Représentation des algèbres de Tarski monadiques

Antonio Monteiro et Luisa Iturrioz

Instituto de Matemática - Universidad Nacional del Sur - 1961 [1]
Bahía Blanca - Argentina

Abstract

Nous introduisons la notion d'algèbre de Tarski monadique et nous indiquons deux théorèmes de représentation (paragraphes 4 et 5) pour cettes algèbres que sont une généralisation des théorèmes de représentation de P. Halmos [3] pour les algèbres de Boole monadiques.

1 Les algèbres de Tarski

Nous allons reproduire dans ce paragraphe un certain nombre de notions et de résultats qui ont été exposés par A. Monteiro, pendant le premier semestre de 1960, [5] et qui ont un rapport direct avec le problème que nous étudions ici.

Définition 1.1 *Soit* $(A, \rightarrow, 1)$ *un système formé par un ensemble non vide* A*, une opération binaire* $\rightarrow$ *définie sur* A*, et* $1 \in A$*, qui vérifie les axiomes suivants:*

T1) $x \rightarrow (y \rightarrow x) = 1.$

T2) $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1.$

T3) $x \rightarrow 1 = 1.$

T4) Si $x \rightarrow y = 1$ *et* $y \rightarrow x = 1$ *alors* $x = y.$

T5) $(x \rightarrow y) \rightarrow x = x.$

Nous dirons alors que A *est une algèbre de Tarski* [1], [2].

[1]Note du rédacteur: *Nous avons ajouté a la Bibliographie des travaux publiés d'aprés 1967. Cet travail a été presenté à la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina (1962),* [7].

Lemme 1.1 *Dans une algèbre de Tarski on a:*

T6) $1 \to x = x$.

T7) $x \to x = 1$.

T8) *Si* $x \to y = 1$ *et* $y \to z = 1$ *alors* $x \to z = 1$

Définition 1.2 *Nous écrirons* $x \leq y$, *pour indiquer que* $x \to y = 1$. [4].

Lemme 1.2 *La relation* $\leq$ *est une relation d'ordre, et* $x \leq 1$, *pour tout* $x \in A$. [4].

Parmi les règles de calcul valables, nous pouvons indiquer les suivants:

T9) $x \to (x \to y) = x \to y$.

T10) Si $y \leq z$, alors $x \to y \leq x \to z$.

T11) Si $x \leq y$ alors $y \to z \leq x \to z$.

T12) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$.

T13) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.

T14) $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$.

T15) $((x \to y) \to y) \to x \ = \ y \to x$.

T16) $((x \to y) \to y) \to y \ = \ x \to y$.

Théorème 1.1 *Une algèbre de Tarski* A *est un ensemble réticulé superiéurement. Plus précisement, si* $x, y \in A$, *alors:*

$$x \vee y = (x \to y) \to y.$$

D'autres règles de calcul valables dans une algèbre de Tarski, sont:

T17) $(x \to y) \vee (y \to x) \ = \ 1$.

T18) $x \to (y \vee z) \ = \ (x \to y) \vee (x \to z)$.

T19) $x \vee (x \to y) \ = \ 1$.

T20) $x \vee (y \to z) = (x \vee y) \to (x \vee z)$.

Théorème 1.2 *Si* A *est une algèbre de Tarski avec un premier élément* 0, *alors* A *est une algèbre de Boole, par rapport à la relation d'ordre* $\leq$ *indiquée dans le lemme 1.2. Le complément de* $x \in A$ *est donné par la formule* $-x = x \to 0$, *et* $x \wedge y = -(-x \vee -y) = [((x \to 0) \to (y \to 0)) \to (y \to 0)] \to 0$.

Corollaire 1.1 *Si A est une algèbre de Tarski, et $a \in A$, alors l'ensemble $[a) = \{x \in A : a \leq x\}$ est une sous-algèbre de Tarski avec premier élément a, donc une algèbre de Boole, où:*

i) *Si $x \in [a)$ le complément de x est $-x = x \rightarrow a$*

ii) *Si $x, y \in [a)$, $x \wedge y = (y \rightarrow (x \rightarrow a)) \rightarrow a$.*

iii) *Si $x, y \in [a)$, alors $x \rightarrow y = -x \vee y = (x \rightarrow a) \vee y$.*

iv) *Si $x, y \in [a)$ alors $(x \vee y) \rightarrow a = (x \rightarrow a) \wedge (y \rightarrow a)$.*

2 Algèbres de Tarski monadiques

Définition 2.1 *Soit $(T, \rightarrow, 1)$ une algèbre de Tarski et $\forall$ un opérateur qu'à chaque élément $a \in T$ fait correspondre un élément $\forall a \in T$ de telle manière que les conditions suivantes soient verifiées:*

U1) $\forall 1 = 1$.

U2) $\forall x \rightarrow x = 1$.

U3) $\forall((x \rightarrow \forall y) \rightarrow \forall y) = (\forall x \rightarrow \forall y) \rightarrow \forall y$.

U4) $\forall(x \rightarrow y) \rightarrow (\forall x \rightarrow \forall y) = 1$.

Le système $(T, \rightarrow, 1, \forall)$ s'appelle une algèbre de Tarski monadique. Pour abréger nous dirons que T est une algèbre de Tarski monadique.

D'après la définition 1.2, U2) et U3) nous avons

U5) $\forall x \leq x$; U6) $\forall(x \rightarrow y) \leq \forall x \rightarrow \forall y$.

Comme $x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y$, alors on peut écrire U3 sous la forme:

U7) $\forall(x \vee \forall y) = \forall x \vee \forall y$.

Nous allons indiquer les principales règles de calcul qui sont valables dans les algèbres de Tarski monadiques.

U8) $\forall\forall x = \forall x$.
D'après U3 et U2 on a: $\forall\forall x = \forall(\forall x \vee \forall x) = \forall\forall x \vee \forall x = \forall x$.

U9) Si $x \leq y$ alors $\forall x \leq \forall y$.
Comme $\forall x \leq x \leq y$ d'après U3 on a $\forall y = \forall(y \vee \forall x) = \forall y \vee \forall x$, donc $\forall x \leq \forall y$.

U10) Si $x = \forall x$, $y = \forall y$ alors $x \to y = \forall(x \to y)$.
D'après U4 (1) $\forall(x \to y) \leq \forall x \to \forall y$. Comme $y \leq x \to y$ alors $\forall y \leq \forall(x \to y)$, d'où l'on déduit $\forall x \to \forall y \leq \forall x \to \forall(x \to y)$ donc $(\forall x \to \forall(x \to y)) \to \forall(x \to y) \leq (\forall x \to \forall y) \to \forall(x \to y)$, et alors $\forall x \vee \forall(x \to y) \leq (\forall x \to \forall y) \to \forall(x \to y)$. Mais $\forall x \vee \forall(x \to y) = \forall(x \to y) \vee \forall\forall x = \forall((x \to y) \vee \forall x) = \forall((x \to y) \vee x) = \forall 1 = 1$, car T19 est verifiée. Alors on peut affirmer que $(\forall x \to \forall y) \to \forall(x \to y) = 1$ donc (2) $\forall x \to \forall y \leq \forall(x \to y)$.
De (1) et (2) $x \to y = \forall x \to \forall y = \forall(x \to y)$.

U11) $\forall(\forall x \to y) = \forall x \to \forall y$.
Par U5) $\forall y \leq y$ alors par T10) $\forall x \to \forall y \leq \forall x \to y$ et par U9) $\forall(\forall x \to \forall y) \leq \forall(\forall x \to y)$.
Comme $\forall\forall x = \forall x$ et $\forall\forall y = \forall y$, en tenant compte de U10) $\forall(\forall x \to \forall y) = \forall x \to \forall y$, donc:

$$\text{(i)} \qquad \forall x \to \forall y \leq \forall(\forall x \to y).$$

D'après U6) et U8) on a:

$$\text{(i)} \qquad \forall(\forall x \to y) \leq \forall\forall x \to \forall y = \forall x \to \forall y.$$

De (i) et (ii) on déduit U11).

Définition 2.2 *Soit T une algèbre de Tarski monadique. Un sous-ensemble, non vide, S de T s'appelle une sous-algèbre monadique de T si S vérifie les deux conditions suivantes:*

S1) Si $a, b \in S$ alors $a \to b \in S$.

S2) Si $a \in S$ alors $\forall a \in S$

Définition 2.3 $\exists a = \forall(a \to \forall a) \to a$.

Par T1) nous savons que $x \leq y \to x$, alors d'après la définition précedant nous avons

E1) $a \leq \exists a$.

En particulier:

E2) $\exists 1 = 1$.

Lemme 2.1 $\exists a = \forall(a \to \forall a) \to \forall a$.

Dem. De $\forall a \leq a$ on déduit (1) $\forall(a \to \forall a) \to \forall a \leq \forall(a \to \forall a) \to a = \exists a$.
Comme $\forall(a \to \forall a) \leq a \to \forall a$, alors d'après T11) $a = a \vee \forall a = (a \to \forall a) \to \forall a \leq \forall(a \to \forall a) \to \forall a$. d'où l'on déduit d'après T10 que
(2) $\exists a = \forall(a \to \forall a) \to a \leq \forall(a \to \forall a) \to (\forall(a \to \forall a) \to \forall a) = \forall(a \to \forall a) \to \forall a$.
De (1) et (2) on déduit le lemme. $\square$

Définition 2.4 *Nous dirons que $a \in T$ est* invariant *ou* constant *si* $\forall a = a$.

Lemme 2.2 *Pour qu'un élément $a \in T$ soit invariant il faut et il suffit que $\exists a = a$.*

Dem. Supposons que $\forall a = a$. Comme $\exists a = \forall(a \to \forall a) \to a$ nous aurons $\exists a = \forall(a \to a) \to a = \forall 1 \to a = 1 \to a = a$.
Supposons maintenant que $a = \exists a$, c'est-à-dire $a = \forall(a \to \forall a) \to a$, alors $1 = a \to a = (\forall(a \to \forall a) \to a)) \to a = \forall(a \to \forall a) \vee a$ d'où par U5) (i) $1 = \forall(\forall(a \to \forall a) \vee a) = \forall(a \to \forall a) \vee \forall a$.
D'après T1), nous savons que $\forall a \leq a \to \forall a$, alors par U9) et U8) : $\forall a = \forall\forall a \leq \forall(a \to \forall a)$, et alors (ii) $\forall(a \to \forall a) \vee \forall a = \forall(a \to \forall a)$. De (i) et (ii) on a $1 = \forall(a \to \forall a) \leq a \to \forall a$ d'où l'on déduit $a \to \forall a = 1$ c'est-à-dire $a \leq \forall a$ et comme $\forall a \leq a$ nous aurons $a = \forall a$. $\square$

Si $X \subseteq T$, nous posons $\forall X = \{\forall x : x \in X\}$.

Lemme 2.3 *L'ensemble $K = K(T)$ de tous les constants d'une algèbre de Tarski monadique T est une sous-algèbre de Tarski de T, et $K = \forall T$.*

Dem. En effet soient $a, b \in K$, c'est-à-dire $\forall a = a$ et $\forall b = b$. Nous allons montrer que $a \to b \in K$. En effet $\forall a \vee (a \to b) = a \vee (a \to b) = ((a \to b) \to a) \to a = a \to a = 1$. De cette égalité on déduit que : (i) $\forall(\forall a \vee (a \to b)) = \forall a \vee \forall(a \to b) = a \vee \forall(a \to b) = (a \to \forall(a \to b) \to \forall(a \to b) = 1$. Mais d'autre part $\forall b = b \leq a \to b$ d'où $\forall b \vee (a \to b) = a \to b$ et alors $\forall(\forall b \vee (a \to b)) = \forall b \vee \forall(a \to b) = \forall(a \to b)$ donc $\forall b = b \leq \forall(a \to b) \leq a \to b$ d'où $a \to b \leq a \to \forall(a \to b) \leq a \to b$, c'est-à-dire : (2) $a \to b = a \to \forall(a \to b)$.
De (1) et (2) on déduit $(a \to b) \to \forall(a \to b) = 1$. Comme $\forall(a \to b) \to (a \to b) = 1$ nous avons $\forall(a \to b) = a \to b$, ce qu'il fallait démontrer.
Observons encore que si $a \in K$, c'est-à-dire $\forall a = a$. Alors comme $\forall\forall a = \forall a$, nous avons que $\forall a \in K$, donc $K(T) = \{\forall a : a \in T\} = \forall T$. $\square$

Observation 2.1 *1) Si $a, b \in K$ alors $a \vee b \in K$.*
En effet comme K est une sous-algèbre de T, alors $a \vee b = (a \to b) \to b \in K$.

2) Si $a \in T$, comme $\forall(a \to \forall a) \in K$ et $\forall a \in K$, alors $\exists a = \forall(a \to \forall a) \to \forall a \in K$.

Lemme 2.4 *Dans une algèbre de Tarski monadique sont valables:*

E3) Si $a \leq b$ alors $\exists a \leq \exists b$.

E4) $\exists(a \vee b) = \exists a \vee \exists b$.

E5) $\exists(a \to b) = \forall a \to \exists b$.

E6) $\exists(\forall a) = \forall a$.

E7) $\exists(a \to \forall a) = 1$.

Dem.

E3) Supposons que $a \leq b$, alors d'après T11) $b \to \forall a \leq a \to \forall a$ et par U9) $\forall(b \to \forall a) \leq \forall(a \to \forall a)$, donc par T11):

$$\text{(i)} \qquad \exists a = \forall(a \to \forall a) \to \forall a \leq \forall(b \to \forall a) \to \forall a.$$

Par le lemme 2.1

$$(1) \quad \exists b = \forall(b \to \forall b) \to \forall b.$$

Comme $\forall a \leq a \leq b$, $\forall a \leq \forall b$, alors $b, \forall b \in [\forall a)$, alors d'après le corollaire 1.1, iii) on a:

$$(2) \quad b \to \forall b = (b \to \forall a) \vee \forall b.$$

De (1), (2) et U7):

$$(3) \quad \exists b = \forall((b \to \forall a) \vee \forall b) \to \forall b = (\forall(b \to \forall a) \vee \forall b) \to \forall b.$$

Comme $\forall a \leq b \to \forall a$ alors d'après U9) : $\forall a = \forall\forall a \leq \forall(b \to \forall a) \leq \forall(b \to \forall a) \vee \forall b$, et comme $\forall a \leq \forall b$, alors $\forall b, \forall(b \to \forall a) \vee \forall b \in [\forall a)$ alors d'après le corollaire 1.1, iii)

$$\exists b = (\forall(b \to \forall a) \vee \forall b) \to \forall a) \vee \forall b$$

et comme $\forall(b \to \forall a), \forall b \in [\forall a)$ d'après le corollaire 1.1, (iv)

$$\exists b = (((\forall(b \to \forall a) \to \forall a) \wedge (\forall b \to \forall a)) \vee \forall b$$

et comme $(\forall(b \to \forall a) \to \forall a, \forall b \to \forall a, \forall b$ sont des éléments de l'algèbre de Boole $[\forall a)$ on a:

$$\exists b = (\forall(b \to \forall a) \to \forall a) \wedge \forall b) \wedge ((\forall b \to \forall a) \vee \forall b)$$

Mais par T19) $(\forall b \to \forall a) \vee \forall b = 1$, donc

$$\exists b = (\forall(b \to \forall a) \to \forall a) \geq (\forall(b \to \forall a) \to \forall a)$$

et d'après (i) on a finalement

$$\exists b \geq \forall(a \to \forall a) \to \forall a = \exists a.$$

E4) En effet de $a \leq \exists a$ et $b \leq \exists b$ il résulte $a \vee b \leq \exists a \vee \exists b$ alors d'après E3) $\exists(a \vee b) \leq \exists(\exists a \vee \exists b)$. Comme $\exists a, \exists b \in K$ alors $\exists a \vee \exists b \in K$ c'est-à-dire $\exists(\exists a \vee \exists b) = \exists a \vee \exists b$. Donc on a $\exists(a \vee b) \leq \exists a \vee \exists b$. Inversement de $a \leq a \vee b$ et $b \leq a \vee b$ on déduit $\exists b \leq \exists(a \vee b)$ et $\exists a \leq \exists(a \vee b)$, donc $\exists a \vee \exists b \leq \exists(a \vee b)$. De (iii) et (iv) on déduit E4).

E5) Come $\forall a \leq a$ et $b \leq \exists b$ nous avons $a \to \exists b \leq \forall a \to \exists b$ et $a \to b \leq a \to \exists b$, donc $a \to b \leq \forall a \to \exists b$, d'où:
(v) $\exists(a \to b) \leq \exists(\forall a \to \exists b) = \forall a \to \exists b$.
Inversement de $b \leq a \to b$ on déduit $\exists b \leq \exists(a \to b)$ en outre $\exists b \leq \forall a \to \exists b$ donc $(\forall a \to \exists b) \to \exists(a \to b) = (\forall a \to \exists b) \to \exists b \vee \exists(a \to b)$, mais $a \vee (a \to b) = 1$ donc $a \vee \exists(a \to b) = 1$ et alors $\forall(a \vee \exists(a \to b)) = \forall a \vee \exists(a \to b) = 1$, d'où $(\forall a \to \exists b) \to \exists(a \to b) = 1$ c'est-'a-dire (vi) $\forall a \to \exists b \leq \exists(a \to b)$. De (v) et (vi) on déduit E5).

E6) $\exists(\forall a) = \forall(\forall a \to \forall\forall a) \to \forall a = \forall(\forall a \to \forall a) \to \forall a = \forall 1 \to \forall a = 1 \to \forall a = \forall a$.

E6) En remplaçant b par $\forall a$ dans E5) et en tenant compte de E6), nous avons $\exists(a \to \forall a) = \forall a \to \exists(\forall a) = \forall a \to \forall a = 1$.

$\square$

3 Systèmes déductifs

Définition 3.1 *Nous dirons qu'un sous-ensemble D d'une algèbre de Tarski A, est un système déductif (s.d.), si:*

D1) $1 \in D$,

D2) Si $a \in D$ et $a \to b \in D$ alors $b \in D$, (modus ponens).

Si $D \neq A$ nous dirons que D est un système déductif propre.

Si $H \subseteq A$, soit $D(H)$ l'intersection de tous les systèmes déductifs qui contient H. Il est claire que $D(H)$ est un système déductif, qui contient H et que $D(H)$ est le plus petit système déductif qui contient H. Si $H = \emptyset$ alors $D(\emptyset) = \{1\}$. Si $H = \{a\}$, nous notérons $D(a)$ au lieu de $D(\{a\})$.

Lemme 3.1 $D(a) = \{x \in A : a \to x = 1\} = [a)$.

Lemme 3.2 *Si $H \neq \emptyset$ alors:*

$$D(H) = \{x \in A : h_1 \to (h_2 \to (\ldots \to (h_n \to x)\ldots)) = 1, \text{ oú } h_i \in H, 1 \leq i \leq n\}.$$

Si C est un systéme déductif, nous notérons $D(C, a)$ au lieu de $D(C \cup \{a\})$.

Lemme 3.3 *Si C est un système déductif alors $D(C, a) = \{x \in A : a \to x \in C\}$.*

Lemme 3.4 *Si C est un système déductif alors $D(C \cup \{a, b\}) = D(D(C, a), b) = \{x \in A : b \to x \in D(C, a)\} = \{x \in A : a \to (b \to x) \in C\}$.*

Soit $\mathbf{D} = \mathbf{D}(A)$ la famille de tous les systèmes déducifs propres, d'une algèbre de Tarski A. Il est claire que $(\mathbf{D}, \subseteq)$ est un ensemble inductif supérieurement. A chaque élément maximal de cet ensemble ordonné nous dénominerons systéme déductif maximal (s. d. maximal). Alors tout systéme déductif propre de A est contenu dans un système déductif maximal. Nous notérons par $\mathbf{E} = \mathbf{E}(A)$ la famille de tous les s.d. maximales de A.

Lemme 3.5 *Un système déductif propre U est maximal si et seulement si "Si $a, b \notin U$ alors $a \to b \in U$".*

Dem. Soit U un s. d. maximal de A et $a, b \notin U$ alors $D(U, a) = A = D(U, b)$, et comme $b \in D(U, b) = D(U, a)$ d'aprés le lemme 3.3, $a \to b \in U$.
Supposons maintenat que U est un s.d. propre de A qui vérifiee *"Si $a, b \notin U$ alors $a \to b \in U$."*, et qu'il existe un s.d. propre M de A tel que (1) $U \subset M$. Soient $b \in A - M$ et (2) $a \in M - U$. Alors $a, b \notin U$ donc d'après l'hypothèse (3) $a \to b \in U$. De (3) et (1): $a \to b \in M$ et comme $a \in M$ on déduit $b \in M$, contradiction. □

Lemme 3.6 *Si D est un s.d. propre d'une algèbre de Tarski et $x \notin D$ il existe un s.d. maximal U telque $D \subseteq U$ et $x \notin U$.*

Dem. Soit $\mathcal{F}$ la famille de tous les s. d. F tels que $D \subseteq F$ et $x \notin F$. Il est facile a montrer que $\mathcal{F}$ est inductive supérieurement. Si U est un élément maximal de $\mathcal{F}$, alors U vérifie les conditions du lemme. □

Définition 3.2 *Nous dirons qu'un sous-ensemble D d'une algèbre de Tarski monadique A, est un système déductif monadique (s .d. monadique), si:*

D3) D est un système déductif.

D2) Si $a \in D$ alors $\forall a \in D$.

Si $D \neq A$ nous dirons que D est un système déductif monadique propre.

Lemme 3.7 *Si A est une algèbre de Tarski monadique alors:*

1) *$D(\forall a)$ est un s. d. monadique.*

2) *$D(a)$ est un système déductif monadique si et seulement si $a \in K(A)$.*

Soit $\mathbf{F} = \mathbf{F}(A)$ la famille de tous les systèmes déducifs monadiques propres, d'une algèbre de Tarski monadique A. Il est claire que $(\mathbf{F}, \subseteq)$ est un ensemble inductif supérieurement. A chaque élément maximal de cet ensemble ordonné nous dénominerons systéme déductif ultramonadique ou système déductif monadique maximal (s. d. m. maximal). Alors tout système déductif monadique propre de A est contenu dans un système déductif monadique maximal. Nous notérons par $\mathbf{M} = \mathbf{M}(A)$ la famille de tous les s.d. monadiques maximales de A.

Lemme 3.8 *Si A est une algèbre de Tarski monadique alors:*

P1) Si D est un s.d. de A alors $\exists D = \{\exists d : d \in D\}$ est un s.d. de l'algèbre de Tarski $K = K(A)$, et $\exists D = D \cap K$.

P2) Si D est un s. d. propre de A alors $\exists D$ est un s. d. propre de K.

P3) Si D' est un s.d. de K alors $D(D')$ est un s.d. monadique, et si D' est propre alors $D(D')$ est un s. d. propre de A.

P4) Si U est un s.d. maximal de A alors $D(\exists U)$ est un s.d. monadique maximal de A.

P5) Si M est un s.d. monadique maximal de A alors $M = D(\exists M)$.

P6) Si M est un s.d. monadique maximal de A il existe un s.d. maximal U de A tel que $M \subseteq U$ et $M = D(\exists U)$.

P7) Si U est un s.d. maximal de A, il existe un unique s.d. monadique maximal M tel que $M \subseteq U$, plus précisement $M = D(\exists U)$.

Dem.

P1) (i) $\exists D \subseteq K$. Comme par l'observation 2.1, 2) $\exists a \in K$ quelque soit $a \in A$, alors il est évident que (i) est vérifiée.
(ii) $\exists D = D \cap K$. Soit $t \in \exists D$, alors $t = \exists d$ où $d \in D$ et $t \in K$, alors $t = \exists d \in D$, donc $t \in D \cap K$. Si $t \in D \cap K$ alors $t \in D$ et $t \in K$, donc $\exists t \in \exists D$ et $\exists t = t$ donc $t \in \exists D$.
(iii) $\exists D$ est un système déductif de K. En effet, comme $1 \in D$ alors $1 = \exists 1 \in \exists D$. Soient $x, x \to y \in \exists D$, où $x, y \in K$. Alors d'après (ii) $x, x \to y \in D$ et comme D est un s. d., $y \in D$, donc $\exists y \in D$, et comme $y \in K$ on a finalement que $y = \exists y \in \exists D$.

P2) Supposons que $\exists D = K = \forall A$, donc si $t \in A$, alors $\forall t \in \forall A = \exists D$, donc $\forall t = \exists d$ où $d \in D$, alors $\exists d \in D$. Comme $\exists d \to t = \forall t \to t = 1 \in D$ et $\exists d \in D$ on a $t \in D$ et alors $A \subseteq D$, donc $D = A$, contradiction.

P3) Soit $x \in D(D')$ alors par le lemme 3.2 :

$$h_1 \to (h_2 \to (\ldots \to (h_n \to x)\ldots)) = 1, \quad \text{oú } h_i \in D', 1 \leq i \leq n.$$

Donc

$$\forall [h_1 \to (h_2 \to (\ldots \to (h_n \to x)\ldots))] = \forall 1 = 1$$

et d'après U6)

$$1 \leq \forall h_1 \to (\forall h_2 \to (\ldots \to (\forall h_n \to \forall x)\ldots))$$

et comme $D' \subseteq K$, $\forall h_i = h_i$, $\ 1 \leq i \leq n$, alors

$$h_1 \to (h_2 \to (\ldots \to (h_n \to \forall x)\ldots)) = 1$$

donc $\forall x \in D(D')$.
Si $D(D') = A$ alors quelque soit $k \in K \subseteq A$ on a $k \in D(D')$, donc

$$h_1 \to (h_2 \to (\ldots \to (h_n \to k)\ldots)) = 1, \text{ oú } h_i \in D', 1 \leq i \leq n.$$

et alors

$$h_1 \to (h_2 \to (\ldots \to (h_n \to k)\ldots)) = 1 \in D'$$

Comme $h_1, h_2, h_3, \ldots h_n \in D'$, on a d'après l'application de n fois le *modus ponens*, que $k \in D'$, donc $D' = K$.

P4) Comme U est un s. d. propre de A alors par P1) et P2) $\exists U$ est un s. d. propre de K, donc par P3) $D(\exists U)$ est un s. d. propre de A. Supposons qu'il existe un s. d. monadique M_1 de A tel que $M = D(\exists U) \subset M_1$ et soit $x \in M_1 - M$. Comme $x \in M_1$ et M_1 est un s.d. monadique alors (i) $m_1 = \forall x \in M_1$. On a encore que $m_1 \to x = \forall x \to x = 1 \in M$, alors si $m_1 \in M$ on a que $x \in M$, contradiction. Donc $m_1 \notin M$. Si (ii) $m_1 \in U$ alors $\exists m_1 \in \exists U$, mais d'après (i) $m_1 \in K$, c'est-à-dire $\exists m_1 = m_1$, donc $m_1 \in \exists U$ et comme $\exists U \subseteq D(\exists U) = M$ on a $m_1 \in M$, contradiction, donc $m_1 \notin U$.
Comme M_1 est propre il existe $m_2 \in A - M_1$ et alors $\forall m_2 \notin M_1$, donc $\forall m_2 \notin U$, car si $\forall m_2 \in U$ alors $\forall m_2 = \exists \forall m_2 \in \exists U \subseteq D(\exists U) = M \subset M_1$, donc $\forall m_2 \in M_1$ et par consequent $m_2 \in U$, contradiction.
Comme $m_1, \forall m_2 \notin U$, et U est un s. d. maximal, alors d'après le lemme 3.5 $m_1 \to \forall m_2 \in U$, alors $\forall x \to \forall m_2 = \forall m_1 \to \forall m_2 = \exists(m_1 \to \forall m_2) \in \exists U \subset M_1$ et comme $\forall x \in M_1$ on a $\forall m_2 \in M_1$ et par conséquent $m_2 \in M_1$, contradiction.

P5) Comme M est en particulier un s. d. propre de A, d'après P1) et P2) $\exists M$ est un s.d. propre de K. Par P1) on a que $\exists M \subseteq M$, alors $D(\exists M) \subseteq D(M) = M$. Soit $m \in M$, comme M est monadique $\forall m \in M$ et alors $\forall m = \exists \forall m \in \exists M \subseteq D(\exists M)$, et comme $\forall m \leq m$ alors $m \in D(\exists M)$.

P6) Comme M est en particulier un s. d. propre, il existe un s.d. maximal U tel que (1) $M \subseteq U$, donc $\exists M \subseteq \exists U$ et alors (2) $D(\exists M) \subseteq D(\exists U)$. Par P4) nous savons que $D(\exists U)$ est un s. d. monadique maximal de A. Par P5) $D(\exists M) = M$, alors d'après (2) $M \subseteq D(\exists U)$ et comme M et $D(\exists U)$ sont des s.d. monadiques maximales $M = D(\exists U)$.

P7) Soit U un s.d. maximal de A, alors par P4), $M = D(\exists U)$ est un s.d. monadique maximal de A. Comme $\exists U \subseteq U$ alors $M = D(\exists U) \subseteq D(U) = U$. Soit M_1 un s.d. monadique maximal tel que $M_1 \subseteq U$ alors en tenant compte de P5), $M_1 = D(\exists M_1) \subseteq D(\exists U) = M$ donc $M_1 = M$.

□

Lemme 3.9 *Soit A une algèbre de Tarski monadique et D un s.d. monadique de A, alors la relation $x \equiv y$ si et seulement si $x \to y$, $y \to x \in D$, est une congruence définie sur A.*

Définition 3.3 *Si A y A', sont des algèbres de Tarski monadiques, un homomorphisme de A en A' est une application $h : A \longrightarrow A'$ qui vérifie:*

H1) $h(x \to y) = h(x) \to h(y)$.

H2) $h(\forall x) = \forall h(x)$.

Si h est suryective (inyective), nous dirons que h est epimorphisme (monomorphisme). Si h est un epimorphisme et un monomorphisme, nous dirons que h est un isomorphisme, et notarerons $A \cong A'$.
Si $h : A \longrightarrow A'$ est un epimorphisme nous dirons que A' est une image homomorphique de A.
Si A est une algèbre de Tarski monadique, et D un s.d. monadique de A et $a \in A$, nous notérons $|a|_D$ ou $|a|$ la classe d'equivalence module D qui contient a, c'est-à-dire $|a| = \{x \in A : x \equiv y\}$ et nous notérons A/D l'ensemble de toutes les classes d'equivalence module D, algebrisés de la façon suivante:

1) $|x| \to |y| = |x \to y|$.

2) $|\forall x| = \forall |x|$.

Alors il est facile à voir que A/D est une algèbre de Tarski monadique, tel que $|1| = D$ est le dernier élément et que l'application $\alpha(a) = |a|$ de A dans A/D est un homomorphisme qui vérifie $\alpha(A) = A/D$. L'algèbre A/D s'appelle algèbre quotient de A par D.

4 Représentation d'une algèbre de Tarski monadique par une algèbre de Tarski monadique d'ensembles

Soit E un ensemble, non vide, et 2^E la famillie de toutes les parties de E. Nous savons que si nous posons:

$$X \to Y = \mathcal{C}X \cup Y, \quad \text{oú} \quad X, Y \in 2^E$$

alors $(2^E, \to, E)$ est une algèbre de Tarski (d'ensembles), plus précisement est une algèbre de Boole.

Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$ une partition de l'ensemble E.

$$\text{Si } X \subseteq E \text{ posons } \forall X = \bigcup \{P \in \mathcal{P} : P \subseteq X\},$$

alors il est claire, d'après la définition de l'opérateur $\forall$, que:

1) Si $X = \bigcup \{P_j : j \in J \subseteq I\}$, où $J \neq \emptyset$ alors $\forall X = X$.

2) Si $J = \emptyset$ alors $\forall X = \emptyset$, en particulier $\forall \emptyset = \emptyset$.

3) $\forall E = E$, (axiome U1).

4) $\forall X \subseteq X$, (axiome U2).

Encore nous avons:

5) $\forall\forall X = \forall X$.
Si $\forall X = \emptyset$ alors d'après 2), $\forall\forall X = \forall\emptyset = \emptyset = \forall X$. Si $\forall X \neq \emptyset$ alors d'après 1), et la définition de $\forall$, on a $\forall\forall X = \forall X$.

6) $\forall\mathcal{C}\forall X = \mathcal{C}\forall X$.
Si $\forall X = \emptyset$ alors $\forall\mathcal{C}\forall X = \forall\mathcal{C}\emptyset = \forall E = E = \mathcal{C}\emptyset = \mathcal{C}\forall X$.
Si $\forall X \neq \emptyset$, alors: Premier Cas) $\forall X = E$, c'est-à-dire $X = E$, alors $\forall\mathcal{C}\forall X = \forall\mathcal{C}E = \forall\emptyset = \emptyset = \mathcal{C}E = \mathcal{C}\forall X$. Deuxiéme cas) $\forall X \neq E$, alors $\forall X = \bigcup\{P_j \in \mathcal{P} : P_j \subseteq X, j \in J \subset I\}$, où $J \neq \emptyset$, donc comme $\mathcal{P}$ est une partition de E, $\mathcal{C}\forall X = \bigcup\{P_k \in \mathcal{P} : k \in I - J\}$, alors d'après 1) on a $\forall\mathcal{C}\forall X = \mathcal{C}\forall X$.

7) Si $X, Y \subseteq E$ et $X \subseteq Y$ alors $\forall X \subseteq \forall Y$.
Si $\forall X = \emptyset$ alors il est claire que $\forall X \subseteq \forall Y$. Si $\forall X \neq \emptyset$ soit $t \in \forall X$ alors $t \in P$, $P \in \mathcal{P}$, $P \subseteq X$, et comme $X \subseteq Y$ alors on a $t \in P$, $P \in \mathcal{P}$, $P \subseteq Y$, donc $t \in \forall Y$.

8) $\forall(\forall X \cup \forall Y) = \forall X \cup \forall Y$.
Si $\forall X \cup \forall Y = \emptyset$ alors $\forall(\forall X \cup \forall Y) = \emptyset = \forall X \cup \forall Y$.
Si $\forall X \cup \forall Y \neq \emptyset$ alors $\forall X \neq \emptyset$ or $\forall Y \neq \emptyset$ alors $\forall X \cup \forall Y$ est la reunion d'ensembles de la partition $\mathcal{P}$, et d'après 1) on a: $\forall(\forall X \cup \forall Y) = \forall X \cup \forall Y$.

9) $\forall(X \cup \forall Y) = \forall X \cup \forall Y$, (axiome U3)
$\forall X \cup \forall Y \subseteq X \cup \forall Y$ donc d'après 7) $\forall(\forall X \cup \forall Y) \subseteq \forall(X \cup \forall Y)$. Mais par 8) $\forall(\forall X \cup \forall Y) = \forall X \cup \forall Y$. Donc $\forall X \cup \forall Y \subseteq \forall(X \cup \forall Y)$. Montrons que $\forall(X \cup \forall Y) \subseteq \forall X \cup \forall Y$. Si $\forall Y = \emptyset$ alors $\forall(X \cup \forall Y) = \forall(\forall X \cup \emptyset) = \forall\forall X = \forall X = \forall X \cup \emptyset = \forall X \cup \forall Y$.
Si $\forall Y \neq \emptyset$ alors $\forall Y \subseteq X \cup \forall Y$, donc d'après 5) et 7) $\forall Y = \forall\forall Y \subseteq \forall(X \cup \forall Y)$, et alors $\forall(X \cup \forall Y) \neq \emptyset$, donc $\forall Y = \bigcup\{P_j \in \mathcal{P} : j \in J\}$ où $P_j \subset Y, J \subseteq I, J \neq \emptyset$.
Soit $t \in \forall(X \cup \forall Y)$, alors $t \in P$ où $P \subseteq X \cup \forall Y$.
Si $P = P_j$, où $j \in J$ alors $P \subseteq \forall Y$, donc $t \in \forall X \cup \forall Y$.
Si $P \neq P_j$ pour tout $j \in J$ alors $P \cap P_j = \emptyset$ pour tout $j \in J$, alors de $P \subseteq X \cup \forall Y$, on a $P = P \cap (X \cup \forall Y) = (P \cap X) \cup (P \cap \forall Y) = (P \cap X) \cup \bigcup\{P \cap P_j : j \in J\} = P \cap X$, c'est-à-dire $P \subseteq X$ et alors $P \subseteq \forall X$. Comme $t \in P$ alors $t \in \forall X \subseteq \forall X \cup \forall Y$.

10) $\forall(\mathcal{C}X \cup Y) \subseteq \mathcal{C}\forall X \cup \forall Y$, (axiome U4)
Comme $\forall X \subseteq X$, alors $\mathcal{C}X \subseteq \mathcal{C}\forall X$, alors $\mathcal{C}X \cup Y \subseteq \mathcal{C}\forall X \cup Y$, et d'après 7) $\forall(\mathcal{C}X \cup Y) \subseteq \forall(\mathcal{C}\forall X \cup Y)$, et comme $\mathcal{C}\forall X = \forall\mathcal{C}\forall X$, d'après 8) nous avons $\forall(\mathcal{C}\forall X \cup Y) = \forall(\forall\mathcal{C}\forall X \cup Y) = \forall\mathcal{C}\forall X \cup \forall Y = \mathcal{C}\forall X \cup \forall Y$.

Nous avons ainsi montre que $(2^E, \rightarrow, E, \forall)$ est une algèbre de Tarski monadique (voir [6]). Toute sous-algèbre de Tarski monadique de cette algèbre sera dite une algèbre de Tarski monadique d'ensembles.

Soit T une algèbre de Tarski monadique. Nous pouvons laisser de côté le cas trivial où T a un seul élément. Si $D \in \mathbf{D} = \mathbf{D}(T)$, soit $\varphi(D)$ la famille de tous les systèmes déductifs maximaux de T qui contiennent D, c'est-à-dire:

$$\varphi(D) = \{U \in \mathbf{E} = \mathbf{E}(T) : D \subseteq U\}$$

Si D est propre la famille $\varphi(D)$ n'est pas vide, parceque tout système déductif propre est contennu dans un système déductif maximal. Si $D = T$ alors $\varphi(D) = \varphi(T) = \emptyset$. Observons que si $a \in T$ alors $\{U \in \mathbf{E} : D(a) \subseteq U\} = \{U' \in \mathbf{E} : a \in U'\}$.
Si $a \in T$ posons $\Phi(a) = \varphi(D(a))$, alors en particulier $\Phi(1) = \varphi(\{1\}) = \mathbf{E}$.
Soit $\mathcal{P}(A) = 2^{\mathbf{E}}$ la famille de toutes les parties de $\mathbf{E}$, qui est une algèbre de Tarski quand on définit l'opération d'implication par la formule:

$$X \to Y = \mathcal{C}X \cup Y, \qquad X, Y \in 2^{\mathbf{E}},$$

où $\mathcal{C}X$ répresente le complément de l'ensemble X par rapport a l'ensemble $\mathbf{E}$. Nous allons montrer que Φ est un isomorphisme de l'algèbre de Tarski T sur une sous-algèbre de Tarski T' de $2^{\mathbf{E}}$, c'est-à-dire que Φ est biunivoque et $\Phi(a \to b) = \Phi(a) \to \Phi(b)$, quelques soient $a, b \in T$.

1) $\Phi(a \to b) = \Phi(a) \to \Phi(b)$, quelques soient $a, b \in T$.
   En effet soit $U \in \Phi(a \to b)$, alors $U \in \mathbf{E}$ et (1) $a \to b \in U$. Si $U \notin \mathcal{C}\Phi(a)$, c'est-à-dire $U \in \Phi(a)$, alors (2) $a \in U$. De (1) et (2) on déduit que $b \in U$, et par conséquant $U \in \Phi(b)$ donc $\Phi(a \to b) \subseteq \mathcal{C}\Phi(a) \cup \Phi(b) = \Phi(a) \to \Phi(b)$.
   Soit $U \in \Phi(a) \to \Phi(b) = \mathcal{C}\Phi(a) \cup \Phi(b)$. Si $U \in \Phi(b)$ c'est-à-dire $b \in U$, alors comme $b \leq a \to b$ on a: $a \to b \in U$, donc $U \in \Phi(a \to b)$.
   Supposons maintenant que $U \notin \Phi(b)$ alors $U \in \mathcal{C}\Phi(a)$, donc $b \notin U$ et $U \notin \Phi(a)$, c'est-̀-dire $a \notin U$. Comme U est un s.d. maximal et $a, b \notin U$ alors d'après le lemme 3.5, $a \to b \in U$, donc $U \in \Phi(a \to b)$, c'est-à-dire $\Phi(a) \to \Phi(b) \subseteq \Phi(a \to b)$.

2) Si $a, b \in T$ et $a \neq b$ alors $\Phi(a) \neq \Phi(b)$.
   Comme $a \neq b$, il existe $U \in \mathbf{E}$ tel que $a \in U$ et $b \notin U$, donc $\Phi(a) \neq \Phi(b)$.

Nous avons ainsi démontré que l'algèbre de Tarski T est isomorphe à l'algèbre de Tarski $T' = \Phi(T)$.

Nous devons maintenant définir une partition de l'ensemble $\mathbf{E}$ qui nous permettre définir un opérateur $\forall$ sur $2^{\mathbf{E}}$ et construire une algèbre de Tarski monadique d'ensembles. Soit $\mathbf{M} = \mathbf{M}(T)$. Remarquons tout d'abord que:

1) $\varphi(M) \neq \emptyset$, quelque soit $M \in \mathbf{M}$.
   En effet comme $M \in \mathbf{M}$, alors en particulier M est un système déductif propre, alors par le lemme 3.8, P6) $M \subseteq U$, où $U \in \mathbf{E}$, c'est-à-dire $U \in \varphi(M)$.

2) Si $M_1, M_2 \in \mathbf{M}$, $M_1 \neq M_2$ alors $\varphi(M_1) \cap \varphi(M_2) = \emptyset$.
   D'après le lemme 3.8, P7) chaque système déductive maximal de T contient un seule système déductif monadique maximal.

3) $\mathbf{E} = \bigcup\{\varphi(M) : M \in \mathbf{M}\}$.
Si $U \in \mathbf{E}$, d'après le lemme 3.8, P7) il existe un unique $M \in \mathbf{M}$ tel que $M \subseteq U$, donc $U \in \varphi(M)$. En outre il est clair que $\varphi(M)$ est unique.

Nous avons ainsi démontré que la famille $\{\varphi(M)\}_{M\in\mathbf{M}}$ est une partition de l'ensemble $\mathbf{E}$. Donc si nous définissons pour toutes les parties de $\mathbf{E}$ un opérateur de la façon suivante:

$$\text{Si } \ X \subseteq \mathbf{E}, \ \ \textit{alors} \ \ \forall X = \bigcup\{\varphi(M) : \varphi(M) \subseteq X\}.$$

nous savons que $(2^{\mathbf{E}}, \to, \mathbf{E}, \forall)$ est une algèbre de Tarski monadique.
Nous allons montrer que l'algèbre de Tarski monadique T est isomorphe a une sous-algèbre de Tarski monadique de l'algèbre de Tarski monadique $2^{\mathbf{E}}$.

Lemme 4.1 *Si* $k \in K = K(T)$ *alors* $\Phi(k) = \forall\Phi(k)$.

Dem. Nous savons que (i) $\forall\Phi(k) \subseteq \Phi(k)$. Soit $U \in \Phi(k) = \varphi(D(k))$, alors (1) $D(k) \subseteq U$ et (2) $U \in \mathbf{E}$. De (1) on déduit $k \in U$ et comme $k \in K$ on a: (3) $k = \exists k \in \exists U \subseteq D(\exists U)$. Mais comme U est un s. d. maximal, par le lemme 3.8 , P7) il existe un unique s.d. monadique maximal M tel que (4) $M \subseteq U$, plus précisement $M = D(\exists U)$. De (4) on déduit que (5) $U \in \varphi(M)$.
Voyons que (6) $\varphi(M) \subseteq \varphi(D(k))$. Soit $U' \in \varphi(M)$ alors (7) $D(\exists U) = M \subseteq U'$ et $U' \in \mathbf{E}$. De (3) et (7) on a $k \in U'$ donc $D(k) \subseteq U'$ et comme $U' \in \mathbf{E}$ on a $U' \in \varphi(D(k))$. De (5) et (6) on a finalement $U \in \forall\Phi(k) = \{\varphi(M') : \varphi(M') \subseteq \Phi(k) = \varphi(D(k))\}$. □

Lemme 4.2 *Si* $x \in T$ *alors* $\Phi(\forall x) = \forall\Phi(x)$.

Dem. De $\forall x \leq x$ on déduit $\Phi(\forall x) \subseteq \Phi(x)$, comme $\forall x \in K$, et $\forall$ est monotone, d'après 4.1, $\Phi(\forall x) = \forall\Phi(\forall x) \subseteq \forall\Phi(x)$.
Soit $U \in \forall\Phi(x)$ alors $U \in \varphi(M)$, où $M \in \mathbf{M}$ et (1) $\varphi(M) \subseteq \Phi(x) = \varphi(D(x))$. Montrons que (2) $x \in M$. En effet si $x \notin M$, par le lemme 3.6 il existe un s.d. maximal W tel que (3) $M \subseteq W$ et $x \notin W$, alors $D(x) \not\subseteq W$ et par conséquent (4) $W \notin \varphi(D(x))$. (3) et (4) sont en contradiction avec (1). Comme M est un s. d. monadique, de (2) on déduit que $\forall x \in M$, donc $D(\forall x) \subseteq D(M) = M \subseteq U$ et alors $U \in \Phi(\forall x)$. □

Nous avons ainsi demontré que $(T, \to, 1, \forall)$ et $(T' = \Phi(T), \to, \mathbf{E}, \forall)$ sont des algèbres de Tarski monadiques isomorphes.

5 Représentation functionelle des algèbres de Tarski monadiques

Soit $\mathcal{I}$ un ensemble non vide et T une algèbre de Boole complète. Considérons l'ensemble $T^{\mathcal{I}}$ de toutes les applications de $\mathcal{I}$ dans T. Prenons sur $T^{\mathcal{I}}$ l'opération $\to$ définie coordonné par coordonné et l'application $\forall$ au moyen de l'égalité (ou $f \in T^{\mathcal{I}}$) :

$$(\forall f)(x) = \bigwedge_{x\in\mathcal{I}} f(x), \quad \textit{pourtout} \ \ x \in \mathcal{I}.$$

Le système $(T^{\mathcal{I}}, \to, \forall)$ est une algèbre de Tarski monadique. Toute sous-algèbremonadique de cette algèbresera dite une *algèbre de Tarski functionnelle monadique.*
Une algébre de Tarski functionnelle monadique $\mathcal{A}$ est dite *riche* si pour chaque fonction $f \in \mathcal{A}$ il existe un point $x_0 \in \mathcal{I}$ tel que $f(x_0) = \bigwedge_{x \in \mathcal{I}} f(x)$.

Nous savons, d'après la définition que si D est un système déductif alors la constant 1 appartient a D.

Définition 5.1 *Un s.d. D propre d'une algèbre de Tarski monadique A s'appelle* libre *si $D \cap K(A) = \{1\}$, c'est-à-dire si l'unique constant qui appartient a D est l'élément* 1.

Lemme 5.1 *Pour qu'un système déductif D, propre, de A soit libre il faut et il suffit que: (I) "si $d \in D$ alors $\exists d = 1$.*

Dem. Si le système déductif propre D est libre alors si $d \in D$, on a $d \leq \exists d = 1$. Reciproquement si D est un système déductif propre qui vérifie la condition (I) alors si $k \in K \cap D$, alors $k = \exists k = 1$, donc D est libre. □

Soit $\mathbf{l} = \mathbf{l}(A)$ la famille de tous les systèmes déducifs libres, d'une algèbre de Tarski monadique A. Il est claire que $(\mathbf{l}(A), \subseteq)$ est un ensemble inductif supérieurement. A chaque élément maximal de cet ensemble ordonné nous dénominerons ultralibre (système déductif libre maximal). Alors tout système déductif libre de A est contenu dans un ultralibre. Nous notérons par $\mathbf{L} = \mathbf{L}(A)$ la famille de tous les systèmes déductifs libres maximales de A.

Définition 5.2 *Soit A une algèbre de Tarski monadique et j un homomorphisme de l'algèbre de Tarski A dans l'algèbre de Tarski $K = K(A)$, tel que $j(k) = k$ pour tout $k \in K$. Cet homomorphisme j s'appelle un caractère de l'algèbre A.*

Exemple 5.1 *Soit j un caractère de l'algèbre de Tarski monadique A et D sont noyau, c'est-à-dire $D = \{x \in A : j(x) = 1\}$. Voyons que D est un s.d. libre maximal de A. Comme D est le noyau de l'homomorphisme j, alors D est un système déductif. En outre si $x \in D \cap K(A)$ alors $j(x) = 1$ et $j(x) = x$, car $x \in K$, donc $x = 1$. Si D n'est pas un s.d. libre maximal alors il existe un s.d. libre maximal D' tel que $D \subset D'$. Soit $t \in D' - D$. Comme $t \notin D$ $1 \neq j(t) = k \in K$, et $j(k) = k$, donc $t \to k \in D \subset D'$. Alors on a $t, t \to k \in D'$, d'où l'on déduit $k \in D'$ et comme D' est un s. d. libre $\exists k = 1$, mais $k \in K$ donc $\exists k = k$, et alors $k = 1$, contradiction.*

Lemme 5.2 *Si A est une algèbre de Tarski monadique, avec plus d'un élément et D est un s. d. libre alors D est propre.*

Dem. Si $D = A$ alors $\exists x = 1$ quelque soit $x \in A$, donc $1 = \exists \forall x$ quelque soit $x \in A$, et comme $\exists \forall x = \forall x \leq x$ alors $x = 1$. Cela montre que A a un seule élément, contradiction. □

Lemme 5.3 *Si A est une algèbre de Tarski monadique, avec plus d'un élément et a est un élément libre alors $D(a)$ est un s. d. libre.*

Dem. Nous savons que $D(a) = \{x \in A : a \to x = 1\}$, alors si $x \in D(a)$ c'est-à-dire $a \to x = 1$, donc $a \leq x$ et alors $1 = \exists a \leq \exists x$ donc $\exists x = 1$, alors $D(a)$ est un s. d. libre. □

Lemme 5.4 *Si A est une algèbre de Tarski monadique, avec plus d'un élément et $a \neq 1$ alors il existe un s. d. libre maximal J tel que $a \notin J$.*

Dem. Soit $b = a \to \forall a$, nous savons d'après le lemme 2.4, E6) que a $\exists b = 1$ c'est-à-dire b est libre et d'après le lemme 5.3 $D(b)$ est libre. Soit J un s. d. libre maximal tel que $D(b) \subseteq J$, alors si $a \in J$, comme $a \to \forall a \in D(b) \subseteq J$ on déduit que $\forall a \in J$ et comme J est un s. d. libre $\exists \forall a = 1$ c'est-à-dire $\forall a = 1$ et par conséquant $a = 1$, contradiction. Donc $a \notin J$. □

L'intersection $\mathcal{RL}(A)$ de tous les sytèmes déductifs libres maximaux d'une algèbre de Tarski monadique A s'appelle le *Radical Libre de* A.

Lemme 5.5 *Toute algèbre de Tarski monadique A est librement semi-simple, c'est-à-dire $\mathcal{RL}(A) = \{1\}$.*

Dem. C'est une conséquance inmediate du lemme 5.4. □

Nous allons montrer le théorème suivant:

Théorème 5.1 *Si A est une algèbre de Tarski monadique finie, avec plus d'un élément et J est un s. d. libre maximal il existe un caractère ψ tel que le noyau de ψ est J.*

Lemme 5.6 *Si J est un s. d. libre d'une algèbre de Tarski monadique A, eti $|x|_J \cap K(A) \neq \emptyset$ alors $|x|_J \cap K(A)$ a un seule élément.*

Dem. Soient $k_1, k_2 \in |x|_J \cap K(A)$ donc (1) $k_1, k_2 \in |x|_J$ et (2) $k_1, k_2 \in K(A)$. D'après (1) on a $k_1 \to k_2 \in J$ et $k_2 \to k_1 \in J$. Alors en tenant compte du lemme 2.4, E5) et que J est un s. d. libre on a $\forall k_1 \to \exists k_2 = \exists(k_1 \to k_2) = 1$ et $\forall k_2 \to \exists k_1 = \exists(k_2 \to k_1) = 1$. Alors d'après (2) on a $k_1 \to k_2 = 1$ et $k_2 \to k_1 = 1J$, donc $k_1 = k_2$. □

Lemme 5.7 *Si A est une algèbre de Tarski monadique finie, avec plus d'un élément et J un s. d. libre maximal J alors dans chaque classe d'equivalence module J il existe une constante.*

Dem. Soit C une clase d'equivalence module J. Montrons que:
(1) *Si $b, c \in C$ alors $b \vee c \in C$.*
En effet, comme $c \leq b \vee c$ alors $c \to (b \vee c) = 1 \in J$. D'après T16) $(b \vee c) \to c = b \to c \in J$, donc $c \equiv b \vee c$, et comme $c \in C$ on a : $b \vee c \in C$.

Soit $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ et (2) $c = \bigvee_{i=1}^{n} c_i$, alors d'après (1) nous avons (3) $c \in C$. Nous allons montrer que $\forall c \in C$, c'est-à-dire que $\forall c \equiv c$ (module J). Nous savons que $\forall c \to c = 1 \in J$. Montrons que $c \to \forall c \in J$. Soit $D = D(J, c \to \forall c)$. Alors si $x \in D$ on a (4) $(c \to \forall c) \to x \in J$. Comme J est un s. d. libre et en tenant compte de E5) :

$$(5)\ \ \forall(c \to \forall c) \to \exists x = \exists((c \to \forall c) \to x) = 1.$$

Comme $x \leq \exists x$ on a:

$$(6) \quad (c \to \forall c) \to x \leq (c \to \forall c) \to \exists x,$$

et comme J est un s. d., d'après (4) et (6) on a:

$$(7) \quad (c \to \forall c) \to \exists x \in J.$$

Par T1) nous savons que:

$$(8) \quad (c \to \forall c) \to x \leq \forall c \to ((c \to \forall c) \to x).$$

Comme J est un s. d., de (4) et (8):

$$(9) \quad \forall c \to ((c \to \forall c) \to x) \in J.$$

Mais par T13)

$$(10) \quad \forall c \to ((c \to \forall c) \to x) = (\forall c \to (c \to \forall c)) \to (\forall c \to x)$$

et comme

$$(11) \quad \forall c \to (c \to \forall c) = 1,$$

on a d'après (9), (10) et (11) que:

$$\forall c \to x \in J$$

donc

$$\forall c \to \exists x = \forall\forall c \to \exists x = \exists(\forall c \to x) = 1,$$

c'est-à-dire

$$(12) \quad \forall c \leq \exists x.$$

Nous avons ainsi que $\exists x, c \in [\forall c)$, alors d'après le corollaire 1.1 (iii), et T16)

$$c \to \exists x = (c \to \forall c) \vee \exists x,$$

donc

$$(13) \quad c \vee \exists x = (c \to \exists x) \to \exists x = ((c \to \forall c) \vee \exists x) \to \exists x =$$
$$(((c \to \forall c) \to \exists x) \to \exists x) \to \exists x = (c \to \forall c) \to \exists x.$$

Alors d'après (7) et (13) on a

$$(14) \quad c \vee \exists x \in J.$$

Nous savons que :

$$c \to (j \to c) = 1 \in J \quad \text{et} \quad (j \to c) \to c = j \vee c \in J \quad \text{quelque soit} \quad j \in J$$

alors $j \to c \equiv c$ quelque soit $j \in J$, et comme $c \in C$, on a $j \to c \in C$ quelque soit $j \in J$, alors d'après (2) $j \to c \leq c$ et comme $c \leq j \to c$ on a finalement:

$$(15) \qquad c = j \to c \quad \text{quelque soit} \quad j \in J$$

De (14) et (15), en tenant compte de T16):

$$c = (c \vee \exists x) \to c = (\exists x \vee c) \to c =$$

$$= ((\exists x \to c) \to c) \to c = \exists x \to c.$$

Donc

$$1 = c \to c = (\exists x \to c) \to c = \exists x \vee c.$$

et alors

$$1 = \forall 1 = \exists x \vee \forall c.$$

Comme d'après (12), $\forall c \leq \exists x$ on a finalement $\exists x = 1$. Alors D est un s.d. libre qui contient J. Comme J est un s.d. libre maximal on a $D = J$ et alors $c \to \forall c \in J$, donc $\forall c \equiv c$ (module J) et comme $c \in C$ on a $\forall c \in C$. □

Corollaire 5.1 *Si T est une algèbre de Tarski monadique finie et si J est un s. d. libre maximal, chaque classe d'équivalence, module J contient une constante et une seule.*

Lemme 5.8 *Si T est une algèbre de Tarski monadique finie et D un s. d. tel que chaque classe d'équivalence, module J contient une unique constante alors il existe un caractère j tel que le noyau de j est D et A/D est isomorphe a $K = K(T)$.*

Dem. Soit $T' = T/D$ et j l'homomophisme naturel de T sur T', alors le noyau de j est D. Soit φ la transformation qu'à chaque classe d'équivalence (module J) L fait correspondre l'unique constante de L, c'est-à-dire: si $k \in K$ alors $\varphi(L) = k$. Alors $\varphi : T' \to K$ et il est claire que φ est suryective.
Soient $\varphi(L_1) = k_1$ et $\varphi(L_2) = k_2$, où $k_1, k_2 \in K$, alors $L_1 = |k_1|$, $L_2 = |k_2|$ et $L_1 \to L_2 = |k_1 \to k_2| = |k_1| \to |k_2$. Donc $\varphi(L_1 \to L_2) = |k_1 \to k_2| = \varphi(L_1) \to \varphi(L_2)$.
Si $\varphi(L_1) = \varphi(L_2)$, alors $k_1 = k_2$, c'est-à-dire φ est biunivoque.
Comme la constante qui appartient a D est 1 il est claire que le noyau de φ est D.
Considerons la tranformation $\psi : T \to K$, définie par $\psi(t) = \varphi(j(t))$, où $t \in T$, qui est évidenment un homomorphisme de T sur K. En outre si $k \in K$, $\psi(k) = \varphi(j(k)) = k$, et $\psi^{-1}(1) = j^{-1}(\varphi^{-1}(1)) = j^{-1}(|D|) = D$. □

Des lemmes 5.6, 5.7 et 5.8 on déduit le théorème 5.1.

Définition 5.3 *Un système déductif libre maximal D tel que chaque classe d'équivalence (module D) contiente une unique constante s'appelle un individu.*

D'accord cette définition le lemme 5.8 dit : *Tout individu est noyau d'un caractère.* Nous allons montrer que:

Lemme 5.9 *Si ψ est un caractère d'une algèbre de Tarski monadique alors son noyau est un individu.*

Dem. Soit $D = \psi^{-1}$ le noyau de ψ. Nous savons que D est un s. d. libre maximal. Soit $a \in L$ tel que $\psi(a) = k$, alors comme $\psi(k) = k$ on a $\psi(a) = \psi(k)$, c'est-à-dire $a \equiv k$ (module D) et $k \in K$. Alors chaque classe d'équivalence contient une seule constante, donc D est un individu. $\square$

Pour obtenir une représentation d'une algèbre de Tarski monadique T comme une algèbre fonctionel, nous devons considérer la famille $\mathcal{I}$ de tous les individus de T. Mais en général une algèbre T n'a pas des individus. Supposons maintenat que la famille $\mathcal{I}$ des individus de T est non vide. Pour chaque D soit j le caractère correspondant. Nous allons a représenter chaque él'ement $f \in T$ comme une fonction F de $\mathcal{I}$ dans $K = K(T)$ tel que $F(D) = j(f) \in K$, pour tout D. Soit φ cette représentation. Nous savons que $F \in K^{\mathcal{I}}$, ensemble des fonctions définies sur $\mathcal{I}$ et ayant valeurs dans K. Nous allons montrer que φ est un homomorphisme de T dans $K^{\mathcal{I}}$, c'est-à-dire $\varphi(f \to g) = \varphi(f) \to \varphi(g)$.
En effet soit $h = f \to g$, alors $\varphi(h) = H$, $\varphi(f) = F$ et $\varphi(g) = G$, donc $H(D) = j(h) = j(f \to g) = j(f) \to j(g) = F(D) \to G(D)$ d'où $H = F \to G$ et $\varphi(h) = \varphi(f) \to \varphi(g) = \varphi(f \to g)$.
Soit $T' = \varphi(T) \subseteq K^{\mathcal{I}}$, alors T' est une sous-algèbre de Tarski de l'algèbre de Tarski $K^{\mathcal{I}}$. Nous avons obtenue une représentation homomorphique de T comme une algèbre fonctionnel.

Lemme 5.10 *Si la intersection des éléments de $\mathcal{I}$ est $\{1\}$ alors la transformation φ est biunivoque.*

Dem. Soient $f, g \in T$, $\varphi(f) = F$ et $\varphi(g) = G$. Si $\varphi(f) = \varphi(g)$ c'est-̀dire $F = G$, alors $F(D) = G(D)$, pour tout D et en conséquence $j(f) = j(g)$ c'est-à-dire $f \equiv g$ (module D) donc $f \to g$, $\quad g \to f \in D$, pour tout D, donc $f \to g \in \bigcap\{D : D \in \mathcal{I}\} = \{1\}$ et $g \to f \in \bigcap\{D : D \in \mathcal{I}\} = \{1\}$, donc $f = g$. $\square$

Définition 5.4 *Un sous-ensemble X d'une algèbre de Tarski A sera dite complète supérieurement si $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$, il existe $y = \bigvee\{x : x \in Y\}$ et $y \in X$.*

Théorème 5.2 *Si T est une algèbre de Tarski monadique tel que l'ensemble $K = K(T)$ est complète supérieurement alors tout système déductif libre maximal est un individu.*

Dem. Soit J un s. d. libre maximal. Nous allons montrer que chaque classe d'équivalence C contient une constante. Si $C = J$, le théorème est évident car $1 \in J$. Supposons que $C \neq J$. Soit $C = \{c_i : i \in I\}$, alors par hyphotèse il existe $s = \bigvee\{\forall c_i : i \in I\}$ et $s \in K$.

Soit c un élément de C nous montrerons que $s \equiv c$ module J, et alors $s \in C$. Soit $J' = D(J, \{c \to s, s \to c\})$, nous savons d'après le lemme 3.4 que

$$J' = D(D(J, c \to s), s \to c).$$

Alors si $x \in J'$ on a:

$$(s \to c) \to x \in D(J, c \to s)$$

donc

$$(1) \quad (c \to s) \to ((s \to c) \to x) \in J$$

Comme $x \leq \exists x$, on a

$$(2) \quad (c \to s) \to ((s \to c) \to x) \leq (c \to s) \to ((s \to c) \to \exists x)$$

Comme J est un s. d., de (1) et (2) on déduit:

$$(3) \quad (c \to s) \to ((s \to c) \to \exists x) \in J$$

et comme J est un s. d. libre on a d'après (3)

$$\forall (c \to s) \to (\forall (s \to c) \to \exists x) = \forall (c \to s) \to \exists ((s \to c) \to \exists x) =$$

$$\exists ((c \to s) \to ((s \to c) \to \exists x)) = 1$$

Comme

$$(c \to s) \to ((s \to c) \to x) \leq s \to ((c \to s) \to ((s \to c) \to x)) =$$

$$(s \to (c \to s)) \to (s \to ((s \to c) \to x)).$$

et $s \to (c \to s) = 1$ on a

$$(c \to s) \to ((s \to c) \to x) \leq (s \to ((s \to c) \to x)) =$$

$$(s \to s) \to (s \to c)) \to (s \to x) =$$

$$(s \to c) \to (s \to x) = s \to (c \to x))$$

et alors d'après (1)

$$(4) \quad s \to (c \to x) \in J$$

et comme J est un s. d. libre

$$(5) \quad \forall s \to (\forall c \to \exists x) = \exists (s \to (c \to x)) = 1$$

et comme $s \in K$, c'est-à-dire $\exists s = s$ on a

$$(6) \quad s \to (\forall c \to \exists x) = 1$$

donc

$$(7) \quad s \leq (\forall c \to \exists x)$$

$$
\begin{gathered}
(c \to s) \to ((s \to c) \to x) \leq c \to ((c \to s) \to ((s \to c) \to x)) = \\
(c \to (c \to s)) \to (c \to ((s \to c) \to x)) = \\
((c \to c) \to (c \to s)) \to ((c \to (s \to c)) \to (c \to x)) = \\
(c \to s) \to (c \to x) = c \to (s \to x).
\end{gathered}
$$

Alors d'après (1) on a:

$$c \to (s \to x) \in J$$

Comme $x \leq \exists x$ on a

$$c \to (s \to x) \leq c \to (s \to \exists x)$$

donc

$$c \to (s \to \exists x) \in J$$

et alors comme J est un s. d. libre

$$\forall c \to (\forall s \to \exists x) = \forall c \to (\exists (s \to \exists x)) = \exists (c \to (s \to \exists x)) = 1$$

□

Corollaire 5.2 *Dans une algèbre de Tarski monadique T tel que la famille $K = K(T)$ de toutes les constantes est complète supérieurement dans T le radical individual est égal a $\{1\}$.*

Dem. Il suffit d'observer que l'intersection de tous les systèmes déductifs libre maximal est $\{1\}$, et que dans ce cas tout système déductif libre maximal est un individu. □

Théorème 5.3 *Si T est une algèbre de Tarski monadique tel que la famille $K = K(T)$ de toutes les constantes est complète supérieurement dans T, alors T est isomorphe à une algèbre functionelle riche.*

Dem. Soit $\mathcal{I}$ la famille de tous les individus de T. Si $J \in \mathcal{I}$ soit j le caractère correspondant a J et $\mathcal{A} = K^{\mathcal{I}}$ l'algèbre de Tarski functionelle monadique. A chaque élément $f \in T$ nous le faisons correspondre élément $F \in \mathcal{A}$ définie de la façon suivante:

$$F(J) = j(f) \in K = T/J.$$

Soit φ tel repreésentation, c'est-à-dire $\varphi(f) = F$ Nous savons dj́à que φ est un homomorphisme de Tarski de T dans $\mathcal{A}$. En plus le radical individual est $\{1\}$, alors φ est un isomorphisme de Tarski de T dans $\mathcal{A}$.

Nous allons montrer que $\varphi(\forall f) = \forall \varphi(f)$, quelque soit $f \in T$. En effet de $\forall f \leq f$ on déduit $\varphi(\forall f) \leq \forall \varphi(f)$. Soit $\forall f = g$, alors $G(J) \leq F(J)$, pour tout J, donc $G(J) = j(g) = j(\forall f) = \forall f$, c'est-à-dire $G(J)$ est constant. Alors $G(J) = \forall f \leq F(J)$, pour tout J et $G(J) = \forall f \leq \bigwedge_{J \in \mathcal{I}} = \forall f$.

Nous devons maintenat démontrer q'uil exist un point J_0 tel que $F(J_0) = \forall f$. Soit $a = f \to \forall f$, qui est un élément libre (voir...). Alors $D(a)$ est un s. d. libre et il est contenu dans un s. d. libre maximal J_0, donc $a = f \to \forall f \in J_0$ et alors $f \equiv \forall f \pmod{J_0}$ et $j(f) = \forall f$. Alors $F(J_0) = \forall f$ et F atteint son extrême inférieure. Donc $\forall F = \forall f = G(J_0)$, $\forall F = \forall \varphi(f) = \varphi(g) = \varphi(\forall f)$. □

Théorème 5.4 *Toute algèbre de Tarski monadique est isomorphe a une algèbre de Tarski monadique fonctionemme riche.*

Dem. Soit T une algèbre de Tarski monadique, donc il existe une algèbre de Tarski T" qui vérifie les conditions suivantes:

1) T est isomorphe a une sous-algébre T' de T".

2) Les constantes de T" forment une sous-algèbre complète supérieurement dans T".

Par le théorème antérieur l'algèbre T" est répresentable isomorphiquement par une algèbre fonctionelle riche, donc le même chose passe avec T' et T. $\square$

References

[1] Abbott J.C., *Semi-boolean algebras*, Mat. Vesnik, 4 (19), (1967), 177-198.

[2] Abbott J.C., *Implicational algebras*, Bull. Math, R.S. Roumaine, 11 (1967), 3-23.

[3] Halmos P.R., *Finite monadic algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 219-227.

[4] Henkin L., *An algebraic characterization of quantifiers*, Fund. Math., 37 (1950), 63-74.

[5] Monteiro A., *Cours sur les algèbres de Hilbert et de Tarski*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1960.

[6] Monteiro A., *Seminaire sur les algèbres de Boole monadiques*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1961.

[7] Monteiro A. e Iturrioz L., *Representación de las álgebras de Tarski monádicas*, Revista de la Unión Matemática Argentina, 19, nro. 5 (1962), 361.