ALGEBRAS DE HEYTING

1. Definiciones y reglas de cálculo.

1.1. Definición.

Definición 1.1.1 *Un álgebra* $(A, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ *de tipo* $(2, 2, 2, 0, 0)$ *se dice un* álgebra de Heyting [3], [4] *o* reticulado relativamente pseudo complementado con primer elemento 0 (G. Birkhoff, [1]) *si verifica:*

$H_0)$ $0 \wedge x = 0$

$H_1)$ $x \rightarrow x = 1$

$H_2)$ $(x \rightarrow y) \wedge y = y$

$H_3)$ $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y$

$H_4)$ $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow z) \wedge (x \rightarrow y)$

$H_5)$ $(x \vee y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)$

Lema 1.1.1 *Si* A *es un álgebra de Heyting, entonces* $(A, \wedge, 0, 1)$ *es un reticulado inferior con primer y último elemento.*

Demostración:

$P_1)$ $1 \wedge x = x$

$$1 \wedge x \overset{H_1)}{=} (x \rightarrow x) \wedge x \overset{H_2)}{=} x$$

$P_2)$ $x \wedge 1 = x \wedge x$

$$x \wedge 1 \overset{H_1)}{=} x \wedge (x \rightarrow x) \overset{H_3)}{=} x \wedge x$$

$P_3)$ $1 \rightarrow x = x$

$$1 \rightarrow x \overset{P_1)}{=} 1 \wedge (1 \rightarrow x) \overset{H_3)}{=} 1 \wedge x \overset{P_1)}{=} x$$

$P_4)$ $x \wedge y = y \wedge x$

$$x \wedge y \overset{P_3)}{=} 1 \rightarrow (x \wedge y) \overset{H_4)}{=} (1 \rightarrow y) \wedge (1 \rightarrow x) \overset{P_3)}{=} y \wedge x$$

$P_5)$ $x \wedge x = x$

$$x \overset{P_1)}{=} 1 \wedge x \overset{P_4)}{=} x \wedge 1 \overset{P_2)}{=} x \wedge x$$

$P_6)$ $x \wedge (x \wedge y) = x \wedge y$

$$x \wedge (x \wedge y) \overset{H_3)}{=} x \wedge (x \rightarrow (x \wedge y)) \overset{H_4)}{=} x \wedge [(x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow x)] =$$
$$\overset{H_1)}{=} x \wedge [(x \rightarrow y) \wedge 1] \overset{P_4)}{=} x \wedge [1 \wedge (x \rightarrow y)] \overset{P_1)}{=} x \wedge (x \rightarrow y) \overset{H_3)}{=} x \wedge y$$

$P_7)$ $x \wedge (y \wedge z) = x \wedge [(x \wedge y) \wedge z]$

$$x \wedge [(x \wedge y) \wedge z] \overset{H_3)}{=} x \wedge [x \rightarrow ((x \wedge y) \wedge z)] \overset{H_4)}{=} x \wedge [(x \rightarrow z) \wedge (x \rightarrow (x \wedge y))] =$$
$$\overset{H_4)}{=} x \wedge [(x \rightarrow z) \wedge ((x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow x))] \overset{H_1)}{=} x \wedge [(x \rightarrow z) \wedge ((x \rightarrow y) \wedge 1)] =$$
$$\overset{P_4)}{=} x \wedge [(x \rightarrow z) \wedge (1 \wedge (x \rightarrow y))] \overset{P_1)}{=} x \wedge [(x \rightarrow z) \wedge (x \rightarrow y)] \overset{H_4)}{=} x \wedge [x \rightarrow (y \wedge z)] =$$
$$\overset{H_3)}{=} x \wedge (y \wedge z)$$

$P_8)$ $(x \wedge y) \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

$$(x \wedge y) \wedge (y \wedge z) \overset{P_7)}{=} (x \wedge y) \wedge [((x \wedge y) \wedge y) \wedge z] \overset{P_4)}{=} (x \wedge y) \wedge [(y \wedge (y \wedge x)) \wedge z] =$$
$$\overset{P_6)}{=} (x \wedge y) \wedge [(y \wedge x) \wedge z] \overset{P_4)}{=} (x \wedge y) \wedge [(x \wedge y) \wedge z] \overset{P_6)}{=} (x \wedge y) \wedge z$$

$P_9)$ $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

$$x \wedge (y \wedge z) \overset{P_4)}{=} (y \wedge z) \wedge x \overset{P_4)}{=} (z \wedge y) \wedge x \overset{P_8)}{=} (z \wedge y) \wedge (y \wedge x) \overset{P_4)}{=} (x \wedge y) \wedge (y \wedge z) =$$
$$\overset{P_8)}{=} (x \wedge y) \wedge z$$

De $P_1)$, $P_4)$, $P_5)$ y $P_9)$ resulta que $(A, \wedge, 0, 1)$ es un reticulado inferior con último elemento 1 y primer elemento 0. ■

Definición 1.1.2 *Pongamos $x \leq y$ para indicar que $x = x \wedge y$.*

Lema 1.1.2 *$\leq$ es una relación de orden parcial en A.*

Demostración:

$O_1)$ $x \leq x$ pues por $P_5), x \wedge x = x$.

$O_2)$ Si $x \leq y$ y $y \leq x$ entonces $x \wedge y = x$ y $y \wedge x = y$. Luego, $x = y$.

$O_3)$ Si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \wedge y = x$ y $y \wedge z = y$. Luego, $x = x \wedge y = x \wedge (y \wedge z) \overset{P_9)}{=} (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z$. Esto es, $x \leq z$.

■

Lema 1.1.3 *El elemento $x \vee y$ es el supremo de x e y con respecto al orden indicado en la definición 1.1.2. Esto es :*

$S_1)$ *$x \leq x \vee y$ e $y \leq x \vee y$.*

$S_2)$ *Si $x \leq z$ e $y \leq z$ entonces $x \vee y \leq z$*

Demostración: Por $H_1)$, $(x \vee y) \to (x \vee y) = 1$; por $H_5)$, $[x \to (x \vee y)] \wedge [y \to (x \vee y)] = 1$. Por lo tanto, $x \to (x \vee y) = 1$ y $y \to (x \vee y) = 1$, lo que prueba $S_1)$.

Si $x \to z = 1$ y $y \to z = 1$, por $H_5)$, $(x \to z) \wedge (y \to z) = (x \vee y) \to z = 1$, esto es, $x \vee y \leq z$. ■

Hemos probado que $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un reticulado con 0 y 1. Además, $\leq$ es el orden correspondiente a la operación $\wedge$ y $\vee$ es el supremo correspondiente al orden $\leq$. Veamos que el reticulado es distributivo. Para ello vamos a demostrar previamente otras reglas de cálculo:

$P_{10})$ $x \leq y \Leftrightarrow x \to y = 1$

$\Rightarrow$ Si $x \leq y, x = x \wedge y$ entonces $x \to x = x \to (x \wedge y)$. Luego por $H_1), 1 = x \to x =$
$= x \to (x \wedge y) \overset{H_4)}{=} (x \to x) \wedge (x \to y) \overset{H_1)}{=} 1 \wedge (x \to y) \overset{P_1)}{=} x \to y$.

$\Leftarrow$ Si $x \to y = 1$ entonces $x \wedge (x \to y) = x \wedge 1 = x; x = x \wedge (x \to y) \overset{H_3)}{=} x \wedge y$, esto es $x \leq y$.

$P_{10'})$ $x \to 1 = 1$

$x \leq 1 \overset{P_{10})}{\Rightarrow} x \to 1 = 1$

$P_{11})$ $x \wedge (x \to y) \leq y$

$x \wedge (x \to y) \overset{H_3)}{=} x \wedge y; (x \wedge y) \wedge y \overset{P_9)}{=} x \wedge (y \wedge y) \overset{P_2)}{=} x \wedge (y \wedge 1) =$
$\overset{P_4)}{=} x \wedge (1 \wedge y) \overset{P_1)}{=} x \wedge y$. Luego, $x \wedge (x \to y) \leq y$.

$P_{11'})$ $y \leq x \to y$

$(x \to y) \wedge y \overset{H_2)}{=} y$. Luego $y \leq x \to y$.

$P_{12})$ $x \wedge z \leq y \Leftrightarrow z \leq x \to y$

$\Rightarrow$ $x \wedge z \leq y \Leftrightarrow x \wedge z = (x \wedge z) \wedge y \Rightarrow x \to (x \wedge z) = x \to [(x \wedge z) \wedge y] \Rightarrow$
$(x \to z) \wedge (x \to x) = (x \to y) \wedge [x \to (x \wedge z)] \Rightarrow x \to z = (x \to y) \wedge (x \to z) \overset{P_9)}{\Rightarrow}$
$(x \to z) \wedge z = (x \to y) \wedge ((x \to z) \wedge z) \overset{H_2)}{\Rightarrow} z = (x \to y) \wedge z \Leftrightarrow z \leq x \to y$

$\Leftarrow$ $z \leq x \to y \Rightarrow z = z \wedge (x \to y) \Rightarrow x \wedge z = x \wedge (x \wedge z) \wedge (x \to y) \Rightarrow$
$x \wedge z \leq x \wedge (x \to y) = x \wedge y \leq y$

$P_{12'})$ $y \to (x \to y) = 1$

$y \to (x \to y) = 1 \Leftrightarrow y \leq x \to y$, y esto es válido por $P_{11'})$.

Lema 1.1.4 $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ *es un reticulado distributivo.*

Demostración: En cualquier reticulado vale

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z).$$

Probemos que $x \wedge (y \vee z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$: Sabemos que $x \wedge y \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ y $x \wedge z \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Por P_{12}), $y \leq x \to [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)]$ y $z \leq x \to [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)]$. Luego, $y \vee z \leq x \to [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)]$, y nuevamente por P_{12})$x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. ■

1.2. Propiedades y reglas de cálculo.

A continuación enunciamos y demostramos otras propiedades y reglas de cálculo para las álgebras de Heyting.

P_{13}) $x \leq y \Leftrightarrow x \leq x \to y$

$x \leq y \Leftrightarrow x = x \wedge y \overset{H_3)}{=} x \wedge (x \to y) \Leftrightarrow x \leq x \to y$

P_{14}) $x \leq y \Rightarrow z \to x \leq z \to y$

$x \leq y \Rightarrow z \wedge (z \to x) \overset{H_3)}{=} z \wedge x \leq z \wedge y \leq y \overset{P_{12})}{\Rightarrow} z \to x \leq z \to y$

P_{15}) $x \leq y \Rightarrow y \to z \leq x \to z$

$y \to z \leq x \to z \overset{P_{12})}{\Leftrightarrow} x \wedge (y \to z) \leq z$. Pero $x \wedge (y \to z) \leq y \wedge (y \to z) = y \wedge z \leq z$.

P_{16}) $x \to (x \wedge y) = x \to y$

$x \to (x \wedge y) \overset{H_4)}{=} (x \to y) \wedge (x \to x) = (x \to y) \wedge 1 = x \to y$

P_{17}) $[x \to (x \wedge y)] \wedge y = y$

$[x \to (x \wedge y)] \wedge y \overset{P_{16})}{=} (x \to y) \wedge y \overset{H_2)}{=} y$

P_{18}) $(x \wedge y) \to z = x \to (y \to z)$

$$(x \wedge y) \to z = x \to (y \to z) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & (x \wedge y) \to z \leq x \to (y \to z) \\ \text{(ii)} & x \to (y \to z) \leq (x \wedge y) \to z \end{cases}$$

$$\overset{P_{12})}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i')} & x \wedge [(x \wedge y) \to z] \leq y \to z \\ \text{(ii')} & (x \wedge y) \wedge [x \to (y \to z)] \leq z \end{cases}$$

$(i') \Leftrightarrow (i'') : y \wedge [x \wedge [(x \wedge y) \to z]] \leq z$
$y \wedge [x \wedge [(x \wedge y) \to z]] \overset{P_9)}{=} (y \wedge x) \wedge [(x \wedge y) \to z] \overset{H_3)}{=} (x \wedge y) \wedge z \leq z.$
$(ii')(x \wedge y) \wedge [x \to (y \to z)] = y \wedge \{x \wedge [x \to (y \to z)]\} = y \wedge [x \wedge (y \to z)] =$
$= x \wedge [y \wedge (y \to z)] = x \wedge (y \wedge z) \leq z.$

P_{19}) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$

$x \to (y \to z) \overset{P_{18})}{=} (x \wedge y) \to z = (y \wedge x) \to z \overset{P_{18})}{=} y \to (x \to z)$

P_{20}) $x \to (x \to y) = x \to y$

$x \to (x \to y) \overset{P_{18})}{=} (x \wedge x) \to y = x \to y$

$P_{21})$ $x \leq (x \to y) \to y$
$x \leq (x \to y) \to y \Leftrightarrow (x \to y) \wedge x \leq y \Leftrightarrow x \wedge (x \to y) = x \wedge y \leq y$

$P_{22})$ $((x \to y) \to y) \to y = x \to y$
Por $P_{21})$, $x \to y \leq ((x \to y) \to y) \to y$ (i) y $x \leq (x \to y) \to y$.
Luego, por $P_{15})$, $[(x \to y) \to y] \to y \leq x \to y$ (ii). De (i) y (ii) se sigue la propiedad.

$P_{23})$ $x \to y \leq (x \wedge z) \to (y \wedge z)$
$x \to y \leq (x \wedge z) \to (y \wedge z) \Leftrightarrow x \wedge z \wedge (x \to y) \leq y \wedge z$. Pero $z \wedge x \wedge (x \to y) \stackrel{H_3)}{=}$
$= z \wedge x \wedge y \leq y \wedge z$.

$P_{24})$ $(x \to y) \wedge (y \to z) \leq x \to z$
$(x \to y) \wedge (y \to z) \leq x \to z \Leftrightarrow x \wedge (x \to y) \wedge (y \to z) \leq z$.
Pero $x \wedge (x \to y) \wedge (y \to z) = x \wedge y \wedge (y \to z) = x \wedge y \wedge z \leq z$

$P_{25})$ $x \to (y \to z) \leq (x \to y) \to (x \to z)$
$x \to (y \to z) \leq (x \to y) \to (x \to z) \Leftrightarrow (x \to y) \wedge [x \to (y \to z)] \leq x \to z \Leftrightarrow$
$x \wedge (x \to y) \wedge [x \to (y \to z)] \leq z$. Por otro lado, $x \wedge (x \to y) \wedge [x \to (y \to z)] =$
$= x \wedge y \wedge [x \to (y \to z)] = y \wedge x \wedge [x \to (y \to z)] = y \wedge x \wedge (y \to z) = x \wedge y \wedge z \leq z$.

$P_{26})$ $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$
Por $P_{11'})$, $y \leq x \to y$. Por $P_{15})$, entonces, $(x \to y) \to (x \to z) \leq y \to (x \to z)$.
Por $P_{19})$, $(x \to y) \to (x \to z) \leq x \to (y \to z)$.
Luego, por $P_{25})$, $(x \to y) \to (x \to z) = x \to (y \to z)$.

$P_{27})$ $(x \vee y) \to (x \wedge y) = (x \to y) \wedge (y \to x)$
$(x \vee y) \to (x \wedge y) \stackrel{H_5)}{=} [x \to (x \wedge y)] \wedge [y \to (x \wedge y)] \stackrel{H_4)}{=}$
$= (x \to y) \wedge (x \to x) \wedge (y \to y) \wedge (y \to x) = (x \to y) \wedge (y \to x)$

$P_{28})$ $(x \vee y) \to y = x \to y$
$(x \vee y) \to y \stackrel{H_5)}{=} (x \to y) \wedge (y \to y) = (x \to y) \wedge 1 = x \to y$

$P_{29})$ $(x \vee y) \wedge (x \to y) = y$
$(x \vee y) \wedge (x \to y) = [x \wedge (x \to y)] \vee [y \wedge (x \to y)] = (x \wedge y) \vee y = y$

$P_{30})$ $x \vee y \leq (x \to y) \to y$
Basta probar que $(x \to y) \wedge (x \vee y) \leq y$, lo que es válido por $P_{29})$.

$P_{31})$ $(x \to y) \vee (x \to z) \leq x \to (y \vee z)$
$(x \to y) \vee (x \to z) \leq x \to (y \vee z) \stackrel{P_{12})}{\Leftrightarrow} x \wedge [(x \to y) \vee (x \to z)] \leq y \vee z$, pero
$x \wedge [(x \to y) \vee (x \to z)] = [x \wedge (x \to y)] \vee [x \wedge (x \to z)] = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) =$
$= x \wedge (y \vee z) \leq y \vee z$.

$P_{32})$ $(x \to z) \vee (y \to z) \leq (x \wedge y) \to z$

$$\left.\begin{array}{lcl} x \wedge y \leq x & \overset{P_{15})}{\Rightarrow} & x \to z \leq (x \wedge y) \to z \\ x \wedge y \leq y & \overset{P_{15})}{\Rightarrow} & y \to z \leq (x \wedge y) \to z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x \to z) \vee (y \to z) \leq (x \wedge y) \to z$

$P_{33})$ $(x \vee z) \to (y \vee z) \geq (x \to y) \vee z$
$(x \vee z) \to (y \vee z) \geq (x \to y) \vee z \Leftrightarrow (x \vee z) \wedge [(x \to y) \vee z] \leq y \vee z$, pero $(x \vee z) \wedge [(x \to y) \vee z] = [x \wedge (x \to y)] \vee z = (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z) \leq y \vee z$.

$P_{34})$ Si $x \vee y = 1$, entonces $x \to y = y$ e $y \to x = x$.
$x \overset{P_3)}{=} 1 \to x \overset{Hip}{=} (x \vee y) \to x \overset{H_5)}{=} (x \to x) \wedge (y \to x) \overset{H_1)}{=} 1 \wedge (y \to x) = y \to x$;
$y = 1 \to y = (x \vee y) \to y = (x \to y) \wedge (y \to y) = x \to y$

$P_{35})$ $(x \vee y) \to (x \to y) = x \to y$
$(x \vee y) \to (x \to y) \overset{H_5)}{=} (x \to (x \to y)) \wedge (y \to (x \to y)) \overset{P_{20})}{=}$
$= (x \to y) \wedge (y \to (x \to y)) \overset{P_{12'})}{=} (x \to y) \wedge 1 = x \to y$

Teorema 1.2.1 *Si $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un reticulado con primer elemento 0 y último elemento 1, y $\to$ es una operación binaria sobre A que verifica:*

$I_1)$ $x \wedge (x \to y) \leq y$,

$I_2)$ *Si $x \wedge z \leq y$, entonces $z \leq x \to y$,*

entonces $(A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ es un álgebra de Heyting.

Demostración:

$H_0)$ $0 \wedge x = x \wedge 0 = 0$ es obvio, pues 0 es el primer elemento de A.

$H_1)$ $x \to x = 1$
Dado $x \in A$, sea $X_x = \{w \in A : x \wedge w \leq x\}$. Es claro que $X_x = A$. Por $I_2), X_x$ tiene último elemento que es $x \to x$, por lo tanto éste debe coincidir con el último elemento de A, que es el elemento 1.

$H_2)$ $(x \to y) \wedge y = y$
$(x \to y) \wedge y = y \Leftrightarrow y \leq x \to y$, pero como $x \wedge y \leq y$, por $I_2), y \leq x \to y$.

$H_3)$ $x \wedge (x \to y) = x \wedge y$
$x \wedge y \leq y \overset{I_2)}{\Rightarrow} y \leq x \to y \Rightarrow x \wedge y \leq x \wedge (x \to y)$(i)
Por $I_1), x \wedge (x \to y) \leq y \Rightarrow x \wedge (x \wedge (x \to y)) \leq x \wedge y$, esto es, $x \wedge (x \to y) \leq x \wedge y$(ii).

Observemos que si $z \leq x \to y$ entonces $x \wedge z \leq y$. En efecto, $z \leq x \to y \Rightarrow x \wedge z \leq x \wedge (x \to y) \overset{H_3)}{=} x \wedge y \leq y$ (Hemos probado así $P_{12})$).

$H_4)$ $x \to (y \wedge z) = (x \to z) \wedge (x \to y)$

1. Si $x \leq y$ entonces $z \to x \leq z \to y$
   $z \wedge (z \to x) \overset{H_3)}{=} z \wedge x \leq x \leq y$. Luego por $I_2), z \to x \leq z \to y$.
2. $x \to (y \wedge z) \leq (x \to z) \wedge (x \to y)$.
   De $y \wedge z \leq y$ y $y \wedge z \leq z$ se deduce, por 1, que $x \to (y \wedge z) \leq x \to y$ y que $x \to (y \wedge z) \leq x \to z$. Luego, $x \to (y \wedge z) \leq (x \to z) \wedge (x \to y)$(i).
3. $(x \to z) \wedge (x \to y) \leq (x \to (y \wedge z))$
   $x \wedge [(x \to z) \wedge (x \to y)] \overset{H_3)}{=} x \wedge z \wedge (x \to y) \overset{H_3)}{=} z \wedge x \wedge y \leq y \wedge z$. Luego, por $I_2), (x \to z) \wedge (x \to y) \leq (x \to (y \wedge z))$ (ii).

De (i) y (ii) se deduce $H_4)$.

$H_5)$ $(x \vee y) \to z = (x \to z) \wedge (y \to z)$
Como valen $P_{12})$ y $H_3)$, se puede probar $P_{15}) : x \leq y \Rightarrow y \to z \leq x \to z$. Luego, de $x \leq x \vee y$ y $y \leq x \vee y$, por $P_{15}), (x \vee y) \to z \leq x \to z$ y $(x \vee y) \to z \leq y \to z$, de donde $(x \vee y) \to z \leq (x \to z) \wedge (y \to z)$ (i).
Ahora ya se puede demostrar que el reticulado es distributivo, como lo hicimos en el Lema 1.1.4. Entonces:
$(x \vee y) \wedge [(x \to z) \wedge (y \to z)] = [x \wedge (x \to z) \wedge (y \to z)] \vee [y \wedge (x \to z) \wedge (y \to z)] = \overset{H_3)}{=} [x \wedge z \wedge (y \to z)] \vee [(x \to z) \wedge y \wedge z] \overset{H_2)}{=} (x \wedge z) \vee (z \wedge y) = z \wedge (x \vee y) \leq z$. Luego, por $P_{12})(x \to z) \wedge (y \to z) \leq (x \wedge y) \to c$ (ii). De (i) y (ii) se deduce $H_5)$.

■

Definición 1.2.1 *Un álgebra de Heyting A se dice* completa *si $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un reticulado distributivo completo, esto es, si $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq A$ entonces existen $\bigwedge_{i \in I} a_i$ y $\bigvee_{i \in I} a_i$.*

Teorema 1.2.2 *La condición necesaria y suficiente para que un reticulado distributivo completo A sea un álgebra de Heyting completa es que se verifique:*

$$x \wedge (\bigvee_{i \in I} y_i) = \bigvee_{i \in I} (x \wedge y_i) \tag{1}$$

Demostración: Como $y_i \leq \bigvee_{i \in I} y_i$ para todo $i \in I$. Luego, $x \wedge y_i \leq x \wedge (\bigvee_{i \in I} y_i) = \alpha$ para todo $i \in I$. Esto es, α es cota superior del conjunto $\{x \wedge y_i\}_{i \in I}$. Supongamos que $x \wedge y_i \leq z$ para todo $i \in I$; luego, por $P_{12}), y_i \leq x \to z$ para todo $i \in I$. Por lo tanto, $\bigvee_{i \in I} y_i \leq x \to z$, y, de nuevo por P_{12}), $x \wedge \bigvee_{i \in I} y_i \leq z$, lo que concluye la demostración de (1).

Supongamos ahora que A es un reticulado distributivo completo donde se verifica (1). Sea $X = \{x_i \in A : x \wedge x_i \leq y\}$; $X \neq \emptyset$, ya que $y \in X$. Sea $z = \bigvee_{x_i \in X} x_i$ y probemos que:

I_1) $x \wedge z \leq y$

$$x \wedge z = x \wedge \bigvee_{x_i \in X} x_i \overset{(1)}{=} \bigvee_{x_i \in X} (x \wedge x_i)$$

Como $x \wedge x_i \leq y$ para todo $i \in I$, $\bigvee_{x_i \in X} (x \wedge x_i) \leq y$, esto es, $x \wedge z \leq y$.

I_2) Si $x \wedge t \leq y$, entonces $t \leq z$.
Si $t \in A$ verifica $x \wedge t \leq y$, entonces, como $t \in X$, $t \leq z$.

Poniendo $x \to y = z$ y usando el teorema anterior, se completa la demostración. ■

1.3. Determinación del elemento $x \to y$

De acuerdo con lo visto precedentemente basta determinar el elemento máximo del conjunto

$$X = \{z \in A : x \wedge z \leq y\}.$$

Observemos que como $y \in X$ podemos reemplazar la familia X por la siguiente:

$$Z = \{z \in A : y \leq z, x \wedge z \leq y\}$$

Es claro que $Z \subseteq X$.

Notemos que si $y \leq z$ y $x \wedge z \leq y$, entonces $x \wedge y \leq x \wedge z$ y $x \wedge z \leq x \wedge y$, esto es, $x \wedge y = x \wedge z$. Recíprocamente, si $x \wedge y = x \wedge z$, entonces $x \wedge z = x \wedge y \leq y$.

Podemos entonces usar el siguiente procedimiento para determinar $x \to y$:

1. Se determina $c = x \wedge y$.
2. Se determina $Z = \{z \in A : y \leq z; x \wedge z = c = x \wedge y\}$.
3. Se halla el elemento maximal de Z que es $x \to y$.

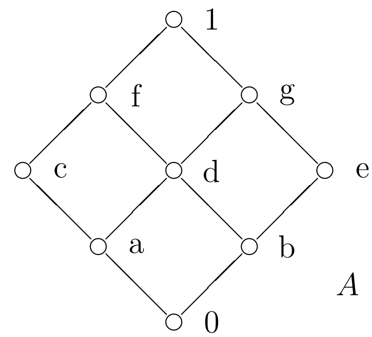
Si A es finita, los pasos 2 y 3 se pueden efectuar de la siguiente manera:

- Se determina $\{y_i \in A : y < y_i\} = \{y_1, y_2, \ldots, y_t\}$
- Se determinan $x \wedge y_1, x \wedge y_2, \ldots, x \wedge y_t$.
- Basta determinar un elemento $y_k, 1 \leq k \leq t$ tal que $x \wedge y_k = x \wedge y$.
    - Si ningún elemento $y_k, 1 \leq k \leq t$ verifica lo anterior, entonces $x \to y = y$.

- Si existe un elemento y_k tal que $x \wedge y_k = x \wedge y$ se repite el procedimiento seguido con y, ahora para el elemento y_k.

Repitiendo este procedimiento un número finito de veces se obtiene el elemento $x \to y$.

Ejemplo: En el reticulado distributivo de la figura, determinaremos el elemento $d \to b$.



- $d \wedge b = b$
- $\{z \in A : b < z\} = \{d, e, f, g, 1\}$
- $d \wedge d = d; d \wedge e = b; d \wedge f = d; d \wedge g = d; d \wedge 1 = d.$
- Repetimos el procedimiento con e, ya que $d \wedge e = b = d \wedge b$:
- $\{z \in A : e < z\} = \{g, 1\}$
- $d \wedge g = d; d \wedge 1 = d.$
- Entonces debe ser $d \to b = e$, ya que $d \wedge g = d \wedge 1 \neq d \wedge b$.

1.4. Ejemplos.

1. Sea E un espacio topológico, $\mathcal{A}$ la familia de los abiertos de E. Si $X, Y \in \mathcal{A}$, entonces $X \cap Y, X \cup Y \in \mathcal{A}$. Además, $\emptyset, E \in \mathcal{A}$; luego $(\mathcal{A}, \cap, \cup, \emptyset, E)$ es un reticulado distributivo con primer y último elemento. Si $X, Y \in \mathcal{A}$, definimos $X \to Y := I(\complement X \cup Y)$. Como $IZ \in \mathcal{A}$ cualquiera sea $Z \subseteq E$, se tiene que $X \to Y \in \mathcal{A}$. Probemos que:

   I_1) $X \cap (X \to Y) \subseteq Y$, cualesquiera que sean $X, Y \in \mathcal{A}$.
   $X \cap (X \to Y) = X \cap I(\complement X \cup Y) = IX \cap I(\complement X \cup Y) = I(X \cap (\complement X \cup Y)) = I(\emptyset \cup (X \cap Y)) = IX \cap IY \subseteq IY \subseteq Y$.

   I_2) Si $X \cap Z \subseteq Y$, entonces $Z \subseteq X \to Y = I(\complement X \cup Y)$ para todo $Z \in \mathcal{A}$.
   De $X \cap Z \subseteq Y$, obtenemos $\complement X \cup (X \cap Z) \subseteq \complement X \cup Y$ y, por lo tanto, $\complement X \cup Z \subseteq \complement X \cup Y$, pero como $Z \subseteq \complement X \cup Z \subseteq \complement X \cup Y$, entonces $IZ = Z \subseteq X \to Y$.

Observación: De las reglas de cálculo demostradas anteriormente se deducen, en particular:

- $1 \to x = x$
- $0 \to x = 1$ (Por P_{10}))
- $x \vee y = 1 \overset{P_{34})}{\Rightarrow} x \to y = y; y \to x = x$
- $x \to 1 = 1$ (P_{10}))
- $x \to x = 1$ (H_1))
- Si $x \leq y$, por $P_{10}), x \to y = 1$

Usando estas reglas, se simplifica el cálculo de la tabla de la operación $\to$, en un reticulado distribitivo.

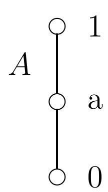
2. En una cadena

$$x \to y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ y & \text{si } x > y \end{cases}$$

En particular, notaremos con **n** a la cadena con n elementos, **n**$= \{0, 1, \ldots, n-1\}$ donde $0 < 1 < \ldots < n-1$ y la operación $\to$ se define como acabamos de indicar.

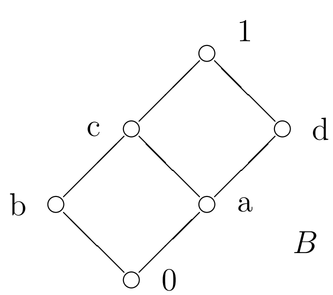
A continuación indicaremos los diagramas de varios reticulados distributivos y las tablas respectivas de la operción binaria $\to$.

3.



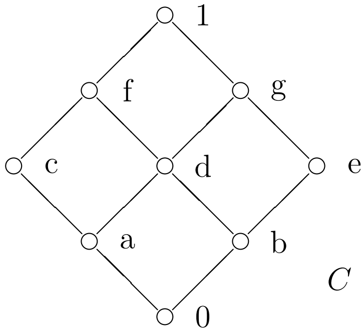
$\to$	0	a	1
0	1	1	1
a	0	1	1
1	0	a	1

4.



$\to$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	b	1	b	1	1	1
b	d	d	1	1	d	1
c	0	d	b	1	d	1
d	b	c	b	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

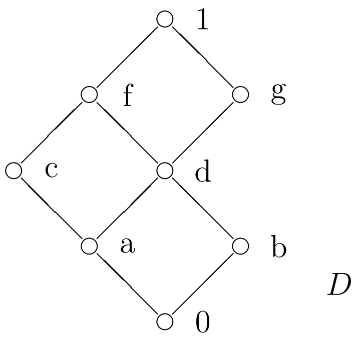
5.



C

$\to$	0	a	b	c	d	e	f	g	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a	e	1	e	1	1	e	1	1	1
b	c	c	1	c	1	1	1	1	1
c	e	g	e	1	g	e	1	g	1
d	0	c	e	c	1	e	1	1	1
e	c	c	f	c	f	1	f	1	1
f	0	a	e	c	g	e	1	g	1
g	0	c	b	c	f	e	f	1	1
1	0	a	b	c	d	e	f	g	1

6.



D

$\to$	0	a	b	c	d	f	g	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
a	b	1	b	1	1	1	1	1
b	c	c	1	c	1	1	1	1
c	b	g	b	1	g	1	g	1
d	0	c	b	c	1	1	1	1
f	0	a	b	c	g	1	g	1
g	0	c	b	c	f	f	1	1
1	0	a	b	c	d	f	g	1

7. Si A y A' son álgebras de Heyting, podemos definir en el producto cartesiano de reticulados distributivos $A \times A'$ la implicación

$$(a, a') \to (b, b') = (a \to b, a' \to b')$$

cualesquiera que sean los pares $(a, a'), (b, b') \in A \times A'$. Es claro que así algebrizado, el producto $A \times A'$ es un álgebra de Heyting.

1.5. Independencia de los axiomas.

Lema 1.5.1 *Los axiomas $H_0) - H_5)$ son independientes.* (A. Monteiro, [3]).

Demostración:

1. *$H_0)$ es independiente de $H_1), H_2), H_3), H_4)$ y $H_5)$.*
   Sea $A \subseteq \mathbf{R}$, $A = (0, 1]; x \to y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ y & \text{si } x > y \end{cases}$ Se verifican:

$I_1)$ $x \wedge (x \to y) \leq y$.
Si $x \leq y$, entonces $x \to y = 1$ y tenemos $x \wedge 1 = x \leq y$.
Si $y < x, x \to y = y$ y $x \wedge y \leq y$.

$I_2)$ Si $x \wedge z \leq y$, entonces $z \leq x \to y$.
Si $x \leq y$, $x \to y = 1$ y $z \leq 1$.
Si $y < x$, $x \to y = y$. Supongamos que $x \leq z$, entonces $x \wedge z = x \leq y$, lo que contradice la hipótesis. Entonces debe ser $z < x$, y por lo tanto $x \wedge z \leq y = x \to y$.

Entonces, por el Teorema 1.2.1, $(A, \wedge, \vee, \to, 1)$ verifica $H_1) - H_5)$ y A no tiene primer elemento.

2. $H_1)$ *es independiente de* $H_0), H_2), H_3), H_4)$ *y* $H_5)$.
Sea A el conjunto formado por los dos elementos 0 y 1, sobre el cual definimos las operaciones $\wedge, \vee$ y $\to$ de acuerdo con las tablas siguientes:

$\to$	0	1
0	0	1
1	0	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	0
1	0	0

Los axiomas $H_0), H_2), H_3), H_4)$ y $H_5)$ se verifican, pero no así $H_1)$, pues $0 \to 0 = = 0 \neq 1$.

3. $H_2)$ *es independiente de* $H_0), H_1), H_3), H_4)$ *y* $H_5)$.
Sobre el mismo conjunto A consideremos las operaciones definidas por las tablas siguientes:

$\to$	0	1
0	1	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	1	1

$\vee$	0	1
0	1	1
1	1	1

Los axiomas $H_0), H_1), H_3), H_4)$ y $H_5)$ se verifican, pero no así $H_2)$, pues $(0 \to 0) \wedge 0 =$

$= 1 \wedge 0 = 1 \neq 0$.

4. $H_3)$ *es independiente de* $H_0), H_1), H_2), H_4)$ *y* $H_5)$.
Sobre el mismo conjunto A consideremos las operaciones definidas por las tablas siguientes:

$\to$	0	1
0	1	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Los axiomas $H_0), H_1), H_2), H_4)$ y $H_5)$ se verifican, pero no así $H_3)$, pues
$1 \wedge (1 \to 0) = 1 \wedge 1 = 1 \neq 1 \wedge 0 = 0$.

5. $H_4)$ *es independiente de* $H_0), H_1), H_2), H_3)$ *y* $H_5)$.
Sea $A = \{0, a, 1\}$ con las operaciones definidas por las tablas siguientes:

$\to$	0	a	1
0	1	1	1
a	0	1	1
1	0	a	1

$\wedge$	0	a	1
0	0	0	0
a	a	a	a
1	0	a	1

$\vee$	0	a	1
0	0	a	1
a	a	a	1
1	1	1	1

Los axiomas $H_0), H_1), H_2), H_3)$ y $H_5)$ se verifican, pero no así $H_4)$, pues $a \to (a \wedge 0) =$

$= a \to a = 1$, mientras que $(a \to 0) \wedge (a \to a) = 0 \wedge 1 = 0$.

6. *$H_5)$ es independiente de $H_0), H_1), H_2), H_3)$ y $H_4)$.*
Sea A el conjunto formado por los dos elementos 0 y 1, sobre el cual definimos las operaciones $\wedge, \vee, \to$ de acuerdo con las tablas siguientes:

$\to$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	0
1	0	0

Los axiomas $H_0), H_1), H_2), H_3)$ y $H_4)$ se verifican, pero no así $H_5)$,pues $(0 \vee 1) \to 0 = 0 \to 0 = 1$, pero $(0 \to 0) \wedge (1 \to 0) = 1 \wedge 0 = 0$.

■

1.6. Negación

Se denomina pseudo-complemento o negación intuicionista a la operación unaria definida por

$$\neg x := x \to 0$$

Propiedades de la negación

$N_0)$ $x \wedge \neg x = 0$

$x \wedge \neg x = x \wedge (x \to 0) \overset{H_3)}{=} x \wedge 0 = 0.$

Dados $x, y \in A$, se dice que y es *ortogonal* a x si $x \wedge y = 0$. De acuerdo a esta definición, resulta que $\neg x$ es ortogonal a x.

Sea $\mathcal{O}(x) = \{y \in A : x \wedge y = 0\}$ el conjunto de todos los elementos ortogonales a x. Por $N_0)$, $\neg x \in \mathcal{O}(x)$. Además, por $P_{12})$, si $x \wedge y = 0$, entonces $y \leq x \to 0 = \neg x$. Luego $\neg x$ es el último elemento de $\mathcal{O}(x)$.

$N_1)$ $\neg 0 = 1$

$\neg 0 = 0 \to 0 = 1$

$N_2)$ $\neg 1 = 0$

$\neg 1 = 1 \to 0 = 0$

$N_3)$ $x \leq \neg\neg x$

$x \overset{P_{21})}{\leq} (x \to 0) \to 0 = \neg\neg x$. Esto es equivalente a poner $x \to \neg\neg x = 1$.

$N_4)$ $\neg\neg\neg x = \neg x$

$\neg\neg\neg x = ((x \to 0) \to 0) \to 0 \overset{P_{22})}{=} x \to 0 = \neg x$

$N_5)$ $x \leq y \Rightarrow \neg y \leq \neg x$

Consecuencia directa de la hipótesis y de P_{15}).

$N_6)$ $x \wedge \neg(x \wedge y) \leq \neg y$

$x \wedge \neg(x \wedge y) \leq \neg y \Leftrightarrow x \wedge \neg(x \wedge y) \leq y \to 0 \overset{P_{12})}{\Leftrightarrow} (y \wedge x) \wedge \neg(x \wedge y) \leq 0$, lo que es válido por N_0).

$N_7)$ $\neg\neg(x \wedge y) = \neg\neg x \wedge \neg\neg y$

De $x \wedge y \leq x$ se deduce que $\neg x \leq \neg(x \wedge y)$ y, por lo tanto, $\neg\neg(x \wedge y) \leq \neg\neg x$. Análogamente, obtenemos $\neg\neg(x \wedge y) \leq \neg\neg y$. Luego, $\neg\neg(x \wedge y) \leq \neg\neg x \wedge \neg\neg y$ (i).

$\neg\neg x \wedge \neg\neg y \leq \neg\neg(x \wedge y) = \neg(x \wedge y) \to 0$(ii) $\Leftrightarrow \neg\neg x \wedge \neg\neg y \wedge \neg(x \wedge y) \leq 0 \Leftrightarrow \neg\neg y \wedge \neg(x \wedge y) \leq \neg\neg x \to 0 = \neg\neg\neg x \overset{N_4)}{=} \neg x = x \to 0 \Leftrightarrow \neg\neg y \wedge \neg(x \wedge y) \wedge x \leq 0 \Leftrightarrow x \wedge \neg(x \to y) \leq \neg\neg y \to 0 = \neg y \Leftrightarrow (x \wedge y) \wedge \neg(x \wedge y) \overset{N_0)}{\leq} 0$

$N_8)$ $\neg x \leq x \to y$

De $0 \leq y$ obtenemos, por P_{14}), $\neg x = x \to 0 \leq x \to y$.

$N_9)$ $x \to y \leq \neg y \to \neg x$

$x \to y \leq \neg y \to \neg x \Leftrightarrow \neg y \wedge (x \to y) \leq \neg x \Leftrightarrow x \wedge \neg y \wedge (x \to y) \leq 0 \Leftrightarrow$
$x \wedge \neg y \wedge (x \to y) = x \wedge (x \to y) \wedge \neg y \overset{H_3)}{=} x \wedge y \wedge \neg y \overset{N_0)}{=} 0$

$N_{10})$ $x \to \neg y = y \to \neg x$

(i)$x \to \neg y \leq y \to \neg x \Leftrightarrow y \wedge (x \to \neg y) \leq x \to 0 \Leftrightarrow x \wedge y \wedge (x \to \neg y) \leq 0 \Leftrightarrow x \wedge \neg y \wedge y \overset{N_0)}{=} 0$

(ii)$y \to \neg x \leq x \to \neg y$ vale por (i).

$N_{11})$ $\neg\neg x \to \neg\neg y = \neg y \to \neg x$

$\neg\neg x \to \neg\neg y \overset{N_{10})}{=} \neg y \to \neg\neg\neg x \overset{N_4)}{=} \neg y \to \neg x$

$N_{12})$ $x \to \neg\neg y = \neg y \to \neg x$

$x \to \neg\neg y \overset{N_{10})}{=} \neg y \to \neg x$

$N_{13})$ $x \to y \leq x \to \neg\neg y \overset{N_{11})}{=} \neg y \to \neg x \overset{N_{12})}{=} \neg\neg x \to \neg\neg y$

$x \to y \leq x \to \neg\neg y \Leftrightarrow x \wedge (x \to y) \leq \neg\neg y \Leftrightarrow x \wedge y \leq \neg y \to 0 \Leftrightarrow \neg y \wedge y \wedge x \overset{N_0)}{\leq} 0$

$N_{14})$ $\neg\neg(x \to y) = \neg\neg x \to \neg\neg y$

$\neg\neg x \to \neg\neg y \overset{N_{11})}{=} \neg y \to \neg x$

(i) $\neg\neg(x \to y) \leq \neg y \to \neg x$

$\neg\neg(x \to y) \leq \neg y \to \neg x \Leftrightarrow \neg\neg(x \to y) \wedge \neg y \leq \neg x \Leftrightarrow$
$x \wedge \neg y \wedge \neg\neg(x \to y) \leq 0 \Leftrightarrow x \wedge \neg y \wedge \neg\neg(x \to y) = 0$ (1)
$x \wedge y \leq y \Rightarrow \neg y \leq \neg(x \wedge y) \Rightarrow x \wedge \neg y \leq x \wedge \neg(x \wedge y) \Rightarrow$
$(x \wedge \neg y) \wedge \neg\neg(x \to y) \leq x \wedge \neg(x \wedge y) \wedge \neg\neg(x \to y)$ (2)
$x \wedge \neg(x \wedge y) \wedge \neg\neg(x \to y) \leq 0 \Leftrightarrow x \wedge \neg(x \wedge y) \leq \neg\neg\neg(x \to y) \Leftrightarrow$
$x \wedge \neg(x \wedge y) \leq \neg(x \to y) \Leftrightarrow x \wedge (x \to y) \wedge \neg(x \wedge y) \leq 0 \Leftrightarrow x \wedge y \wedge \neg(x \wedge y) \overset{N_0)}{\leq} 0$
Luego, por (2), vale (1).

(ii) $\neg\neg x \to \neg\neg y \leq \neg\neg(x \to y)$

$\neg\neg x \to \neg\neg y \leq \neg\neg(x \to y) \Leftrightarrow \neg(x \to y) \wedge (\neg\neg x \to \neg\neg y) \leq 0.$
Por $P_{11'}$), $y \leq x \to y$. Luego, $\neg(x \to y) \leq \neg y \Rightarrow$
$\neg(x \to y) \wedge \neg(x \to y) = \neg(x \to y) \leq \neg y \wedge \neg(x \to y) \Rightarrow$
$\neg(x \to y) \wedge (\neg\neg x \to \neg\neg y) \leq \neg y \wedge (\neg x \to y) \wedge (\neg\neg x \to \neg\neg y).$
Por otro lado, por $N_8), \neg x \leq x \to y \overset{N_5)}{\Rightarrow} \neg(x \to y) \leq \neg\neg x \overset{P_{15})}{\Rightarrow}$
$\neg\neg x \to \neg\neg y \leq \neg(x \to y) \to \neg\neg y \overset{P_{12})}{\Leftrightarrow} \neg(x \to y) \wedge (\neg\neg x \to \neg\neg y) \leq \neg\neg y \overset{P_{12})}{\Leftrightarrow}$
$\neg y \wedge \neg(x \to y) \wedge (\neg\neg x \to \neg\neg y) \leq 0.$
Luego, $\neg(x \to y) \wedge (\neg\neg x \to \neg\neg y) \leq 0$ y queda probado (ii).

N_{15}) $x \to \neg x = \neg x$
$x \to \neg x = x \to (x \to 0) \overset{P_{20})}{=} x \to 0 = \neg x$

N_{16}) $\neg x \to \neg\neg x = \neg\neg x$
Directo de N_{15}, reemplazando x por $\neg x$.

N_{17}) $\neg\neg x \to \neg x = \neg x$
Por N_{16}), $\neg\neg x \to \neg\neg\neg x = \neg\neg\neg x$. Por N_4), resulta $\neg\neg x \to \neg x = \neg x$.

N_{18}) $\neg x \to x = \neg\neg x$

(i) $\neg x \to x \leq \neg\neg x = \neg x \to 0 \Leftrightarrow \neg x \wedge (\neg x \to x) \leq 0 \Leftrightarrow \neg x \wedge x \leq 0$, lo que es válido por N_0).

(ii) $\neg\neg x \leq \neg x \to x \Leftrightarrow \neg x \wedge \neg\neg x \leq x$, pero $\neg x \wedge \neg\neg x = 0$.

N_{19}) $\neg(\neg\neg x \to x) = 0$
Por $N_{18}), \neg(\neg\neg x \to x) = \neg((\neg x \to x) \to x).$
Por $P_{30}), \neg x \vee x \leq (\neg x \to x) \to x \Rightarrow \neg((\neg x \to x) \to x) \leq \neg(\neg x \vee x) =$
$= (\neg x \vee x) \to 0 \overset{H_5)}{=} (\neg x \to 0) \wedge (x \to 0) = \neg\neg x \wedge \neg x = 0.$

N_{20}) $(\neg\neg x \to x) \to x = \neg\neg x$
$\neg\neg x \overset{N_{18})}{=} \neg x \to x \overset{P_{22})}{=} ((\neg x \to x) \to x) \to x \overset{N_{18})}{=} (\neg\neg x \to x) \to x$

$N_{21})$ $(\neg\neg x \to x) \to \neg x = \neg x$

$\neg x \vee x \overset{P_{30})}{\leq} (\neg x \to x) \to x \overset{P_{15})}{\Rightarrow} ((\neg x \to x) \to x) \to \neg x \leq (\neg x \vee x) \to \neg x$

Luego, $(\neg\neg x \to x) \to \neg x \overset{N_{18})}{=} ((\neg x \to x) \to x) \to \neg x \leq (\neg x \vee x) \to \neg x =$
$\overset{H_5)}{=} (\neg x \to \neg x) \wedge (x \to \neg x) = x \to \neg x \overset{N_{15})}{=} \neg x$

$N_{22})$ $\neg(x \to y) = \neg\neg x \wedge \neg y$

$$\left.\begin{array}{ccc} y \leq x \to y & \overset{N_5)}{\Rightarrow} & \neg(x \to y) \leq \neg y \\ \neg x \overset{N_8)}{\leq} x \to y & \overset{N_5)}{\Rightarrow} & \neg(x \to y) \leq \neg\neg x \end{array}\right\} \Rightarrow \neg(x \to y) \leq \neg\neg x \wedge \neg y \text{(i)}$$

(ii) $\neg\neg x \wedge \neg y \leq \neg(x \to y) = (x \to y) \to 0 \Leftrightarrow (x \to y) \wedge \neg\neg x \wedge \neg y \leq 0 \Leftrightarrow$
$(x \to y) \wedge \neg y \leq \neg\neg\neg x = \neg x \Leftrightarrow x \wedge (x \to y) \wedge \neg y \leq 0 \Leftrightarrow x \wedge y \wedge \neg y = 0$, lo que es válido por $N_0)$.

$N_{23})$ $\neg(x \wedge y) = x \to \neg y = y \to \neg x$

$(x \wedge y) \to z \overset{P_{18})}{=} x \to (y \to z)$
$\neg(x \wedge y) = (x \wedge y) \to 0 = x \to (y \to 0) = x \to \neg y$
$\neg(x \wedge y) = (y \wedge x) \to 0 = y \to (x \to 0) = y \to \neg x$

$N_{24})$

$$\begin{array}{rclcl} \neg(x \wedge y \wedge z) & = & (y \wedge z) \to \neg x & = & x \to \neg(y \wedge z) \\ & = & (x \wedge z) \to \neg y & = & y \to \neg(x \wedge z) \\ & = & (x \wedge y) \to \neg z & = & z \to \neg(x \wedge y) \end{array}$$

Directo de $N_{23})$ por la asociatividad del ínfimo.

$N_{25})$ $\neg\neg(x \vee y) = \neg\neg(\neg\neg x \vee \neg\neg y)$

$x \leq x \vee y \overset{N_5)}{\Rightarrow} \neg(x \vee y) \leq \neg x \overset{N_5)}{\Rightarrow} \neg\neg x \leq \neg\neg(x \vee y)$. Análogamente, se deduce que $\neg\neg y \leq \neg\neg(x \vee y)$, por lo tanto, $\neg\neg x \vee \neg\neg y \leq \neg\neg(x \vee y)$, y entonces $\neg\neg(\neg\neg x \vee \neg\neg y) \leq \neg\neg\neg\neg(x \vee y) = \neg\neg(x \vee y)$ (i).
De $x \leq \neg\neg x$ y $y \leq \neg\neg y$, se deduce que $x \vee y \leq \neg\neg x \vee \neg\neg y$. Luego, $\neg\neg(x \vee y) \leq \neg\neg(\neg\neg x \vee \neg\neg y)$ (ii).

$N_{26})$ $\neg(x \vee \neg x) = 0$

$\neg(x \vee \neg x) = (x \vee \neg x) \to 0 \overset{H_5)}{=} (x \to 0) \wedge (\neg x \to 0) = \neg x \wedge \neg\neg x \overset{N_0)}{=} 0$

$N_{27})$ $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$

$\neg(x \vee y) = (x \vee y) \to 0 \overset{H_5)}{=} (x \to 0) \wedge (y \to 0) = \neg x \wedge \neg y$

$N_{28})$ $\neg x \vee \neg y \leq \neg(x \wedge y)$

$\neg x \vee \neg y \leq \neg(x \wedge y) = (x \wedge y) \to 0 \Leftrightarrow (\neg x \vee \neg y) \wedge (x \wedge y) \leq 0 \Leftrightarrow$
$(\neg x \wedge x \wedge y) \vee (\neg y \wedge x \wedge y) \overset{N_0)}{=} 0$

$N_{29})$ $\neg(x \to y) = \neg(\neg x \vee y)$

$$\neg(x \to y) \overset{N_{22})}{=} \neg\neg x \wedge \neg y \overset{N_{27})}{=} \neg(\neg x \vee y)$$

2. Teoría de Homomorfismos

Definición 2.1 *Dadas dos álgebras de Heyting A, A', $h : A \mapsto A'$ se dice un* homomorfismo *de A en A' si se verifican:*

$h_1)$ $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$

$h_2)$ $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$

$h_3)$ $h(x \to y) = h(x) \to h(y)$

$h_4)$ $h(0) = 0.$

Si h es suryectiva, h se denomina epimorfismo *y A' una* imagen homomórfica *de A. Si h es biunívoca, se denomina* monomorfismo*. Si h es biyección,* isomorfismo *y si h es biyección y $A = A'$, h se denomina* automorfismo.

Observaciones:

1. *La condición $h_4)$ no es consecuencia de $h_1), h_2)$ y $h_3)$.*
   En efecto, sean A, A' álgebras de Heyting, A' con más de un elemento, y sea $h : A \mapsto A'$ definida por
   $$h(x) = 1 \text{ para todo } x \in A$$
   Es obvio que se verifican $h_1)$, $h_2)$ y$h_3)$, y no se verifica $h_4)$, ya que $h(0) = 1 \neq 0$.

2. *La condición $h_3)$ no es consecuencia de $h_1), h_2)$ y $h_4)$.*
   Sean A y A' como en el caso anterior y $h : A \mapsto A'$ definida por
   $$h(x) = 0 \text{ para todo } x \in A$$
   $h(x \to y) = 0 \neq 1 = 0 \to 0 = h(x) \to h(y).$

Proposición 2.1 *Sea A un álgebra de Heyting, $(A', \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ un álgebra de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ y $h : A \mapsto A'$ una función epiyectiva que verifica $h_1)$, $h_2)$, $h_3)$ y $h_4)$. Entonces, $(A', \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ es un álgebra de Heyting.*

Demostración: Trivial. ■

Definición 2.2 *Dado un homomorfismo $h : A \mapsto A'$, se denomina* núcleo de h *(o* kernel de h*) y se nota* Nuc(h) *o* Ker(h) *al siguiente subconjunto de A:*

$$\mathrm{Ker}(h) = h^{-1}(1').$$

Lema 2.1 *Ker(h) tiene las siguientes propiedades:*

D_1) $1 \in Ker(h)$

D_2) *Si* $x, x \to y \in \mathrm{Ker}(h)$, *entonces* $y \in \mathrm{Ker}(h)$

Demostración:

D_1) $h(1) = h(x \to x) = h(x) \to h(x) = 1'$

D_2) Supongamos que $h(x) = 1'$ y $h(x \to y) = 1'$, luego $1' = h(x \to y) = h(x) \to h(y) =$ $= 1' \to h(y) = h(y)$.

■

Lema 2.2 *Sea $h : A \mapsto A'$ un homomorfismo. h es un isomorfismo si y sólo si* $\mathrm{Ker}(h) =$ $= \{1\}$.

Demostración:

⇒) Por D_1), $\{1\} \subseteq Ker(h)$. Sea ahora $x \in Ker(h)$. Luego, $h(x) = 1'$ y como $h(1) = 1'$ y por hipótesis, h es biunívoca, resulta que $x = 1$.

⇐) Sean $x, y \in A$ tales que $h(x) = h(y)$. Luego, $h(x \to y) = h(x) \to h(y) = 1'$, es decir, $x \to y \in Ker(h)$. Análogamente, $y \to x \in Ker(h) = \{1\}$, y por lo tanto, $x \leq y$ y $y \leq x$, esto es, $x = y$.

■

Definición 2.3 *Un subconjunto F de un reticulado distributivo con último elemento es un* filtro *si:*

F_1) $1 \in F$ *($F \neq \emptyset$).*

F_2) *Si $x, y \in F$, entonces $x \wedge y \in F$.*

F_3) *Si $x \in F$ y $x \leq y$, entonces $y \in F$.*

Lema 2.3 *Sean A, A' álgebras de Heyting y $h : A \mapsto A'$ un epimorfismo. Entonces, son equivalentes:*

(I) $h(x) = h(y)$

(II) $(x \to y) \wedge (y \to x) \in Ker(h)$

(III) $x \to y, y \to x \in Ker(h)$

(IV) *existe* $f \in Ker(h)$ *tal que* $x \wedge f = y \wedge f$

Demostración:

(I)⇒(II) $h((x \to y) \wedge (y \to x)) = (h(x) \to h(y)) \wedge (h(y) \to h(x)) = 1 \wedge 1 = 1$

(II)⇒(III) Como $(x \to y) \wedge (y \to x) \leq x \to y, (x \to y) \wedge (y \to x) \leq y \to x, Ker(h)$ es un filtro, y $(x \to y) \wedge (y \to x) \in Ker(h)$, resulta que $x \to y, y \to x \in Ker(h)$

(III)⇒(IV) Sea $f = (x \to y) \wedge (y \to x)$. $f \in Ker(h)$ pues por hipótesis $x \to y, y \to x \in Ker(h)$ y $Ker(h)$ es un filtro. Entonces,
$x \wedge f = x \wedge (x \to y) \wedge (y \to x) = x \wedge y \wedge (y \to x) = x \wedge y$
$y \wedge f = (x \to y) \wedge y \wedge (y \to x) = x \wedge (x \to y) \wedge y = x \wedge y = x \wedge f$

(IV)⇒(I) $h(x \wedge f) = h(y \wedge f) \Rightarrow h(x) \wedge h(f) = h(y) \wedge h(f) \Rightarrow h(x) = h(x) \wedge 1 =$
$= h(y) \wedge 1 = h(y)$

■

Lema 2.4 *Si A, A', A'' son álgebras de Heyting, $f : A \mapsto A'$ un epimorfismo, $g : A \mapsto A''$ epimorfismo y $Ker(f) = Ker(g)$ entonces A' es isomorfa a A''.*

Demostración: Sea $x' \in A'$, luego existe $x \in A$ tal que $f(x) = x'$. Definimos $\alpha : A' \mapsto A''$ por $\alpha(x') = g(x)$.

Veamos que α está está bien definida.
Si $y \in A$ verifica $f(y) = x'$ entonces $f(x) = f(y)$ y por un lema anterior, $x \to y, y \to x \in Ker(f)$ y como $Ker(f) = Ker(g)$, por el mismo lema, $g(x) = g(y)$.

α es suryectiva.
Dado $x'' \in A''$, sabemos que existe $x \in A$ tal que $g(x) = x''$. Sea $f(x) = x'$. Luego, por definición, es $\alpha(x') = x''$.

α es biunívoca.
Supongamos que $\alpha(x') = \alpha(y')$, esto es, $g(x) = g(y)$, donde $f(x) = x'$ y $f(y) = y'$. Luego, $g(x) = g(y)$, y por lo tanto, $(x \to y) \wedge (y \to x) \in Ker(g) = Ker(f)$ y $f(x) = f(y)$, es decir, $x' = y'$.

α es un homomorfismo.
Notemos que por definición $\alpha \circ f = g$. Tenemos entonces,

- $\alpha(x' \wedge y') = \alpha(f(x) \wedge f(y)) = g(x \wedge y) = g(x) \wedge g(y) = \alpha(x') \wedge \alpha(y')$.
- $\alpha(x' \vee y') = \alpha(f(x) \vee f(y)) = \alpha(f(x \vee y)) = g(x \vee y) = g(x) \vee g(y) =$
  $= \alpha(f(x)) \vee \alpha(f(y)) = \alpha(x') \vee \alpha(y')$.

- $\alpha(x' \to y') = g(x \to y) = g(x) \to g(y) = \alpha(x') \to \alpha(y')$.
- $\alpha(0') = \alpha(f(0)) = g(0) = 0''$.
- $\alpha(1') = \alpha(f(1)) = g(1) = 1''$.

■

Definición 2.4 *Todo subconjunto D de un álgebra de Heyting que verifica D_1) y D_2) se dice un* sistema deductivo. *Por lo tanto, si h es un homomorfismo , entonces $Nuc(h)$ es un sistema deductivo .*

Si h es un homomorfismo de álgebras de Heyting, h es en particular un homomorfismo de $(0,1)$-reticulados; luego, $Nuc(h)$ es un filtro. Vamos a demostrar que en las álgebras de Heyting las nociones de sistema deductivo y filtro son equivalentes.

Lema 2.5 *Si D es un sistema deductivo del álgebra de Heyting A y $t \in D$, entonces $x \to t \in D$ para todo $x \in A$*

Demostración: $t \to (x \to t) \overset{P_{12'})}{=} 1 \in D$. Como $t \in D$, por D_2) resulta que $x \to t \in D$. ■

Lema 2.6 *Sea A un álgebra de Heyting, y $D \subseteq A$. D es un sistema deductivo si y sólo si D es un filtro.*

Demostración:

⇒) F_1) Por $D_1), 1 \in D$.

F_2) Si $x, y \in D$, entonces $x \wedge y \in F$.

$$x \to (x \wedge y) = (x \to y) \wedge (x \to x) = (x \to y) \wedge 1 = x \to y$$

Luego, por el lema anterior $x \to (x \wedge y) = x \to y \in D$ y como por hipótesis, $x \in D$, resulta por D_2) que $x \wedge y \in D$.

F_3) Si $x \in D$ y $x \leq z$, entonces $z \in D$.
De $x \leq z$ resulta que $x \to z = 1 \in D$, luego, como $x \in D$ resulta por D_2) que $z \in D$.

⇐) D_1) Supongamos que D es un filtro; luego, $D \neq \emptyset$, esto es, existe $x \in D$. Como $x \leq 1$, resulta por F_3) que $1 \in D$.

D_2) Si $x \in D$ y $x \to y \in D$ entonces $y \in D$.
De las hipótesis resulta por F_2) que $x \wedge (x \to y) \in D$, esto es, $x \wedge y \in D$ y como $x \wedge y \leq y$, por F_3) resulta que $y \in D$.

■

Observación: La condición $D_2)$ es equivalente a

$$D_{2'})\quad \text{Si } x \in D \text{ y } y \notin D \text{ entonces } x \to y \notin D.$$

En efecto,

$D_2) \Rightarrow D_{2'})$ Si $x \to y \in D$ como $x \in D$, entonces $y \in D$, lo que contradice la hipótesis. Luego, $x \to y \notin D$.

$D_{2'}) \Rightarrow D_2)$ Supongamos que $x, x \to y \in D$ y que $y \notin D$. Entonces, por $D_{2'}), x \to y \notin D$, absurdo.

Luego, valen las siguientes reglas:

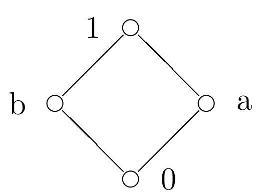
I) Si $x \in D$ y $y \notin D$, entonces $x \to y \notin D$.

II) Si $x \in D$ y $y \in D$, entonces $x \to y \in D$.

III) Si $x \notin D$ y $y \in D$, entonces $x \to y \in D$.

Notemos que si $x \notin D$ y $y \notin D$ no podemos afirmar que $x \to y \in D$ ni que $x \to y \notin D$.

Ejemplo: Sea A el álgebra de Heyting indicada en la figura y sea $D = \{1\}$.



A

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	b	1	b	1
b	a	a	1	1
1	0	a	b	1

En este caso $a \notin D$, $b \notin D$ y $a \to b = b \notin D$. Si $D = \{b, 1\}$ tenemos $a \notin D, 0 \notin D$ y $a \to 0 = b \in D$.

Definición 2.5 *Todo sistema deductivo D que verifica*

$$\textit{Si } x \notin D \textit{ y } y \notin D \textit{ entonces } x \to y \in D$$

se denomina sistema deductivo categórico. *Observemos que de la definición resulta que si D es un sistema deductivo categórico, entonces $x \to y \in D$ excepto si $x \in D$ y $y \notin D$.*

Lema 2.7 *Todo sistema deductivo categórico es un ultrafiltro.*

Demostración: Sea D un sistema deductivo categórico. Entonces, D es un filtro. Sea F un filtro tal que $D \subseteq F \subseteq A$. Si $D \neq F$, entonces existe $x \in F, x \notin D$. Luego, $D \neq A$ y $0 \notin D$. Por lo tanto, $x \to 0 = \neg x \in D$ (pues D es categórico) y entonces, $\neg x \in F$. Como F es filtro, resulta que $\neg x \wedge x = 0 \in F$, de manera que $F = A$ y D es filtro maximal en A (ultrafiltro). ■

Sea F un filtro de un álgebra de Heyting A y $x \in A$. Representaremos por $\mathbf{F}(F, x)$ al filtro generado por el conjunto $F \cup \{x\}$.

Lema 2.8 $\mathbf{F}(F, x) = \{y : y \to x \in F\}$

Demostración: Llamemos S al conjunto

$$S = \{y : x \to y \in F\}$$

1. *S es un sistema deductivo (filtro)*

   a) $x \leq 1 \Rightarrow x \to 1 = 1 \in F \Rightarrow 1 \in S$

   b) Si y y $y \to z$ están en S, entonces $x \to y \in F$ y $x \to (y \to z) \in F$. Por $P_{26}), (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1 \in F$. Luego,como F es sistema deductivo, $x \to z \in F$ y entonces, $z \in S$.

2. $F \cup \{x\} \subseteq S$.

   a) Si $y \in F$, entonces, por $P_{12'}, y \to (x \to y) = 1 \in F$, por lo que $x \to y \in F$, y entonces $y \in S$.

   b) $x \to x = 1 \in F$, esto es, $x \in S$.

3. *Si S' es un sistema deductivo y $F \cup \{x\} \subseteq S'$, entonces $S \subseteq S'$.*
   En efecto, si $y \in S$, entonces $x \to y \in F \subseteq S'$. Como $x \in S'$, resulta $y \in S'$

■

Lema 2.9 *Todo ultrafiltro es un sistema deductivo categórico.*

Demostración: Sea F un ultrafiltro de A, $x \notin F, y \notin F$. Como $F \subset \mathbf{F}(F, x)$ y F es un ultrafiltro, debe ser $\mathbf{F}(F, x) = A$. Luego, $x \to z \in F$ cualquiera sea $z \in A$. En particular, se verifica que $x \to y \in F$. ■

Dada un álgebra de Heyting A y un sistema deductivo $D \subseteq A$, diremos que dos elementos $x, y \in A$ son*congruentes módulo D* y notaremos $x \equiv y \pmod{D}$ ó $x \equiv y$ si se verifica:

$$\text{(D)} \quad \text{Existe } d \in D \text{ tal que } x \wedge d = y \wedge d.$$

Lema 2.10 *La relación $\equiv$ es una relación de equivalencia.*

Lema 2.11 *La relación $\equiv$ es una congruencia. Esto es, si $x \equiv x'$ e $y \equiv y'$ entonces*

(i) $x \wedge y \equiv x' \wedge y'$

(ii) $x \vee y \equiv x' \vee y'$

(iii) $x \to y \equiv x' \to y'$

Demostración: Por hipótesis, existen d y d' tales que $x \wedge d = x' \wedge d$ y $y \wedge d' = y' \wedge d'$. Luego, $d \wedge d' \in D$ y $x \wedge y \wedge d \wedge d' = x' \wedge y' \wedge d \wedge d'$, esto es, $x \wedge y \equiv x' \wedge y'$.

Además, $x \wedge d \wedge d' = x' \wedge d \wedge d'$ y $y \wedge d \wedge d' = y' \wedge d \wedge d'$; luego, $(x \wedge d \wedge d') \vee (y \wedge d \wedge d') = = (x' \wedge d \wedge d') \vee (y' \wedge d \wedge d')$ y por lo tanto $(x \vee y) \wedge (d \wedge d') = (x' \vee y') \wedge (d \wedge d')$, esto es, $x \vee y \equiv x' \vee y'$.

También tenemos que $(x \wedge d) \to (y \wedge d') = (x' \wedge d) \to (y' \wedge d')$. Entonces, $((x \wedge d) \to d') \wedge ((x \wedge d) \to y) = ((x' \wedge d) \to d') \wedge ((x' \wedge d) \to y')$. Sea $h = (x \wedge d) \to d' = = (x' \wedge d) \to d'$. Como $d' \in D$, entonces $h \in D$, luego $((x \wedge d) \to y) \wedge h = ((x' \wedge d) \to y') \wedge h$. Por$P_{18}$), entonces, $(d \to (x \to y)) \wedge h = (d \to (x' \wedge y')) \wedge h$, de modo que $d \to (x \to y) \equiv d \to (x' \to y')$. Como $d \wedge (d \to (x \to y)) = d \wedge (x \to y)$ resulta que $d \to (x \to y) \equiv x \to y$ e inmediatamente se ve que $x \to y \equiv x' \to y'$. ■

Notaremos con $C_D(x)$ a la clase de equivalencia módulo D que contiene a x. Esto es,

$$C_D(x) = \{y \in A : y \equiv x \pmod{D}\}$$

Observemos que $C_D(1) = D$.
En efecto, $C_D(1) = \{y \in A : y \equiv 1 \pmod{D}\} = \{y \in A : (y \to 1) \wedge (1 \to y) \in D\} = = \{y \in A : 1 \wedge y \in D\} = y \in A : y \in D = D$.

2.1. Cocientes e imágenes homomórficas

Consideremos el conjunto $A' = A/D$ de todas las clases de equivalencia módulo D y pongamos por definición:

1. $C_D(x) \wedge C_D(y) = C_D(x \wedge y)$
2. $C_D(x) \vee C_D(y) = C_D(x \vee y)$
3. $C_D(x) \to C_D(y) = C_D(x \to y)$
4. $0' = C_D(0)$
5. $1' = C_D(1)$

Por el Lema 2.11, las operaciones están bien definidas. Luego, $C_D : A \mapsto A' = A/D$ es una aplicación suryectiva, y como verifica 1, 2, 3 y 4, A' es un álgebra de Heyting. Esta álgebra se denomina el *álgebra cociente de A por D* y C_D se denomina el *homomorfismo canónico.*

Observación: $C_D(0) = \{x \in A : x \equiv 0 \pmod{D}\} =$
$= \{x \in A : (x \to 0) \wedge (0 \to x) \in D\} = \{x \in A : \neg x \wedge 1 \in D\} = \{x \in A : \neg x \in D\}$.

Es claro entonces que si D es un sistema deductivo de A, entonces A/D es una imagen homomórfica de A. Supongamos ahora que A' es una imagen homomórfica de A. Sea $h : A \mapsto A'$ el epimorfismo correspondiente y sea $D = Ker(h)$. Sean además $A'' = A/D$ y $\varphi : A \mapsto A''$ el epimorfismo canónico. Entonces,

$$Ker(\varphi) = \{x \in A/D : \varphi(x) = C_D(x) = 1\} = \{x \in A/D : x \equiv 1 \pmod{D}\} = C_D(1) = D$$

Luego, por el Lema 2.4, $A \cong A''$, esto es $h(A) \cong A/Ker(h)$. Por lo tanto hay una correspondencia biunívoca entre sistemas deductivos e imágenes homomórficas. Todas las imágenes homomórficas (a menos de isomorfismos) se obtienen de este modo.

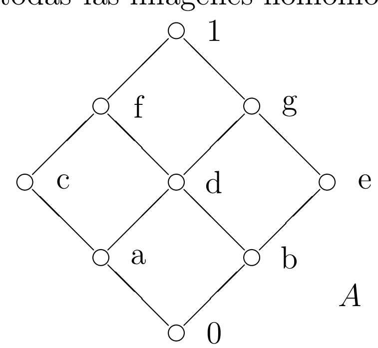
Observación: Si D es un ultrafiltro del álgebra A, entonces $A/D \cong B = \{0, 1\}$.

Sabemos que $C_D(1) = D$.

(I) Si $x \in A - D$, entonces $x \equiv 0 \pmod{D}$
Veamos que $(x \to 0) \wedge (0 \to x) = (x \to 0) \wedge 1 \in D$, esto es que $x \to 0 \in D$. Pero como D es un ultrafiltro, $0 \notin D$. Luego, de $x, 0 \notin D$ y por ser D un sistema deductivo categórico, $x \to 0 \in D$.

(II) Si $x \in D$ e $y \in A - D$ entonces $x \not\equiv y \pmod{D}$.
Si fuera $x \equiv y \pmod{D}$, entonces $1 \equiv 0 \pmod{D}$ ya que $1 \equiv x \pmod{D}$ e $y \equiv 0 \pmod{D}$. Esto es, $(1 \to 0) \wedge (0 \to 1) = 0 \wedge 1 = 0 \in D$, absurdo.

Ejemplo: Determinar todas las imágenes homomórficas de A.



Siendo A un reticulado distributivo finito, todos sus filtros son principales. Los ultrafiltros son $F(a)$ y $F(b)$. Observemos que

$$A/F(a) \overset{h_1}{=} \{0', 1'\}; 0' = C_a(0) = \{0, b, e\}; 1' = C_a(1) = F(a)$$

$$A/F(b) \overset{h_2}{\cong} \{0', 1'\}; 0' = C_b(0) = \{0, a, d\}; 1' = C_b(1) = F(b)$$

En este caso tenemos $A/F(a) \cong A/F(b)$ y $Ker(h_1) \neq Ker(h_2)$. Tenemos además que $A/F(0) \cong \{0\}$; $A/F(d) \cong A/F(e)$ es la cadena con tres elementos; $A/F(c) \cong \mathbf{2} \times \mathbf{2}$; $A/F(f) \cong A/F(g) \cong \mathbf{2} \times \mathbf{3}$ y $A/F(1) \cong A$.

Teorema 2.1.1 *Si A es un álgebra de Heyting y $a \in A$, entonces $A/F(a) \cong [0, a]$.*

Demostración: Dado un segmento $[p, u] = \{z \in A : p \leq z \leq u\}$, donde $p \leq u$, sabemos que $([p, u], \wedge, \vee, p, u)$ es un reticulado distributivo con primer elemento p y último elemento u. Definimos para $x, y \in [p, u]$

$$x \to' y = p \vee (u \wedge (x \to y))$$

Si $x, y, z \in [p, u]$, valen

$x \to' y \in [p, u]$
$p \leq p \vee (u \wedge (x \to y)) = (p \vee u) \wedge (p \vee (x \to y)) = u \wedge (p \vee (x \to y)) \leq u$

H_1) $x \to' x = u$
$x \to' x = p \vee (u \wedge (x \to x)) = p \vee (u \wedge 1) = p \vee u = u$

H_2) $(x \to' y) \wedge y = y$
$(x \to' y) \wedge y = [p \vee (u \wedge (x \to y))] \wedge y = (p \wedge y) \vee [y \wedge u \wedge (x \to y)] =$
$= p \vee [u \wedge (x \to y) \wedge y] = p \vee (u \wedge y) = p \vee y = y$

H_3) $x \wedge (x \to' y) = x \wedge y$
$x \wedge (x \to' y) = x \wedge [p \vee (u \wedge (x \to y))] = (x \wedge p) \vee (x \wedge u \wedge (x \to y)) =$
$= p \vee (u \wedge (x \wedge x \to y))) = p \vee (u \wedge (x \wedge y)) = x \wedge y$

H_4) $x \to' (y \wedge z) = (x \to' z) \wedge (x \to' y)$
$x \to' (y \wedge z) = p \vee [u \wedge (x \to (y \wedge z))] = p \vee [u \wedge ((x \to z) \wedge (x \to y))] =$
$= p \vee [u \wedge u \wedge (x \to z) \wedge (x \to y)] = p \vee [(u \wedge (x \to z)) \wedge (u \wedge (x \to y))] =$
$= [p \vee (u \wedge (x \to z))] \wedge [p \vee (u \wedge (x \to y))] = (x \to' z) \wedge (x \to' y)$

H_5) $(x \vee y) \to' z = (x \to' z) \wedge (y \to' z)$
$(x \vee y) \to' z = p \vee [u \wedge ((x \vee y) \to z)] = p \vee [u \wedge ((x \to z) \wedge (y \to z))] =$
$= p \vee [(u \wedge (x \to z)) \wedge (u \wedge (y \to z))] = [p \vee (u \wedge (x \to z))] \wedge [p \vee (u \wedge (y \to z))] =$
$= (x \to' z) \wedge (y \to' z)$

Luego, $([p, u], \wedge, \vee, \to', p, u)$ es un álgebra de Heyting.

Supongamos ahora que $p = 0$. Entonces, $x \to' y = 0 \vee (u \wedge (x \to y)) = u \wedge (x \to y)$. Veamos que $A/F(a) \cong [0, a]$.
Sea $\pi : A \mapsto A/F(a)$ el epimorfismo canónico y $g : A \mapsto [0, a]$ definida por $g(x) = x \wedge a$. Es

claro que g es un epimorfismo, ya que para todo $x \in [0, a], g(x) = x \wedge a = x$. Si probamos que $Ker(\pi) = Ker(g)$, entonces quedará probado el isomorfismo.

$$Ker(g) = \{x \in A : g(x) = a\} = \{x \in A : x \wedge a = a\} = \{x \in A : a \leq x\} = F(a)$$

■

Observación: La operación $\to'$ no coincide en general con $\to$: Sea A el álgebra del ejercicio anterior y consideremos el segmento $[0, c]$; tenemos que $a \to b = e$ y $a \to' b =$ $= c \wedge (a \to b) = c \wedge e = 0$.

3. Subálgebras

Si A es un álgebra de Heyting y $X \subseteq A$, notaremos $SH(X)$ a la subálgebra de Heyting de A generada por X. Esto es, la menor de las subálgebras de A que contienen a X.

Lema 3.1 *Si A es una cadena con primer elemento 0 y último elemento 1 y $X \subseteq A$, entonces $SH(X) = X \cup \{0, 1\}$.*

Demostración: Si $X = \emptyset$, es claro que $SH(X) = \{0, 1\} = \emptyset \cup \{0, 1\}$.

Si $X \neq \emptyset$, entonces $X \subseteq X \cup \{0, 1\} = Y$. Y es una subálgebra de A: en efecto, $0, 1 \in Y$ y si $x, y \in Y$, entonces $x \wedge y, x \vee y \in Y$ y $x \to y \in Y$, ya que

$$x \to y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ y & \text{si } x > y \end{cases}$$

Hemos probado entonces que $SH(X) \subseteq Y$, pero como $X \subseteq SH(X)$ y $\{0, 1\} \subseteq SH(X)$, entonces $Y = X \cup \{0, 1\} \subseteq SH(X)$ y por lo tanto $Y = SH(X)$. ■

4. Elementos regulares

Ya vimos que en toda álgebra de Heyting vale $N_3) x \leq \neg\neg x$. Si $x = \neg\neg x$ entonces se dice que x es un *elemento regular*. Designaremos con $R(A)$ al conjunto de todos los elementos regulares de A, esto es

$$R(A) = \{x \in A : x = \neg\neg x\}$$

Es claro que $\{0, 1\} \subseteq R(A)$, ya que $\neg\neg 1 = \neg 0 = 1$ y $\neg\neg 0 = \neg 1 = 0$.

Lema 4.1 *$x \in R(A)$ si y sólo si $x = \neg y$ para algún $y \in A$.*

Demostración: Si $x = \neg\neg x$, basta con poner $y = \neg x$.

Si $x = \neg y$, entonces $\neg\neg x = \neg\neg\neg y = \neg y = x$, esto es, $x \in R(A)$. ■

Teorema 4.1 [Glivenko, [2]] *$R(A)$ es un álgebra de Boole.*

Demostración:

1. Ya vimos que $0, 1 \in R(A)$.

2. Si $x, y \in R(A)$, entonces $\neg\neg x = x$ y $\neg\neg y = y$
   $\neg\neg(x \wedge y) \overset{N_{7})}{=} \neg\neg x \wedge \neg\neg y = x \wedge y$.Luego, $x \wedge y \in R(A)$.

3. $R(A)$ es un reticulado superior
   Sean $x, y \in R(A)$, por el lema anterior, $\neg\neg(x \vee y) \in R(A)$. Veamos que $\neg\neg(x \vee y)$ es el supremo en $R(A)$ de x e y. Vamos a notar $x \cup y = \neg\neg(x \vee y)$.

   (i) $x \leq \neg\neg(x \vee y), y \leq \neg\neg(x \vee y)$
   En efecto, $x \leq x \vee y \Rightarrow \neg(x \vee y) \leq \neg x \Rightarrow x = \neg\neg x \leq \neg\neg(x \vee y)$. Análogamente, $y \leq \neg\neg(x \vee y)$.

   (ii) Si $z \in R(A)$ verifica $x \leq z$ y $y \leq z$ entonces $\neg\neg(x \vee y) \leq z$
   De $x \leq z$ e $y \leq z$, obtenemos $x \vee y \leq z$ y $\neg\neg(x \vee y) \leq \neg\neg z = z$

   Luego, $(R(A), \wedge, \cup, 0, 1)$ es un reticulado.

4. $(R(A), \wedge, \cup, 0, 1)$ es distributivo.
   Sean $x, y, z \in R(A)$. $x \wedge (y \cup z) = x \wedge \neg\neg(y \vee z) = \neg\neg x \wedge \neg\neg(y \vee z) = \neg\neg(x \wedge (y \vee z)) =$
   $= \neg\neg((x \wedge y) \vee (x \wedge z)) = (x \wedge y) \cup (x \wedge z)$

5. Dado $x \in R(A)$, éste tiene complemento en $R(A)$.

   a) $x \wedge \neg x \overset{N_{0})}{=} 0$ y, por el lema anterior, $\neg x \in R(A)$.

   b) $x \cup \neg x = \neg\neg(x \vee \neg x) \overset{N_{27})}{=} \neg(\neg x \wedge \neg\neg x) = \neg 0 = 1$

Observemos que el orden en $R(A)$ coincide con el orden de A. En efecto, dados $x, y \in R(A)$, si ponemos $x \leq' y$ cuando $x \cup y = y$, entonces tenemos que $x \leq' y \Rightarrow x \cup y = y \Rightarrow \neg\neg(x \vee y) = y \Rightarrow \neg\neg\neg(x \vee y) = \neg y \Rightarrow \neg(x \vee y) = \neg y \overset{N_{27})}{\Rightarrow} \neg x \wedge \neg y = \neg y \Rightarrow \neg y \leq \neg x \Rightarrow x \leq y$.
Si $x \leq y, x \cup y = \neg\neg(x \vee y) = \neg\neg y = y$, esto es, $x \leq' y$. ■

Corolario 4.1 *Un álgebra de Heyting A es un álgebra de Boole si y sólo si $R(A) = A$.*

Demostración: Sea A un álgebra de Heyting que es un álgebra de Boole. Como el orden de álgebra de Heyting coincide con el de álgebra de Boole, entonces $\neg x$ coincide con $-x$ para todo $x \in A$ por lo visto en la demostración del teorema anterior.Luego, para todo $x \in A, \neg\neg x = - - x = x$ y por lo tanto $R(A) = A$.

Si $A = R(A)$, como $R(A)$ es un álgebra de Boole, A también lo es. ■

5. Elementos Booleanos de un álgebra de Heyting

Notaremos con $B(A)$ al conjunto de elementos Booleanos de un álgebra de Heyting A. Esto es:

$$B(A) = \{x \in A : \text{existe } x' \in A \text{ tal que } x \wedge x' = 0 \text{ y } x \vee x' = 1\}$$

Es claro que $\{0,1\} \subseteq B(A)$.

Lema 5.1 *Si $x \in B(A)$, entonces $x' = \neg x$.*

Demostración: De $x \wedge x' = 0$ resulta que $x' \leq x \to 0 = \neg x$.
Luego $1 = x \vee x' \leq x \vee \neg x = 1$. Como además $x \wedge \neg x = 0$, resulta que $x' = \neg x$. ■

Corolario 5.1 *$x \in B(A)$ si y sólo si $x \vee \neg x = 1$.*

Lema 5.2 *$x \in B(A)$ si y sólo si $x \to y = \neg x \vee y$ cualquiera que sea $y \in A$.*

Demostración: Supongamos que $x, y \in B(A)$ y veamos que $\neg x \vee y$ satisface:

I_1') $x \wedge (\neg x \vee y) \leq y$
$x \wedge (\neg x \vee y) = (x \wedge \neg x) \vee (x \wedge y) = x \wedge y \leq y$

I_2') Si $x \wedge z \leq y$ entonces $z \leq \neg x \vee y$.
Si $x \wedge z \leq y$, entonces $\neg x \vee (x \wedge z) \leq \neg x \vee y$. Luego $(\neg x \vee x) \wedge (\neg x \vee z) \leq \neg x \vee y$, de donde $z \leq \neg x \vee z \leq \neg x \vee y$.

Entonces como $x \wedge (x \to y) = x \wedge y \leq y$, por $I_2'), x \to y \leq \neg x \vee y$.(i)
Por $I_1'), x \wedge (\neg x \vee y) \leq y$, y aplicando I_2), obtenemos $\neg x \vee y \leq x \to y$. (ii)
De (i) y (ii) se sigue que $\neg x \vee y = x \to y$.

Si suponemos que $x \to y = \neg x \vee y$ cualquiera que sea $y \in A$, entonces en particular $x \to x = 1 = \neg x \vee y$ y por lo tanto $x \in B(A)$. ■

Lema 5.3

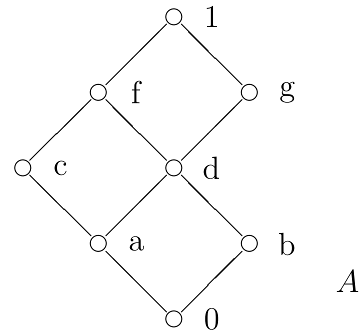
1. *Si $x \in B(A)$, entonces $(x \to y) \to x = x$ cualquiera sea $y \in A$.*

2. *Si $x \in A$ es tal que $(x \to y) \to x = x$ cualquiera sea $y \in A$, entonces $x \in R(A)$.*

Demostración: 1. Si $x \in B(A)$ entonces $x \to y = \neg x \vee y$ cualquiera que sea $y \in A$. Luego, $(x \to y) \to x = (\neg x \vee y) \to x \overset{H_5)}{=} (\neg x \to x) \wedge (y \to x) \overset{N_{18})}{=} \neg\neg x \wedge (y \to x) =$
$= x \wedge (y \to x) = (y \to x) \wedge x \overset{H_2)}{=} x$.

2. Si $y = \neg x$, entonces $(x \to \neg x) \to x = x$. Por N_{15}), sabemos que $x \to \neg x = \neg x$. Luego $x = (x \to \neg x) \to x = \neg x \to x \overset{N_{18})}{=} \neg\neg x$. ■

Notemos que $B(A)$ no es necesariamente igual a $R(A)$: sea A el reticulado de la figura;



Tenemos entonces la siguiente tabla:

x	$\neg x$	$\neg\neg x$	$x \vee \neg x$
0	1	0	1
1	0	1	1
a	b	c	d
b	c	b	f
c	b	c	f
d	0	1	d
f	0	1	f
g	0	1	g

en la tabla vemos que $B(A) = \{0, 1\}$ y $R(A) = \{0, 1, b, c\}$. Podemos observar además que $b \cup c = \neg\neg(b \vee c) = \neg\neg f = 1 \neq f$.

6. Algebras de Heyting lineales

Teorema 6.1 [A.Monteiro, [5], [6], M.Ward,[8]] *En un álgebra de Heyting las siguientes condiciones son equivalentes:*

$L_1)$ $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$

$L_2)$ $x \vee y = ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x)$

$L_3)$ $z \to (x \vee y) = (z \to x) \vee (z \to y)$

$L_4)$ $(x \wedge y) \to z = (x \to z) \vee (y \to z)$

Demostración:

***L*₁) ⇒ *L*₂)** Sea

$$p = ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x) \tag{2}$$

$S_1)$ $x \leq p; y \leq p$

Por $P_{21})$,

$$x \leq (x \to y) \to y \tag{3}$$

De $P_{12})$,

$$x \leq (y \to x) \to x \tag{4}$$

Análogamente,

$$y \leq (y \to x) \to x \tag{5}$$

e

$$y \leq (x \to y) \to y. \tag{6}$$

De (2), (3) y (4) se deduce que $x \leq p$, y de (2), (3) y (5), $y \leq p$.

$S_2)$ Si $x \leq z$ e $y \leq z$, entonces $p \leq z$.

Suponemos que

$$x \leq z \tag{7}$$

e

$$y \leq z. \tag{8}$$

De (7), pr $P_{14})$,

$$p \to x \leq p \to z \tag{9}$$

y de (2),

$$p \leq (y \to x) \to x \tag{10}$$

luego, por$P_{15})$,

$$((y \to x) \to x) \to x \leq p \to x \tag{11}$$

y por $P_{23})$,

$$y \to x \leq p \to x \tag{12}$$

de (9) y (12),

$$y \to x \leq p \to z \tag{13}$$

Análogamente se obtiene

$$x \to y \leq p \to z \tag{14}$$

y de (13), (14) y $L_1)$

$$1 = (x \to y) \vee (y \to x) \leq p \to z \tag{15}$$

y entonces, $p \to z = 1$, eso es, $p \leq z$.

Luego, de $S_1)$ y $S_2)$, $x \vee y = p = ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x)$.

$L_2) \Rightarrow L_3)$ $z \to (x \vee y) \overset{L_2)}{=} z \to [((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x)] \overset{H_4)}{=}$
$= [z \to ((y \to x) \to x)] \wedge [z \to ((x \to y) \to y)] =$
$\overset{P_{26})}{=} [(z \to (y \to x)) \to (z \to x)] \wedge [(z \to (x \to y)) \to (z \to y)] =$
$\overset{P_{26})}{=} [((z \to y) \to (z \to x)) \to (z \to x)] \wedge [((z \to x) \to (z \to y)) \to (z \to y)] =$
$\overset{L_2)}{=} (z \to x) \vee (z \to y)$

$L_3) \Rightarrow L_1)$ $1 = (x \vee y) \to (x \vee y) =$
$\overset{L_3)}{=} ((x \vee y) \to x) \vee ((x \vee y) \to y) =$
$\overset{H_5)}{=} ((x \to x) \wedge (y \to x)) \vee ((x \to y) \wedge (y \to y)) =$
$= (1 \wedge (y \to x)) \vee ((x \to y) \wedge 1) = (y \to x) \vee (x \to y)$

$L_2) \Rightarrow L_4)$ $(x \to z) \vee (y \to z) =$
$\overset{L_2)}{=} [((x \to z) \to (y \to z)) \to (y \to z)] \wedge [((y \to z) \to (x \to z)) \to (x \to z)] =$
$\overset{P_{19})}{=} \{[y \to ((x \to z) \to z)] \to (y \to z)\} \wedge \{[x \to ((y \to z) \to z)] \to (x \to z)\} =$
$\overset{P_{26})}{=} \{y \to [((x \to z) \to z) \to z]\} \wedge \{x \to [((y \to z) \to z) \to z]\} =$
$\overset{P_{23})}{=} [y \to (x \to z)] \wedge [x \to (y \to z)] \overset{P_{19})}{=} x \to (y \to z) \overset{P_{18})}{=} (x \wedge y) \to z$

$L_4) \Rightarrow L_1)$ $1 = (x \wedge y) \to (x \wedge y) =$
$\overset{L_4)}{=} (x \to (x \wedge y)) \vee (y \to (x \wedge y)) =$
$= [(x \to x) \wedge (x \to y)] \vee [(y \to x) \wedge (y \to y)] =$
$= [1 \wedge (x \to y)] \vee [(y \to x) \wedge 1] = (x \to y) \vee (y \to x)$

■

Definición 6.1 *Un álgebra de Heyting en la que se verifica L_1) se dice un* álgebra de Heyting lineal *o* L-álgebra*.*

Teorema 6.2 [A.Monteiro[5], [6]] *En un álgebra de Heyting se verifica L_1) si y sólo si la familia de todos los filtros que contienen a un filtro primo dado forma una cadena.*

Demostración: Sea P un filtro primo de un álgebra de Heyting A donde se verificaL_1) y $\mathcal{F}$ la familia de todos las filtros de A. Sea

$$\mathcal{F}(P) = \{F \in \mathcal{F} : P \subseteq F\}$$

$\mathcal{F}(P) \neq \emptyset$ pues $P, A \in \mathcal{F}(P)$. Supongamos que existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(P)$ tales que $F_1 \not\subseteq F_2$ y $F_2 \not\subseteq F_1$. Sean entonces $x_1 \in F_1 - F_2, x_2 \in F_2 - F_1$. Por hipótesis, $(x_1 \to x_2) \vee (x_2 \to x_1) = 1 \in P$. Como P es primo, se deduce que $(x_1 \to x_2) \in P$ ó $(x_2 \to x_1) \in P$. Si $(x_1 \to x_2) \in P$, como $P \subseteq F_1, (x_1 \to x_2) \in F_1$, y como F_1 es sistema deductivo, resulta que $x_2 \in F_1$, lo cual contradice que $x_2 \in F_2 - F_1$. En forma análoga, si $(x_2 \to x_1) \in P$, se llega una contradicción, por lo que se deduce que $F_1 \subseteq F_2$ ó $F_2 \subseteq F_1$, esto es, $\mathcal{F}(P)$ es una cadena.

Supongamos ahora que la familia de todos los filtros que contienen a un filtro primo es una cadena, y que existen $x, y \in A$ tales que $\alpha = (x \to y) \vee (y \to x) < 1$. Necesariamente $x \neq y$. Como $\alpha < 1$, por el teorema del filtro primo, existe un filtro primo P tal que $\alpha \notin P$. Como $y \leq x \to y \leq \alpha$ y $x \leq y \to x \leq \alpha$, resulta que $x \notin P$ e $y \notin P$. Consideremos $F_1 = \mathbf{F}(P, x)$; $F_2 = \mathbf{F}(P, y)$. Entonces, por hipótesis, $F_1 \subseteq F_2$ ó $F_2 \subseteq F_1$. Si suponemos que $F_1 \subseteq F_2$, como $x \in F_1, x \in F_2$ y entonces $y \to x \in F_2$. Luego, $y \to (y \to x) = y \to x \in P$ y como $y \to x \leq \alpha$, resulta que $\alpha \in P$, absurdo. De la misma manera, si suponemos que $F_2 \subseteq F_1$, concluímos que $\alpha \in P$. Luego, para $x, y \in A$, debe ser $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$. ■

Corolario 6.1 *En una L-álgebra A, si F es un filtro propio que contiene a un filtro primo P, entonces F es primo. Luego, la familia de todos los filtros propios que contienen a un filtro primo constituye una cadena de filtros primos.*

Demostración: Sea F un filtro propio, $F \in \mathcal{F}(P)$. Si $x \vee y \in F$,

$$x \vee y \overset{L_2)}{=} ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x) \in F.$$

Luego $(x \to y) \to y \in F$ e $(y \to x) \to x \in F$. Además, $(x \to y) \vee (y \to x) = 1 \in P$, de donde $x \to y \in P$ ó $y \to x \in P$. Si $x \to y \in P, y \in F$; y si $y \to x \in P, x \in F$, esto es, F es un filtro primo. ■

Lema 6.1 *En toda álgebra de Heyting lineal A, si P es un filtro primo, entonces A/P es una cadena.*

Demostración: Sean $C_D(x), C_D(y) \in A/P$. Como A es lineal,
$(C_D(x) \to C_D(y)) \vee (C_D(y) \to C_D(x)) = (C_D(x \to y)) \vee C_D(y \to x)) = C_D((x \to y) \vee (y \to x)) = C_D(1)$.
Luego, $(x \to y) \vee (y \to x) \in P$, y como P es primo, $x \to y \in P$ ó $y \to x \in P$.
Si $x \to y \in P$, entonces $C_D(x) \to C_D(y) = C_D(1)$ y $C_D(x) \leq C_D(y)$. Análogamente, $y \to x \in P$, se sigue que $C_D(y) \leq C_D(x)$. ■

6.1. Elementos Booleanos en las álgebras de Heyting Lineales

En las álgebras de Heyting lineales, como vale por L_4) que

$$(x \wedge y) \to z = (x \to z) \vee (y \to z)$$

entonces, en particular

$$(x \wedge y) \to 0 = (x \to) \vee (y \to 0),$$

esto es,

$$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y \tag{16}$$

y ya sabíamos que vale $\neg(x \cup y) = \neg\neg\neg(x \vee y) \overset{N_{27})}{=} \neg x \wedge \neg y$.

Entonces, si A es un álgebra de Heyting lineal, $(R(A), \wedge, \vee, 0, 1)$ es un álgebra de Boole: en efecto, sólo nos queda por probar que si $x, y \in R(A)$, entonces $x \vee y \in R(A)$, pero

$$\neg\neg(x \vee y) \overset{N_{27})}{=} \neg(\neg x \wedge \neg y) \overset{(16)}{=} \neg\neg x \vee \neg\neg y = x \vee y.$$

Más aún, en este caso $B(A) = R(A)$.

- $R(A) \subseteq B(A)$.
  Si $x \in R(A), x = \neg y$ para algún $y \in A$. En general, vale que $\neg y \wedge \neg\neg y = 0$ (i). Luego, $\neg(\neg y \wedge \neg\neg y) = \neg 0 = 1$ y por (16) $\neg\neg y \vee \neg\neg\neg y = 1$, esto es, $\neg\neg y \vee \neg y = 1$ (ii).
  De (i) y (ii) se deduce que $\neg y = x \in B(A)$.

- $B(A) \subseteq R(A)$
  Si $x \in B(A)$, entonces, por un lema anterior, $\neg x = x' \in B(A)$. Como $x = (x')' = \neg\neg x$, entonces $x \in R(A)$.
  Notemos que esta inclusión vale en toda álgebra de Heyting.

7. Elementos densos en las álgebras de Heyting

Definición 7.1 *Siguiendo a Tarski, ver H. Rasiowa, [7], llamaremos* denso *a un elemento x de un álgebra de Heyting si $\neg x = 0$.*

Lema 7.1 *Las siguientes condiciones son equivalentes para cada elemento x en un álgebra de Heyting:*

(i) *x es denso.*

(ii) $\neg\neg x = 1$.

(iii) $x \wedge z \neq 0$ *para todo* $z \neq 0$.

(iv) $x = y \vee \neg y$ *para algún elemento* $y \in A$.

Demostración: (i)$\Rightarrow$ (ii) Si x es denso, $\neg x = 0$ y entonces $\neg\neg x = \neg 0 = 1$
(ii)$\Rightarrow$(i) Si $\neg\neg x = 1$, entonces $\neg x = \neg\neg\neg x = \neg 1 = 0$, esto es, x es denso.
(i)$\Leftrightarrow$ (iii) $x \wedge z \leq 0 \Leftrightarrow z \leq x \rightarrow 0 = \neg x = 0 \Leftrightarrow z = 0$
(i)$\Rightarrow$(iv) $\neg x = 0$, luego $x = x \vee 0 = x \vee \neg x$.
(iv)$\Rightarrow$(i) Si x es de la forma $y \vee \neg y$, entonces $\neg x = \neg(y \vee \neg y) \overset{N_{26})}{=} 0$. Luego, $x = y \vee \neg y$ es denso.
■

Llamaremos $Ds(A)$ al conjunto de los elementos densos de A.

$$Ds(A) = \{x \in A : \neg x = 0\}$$

$Ds(A) \neq \emptyset$, pues $1 \in Ds(A)$.

Consideremos el reticulado distributivo $\mathcal{A}$ de los abiertos de un espacio topológico E con $X \to Y = I(\complement X \cup Y)$. Si $A \in \mathcal{A}$ es denso, entonces $\neg A = I(\complement A \cup \emptyset) = I\complement A = \emptyset$. Luego $\complement I \complement A = E$, esto es, $\bar{A} = E$, de modo que A es denso en el sentido topológico del término: su clausura es todo el espacio.

Lema 7.2 *Un álgebra de Heyting es un álgebra de Boole si y sólo si $Ds(A) = \{1\}$*

Demostración: Por el lema anterior, $Ds(A) = \{y \vee \neg y : y \in A\}$ Luego $Ds(A) = \{1\}$ si y sólo si $y \vee \neg y = 1$ para todo $y \in A$. Esto es equivalente por el corolario 5.1 a decir que A es un álgebra de Boole. ■

Lema 7.3 *$Ds(A)$ es un filtro.*

Demostración:

F_1) Ya vimos que $1 \in Ds(A)$.

F_2) Sean $x, y \in Ds(A)$, y $z \neq 0$. Sabemos que $x \wedge z \neq 0$ y de la misma manera, $y \wedge (x \wedge z) \neq 0$. Luego, $(x \wedge y) \wedge z \neq 0$ para todo $z \neq 0$, y por lo tanto, $x \wedge y \in Ds(A)$.

F_3) Si $x \in Ds(A)$ y $x \leq y$, entonces $\neg y \leq \neg x = 0$ y por lo tanto, $\neg y = 0$ e $y \in Ds(A)$.

■

Lema 7.4 *Si F es un filtro tal que $Ds(A) \subseteq F$, entonces A/F es un álgebra de Boole.*

Demostración: Ya sabemos que A/F es un álgebra de Heyting. Bastará entonces con probar que $C_F(x) \vee \neg C_F(x) = C_F(1)$ para todo $C_F(x) \in A/F$. En efecto:

$$C_F(x) \vee \neg C_F(x) = C_F(x) \vee C_F(\neg x) = C_F(x \vee \neg x) = C_F(1),$$

pues $x \vee \neg x \in Ds(A) \subseteq F$ cualquiera que sea $x \in A$. ■

Lema 7.5 *El álgebra de Boole $R(A)$ es isomorfa a $A/Ds(A)$*

Demostración: Sea $\pi : A \mapsto A/Ds(A)$ el epimorfismo canónico y $f : A \mapsto R(A)$ dada por $f(x) = \neg\neg x$.
f es un epimorfismo:

1. $f(x \wedge y) = \neg\neg(x \wedge y) \overset{N_7)}{=} \neg\neg x \wedge \neg\neg y = f(x) \wedge f(y)$
2. $f(0) = \neg\neg 0 = 0$
3. $f(1) = \neg\neg 1 = 1$

4. $f(x \to y) = \neg\neg(x \to y) \overset{N_{14})}{=} \neg\neg x \to \neg\neg y = f(x) \to f(y)$

5. $f(x \vee y) = \neg\neg(x \vee y) \overset{N_{25})}{=} \neg\neg(\neg\neg x \vee \neg\neg y) = \neg\neg(f(x) \vee f(y)) = f(x) \cup f(y)$, donde $\cup$ es la operación del supremo en $R(A)$.

Además, f es epimorfismo, ya que si $x \in R(A)$, entonces $f(x) = \neg\neg x = x$.
Finalmente, $Ker(f) = \{x \in A : \neg\neg x = 1\} = \{x \in A : x \text{ es denso }\} = Ds(A)$. Por lo tanto, $Ker(f) = Ker(\pi)$ y $R(A) \cong A/Ds(A)$. ■

Referencias

[1] G. Birkoff, *Lattice Theory*, American Mathematical Society. Colloquium Publications, Volume XXV,3^{rd}edition, Providence 1973, pp.45- 46.

[2] V. Glivenko, *Sur quelques points de la logique de M. Brower.* Académie Royale de Belgique, Bulletins de la classe des sciences, ser. 5, 15 (1929), 183-188.

[3] A. Monteiro. *Axiomes indépendants pour les algèbres de Brower.* Revista de la Unión Matemática Argentina, Volumen XVII (1955), pp. 149-160.

[4] A. Monteiro, *Curso Algebra de la lógica I.* (1959). Instituto de Matemática. Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca.

[5] A. Monteiro, *Linearisation de la logique positive de Hilbert-Bernays.* Revista de la U.M.A. 20 (1962), 308-309.

[6] A. Monteiro, *Cursos dados en la Universidad Nacional del Sur* (1964).

[7] H. Rasiowa,*An algebraic approach to non-classical logics*, North-Holland, (1974).

[8] M. Ward, *Structure residuation.* Annals of Mathematics, 33 (1938), 558-568.