Les algèbres de Nelson semi-simples

António Monteiro

Instituto de Matemática - Universidad Nacional del Sur - 1963
Bahía Blanca - Argentina

1 Introduction

Une logique constructive avec négation forte a été considérée par David Nelson [23] et par A. A. Markov [10]. Le calcul propositionnel correspondant a été étudié par H. H. Voroboviev [29], Helena Rasiowa [24], A. Białynicki-Birula et H. Rasiowa [1].
Un progres très important, au point de vue de l'algèbre, dans l'étude de cette logique a été l'introduction par H. Rasiova [25] de la notion de *N-lattice*, qui joue dans cette théorie un rôle analogue a celui des algèbres de Boole (Heyting) dans la logique classique (intuitioniste) et que peut être défine [3], [4] de la manière suivante:

Définition 1.1 *Un système* $(A, 1, \sim, \wedge, \vee, \to)$ *formé par: un ensemble non vide* A*, un élément* $1 \in A$*, une opération unaire* $\sim$ *(négation forte), et trois opérations binaires* $\wedge, \vee, \to$ *définies sur* A*, sera dit un N-lattice, ou une algèbre de Nelson, si les conditions suivantes sont vérifiées:*

N1) $x \wedge (x \vee y) = x$

N2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

N3) $\sim\sim x = x$

N4) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

N5) $x \wedge \sim x = (x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y)$

N6) $x \to x = 1$

N7) $(x \to y) \vee (\sim x \vee y) = \sim x \vee y$

N8) $x \to (y \to z) = (x \wedge y) \to z$

N9) $x \wedge (x \to y) = x \wedge (\sim x \vee y)$

N10) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$

N11) $x \vee 1 = 1$

Nous dirons, pour abréger, que A *est un N-lattice ou une algèbre de Nelson.*

Les axiomes N1) y N2) montrent, d'après M. Sholander [26], que A est un réticulé distributif par rapport aux opérations $\wedge$ et $\vee$. D'après N11) ce réticulé a le dernier élément

1.
Nous poserons $0 = \sim 1$, et l'on voit facilement que 0 est le premier élément de A. Outre la négation forte ($\sim$) on peut définir les négations[1]:

$$\rceil x = x \to 0 \qquad\qquad \lceil x = \sim \lceil \sim x$$

entre les quelles nous avons les relations:

$$\rceil x \leq \sim x \leq \lceil x$$

Les égalités

$$\text{C1)} \quad x \wedge \sim x = 0 \quad \text{C2)} \quad x \wedge \lceil x = 0 \quad \text{C3)} \quad x \wedge \rceil x = 0$$

$$\text{T1)} \quad x \vee \sim x = 1 \quad \text{T2)} \quad x \vee \lceil x = 1 \quad \text{T3)} \quad x \vee \rceil x = 1$$

qui expriment, respectivement, le principe de contradiction et le principe du tiers exclu, pour chacune de ces négations, ne sont pas démontrables à partir des axiomes N1- N11. Les formules $x \leq \lceil\lceil x$; $\lceil\lceil x \leq x$; $\lceil x = \lceil\lceil\lceil x$ ne sont pas valables, mais nous avons $\lceil\lceil\lceil\lceil x = \lceil\lceil x$. Signalons encore le règle de calcul:

$$(x \vee y) \to z = (x \to z) \wedge (y \to z).$$

Si nous posons par définition

$$x \leftarrow y = \sim (\sim x \to \sim y)$$

nous avons pour ces algèbres un *principe de dualité*, qu'on peut exprimer, sous une forme abrégée, par la table ci- jointe.

$$\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \vee & \wedge \\ \to & \leftarrow \\ \sim & \sim \\ \rceil & \lceil \end{array}$$

Pour voir qu'il en est ainsi il suffit de montrer que les égalités duales de N1-N11 sont vérifiés.

Comme cas particulier des algèbres de Nelson, nous pouvons indiquer les algèbres de Boole. Si A est une algèbre de Boole, si $\sim x$ est le complément booléen de x et si nous posons $x \to y = \sim x \vee y$, alors les axiomes N1-N11 sont vérifiés.

[1]Dans les travaux de H. Rasiowa, et d'autres auteurs, l'élèment $\lceil x$ est désigné par la notation $\rceil x$. Ce changement de notation sera justifié plus loin.

Théorème 1.1 *Pour que l'algèbre de Nelson A soit une algèbre de Boole il faut et il suffit que l'une quelconque des conditions suivantes soit vérifié:*

$$\begin{array}{llll} B1) & x \wedge \sim x = 0 & B2) & x \wedge \lceil = 0 \\ B1) & x \to y = \sim x \vee y & B4) & x \wedge (x \to y) = x \wedge y \\ B5) & x \to y = \sim y \to \sim x & B6) & \lceil\lceil x = x. \end{array}$$

Il en est de même pour les conditions duales de B1-B6. S'il en est ainsi, $\sim x$ est le complément booléen de x et $\lceil x = \sim x = \rceil x$.

La loi de contraposition B5) n'étant pas valable nous pouvons considérer avec D. Nelson [23] *l'implication contraposable*

$$x \rightarrowtail y = (x \to y) \wedge (\sim y \to \sim x)$$

Les formules

$$x \to y = x \rightarrowtail (x \rightarrowtail y),$$

$$x \vee y = \sim (\sim x \wedge \sim x),$$

$$1 = x \rightarrowtail x.$$

étant démontrables, il est possible de définir une algèbre de Nelson comme un système $(A, \sim, \wedge, \rightarrowtail)$ vérifiant des axiomes convenables [2]; mais l'opération $\rightarrowtail$ est moins maniable que $\to$.

Comme la formule B4), indiquée dans le théorème 1.1, n'est pas valable, l'opération $\to$ n'est pas une implication intuitioniste à moins qu'il s'agisse du cas très particulier des algèbres de Boole.

Si nous représentons par $a \Rightarrow b$ l'implication intuitioniste des éléments $a, b \in A$, dans le cas où elle existe, on peut démontrer que $a \Rightarrow (\sim a \vee b)$, existe pour tout couple $a, b \in A$ et en outre $a \to b = a \Rightarrow (\sim a \vee b)$.
Cette formule est très utile pour déterminer l'opération $\to$ dans le cas où A est une algèbre de Heyting sur laquelle on puisse définir une structure d'algèbre de Nelson [19]. Il convient de remarquer que, en général l'implication $\Rightarrow$ ne peut pas être définie, au moyen des opérations: $\vee, \wedge, \sim, \to$.
Les propriétés les plus remarquables des algèbres de Nelson ont été indiquées dans les travaux de Helena Rasiowa. Les algèbres de Nelson ont le même degré de complexité que les algèbres de Heyting et la symétrie des algèbres de Boole (dualitè).
Nous nous proposons, dans cette note, de déterminer et étudier les algèbres de Nelson semi-simples.

[2] Ce problème a été résolu en 1962 par Diana Brignole, dans un travail qui n'est pas encore publié.

2 Homomorphismes

La notion d'homomorphisme se définit à la manière habituelle. Nous nous proposons d'indiquer une construction permettant d'obtenir toutes les images homomorphes d'une algèbre de Nelson.

Définition 2.1 *Une partie D d'une algèbre de Nelson A sera dite:*

1) Un système déductif *si:*

$D1)$ $1 \in D$.

$D2)$ *Si* $a,\ a \to b \in D$ *alors* $b \in D$ (modus ponens).

2) Un système déductif contraposable *si:*

$C1)$ $1 \in D$.

$C2)$ *Si* $a,\ a \rightarrowtail b \in D$ *alors* $b \in D$ (modus ponens contraposable).

Un système déductif D sera dit propre *si $D \neq A$.*

Lemme 2.1 *Les notions de système déductif et système déductif contraposable sont équivalentes.*

Lemme 2.2 *Toute système déductif est un filtre.*

On peut montrer que la notion de système déductif est équivalente à celle de *filtre spécial de première espèce* introduite par H. Rasiowa [25].
D'après cet auteur il peut existir des filtres que ne soient pas des systèmes déductifs.

Si h est un homomorphisme de A sur A', le *noyau de* h, c'est-à-dire l'ensemble $D = h^{-1}(1')$ (où $1'$ est le dernier élément de A') est un système déductif. Pour que $h(x) = h(y)$ il faut et il suffit que:

$$(x \to y) \wedge (y \to x) \wedge (\sim x \to \sim y) \wedge (\sim y \to \sim x) \in D.$$

Théorème 2.1 *Si D est un système déductif de A et si nous posons $a \equiv b \pmod{D}$ pour indiquer que*

$$(a \to b) \wedge (b \to a) \wedge (\sim a \to \sim b) \wedge (\sim b \to \sim b) \in D$$

alors la relation $\equiv$, ainsi définie sur A, est une relation d'equivalence compatible avec les opérations définies sur A. La famille $A' = A/D$ des classes d'equivalence algébrisée de la façon naturelle est une algèbre de Nelson qu'on nomme algèbre quotient de A par D. Si $|a|$ est la classe d'equivalence qui contient l'élément $a \in A$, alors la transformation $h(a) = |a|$ est un homomorphisme (naturel) de A sur A'. Le noyau de cet homomorphisme, c'est-á-dire l'ensemble $N = h^{-1}(1')$ (ou $1'$ est le dernier élément de A') coïncide avec D. Réciproquement toute image homomorphe de A peut être obtenue de cette manière.

Ce théorème peut etre considéré comme un cas particulier d'un résultat que nous indiquerons au §5.
La détermination des images homomorphes de A se trouve ainsi réduite à la détermination des systèmes déductifs de A.
L'intersection de systèmes déductifs est un système deductif. Le système déductif engendré par une partie G de A est, par définition, l'intersection $D(G)$ de tous les systèmes déductifs qui contiennent G. Il est clair que $D(\emptyset) = \{1\}$.

Théorème 2.2 *Pour que $x \in D(G)$ (où $G \neq \emptyset$) il faut et il suffit qu'il existe des éléments $g_1, \ldots, g_n$ de G tels que*

$$(g_1 \wedge g_2 \wedge \ldots \wedge g_n) \rightarrow x = 1.$$

S'il en est ainsi nous écrirons $G \vdash x$ ou plus précisément:

$$g_1, g_2, \ldots, g_n \vdash x$$

Nous conviendrons aussi d'écrire $\emptyset \vdash 1$.

Théorème 2.3 *Pour que $g_1, \ldots, g_n, a \vdash b$ il faut et il suffit que $g_1, \ldots, g_n \vdash (a \rightarrow b)$.*

D'où l'on déduit:

Théorème 2.4 (Théorème de la deduction) *Pour que $G, a \vdash b$ il faut et il suffit que: $G \vdash a \rightarrow b$.*

Théorème 2.5 *Si D est un système déductif et $a \in A$ alors le système déductif engendré par l'ensemble $G = D \cup \{a\}$ est l'ensemble de tous les $x \in A$ tels que $a \rightarrow x \in D$.*

3 Systèmes déductifs irréductibles

Parmi les systèmes déductifs il est important de distinguer ceux qui sont indiqués dans les définitions suivantes:

Définition 3.1 *Un système déductif D sera dit* irréductible *si:*

1. *D est propre;*
2. *Si D_1 et D_2 sont des systèmes déductifs tels que $D = D_1 \cap D_2$ alors: $D = D_1$ ou $D = D_2$,* (H. Rasiowa [25]).

Définition 3.2 *Un système déductif D sera dit* premier *si:*

1. *D est propre;*
2. *$a \vee b \in D$ implique: $a \in D$ ou $b \in D$.*

H. Rasiowa [25] a démontré que ces deux notions sont équivalentes et qu'il peut exister des filtres premiers qui ne soient pas des systèmes déductifs.
Il est aussi important de considérer la définition suivante:

Définition 3.3 *Un système déductif D est* complètement irréducible *si:*

1. *D est propre;*
2. *Etant donné une famille de systèmes déductifs $\{D_i\}_{i\in I}$ telle que $D = \bigcap_{i\in I} D_i$ il existe un indice $i \in I$ tel que $D = D_i$.*

La famille de tous les systèmes déductifs qui ne contiennent pas un élément $c \neq 1$ est inductive supérieurment.

Définition 3.4 *Un système déductif D sera dit* lié à l'élément *c si D est un système déductif maximal parmi ceux qui ne continnent pas c.*

Théorème 3.1 *Pour qu'un système déductif D soit complètement irréductible il faut et il suffit qu'il soit lié à un élément c.*

Théorème 3.2 *Pour que le système déductif D soit lié à c il faut et il suffit que*

1. *$c \notin D$;*
2. *$x \to c \in D$, pour tout $x \notin D$.*

Théorème 3.3 *Tout système déductif propre est l'intersection de systèmes déductifs complétement irréductibles.*

Ces deux derniers résultats jouent un rôle important au point de vue technique.

Théorème 3.4 *La famille $\mathcal{I}$ de tous les systèmes déductifs irréductibles, ordonnée par la relation d'inclusion est inductive supérieurment et inférieurment. Les éléments maximaux de $\mathcal{I}$ seront appelés:* systèmes déductifs maximaux.

Théorème 3.5 *Pour qu'un système déductif M propre soit maximal il faut et il suffit qu'une quelconque des conditions suivantes soit vérifiée:*

M1) Pour chaque x, $x \in M$ ou $\lceil x \in M$.

M2) Si $x, y \notin M$ alors $x \to y \in M$.

Les algèbres de Nelson simples se définissent à la manière habituelle.

Soit $\mathbf{T}$ un un ensemble formé par trois éléments $\mathbf{T} = \{0, a, 1\}$. Sur $\mathbf{T}$ on peut définir une seule structure d'algèbre de Nelson, déterminée par les tables:

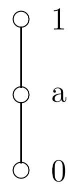
$\wedge$	0	a	1
0	0	0	0
a	0	a	a
1	0	a	1

$\vee$	0	a	1
0	0	a	1
a	a	a	1
1	1	1	1

$\rightarrow$	0	a	1
0	1	1	1
a	1	1	1
1	0	a	1

x	$\sim x$
0	1
a	a
1	0

Il est claire que le réticulé $\mathbf{T}$ a le diagramme suivante:



L'ensemble $\mathbf{B} = \{0, 1\}$ algébrisé par les mêmes tables est une algèbre de Boole, donc une algèbre de Nelson. $\mathbf{B}$ est une sous-algèbre de $\mathbf{T}$.

Théorème 3.6 $\mathbf{B}$ *et* $\mathbf{T}$ *sont les seules algèbres simples.*

Corollaire 3.1 *Pour que le système déductif M soit maximal il faut et il suffit que A/M soit isomorphe à* $\mathbf{B}$ *ou à* $\mathbf{T}$.

4 Les algèbres de Nelson semi-simples

La définition suivante se présente d'une façon naturelle.

Définition 4.1 Le radical *de A est l'intersection, Rad(A), de tous les sys tèmes déductifs maximaux de A. Un algèbre de Nelson A sera dit semi-simples si* Rad(A) $= \{1\}$.

Théorème 4.1 *Le radical de A est identique à chacun des ensembles suivants:*

1. *L'ensemble de tous les $x \in A$ tels que $\lceil\lceil x = 1$.*
2. *Le système déductif engendré par les éléments de la forme $x \vee \lceil x,\ \ x \in A$.*
3. *Le système déductif engendré par les éléments de la forme $((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a$, $a, b \in A$.*

Théorème 4.2 *L'algèbre $A/Rad(A)$ est semi-simple. Si une algèbre de Nelson semi-simple A' est une image homomorphe de A alors A' est une image homomorphe de $A/Rad(A)$.*

Théorème 4.3 *Pour qu'un système déductif premier D de A soit maximal il faut et il suffit qu'il contient le radical, c'est-'a-dire Rad$(A) \subseteq D$.*

Les algèbres de Nelson semi-simples peuvent être caractérisées de plusieurs manières.

Théorème 4.4 *Pour qu'une algèbre de Nelson soit semi-simples il faut et il suffit qu'une quelconque des conditions suivantes soit vérifiée:*

S1) $a \vee \lceil a = 1$;

S2) $(a \to b) \to a = a$;

S3) $a \to b = \lceil a \vee b$;

S4) Tout système déductif premier est maximal;

S5) Tout système déductif propre est l'intersection de systèmes déductifs maximaux.

D'où l'on déduit que:

Théorème 4.5 *Toute algèbre de Nelson semi-simple A, contenant tout au moins deux éléments, est isomorphe à une sous-algèbre d'un produit cartésien d'algèbres* $\mathbf{T}$.

Indiquons la démonstration de ce théorème dans ses lignes générales.
Dans le cas des algèbres de Nelson semi-simples, les filtres premiers minimaux (c'est-à-dire les complémentaires des idéaux maximaux) coïncident avec les systèmes déductifs maximaux.

Soit $E = \{M\}$ l'ensemble des filtres premiers minimaux de A. Soit $\mathcal{F} = \mathbf{T}^E$ la famille de toutes les fonctions de E dans T algébrisées point par point. $\mathcal{F}$ est une algèbre de Nelson semi- simple. Pour chaque $M \in E$ soit m l'homomorphisme naturel de A dans l'algèbre quotient A/M (qui est une sous-algèbre de $\mathbf{T}$).

A chaque élément $f \in A$ faisons correspondre la fonction $\varphi(f) = F \in \mathcal{F}$ définie par la formule

$$F(M) = m(f) \in \mathbf{T}.$$

On voit de suite que φ est un homomorphisme de A dans $\mathcal{F}$ et de la semi-simplicité de A on déduit que φ est un isomorphisme.
Si A est un algèbre de Boole alors $A/M = \mathbf{B}$ et la démonstration précédente coïncide avec celle du théorème de M. Stone [28].

Nous allons maintenant montrer que le théorème de représentation 4.5 peut être identifié avec un théorème de Gr. C. Moisil. Pour cela nous avons besoins de rappeler la notion d'algèbre de Łukasiewicz (trivalente), introduite par Gr. C. Moisil [11], [12], [15] qu'on peut définir de la maniére suivante [18], [21]:

Définition 4.2 *Un système* $(A, 1, \sim, \nabla, \wedge, \vee)$ *formé par: un ensemble* A*; un élément* $1 \in A$*; deux opérations monaires* $\sim, \nabla$ *et deux opérations binaires* $\wedge, \vee$ *définies sur* A*, sera dit une algèbre de Łukasiewicz (trivalente) si les axiomes suivants sont vérifiés:*

A1) $x \wedge (x \vee y) = x$

A2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

A3) $\sim\sim x = x$

A4) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

A5) $\sim x \vee \nabla x = 1$

A6) $x \wedge \sim x = \sim x \wedge \nabla x$

A7) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$

Pour abréger nous dirons aussi que A *est une algèbre de Łukasiewicz.*

Pour comparer cette définition avec celle de Gr. Moisil on doit poser $\sim x = Nx; \nabla x = \mu x = Mx$.
Cette notion joue dans l'etude du calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz un rôle analogue à celui des algèbres de Boole dans l'etude du calcul propositionnel classique.

Théorème 4.6 *Si dans une algèbre de Łukasiewicz nous posons* $x \to y = \nabla \sim x \vee y$ *alors le système* $(A, 1, \sim, \to, \wedge, \vee)$ *est une algèbre de Nelson semi-simple, et en outre:* $\nabla x = \sim x \to 0$.

Réciproquement:

Théorème 4.7 *Si* $(A, 1, \sim, \to, \wedge, \vee)$ *est une algèbre de Nelson semi-simple et si nous posons* $\nabla x = \sim x \to 0$*, alors le système* $(A, 1, \sim, \nabla, \wedge, \vee)$ *est une algèbre de Łukasiewicz et en outre* $x \to y = \nabla \sim x \vee y$*.*

Ces deux théorèmes montrent que nous pouvons identifier les algèbres de Nelson semi-simples avec les algèbres de Łukasiewicz trivalentes. Ce résultat est à comparer avec le théorème suivant: les algèbres de Heyting semi-simples coïncident les algèbres de Boole [16], page 157.
Le principe de dualité subsiste dans les algèbres de Nelson semi-simples puisque on peut démontrer la formule $x \wedge \rceil x = 0$ [dual de S1), théorème 4.4]. Dans le cas actuel les formules (C1), (T1), (C2), (T3) ne sont pas démontrables, mais nous avons $\lceil x = \lceil\lceil\lceil x$ et $\lceil\lceil x \leq x$.
D'après Gr. Moisil [13], [15] les algèbres de Łukasiewicz sont des algèbres de Heyting. On peut montrer que l'implication intuitioniste $a \Rightarrow b$ est donnée par la formule:

$$a \Rightarrow b = (a \to b) \wedge (\nabla a \to \nabla b) = \sim \nabla a \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b) \vee b.$$

Donc $\rceil x = \sim \lceil\sim x = \sim \nabla x = x \Rightarrow 0$ est la négation intuitioniste de x, ce qui explique le changement de notations que nous avons adopté d'après une suggestion de Gr. Moisil.

Dans l'algèbre $\mathbf{T}$, l'implication contraposable $\succ\!\!\!\rightarrow$ est donnée par la table ci-jointe.

$\succ\!\!\!\rightarrow$	0	a	1
0	1	1	1
a	a	1	1
1	0	a	1

Elle coïncide donc (en posant $a = \frac{1}{2}$) avec l'implication que Łukasiewicz a utilisée pour définir son calcul propositionnel trivalent.
Les formules:

$$x \vee y = (x \succ\!\!\!\rightarrow y) \succ\!\!\!\rightarrow y$$

$$x \wedge y = \sim (\sim x \vee \sim y)$$

$$x \rightarrow y = x \succ\!\!\!\rightarrow (x \succ\!\!\!\rightarrow y)$$

$$1 = x \succ\!\!\!\rightarrow x$$

valables dans toute algèbre de Nelson semi-simple montrent que les opératins $\rightarrow, \vee, \wedge$ et la constante 1 peuvent s'exprimer au moyen des opérations $\succ\!\!\!\rightarrow$ et $\sim$, sui sont les connectifs que J. Łukasiewicz [8], [9] a utilisé pour décrire son calcul propositionnel trivalente.

5 Les algèbres libres

Nous nous proposons maintenant d'indiquer la répercussion des résultats précédents sur le calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz.
La notion d'algèbre de Nelson (Łukasiewicz) libre se définit à la maniére habituelle. Etant donné que les algèbres de Nelson et de Łukasiewicz peuvent êtrê définies au moyen d'egalités, on en déduit, par un théorème de G. Birkhoff [2], l'existence et l'unicité, à moins d'un isomorphisme, des algèbres de cette nature avec un nombre donné $c > 0$ de générateurs libres.

Le calcul propositionnel constructif avec négation forte a été défini de la maniére suivante: *L'alphabet* de ce calcul est constitué par: 1º) un ensemble G, non vide, de *variables propositionnelles* $G = \{g_i\}_{i \in I}$; 2º) Les connectifs: $\sim, \lceil, \rightarrow, \wedge, \vee$; 3º) Les *symboles auxiliares* $(,)$. L'ensemble $\mathcal{L}$ des *formules* (bien formées) se définit à la maniére habituelle. Nous poserons pour abréger $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$.
Une formule est un *axiome* si elle a une des formes sivantes (où x, y, z sont des formules).

A1) $(x \rightarrow (y \rightarrow x))$

A2) $((x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)))$

A3) $((x \wedge y) \rightarrow x)$

A4) $((x \wedge y) \rightarrow y)$

A5) $((z \rightarrow x) \rightarrow ((z \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow (x \wedge y))))$

A6) $(x \rightarrow (x \vee y))$

A7) $(y \rightarrow (x \vee y))$

A8) $((x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow ((x \vee y) \rightarrow z)))$

A9) $((x \rightarrow \lceil y) \rightarrow (y \rightarrow \lceil x))$

A10) $(\lceil x \rightarrow (x \rightarrow y))$

A11) $(\sim x \rightarrow (x \rightarrow y))$

A12) $(\sim (x \rightarrow y) \leftrightarrow (x \wedge \sim y))$

A13) $(\sim (x \wedge y) \leftrightarrow (\sim x \vee \sim y))$

A14) $(\sim (x \vee y) \leftrightarrow (\sim x \wedge \sim y))$

A15) $(\sim \lceil x \leftrightarrow x)$

A16) $(\sim\sim x \leftrightarrow x)$

Une partie D de $\mathcal{L}$ ser dite un système déductif si: D1) D contient tous les axiomes; D2) D vérifie le *modus ponens* c'est-á-dire: si $x, x \rightarrow y \in D$ alors $y \in D$. L'ensemble $\mathcal{T}$ des théses de $\mathcal{L}$ est, par définition, l'intersection de tous les systèmes déductifs.
Etant donné un système déductif D posons, avec Helena Rasiowa, $a \equiv b \pmod D$ si $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) \wedge (\sim a \rightarrow \sim b) \wedge (\sim b \rightarrow \sim a) \in D$.
D'après cet auteur la relation binaire $\equiv$ ainsi définie sur $\mathcal{L}$ est une relation de congruence compatible avec les opérations $\sim, \lceil, \wedge, \vee, \rightarrow$ définies sur $\mathcal{L}$.
Soit $|a|_D$ la classe d'equivalence (module D) qui contient l'élément $a \in \mathcal{L}$ et $\mathcal{L}/D$ l'ensemble des classes d'equivalence. En définissant les opérations $\sim, \lceil, \wedge, \vee, \rightarrow$ sur $\mathcal{L}/D$ de la façon naturelle, nous obtenons une algèbre de Nelson qu'on appelle l'algèbre *quotient* de $\mathcal{L}$ par D. La transformation $h(l) = |l|_D$ est un homomorphisme de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}/D$. Si $d \in D$ alors $|d|_D = 1$ est le dernier élément de $\mathcal{L}/D$. Le noyau de l'homomorphisme h, c'est-á-dire l'ensemble $h^{-1}(1)$ coincide avec D.
Si $D = \mathcal{T}$ alors l'algèbre quotient $\mathcal{L}/\mathcal{T} = L$, qu'on nomme l'*algèbre de Lindebaum* de $\mathcal{L}$, est une algèbre de Nelson (H. Rasiowa [24], [25]) et l'on peut montrer plus précicément que les $|g_i|_D$ sont des générateurs libres de L.
Nous voyons ainsi que la syntaxe du calcul propositionnel constructif avec négation forte permet de décrire l'algèbre de Nelson ayant autant de générateurs libres qu'il y a de variables propositionelles.
Remarquons que les axiomes schémes A1)-A10) avec la régle de *Modus Ponens* caractérisent le calcul propositionnel intuitionniste, donc le calcul propositionnel constructif

avec négation forte peut être considéré comme l'extension du calcul propositionnel intuitionniste qu'on obtient en ajoutant un noveau connectif (à son alphabet) et les axiomes schémes A11)-A16), tout en conservant comme seule régle celle de *Modus Ponens*.
D'aprés un résultat de H. Vorobiev [29], [30] cette extension est *conservative*, c'est-á-dire les formules de $\mathcal{T}$ dans lesquelles ne figure le connectif $\sim$ coincident avec les thèses du calcul propositionnel intuitionniste. Cependant cette extension n'est pas simple (single-valued) *au sens de* Smetanic [27] car, d'après H. Vorobiev [29], les formules de la forme:

$$\text{(S)} \quad (((x \to y) \wedge (y \to x)) \to ((\sim x \to \sim y) \wedge (\sim y \to \sim x)))$$

ne sont pas des théses de $\mathcal{L}$.
Remarquons maintenant que si l'on ajoute aux axiomes schéma A1)-A10) du calcul propositionnel intuitionniste l'axiome schéma

$$\text{A0)} \ (\lceil x \vee x)$$

tout en conservant comme seule régle celle de Modus Ponens, nous obtenons le calcul propositionnel classique; donc d'après les théorèmes 4.4 et 4.7 nous pouvons affirmer que:

Théorème 5.1 *Si l'on ajoute aux axiomes schéma A1)-A16) du calcul propositionnel constructif avec négation forte l'axiome schéma A0) et si $\mathcal{T}'$ est l'ensemble des théses du calcul ainsi obtenu alors l'algèbre quotient $L' = \mathcal{L}/\mathcal{T}'$ est l'algèbre de Nelson semi-simple ayant autant de générateurs libres qu'il y a de variables propositionnelles.*

En tenant compte du théorème 4.5 on voit de suite que $\mathbf{T}$ est une matrice caractéristique pour le calcul propositionnel indiqué dans la théorème 5.1, d'où l'on déduit que:

Corollaire 5.1 *Les axiomes schéma A0)-A16) avec la régle de Modus Ponens caractérisent le calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz.*

L'algèbre de Łukasiewicz avec un générateur libre a été determinée par Gr. Moisil [12]. Nous ne savons pas si le résultat suivant est connu ou non.

Théorème 5.2 *Le nombre d'éléments de l'algèbre de Łukasiewicz L_n avec n générateurs libres, est donné par la formule:*

$$N(L_n) = 3^{3^n - 2^n} 2^{2^n}$$

Plus précisément L_n est isomorphe au produit cartésien de $3^n - 2^n$ algèbres T et 2^n algèbres B.

6 Relations du calcul propositionnel de Łukasiewicz avec d'autres calculus

Les résultats précédents montrent que le calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz peut être considéré comme une extension du calcul propositionnel classique (formulé au moyen de schémas A0)-A10) et de la régle de Modus Ponens), moyennant l'adjonction du connectif $\sim$ (à son alphabet) et des axiomes shémas A11)-A16).
Cette extension est *conservative*, c'est-á-dire toutes les formules de $\mathcal{T}'$ dans lesquelles ne figure pas le connectif $\sim$ sont des théses du calcul propositionnel classique, mais elle n'est pas *simple au sens de* Smetanic, car les formules de la forme (S) n'appartiennent pas á $\mathcal{T}'$.
Remarquons encore que si l'on définit le radical de L comme l'intersection $Rad(L)$ de tous les systèmes déductifs maximaux de L, alors:

Théorème 6.1 *$L/Rad(L)$ est isomorphe à l'algèbre de Lindenbaum du calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz.*

Il est bien connu que si l'on ajoute l'axiome schéma $x \vee \sim x$ à ceux du calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz, nous obtenons comme extension un calcul propositionnel équivalent au calcul propositionnel classique et il est clair que cette extension n'est pas conservative.
L'important résultat de Gr. Moisil d'après lequel les algèbres de Łukasiewicz sont des algèbres de Heyting lui a permis de montrer [12], [15] que le calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz peut être considéré comme une extension du calcul propositionnel intuitionniste (plus précisément du calcul propositionnel positif au sense de Hilbert-Bernays) moyennant l'adjonction du connectif "$\sim$" á son alphabet, et des axiomes schémas convenables; en outre on doit ajouter à la régle de Modus Ponens pour l'implication intuitinneste la régle:

R2) Si $x \Rightarrow y$ est une thése alors $\sim y \Rightarrow \sim x$ est une thése.

Cette extension n'est pas conservative, mais on peut montrer qu'il s'agit d'une extension conservative du calcul propositionnel trivalent, considérée par A. Heyting, et dont l'étude a été développée par Łukasiewicz [8], [9] , L. Monteiro [20] et d'autres auteurs.
Cette extension n'est pas simple, au sens de Smetanic, car, si nous posons $x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$, les formules de la forme:

$$((x \Leftrightarrow y) \Rightarrow (\sim x \Rightarrow \sim y))$$

n'appartiennent pas à $\mathcal{T}'$ (Pour l'étude des extensions simples du calcul propositionnel trivalent de Heyting voir les travaux de Smetanic).
Le calcul propositionnel modal S5, [7] - dont l'alphabet contient les connectifs: $\rightarrow, \vee, \wedge, \lceil, \Delta$

(Nous représentons le symbole de nécessité par Δ), et les symboles auxiliares (,) - peut être caractérisé (K. Gödel [5]) par les axiomes schéma A0)-A10) et

$$\begin{array}{ll} \Delta 1) & (\Delta x \to x) \\ \Delta 2) & (\Delta(x \to y) \to (\Delta x \to \Delta y)) \\ \Delta 3) & (\lceil \Delta x \to \Delta \lceil \Delta x) \end{array}$$

en ajoutant à la régle du Modus Ponens la

Régle R2) Si x est une thése alors Δx est une thése.

Si dans le calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz nous posons:

$$\Delta x = \sim \nabla \sim x = \sim \lceil x,$$

alors les axiomes A0)-A10) $\Delta 1) - \Delta 3)$ et les régles R1) et R2) sont valables, et cela montre que ce calcul est une extension de S5.
Cette extension n'est pas conservative, car les formules de la forme:

$$(\Delta(g_i \vee g_j) \to (\Delta g_i \vee \Delta g_j))$$

appartiennent á $\mathcal{T}'$ et ne sont pas des théses de S5; et, en outre, elle n'est pas une extension simple.
L'implication stricte doit être définie dans le calcul de Łukasiewicz par la formule:

$$x \twoheadrightarrow y = \Delta(x \to y) = \Delta(\nabla \sim x \vee y) = \nabla \sim x \vee \Delta y$$

En résumé: le calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz peut être considéré comme une extension des calculs propositionnels classique, trivalent de Heyting et modal S5, tout en étant un cas particulier du calcul propositionnel constructif avec négation forte.

Dans un autre travail nous montrerons que le calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz peut être aussi obtenu dans le calcul fonctionnel monadique classique [6], ce qui montre son intêret, même dans le cadre de la logique classique.

References

[1] Bialynicki-Birula A. and Rasiowa H., *On constructive falsity in the contructive logic with strong negation.* Colloquium Mathematicum, 6 (1958), 287-310.

[2] Birkhoff G., *Lattice Theory.* Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. 25, 3$^{\text{rd}}$ ed., Providence (1967).

[3] Brignole D., *Equational characterization of Nelson Algebras.* A paraître.

[4] Brignole D. et Monteiro A., *Caractérisation des algèbres de Nelson par de égalités.* A paraître.

[5] Gödel K., *Zum intuitionischen Aussgenkalkul.* Ergebnisse eines mathem. Kolloguimus 4 (1933), 40.

[6] Halmos P., *Algebraic logic I. (Monadic Boolean algebras.)*, Compositio Mathematica, 12 (1954-56), 217-249.

[7] Lewis C. I. and Langford C. H., *Symbolic Logic.* New York, (Century Co.), 1932.

[8] Łukasiewicz J., *O logike trojwartosciowej.* Ruch Filozoficzny 5 (1920), 170.

[9] Łukasiewicz J., *Elementy logiki matematyczej.* Warzawa, 1929.

[10] Markov A. A., *A contructive Logic.* Matematiceskih Nauk (N.S.), 5 (1950), 187-188.

[11] Moisil Gr. C., *Recherches sur les logiques non-chrysippiennes.* Annales Sc. de l'Université de Jassy, 26 (1940), 431- 466.

[12] Moisil Gr. C., *Notes sur les logiques non-chrysippiennes.* Annales Sc. de l'Université de Jassy, 27 (1941), 86-98.

[13] Moisil Gr. C., *Logique Modale.* Disquisitiones Mathematicae et Physicae, Buc. 2 (1942), 3 -98.

[14] Moisil Gr. C., *Sur les idéaux des algèbres de Łukasiewicz trivalentes.* Analele Universitatii C. I. Parhon, Serie Acta Logica, 3 (1960), 83-95.

[15] Moisil Gr. C., *Les logiques non-chrysippiennes et leurs applications.* Acta Philos. Fenn. 16 (1963), 137-152.

[16] Monteiro A. , *L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques.* Colóquio de Villavicencio, 21-25 julio 1954, publié par l'UNESCO, Montevideo (1954), 129-161.

[17] Monteiro A., *Relations between Łukasiewicz three-valued algebras and monadic Boolean algebras.* International Congress for Logic, Methodology and Phylosophy of Science. Program and Abstract. The Hebrew University, Jerusalem, (1964), 16-17.

[18] Monteiro A., *Sur la définition des algèbres de Łukasiewicz trivalentes.* A paraître dans le Bulletin de la Société des Sciences Mathématiques de la Rep. Pop. Roumaine.

[19] Monteiro A., *Construction des algèbres de Nelson finies.* A paraître.

[20] Monteiro L., *Sur les algèbres de Heyting trivalentes.* A paraître.

[21] Monteiro L., *Axiomes indépendants pour les algèbres de Łukasiewicz trivalentes.* A paraître dans le Bulletin de la Société des Sciences Mathématiques de la Rep. Pop. Roumaine.

[22] Monteiro L. et González Coppola L., *Sur une construction des algèbres de Łukasiewicz trivalentes.* A paraître dans Portugaliae Mathematica.

[23] Nelson D., *Constructible falsity.*, Journal of Symbolic Logic 14 (1949), 16-26.

[24] Rasiowa H., *Algebraic Charakterisierung Intuitionistischen Logik mit starker negation.* Constructivity in Mathematics. Proceedings of the Colloquium hold at Amsterdam, (1957) edited by A. Heyting. Studies in Logic and Fundations of Mathematics. Amsterdam 1959.

[25] Rasiowa H., *N-lattices and constructive logic with strong negation.* Fund. Math. 46 (1958), 61-80.

[26] Sholander M., *Postulates for distributive lattices.* Canadian J. of Math. 3 (1951), 28-30.

[27] Smetanic Y. S., *On statement calculi with an additional operation.* Doklady, Academy of Sciences of the URSS 139 (1961), 309-312.

[28] Stone M. H., *The theory of representation of Boolean algebras.* Trans. A.M.S. 40 (1936), 37-111.

[29] Vorobiev H. H., *A constructive propositional calculus with strong negation.* Doklady Akademii Nauk SSSR. 85 (1952), 465-468.

[30] Vorobiev H. H., *The problem of deducibility in the constructive propositional calculus with strong negation.* Doklady Akademii Nauk SSSR. 85 (1952), 689-692.