Les Algèbres de Hilbert linéaires

Antonio Monteiro

Seminaire de Logique Algèbrique [1]

Instituto de Matemática - Universidad Nacional del Sur - 1961
Bahía Blanca - Argentina

1 Introduction

Définition 1.1 *Soit* $(A, \to, 1)$ *un système formé par un ensemble non vide* A, *une opération binaire* $\to$ *définie sur* A *et un élément* $1 \in A$, *qui vérifie les axiomes suivants:*

H1) $a \to (b \to a) = 1.$

H2) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1.$

H3) $a \to 1 = 1.$

H4) Si $a \to b = 1$ *et* $b \to a = 1$ *alors* $a = b.$

Nous dirons alors que A *est une algèbre de Hilbert.* [5], [1], [2].

Nous pouvons donc affirmer que A est un modèle implicatif au sens de L. Henkin, [3].

Lemme 1.1 *Dans une algèbre de Hilbert, est valable:*

H5) $a \to a = 1$

Définition 1.2 *Nous écrirons* $a \leq b$, *pour indiquer que* $a \to b = 1.$ [3].

Lemme 1.2 *La relation* $\leq$ *est une relation d'ordre, et* $x \leq 1$, *pour tout* $x \in A.$ [3].

Nous dirons que $\leq$ est l'ordre induit par l'opération $\to$, ou plus simplesment que $\leq$ est l'ordre induit.

---

[1] Une première redaction de cettes notes a été faite par L. Monteiro, dans cette Seminaire.

Exemple 1.1 *Remarquons que si* $(A, \leq)$ *est un ensemble totalement ordonné contenant un dernier élément* 1 *et se nous posons :*

$$a \to b = \begin{cases} 1 & si \;\; a \leq b, \\ b & si \;\; a > b. \end{cases}$$

alors A *est une algèbre de Hilbert par raport a l'opération binaire* $\to$ *que nous venons de définir sur* A *et en outre l'ordre induit coïncide avec l'ordre initial (A. Tarski).*

Lemme 1.3 *Dans une algèbre de Hilbert sont valables:*

H6) $1 \to a = a$.

H7) $a \to (a \to b) = a \to b$.

H8) $a \to b = 1$ *si et seulement si* $a \to (a \to b) = 1$.

H9) Si $b \leq c$ *alors* $a \to b \leq a \to c$.

H10) Si $a \leq b$ *alors* $b \to c \leq a \to c$.

H11) Si $a \to (b \to c) = b \to (a \to c) = (a \to b) \to (a \to c)$.

H12) $a \to ((a \to b) \to b) = 1$.

Définition 1.3 *Nous dirons qu'un sous-ensemble* D *d'une algèbre de Hilbert* A*, est un système déductif, si:*

D1) $1 \in D$,

D2) Si $a \in D$ *et* $a \to b \in D$ *alors* $b \in D$*, (modus ponens).*

Si $D \neq A$ *nous dirons que* D *est un système déductif propre.*

Il est claire que $D = \{1\}$ est un système déductif. Toute système déductif D d'une algèbre de Hilbert A est une section supérieure de l'ensemble ordonné $(A, \leq)$, c'est-à-dire " Si $x \in D$ et $x \leq y$ alors $y \in D''$.

Définition 1.4 *Si* H *est un sous-ensemble d'une algèbre de Hilbert* A*, nous donnerons le nom de système déductif engendré par* H *a l'intersection* $D(H)$ *de tous les systèmes déductifs, qui contiennent l'ensemble* H*.*

Si $H = \{a\}$, nous notérons $D(a)$ au lieu de $D(\{a\})$, et si D est un système déductif d'une algèbre de Hilbert A, et $a \in A$, alors nous notérons $D(D, a)$ au lieu de $D(D \cup \{a\})$.

Lemme 1.4 *1)* $D(a) = \{x \in A : a \to x = 1\}$.

2) Si $H = \{a, b\}$, *alors* $D(H) = \{x \in A : a \to (b \to x) = 1\}$.

3) $D(D, a) = \{x \in A : a \to x \in D\}$.

Définition 1.5 *Un système déductif D d'une algèbre de Hilbert A, sera dit:*

I) Irréductible, *si: I1) D est propre, et I2) Si D_1, D_2 sont des systèmes déductifs tels que $D = D_1 \cap D_2$, alors $D = D_1$ ou $D = D_2$.*

C) Complètement irréductible, *si: C1) D est propre, et C2) Etant donnée une famille $\{D_i\}_{i \in I}$ de systèmes déductifs telles que $D = \bigcap_{i \in I} D_i$, alors il existe un indice $i_0 \in I$ tel que $D = D_{i_0}$.*

M) Maximal, *si : M1) D est propre et M2) Si C est un système déductif tel que $D \subseteq C$ alors $C = D$ ou $C = A$.*

F) Un Fil, *si : F1) D est propre et F2) La famille de tous les systèmes déductifs propres qui contiennent D est une chaîne .*

Il est clair que tout système déductif complètement irréductible est irréductible, mais dans certaines algèbres de Hilbert il y a des systèmes déductifs irréductibles qui ne sont pas complètement irréductibles.

Exemple 1.2 *Soit* $\mathbf{R}$ *l'ensemble des nombres réels, et $[0, 1] = \{x \in R : 0 \leq x \leq 1\}$. Comme $[0, 1]$ est une chaîne avec dernier élément 1, si nous considèrons l'opération binaire $\to$ définie comme dans l'exemple 1.1, alors $([0, 1], \to, 1)$ est une algèbre de Hilbert. Soit a tel que $0 < a < 1$, alors l'ensemble $[a) = \{x \in [0, 1] : a \leq x\}$ est un système déductif irréductible qui n'est pas complètement irréductible, car si $0 < \varepsilon < a$ alors:*

$$[a) = \bigcap_{0<\varepsilon<a} [a - \varepsilon)$$

et $[a - \varepsilon) \neq [a)$, pour tout ε, $\quad 0 < \varepsilon < a$.

Observation 1.1 *Remarquons que l'ensemble $(0, 1] = \{x \in \mathbf{R} : 0 < x \leq 1\} \subset [0, 1]$ est un système déductif maximal, et $(0, 1]$ est d'ailleurs le seul système déductif maximal de $[0, 1]$. Alors il est clair que dans l'algèbre de Hilbert $((0, 1], \to, 1)$ il n'existe aucun système déductif maximal.*

Lemme 1.5 *Soit D un système déductif propre d'une algèbre de Hilbert A, $h \in A - D$ (donc $h \neq 1$), et* $\mathbf{C}$ *la famille de tous les systèmes déductifs C de A qui vérifient:*

$$(1)\ \ D \subseteq C, \ \ (2)\ \ h \notin C,$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{C} = \{C \in \mathcal{D} : D \subseteq C,\ h \notin C\}.$$

Alors $\mathbf{C}$ *est inductive supérieurement.*

Les systèmes déductifs maximaux de la famille $\mathbf{C}$ seront dites des *systèmes déductifs liés à h.*

Théorème 1.1 *Pour qu'un système déductif D soit complètement irréductible il faut et il suffit que D soit lié à un élément h, $(h \notin D)$.*

Théorème 1.2 *Tout système déductif propre est l'intersection de systèmes déductifs complètement irréductibles.*

Corollaire 1.1 *Tout système déductif propre est l'intersection de systèmes déductifs irréductibles.*

Théorème 1.3 *Pour qu'un système déductif propre C soit complètement irréductible, il faut et il suffit qu'il existe un élément $c \notin C$ tel que pour tout $a \notin C$ l'on ait $a \to c \in C$.*

Théorème 1.4 *Si C est un système déductif lié à l'élément $a \to c$, alors $a \in C$.*

Théorème 1.5 *Pour qu'un système déductif propre D soit irréductible, il faut et il suffit qu'étant donnés deux éléments $a, b \notin D$ il existe un élément $c \notin D$ tel que $a \to c \in D$, $b \to c \in D$.*

Théorème 1.6 *Pour qu'un système déductif M soit maximal, il faut et il suffit que: 1) M soit propre, et 2) Si $a, b \notin M$ alors $a \to b \in M$.* [2]

2 Algèbres de Hilbert linéaires

Définition 2.1 *Une algèbre de Hilbert A sera dite un fil ou une chaîne si l'ordre induit est total, c'est-à-dire si $(A, \leq)$ est une chaîne.*

Etant donnée une famille non vide $\{L_i : i \in I\}$ de chaînes (chacune desquelles a un dernier élément 1_i, $i \in I$), soit $L = \prod_{i \in I} L_i$, le *produit direct ou cartésien* des algèbres L_i, $i \in I$, alors L est une algèbre de Hilbert.

[2] Les démonstrations de tous les résultats précédants se trouvent dans les notes du cours de A. Monteiro [5], voir aussi [6].

Définition 2.2 *Nous donnerons le nom d'algèbre de Hilbert linéaire a toute sous-algèbre de L.*

Théorème 2.1 *Si A est une algèbre de Hilbert linéaire alors:*

$$(\mathcal{L}) \quad ((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c) = 1,$$

quelques soient $a, b, c \in A$.

Dém. On reconnâit facilement que $(\mathcal{L})$ est verifiée dans une chaîne, avec un dernier élément 1, d'où l'on déduit que $(\mathcal{L})$ est verifiée dans A. $\square$

Nous nous proposons de demontrer le théorème suivant:

Théorème 2.2 *Pour qu'une algèbre de Hilbert soit linéaire il faut et il suffit que la condition $(\mathcal{L})$ soit verifiée.*

Dém. Il est claire que la condition est necessaire. Dans le §7 nous montrérons que la condition es suffisante. $\square$

3 Caractérisation des algèbres linéaires au moyen d'une propriété des systèmes déductifs complètement irréductibl

Nous allons traduire la condition $(\mathcal{L})$ au moyen d'une propriété des systèmes déductifs complètement irréductibles.

Théorème 3.1 *Si A est une algèbre linéaire alors la famille de touts les systèmes déductifs qui contiennent un système déductif complètement irréductible C, ordonée par la rélation d'inclusion, est une chaîne.*

Dém. Soit C un système déductif complètement irréductible et supposons qu'il existent deux systèmes déductifs propres D_1, D_2 contenant C et que soient incomparables.
D'aprés le théorème 1.1, le système déductif C est un système déductif *maximal* parmi ceux que ne contiennent pas un certain élément $c \in A - C$. Alors nous pouvons affirmer que $c \in D_1 \cap D_2$. Soit $a \in D_1 - D_2$, et $b \in D_2 - D_1$. De $b \leq a \to b$ et $b \in D_2$ on déduit que:

$$(1) \quad a \to b \in D_2,$$

en outre nous pouvons affirmer que:

$$(2) \quad a \to b \notin D_1,$$

car autrement de $a \in D_1$ et $a \to b \in D_1$, on déduirait $b \in D_1$ c'est qui est impossible par hypothèse.
D'une façon analogue on démontre que:

$$(3) \quad b \to a \in D_1, \qquad \text{et} \qquad (4) \quad b \to a \notin D_2.$$

En particulier nous pouvons affirmer que:

$$(5)\ \ a \to b \notin C, \qquad \text{et} \qquad (6)\ \ b \to a \notin C.$$

De (5) et (6), en tenant compte du théorème 1.3, on déduit respectivement:

$$(7)\ \ (a \to b) \to c \in C, \qquad (8)\ \ (b \to a) \to c \in C.$$

De (7) et ($\mathcal{L}$) il resulte:

$$(9)\ \ ((b \to a) \to c) \to c \in C.$$

De (8) et (9) on déduit que $c \in C$, et cette contradiction termine la démonstration. □

Nous allons maintenant démontrer que la propriété des systèmes complètement irréductibles indiquée dans le théorème 3.1 est caractéristique pour les algèbres linéaires, c'est-à-dire:

Théorème 3.2 *Si A est une algèbre de Hilbert telle que la famille des systèmes déductifs qui contiennent un système déductif complètement irréductible C forment une chaîne, alors A est une algèbre linéaire.*

Dém. Supposons que la condition ($\mathcal{L}$) n'est pas vérifiée, cela veut dire q'uil existent des éléments $a, b, c, \in A$ telles que:

$$(1)\quad ((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c) \neq 1.$$

Soit D le système déductif engendré par les éléments $(a \to b) \to c$ et $(b \to a) \to c$, nous savons, voir lemme 1.4,2), que D est la famille de tous les $x \in A$ tels que:

$$((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to x) = 1,$$

d'où l'on déduit que $c \notin D$, car autrement on aurait

$$((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c) = 1,$$

ce que est impossible par hypothèse.
Soit C un système déductif maximal, parmi ceux qui contiennent D sans contenir l'élément c, et $D_1 = D(C, a) = \{x \in A : a \to x \in C\}$, donc $b \notin D_1$, car si $b \in D_1$, alors $a \to b \in C$ et comme $(a \to b) \to c \in C$ on aurait $c \in C$ cet qui est impossible.
Si $D_2 = D(C, b) = \{x \in A : b \to x \in C\}$, alors d'une façon annalogue on démontre que $a \notin D_2$.
Dans ces conditions C serait contenu dans deux systèmes déductifs incomparables D_1 et D_2, et cette contradiction termine la démonstration. □

4 Caractérisation des algèbres linéaires par des propriétés des systèmes déductifs irréductibles

Les résultats indiqués dans le § 3 sont suffisants pour élaborer la théorie de représentation que nous allons indiquer dans le §7; mais pour l'étude des algèbres linéaires libres nous aurons besoin d'indications plus complètes sur les propiétés des systèmes déductif irréductibles, etant donné que dans une algèbre de Hilbert linéaire il peuvent existir des systémes déductifs irréductibles que ne sont pas complètement irréductibles.

Théorème 4.1 *Si D est un système déductif d'une algèbre de Hilbert ayant la propriété suivante:*

- [Propriété $\mathcal{P}$] :Si $a, b \notin D$ alors ou bien $a \to b \in D$ ou bien $b \to a \in D$.

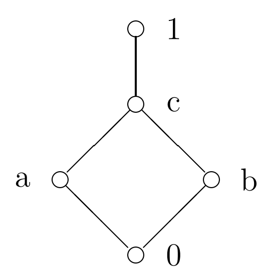
alors D est irréductible.

Dém. Soit D un système déductif ayant la propriété $\mathcal{P}$ et supposons que D soit réductible, c'est-à-dire qu'il existent deux systèmes déductifs D' et D'' tels que:

$$(1) \quad D = D' \cap D'' \qquad \text{et} \qquad (2) \quad D \neq D', \ \ D \neq D''.$$

Il est clair que D' et D'' étant deux ensembles incomparables, donc il existent des éléments $a \in D' - D''$, $b \in D'' - D'$, en particulier $a, b \notin D$. De la proprieté $\mathcal{P}$ on déduit que nous aurons soit $a \to b \in D$, soit $b \to a \in D$.
Si $a \to b \in D$, alors de $a \in D'$ et $a \to b \in D'$ on déduit $b \in D'$ ce qui est impossible par hyphothèse. On arrive aussi à une contradiction si l'on suppose que $b \to a \in D$. Nous pouvons donc affirmer que D est irréductible. $\square$

Dans une algèbre de Hilbert il peuvent exister des systèmes déductifs irréductibles qui n'ont pas la propriété $\mathcal{P}$.
En effet considèrons le réticulé distributif fini A dont le diagramme est indiqué dans la figure suivante.



Il est bien connu que tout réticulé distributif fini est une algèbre de Heyting, donc A est aussi une algèbre de Hilbert. Dans ce cas nous avons $a \to b = b$, $b \to a = a$. L'ensemble $D = \{1\}$ est un système déductif irréductible que n'a pas la propriété $\mathcal{P}$.

Nous allons démontrer que cette circonstance ne se présente pas dans les algèbres linéaires.

Théorème 4.2 *Dans une algèbre linéaire tout système déductif irréductible a la propriété $\mathcal{P}$.*

Dém. Soit A une algèbre linéaire, P un système irréductible de A, $a, b \notin P$ et supposons que $a \to b \notin P$ et $b \to a \notin P$. Soient:

$$(1) \quad D' = D(P, a \to b) = \{x \in A : (a \to b) \to x \in P\}$$

et

$$(2) \quad D'' = D(P, b \to a) = \{x \in A : (b \to a) \to x \in P\}$$

Comme P est irréductible nous pouvons affirmer que $P \subset D' \cap D''$, alors il existe un élément $c \in (D' \cap D'') - P$. De $c \in D'$ et de (1) on déduit que $(3)(a \to b) \to c \in P$. De $c \in D''$ et de (2) on déduit que (4) $(b \to a) \to c \in P$. De (3) et ($\mathcal{L}$) on déduit (5) $(((b \to a)) \to c) \to c \in P$. De (4) et (5) il résulte que $c \in P$. Cette contradiction termine la démonstration. $\square$

Corollaire 4.1 *Dans une algèbre linéaire pour qu'un système déductif P soit irréductible il faut et il suffit qu'il ait la propriété $\mathcal{P}$.*

Nous allons maintenant montrer que les algèbres linéaires sont les seules algèbres de Hilbert où les systèmes déductifs irréductibles peuvent être caractérisés par la propriété $\mathcal{P}$.

Théorème 4.3 *Si A est une algèbre de Hilbert ayant la propriété suivante:*

- [Propriété $\mathcal{E}$] : Pour qu'un système déductif P soit irréductible il faut el il suffit que P ait la propriété $\mathcal{P}$,

alors A est une algèbre linéaire.

Dém. Si A n'est pas une algèbre linéaire, il existe d'après le théorème 3.2, un système déductif complètement irreductible C qui est contenu dans deux systèmes déductifs incomparables D' et D''. Soient $a \in D' - D''$, $b \in D'' - D'$. Comme C est un système irréductible, des conditions $a, b \notin C$ on déduit, en tenant compte de la propriété $\mathcal{E}$ (que nous supposons vérifiée dans A) , que ou $a \to b \in C$ ou $b \to a \in C$. Si $a \to b \in C$, de $a \in D'$ et $a \to b \in D'$ on déduit $b \in D'$, ce qui est impossible. De même de $b \to a \in C$ on déduit aussi une contradiction. Cela montre bien que A est une algèbre linéaire. $\square$

Démontrons maintenant que:

Théorème 4.4 *Dans une algèbre linéaire tout système déductif irréductible est un fil.*

Dém. Supposons que dans une algèbre linéaire il existe un système déductif irreductible P que soit contennu dans deux systèmes déductifs incomparables D' et D''. Soient $a \in D' - D''$, $b \in D'' - D'$. Alors de $a, b \notin P$ on déduit, voir théorèmes 4.1 et 4.2, que l'on a: soit $a \to b \in P$ soit $b \to a \in P$. Dans le premier cas de a, $a \to b \in D'$, on déduit $b \in D'$ ce qui est impossible, de même dans le second cas, et la démonstration est terminée. □

Finalement nous pouvons énoncer le résultat suivant:

Théorème 4.5 *Pour qu'une algèbre de Hilbert soit une algèbre linéaire il faut et il suffit que tout système déductif irréductible soit un fil.*

Dém. C'est une consequence immédiate des théorèmes 4.4, 3.1, et 3.2. □

5 Nouvelle caractérisation des algèbres linéaires

En utilisant les résultats précèdentes nous allons obtenir une nouvelle caractérisation des algèbres linéaires.

Remarquons qu'en général dans une algèbre de Hilbert, deux éléments a et b n'ont pas une borne supérieure, mais lorsque cette borne existe nous la representerons par $a \vee b$.

Théorème 5.1 *Pour qu'une algèbre de Hilbert A soit une algèbre linéaire il faut et suffit que $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$, pour tout couple $a, b \in A$.*

Dém. *La condition est necessaire.* Supposons que A soit une algèbre linéaire et que $(a \to b) \vee (b \to a) \neq 1$. Cela signifie qu'il existe un élément $x \neq 1$ tel que:

$$(1) \quad a \to b \leq x \ \ ; \ \ (2) \quad b \to a \leq x.$$

De $x \neq 1$ on déduit qu'il existe un système déductif complètement irréductible P, et alors irréductible, que ne contiennent pas l'élément x. De $b \leq a \to b$ et de (1) on déduit que (3) $b \notin P$, (3′) $a \to b \notin P$. De même on voit que : (4) $a \notin P$, (4′) $b \to a \notin P$. De (3), (4) et du théorème 4.2, on déduit que l'on a, soit $a \to b \notin P$, soit $b \to a \notin P$ ce que est en contradiction avec (3′) et (4′). Cela montre bien que: $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$.
La condition est suffisante. Supposons que :(1) $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$, et que A ne soit pas une algèbre linéaire. D'après le théorème 3.2, il existe un système complètement irréductible C que n'est pas un fil, c'est-à-dire C a les propriétés suivantes:

(2) C est un système déductif maximal parmi ceux que ne contiennent pas un élément c.

(3) Il existent deux systèmes déductifs incomparables D' et D'', qui contiennent C.

Des conditions (2) et (3) on déduit:

$$(4) \quad c \in D' \qquad \text{et} \qquad c \in D''.$$

De la condition (3) on déduit qu'il existent des éléments a et b tels que:

$$(5) \quad a \in D' - D'', \qquad (6) \;\; b \in D'' - D'.$$

Montrons que:

$$(7) \quad a \to b, \;\; b \to a \notin C.$$

En effet, si $a \to b \in C$, comme $C \subseteq D'$ alors $a \to b \in D'$ et comme $a \in D'$ on déduit par *modus ponens* que $b \in D'$, c'est qui est en contradiction avec (6). Analoguement on montre que $b \to a \notin C$. De (2) et (7) on déduit, d'après le théorème 1.3 :

$$(8) \;\; (a \to b) \to c \in C, \qquad (9) \;\; (b \to a) \to c \in C.$$

Considérons l'élément:

$$x = ((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c) = ((b \to a) \to c) \to (((a \to b) \to c) \to c).$$

D'après H12), nous avons:

$$b \to a \leq ((b \to a) \to c) \to c \leq x \quad ; \quad a \to b \leq ((a \to b) \to c) \to c \leq x.$$

d'où, en tenant compte de (1): (10) $\quad x = 1 \in C$. De (9) et (10) on déduit:

$$(11) \;\; ((a \to b) \to c) \to c \in C$$

et alors de (8) et (11) on déduit $c \in C$, et cette contradiction termine la démonstration. □

6 Le radical linéaire

Nous donnerons le nom de *radical* d'une algèbre de Hilbert A, à l'intersection $\mathcal{R}(A)$ de tous les systèmes déductifs maximaux de A. Dans le cas où A n'a aucun système déductif maximal alors $\mathcal{R}(A) = A$.
En général une algèbre de Hilbert A n'est pas linéaire. Nous nous proposons de déterminer les images homomorphes de A que sont linéaires. Pour cela nous avons besoin d'un certain nombre de notions.

Définition 6.1 *Le radical linéaire d'une algèbre de Hilbert A est l'intersection $\mathcal{RL}(A)$ de tous le fils de A.*

Comme les systèmes déductifs maximaux sont des fils, on peut afirmer que:

Lemme 6.1 *Le radical linéaire de A est contenu dans le radical de A, c'est-à-dire $\mathcal{RL}(A) \subseteq \mathcal{R}(A)$.*

Démontrons maintenant que:

Théorème 6.1 *Le radical linéaire de A est identique au système déductif engendré par tous les éléments de la forme:*

$$((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c),$$

où $a, b, c \in A$.

Dém. (I) $((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c) \in \mathcal{RL}(A)$, quelques soient $a, b, c \in A$. Supposons qu'il existent des éléments $a, b, c \in A$, tels que:

$$((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c) \notin \mathcal{RL}(A),$$

alors il existe un fil F tel que:

$$((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c) \notin F$$

Des rélations (voir H12):

$$a \leq b \to a \leq ((b \to a) \to c) \to c \leq ((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c),$$

on déduit que $b \to a \notin F$.
Remarquons maintenat que:

$$((b \to a) \to c) \to (((a \to b) \to c) \to c) = ((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c) \notin F,$$

et alors des rélations:

$$b \leq a \to b \leq ((a \to b) \to c) \to c \leq ((b \to a) \to c) \to (((a \to b) \to c) \to c),$$

on déduit que $a \to b \notin F$.
Soit $D' = D(F, a) = \{x \in A : a \to x \in F\}$. Comme $a \to b \notin F$, on voit que $b \notin D'$. D'une façon analogue on voit que $a \notin D'' = D(F, b)$. Dans ces conditions F serait contenu dans deux systèmes déductifs incomparables D' et D'', ce qui est impossible car F est un fil et cette contradiction démontre (I).
(II) Le systéme déductif D^* engendré par les éléments de la forme

$$((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c)$$

coïncide avec $\mathcal{RL}(A)$.
D'après (I) nous pouvons affirmer que $D^* \subseteq \mathcal{RL}(A)$. Supposons que $D^* \neq \mathcal{RL}(A)$, et soit $c \in \mathcal{RL}(A) - D^*$. Parmi les systèmes déductifs que contiennent D^*, sans contenir c, il existe un C que est maximal, donc C est un système déductif complètement irréductible liè à c. Comme C n'est pas un fil il existent deux systèmes déductifs incomparables D' et D'' que contiennent C et il est clair que $c \in D' \cap D''$. Soient $a \in D' - D''$, $b \in D'' - D'$, alors $a \to b \in D'' - D'$ et $b \to a \in D' - D''$, d'où l'on déduit que $a \to b$, $b \to a \notin C$ et par conséquant $(a \to b) \to c$, $(b \to a) \to c \in C$.
Comme $((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c) \in C$ nous pouvons affirmer que $((b \to a) \to c) \to c \in C$ d'où l'on déduit, en apliquant de nouveau le *modus ponens*, que $c \in C$. Cette contradiction montre que $D^* = \mathcal{L}(A)$. $\square$

7 Réprésentation des algèbres linéaires

Soient A et A' des algèbres de Hilbert et h un homomorphisme de A sur A', c'est-à-dire une fonction de A sur A' qui vérifie:

$$\text{H)}\ \ h(x \to y) = h(x) \to h(y).$$

Nous dirons alors que A' est une image homomorphe de A. Observons que $h(1) = h(x \to x) = h(x) \to h(x) = 1'$.
Soit $D = h^{-1}(1') = \{x \in A : h(x) = 1'\}$. D s'appelle *le noyau de l'homomorphisme h.* Il est facile a voir que D est un système déductif de A.
Il est important de savoir déterminer toutes les images homomorphes d'une algèbre de Hilbert.
Soit D un système déductif d'une algèbre de Hilbert A. Nous écrirons $a \equiv b$, (mod. D) ou plus simplesment (si D est fixée) $a \equiv b$, pour indiquer que $a \to b, b \to a \in D$, alors il est bien connu [5], [1], [2] que "$\equiv$" est une congruence définie sur A. Soit $|a|$ la classe d'équivalence qui contiente l'élément $a \in A$, c'est-à-dire $|a| = \{x \in A : x \equiv a\}$, et soit $A' = A/\equiv$ l'ensemble quotient de A par la relation "$\equiv$". Algèbrisons A' en définissant l'opération $\to$ sur A' par le formule: $|a| \to |b| = |a \to b|$. Soit $1^{'} = |1|$. Dans ces conditions la transformation $h(a) = |a|$ vérifie la condition H) d'où l'on déduit de suite que $(A', \to, 1^{'})$ est une algèbre de Hilbert, et que A' est une image homomorphe de A. Nous écrirons A/D pour représenter l'algèbre de Hilbert obtenue de cette manière. On vérifie facilement, les images homomorphes A' d'une algèbre de Hilbert A peuvent être obtenues de la manière que nous venons d'indiquer. [5]

Lemme 7.1 *Si A, A' sont des algèbres de Hilbert, $h : A \to A'$ un homomorphisme de A sur A', $P = \{x \in A : h(x) = 1\}$ le noyau de h, et D un système déductif de A, alors:*

1) Si $P \subseteq D$, $h(D)$ est un système déductif de A'.

2) Si D' est un système déductif de A', alors $D = h^{-1}(D')$ est un système déductif de A qui contient P.

3) Si D est un système déductif de A qui contient P, alors $h^{-1}(h(D)) = D$.

4) Soit $\mathbf{D}(A, P)$ l'ensemble de tous les systèmes déductifs de A qui contienent P, et $\mathbf{D}(A')$ l'ensemble de tous les systèmes déductifs de A'. Alors la transformation h est un isomorphisme entre les ensembles ordonnés $(\mathbf{D}(A, P), \subseteq)$ et $(\mathbf{D}(A'), \subseteq)$.

Dém.

1) Comme $1 \in D$ alors $1' = h(1) \in h(D)$. Supposons que a', $a' \to b' \in h(D)$, alors $a' = h(a)$ où (i) $a \in D$ et $a' \to b' = h(d)$ où $d \in d$. Comme h est suryective $b' = h(b)$ où $b \in A$. Donc $h(a \to b) = h(a) \to h(b) = h(d) \in h(D)$. Donc $a \to b \in P$ et comme $P \subseteq D$ on a (ii) $a \to b \in D$. De (i) et (ii) on déduit que $b \in D$, donc $b' = h(b) \in h(D)$.

2) Comme $h(1) = 1' \in D'$, alors $1 \in h^{-1}(D')$. Supposons que a, $a \to b \in h^{-1}(D')$, alors $h(a) \in D'$ et $h(a) \to h(b) = h(a \to b) \in D'$, donc comme D' est un système déductif $h(b) \in D'$ c'est-à-dire $b \in h^{-1}(D')$. Si $p \in P$, c'est-à-dire $h(p) = 1' \in D'$ alors $p \in h^{-1}(D')$.

3) D'après l'hypothèse et 1) $h(D)$ est un système déductif de A', donc d'aprés 2) $h^{-1}(h(D))$ est un système déductif de A qui contient P. En outre $D \subseteq h^{-1}(h(D))$. Montrons maintenant que $h^{-1}(h(D)) \subseteq D$. En effet soit $x \in h^{-1}(h(D))$, c'est-à-dire $h(x) = x' \in h(D)$. Alors il existe (i) $d \in D$ tel que $h(d) = x'$, donc $h(d \to x) = h(d) \to h(x) = x' \to x' = 1'$, c'est-à-dire $d \to x \in P$ et comme $P \subseteq D$ on a (ii) $d \to x \in D$. De (i) et (ii) on déduit $x \in D$.

4) D'après 1) $h : (\mathbf{D}(A, P), \subseteq) \to (\mathbf{D}(A'), \subseteq)$. Soit $D' \in \mathbf{D}(A')$, d'après 2) $D = h^{-1}(D') \in \mathbf{D}(A, P)$, donc d'après 1) $h(D) = h(h^{-1}(D')) \in \mathbf{D}(A')$, et comme h est une fonction de A sur A' on a $h(h^{-1}(D')) = D'$, alors on a que h est une suryection de $(\mathbf{D}(A, P), \subseteq)$ dans $(\mathbf{D}(A'), \subseteq)$. Montrons que si D_1, D_2 sont des systèmes déductifs tels que $P \subseteq D_1, D_2$ alors $D_1 \subseteq D_2$ si et seulement si $h(D_1) \subseteq h(D_2)$. En effet, si $d' \in h(D_1)$ alors $d' = h(d)$ où $d \in D_1$, donc $d \in D_2$ et alors $d' = h(d) \in h(D_2)$. Reciproquement soit $d_1 \in D_1$ alors $d' = h(d_1) \in h(D_1) \subseteq h(D_2)$, donc $d' \in h(D_2)$. Alors $d' = h(d_2)$ où $d_2 \in D_2$, donc $h(d_2 \to d_1) = 1'$, c'est-à-dire $d_2 \to d_1 \in P$ et comme $P \subseteq D_2$, alors $d_2 \to d_1 \in D_2$ et comme $d_2 \in D_2$ on a finalement $d_1 \in D_2$.

$\square$

D'après le lemme 7.1 et le théorème 4.4 nous avons:

Lemme 7.2 *Si P est un système déductif irréductible d'une algèbre de Hilbert linéaire A, alors $Q = A/P$ est une chaîne.*

Théorème 7.1 *Toute algèbre de Hilbert linéaire A, avec plus d'un élément est isomorphe a une sous-algèbre d'un produit cartésien d'algèbres de Hilbert que sont chaînes.*

Dém. Soit $\mathcal{I}$ la famille des systèmes déductifs irréductibles de A. Pour chaque $P \in \mathcal{I}$ soit $Q_P = A/P$. Nous avons vue que A/P est une chaîne. Soit

$$A' = \prod_{P \in \mathcal{I}} A/P.$$

Pour chaque $P \in \mathcal{I}$, soit h_P l'homomorphisme naturel de A sur A/P. Chaque élément $a' \in A'$ peut être representé par:

$$a' = (a_P)_{P \in \mathcal{I}} \text{ où } a_P \in A/P.$$

Étant donné $f \in A$ considérons la fonction $F : \mathcal{I} \to A/P$ définie par l'égalité:

$$F(P) = h_P(f) \in A/P.$$

Il est claire que $F \in A'$. Soit $\mathcal{S}$ la transformation de A dans A' définie par $S(f) = F$. Il est facile a voir que S est un homomorphisme de A dans A'. Montrons que S est un isomorphisme. Soient $f, g \in A$ tels que $f \neq g$, alors nous aurons soit (i) $f \not\leq g$, soit (ii) $g \not\leq f$. Si (i) est vérifiée, alors il existe un système déductif irréductible P tel que $f \in P$ et $g \notin P$, alors $F(P) = 1$ et $G(P) \neq 1$, cela montre que $F \neq G$, c'est-à-dire $\mathcal{S}(f) \neq \mathcal{S}(g)$. Si (ii) est vérifiée la démonstration est analogue. $\square$

Cet dernier résultat montre que la condition du théorème 2.2 est suffisante.

Nous avons ajouté des references bibliographique, posterieúres a 1961.

References

[1] Diego, A., *Sobre álgebras de Hilbert*, Notas de Lógica Matemática 12, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1965.

[2] Diego, A., *Sur les algèbres de Hilbert*, Collection de Logique Mathématique, Série A, 23, Gauthiers-Villars, Paris (1966). Traduction du travail précédent.

[3] Henkin L., *An algebraic characteriztion of quantifiers*, Fund. Math., 37 (1950), 63-74.

[4] Hilbert D., *Die Logischen Grundlagen der Mathematik*, Math. Ann., 88 (1923), 151-165.

[5] Monteiro A., *Cours sur les algèbres de Hilbert et de Tarski*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1960.

[6] Monteiro A., *Sur les algèbres de Heyting Symétriques*, Portugaliae Mathematica, 39 (1980), 1-237.

[7] Tarski A., *Fundamentale Begrif der methodologie der deduktiven Wissenschaftent*, Monatshefte für Mathematik und Physik, 37 (1930), 361-400.

[8] Tarski A., *Logic, Semantics and Methamathematics* (papers from 1923 to 1938) Translated by J.W. Woodger, Oxford, 1956.