# Le Radical d'une algèbre de Nelson $I_3$

Antonio Monteiro

## 1 Introduction

Une logique constructive avec négation forte a été considérée par David Nelson et par A. A. Markov. Le calcul propositionnel correspondant a été étudié par H. H. Voroboviev et Helena Rasiowa.
Un progres très important, au point de vue de l'algèbre, dans l'étude de cette logique a été l'introduction par H. Rasiowa [5] de la notion de *N-lattice*, qui joue dans cette théorie un rôle analogue a celui des algèbres de Boole (Heyting) dans la logique classique (intuitioniste) et que peut être défine de la manière suivante:

**Définition 1.1** *Un système $(A, 1, \sim, \wedge, \vee, \rightarrow)$ formé par: un ensemble non vide $A$, un élément $1 \in A$, une opération unaire $\sim$ (négation forte), et trois opérations binaires $\wedge, \vee, \rightarrow$ définies sur $A$, sera dit un N-lattice, ou une algèbre de Nelson, si les conditions suivantes sont vérifiées:*

*N1)* $x \wedge (x \vee y) = x$

*N2)* $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

*N3)* $\sim\sim x = x$

*N4)* $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

*N5)* $x \wedge \sim x = (x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y)$

*N6)* $x \rightarrow x = 1$

*N7)* $(x \rightarrow y) \vee (\sim x \vee y) = \sim x \vee y$

*N8)* $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \wedge y) \rightarrow z$

*N9)* $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge (\sim x \vee y)$

*N10)* $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$

*N11)* $x \vee 1 = 1$

*Nous dirons, pour abréger, que $A$ est un N-lattice ou une algèbre de Nelson.*

Les axiomes N1) y N2) montrent que $A$ est un réticulé distributif par rapport aux opérations $\wedge$ et $\vee$. D'après N11) ce réticulé a le dernier élément 1.
Nous poserons $0 = \sim 1$, et l'on voit facilement que 0 est le premier élément de $A$.
Outre la négation forte ($\sim$) on peut définir la négation:

$$\rceil x = x \rightarrow 0.$$

## 2 Le radical d'une algèbre de Nelson

Rappelons la définition suivante:

**Définition 2.1** *Le radical d'une algèbre de Nelson $A$ est l'intersection* Rad$(A)$ *de tous les systèmes déductifs maximaux de $A$.*

Nous avons à utiliser le résultat suivant[1]:

**Théorème 2.1** *Pour que $x \in$Rad$(A)$il faut et il suffit que $\lceil\lceil x = 1$ où $\lceil x = x \to 0$.*

Rappelons encore la définition:

**Définition 2.2** *Un élément $a$ d'une algèbre de Nelson $A$ sera dit* ouvert *si $\sim \lceil a = a$, c.a.d. si $\lceil a =\sim a$.*

Nous avons démontré que

**Théorème 2.2** *Si $a \in$Rad$(A)$ alors $a$ est ouvert.*[2]

**Lemme 2.1** *Si $a \in Rad(A)$ alors $\sim a \leq a$.*

**Dém.** Soit $a \in Rad(A)$ alors nous avons (1) $\lceil a =\sim a$ et (2) $\lceil\lceil a = 1$. De (1) et (2) on déduit $\lceil \sim a = \lceil\lceil a = 1$ c.a.d. $\sim a \to 0 = 1$, c.a.d. $\sim a \Rightarrow (a \vee 0) =\sim a \Rightarrow a = 1$, donc $\sim a \leq a$. □

Rappelons encore la définition suivante:

**Définition 2.3** *Un réticulé distributif $B$, ayant un dernier élément 1, sera dit une algèbre de Boole généralisée si pour tout élément $p \in B$ le segment $[p, 1] = \{x : p \leq x \leq 1\}$ est une algèbre de Boole.*

Il est clair que si $B$ est finie alors $B$ a un premier élément 0 et alors $B$ est une algèbre de Boole. Donc si une algèbre de Boole généralisée $B$ n'a pas de premier élément $B$ est necéssairement infinie.

Indiquons un exemple d'une algèbre de Boole généralisée qui n'est pas une algèbre de Boole.

Soit $E$ l'ensemble des points d'un plan euclidien, avec sa topologie naturelle. Prenons un point fixe $p$ de $E$ et soit $B$ l'ensemble de tous les voissinages de $p$, c.a.d. la famille de toutes les parties $V$ de $E$ telles que $p$ soit un point intérieur à $V$. Il est clair que $B$ est un anneaux d'ensembles car l'intersection et la réunion de deux voissinages de $p$ est un voisinage de $p$. En outre $B$ a un dernier élément $E$. Voyons que $B$ n'a pas de premier

[1] Ver [6], Teorema 4.6.

[2] Por (2.71) de [6], de $\lceil\lceil a = 1$ se sigue que $\lceil a \prec 0 \prec\sim a$. Luego, por el Lema 8.3 de [6], resulta que $\lceil a =\sim a$.

élément. En effet, étant donné un voissinage $V$ de $p$ il existe par définition un cercle $C_r$ ouvert de rayon $r > 0$ et de centre $p$ contenu dans $V$ (Il peut se faire que $V = C_r$!). Soit $r'$ un nombre tel que $0 < r' < r$ et soit $C_{r'}$ le cercle ouvert de centre $p$ et rayon $r'$, alors $C_{r'} \in B$ et $C_{r'} \subset V$. Cela montre bien que $B$ n'a pas de premier élément.

Montrons maintenant que $B$ est une algèbre de Boole généralisée. Pour cela soit $V \in B$ et montrons que le segment $[V, E]$ est une algèbre de Boole. Soit $W \in B$ tel que $V \subseteq W$ et soit $W_0 = V \cup \complement W$, alors $W \cap W_0 = V \cap W = V$ et $W \cup W_0 = W \cup \complement W \cup C = E$ et la démonstration est terminée.

## 3 Algèbres de Nelson $I_3$

Une algèbre de Nelson sera dite $I_3$ si elle vérifiee:

$$(I_3) \quad ((a \to c) \to b) \to (((b \to a) \to b) \to b) = 1.$$

**Théorème 3.1** *Si $A$ est une algèbre de Nelson $I_3$ alors $Rad(A)$ est un algèbre de Boole généralisée.*

**Dém.** Soit $p \in Rad(A)$ et $a$ tel que (1) $p \leq a$, donc $a \in Rad(A)$ et posons $a_0 = a \to p$. Nous allons démontrer que

$$\text{(I)} \quad p = a \wedge a_0; \qquad \text{(II)} \quad 1 = a \vee a_0$$

Nous avons, par (1),

$$(2) \quad a \wedge a_0 = a \wedge (a \to p) = a \wedge (\sim a \vee p) = (a \wedge \sim a) \vee (a \wedge p) = (a \wedge \sim a) \vee p.$$

De (1) on déduit (3) $\sim a \leq \sim p$, d'autre part par le Lemme 2.1, de $p \in Rad(A)$ il résulte (4) $\sim p \leq p$. Par (3) et (4) nous aurons (5) $\sim a \leq p$, donc $a \wedge \sim a \leq p$ et (2) peut s'écrire $a \wedge a_0 = p$ et la condition (I) est démontrée.

Pour démontrer (II) nous allors utiliser la condition

$$(I_3) \quad ((a \to c) \to b) \to (((b \to a) \to b) \to b) = 1.$$

En utilisant les démonstrations de L. Monteiro ([4]) on peut montrer que $(I_3)$ est équivalente à dire que:

> *Si un système déductif premier $P$ n'est pas maximal il existe un et un seul système déductif propre qui contient $P$ comme partie propre.*

C'est ce résultat que nous allons utiliser pour démontrer (II), par reduction à l'absurde. Supposons que

$$(H) \quad a \vee a_0 = a \vee (a \to p) \neq 1$$

alors il existe[3] un système déductif $P$ lié à $a \vee a_0$, c.a.d. un système déductif maximal parmi ceux qui ne contienent pas $a \vee a_0$. $P$ est un système déductif complétement irréductible, il est en particulier irréductible, c.a.d. est un systéme déductif premier (Voir H. Rasiowa).

Comme $a \in Rad(A)$ et $a \notin P$ alors $P$ n'est pas un système déductif maximal, il existe donc un système déductif maximal (et un seul) $M$ tel que $P \subset M$. Il est clair que $Rad(A) \subseteq M$. Cela montre que $P$ est un système déductif lié à tous les éléments de $M - P$, en particulier $P$ est lié à $a \to p$ et comme $a \notin P$ alors

$$a \to (a \to p) = a \to p \in P.$$

Cette contradiction montre que l'hypothèse (H) conduit à une contradiction donc

$$(II) \quad a \vee (a \to p) = 1$$

et le théorème est démontré. □

Ce résultat obtenu pour les algèbres de Nelson $I_3$, nous conduit á penser dans le cas général des algébres de Nelson. Pour cela nous allons commencer pour démontrer un résultat plus précis que celui que est indiqué dans le Lemme 2.1 à savoir

**Lemme 3.1** *Si $A$ est une algèbre de Nelson et si $a, b \in Rad(A)$ alors $\sim a \leq b$.*

Pour le moment je ne sait pas le démontrer[4] . Allons à notre but

**Théorème 3.2** *Le radical $Rad(A)$ d'une algèbre de Nelson $A$ est une algèbre de Heyting généralisée ([3], pag 56).*

**Dém.** Comme $Rad(A)$ est un réticulé distributif, pour démontrer le théorème il suffit de démontrer que si $a, b \in Rad(A)$, alors:

(I) $a \to b \in Rad(A)$

(II) $a \wedge (a \to b) \leq b$

(III) Si $z \in Rad(A)$ est tel que $a \wedge z \leq b$ alors $z \leq a \to b$.

(I) Il est clair que $a \to b \in Rad(A)$, car $Rad(A)$ est un filtre et $b \leq a \to b$.

(II) Supposons que (1) $a \wedge (a \to b) \not\leq b$. Les éléments $a, a \to b \in Rad(A)$. Il en est de même pour $a \wedge (a \to b)$ donc $a \wedge (a \to b)$ est un élément ouvert et nous pouvons affirmer que le filtre principal $F(a \wedge (a \to b))$ est un système déductif[5] qui, d'après (1) ne contient

[3] La existencia de este sistema deductivo puede verse en [3] dentro de la teoría general de sistemas deductivos en álgebras con implicación. Ver también [6], Lema 2.26.

[4] Por el Lemme 1.1, $Rad(A) \subseteq A^+$ y por la observación 7.6 de [6], resulta que si $a, b \in A^+, \sim a \in A^-$ y por lo tanto $\sim a \leq b$. Antonio Monteiro da otra demostración en las páginas siguientes.

[5] Ver [6], Corolario 2.7.

pas l'élément $b$. Il existe donc un systéme dèductif $C$ contenant $a \wedge (a \to b)$ et lié à $b$, alors $b \notin C$.

Comme $a \wedge (a \to b) = a \wedge (\sim a \vee b) \in C$ nous pouvons afirmer que (2) $a \in C$ (3) $\sim a \vee b \in C$. De (2) on deduit (4) $\sim a \notin C$. De (3) et (4) on tire, $C$ étant un filtre premier, $b \in C$ ce qui est impossible car $C$ étant lié à $b$.

(III) Soit (1) $z \in Rad(A)$ tel que (2) $a \wedge z \leq b$ et supposons que (3) $z \not\leq a \to b$. Comme $z \in Rad(A)$, $z$ est ouvert et alors $F(z)$ est un système déductif qui d'aprés (3) ne contient pas $a \to b$, il existe alors un système déductif $C$ contenant $z$ et lié à $a \to b$.

Si $a \notin C$ alors nous pouvons affirmer que

$$a \to (a \to b) = a \to b \in C$$

ce qui est impossible car $C$ est lié à $a \to b$, donc (4) $a \in C$. Comme (5) $z \in C$ alors (6) $a \wedge z \in C$. Par hypothèse (2) $a \wedge z \leq b$. De (2) et (6) on tire $b \in C$, comme $b \leq a \to b$ on aurait $a \to b \in C$, ce qui est impossible car $C$ est lié à $a \to b$. Cette contradiction montre que (III) est valable et nous pouvons affirmer que $Rad(A)$ est une algèbre de Heyting généralisée. $\square$

**Corolaire 3.1** *Si $a, b \in Rad(A)$ alors pour que $a \leq b$ il faut et il suffit que $a \to b = 1$.*

**Dém.** Cette propriété est valable dans toute algèbre de Heyting généralisée. (Voir A. Monteiro [2]). $\square$

Nous pouvons démontrer maintenant le Lemme 3.1. Comme $Rad(A)$ est une algèbre de Heyting généralisée, alors si $a, b \in Rad(A)$

$$(1) \quad a \wedge (a \to b) = a \wedge b.$$

D'autre part

$$(2) \quad a \wedge (a \to b) = a \wedge (\sim a \vee b) = (a \wedge \sim a) \vee (a \wedge b).$$

De $a \in Rad(A)$ on déduit par le Lemme 2.1 que (3) $\sim a \leq a$. De (1), (2) et (3) on tire

$$\sim a \vee (a \wedge b) = a \wedge b$$

et nous aurons

$$\sim a \leq a \wedge b \leq b$$

et le Lemme 3.1 est démontré.

**Corolaire 3.2** *Si $a, b \in Rad(A)$ et $a \to b = 1$ alors $\sim b \to \sim a = 1$.*

**Dém.** Si $a, b \in Rad(A)$, et $a \to b = 1$ alors par le Corollaire 3.1 nous avons $a \leq b$, d'où $\sim b \leq \sim a$ et alors $\sim b \to \sim a = 1$. $\square$

Rappelons qu'une algèbre de Boole généralisée peut être définie comme un algèbre de Heyting telle que $((b \to a) \to b) \to b = 1$.

Nous voyons maintenant que si la condition

$$(I_3) \quad ((a \to c) \to b) \to (((b \to a) \to b) \to b) = 1.$$

est vérifiée pour tout $a, b, c \in A$, alors pour $a, b \in Rad(A)$ nous aurons $((b \to a) \to b) \to b = 1$. Cela signifie que si l'algèbre de Nelson $A$ vérifie la condition $I_3$, alors son radical vérifie la condition $I_2$.

Pour démontrer ce théorème d'une façon plus directe il suffirait de choisir un élément $c \in A$ tel que $(a \to c) \to b = 1$, et alors on aurait, par $I_3$, $((b \to a) \to b) \to b = 1$ pour tout $a, b \in Rad(A)$. Plus précisément etant donnés des éléments $a, b \in Rad(A)$, on dévrait déterminer un élément $c \in A$ (qui dépendrait ou non de $a$ et $b$) tel que $(a \to c) \to b = 1$.

Cette remarque peut nous conduire à penser que si $I_n (n \geq 3)$ est vérifiée dans une algèbre de Nelson A, alors $I_{n-1}$ est vérifiée dans le $Rad(A)$, où

$$I_n = ((x_{n-2} \to x_{n-1}) \to x_0) \to I_{n-1} = 1$$

Si nous posons $x_{n-1} = 0$ alors $(x_{n-2} \to 0) \to x_0 = \lceil x_{n-2} \to x_0$ et si $x_{n-2}, x_0 \in Rad(A)$ on a $\lceil x_{n-2} \to x_0 = 1$. Alors $I_{n-1} = 1$ pour $x_{n-2}, x_{n-1}, \ldots, x_0 \in Rad(A)$. Donc $Rad(A)$ est une algèbre de Hilbert-Bernays $I_{n-1}$.

Pour avoir une démonstration de ce type, démontrons que:

**Lemme 3.2** *Dans une algèbre de Nelson $A$, si $a, b \in Rad(A)$ alors $\lceil a \to b = 1$.*

**Dém.** Soient $a, b \in Rad(A)$ et supposons que $\lceil a \to b \neq 1$. Alors il existe un système deductif $C$ lié à l'élément $\lceil a \to b$. Si $\lceil a \notin C$ alors comme $C$ est lié à $\lceil a \to b$, nous aurons $\lceil a \to (\lceil a \to b) \in C$, c.a.d., $\lceil a \to b \in C$, ce qui est impossible par hypothèse, donc (1) $\lceil a \in C$. $C$ est contenu dans un système déductif maximal $M$ et il est clair que $Rad(A) \subseteq M$. Comme $\lceil a \in C$ et $a \in Rad(A)$, alors $\lceil a, a \in M$, ce qui est impossible. Nous venons de démontrer que $\lceil a \to b = 1$ pour tout $a, b \in Rad(A)$. □

Remarquons que ce lemme est valable dans *toute algèbre de Nelson*.

Indiquons maintenant une nouvelle démonstration du Théorème 3.1.

**Théorème 3.3** *Le radical $Rad(A)$ d'une algèbre de Nelson $I_3$ est un algèbre de Boole généralisée.*

**Dém.** Nous savons par le Théorème 3.2 que le radical d'une algèbre de Nelson quelconque $A$ est une algèbre de Heyting généralisée. Rappelons maintenant qu'une algèbre de Boole généralisée peut être définie comme une algèbre de Heyting généralisée dans laquelle $((b \to a) \to b) \to b = 1$ (Loi de Peirce).

Supposons donc que dans $A$ est valable l'égalité

$$(I_3) \quad ((a \to c) \to b) \to (((b \to a) \to b) \to b) = 1.$$

En posant $c = 0$ dans cette égalité nous avons (1) $(\lceil a \to b) \to ((b \to a) \to b) \to b) = 1$ pour tout $a, b \in Rad(A)$.

De $a, b \in Rad(A)$ il resulte d'après le Lemme 3.2, (2) $\lceil a \to b = 1$. De (1) et (2) on tire

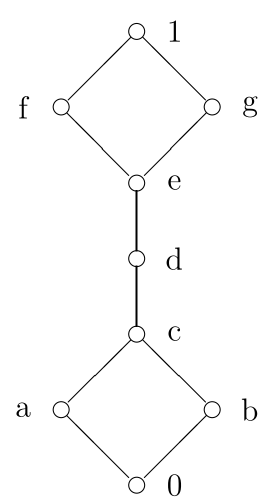
$$((b \to a) \to b) \to b = 1$$

pour tout $a, b \in Rad(A)$ et le théoréme est démontré. $\square$

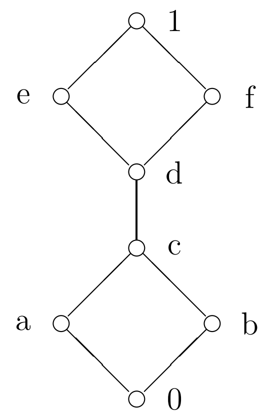
Remarquons que la démonstration du Lemme 3.2 ne fait intervenir aucune autre démonstration indiquée dans Théorème 3.1, Lemme 3.1, Théorème 3.2, Corollaire 3.1, Corollaire 3.2.

Remarquons maintenant que le Lemme 3.1 est une conséquence immediate de le Lemme 3.2: En effet pour tout élément $a \in Rad(A)$ nous avons $\lceil a = \sim a$ (Tout élément de $Rad(A)$ est ouvert) donc si $a, b \in Rad(A)$ nous avons, d'après le Lemme 3.2 (1) $\sim a \to b = 1$. Par la même raison (2) $\sim b \to a = 1$ et ces deux conditions (1) et (2) montrent que $\sim a \leq b$.

Remarquons encore que tout élément $r \in Rad(A)$ vérifie la condition $\sim r \leq r$ mais il peut y avoir des éléments $x$ tels que $\sim x \leq x$ avec $x \notin Rad(A)$. Considérons l'algèbre de Nelson $A$ indiquée sur la figure annexe. Nous avons $Rad(A) = \{e, f, g, 1\}, d \notin Rad(A)$, et $\sim d = d$. Il existent des algèbres de Nelson $I_3$ dans lesquels $Rad(A)$ coïncide avec l'ensemble des $x$ tels que $\sim x \leq x$.



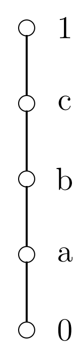
C'est ce qui a bien sur l'algèbre de Nelson $A$ indiquée dans la figure suivante, où $Rad(A)=\{d, e, f, 1\}$




Remarquons que $\sim c = d > c, \sim a = f > a, \sim b = e > b, \sim 0 = 1 > 0$.

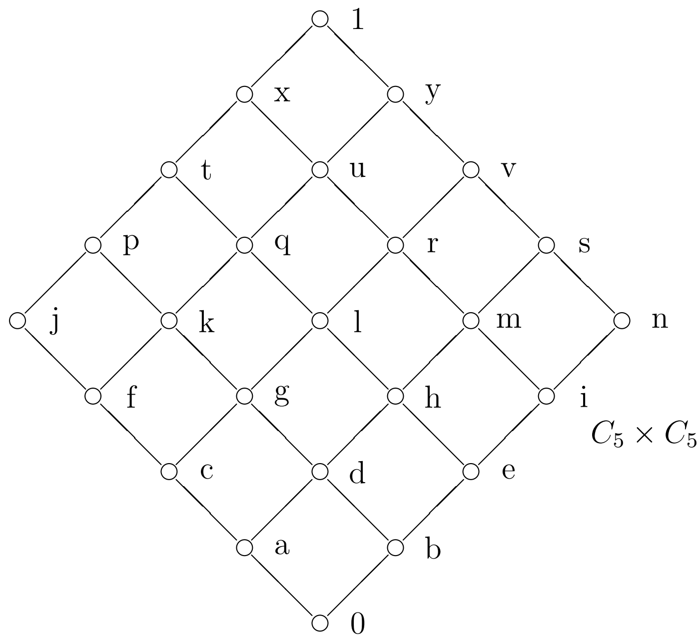
Indiquons maintenant un example d'une algèbre de Nelson $I_3$, où il existent plusieurs éléments $x \notin Rad(A)$ tels que $\sim x \leq x$.

Considérons la chaine $C_5$ où il y a un seul élément $b \notin Rad(A)$ tel que $\sim b \leq b$, ici nous avons plus precisement $\sim b = b$. C'est une algèbre de Nelson $I_3$.




$C_5$

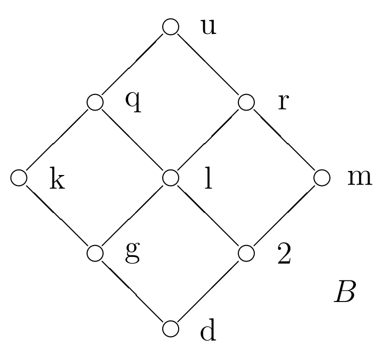
Considérons l'algèbre de Nelson $I_3$ définie par $A = C_5 \times C_5$.



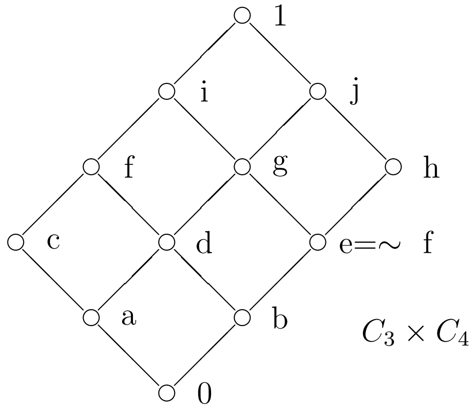

Ici $Rad(A)= \{u, x, y, 1\}$, $q, r \notin Rad(A)$, et

$$\sim q = h < q, \ \sim v = c \leq v, \ \sim r = g < r, \ \sim l = l \leq l, \ \sim t = e < t.$$

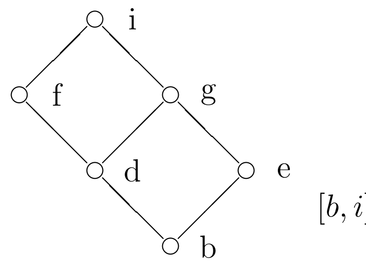
L'observation de cet exemple nous montre que $Rad(A)$ a un premier élément $u$; l'antiradical de $A$ est par définition $\sim Rad(A) = \{0, a, b, d\}$ a un dernier élément $d$. Nous représentons sur la figure annexe le segment $[d, u]$. Nous voyons que c'est une algèbre de Post trivalente.




Considérons maintenant l'algèbre de Nelson $I_3$ définie par $A = C_3 \times C_4$ indiquée dans la figure annexe.




*Rad*(*A*)= $\{1, i\}$. Le premier élément de *Rad*(*A*) est $i$, le dernier élément de ∼*Rad*(*A*) est $b$. Le segment $[b, i]$ est indiqué sur la figure suivante.




Nous voyons que c'est une *algèbre de Łukasiewicz trivalente*, c'est-à-dire un algèbre de Nelson semi-simple (dans ce cas particulier elle est axée, car elle est finie). Ces observations conduisent à poser le problème suivant.

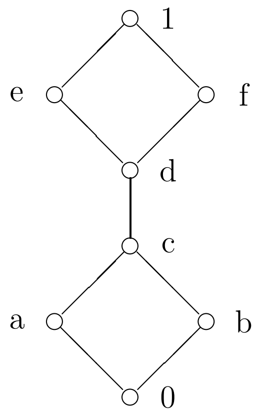
Soit $A$ une algèbre de Nelson $I_3$ et supposons que *Rad*(*A*) a un premier élément $u$, alors l'anti-radical ∼ *Rad*(*A*) a un dernier élément $p$. Il est clair que, d'après le Lemme 3.1 nous avons $p \leq u$. Il se pose le problème *de savoir si le segment* $[p, u]$ *est une algèbre de Łukasiewicz trivalente*, ou même une *algèbre de Łukasiewicz trivalente axée.*

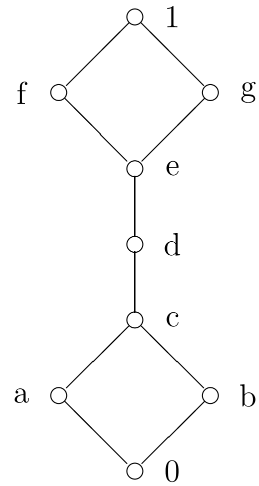
Dans le cas fini cela est évident car $A/Rad(A) = L_3$ (algèbre de Łukasiewicz avec trois éléments). Il y a un autre problème que peut être important de resoudre pour l'étude des algébres Nelson $I_3$ avec un nombre fini de générateurs libres[6].

Soit $A$ un algèbre de Nelson $I_3$ finie et connexe, c'est-à-dire, elle ne peut pas se decomposer dans un produit d'algèbres, non triviales. Il s'agit de savoir si dans ce cas particulier le segment $[p, u]$ a soit 2, soit 3 éléments.

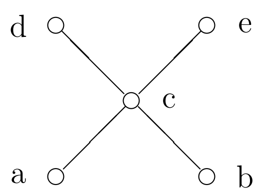
[6]Este último resuelto por D. Brignole, [1].

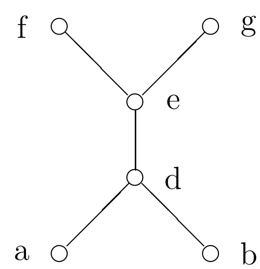
Que les deux cas peuvent se présenter c'est ce qui montre les deux exemples indiquées sur las figures suivantes:




qui correspondent à des algébres dont les systémes déterminants $(\pi, \varphi)$([3], page 41-42) sont




où $\varphi$ est choisie convenablement.

# References


[1] D. Brignole, *On the 5-valued Nelson Algebras*. Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, (1965).

[2] A. Monteiro, *Curso Algebra de la lógica III.* Primer semestre de 1962, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca. Argentina.

[3] A. Monteiro, *Sur les algèbres de Heyting symétriques.* Portugaliae Mathematica. Vol. 39, Fasc. 1-4 (1980).

[4] L. Monteiro, *Algèbres de Hilbert $n-$valentes.* Portugaliae Mathematica, Vol 36, Fasc. 3-4, (1977), 159-173.

[5] H. Rasiowa, *An algebraic aproach to non-classic logic*. North-Holland, Amsterdam, (1974).

[6] I. D. Viglizzo,*Algebras de Nelson* Tesis de Magister en Matemática, Universidad Nacional del Sur, 214pp., (1999).