Sobre el número minimal de generadores de reticulados distributivos finitos * y álgebras de Boole finitas

António Monteiro

Instituto de Matemática - Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca - Argentina

1. Generadores de reticulados distributivos finitos

1.1. Introducción

Vamos a comenzar por recordar algunos resultados conocidos [4], que nos serán necesarios y por fijar notaciones.

Si X e Y son conjuntos ordenados isomorfos notaremos $X \cong Y$, y si X es finito con n elementos notaremos $N[X] = n$.

Sea $(R, \wedge, \vee)$ un reticulado distributivo. Como es habitual diremos que R es un reticulado distributivo. Si G es un subconjunto no vacío de R, notaremos con $i(G)$ el conjunto de todos los elementos de R que son ínfimo de un número finito de elementos de G y con $s(G)$ el conjunto de todos los elementos de R que son supremo de un número finito de elementos de G. Si R tiene primer (0) y último (1) elemento entonces el ínfimo de una familia vacía de elementos de G es 1 y el supremo de una familia vacía de elementos de G es 0.

A todo subconjunto S de R que verifica: *"Si $x, y \in S$ entonces $x \wedge y, x \vee y \in S$"* se denomina subreticulado de R. Si $G \subseteq R$ notaremos con $SR(G)$ al subreticulado de R generado por G. Es bien conocido que $SR(G) = i(s(G)) = s(i(G))$. Por ejemplo si R es el reticulado indicado en la Figura 1.1, y $G = \{d, e\}$ entonces $SR(G) = \{b, d, e, g\}$, y si $G = \{f, g\}$ entonces $SR(G) = \{d, f, g, 1\}$.

*Trabajo presentado en 1968 al Simposio Panamericano de Matemática Aplicada, Buenos Aires, Argentina, [5]

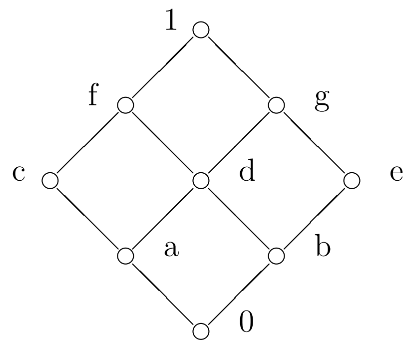

Figura 1.1

Diremos que $G \subseteq R$ es un conjunto de generadores de R si $SR(G) = R$. En el ejemplo precedente $G = \{c, d, e\}$ es un conjunto de generadores de R.

Sea R es un reticulado distributivo, G un subconjunto de R tal que $SR(G) = R$ y cualquiera que sea el subconjunto propio G' de G, esto es $G' \subset G$, entonces $SR(G')$ es un subreticulado propio de R, ($SR(G') \subset R$). En este caso diremos que G es un conjunto minimal de generadores de R.

Sea R un reticulado distributivo finito, no trivial, luego tiene primer (0) y último (1) elemento. Un elemento $p \in R$ se dice primo si $p \neq 0$ y si $p = a \vee b$ donde $a, b \in R$ entonces $p = a$ ó $p = b$, lo que es equivalente a decir que $p \neq 0$ y si $p \leq a \vee b$ donde $a, b \in R$ entonces $p \leq a$ ó $p \leq b$. Sea $\Pi = \Pi(R)$ el conjunto de todos los elementos primos de R. Es claro que $\Pi(R)$ es un conjunto ordenado con la relación de orden " $\leq$"inducida por $\wedge$ (ó por $\vee$).
Si R es un reticulado distributivo, no trivial, es bien conocido que $SR(\Pi(R)) = R$.
Si R es finito entonces $\Pi(R)$ es un conjunto ordenado finito. Es bien conocido que si Π es un conjunto ordenado finito, entonces existe un reticulado distributivo finito R tal que $\Pi(R) \cong \Pi$.
Sea $\Pi_0 = \Pi_0(R)$ un subconjunto no vacío de $\Pi(R)$, luego Π_0 tambien es un conjunto ordenado. Si $r \in R$ notaremos $\Pi(r) = \{p \in \Pi : p \leq r\}$ y $\Pi_0(r) = \{p \in \Pi_0 : p \leq r\}$, luego $\Pi_0(r) = \Pi(r) \cap \Pi_0$.
Sobre R definamos la siguiente relación binaria: Si $a, b \in R$ notaremos $a \equiv b$ (mód. Π_0) ó $a \equiv b$ si y sólo sí $\Pi_0(a) = \Pi_0(b)$. Se prueba sin dificultad que $\equiv$ es una relación de congruencia. Notaremos con $C(a) = \{x \in R : x \equiv a$ (mód. $\Pi_0\}$ la clase de equivalencia, módulo Π_0, que contiene al elemento a. Sea $R' = R/\Pi_0$ el reticulado cociente donde las operaciones estan definidas por $C(a) \wedge C(b) = C(a \wedge b)$ y $C(a) \vee C(b) = C(a \vee b)$. La transformación $h : R \to R'$ definida por $h(a) = C(a)$ es un epimorfismo de reticulados, denominado epimorfismo natural. Observemos que $C(0)$ es el primer elemento de R' y $C(1)$ el último elemento de R'.

Ejemplo 1.1 *Sea R el reticulado indicado en la siguiente figura:*

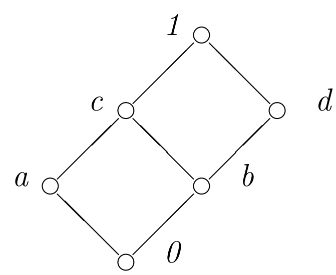

Figura 1.2

luego $\Pi = \Pi(R) = \{a, b, d\}$. Si $\Pi_0 = \{a, d\}$ entonces $\Pi_0(0) = \emptyset = \Pi_0(b)$, $\Pi_0(a) = \{a\} = \Pi_0(c)$, $\Pi_0(1) = \{a, d\}$, y por lo tanto $C(0) = \{0, b\}, C(a) = \{a, c\}, C(d) = \{d\}$, $C(1) = \{1\}$. Luego R/Π_0 tiene el diagrama indicado en la Figura 1.3 y si $\Pi_0 = \{a\}$ entonces R/Π_0 tiene el diagrama indicado en la Figura 1.4

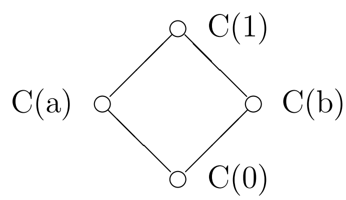

Figura 1.3

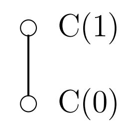

Figura 1.4

Observación 1.1 *Si R y R' son reticulados distributivos finitos, $h : R \to R'$ un epimorfismo y $p \in \Pi(R)$ entonces $h(p)$ no necesariamente es un elemento de $\Pi(R')$. Además puede que no exista ningún epimorfismo de orden de $\Pi(R)$ en $\Pi(R')$. En efecto consideremos los reticulados R y R' indicados en la siguiente figura:*

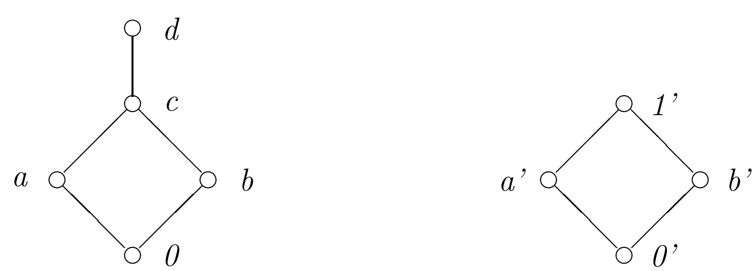

Figura 1.5

entonces definiendo $h : R \to R'$ por $h(0) = 0', h(a) = a', h(b) = b', h(c) = 0', h(1) = 1'$ se verifica sin dificultad que h es un epimorfismo de R en R'. Además $c \in \Pi(R)$ y $h(c) = 0' \notin \Pi(R')$. Es claro que $\Pi(R)$ y $\Pi(R')$ son conjuntos ordenados no isomorfos.

Teorema 1.1 *Si* Π_0 *es un subconjunto no vacío de* R*,* $R' = R/\Pi_0$*,* $\Pi' = \Pi(R')$ *es el conjunto ordenado de los elementos primos de* R'*, y* h *es el epimorfismo natural de* $R \to R'$ *definido anteriormente, entonces la función* h *restringida a* Π_0 *establece un isomorfismo de orden entre los conjuntos* Π_0 *y* Π'*, esto es* $\Pi(R/\Pi_0) \cong \Pi_0$*.*

Demostración.

1) Si $p \in \Pi_0$ entonces $h(p) = C(p) \in \Pi'$.

   1a) $C(p) \neq C(0)$ cualquiera que sea $p \in \Pi_0$.
   Como $p \in \Pi_0$ entonces $p \neq 0$ y $p \in C(p)$,. Si $p \in C(0)$ entonces $\Pi_0(p) = \Pi_0(0) = \emptyset$, absurdo. Luego $C(p) \neq C(0)$.

   1b) Si $p \in \Pi_0$ y $C(p) = C(a) \vee C(b) = C(a \vee b)$ entonces $C(p) = C(a)$ ó $C(p) = C(b)$.
   De $C(p) = C(a \vee b)$ resulta que $p \equiv a \vee b$ esto es $\Pi_0(p) = \Pi_0(a \vee b)$, y como $p \in \Pi_0$ entonces $p \in \Pi_0(p)$ y por lo tanto $p \in \Pi_0(a \vee b)$, esto es $p \leq a \vee b$ y como p es un elemento primo de R te nemos que $p \leq a$ ó $p \leq b$. Si $p \leq a$ entonces $\Pi_0(p) \subseteq \Pi_0(a)$ y como siempre se verifica $\Pi_0(a) \subseteq \Pi_0(a \vee b) = \Pi_0(p)$ tenemos $C(p) = C(a)$. En forma análoga si $p \leq b$ se deduce que $C(p) = C(b)$.

2) La restricción de h al conjunto Π_0, es una función suryectiva de Π_0 en Π'.
En efecto si $p' \in \Pi'$, como h es una suryección existe $y \in R$ tal que $h(y) = C(y) = p'$. Sea $X = \{x \in R : h(x) = p'\}$. Es claro que el conjunto X verifica " Si $x, y \in X$ entonces $x \wedge y \in X$". Sea $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y $p_0 = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i$, luego $p_0 \in X$. Vamos a demostrar que $p_0 \in \Pi$. Si $p_0 = 0$ entonces $p' = h(p) = h(0) = 0'$, absurdo. Supongamos que $p_0 = a \vee b$, entonces $p' = h(p_0) = C(p_0) = C(a) \vee C(b)$ y como $p' = C(p_0) \in \Pi'$ entonces $p' = C(p) = C(a) = h(a)$ ó $p' = C(p) = C(b) = h(b)$, luego $a \in X$ ó $b \in X$. Si $a \in X$ entonces $p_0 \leq a$ y de $a \leq a \vee b = p_0$ se deduce $p_0 = a$. Del mismo modo si $b \in X$ se concluye que $p_0 = b$. Luego $p_0 \in \Pi$.
Vamos a demostrar mas precisamente que $p_0 \in \Pi_0$.
Sea $\Pi_0(p_0) = \{q \in \Pi_0 : q \leq p_0\}$. Si $\Pi_0(p_0) = \emptyset$ entonces $p_0 \equiv 0$ (mód. Π_0) y en consecuencia $h(p_0) = h(0) = C(0) = 0'$, contradicción, luego $\Pi_0(p_0) = \{q_1, q_2, \ldots, q_s\}$. Sea $x = \bigvee_{i=1}^{s} q_i$. Es claro que $x \equiv p_0$ (mód. Π_0), luego $x \in X$, de donde resulta por la definición de p_0 que $p_0 \leq x = \bigvee_{i=1}^{s} q_i$, y como p_0 es primo existe un índice i, $1 \leq i \leq s$ tal qu e $p_0 \leq q_i$. Además como $q_i \leq p_0$ tenemos finalmente que $p_0 = q_i \in \Pi_0$.

3) Si $p_1, p_2 \in \Pi_0$ son tales que $p_1 \leq p_2$ entonces $h(p_1) \leq h(p_2)$.
En efecto de $p_1 \leq p_2$ resulta que $p_1 = p_1 \wedge p_2$, luego $C(p_1) = C(p_1) \wedge C(p_2)$ y en consecuencia $h(p_1) = C(p_1) \leq C(p_2) = h(p_2)$.

4) Si $p_1, p_2 \in \Pi_0$ son tales que $h(p_1) = h(p_2)$ entonces $p_1 = p_2$.
Como $h(p_1) = h(p_2)$ esto es $C(p_1) = C(p_2)$, entonces $p_1 \equiv p_2$ (mód. Π_0), esto es

$\Pi_0(p_1) = \Pi_0(p_2)$ de donde resulta que $p_1 \leq p_2$ y $p_2 \leq p_1$, luego $p_1 = p_2$.

$\square$

Lema 1.1 *Sean R, R' reticulados distributivos, $h : R \to R'$ un homomorfismo. Si $G \subseteq R$ es tal que $SR(G) = R$ entonces $SR(h(G)) = h(R)$, (esto es si G genera R, entonces $h(G)$ genera al reticulado $h(R)$.) Si $N[G] = n$ y h es suryectivo entonces $R' = SR(h(G))$ y $N[h(G)] \leq n$.*

Teorema 1.2 *Si R y R' son reticulados distributivos finitos, no triviales, tales los conjuntos ordenados Π y Π' de sus elementos primos son isomorfos entonces R y R' son reticulados isomorfos.*

Teorema 1.3 *Si R y R' son reticulados distributivos finitos, no triviales, Π y Π' los conjuntos ordenados de sus elementos primos, y $\alpha : R \to R'$ un epimorfimo de reticulados, entonces existe un isomorfismo de orden $\beta : \Pi' \to \Pi$, esto es el conjunto ordenado Π' isomorfo al subconjunto $\beta(\Pi')$ del conjunto ordenado Π. Además R' es isomorfo al reticulado $R/\beta(\Pi')$.*

Demostración. Dado (1) $p' \in \Pi'$, como α es una función suryectiva $X = \alpha^{-1}(p') \neq \emptyset$. Sea $p = \bigwedge_{x \in X} x$ luego $\alpha(p) = p'$. Pongamos por definición $\beta(p') = p$. Veamos que $p \in \Pi$. En efecto si $p = 0$ entonces $\alpha(p) = 0'$ lo que contradice (1). Supongamos que (2) $p = a \vee b$ entonces $p' = \alpha(p) = \alpha(a) \vee \alpha(b)$ y como p' es un elemento primo de R' resulta que (3) $p' = \alpha(a)$ ó (4) $p' = \alpha(b)$. Si ocurre (3) entonces $a \in X$ y por lo tanto $p \leq a$. De (3) resulta $a \leq p$, y por lo tanto $p = a$. Análogamente si ocurre (4) se demuestra que $p = b$.
Sean $p', q' \in \Pi'$ tales que $p' \leq q'$ y $\beta(p') = p$, $\beta(q') = q$, entonces $\alpha(p \wedge q) = \alpha(p) \wedge \alpha(q) = p' \wedge q' = p'$ luego $p \wedge q \in \alpha^{-1}(p') = X$ y por lo tanto $p \leq p \wedge q$. Luego como $p \wedge q \leq q$ tenemos $p \leq q$ esto es $\beta(p') \leq \beta(q')$.
Si $\beta(p') = \beta(q')$ esto es $p = q$ entonces $\alpha(p) = \alpha(q)$ y por lo tanto $p' = q'$.
Por el Teorema 1.1 sabemos que $\Pi(R/\beta(\Pi')) \cong \beta(\Pi')$ y como $\Pi' \cong \beta(\Pi')$ tenemos que $\Pi(R/\beta(\Pi')) \cong \Pi' = \Pi(R')$, luego por el Teorema 1.2 resulta que $R(\beta(\Pi'))$ y R' son reticulados isomorfos. $\square$

Definición 1.1 *Un subconjunto G de un reticulado distributivo L se dice un conjunto de generadores libres de L si:*

L1) $SR(G) = L$, (esto es G es un conjunto de generadores de L.)

L2) Dada una función f de G en un reticulado distributivo arbitrario R, existe un homomorfismo $h_f : L \to R$ que extiende a f, esto es $f(g) = h_f(g)$, $\forall\, g \in G$.

En este caso se suele decir que L es un reticulado distributivo libre o que L es un reticulado distributivo con un conjunto G de generadores libres.

Teorema 1.4 *Para toda " álgebra"definida por igualdades existe siempre el "álgebra"libre con un conjunto de generadores de cardinal prefijado.* [1]

Sea $\mathbf{B} = \{0, 1\}$ un álgebra de Boole con 2 elementos y $\mathbf{B}^n$ el producto cartesiano de n álgebras de Boole iguales a $\mathbf{B}$. El último elemento de $\mathbf{B}^n$ es la n-upla cuyas componentes son todas iguales a 1, esto es $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$ es el último elemento de $\mathbf{B}^n$. Análogamente $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ es el primer elemento de $\mathbf{B}^n$. Sea $FD(n)$ el reticulado distributivo con n generadores libres, es bien conocido que $\Pi(FD(n))$ es isomorfo al conjunto ordenado $\mathbf{Q}(n) = \mathbf{B}^n - \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

Lema 1.2 *Si R es un reticulado distributivo, y $G \subseteq R$ verifica $N[G] = n$ y $SR(G) = R$ entonces el conjunto ordenado $\Pi(R)$ es isomorfo a un subconjunto del conjunto ordenado $\Pi(FD(n))$.*

Demostración. Sea G' un conjunto de generadores libres de $FD(n)$ como $N[G'] = n$ entonces existe una biyección $f : G' \to G \subseteq R$, luego f se puede extender a un único homomorfismo $h : FD(n) \to R$. Entonces por el Lema 1.1, $h(FD(n)) = SR(SR(G')) = SR(h(G')) = SR(G) = R$ y en consecuencia por el Teorema 1.3, $\Pi(R)$ es isomorfo a un subconjunto de $\Pi(FD(n))$. $\Box$

Teorema 1.5 *Sea R un reticulado distributivo finito y $\Pi = \Pi(R)$. Si el conjunto ordenado Π es isomorfo a una parte Π_0 de $\Pi(FD(n))$ entonces R tiene un conjunto de generadores con n elementos.*

Demostración. Consideremos en $FD(n)$ la congruencia módulo Π_0. Por el Teorema 1.1 el conjunto ordenado $\Pi(FD(n)/\Pi_0)$ es isomorfo a Π_0 y como por hipótesis Π_0 y Π son conjuntos ordenados finitos isomorfos entonces lo s conjuntos ordenados $\Pi(FD(n)/\Pi_0)$ y Π son isomorfos, luego por el Teorema 1.2 $FD(n)/\Pi_0$ es un reticulado distributivo isomorfo a R. $FD(n)$ entonces R es una imagen homomórfica de $FD(n)$. Sea $\alpha : FD(n) \to R$ un isomorfismo y G un conjunto de generadores libres de $FD(n)$ luego por el Lema 1.1 $G' = \alpha(G) \subseteq R$ verifica $SR(G') = R$ y como α es biyectiva $N[G'] = N[\alpha(G)] = n$. $\Box$

Corolario 1.1 *Si R es un reticulado distributivo finito, $\Pi = \Pi(R)$ y n el menor entero positivo tal que el conjunto ordenado Π es isomorfo a una parte Π_0 de $\Pi(FD(n))$ entonces n es el número minimal de generadores de R.*

Demostración. Por el Teorema 1.5 sabemos que R tiene un conjunto de generadores con n elementos. Si $G' \subseteq R$ verifica $SR(G') = R$, donde $m < n$, entonces por el Lema 1.2, Π es isomorfo a un subconjunto de $\Pi(FD(m))$ con $m < n$, lo que contradice la hipótesis sobre n. $\Box$

Vamos a indicar una construcción de un conjunto minimal de generadores de un reticulado distributivo finito R, no trivial.
Sea $\Pi = \Pi(R)$ el conjunto ordenado de los elementos primos de R y $m = N[R]$, como $SR(R) = R$, sabemos por el Lema 1.2 que $\Pi(R)$ es isomorfo a un subconjunto de

$\Pi(FD(m))$. Sea n el menor entero positivo para el cual Π es isomorfo a un subconjunto de $\Pi(FD(n))$, α un isomorfismo de orden entre Π y $\Pi_0 \subseteq \Pi(FD(n))$ y $M(n) = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ el conjunto de los elementos maximales del conjunto ordenado $\Pi(FD(n))$. En este caso es bien conocido que $SR(M(n)) = FD(n)$. Sean:

$$\begin{array}{ll} P_i = \{p \in \Pi_0 : p \leq m_i\}, & i = 1, 2, \ldots, n \\ \Pi_i = \{p \in \Pi : \alpha(p) \in P_i\}, & i = 1, 2, \ldots, n \\ \text{y} & \\ g_i = \bigvee\{p : p \in \Pi_i\}, & i = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

Observemos que si $P_i = \emptyset$ entonces $\Pi_i = \emptyset$ y por lo tanto $g_i = 0$.
Probemos que $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ es un conjunto de generadores de R. En efecto sea $f : M(n) \to R$ definida por $f(m_i) = g_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Luego f se puede extender a un homomorfismo $h : FD(n) \to R$. Por el Lema 1.1 sabemos que $h(FD(n)) = h(SR(M(n))) = SR(h(M(n))) = SR(G)$ y como $\Pi_0 \subseteq FD(n)$ resulta que $\Pi = h(\Pi_0) \subseteq h(FD(n))$, luego $R = SR(\Pi) \subseteq h(FD(n))$, esto es $SR(G) = R$.
Acabamos así de probar que el conjunto G indicado en la construción anterior genera R, y por el Teorema 1.5, este conjunto es un conjunto minimal de generadores de R. Además por el Corolario 1.1 sabemos que n es el menor número de generadores de R, luego cualquier conjunto minimal de generadores de R tiene n elementos.

Finalmente observemos que para cada representación isomórfica de Π en $\Pi(FD(n))$ tenemos una solución al problema planteado.

Vamos a indicar algunos ejemplos y para ello comenzaremos por recordar que el conjunto ordenado $\mathbf{Q}(3)$ de los elementos primos de $FD(3)$ tiene el siguiente diagrama:

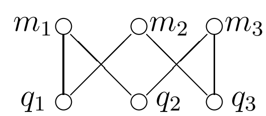

Figura 1.6

Ejemplos 1.1 *1) Sea R el reticulado indicado en el siguiente diagrama:*

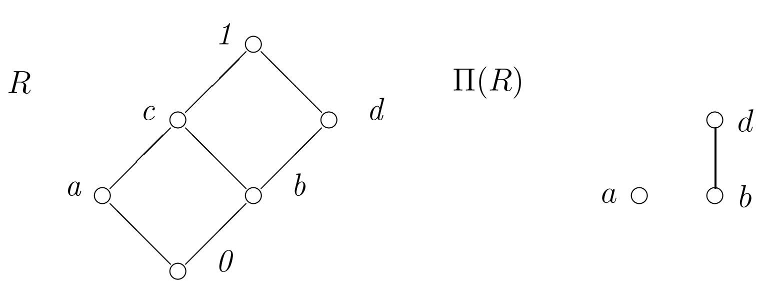

Figura 1.7

Podemos sumergir $\Pi(R) = \{a, b, d\}$ *en* $\mathbf{Q}(3)$ *del siguiente modo:* $\alpha(a) = q_1,\ \alpha(b) = q_2,\ \alpha(d) = m_3$. *Luego* $P_1 = \{q_1, q_2\},\ P_2 = \{q_1\},\ P_3 = \{q_2, m_3\}$ *y por lo tanto* $g_1 = a \vee b = c,\ g_2 = a,\ g_3 = b \vee d = d$. *En consecuencia* $G = \{a, c, d\}$ *es un conjunto minimal de generadores de* R.
Si sumergimos $\Pi(R)$ *en* $\mathbf{Q}(3)$ *del siguiente modo:* $\beta(a) = m_1,\ \beta(b) = q_3,\ \beta(d) = m_3$, *entonces* $P_1 = \{m_1\},\ P_2 = \{q_3\},\ P_3 = \{q_3, m_3\}$ *y por lo tanto* $g_1 = a,\ g_2 = b,\ g_3 = d$. *En consecuencia* $G = \{a, b, d\} = \Pi(R)$ *es un conjunto minimal de generadores de* R.

2) Sea R *el reticulado indicado en el siguiente diagrama:*

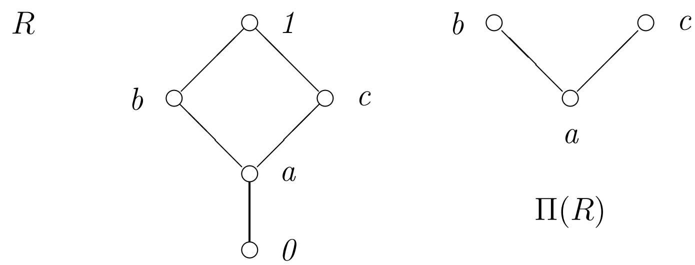

Figura 1.8

Podemos sumergir $\Pi(R) = \{a, b, c\}$ *en* $\mathbf{Q}(3)$ *del siguiente modo:* $\alpha(a) = q_2,\ \alpha(b) = m_1,\ \alpha(c) = m_3$. *Luego* $P_1 = \{q_2\},\ P_2 = \emptyset,\ P_3 = \{q_2, m_3\}$ *y por lo tanto* $g_1 = a,\ g_2 = 0,\ g_3 = a \vee c = c$. *En consecuencia* $G = \{0, a, c\}$ *es un conjunto minimal de generadores de* R.

3) Sea R *el reticulado distributivo indicado en el siguiente diagrama:*

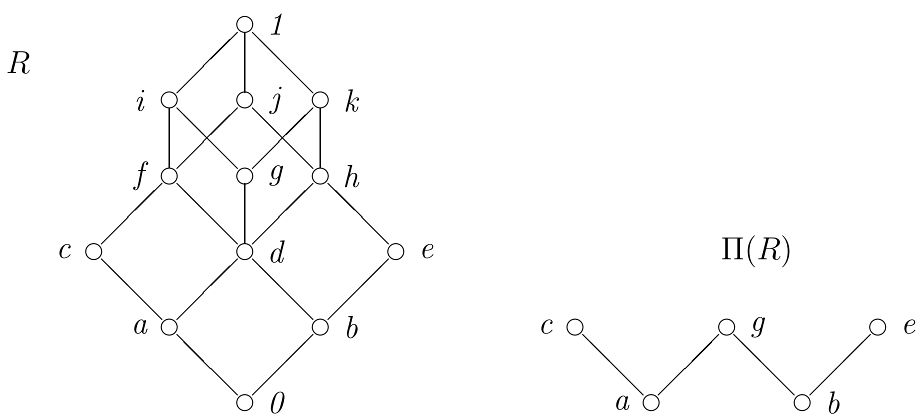

Figura 1.9

El conjunto $\Pi = \{a, c, g, b, e\}$ *puede sumergirse en* $\mathbf{Q}(3)$ *del siguiente modo* $\alpha(a) = q_1,\ \alpha(b) = q_3,\ \alpha(c) = m_1,\ \alpha(g) = m_2,\ \alpha(e) = m_3$, *entonces* $g_1 = c \vee a = c,\ g_2 = e \vee a \vee b = e,\ g_3 = d \vee b = d$, *y por lo tanto* $G = \{a, e, g\}$ *es un conjunto minimal de generadores de* R. *En este caso existe una sola forma de sumergir* $\Pi(R)$ *en* $\mathbf{Q}(3)$.

El reticulado C considerado por C. Cardot ([2], Fig. 9) tiene el diagrama indicado en la Figura 1.10 (ver también [3], pág. 246):

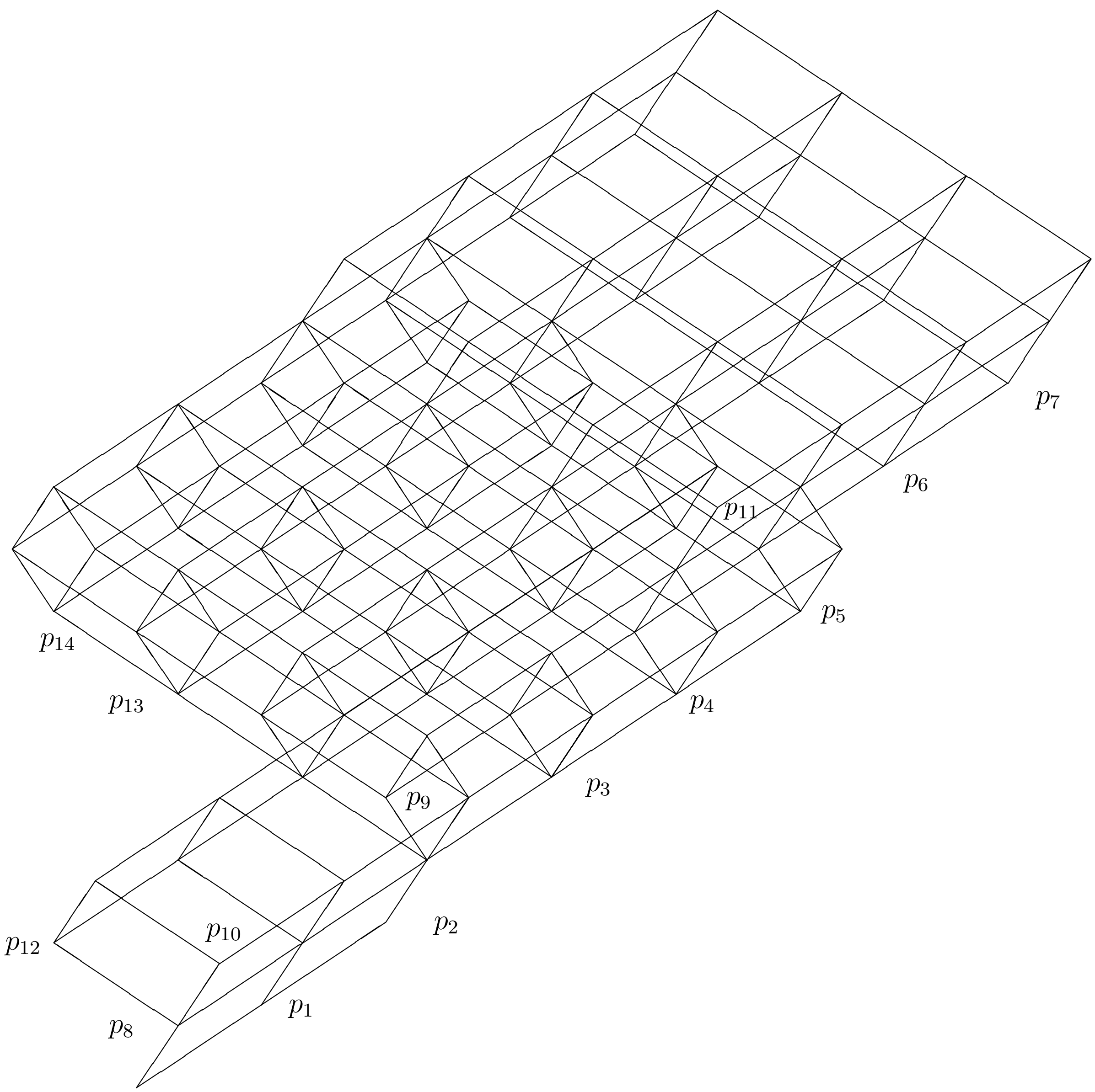

Figura 1.10

C. Cardot prueba que el reticulado C está generado por los 11 elementos indicados en la Figura 1.11 por los círculos negros.

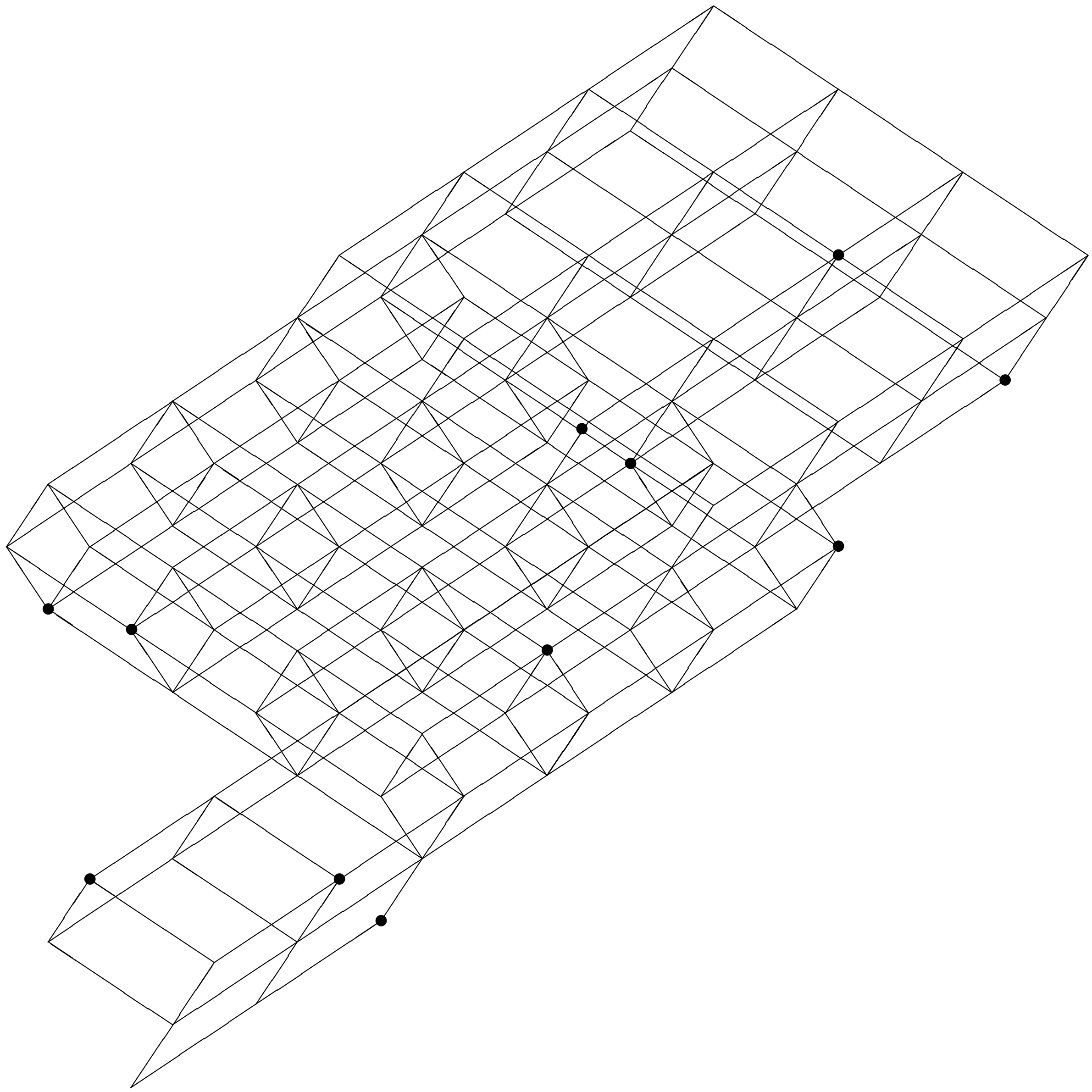

Figura 1.11

El conjunto $\Pi(C)$ de los elementos primos del reticulado C tiene 14 elementos, y su diagrama es el siguiente:

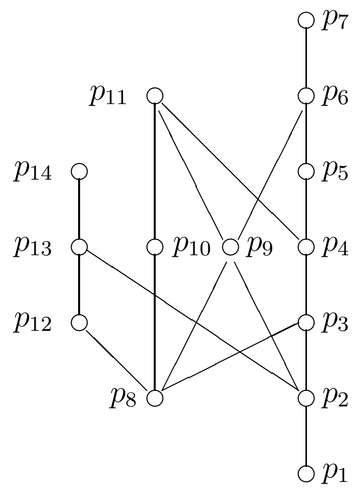

Figura 1.12

Nota del redactor En el resúmen de este trabajo, A. Monteiro dice que el número mínimo de generadores de C es 8. No hemos podido encontrar notas del autor donde indica sus cálculos. El número 8 es seguramente un error de tipeado pués si A es un conjunto con 8 elementos, $X = \mathcal{P}(A) - \{\emptyset, A\}$ es un conjunto ordenado isomorfo a $\mathbf{Q}(8)$. Si $\Pi(C)$ pudiera sumergirse en X, entonces existiría un isomorfismo de orden de $\Pi(C)$ en X y entonces la cadena $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\}$ se tranformaría en una cadena $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\}$ de X y por lo tanto debe ser $N[A_i] = i,\ 1 \leq i \leq 7$. Sea $A_3 = \{a, b, c\}$, luego como $A_2 \subseteq A_3$ tendremos $A_2 = \{a, b\},\ A_2 = \{a, c\}$ ó $A_2 = \{b, c\}$. Supongamos que (1) $A_2 = \{a, b\}$ luego $A_1 = \{a\}$ ó $A_1 = \{b\}$. Consideremos el caso en que (2) $A_1 = \{a\}$. Como $A_8 \subseteq A_3$ entonces por la hipótesis (1) tenemos $A_8 = \{a, c\},\ A_8 = \{b, c\},\ A_8 = \{a\},\ A_8 = \{b\}$ ó $A_8 = \{c\}$. Pero si $A_8 = \{a\}$ tendríamos $A_8 = A_1$, contradicción. Si $A_8 = \{b\}$ entonces $A_8 \subseteq A_2$, contradicción. Si $A_8 = \{a, c\}$ como $A_8 \subseteq A_9$ y $A_2 \subseteq A_9$ tendríamos $\{a, b, c\} \subseteq A_8 \cup A_2 \subseteq A_9$ y por lo tanto $A_3 \subseteq A_9$, absurdo. Análogamente si $A_8 = \{b, c\}$ llegamos a una contradicción, luego la única posibilidad es que $A_8 = \{c\}$, luego $\{a, b, c\} \subseteq A_8 \cup A_2 \subseteq A_9$ y por lo tanto $A_3 \subseteq A_9$, absurdo. Analizando todos los otros casos tambien llegamos a contradicciones. Por lo tanto $\Pi(C)$ no puede sumergirse en $\mathbf{Q}(8)$.

Sea $A = \{a_i : 1 \leq i \leq 9\}$ y $\mathcal{P}(A)$ la familia de todos los subconjuntos de A, es bien conocido que $X = \mathcal{P}(A) - \{\emptyset, A\}$ es un conjunto ordenado isomorfo a $\mathbf{Q}(9)$. Además los elementos maximales de X son $M_i = A - \{a_i\}$ para $i = 1, 2, \ldots, 9$.

Sean:

$$\begin{array}{ll} A_1 = \{a_1\}, & A_2 = \{a_1, a_2\}, \\ A_3 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, & A_4 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}, \\ A_5 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}, & A_6 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}, \\ A_7 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_9\}, & A_8 = \{a_3\}, \\ A_9 = \{a_1, a_2, a_3, a_7\}, & A_{10} = \{a_3, a_5, a_8\}, \\ A_{11} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_7, a_8\}, & A_{12} = \{a_3, a_6, a_8\}, \\ A_{13} = \{a_1, a_2, a_3, a_6, a_8\}, & A_{14} = \{a_1, a_2, a_3, a_6, a_8, a_9\}. \end{array}$$

Entonces el conjunto $\{A_i : \ 1 \leq i \leq 14\}$ ordenado por la relación $\subseteq$ tiene el siguiente diagrama de Hasse:

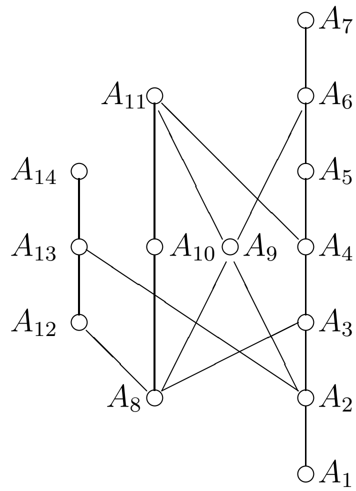

Figura 1.13

Entonces $\Pi(C)$ se puede sumergir en X del siguiente modo $\alpha(p_i) = A_i, \ 1 \leq i \leq 14$. Luego:

$$P_1 = \{A_8, A_{10}, A_{12}\},$$

$$P_2 = \{A_1, A_8, A_{10}, A_{12}\},$$

$$P_3 = \{A_1, A_2\},$$

$$P_4 = \{A_1, A_2, A_8, A_{10}, A_{12}, A_{13}, A_{14}\},$$

$$P_5 = \{A_1, A_2, A_3, A_8, A_9\},$$

$$P_6 = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}\},$$

$$P_7 = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_8, A_{10}, A_{12}, A_{13}, A_{14}\},$$

$P_8 = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9\}$,

$P_9 = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_8, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}\}$.

y por lo tanto determinamos el siguiente conjunto de generadores de R:

$g_1 = p_8 \vee p_{10} \vee p_{12} = p_{10} \vee p_{12}$,

$g_2 = p_1 \vee p_8 \vee p_{10} \vee p_{12} = p_1 \vee p_8 \vee g_1$,

$g_3 = p_1 \vee p_2 = p_2$,

$g_4 = p_1 \vee p_2 \vee p_8 \vee p_{10} \vee p_{12} \vee p_{13} \vee p_{14} = p_2 \vee p_{10} \vee p_{14}$,

$g_5 = p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_8 \vee p_9 = p_3 \vee p_9$,

$g_6 = p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_8 \vee p_9 \vee p_{10} \vee p_{11} = p_{11}$,

$g_7 = p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_8 \vee p_{10} \vee p_{12} \vee p_{13} \vee p_{14} = p_5 \vee p_{10} \vee p_{14}$,

$g_8 = p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_7 \vee p_8 \vee p_9 = p_7$,

$g_9 = p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_8 \vee p_{10} \vee p_{11} \vee p_{12} \vee p_{13} = p_6 \vee p_{11} \vee p_{13}$,

Los 9 generadores determinados precedentemente estan indicados, por círculos negros, en la Figura 1.14.

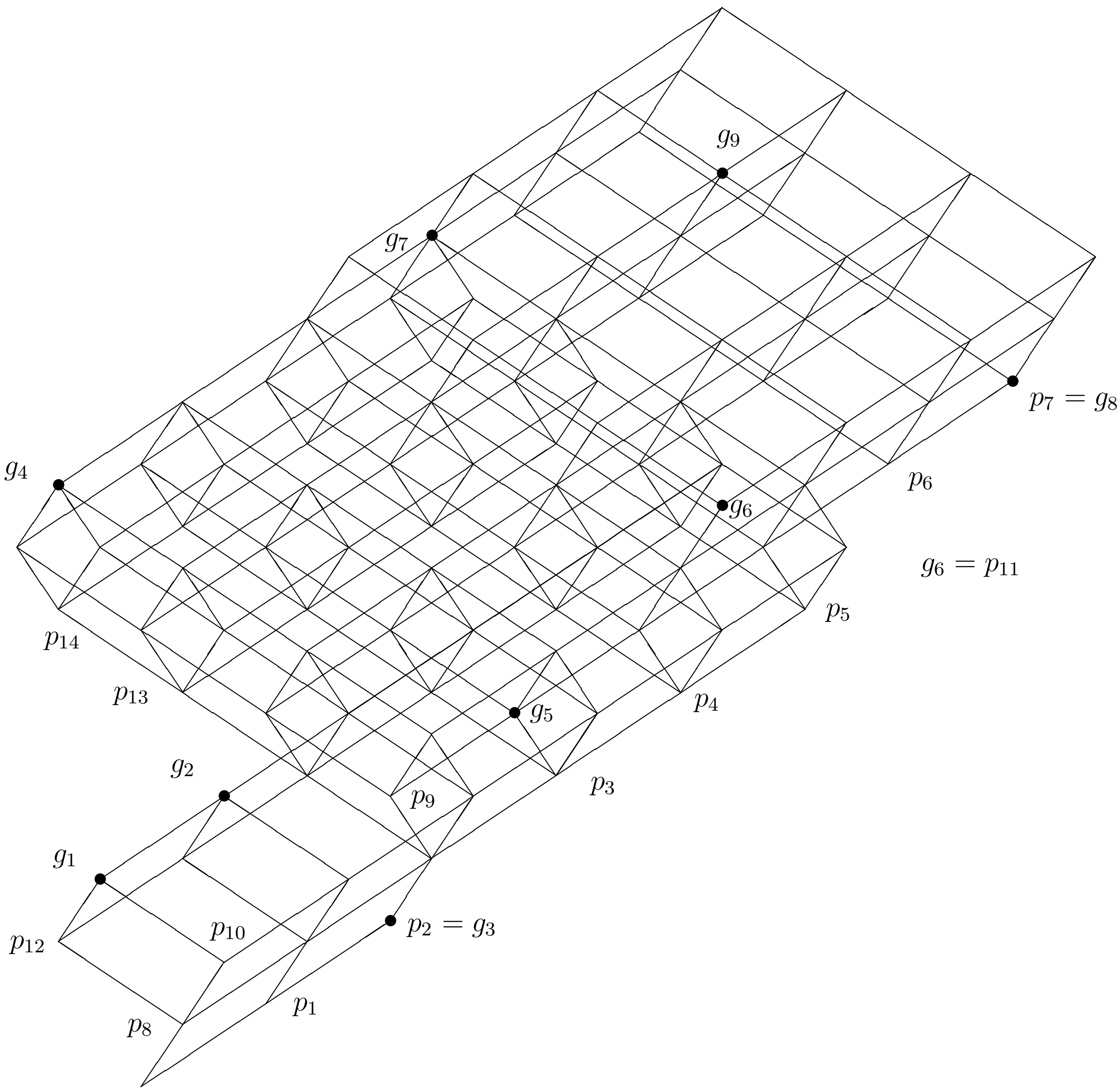
g_9
g_7
$p_7 = g_8$
g_4
p_6
g_6
$g_6 = p_{11}$
p_5
p_{14}
p_{13}
p_4
g_5
g_2
p_3
p_9
g_1
p_{12}
p_{10}
$p_2 = g_3$
p_1
p_8

Figura 1.14

2. Generadores de álgebras de Boole finitas

2.1. Introducción

Sea $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ un álgebra de Boole, si $X \subseteq B$ notaremos $-X = \{-x : x \in X\}$. Si B es un álgebra de Boole finita con mas de un elemento representaremos con $\mathcal{A}(B)$ el conjunto de todos los átomos de B.
Con $SB(X)$ representaremos la subálgebra booleana de B generada por X. Si $SB(X) = B$ diremos que X es un conjunto de generadores de B. Es bien conocido que $SB(\emptyset) = \{0, 1\}$, y que si B tiene un solo elemento entonces $SB(\emptyset) = \{0\}$. Luego si B tiene mas de dos elementos entonces todo conjunto de generadores de B es no vacío.
Es claro que si $X \subseteq B$ entonces $SB(X) = SB(-X)$. Si B y B' son álgebras de Boole y $h : B \to B'$ es un homomorfismo de B en B', entonces $Nuc\,(h) = \{x \in B : h(x) = 1\}$ es un filtro de B y si $h(B) = B'$ entonces el álgebra cociente $B/Nuc\,(h)$ es isomorfa a B'.
Si $z \in B$ entonces $[z) = \{x \in B : z \leq x\}$ es un filtro de B y $(z] = \{x \in B : x \leq z\}$ es un ideal de B.
Si $p, u \in B$ son tales que $p \leq q$, sea $[p, u] = \{x \in B : p \leq x \leq u\}$. Es bien conocido que $[p, u]$ es un reticulado distributivo con primer elemento p y último elemento u. Si $s \in [p, u]$ definiendo $s' = p \vee (-s \wedge u)$, s e demuestra que s' es el complemento booleano de s en $[p, u]$ y por lo tanto $[p, u]$ es un álgebra de Boole. Si $p = 0$ entonces $S = [0, u] = (u]$ es un álgebra de Boole donde el complemento de $s \in S$ es $s' = -s \wedge u$ y si $u = 1$ ento nces $S = [p, 1] = [p)$ es un álgebra de Boole donde el complemento de $s \in S$ es $s' = p \vee -s$.

Lema 2.1 *Si B es un álgebra de Boole y $u \in B$ entonces $B' = A/[u)$ es isomorfa al algebra de Boole $A" = (u]$.*

Es bien conocido que todas las imágenes homomórficas de un álgebra de Boole B están determinadas, a menos de isomorfismos, por los filtros de B.

Lema 2.2 *Sean A, A' álgebras de Boole, $h : A \to A'$ un homomorfismo de A en A'. Si $G \subseteq A$ es tal que $SB(G) = A$ entonces $SB(h(G)) = h(A)$. (esto es si G genera A entonces $h(G)$ genera al álgebra de Boole $h(A)$.)*

Definición 2.1 *Un subconjunto G de un álgebra de Boole A se dice un conjunto de generadores libres de L si:*

L1) $SB(G) = L$, *(esto es G es un conjunto de generadores de L.)*

L2) Dada una función f de G en un álgebra de Boole arbitraria A, existe un homomorfismo $h_f : L \to A$ que extiende a f, esto es $f(g) = h_f(g)$, $\forall\, g \in G$.

En este caso se suele decir que L es un álgebra de Boole libre o que L es un álgebra de Boole con un conjunto G de generadores libres.

2.2. Conjuntos minimales de generadores

Si B es un álgebra de Boole, es importante determinar subconjuntos G de B tales que:

1) $SB(G) = B$.

2) Si G' es un subconjunto propio de G, esto es $G' \subset G$, entonces $SB(G')$ es una subálgebra propia de B, esto es $SB(G') \subset B$.

Un tal subconjunto G se denomina un conjunto minimal de generadores del álgebra de Boole B.

Notaremos con B_k un álgebra de Boole finita con k átomos.
Observemos en primer lugar que en un álgebra de Boole finita B existe *por lo menos* un conjunto minimal de generadores de B. En efecto, sea $\mathcal{G}(B)$ la familia de todos los conjuntos de generadores de B, como B es un conjunto (maximal) de generadores de B, entonces $\mathcal{G}(B) \neq \emptyset$, por lo tanto el par $(\mathcal{G}(B), \subseteq)$ es un conjunto ordenado finito, y los elementos minimales de este conjunto ordenado son conjuntos minimales de generadores de B. Observemos aún que $\mathcal{G}(B)$ es un reticulado superior con último elemento B, dado que $SB(B) = B$ y si $X, Y \in \mathcal{G}(B)$ entonces $X \cup Y \in \mathcal{G}(B)$.
Sea B un álgebra de Boole con mas de un elemento. Observemos que si G es un conjunto minimal de generadores de B entonces $-g \notin G$ cualquiera que sea $g \in G$. En efecto si existiera $g_0 \in G$ tal que (1) $-g_0 \in G$ entonces (2) $G_0 = G \setminus \{g_0\} \subset G$. Además (3) $G \subseteq SB(G_0)$, en efecto si $g \in G$ y $g \neq g_0$ tenemos que $g \in G_0 \subseteq SB(G_0)$ y si $g = g_0$ entonces por (1) $-g_0 \in G$, luego como B tiene mas de un elemento $-g_0 \neq g_o$ y por lo tanto $-g_0 \in G_0 \subseteq SB(G_0)$, lo que prueba (3). De (2) y (3) resulta $B = SB(G) \subseteq SB(G_0)$ esto es $SB(G_0) = B$. Luego G_0 sería un conjunto de generadores de B tal que $G_0 \subset G$, lo que contradice que G es un conjunto mínimo de generadores.
Como $SB(G) = SB(-G)$, si G es un conjunto minimal de generadores de B entonces $-G$ tambien es un subconjunto minimal de generadores de B y por lo visto precedentemente $G \neq -G$. Esto prueba que si existe un subconjunto minimal, no vacío, de generadores de B, entonces existe mas de un conjunto en estas condiciones.
En forma natural se plantea el siguiente problema:
¿dos conjuntos minimales de generadores de un álgebra de Boole finita, tienen el mismo número de elementos? La respuesta al mismo es negativa. Pero antes observemos lo siguiente: si consideramos el álgebra de Boole B_2 cuyo diagrama indicamos en la Figura 2.1 entonces $\mathcal{G}(B_2)$ tiene el diagrama indicado en la Figura 2.2, lo que muestra que todos los elementos minimales de $\mathcal{G}(B_2)$ tienen todos 1 elemento.

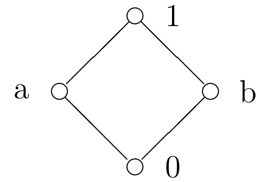

Fig. 2.1

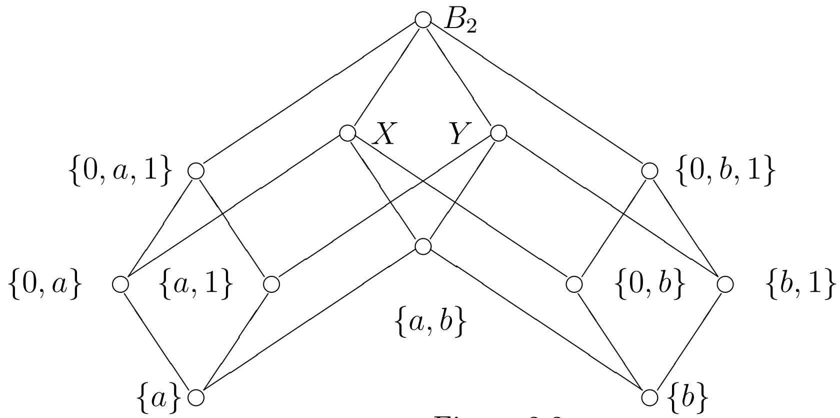

Figura 2.2

donde $X = \{0, a, b\}$ e $Y = \{a, b, 1\}$.
Consideremos ahora el álgebra de Boole B_3 cuyo diagrama se indica en la Figura 2.3.

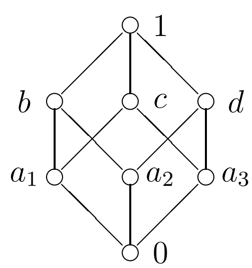

Figura 2.3

Entonces es fácil ver que los conjuntos minimales de generadores de B_3 son $G_1 = \{a_1, b\}$, $G_2 = \{a_1, c\},\ G_3 = \{a_2, b\},\ G_4 = \{a_2, d\},\ G_5 = \{a_3, c\},\ G_6 = \{a_3, d\},\ G_7 = \{a_1, a_3\}$, $G_8 = \{a_1, a_2\},\ G_9 = \{a_2, a_3\},\ G_{10} = \{b, d\},\ G_{11} = \{c, d\},\ G_{12} = \{b, c\}$.
Consideremos el álgebra de Boole B_4 cuyo diagrama de Hasse se indica a continuación:

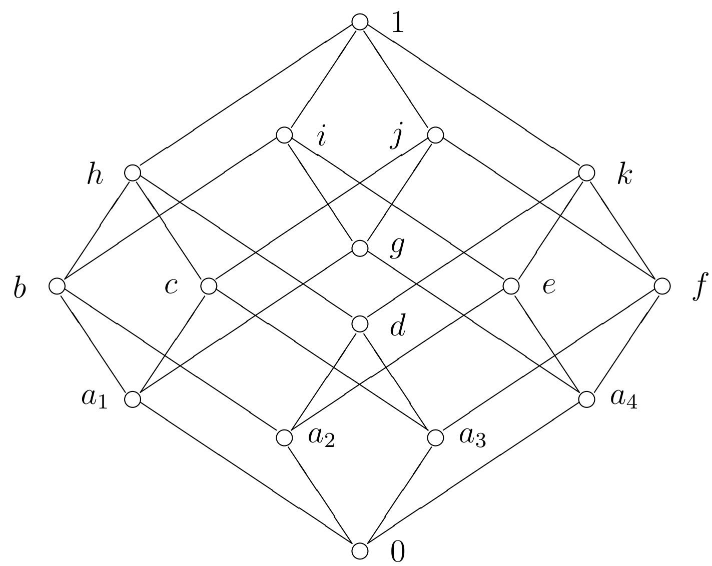

Figura 2.4

En este caso el conjunto $G = \{a_1, b, h\}$ genera B_4 y cualquier subconjunto propio de G no genera a B_4, por lo tanto G es un conjunto minimal de generadores de B_4. Por otro lado es bien conocido que B_4 es un álgebra de Boole con dos generadores libres: por ejemplo $\{e, f\}$ es un conjunto de generadores libres de B_4. Tenemos así dos conjuntos minimales de generadores que no tienen el mismo número de elementos.
El ejemplo precedente nos sugiere el siguiente problema: Dada un álgebra de Boole finita, determinar un conjunto de generadores de B, con un número mínimo de elementos.

Lema 2.3 *El álgebra de Boole $FB(n)$ con n generadores libres, $n \in \mathbf{N}$ no puede ser generada por un conjunto de m elementos, donde $m < n$.*

Demostración. Sea $X = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\} \subseteq FB(n)$, donde $m < n$, un conjunto tal que $SB(X) = FB(n)$ y $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_m, g_{m+1}, \ldots, g_n\}$ un conjunto de generadores libres de $FB(n)$.
Consideremos la función $f : G \to FB(n)$ definida por:

$$\begin{cases} (1) \;\; f(g_i) = b_i, \;\; 1 \leq i \leq m \\ y \\ (2) \;\; f(g_i) = b_m, \;\; m+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Entonces como $FB(n)$ es un álgebra de Boole libre, f se puede extender a un homomorfismo H de $FB(n)$ en $FB(n)$. Observemos que H es suryectiva pues $H(FB(n)) = SB(H(G)) = SB(X) = FB(n)$. Es claro que H no es inyectiva, luego $Nuc\ (H) \neq \{1\}$. Como $Nuc\ (H)$ es un filtro principal entonces $Nuc\ (H) = [f)$ con $f \in FB(n), f \neq 1$. Sea $\varphi : FB(n) \to FB(n)/[f)$ el epimorfismo natural, luego $Nuc\ (\varphi) = [f)$ y como $H : FB(n) \to FB(n)$ es un epimorfismo y $[f)$ es su núcleo entonces $FB(n)$ es isomorfa a

$FB(n)/[f)$. Por el Lema 2.1 sabemos que $FB(n)/[f)$ es isomorfa al álgebra de Boole $(f]$. Como $f \neq 1$, entonces el número de átomos del álgebra de Boole $(f]$ es menor que 2^n, lo que es una contradicción. $\square$

Teorema 2.1 *Dada un álgebra de Boole B_k, sea n el menor entero tal que $k \leq 2^n$, esto es $2^{n-1} < k \leq 2^n$. Entonces n es el menor cardinal de un conjunto de generadores de B_k.*

Demostración. Vamos a probar en primer lugar que B_k no puede tener un conjunto de generadores G tal que $N[G] < n$.
Si $k = 2^n$ entonces B_k es un álgebra de Boole con n generadores libres y vimos en el Lema 2.3 que esta álgebra no puede tener un conjunto de generadores con menos de n elementos.
Supongamos ahora que $k \neq 2^n$ esto es $2^{n-1} < k < 2^n$ y que B_k tiene un conjunto de generadores G tal que $N[G] = m < n$. Luego B_k es una imagen homomórfica del álgebra de Boole $FB(m)$ con m generadores libres. Como $FB(m)$ tiene 2^m átomos entonces el número k de átomos de B_k es tal que $k < 2^m$ lo que contradice la hipótesis sobre n de que $m < n$.
Vamos a demostar que B_k tiene un conjunto G de generadores tal que $N[G] = n$.
Para ello vamos a comenzar por recordar una forma de construir $FB(n)$ que indicaramos en nuestros cursos [4]. Sea $\mathbf{B} = \{0, 1\}$ un álgebra de Boole con dos elementos, y consideremos el producto cartesiano $\mathbf{C}(n)$ de n álgebras de Boole $\mathbf{B}$, luego los elementos $\mathbf{x} \in \mathbf{C}(n)$ son de la forma $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donde $x_i \in \mathbf{B}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.
Sabemos que la familia de todas las partes de $\mathbf{C}(n)$,esto es $\mathcal{P}(\mathbf{C}(n))$ es un álgebra de Boole, que tiene 2^n átomos y por lo tanto ella es isomorfa al álgebra de Boole $FB(n)$. Además si para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, consideramos el conjunto

$$G_i = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}(n) : x_i = 1\}$$

entonces $G_i \in \mathcal{P}(\mathbf{C}(n)),\ \ 1 \leq i \leq n$ son los generadores libres de $\mathcal{P}(\mathbf{C}(n)) \cong FB(n)$.
Observemos que los átomos del álgebra de Boole $\mathbf{C}(n)$ son los elementos $\mathbf{a}_i = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donde $x_i = 1$ y $x_j = 0$ para $j \neq i$, $1 \leq i \leq n$. Luego $\mathcal{A}(\mathbf{C}(n)) = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$, y por lo tanto:

$$(1)\ \ \mathbf{a}_i \in G_i \ \ \text{y} \ \ (2)\ \ \mathbf{a}_i \notin G_j, \ \ \text{para} \ \ j \neq i,\ 1 \leq j \leq n.$$

Sea $\mathbf{K}$ un subconjunto de $\mathbf{C(n)}$ con k elementos tal que (3) $\mathcal{A}(\mathbf{C}(n)) \subseteq \mathbf{K}$. Observemos que un tal conjunto puede elegirse de $\binom{2^n-n}{k-n}$ formas diferentes.

Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbf{C}(n)$: $\mathbf{K}_i = \mathbf{K} \cap G_i,\ 1 \leq i \leq n$. Por (1) y (3) $\mathbf{a}_i \in \mathbf{K}_i$, y por (2) $\mathbf{a}_i \notin \mathbf{K}_j$ para $j \neq i$, $1 \leq j \leq n$, en consecuencia estos conjuntos son diferentes dos a dos y por lo tanto tenemos así n conjuntos.
Sabemos que $\mathcal{P}(\mathbf{K})$ es un álgebra de Boole isomorfa a B_k. Vamos a demostrar que $\mathcal{G}' = \{\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n\}$ es un conjunto de generadores de $\mathcal{P}(\mathbf{K})$.
En efecto si $\mathbf{k} \in \mathbf{K} \subseteq \mathbf{C}(n)$ entonces $\{k\} \in \mathcal{P}(\mathbf{C}(n))$ y por lo tanto:

$$\{k\} = G_1^* \cap G_2^* \cap \ldots \cap G_n^*$$

donde $G_i^* = G_i$ ó $G_i^* = \mathcal{C}\ G_i$, luego

$$\{k\} = \{k\} \cap \mathbf{K} = (G_1^* \cap \mathbf{K}) \cap (G_2^* \cap \mathbf{K}) \cap \ldots \cap (G_n^* \cap \mathbf{K}).$$

Poniendo $\mathbf{K}_i^* = G_i^* \cap \mathbf{K}$,tenemos:

$$\{\mathbf{k}\} = \mathbf{K}_1^* \cap \mathbf{K}_2^* \cap \ldots \cap \mathbf{K}_n^*,$$

Si $G_i^* = G_i$ entonces $G_i^* \cap \mathbf{K} = G_i \cap \mathbf{K} = \mathbf{K}_i$ y si $G_i^* = \mathcal{C}\ G_i$ entonces $G_i^* \cap \mathbf{K} = \mathcal{C}\ G_i \cap \mathbf{K} = \mathbf{K} - G_i = \mathbf{K} - (\mathbf{K} \cap G_i) = \mathbf{K} - \mathbf{K}_i$. Por lo tanto $G_i^* \cap \mathbf{K}$ es el complemento de $\mathbf{K}_i$ en $\mathbf{K}$.lo que significa que todo átomo de $\mathcal{P}(\mathbf{K})$ es intersección de los elementos $\mathbf{K}_i^*$ y en consecuencia el conjunto $\mathcal{G}' = \{\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n\}$ genera $\mathcal{P}(\mathbf{K})$. $\square$

Ejemplo 2.1 *Vamos a construir un conjunto minimal de generadores del álgebra de Boole* B_5*. Es claro que* 3 *es el menor número* n *tal que* $5 \leq 2^n$*. Los átomos de* $\mathbf{C}(3)$ *son* $\mathbf{a}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{a}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{a}_3 = (0,0,1)$*. Elijamos dos elementos arbitrarios de* $\mathbf{C}(3)$*, por ejemplo* $\mathbf{a}_4 = (0,0,0)$ *y* $\mathbf{a}_5 = (1,1,1)$*. Entonces* $\mathbf{K} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5\} \subseteq \mathbf{C}(3)$*, y* $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K} \cap G_1 = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_5\}$, $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K} \cap G_2 = \{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5\}$, $\mathbf{K}_3 = \mathbf{K} \cap G_3 = \{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5\}$ *es un conjunto minimal de generadores de* $\mathcal{P}(\mathbf{K})$ *y como* $\mathcal{P}(\mathbf{K}) \cong B_5$*, obtenemos un conjunto minimal de generadores de* B_5*.*

Referencias

[1] G. Birkhoff, *Lattice Theory.* Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. 25, 3rd ed., Providence (1967).

[2] C. Cardot, *Application de la théorie des treillis distributifs à l'étude de la distribution des programmes par télecommande*, Revue générale de l'électricité, 66 (1957), 27-39.

[3] M. Denis-Papin, A. Kaufmann et R. Faure, *Cours de calcul Booléien appliqué*, Éditions Albin Michel, Paris (1963), Chapitre 10.

[4] A. Monteiro, *Notas de Cursos sobre Reticulados Distributivos y Algebras de Boole*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, (1957-1966).

[5] A. Monteiro, *Générateurs des réticulés distributifs finis.* Actas del Simposium Panamericano de Matemática Aplicada (Panamerican Symposium of Applied Mathematics), Buenos Aires, (1968), 465.