.}$$

Dem. Probemos que $[p)$ es una subálgebra de A. Sean $a, b \in [p)$ esto es (1) $p \leq a$ y (2) $p \leq b$. Como (3) $b \leq a \to b$, de (2) y (3) resulta que $a \to b \in [p)$.
Como $[p)$ es una subálgebra de A, entonces $[p)$ es un álgebra de Tarski con primer elemento p, luego por el Teorema 8.7.9 es un álgebra de Boole. ■
Luego, un álgebra de Tarski A es un conjunto reticulado superiormente con último elemento, tal que $[p)$ es un álgebra de Boole cualquiera que sea $p \in A$.

Corolario 8.7.1 *En un álgebra de Tarski si existe $a \wedge b$ entonces $a \to (a \wedge b) = a \to b$.*

Dem. Por el Teorema 8.7.10 sabemos que $[a \wedge b)$ es un álgebra de Boole.
Como $a \wedge b \leq a \to (a \wedge b)$, $a \wedge b \leq b \leq a \to b$, $a \wedge b \leq a$ entonces:
$a \to (a \wedge b), a \to b, a, b \in [a \wedge b)$. Como $a, b, a \wedge b$ son elementos del álgebra de Boole $[a \wedge b)$, si $-a$ indica el complemento de a en $[a \wedge b)$ entonces $a \to (a \wedge b) = -a \vee (a \wedge b) = -a \vee b = a \to b$. ■

Teorema 8.7.11 *En un álgebra de Tarski se verifica $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$.*

Dem. Empecemos por observar que $(a \vee b) \to c, a \to c, b \to c \in [c)$. Luego como $[c)$ es un álgebra de Boole existe $(a \to c) \wedge (b \to c)$ en $[c)$. Además de $a \leq a \vee b$ resulta, (1) $(a \vee b) \to c \leq a \to c$, y de $b \leq a \vee b$ resulta (2) $(a \vee b) \to c \leq b \to c$. Luego $(a \vee b) \to c \in [c)$ es una cota inferior del conjunto $\{a \to c, b \to c\} \subseteq [c)$ y por lo tanto (i) $(a \vee b) \to c \leq (a \to c) \wedge (b \to c)$.
Por otro lado en el álgebra de Boole $[c)$ tenemos:

$$((a \to c) \wedge (b \to c)) \to ((a \vee b) \to c) =$$

$$((a \to c) \to ((a \vee b) \to c)) \vee ((b \to c) \to ((a \vee b) \to c)) =$$

$$((a \to c) \to (((a \to b) \to b) \to c)) \vee ((b \to c) \to (((a \to b) \to b) \to c)) =$$

$$(((a \to b) \to b) \to ((a \to c) \to c)) \vee (((a \to b) \to b) \to ((b \to c) \to c)) =$$

$$((a \vee b) \to (a \vee c)) \vee ((a \vee b) \to (b \vee c)) = (a \vee b) \to ((a \vee c) \vee (b \vee c)) =$$

$$(a \vee b) \to (a \vee b \vee c) = 1,$$

luego: (ii) $(a \to c) \wedge (b \to c) \leq (a \vee b) \to c$.
De (i) y (ii) resulta: $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$. ■

Teorema 8.7.12 *En un álgebra de Tarski si existe $a \wedge b$ entonces*

$$(a \wedge b) \to c = (a \to c) \vee (b \to c).$$

Dem. De $a \wedge b \leq a$ resulta $a \to c \leq (a \wedge b) \to c$, y de $a \wedge b \leq b$ resulta $b \to c \leq (a \wedge b) \to c$, luego $(a \to c) \vee (b \to c) \leq (a \wedge b) \to c$.
Probemos que $(a \wedge b) \to c \leq (a \to c) \vee (b \to c)$. En efecto por el Teorema 8.7.5

$$((a \wedge b) \to c) \to ((a \to c) \vee (b \to c)) =$$

$$(((a \wedge b) \to c) \to (a \to c)) \vee (((a \wedge b) \to c) \to (b \to c)).$$

Como A es un álgebra implicativa entonces por el Teorema 2.2.8 sabemos que se verifica $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$, luego

$$((a \wedge b) \to c) \to ((a \to c) \vee (b \to c)) =$$

$$(a \to (((a \wedge b) \to c) \to c)) \vee (b \to (((a \wedge b) \to c) \to c)) =$$

$$(a \to ((a \wedge b) \vee c)) \vee (b \to ((a \wedge b) \vee c))$$

y aplicando nuevamente el Teorema 8.7.5, el Corolario 8.7.1 y el Teorema 8.7.4 tenemos:

$$((a \wedge b) \to c) \to ((a \to c) \vee (b \to c)) =$$

$$(a \to (a \wedge b)) \vee (a \to c) \vee (b \to (a \wedge b)) \vee (b \to c) =$$

$$(a \to b) \vee (a \to c) \vee (b \to a) \vee (b \to c) =$$

$$(a \to b) \vee (b \to a) \vee (a \to c) \vee (b \to c) = 1 \vee (a \to c) \vee (b \to c) = 1.$$

■

Corolario 8.7.2 *En un álgebra de Tarski si existe $a \wedge b$ entonces*

$$(a \wedge b) \to c = a \to (b \to c).$$

Dem. Usando los Teoremas 8.7.12, 8.7.11 y 2.2.8 tenemos

$$((a \wedge b) \to c) \to (a \to (b \to c)) = ((a \to c) \vee (b \to c)) \to (a \to (b \to c)) =$$

$$((a \to c) \to (a \to (b \to c))) \wedge ((b \to c) \to (a \to (b \to c))) =$$

$$(a \to (c \to (b \to c))) \wedge ((b \to c) \to (b \to (a \to c))) =$$

$$(a \to 1) \wedge (b \to (c \to (a \to c))) = 1 \wedge (b \to 1) = 1 \wedge 1 = 1,$$

entonces: (1) $(a \wedge b) \to c \leq a \to (b \to c)$.
Además por los Teoremas 8.7.12, 8.7.5, 2.2.8 y 8.7.6

$$(a \to (b \to c)) \to ((a \wedge b) \to c) = (a \to (b \to c)) \to ((a \to c) \vee (b \to c)) =$$

$$((a \to (b \to c)) \to (a \to c)) \vee ((a \to (b \to c)) \to (b \to c)) =$$

$$((b \to (a \to c)) \to (a \to c)) \vee a \vee (b \to c) = b \vee (a \to c) \vee a \vee (b \to c) =$$

$$a \vee (a \to c) \vee b \vee (b \to c) = 1 \vee 1 = 1,$$

entonces: (2) $a \to (b \to c) \leq (a \wedge b) \to c$.
De (1) y (2) resulta: $(a \wedge b) \to c = a \to (b \to c)$. ■

Teorema 8.7.13 *En un álgebra de Tarski, si existe $b \wedge c$, entonces existe $(a \to b) \wedge (a \to c)$ y se verifica $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$.*

Dem. Ejercicio. ■

Teorema 8.7.14 *En un álgebra de Tarski se verifica $a \to (b \to c) = (a \vee c) \wedge (b \to c)$.*

Dem. Ejercicio ■

Vamos a demostrar que vale la recíproca del Teorema 8.7.10, esto es:

Teorema 8.7.15 *Si A es un conjunto reticulado superiormente con último elemento en el cuál $[p)$ es un álgebra de Boole, cualquiera que sea $p \in A$ entonces A es un álgebra de Tarski.* J. C. Abbott *[1, 2].*

Dem. Dado $a \in A$, si $x \in [a)$ por hipótesis existe el complemento booleano de x en $[a)$. A este elemento lo notaremos $\sim_{[a)} x$, luego : (1) $\sim_{[a)} a = 1$ y (2) $\sim_{[a)} 1 = a$. Como $x \vee y \in [y)$ entonces existe el complemento booleano de $x \vee y$ en $[y)$.
Pongamos por definición $x \to y = \sim_{[y)} (x \vee y)$; $x, y \in A$, entonces (3) $y \leq x \to y$.

M1) $1 \to x = \sim_{[x)} (1 \vee x) = \sim_{[x)} 1 = x$.

M2) $x \to x = \sim_{[x)} (x \vee x) = \sim_{[x)} x = 1$.

M4) $(x \to y) \to y \;=\; (y \to x) \to x \;=\; x \vee y$.
En efecto, por (3) $y \leq x \to y$, luego $(x \to y) \to y \;= \sim_{[y)} ((x \to y) \vee y) \;=$ $\sim_{[y)} (x \to y) \;= \sim_{[y)} (\sim_{[y)} (x \vee y)) \;=\; x \vee y$.
Análogamente $(y \to x) \to x \;=\; y \vee x$, luego se verifica M4.
Probemos:

I_1) $(x \to y) \to x \;=\; x$.
Como por (3) $y \leq \sim_{[y)} (x \vee y)$, entonces

$$1 = (x \vee y) \vee \sim_{[y)} (x \vee y) = x \vee (y \vee \sim_{[y)} (x \vee y)) = x \vee \sim_{[y)} (x \vee y),$$

luego

$$(x \to y) \to x = \sim_{[x)} ((x \to y) \vee x) = \sim_{[x)} [(\sim_{[y)} (x \vee y)) \vee x] = \sim_{[x)} 1 = x.$$

I_2) $x \to (y \to z) \;=\; y \to (x \to z)$.
$x \to (y \to z) \;= \sim_{[y \to z)} (x \vee (y \to z))$.
Como

$$\sim_{[z)} (x \vee (y \to z)) \wedge (x \vee (y \to z)) = z,$$

$$\sim_{[z)} (x \vee (y \to z)) \vee (x \vee (y \to z)) = 1,$$

$$p = \sim_{[z)} (x \vee (y \to z)) \vee (y \to z) \in [y \to z)$$

y

$$x \vee (y \to z) \in [y \to z),$$

entonces:

$$p \wedge (x \vee (y \to z)) \;=\; [\sim_{[z)} (x \vee (y \to z)) \vee (y \to z)] \wedge (x \vee (y \to z)) =$$

$$[\sim_{[z)} (x \vee (y \to z)) \wedge (x \vee (y \to z))] \vee [(y \to z) \wedge (x \vee (y \to z))] =$$

$$z \vee (y \to z) \;=\; y \to z.$$

$$p \vee (x \vee (y \to z)) \;= \sim_{[z)} (x \vee (y \to z)) \vee (y \to z) \vee (x \vee (y \to z)) =$$

$$1 \vee (y \to z) \;=\; 1.$$

Luego :
$\sim_{[y \to z)} (x \vee (y \to z)) \;= \sim_{[z)} (x \vee (y \to z)) \vee (y \to z)$, y como $z \leq y \to z$, esto es, $z \vee (y \to z) \;=\; y \to z$ entonces:

$$x \to (y \to z) = \sim_{[y \to z)} (x \vee (y \to z)) = \sim_{[z)} (x \vee (y \to z)) \vee (y \to z).$$

Luego como $x \vee z,\; y \to z \in [z)$ entonces

$$x \to (y \to z) \;=\; (\sim_{[z)} (x \vee z) \wedge \sim_{[z)} (y \to z)) \vee (y \to z) \;=$$

$$((x \to z) \wedge \sim_{[z)} (y \to z)) \vee (y \to z) \;=\; ((x \to z) \vee (y \to z)) \wedge 1 =$$

$$(x \to z) \vee (y \to z).$$

Análogamente $y \to (x \to z) \;=\; (y \to z) \vee (x \to z)$, luego se verifica I_2).

$I_3)$ $x \to (x \to y) = x \to y$.
Se deduce de I_1 pues:
$x \to (x \to y) = ((x \to y) \to x) \to (x \to y) = x \to y$.

$I_4)$ $(x \to z) \to (y \to z) = (z \to x) \to (y \to x)$.
Se deduce de I_2 y M4 como sigue:
$(x \to z) \to (y \to z) = y \to ((x \to z) \to z) = y \to ((z \to x) \to x) =$
$(z \to x) \to (y \to x)$.

$I_5)$ $((x \to y) \to z) \to z = ((x \to y) \to z) \to (x \to z)$.
A partir de M4, I_3 e I_4 obtenemos:
$((x \to y) \to z) \to z = (z \to (x \to y)) \to (x \to y) =$
$(z \to (x \to y)) \to (x \to (x \to y)) = ((x \to y) \to z) \to (x \to z)$.

$I_6)$ Si $x \leq y$ entonces $x \to y = 1$.
En efecto $x \to y = \sim_{[y]} (x \vee y) = \sim_{[y]} y = 1$.

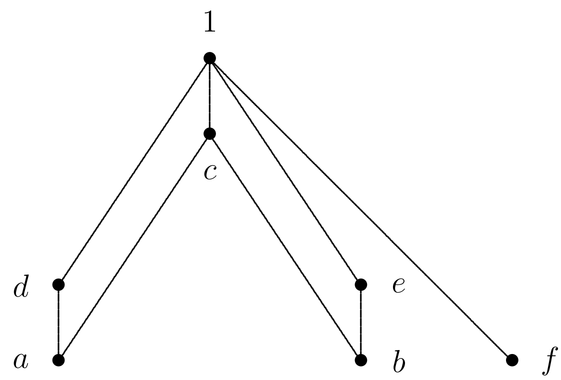
$I_7)$ $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1$
Resulta de aplicar sucesivamente I_2, I_2, M4, I_5 e I_6.
$(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) =$
$(x \to y) \to [(x \to (y \to z)) \to (x \to z)] =$
$(x \to y) \to [(y \to (x \to z)) \to (x \to z)] =$
$(x \to y) \to (((x \to z) \to y) \to y) =$
$(x \to y) \to [((x \to z) \to y) \to (x \to y)] = 1$.

$I_8)$ Si $x \to y = 1$ e $y \to x = 1$ entonces $x = y$.
Por hipótesis $\sim_{[y]} (x \vee y) = 1$, $\sim_{[x]} (y \vee x) = 1$, luego
$x = \sim_{[x]} 1 = y \vee x = x \vee y = \sim_{[y]} 1 = y$

$I_9)$ Si $x \leq y$ entonces $y \to z \leq x \to z$
De $x \leq y$ resulta $x \vee z \leq y \vee z$, entonces $y \to z = \sim_{[z]} (y \vee z) \leq$
$\sim_{[z]} (x \vee z) = x \to z$.

$I_{10})$ $((x \to y) \to (x \to z)) \to (x \to (y \to z)) = 1$.
De $y \leq x \to y$ resulta por I_9 e I_2 que $(x \to y) \to (x \to z) \leq y \to (x \to z) =$
$x \to (y \to z)$, entonces de I_6 sigue I_{10}.

De I_7, I_{10} e I_8 se deduce :
M3) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$. ■
Este resultado permite reconocer de inmediato que el conjunto ordenado A cuyo diagrama se indica en la figura es un álgebra de Tarski.



¿Como determinar $x \to y$?. Por definición $x \to y = \sim_{[y)} (x \vee y)$, luego teniendo en cuenta el diagrama precedente tenemos por ejemplo:

$$\begin{array}{ll} d \to e = \sim_{[e)} (d \vee e) = \sim_{[e)} 1 = e & e \to b = \sim_{[b)} (e \vee b) = \sim_{b)} e = c \\ a \to b = \sim_{[b)} (a \vee b) = \sim_{[b)} c = e & b \to a = \sim_{[a)} (b \vee a) = \sim_{[a)} c = d \end{array}$$

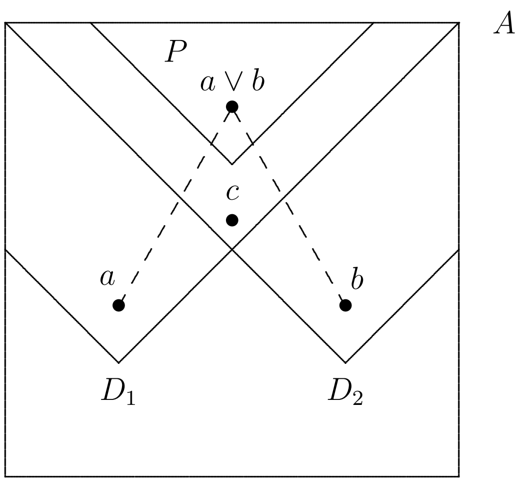
8.8. Sistemas deductivos y filtros primos

Teorema 8.8.1 *Para que un sistema deductivo propio P de un álgebra de Tarski A sea irreducible es necesario y suficiente que P sea un filtro primo de A.*

Dem. Necesaria. Supongamos que P es un sistema deductivo irreducible de A, que $a \vee b \in P$ y que (1) $a, b \notin P$. Por el Teorema 4.2.2 sabemos que

$$D_1 = D(P, a) = \{x \in A : a \to x \in P\}, \text{ y } D_2 = D(P, b) = \{x \in A : b \to x \in P\}.$$

Si $b \in D_1$ entonces (2) $a \to b \in P$ luego como (3) $(a \to b) \to b = a \vee b \in P$, de (2) y (3) resulta por modus ponens $b \in P$, lo que contradice (1). Luego D_1 es un sistema deductivo propio. Análogamente se prueba que D_2 es un sistema deductivo propio.
Luego (4) $a, b \notin D_1 \cap D_2$. Por construcción $P \subseteq D_1 \cap D_2$ y como P es irreducible entonces $P \neq D_1 \cap D_2$. Sea (5) $c \in (D_1 \cap D_2) \setminus P$. Por el Teorema 8.7.1 sabemos que $((c \to a) \to a) \to c = c \to a$ y como $c \leq ((c \to a) \to a) \to c$ y $c \in D_1 \cap D_2$ resulta (6) $c \to a \in D_1 \cap D_2$ luego de (5) y (6) resulta por modus ponens que $a \in D_1 \cap D_2$ lo que contradice (4).



Suficiente Sea P un filtro primo, luego P es un sistema deductivo propio. Supongamos que (1) $P = D_1 \cap D_2$ donde D_1 y D_2 son sistemas deductivos propios tales que (2) $D_1 \neq P$ y (3) $D_2 \neq P$. De (1) y (2) resulta que $P \subset D_1$ y de (1) y (3) que $P \subset D_2$. Sean $a \in D_1 \setminus P$ y $b \in D_2 \setminus P$, luego como $a, b \leq a \vee b$ tenemos que $a \vee b \in D_1 \cap D_2 = P$ y por lo tanto $a \in P$ ó $b \in P$, absurdo. ■

Teorema 8.8.2 *Todo sistema deductivo irreducible de un álgebra de Tarski es un sistema deductivo máximo.*

Dem. Sea P un sistema deductivo irreducible y supongamos que no es un sistema deductivo máximo, entonces existe un sistema deductivo propio D tal que (1) $P \subset D$. Sean (2) $b \notin D$ y (3) $a \in D \setminus P$. Si (4) $a \to b \in D$ entonces de (3) y (4) resulta por modus ponens que $b \in D$, absurdo. Luego (5) $a \to b \notin D$. Como P es irreducible, por el Teorema 8.8.1, P es un filtro primo, luego de $a, b \notin P$ resulta que

$$(6) \quad a \vee b = (a \to b) \to b = (b \to a) \to a \notin P.$$

Por el Teorema 8.7.8, $((a \to b) \to b) \vee (a \to b) = 1 \in P$, luego de (6) resulta $a \to b \in P$. Por lo tanto de (1) tenemos (7) $a \to b \in D$, luego de (3) y (7) resulta $b \in D$, absurdo. ■

Teorema 8.8.3 *Si todo sistema deductivo irreducible de un álgebra implicativa A es máximo entonces A es un álgebra de Tarski.*

Dem. Si todos los sistemas deductivos irreducibles de A son máximos, entonces en particular todos los sistemas deductivos completamente irreducibles de A son máximos.
Como A es un álgebra implicativa sabemos por el Teorema 5.2.2 que todo sistema deductivo propio es intersección de sistemas deductivos completamente irreducibles. En particular, resulta que $\{1\}$ es intersección de sistemas deuctivos máximos y por lo tanto $Rad(A) = \{1\}$. Luego el álgebra implicativa es semisimple y por el Teorema 5.5.4 A es un álgebra de Tarski. ■

Corolario 8.8.1 *Para que un álgebra implicativa sea un álgebra de Tarski es necesário y suficiente que todo sistema deductivo irreducible sea máximo.*

9. CALCULO PROPOSICIONAL DE KOLMOGOROFF

En 1925 Kolmogoroff estudió un cálculo proposicional cuyo alfabeto se obtiene agregando un nuevo símbolo representado por “ $-$ ” y llamado *negación*. Esto es, el alfabeto está compuesto por:

(1) $\to, -,$ (,)

(2) Las variables de enunciado: $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in I}$.

Las fórmulas se definen de manera habitual, o sea, es el conjunto $\mathcal{L}$ tal que:

(I) $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{L}$,

(II) si $a, b \in \mathcal{L}$ entonces $(a \to b) \in \mathcal{L}$,

(III) si $a \in \mathcal{L}$ entonces $(-a) \in \mathcal{L}$,

(IV) $\mathcal{L}$ es el menor conjunto de fórmulas que tiene las propiedades I, II y III.

Para simplificar escribiremos $-a$ en lugar de $(-a)$, por ejemplo: $(-g_1 \to g_2)$, $(-(g_1 \to g_2) \to g_1)$.

Las tesis ó tautologías: es el menor conjunto $\mathcal{T}$ que verifica los axiomas siguientes:

L1) $a \to (b \to a) \in \mathcal{T}$,

L2) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) \in \mathcal{T}$,

N1) $(a \to -b) \to (b \to -a) \in \mathcal{T}$, (ley de transposición)

Regla de modus ponens: si $a \in \mathcal{T}$ y $a \to b \in \mathcal{T}$ entonces $b \in \mathcal{T}$.

9.1. Reglas de cálculo

Demostraremos algunas tesis de este cálculo. En primer lugar es claro que son tesis de este cálculo todas las tesis del cálculo proposicional intuicionista.

Definición 9.1.1 *$a \equiv b$ si y solo si $a \to b \in \mathcal{T}$ y $b \to a \in \mathcal{T}$.*

Teorema 9.1.1 *Si $t \in \mathcal{T}$ entonces $-a \equiv a \to -t$.*

Dem. Por N1 se tiene que (1) $a \to -t \leq t \to -a$, pero sabemos que $t \to -a \equiv -a$ y en particular (2) $t \to -a \leq -a$. De (1) y (2) resulta (3) $a \to -t \leq -a$.
Por N1 se deduce que (4) $t \to -a \leq a \to -t$, pero (5) $-a \leq t \to -a$, luego de (4) y (5) resulta (6) $-a \leq a \to -t$.
De (3) y (6) se tiene que $-a \equiv a \to -t$. ■

Teorema 9.1.2 *Si $a \equiv b$ entonces $-a \equiv -b$.*

Dem. Por hipótesis tenemos que $a \equiv b$, luego si $t \in \mathcal{T}$ tendremos (1) $a \to -t \equiv b \to -t$. Pero por el Teorema 9.1.1 sabemos que (2) $-a \equiv a \to -t$ y (3) $-b \equiv b \to -t$, luego de (1), (2) y (3) resulta $-a \equiv -b$. ■

Teorema 9.1.3 $a \to b \leq -b \to -a$.

Dem. Si $t \in \mathcal{T}$ entonces $-b \equiv b \to -t$ y $-a \equiv a \to -t$, luego podemos escribir:

$$(a \to b) \to (-b \to -a) \equiv (a \to b) \to ((b \to -t) \to (a \to -t)) \equiv$$

$$(b \to -t) \to ((a \to b) \to (a \to -t)) \equiv (b \to -t) \to (a \to (b \to -t)) \in \mathcal{T}.$$

Luego $(a \to b) \to (-b \to -a) \in \mathcal{T}$ y por lo tanto $a \to b \leq -b \to -a$. ■

Teorema 9.1.4 $a \leq --a$.

Dem. Por el Teorema 9.1.1, $--a \equiv -a \to -t \equiv (a \to -t) \to -t$.
Luego $a \to --a \equiv a \to ((a \to -t) \to -t) \equiv (a \to -t) \to (a \to -t) \in \mathcal{T}$, es decir, $a \to --a \in \mathcal{T}$, o sea $a \leq --a$. ■

9.2. Algebra de Lindenbaum de $\mathcal{L}$

Sea $\mathcal{L}/\equiv$ la familia de todas las clases de equivalencia de $\mathcal{L}$. Sabemos que el sistema $(\mathcal{L}/\equiv, \to)$ es un álgebra implicativa. Observemos que en virtud del Teorema 9.1.2 la relación de equivalencia " $\equiv$ " es compatible con la operación de negación "$-$". Pongamos por definición $-C(a) = C(-a)$. A la terna $(\mathcal{L}/\equiv, \to, -)$ se le da el nombre de álgebra de Lindenbaum de $\mathcal{L}$.

Teorema 9.2.1 *En el álgebra $\mathcal{L}/\equiv$ se verifica $C(a) \to -C(b) = C(b) \to -C(a)$.*

Dem. Sabemos por N1 que $a \to -b \leq b \to -a$ y también que $b \to -a \leq a \to -b$, luego $a \to -b \equiv b \to -a$, o sea $C(a) \to -C(b) = C(a \to -b) = C(b \to -a) = C(b) \to -C(a)$. ■

9.3. Algebras de Kolmogoroff

Los resultados anteriores nos sugieren introducir la siguiente

Definición 9.3.1 *Un sistema $(A, \to, -, 1)$ formado por un conjunto no vacío A, una operación binaria " $\to$ " definida sobre A, una operación unaria " $-$ " definida sobre A y un elemento fijo $1 \in A$ se dice un álgebra de Kolmogoroff si se verifican las siguientes condiciones:*

K1) $a \to (b \to a) = 1$,

K2) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$,

K3) *Si* $a \to b = 1$ *y* $b \to a = 1$ *entonces* $a = b$,

K4) $a \to -b = b \to -a$.

Los resultados obtenidos permiten afirmar que el álgebra de Lindenbaum de $\mathcal{L}$ es un álgebra de Kolmogoroff. Ponemos por definición $0 = -1$.

Teorema 9.3.1 $-b = b \to 0$.

Dem. De K4 se deduce que $1 \to -b = b \to -1$, luego $-b = b \to 0$. ■

Corolario 9.3.1 $-0 = 1$.

Dem. Del Teorema 9.3.1 $-0 = 0 \to 0 = 1$. ■

Teorema 9.3.2 $(a \to b) \to (-b \to -a) = 1$.

Dem. Es una consecuencia de la ley de silogismo $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$, si ponemos $c = 0$ y usamos el Teorema 9.3.1. ■

Teorema 9.3.3 $a \to - - a = 1$.

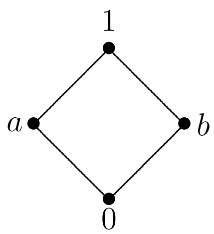
Dem. Como $a \to ((a \to b) \to b) = (a \to b) \to (a \to b) = 1$, haciendo $b = 0$ por el Teorema 9.3.1 tendremos $a \to - - a = 1$. ■

En este sistema no se puede probar la ley de doble negación $- - a \to a = 1$.

En efecto, consideremos la cadena que se indica en la figura, la cual es un álgebra implicativa. Pongamos por definición $-x = x \to 0$. Se verifica sin dificultad que es un álgebra de Kolmogoroff y no se cumple $- - y \to y = 1$, pues $- - a \to a = -0 \to a = 1 \to a = a \neq 1$.

Ejemplo 9.3.1 *Sea A un álgebra implicativa y elijamos un elemento fijo (arbitrario) en A que designaremos por el símbolo f (variable especial (Wajsberg)). Pongamos por definición $-a = a \to f$. Entonces el sistema $(A, \to, -, 1)$ es un álgebra de Kolmogoroff. Para ello solo hace falta probar que $a \to -b = b \to -a$, o sea que $a \to (b \to f) = b \to (a \to f)$, lo que es inmediato.*

Ejemplo 9.3.2 *Dada el álgebra de Boole A indicada en la figura, la cual es un álgebra implicativa con su implicación natural $x \to y = -x \vee y$.*



Elijamos un elemento fijo $f = b$ y pongamos $\sim x = x \to f$, cualquiera sea $x \in A$, entonces $(A, \to, \sim, 1)$ es un álgebra de Kolmogoroff.
De $x \to\sim y = x \to (y \to f)$ e $y \to\sim x = y \to (x \to f)$ resulta $x \to\sim y = y \to\sim x$. Veamos que no vale la regla $\sim\sim x \leq x$, en efecto: $\sim\sim a = \sim (a \to b) = \sim b = b \to b = 1 \not\leq a$.

Teorema 9.3.4 *(de la triple negación)* $- - -a = -a$.

Dem. Es una consecuencia de la regla $((a \to b) \to b) \to b = a \to b$, poniendo $b = 0$. ■

Teorema 9.3.5 *Si $a \leq b$ entonces $-b \leq -a$.*

Dem. Sabemos que si $a \leq b$ entonces $b \to c \leq a \to c$, luego poniendo $c = 0$ y usando el Teorema 9.3.1 resulta $-b \leq -a$. ■

Teorema 9.3.6 $- - a \to - - b = -b \to -a$.

Dem. Reemplazando en el axioma K4 a por $- - a$ y b por $-b$ y teniendo en cuenta el Teorema 9.3.4 resulta que $- - a \to - - b = -b \to - - -a = -b \to -a$. ■

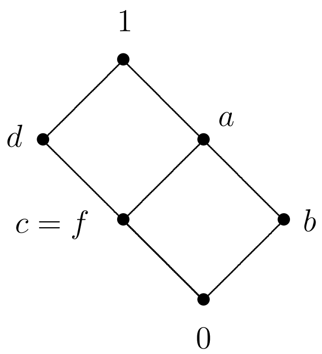
Teorema 9.3.7 $a \to --b = -b \to -a$.

Dem. Resulta de reemplazar en el axioma K4 b por $-b$. ■

Teorema 9.3.8 $a \to b \leq -b \to -a = --a \to --b = a \to --b$.

Dem. Sabemos que $b \leq --b$, luego usando los Teoremas 9.3.7 y 9.3.6 resulta $a \to b \leq a \to --b = -b \to -a = --a \to --b$. ■

Observemos que no vale la regla $--(x \to y) = --x \to --y$. En efecto, consideremos el álgebra indicada en la figura:



y pongamos por definición $-x = x \to c$, entonces:

$$--(a \to b) = --b = -(b \to c) = -d = d \to c = a,$$

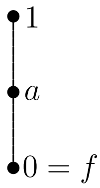
$$--a \to --b = -d \to -d = 1.$$

Teorema 9.3.9 *(modus tollens)* $-a \leq (b \to a) \to -b$.

Dem. Es una consecuencia de la ley de silogismo: $(a \to c) \to ((b \to a) \to (b \to c)) = 1$, tomando $c = 0$. ■

La llamada regla de *inferencia modus tollens* que dice " si $-a \in \mathcal{T}$ y $b \to a \in \mathcal{T}$ entonces $-b \in \mathcal{T}$ " es válida en este cálculo ya que si $-a = 1$ y $b \to a = 1$ entonces por la ley del modus tollens se deduce que $-b = 1$.

Observemos que no se verifica la regla $(-p \to p) \to p = 1$ que se denomina *Consequentia Mirabilis*.



En efecto, consideremos la cadena que se indica en la figura. En este caso se tiene: $(-a \to a) \to a = (0 \to a) \to a = 1 \to a = a$.

9.4. Algebra libre generada por un elemento

Observemos que todos los conceptos que hemos definido en el Capítulo 8 se extienden sin dificultad a este cálculo proposicional.

Problema: Elaborar una teoría de homomorfismos para las álgebras de Kolmogoroff.

Indiquemos el álgebra libre generada por un elemento g_1.

Pongamos $C(g_1) = a$. Al elemento $-(g_1 \to g_1) \in \mathcal{L}$ le corresponde la clase de equivalencia $C(-(g_1 \to g_1)) = -C(g_1 \to g_1) = -1 = 0 = b$. Como en $\mathcal{L}/\equiv$ tenemos $-x = x \to 0$, entonces como la negación se reduce a la implicación, basta hacer todas las implicaciones posibles. Por un resultado de Skolem, sabemos que se obtienen catorce elementos para la implicación a partir de dos elementos a y b. Ellos son:

a	$baab = -((0 \to a) \to a)$
$b = 0$	$abb = - - a$
$ab = -a$	$babb = - - (0 \to a)$
$ba = 0 \to a$	$abaa = (-a \to a) \to a$
$aba = -a \to a$	$abbaa = (- - a \to a) \to a$
$bab = -(0 \to a)$	$baabb = - - ((0 \to a) \to a)$
$abba = - - a \to a$	$aa = 1$

Recordemos que en un álgebra de Heyting cuando se efectuan las operaciones $\to$, $-$, sobre un elemento se obtienen seis elementos (Tarski).
Podemos decir que el álgebra de Kolmogoroff libre generada por un elemento $C(g_1)$ coincide con el álgebra implicativa libre generada por dos elementos: $C(g_1)$, $C(g_2)$, donde la variable $C(g_2) = f = 0$. Esto sugiere que el cálculo proposicional de Kolmogoroff generado por n variables coincide con el cálculo proposicional implicativo generado por $n + 1$ variables donde g_0 es la variable que representa la proposición falsa.
Esto muestra que el estudio de las álgebras de Kolmogoroff se reduce al estudio de las álgebras implicativas en el caso finito, a condición de fijar una variable g_0 y definir la negación como $-a = a \to g_0$, donde a es una fórmula cualquiera.

9.5. Otras axiomáticas para el cálculo proposicional de Kolmogoroff

Primer axiomática

L1) $a \to (b \to a) \in \mathcal{T}$,

L2) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) \in \mathcal{T}$,

(A) $(a \to b) \to (-b \to -a) \in \mathcal{T}$, (ley de contraposición)

(B) $a \to - - a \in \mathcal{T}$, (ley recíproca de la doble negación).

Es claro que (A) y (B) valen en el cálculo proposicional de Kolmogoroff.
Probemos que de (A) y (B) resulta N1. En efecto, (A) se puede escribir $a \to b \leq -bra$, luego reemplazando b por $-b$ en (A) se tiene: (1) $a \to -b \leq - -b \to -a$, de (B) $b \leq - -b$, luego (2) $- - b \to -a \leq b \to -a$. De (1) y (2) resulta $a \to -b \leq b \to -a$, es decir, N1 $(a \to -b) \to (b \to -a) \in \mathcal{T}$.

Segunda axiomática

L1) $a \to (b \to a)$,

L2) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$,

(C) $p \to (-p \to q)$.

9.6. Cálculo proposicional de Wajsberg

Este cálculo proposicional se obtiene agregando al cálculo proposicional de Kolmogoroff el axioma N2) $- - a \to (-a \to a) \in \mathcal{T}$.
Podemos entonces naturalmente definir $L/\equiv$, el álgebra de Lindenbaum de este cálculo, que es en particular un álgebra de Kolmogoroff.

Teorema 9.6.1 *En $L/\equiv$ vale la siguiente regla de cálculo: $- - a = -a \to a$.*

Dem. Del axioma N2 resulta que en $L/\equiv$ vale (1) $- -a \leq -a \to a$.
Probemos (2) $(-a \to a) \leq - - a$.

$(-a \to a) \to - - a = ((a \to 0) \to a) \to ((a \to 0) \to 0) = (a \to 0) \to (a \to 0) = 1$.
De (1) y (2) resulta $- - a = -a \to a$. ■

Definición 9.6.1 *Un sistema $(A, \to, -, 1)$ se dice un álgebra de Wajsberg si es un álgebra de Kolmogoroff que verifica la condición: $(W)\ - -a = -a \to a$.*

Luego $L/\equiv$ es un álgebra de Wajsberg.

Teorema 9.6.2 $-(a \to - - a) = 0$.

Dem. $1 = -a \to -a = a \to - - a$. Luego $-1 = 0 = -(a \to - - a)$. ■

Teorema 9.6.3 $0 \leq a$, *para todo* $a \in A$.

Dem.

$$1 = - - a \to (-a \to a) = ((a \to 0) \to 0) \to ((a \to 0) \to a) = (a \to 0) \to (0 \to a) =$$

$$0 \to ((a \to 0) \to a) = (0 \to (a \to 0)) \to (0 \to a) = 1 \to (0 \to a) = 0 \to a,$$

luego $0 \leq a$, cualquiera sea $a \in A$. ■

Teorema 9.6.4 $p \to (-p \to q) = 1$. *(Principio de Duns Scotus)*

Dem. $p \to (-p \to q) = p \to ((p \to 0) \to q) = (p \to 0) \to (p \to q) = p \to (0 \to q) =$
$p \to 1 = 1$. ■

9.7. Otra definición del cálculo proposicional de Wajsberg

El alfabeto se obtiene agregando al alfabeto del cálculo proposicional implicativo un símbolo 0 (cero). De este modo el alfabeto está formado por: 0, $G = \{g_i\}_{i \in I}$, $\to$, (,).
Se puede considerar el símbolo 0 como una variable de enunciado, a pesar de que en las interpretaciones de este cálculo 0 no puede variar.
En estas condiciones las fórmulas se definen del mismo modo que en el cálculo proposicional implicativo. Los axiomas de este cálculo son:

L1) $a \to (b \to a) \in \mathcal{T}$,

L2) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) \in \mathcal{T}$,

N0) $0 \to a \in \mathcal{T}$, para toda fórmula $a \in\in \mathcal{L}$.

Regla de Modus ponens.

Podemos naturalmente considerar el álgebra de Lindenbaum de este cálculo proposicional que será un álgebra implicativa. En el álgebra implicativa indicada, la clase de equivalencia que contiene a 0, $C(0)$, es el primer elemento, ya que $C(0 \to a) = 1$, de donde resulta: $C(0) \to C(a) = 1$, y por lo tanto $C(0) \leq C(a)$, para todo a.
En este cálculo proposicional se adopta la siguiente:

Definición 9.7.1 $-a = a \to 0$.

Probemos que con respecto a esta definición el sistema $(L/\equiv, \to, -, 1)$ es un álgebra de Wajsberg.
En $L/\equiv$ escribiremos $-C(a) = C(-a) = C(a \to 0) = C(a) \to C(0)$, lo que muestra que la negación queda definida en $L/\equiv$ sin anbigüedad. Representando las clases de equivalencia por $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ y $C(0) = 0$ tendremos: $-\alpha = \alpha \to 0$.
Probemos las siguientes reglas de cálculo:

W1) $\alpha \to -\beta = \beta \to -\alpha$.

$\alpha \to -\beta = \alpha \to (\beta \to 0) = \beta \to (\alpha \to 0) = \beta \to -\alpha$.

W2) $- - \alpha \to (-\alpha \to \alpha) = 1$.

$- - \alpha \to (-\alpha \to \alpha) = ((\alpha \to 0) \to 0) \to ((\alpha \to 0) \to \alpha) = (\alpha \to 0) \to (0 \to \alpha) =$
$(\alpha \to 0) \to 1 = 1$.

De las fórmulas W1 y W2 resulta que en este cálculo valen las siguientes reglas:

N1) $(a \to -b) \to (b \to -a) \in \mathcal{T}$,

N2) $- - a \to (-a \to a) \in \mathcal{T}$.

Luego se trata de un cálculo proposicional de Wajsberg definido de otra manera. El estudio de este cálculo proposicional tendrá por objetivo principal la determinación de las álgebras libres con c generadores y el problema de saber si existen o no matrices características para el cálculo proposicional de Wajsberg con un número finito n de variables.

9.8. Algebra de Wajsberg libre generada por un elemento

Representemos para simplificar $a = C(g_1)$. Queremos determinar los elementos que se pueden obtener a partir de a efectuando las operaciones $\to$, $-$. En primer lugar observemos que vale: $-1 = 0$, pues $-1 = 1 \to 0 = 0$. Es claro que a partir de a se pueden obtener: $a \to a = 1$, $-(a \to a) = 0$, $a \to 0 = -a$, $- - a$, o sea tenemos: 0, a, $-a$, $- - a$ y 1.

1) $a \to -a = -a$. En efecto: $a \to -a = a \to (a \to 0) = a \to 0 = -a$.

2) $a \to - - a = 1$.
$a \to (- - a) = a \to ((a \to 0) \to 0) = (a \to 0) \to (a \to 0) = 1$.

3) $-a \to a = - - a$.

   (i) $-a \to a \leq - - a$.
   $(-a \to a) \to - - a = (-a \to a) \to (-a \to 0) = -a \to (a \to 0) = -a \to -a =$
   1.

(ii) $--a \leq -a \to a$.
$--a \to (-a \to a) = (-a \to 0) \to (-a \to a) = -a \to (0 \to a) = -a \to 1 = 1$.

4) $-a \to --a = --a$.
Se obtiene reemplazando a por $-a$ en 1).

5) $--a \to -a = -a$.
Se obtiene reemplazando a por $-a$ en 3).

El elemento $--a \to a$ es nuevo.

6) $-(--a \to a) = 0$.
Usando la fórmula de Skolem: $(abba)b = bab$, entonces: $(((a \to 0) \to 0) \to a) \to 0 = (0 \to a) \to 0 = 1 \to 0 = 0$.

7) $(--a \to a) \to a = --a$.
Por el Teorema 9.6.4 $a \leq -a \to b$ luego reemplazando a por $-a$ y b por a tenemos $-a \leq --a \to a$ luego $(--a \to a) \to a \leq -a \to a$ y como por 3) $-a \to a = --a$ tenemos (i) $(--a \to a) \to a \leq --a$.
Como $a \leq (a \to b) \to b$, entonces reemplazando a por $--a$ y b por a tenemos (ii) $--a \leq (--a \to a) \to a$. De (i) e (ii) resulta 7).

8) $(--a \to a) \to -a = -a$.
$(--a \to a) \to -a = (--a \to a) \to (a \to 0) = a \to ((--a \to a) \to 0) =$
$a \to (-(--a \to a)) = a \to 0 = -a$.

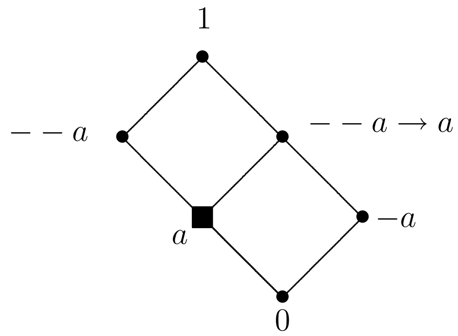
9) $(--a \to a) \to --a = --a$.
$(--a \to a) \to (-a \to 0) = -a \to ((--a \to a) \to 0) = -a \to 0 = --a$.

10) $a \to (--a \to a) = 1$.

11) $-a \to (--a \to a) = 1$.
$-a \to (--a \to a) = --a \to (-a \to a) = --a \to --a = 1$.

12) $--a \to (--a \to a) = --a \to a$.

Estas doce fórmulas muestran que a partir de un elemento a efectuando las operaciones $\to$ y $-$, se obtienen a lo sumo seis elementos que son: 0, a, $-a$, $--a$, $--a \to a$ y 1, que es el teorema que Tarski y McKinsey indicaron para el cálculo proposicional implicativo intuicionista. Estos elementos pueden ser efectivamente distintos, como ocurre por ejemplo en un álgebra de Heyting. El diagrama de estos seis elementos en el caso general es el siguiente y este es precisamente el gráfico del álgebra de Wajsberg libre con un generador.



Problema: Determinar el álgebra de Wajsberg libre con dos generadores.

Es natural introducir la siguiente:

Definición 9.8.1 *Un elemento* r *de un álgebra de Kolmogoroff se dice regular si* $--r = r$.

Es posible demostrar los siguientes teoremas:

Teorema 9.8.1 *Si* A *es un álgebra de Wajsberg entonces el conjunto* $Reg(A)$ *de todos los elementos regulares de* A*, ordenado por la relación* $\leq$*, es un álgebra de Boole.*

Teorema 9.8.2 *Si* A *es un álgebra de Wajsberg y* $Rad(A)$ *su radical, entonces el álgebra cociente* $A/Rad(A)$ *es isomorfa a* $Reg(A)$*.*

10. LA CONJUNCION Y LA DISYUNCION

En el alfabeto de algunos cálculos proposicionales figuran los símbolos $\wedge$ y $\vee$ de conjunción y disyunción. Cuando esto ocurre simultáneamente con la introducción del operador $\rightarrow$, se admiten los axiomas siguientes:

Axioma D1: $p \rightarrow (p \vee q) \in \mathcal{T}$,

Axioma D2: $q \rightarrow (p \vee q) \in \mathcal{T}$,

Axioma D3: $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)) \in \mathcal{T}$,

Axioma C1: $(p \wedge q) \rightarrow p \in \mathcal{T}$,

Axioma C2: $(p \wedge q) \rightarrow q \in \mathcal{T}$,

Axioma C3: $(r \rightarrow p) \rightarrow ((r \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow (p \wedge q))) \in \mathcal{T}$,

Axioma L1: $p \rightarrow (q \rightarrow p) \in \mathcal{T}$,

Axioma L2: $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \in \mathcal{T}$,

Axioma L3: $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p \in \mathcal{T}$,

Axioma N1: $(p \rightarrow -q) \rightarrow (q \rightarrow -p) \in \mathcal{T}$,

Axioma N2: $--p \rightarrow (-p \rightarrow p) \in \mathcal{T}$.

De los axiomas D1, D2 y D3 resulta que el álgebra de Lindenbaum es un conjunto reticulado superiormente por la regla $C(p \vee q) = C(p) \vee C(q)$.
En los cálculos proposicionales en que figuran los postulados C1, C2, C3 y el operador $\rightarrow$, se prueba que el álgebra de Lindenbaum correspondiente es un conjunto reticulado inferiormente, donde: $C(p \wedge q) = C(p) \wedge C(q)$.
A partir de los once axiomas: L1, L2, L3, D1, D2, D3, C1, C2, C3, N1, N2 se pueden describir los principales cálculos proposicionales que han sido estudiados.

10.1. Axiomáticas para diversos cálculos proposicionales

Cálculo proposicional de Curry Generalizado, conectivos primitivos $\rightarrow, \wedge$.

Axiomas: L1, L2, C1, C2, C3

El álgebra de Lindenbaum correspondiente es un álgebra de Curry generalizada.

Cálculo proposicional de Curry, conectivos primitivos $\rightarrow, \wedge, -$.

Axiomas: L1, L2, C1, C2, C3, N1, N2

El álgebra de Lindenbaum correspondiente es un álgebra de Curry.

Cálculo proposicional positivo intuicionista
(Hilbert - Bernays) (Lógica positiva), conectivos primitivos $\wedge, \vee, \rightarrow$.

Axiomas: L1, L2, C1, C2, C3, D1, D2, D3

El álgebra de Lindenbaum correspondiente es un álgebra de Heyting generalizada.

Cálculo proposicional positivo clásico, conectivos primitivos $\wedge, \vee, \rightarrow$.

Axiomas: L1, L2, L3, C1, C2, C3, D1, D2, D3

El álgebra de Lindenbaum correspondiente es un álgebra de Boole generalizada, que corresponde a la noción de anillo Booleano sin unidad. No tiene primer elemento, pero los que siguen a un elemento dado forman un álgebra de Boole.

Cálculo proposicional de Johanson, conectivos primitivos $\rightarrow, \wedge, \vee, -$.

Axiomas: L1, L2, C1, C2, C3, D1, D2, D3, N1

El álgebra de Lindenbaum correspondiente es un álgebra de Heyting generalizada, en la cuál se elige un elemento fijo f y se define la negación $-p = p \rightarrow f$. En este cálculo se retoma la idea de Kolmogoroff para definir la negación.

Cálculo proposicional intuicionista, conectivos primitivos $\rightarrow, \wedge, \vee, -$.

Axiomas: L1, L2, C1, C2, C3, D1, D2, D3, N1, N2

El álgebra de Lindenbaum correspondiente es un álgebra de Heyting.

Cálculo proposicional clásico, conectivos primitivos $\rightarrow, \wedge, \vee, -$.

Axiomas: L1, L2, L3, C1, C2, C3, D1, D2, D3, N1, N2

Existen naturalmente otros cálculos proposicionales, como por ejemplo el cálculo proposicional clásico con la negación mínima que tendrá por axiomas: L1, L2, L3, C1, C2, C3, D1, D2, D3, N1.

El álgebra de Lindenbaum correspondiente es un álgebra de Boole generalizada, en la cuál se elige un elemento fijo f y se define la negación como: $-p = p \rightarrow f$.

Observación 10.1.1 *En el cálculo proposicional intuicionista ninguno de los cuatro operadores: $\rightarrow, \wedge, \vee, -$ se puede definir a partir de los otros tres y por lo tanto tienen que aparecer en general estos cuatro operadores primitivos. Pero se demuestra que en un álgebra de Heyting los cuatro operadores: $\rightarrow, \wedge, \vee, -$ se pueden definir por medio de los dos operadores siguientes: $\leftrightarrow$, $\vee$ donde : $a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$.*

Sería interesante caracterizar el cálculo proposicional intuicionista tomando un alfabeto en que figuren solamente los operadores $\leftrightarrow$ y $\vee$.

Observación 10.1.2 *En lo que respecta al cálculo proposicional clásico se sabe que se puede tomar como conectivos primitivos solamente algunos de los cuatro operadores $\rightarrow, \wedge, \vee, -$.*

Axiomática de Frege: (1879), conectivos primitivos $\rightarrow, -$.

Axioma F1: $p \rightarrow (q \rightarrow p) \in \mathcal{T}$,

Axioma F2: $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \in \mathcal{T}$,

Axioma F3: $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r)) \in \mathcal{T}$,

Axioma F4: $(p \rightarrow q) \rightarrow (-q \rightarrow -p) \in \mathcal{T}$,

Axioma F5: $- - p \rightarrow p \in \mathcal{T}$, Axioma F6: $p \to --p \in \mathcal{T}$.

Łukasiewicz demostró que F3 se puede deducir de F1 y F2 y que los tres últimos axiomas se pueden reemplazar por el axioma: $(-p \to -q) \to (q \to p) \in \mathcal{T}$.

Axiomática de Peirce: (1885), conectivos primitivos: $\to$, 0.

Axioma P1: $p \to p \in \mathcal{T}$,

Axioma P2: $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r)) \in \mathcal{T}$,

Axioma P3: $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)) \in \mathcal{T}$,

Axioma P4: $0 \to p \in \mathcal{T}$,

Axioma P5: $((p \to q) \to p) \to p \in \mathcal{T}$.

Collected papers of Charles Peirce. Edited by Charles Hartshorne and Paul Weiss. Harvard University Press (1931-35).
Prior (J.S.L. 23 (1958), pág. 135) prueba que P2, P3, P4 y P5 son independientes y que P1 es demostrable.

Axiomática de Bertan Russell: (1908), conectivos primitivos: $\vee$, $-$.

Axioma 1: $(p \vee p) \to p \in \mathcal{T}$,

Axioma 2: $q \to (p \vee q) \in \mathcal{T}$,

Axioma 3: $(p \vee q) \to (q \vee p) \in \mathcal{T}$,

Axioma 4: $(p \to q) \to ((r \vee p) \to (r \vee q)) \in \mathcal{T}$,

Axioma 5: $(p \vee (q \vee r)) \to (q \vee (p \vee r)) \in \mathcal{T}$.

Amer. J. of Math. 30 (1908), 222-262.

Axiomática de Nicod: (1917-1920), conectivos primitivos $\vee, \to$.

Axioma N1: $(p \vee p) \to p \in \mathcal{T}$,

Axioma N2: $p \to (p \vee q) \in \mathcal{T}$,

Axioma N3: $(p \vee (q \vee r)) \to (q \vee (p \vee r)) \in \mathcal{T}$,

Axioma N4: $(q \to r) \to ((p \vee q) \to (p \vee r)) \in \mathcal{T}$.

Proc. of Cambridge Philosophical Soc. 19 (1917-1920), 32-41.

Axiomática de Tarski: (1925), conectivos primitivos: $\to$, $-$.
Un solo axioma con 53 letras y los conectivos C en vez de $\to$ y N en vez de $-$.
El axioma de Tarski está explícitamente formulado en el siguiente artículo de B. Sobociński, *Z badań nad teorja dedukcji*, Przeglad Filozoficzny, 35 (1932), 172-193.

Axiomática de Bernays: (1920), conectivos primitivos: $\vee$, $-$.

Axioma B1: $(p \vee p) \rightarrow p \in \mathcal{T}$,

Axioma B2: $q \rightarrow (p \vee q) \in \mathcal{T}$,

Axioma B3: $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p) \in \mathcal{T}$,

Axioma B4: $(p \vee (q \vee r)) \rightarrow (q \vee (p \vee r)) \in \mathcal{T}$.

Math. Z. 25 (1926), 305-320.

Axiomática de Łukasiewicz: (1929), conectivos primitivos: $\rightarrow$, $-$.

Axioma 1: $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) \in \mathcal{T}$,

Axioma 2: $(-p \rightarrow p) \rightarrow p \in \mathcal{T}$,

Axioma 3: $p \rightarrow (-p \rightarrow q) \in \mathcal{T}$.

Axiomática de Łukasiewicz: (1930) conectivos primitivos: $\rightarrow$, $-$.

Axioma L1: $p \rightarrow (q \rightarrow p) \in \mathcal{T}$,

Axioma L2: $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \in \mathcal{T}$,

Axioma L3: $(-p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p) \in \mathcal{T}$.

Existen también variadas axiomáticas para el cálculo proposicional intuicionista.

10.2. Independencia de los axiomas de las álgebras de Kolmogoroff

Independencia de K1. Sea $A = \{0, a, 1\}$ y $\rightarrow$, $-$ las operaciones definidas sobre A por las tablas siguientes:

$\rightarrow$	0	a	1
0	1	1	1
a	0	1	1
1	0	0	1

x	$-x$
0	1
a	a
1	0

Luego $a \rightarrow (1 \rightarrow a) = a \rightarrow 0 = 0 \neq 1$.

Independencia de K2. Sea $A = \{0, a, 1\}$ y $\rightarrow$, $-$ las operaciones definidas sobre A por las tablas siguientes:

$\rightarrow$	0	a	1
0	1	1	1
a	a	1	1
1	a	a	1

x	$-x$
0	1
a	a
1	0

Luego
$(a \rightarrow (1 \rightarrow 0)) \rightarrow ((a \rightarrow 1) \rightarrow (a \rightarrow 0)) = (a \rightarrow a) \rightarrow (1 \rightarrow a) = 1 \rightarrow a = a \neq 1$.

Independencia de K3. Sea $A = \{0, 1\}$ y $\rightarrow$, $-$ las operaciones definidas sobre A por las tablas siguientes:

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	1	1

x	$-x$
0	1
1	0

Luego $0 \rightarrow 1 = 1$ y $1 \rightarrow 0 = 1$ pero $0 \neq 1$.
Independencia de K4. Sea $A = \{0, 1\}$ y $\rightarrow$, $-$ las operaciones definidas sobre A por las tablas siguientes:

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

x	$-x$
0	0
1	1

Luego $0 \rightarrow -1 = 0 \rightarrow 1 = 1$, $1 \rightarrow -0 = 1 \rightarrow 0 = 0$ y $1 \neq 0$.

Las tablas de $\rightarrow$ fueron indicadas por L. Iturrioz para K1, K2 y K3.

10.3. Independencia de los axiomas de las álgebras de Wajsberg

Independencia de K1. Basta considerar el conjunto $A = \{0, a, 1\}$ con las tablas de $\rightarrow$ y $-$ dadas para la independencia de K1 en las álgebras de Kolmogoroff.

Independencia de K2. Basta considerar el conjunto A con las tablas de $\rightarrow$ y $-$ para K2 en las álgebras de Kolmogoroff.

Independencia de K3. Sea $A = \{0, 1\}$ con las tablas dadas para K3 en las álgebras de Kolmogoroff.

Independencia de K4. Sea $A = \{0, 1\}$ con las tablas dadas para K4 en las álgebras de Kolmogoroff.

Independencia de K5. Sea $A = \{0, 1\}$ y $\rightarrow$, $-$ las operaciones definidas sobre A por las tablas siguientes:

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

x	$-x$
0	1
1	1

Luego $--0 \rightarrow (-0 \rightarrow 0) = 1 \rightarrow (1 \rightarrow 0) = 1 \rightarrow 0 = 0 \neq 1$.

11. TRIADICO DE CANTOR

11.1. Introducción y Ejemplos

Indiquemos la descripción del triádico de Cantor también llamado el *discontinuo de Cantor.*

Se puede describir fácilmente este conjunto suponiendo que los números reales se representan en el sistema de base 3. Nos limitaremos a considerar números del segmento $[0,1]$. Observemos en primer lugar que la representación triádica de un número real en general no es única, así por ejemplo:

$1,000\ldots = 0,222\ldots = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \dfrac{2}{3^3} + \cdots = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1.$

Sea K el conjunto de todos los números reales que se pueden representar bajo la forma:

$x = 0, x_1x_2x_3\cdots x_n\cdots = \dfrac{x_1}{3} + \dfrac{x_2}{3^2} + \dfrac{x_3}{3^3} + \cdots + \dfrac{x_n}{3^n} + \cdots$, donde $x_i = 0$ ó $x_i = 2$, para $i \in \mathbb{N}$.

Es claro que

$$k \in K \text{ si y solo si } k = 2\sum_{t=1}^{\infty} \frac{x(t)}{3^t}, \text{ donde } x(t) \in \{0,1\}$$

En estas condiciones $x(t)$ es una función definida sobre el conjunto de los números naturales y tomando sus valores en el conjunto $A = \{0,1\}$.

Ejemplos

1) A la función $x(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{N}$, le corresponde el número $x = 0$.

2) A la función $x(t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{N}$, le corresponde el número real

$$x = 2\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{3^t} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1.$$

3) A la función definida por $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$ le corresponde $x = 2 \cdot \dfrac{1}{3}$.

4) A la función definida por $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$ le corresponde el número real $x = 0,0222\ldots$, que es precisamente $x = 2 \cdot \dfrac{\frac{1}{3^2}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}$.

11.2. Resultados

Estudiaremos ahora la noción de límite en K. Dada una sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de elementos de K, donde $x_n = 2\sum_{t=1}^{\infty} \dfrac{x_n(t)}{3^t}$ determinemos la condición necesaria y suficiente para que esta sucesión tienda a un límite $x = 2\sum_{t=1}^{\infty} \dfrac{x(t)}{3^t}$.

Teorema 11.2.1 *Para que la sucesión* $(x_n) \in K$ *tienda al límite* x *de* K *es necesario y suficiente que se verifique que las sucesiones* $(x_n(t))$ *tiendan hacia un límite para todo* $t \in \mathbb{N}$, *y si escribimos* $x(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$ *podemos decir que:* $x = 2\sum\limits_{t=1}^{\infty} \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)}{3^t}$ *esto es:*

$$\lim_{n\to\infty} 2\sum_{t=1}^{\infty} \frac{x_n(t)}{3^t} = 2\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)}{3^t}.$$

Dem. La condición es necesaria.
Supongamos que $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ es una sucesión de elementos de K tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, y que no se verifica la igualdad $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$. Supongamos que las sucesiones $(x_n(t))$ para t fijo, no tiendan todas a un límite, esto es, existe por lo menos un elemento t_0 tal que la sucesión $(x_n(t_0))$ no tiende a un límite. Entre los elementos en las condiciones indicadas habrá un mínimo que representaremos por la letra N. Supongamos que existen:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n(1) = x(1) \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n(2) = x(2) \\ \quad\vdots \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n(N-1) = x(N-1) \end{cases}$$

y que no existe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(N)$.
Vamos a probar que esto es imposible. Hagamos la siguiente descomposición:

$$x_n = 2\sum_{t=1}^{N} \frac{x_n(t)}{3^t} + 2\sum_{t=N+1}^{\infty} \frac{x_n(t)}{3^t},$$

y para simplificar la demostración escribamos:

$$x_n^N = 2\sum_{t=1}^{N} \frac{x_n(t)}{3^t} \ \text{ y } \ R_n^N = 2\sum_{t=N+1}^{\infty} \frac{x_n(t)}{3^t},$$

en forma tal que:

$$x_n = x_n^N + R_n^N \quad x_m = x_m^N + R_m^N$$

entonces

$$x_n - x_m = (x_n^N - x_m^N) + (R_n^N - R_m^N)$$

y por lo tanto

$$x_n^N - x_m^N = (x_n - x_m) + (R_m^N - R_n^N),$$

luego

$$\left|x_n^N - x_m^N\right| \leq |x_n - x_m| + \left|R_m^N - R_n^N\right| \tag{1}$$

Además

$$\left|R_n^N - R_m^N\right| = \left|2 \sum_{t=N+1}^{\infty} \frac{x_m(t) - x_n(t)}{3^t}\right|.$$

Teniendo en cuenta que la serie $\sum_{t=N+1}^{\infty} \frac{x_n(t)}{3^t}$ es absolutamente convergente pues:

$$\sum_{t=N+1}^{\infty} \left|\frac{x_n(t)}{3^t}\right| \leq \sum_{t=N+1}^{\infty} \frac{1}{3^t},$$

ya que $x_n(t) \leq 1$, resulta

$$\left|R_n^N - R_m^N\right| = \left|2 \sum_{t=N+1}^{\infty} \frac{x_m(t) - x_n(t)}{3^t}\right| \leq 2 \sum_{t=N+1}^{\infty} \frac{1}{3^t} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{3^{N+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3^N} \tag{2}$$

De (1) y (2) resulta:

$$\left|x_n^N - x_m^N\right| \leq \frac{1}{3^N} + |x_m - x_n| \tag{3}$$

Como por hipótesis x_n tiende hacia un límite, por el teorema de Cauchy:

$\lim\limits_{n,m\to\infty} |x_n - x_m| = 0$, entonces dado $\delta = \frac{1}{3^N}$ existe un número R tal que:

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{3^N}, \text{ para } n, m > R. \tag{4}$$

De (3) y (4) resulta:

$$\text{Para } m, n > R \text{ se verifica } \left|x_n^N - x_m^N\right| < \frac{1}{3^N} + \frac{1}{3^N} = \frac{2}{3^N}$$

luego

$$2\left|\sum_{t=1}^{N} \frac{x_n(t) - x_m(t)}{3^t}\right| < \frac{2}{3^N} \text{ para } m, n > R. \tag{5}$$

Como por hipótesis las sucesiones $(x_n(1)), (x_n(2)), \ldots, (x_n(N-1))$ tienden a un límite entonces:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n,m\to\infty} |x_n(1) - x_m(1)| = 0 \\ \vdots \\ \lim\limits_{n,m\to\infty} |x_n(N-1) - x_m(N-1)| = 0 \end{cases}$$

Observemos que $|x_n(1) - x_m(1)|$ puede tomar solo los valores 0 ó 1 y como esta sucesión tiende a un límite que es cero, esto significa que:

Existe R_1 tal que $|x_n(1) - x_m(1)| = 0$, para $n, m > R_1$.

Análogamente

$$\begin{cases} \text{Existe } R_2 \text{ tal que } |x_n(2) - x_m(2)| = 0, \text{ para } n, m > R_2 \\ \vdots \\ \text{Existe } R_{N-1} \text{ tal que } |x_n(N-1) - x_m(N-1)| = 0, \text{ para } n, m > R_{N-1}. \end{cases}$$

Entonces tomando $R' = \max\{R, R_1, R_2, \dots, R_{N-1}\}$ y teniendo en cuenta (5) resulta:

$$\left| 2\, \frac{x_n(N) - x_m(N)}{3^N} \right| < \frac{2}{3^N} \text{ para } n, m > R'$$

y por lo tanto $|x_n(N) - x_m(N)| < 1$.

De aquí resulta $|x_n(N) - x_m(N)| = 0$ para $n, m > R'$ o sea:

$x_{R'+1}(N) = x_{R'+2}(N) = \cdots = x_{R'+p}(N) = \cdots$, luego esta sucesión es constante a partir del término $x_{R'+1}$, es decir tiende a un límite, lo que contradice la hipótesis hecha. Por lo tanto no existe ningún valor t_0 tal que la sucesión $(x_n(t_0))$ no tienda a ningún límite, o sea, para todo $t \in \mathbb{N}$ existen los límites $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$.

<u>La condición es suficiente</u>:
Supongamos que $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ es una sucesión de elementos de K tal que existen los límites: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$, para todo $t \in \mathbb{N}$ y consideremos el número $x = 2\sum\limits_{t=1}^{\infty} \frac{x(t)}{3^t}$. Como los límites de las sucesiones $(x_n(t))$ de números 0 ó 1 solo pueden ser 0 ó 1 entonces $x \in K$.

Vamos a demostrar ahora que: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Como las series son absolutamente convergentes entonces:

$$|x_n - x| = \left| 2 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{x_n(t) - x(t)}{3^t} \right| \leq 2 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{|x_n(t) - x(t)|}{3^t} \tag{6}$$

Dado $\epsilon > 0$ arbitrario, determinemos N tal que $\frac{1}{3^n} < \epsilon$, para $n \geq N$. Para ello basta considerar $N > \frac{-\log\, \epsilon}{\log\, 3}$.

De (6) resulta que:

$$\begin{aligned} |x_n - x| \leq \quad & 2\sum_{t=1}^{N} \frac{|x_n(t) - x(t)|}{3^t} + 2\sum_{t=N+1}^{\infty} \frac{|x_n(t) - x(t)|}{3^t} \leq \\ & 2\sum_{t=1}^{N} \frac{|x_n(t) - x(t)|}{3^t} + 2\sum_{t=N+1}^{\infty} \frac{1}{3^t} < \\ & 2\sum_{t=1}^{N} \frac{|x_n(t) - x(t)|}{3^t} + \frac{1}{3^N}. \end{aligned} \tag{7}$$

Como por hipótesis $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$ tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n(t) - x(t)| = 0$, luego $x_n(t) - x(t) = 0$ para $n > N_t$, $1 \leq t \leq N$.
Sea $N' = \max\{N, N_1, N_2, \ldots, N_N\}$ entonces para $n > N'$ de (7) resulta que:

$$|x - x_n| < \frac{1}{3^N} < \epsilon \text{ para } n > N',$$

lo que prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. ■

Corolario 11.2.1 *Si $x, x' \in K$ son tales que $x = x'$ entonces $x_n(t) = x'_n(t)$ para todo t. Esto es, cada número del triádico de Cantor tiene un único desarrollo.*

Dem. En efecto, la sucesión $x, x', x, x', \ldots$ tiende a un límite ya que $x = x'$. Luego la sucesión $x_n(t), x'_n(t), x_n(t), x'_n(t), \ldots$ tiende a un límite para $t \in \mathbb{N}$. Es claro que las subsucesiones $x_n(t), x_n(t), \ldots$ tiende a $x_n(t)$ y $x'_n(t), x'_n(t), \ldots$ tiende a $x'_n(t)$. Por lo tanto $x_n(t) = x'_n(t)$ cualquiera que sea t. ■

Observación 11.2.1 *La propiedad que acabamos de indicar en el Teorema 11.2.1, no es válida en general, si los x_n son números reales cualesquiera y si la representación es diádica, triádica ó b-ádica. Por ejemplo la sucesión:*

$$\begin{cases} x_1 = 0,200\ldots \\ x_2 = 0,220\ldots \\ x_3 = 0,2220\ldots \\ \quad\vdots \\ x_n = 0,\underbrace{222\ldots2}_{n}000\ldots \\ \quad\vdots \end{cases}$$

verifica $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1,000\ldots$ y la condición del teorema no se verifica.

Teorema 11.2.2 *Sea $A = \{x \in K : x(1) = k_1, x(2) = k_2, \ldots, x(N) = k_N\}$ donde $k_i, 1 \leq i \leq N$ son fijos. Entonces A es un conjunto abierto.*

Dem. Sea $F = K \setminus A$, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ una sucesión de elementos de F y sea $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$. Debemos probar que F es cerrado, es decir que $x \in F$. Luego $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$. Supongamos que $x \in A$, entonces:
$x(1) = k_1$, $x(2) = k_2$, …, $x(N) = k_N$ y además $x(i) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(i)$, $1 \leq i \leq N$. Luego $x_n(i) = k_i$ para $n > R_i$, $1 \leq i \leq N$. Es decir, para $n > R = \max\{R_1, R_2, \ldots, R_N\}$ es $x_n(t) = k_t$, $1 \leq t \leq N$.
Esto significa que para $n > R$, $x_n \in A$ lo que contradice la hipótesis hecha. Esto muestra que F es cerrado y por lo tanto A es abierto. ■

Observemos que hemos tomado el conjunto A de todos los elementos de K con las N primeras coordenadas fijas. El hecho de que se trata de las N primeras coordenadas fijas no es esencial. Por un razonamiento análogo, se prueba que el conjunto A de elementos de K con un número finito de coordenadas de cualquier orden fijas, es un conjunto abierto del espacio K.

Teorema 11.2.3 *K es un espacio compacto.*

Dem. Por el Teorema 11.2.1 todas las sucesiones convergentes de K tienen un límite que pertenece a K, luego K es cerrado y como está contenido en el segmento $[0,1]$ es acotado y por lo tanto K es compacto. ■

Sea A un conjunto con dos elementos $\{0,1\}$ sobre el cual se considera la topología discreta. Hagamos el producto cartesiano de una familia numerable de copias de este espacio topológico

$$E = \prod_{i=1}^{\infty} E_i, \quad \text{donde} \quad E_i = A, \quad \text{para} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Luego $x \in E$ si y solo si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ donde $x_i \in E_i = A = \{0,1\}$.
Sea $x \in K$, $x = 2\sum_{t=1}^{\infty} \frac{x(t)}{3^t}$. A este elemento x le hacemos corresponder el elemento fijo $\varphi(x)$, $\varphi(x) \in E$ tal que: $\varphi(x) = (x(1), x(2), \ldots, x(n), \ldots)$. Es claro que φ es una correspondencia biunívoca de K sobre E, pues la representación triádica de $x \in K$ es única. Queremos probar que φ es un homeomorfismo de K sobre E.
E es un espacio de Hausdorff por ser producto de espacios de Hausdorff, y es compacto por el teorema de Tychonoff. Como K es un espacio de Hausdorff compacto para probar que φ es un homeomorfismo, basta probar que φ es continua. Para eso necesitamos detallar un poco más la topología del espacio E.
Recordemos como se construye la topología de un producto cartesiano de espacios topológicos. Se toma sobre un eje E_i un conjunto abierto A_i y se da el nombre de cilindro al conjunto de todos los elementos de E cuya coordenada de índice i pertenece a A_i. Supongamos por ejemplo que $A_i^{(1)} = \{1\}$, entonces el conjunto de todos los elementos de E cuya coordenada de índice i es 1 será un conjunto subbásico abierto de E. Si tomamos $A_i^{(0)} = \{0\}$, el conjunto de todos los elementos de E tales que $x_i = 0$ es un conjunto abierto subbásico de E.
Observemos que estos dos conjuntos correspondientes a $A_i^{(0)}$, $A_i^{(1)}$ son complementarios en E y como los dos son abiertos, estos conjuntos subbásicos son simultáneamente abiertos y cerrados.
Sea $G_i = \{x \in E : x_i = 1\}$ y $\complement G_i = \{x \in E : x_i = 0\}$ entonces la familia de conjuntos G_i, $\complement G_i$, $i \in \mathbb{N}$ es la familia de subbásicos que sirve para definir la topología del espacio E. Esta topología se obtiene tomando como base las intersecciones finitas de los conjuntos que acabamos de indicar, que serán conjuntos abiertos.
Sea $\mathcal{B}$ esta base, entonces estará formada por conjuntos de la forma:
$B = G_{i_1}^* \cap G_{i_2}^* \cap \cdots \cap G_{i_n}^*$, donde $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ y $G_{i_j}^* = G_{i_j}$ ó $G_{i_j}^* = \complement G_{i_j}$.
Observemos que B es el conjunto de todos los elementos que sobre los ejes $E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_n}$ tienen coordenadas fijas iguales a 0 ó a 1. La coordenada i_j es 1 si $G_{i_j}^* = G_{i_j}$ y 0 si $G_{i_j}^* = \complement G_{i_j}$.
Sea $B_1 = \varphi^{-1}(B)$, es claro que B_1 es el conjunto de todos los elementos de K que tienen las coordenadas de índice $i_1, i_2, \ldots, i_n$ fijas e iguales precisamente a las que acabamos de indicar. Sabemos que B_1 es abierto en K y por lo tanto como la imagen completa inversa de cada básico de E es un conjunto abierto de K podemos afirmar que φ es continua. Por lo tanto φ es un homeomorfismo de K sobre E.

Recordemos que un espacio topológico X se dice totalmente disconexo si dados dos elementos distintos $x_1, x_2 \in X$ existe un conjunto A simultáneamente abierto y cerrado que contiene a uno de los sin contener al otro.

Propiedades topológicas del espacio E.

1) E es un espacio totalmente disconexo.
Sean $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ dos elementos distintos de E. Luego existe un índice i tal que $x_i \neq y_i$, supongamos por ejemplo que $x_i = 1$ e $y_i = 0$. Consideremos el conjunto $G_i = \{z \in E : z_i = 1\}$. Sabemos que G_i es abierto y además $x \in G_i$ e $y \notin G_i$. Por otra parte probamos que G_i es cerrado, lo que termina la demostración.

Recordemos que *Todo espacio totalmente disconexo es un espacio de Hausdorff.*

2) E es un espacio compacto, por lo tanto E es normal.

Recordemos que la base $\mathcal{B}$ está formada por conjuntos simultáneamente abiertos y cerrados. Sea $\mathcal{A}$ el cuerpo de subconjuntos de E generado por los conjuntos G_i, $i \in \mathbb{N}$. Es evidente que $\complement G_i \in \mathcal{A}$ y por lo tanto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Se sabe que $\mathcal{A}$ está formado por los conjuntos que se obtienen haciendo reuniones finitas de conjuntos básicos. Para eso basta probar que las reuniones finitas de esos conjuntos básicos forman un cuerpo de conjuntos. Es también claro que todos los conjuntos de $\mathcal{A}$ son abiertos y cerrados y que $\mathcal{A}$ es una base para el espacio E. Probemos ahora que:

3) Si A es simultáneamente abierto y cerrado entonces $A \in \mathcal{A}$.
Como A es abierto existe un familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{A}$ tal que $A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$. Por otra parte como A es un conjunto cerrado de un espacio de Hausdorff, entonces A es compacto, luego existe un subcubrimiento finito de A, esto es, $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, y como $A_i \in \mathcal{A}$ para $1 \leq i \leq n$ entonces $A \in \mathcal{A}$.

4) Si F es cerrado entonces F es la intersección de abiertos y cerrados.

Esto resulta del hecho que todo abierto es reunión de conjuntos abiertos y cerrados. En particular:

5) Dado un conjunto cerrado $F \neq E$ y un elemento $p \notin F$ existe un conjunto abierto y cerrado N tal que $F \subseteq N$ y $p \notin N$.

11.3. Representación del cálculo proposicional clásico con una infinidad numerable de variables de enunciado

Podemos definir al cálculo proposicional clásico como un cálculo proposicional que verifica los axiomas del cálculo proposicional implicativo clásico y los axiomas de Wajsberg. Suponemos que el alfabeto contiene además de las variables de enunciado, los símbolos $\rightarrow, -, (,)$.

L1) $a \rightarrow (b \rightarrow a) \in \mathcal{T}$,

L2) $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) \in \mathcal{T}$,

L3) $((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a \in \mathcal{T}$,

N1) $(a \rightarrow -b) \rightarrow (b \rightarrow -a) \in \mathcal{T}$,

N2) $- - a \rightarrow (-a \rightarrow a) \in \mathcal{T}$,

y se toma la regla de modus ponens como única regla de deducción.

Sea $\mathcal{L}/\equiv$ el álgebra de Lindenbaum de este cálculo. De L1, L2 y L3 resulta que $\mathcal{L}/\equiv$ es un álgebra de Tarski. De L1, L2, N1 y N2 resulta que $\mathcal{L}/\equiv$ tiene primer elemento 0. Por el Teorema 8.7.9 podemos decir que $\mathcal{L}/\equiv$ es un álgebra de Boole.
Por un razonamiento análogo a los que hemos estudiado anteriormente se prueba que $\mathcal{L}/\equiv$ es un álgebra de Boole libre con c generadores, siendo $c = |\{g_i\}_{i\in I}|$. Por otra parte en el Corolario 8.3.1 hemos visto que el álgebra implicativa $\{0,1\}$ es una matriz característica para el cálculo proposicional implicativo clásico y la demostración de este hecho se basaba esencialmente en la circunstancia de que la familia de los sistemas deductivos máximos tenía por intersección el conjunto $\{1\}$, es decir en el hecho que un álgebra de Tarski es semisimple. Sabemos que en un álgebra de Boole, un sistema deductivo se puede identificar con un filtro, por otro lado los sistemas deductivos máximos coinciden con los ultrafiltros de $\mathcal{L}/\equiv$. Si llamamos radical de un álgebra de Boole a la intersección de todos sus ultrafiltros sabemos que es igual a $\{1\}$, ya que las álgebras de Boole son semisimples. Procediendo de manera análoga a lo que hemos indicado para el cálculo proposicional implicativo clásico, se prueba que el álgebra de Boole $\{0,1\}$ es una matriz característica para el cálculo proposicional clásico. Esto significa que si $A = \{0,1\}$ entonces $\mathcal{L}/\equiv = \mathcal{P}_A$. Este resultado vale sin hacer restricciones sobre $c = |\{g_i\}_{i\in I}|$. Por lo tanto existe un criterio de decisión para las tautologías del cálculo proposicional clásico. También podemos afirmar que $\mathcal{P}_A$ es el álgebra de Boole libre con c generadores.
Vamos a ver cuál es el álgebra de Boole libre en los distintos casos.
Sea $c = n$, número finito. Tenemos las variables de enunciado $g_1, g_2, \ldots, g_n$, y determinemos el álgebra de Boole libre con n generadores. Sea $E = A^n$. Si $x \in A^n$ entonces $x = (x_1, \ldots, x_n)$ donde $x_i \in A$, para $1 \leq i \leq n$. $\mathcal{L}/\equiv_n = \mathcal{P}_A$ es la familia de todas las funciones polinomiales que se obtienen suponiendo que en cada forma polinomial las variables de enunciado $g_1, \ldots, g_n$ son elementos de A. A $p(g_1, \ldots, g_n)$ le corresponde $p_A(g_1, \ldots, g_n)$ donde $g_1, \ldots, g_n$ son variables de A.
En particular a cada variable g_i le corresponde un polinomio g_{iA}, donde

$$g_{iA}(x) = x_i = \begin{cases} 0 \\ 1. \end{cases}$$

Entonces g_{iA} es una función definida sobre A^n y que toma solamente los valores $0, 1$. Por lo tanto g_{iA} es una función característica. Sea G_i el conjunto de todos los elementos $x \in A^n$ en los cuales $g_{iA} = 1$. Entonces g_{iA} es la función característica del conjunto $G_i \subseteq A^n$. De aquí resulta que G_i es el conjunto de todos los elementos $x \in A^n$ cuya coordenada de índice i es igual a 1. De este modo obtenemos n conjuntos G_i, $1 \leq i \leq n$. Es claro que el conjunto E tiene 2^n elementos ya que A tiene dos elementos. En forma análoga se ve que a la fórmula $-g_i$ le corresponde el polinomio $-g_{iA}$ que es la función característica del conjunto $\complement G_i$ de todos los elementos de E que tienen la coordenada de índice i igual a 0. Dado un elemento arbitrario $x \in E$: $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Pongamos:

$$G(x) = G_1^*(x) \cap G_2^*(x) \cap \cdots \cap G_n^*(x),$$

donde

$$G_i^*(x) = G_i \text{ si } x_i = 1 \text{ y } G_i^*(x) = \complement G_i \text{ si } x_i = 0.$$

Es claro que a la forma polinomial $g_1^* \wedge g_2^* \wedge \cdots \wedge g_n^*$ le corresponde el polinomio:

$$g_{1A}^* \wedge g_{2A}^* \wedge \cdots \wedge g_{nA}^* \in \mathcal{P}_A = \mathcal{L}/\equiv_n$$

que es la función característica del conjunto

$$G_1^*(x) \cap G_2^*(x) \cap \cdots \cap G_n^*(x).$$

Esto es, los polinomios mínimos que acabamos de escribir son las funciones características de los elementos del espacio E. Esta correspondencia entre funciones polinomiales y los conjuntos de los cuáles ellas son funciones características es como sabemos un isomorfismo. De esto resulta que $\mathcal{P}_A$ tiene 2^n átomos y coincide con la familia de todas las partes del conjunto E. Esto muestra que el álgebra de Boole libre $\mathcal{L}/\equiv_n$ es un álgebra de Boole con 2^n átomos y por lo tanto su número de elementos es 2^{2^n}. Como consecuencia resulta en particular que un álgebra de Boole con tres átomos no es libre.

Consideremos ahora el caso que I es numerable: $|I| = \chi_0$, es decir $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ son una infinidad numerable de generadores. Sabemos que $\mathcal{L}/\equiv_{\chi_0} = \mathcal{P}_A$.

Sea $E = \prod_{i=1}^{\infty} A_i$, donde $A_i = A = \{0, 1\}$, para $i \in \mathbb{N}$. A cada fórmula

$$p(g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots) \in \mathcal{L}$$

le corresponde una función polinomial

$$p_A(g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots) \in \mathcal{P}_A$$

en la forma definida anteriormente.

En particular a la fórmula g_i le corresponde la función polinomial $(g_i)_A(x) = x_i \in A$. Esta función polinomial toma solamente valores $0, 1$, por lo tanto es la función característica de un cierto conjunto $G_i \subseteq E$; G_i es naturalmente el conjunto de todos los elementos cuya coordenada de índice i es igual a 1. En forma análoga a la fórmula $-g_i$ le corresponde la función polinomial definida como $(-g_i)_A(x) = -x_i \in A$, de este modo la función polinomial $(-g_i)_A$ es la función característica del conjunto $\complement G_i$ de todos los elementos $x \in E$ tales que su coordenada de índice i es igual a 0.

De una manera general cada función polinomial es la función característica de una cierta parte de E. Como esta correspondencia entre partes de un conjunto y sus funciones características es un isomorfismo y como los g_{iA} generan el álgebra $\mathcal{P}_A$, es evidente que los G_i generan un álgebra $\mathcal{A}$ isomorfa a $\mathcal{P}_A$. Por lo tanto el álgebra libre $\mathcal{L}/\equiv_{\chi_0} = \mathcal{P}_A$ es isomorfa al álgebra $\mathcal{A}$ de todos los conjuntos simultáneamente abiertos y cerrados del espacio compacto totalmente disconexo E y entonces $\mathcal{L}/\equiv_{\chi_0}$ es isomorfa a la familia de todos los conjuntos simultáneamente abiertos y cerrados del triádico de Cantor.

Referencias

[1] Abbott J.C., *Semi-boolean algebras*, Mat. Vesnik, 4 (19), (1967), 177-198.

[2] Abbott J.C., *Implicational algebras*, Bull. Math, R.S. Roumaine, 11 (1967), 3-23.

[3] Birkoff G., *Lattice Theory*, American Mathematical Society. Colloquium Publications, Volume XXV, 3^{rd} edition, Providence 1973, pp.45-46.

[4] Diego A., *Sobre álgebras implicativas*, Revista de la U.M.A. XX (1962), 310-311

[5] Diego A., *Sobre álgebras de Hilbert*, Notas de Lógica Matemática 12, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca Argentina, (1965), 89 págs.

[6] Diego A., *Sur les algèbres de Hilbert*, Collection de logique Matemématique, Paris Gautihers-Villars (1996).

[7] Henkin L., *An algebraic characterization of quantifiers*, Fund. Math. XXXVII (1950), 63-74.

[8] Hilbert D. and Bernays P., *Grundlagen der Mathematik*, Erster Band, Berlin (1934). Zweiter Band, Berlin, (1939)

[9] Łukasiewicz J., *The shortest axiom of the implicatinal calculus of propositions*, Proceedings of the Royal Irish Academy, 52, A3 (1948).

[10] McKinsey J.C.C. and Tarski A., *Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting*, Journal of Symbolic Logic 13 (1948), 1-15.

[11] Monteiro A., *Axiomes indépendants pour les algèbres de Brower*, Revista de la Unión Matemática Argentina, Volumen XVII (1955), 149-160.

[12] Monteiro A., *Curso Algebra de la lógica I,* Instituto de Matemática. Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca, (1959).

[13] Monteiro A., *Cálculo Proposicional Implicativo Clásico*, curso dictado en el Instituto de Matemática y Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, (1960).

[14] Monteiro A., *Algebras de Heyting,* Informes Técnicos Internos 51, INMABB-CONICET-UNS (1995).

[15] Prior A. N., *Some axiom pairs for material and strict implication*, Z. Math. Logik Grundlagen Math 7 (1961), 61-65.

[16] Rasiowa H. and Sikorski R., *The mathematics of Metamathematics*, Second edition, 519 pages, Warszawa, (1968).

[17] Skolem Th., *Consideraciones sobre los fundamentos de la matemática,* Revista Matemática Hispano-Americana, 4ta. serie, 12 (1952), 169-200 y 13 (1953), 149-174.

APENDICE I

- Buşneag D., *Contributii algebrelor Hilbert*, Ph. D. Thesis, Intitutul Central de Matematică, Facultatea de Matematică, Bucaresti, (1985).
- Buşneag D., *The lattice of deductive systems of a Hilbert algebra*, An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi, N. Ser., Sect. Ia 31 (1985), Suppl., 78-79.
- Buşneag D., *A note on deductive systems of a Hilbert algebra*, Kobe J. Math. 2 (1985), 29-35.
- Chajda I., *The lattice of deductive systems on Hilbert algebras*, Southeast Asian Bull. Math., 26 (2002), 21-26.
- Chajda I. and Halaš R., *Congruences and Ideals in Hilbert algebras*, Kyungpook Mathem. J., 39 (1999), 429-432.
- Chajda I., Halaš R. and Jun Y., *Annihilators and deductive systems in commutative Hilbert algebras*, Comment. Math. Univ. Carolin. 43, 3 (2002), 407-417.
- Chajda I., Halaš R. and Zedník J., *Filters and annihilators in implication algebras*, Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. Rerum Nat., Math. 37 (1998), 41-45.
- Dudek W., *On ideals in Hilbert algebras*, Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math. 38 (1999), 31-34.
- Halaš R., *Remarks on commutative Hilbert algebras.* Math. Bohemica. 127, 4 (2002), 525-529.
- Hong S. M. and Jun Y. B., *On a special class of Hilbert algebras*, Algebra Colloq. 3(3) (1996), 285-288.
- Hong S. M. and Jun Y. B., *On deductive systems of Hilbert algebras*, Comm. Korean Math. Soc. 11 (1996), 595-600.
- Jun Y. B., *Deductive systems of Hilbert algebras*, Math. Japonica. 43, 1 (1996), 51-54.
- Jun Y. B., *Commutative Hilbert algebras*, Soochow J. Math. 22, 4 (1996), 477-484.
- Jun Y. B., Kim J.Y. and Kim H.S., *Hilbert algebras inherited from the posets*, Indian J. Pure Appl. Math. 28, 4 (1997), 471-475.

APENDICE II

- Buşneag D., *Injective objects in the Hilbert algebras category*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 8, 3 (1980), 433-442.
- Buşneag D., *A topological representation of Hilbert algebras*, An. Univ. Craiova Mat. Fiz.-Chim. 10 (1982), 41-43.
- Buşneag D., *On the maximal deductive systems of a bounded Hilbert algebra*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de Roumanie, 31 (79) (1) (1987), 9-21.

- Buşneag D., *Hilbert algebra of fractions relative to an* $\underline{\vee}$*-closed system*, Analele Univ. din Craiova, seria matematică, fizică-chimie, XVI (1988), 34-37.
- Buşneag D., F*-multipliers and the localization of Hilbert algebras*, Zeitschr. Math. Logik Grund. d. Math. Bd. 36 (1990) 331-338.
- Buşneag D., *Hilbert algebras with valuation*, Math. Japonica 44 (2) (1996), 285-289.
- Buşneag D., *On extensions of pseudo-valuations on Hilbert algebras*, Discrete Math. 263, 1-3 (2003), 11-24.
- Celani S. A., *A note on Homomorphisms of Hilbert Algebras*, International Journal of Mathematical and Mathematics Science 29, (2002), 55-61
- Celani S. A.,*Representation of Hilbert algebras and implicative semilattices*, Cent. Eur. J. Math. 1, 4 (2003), 561-572.
- Celani S. A., *Subalgebras of some classes of Hilbert algebras*, Kyungpook Math. J. 44, 1 (2004), 137-143.
- Chajda I. and Halaš R. ,*Stabilizers in Hilbert algebras*, Multiple-valued logic in Eastern Europe. Mult-Valued Log. 8, 2 (2002), 139-148.
- Cirulis J., *(H)-Hilbert algebras are not same as Hertz algebras*, Bull. Sect. Logic Univ. Łódź 32, 3 (2003), 107-108.
- Figallo A. V., Ramón G. Z. and Saad S., *A note on the Hilbert algebras with infimum*, 8th Workshop on Logic, Language, Informations and Computation WoLLIC'2001 (Brasília), Mat. Contemp. 24 (2003), 23-37.
- Gluschankof D. and Tilli M., *Maximal deductive systems and injective objects in the category of Hilbert algebras*, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. math., 34 (1988), 213-220.
- Kondo M., *Hilbert algebras are dual isomorphic to positive implicative BCK-algebras.* Math. Japon. 49, 2 (1999), 265-268.
- Li J. C. and Cheng G. S., *The quotient structure of a Hilbert algebra*, Gongcheng Shuxue Xuebao 16, 1 (1999), 132-134.
- Pla Carreras J. and Verdú Solans V. ,*Quasi-Hilbert algebras*, Proceedings of the seventh Spanish-Portuguese conference on mathematics, Part I (Sant Feliu de Guíxois, 1980). Publ. Sec. Mat. Univ. Autònoma Barcelona No. 20, (1980), 97-99.
- Porta H., *Sur quelques algèbres de la logique*, Portugal. Math. 40(1) (1981), 41-47.
- Rodríguez Salas A. J., *Subvarieties of Hilbert algebras*, Algebra and geometry (Santiago de Compostela, 1989), 177-189, Álxebra, 54, Univ. Santiago de Compostela, (1990).
- Rudeanu S., *On relatively pseudocomplemented posets and Hilbert algebras*, Analele ştiinţifice ale Universităţii A.I.Cuza, Iaşi, XXXI, s.Ia (1985), 74-77.