Algèbres de Stone libres

Antonio Monteiro et Luiz F. Monteiro

Instituto de Matemática - Universidad Nacional del Sur - 1968 [1]
Bahía Blanca - Argentina

1 Introduction

Soit A un réticulé ayant un premier (0) et un dernier (1) élément. Nous dirons d'après G. Birkhoff [1] que l'élément $x \in A$ a un complément orthogonal s'il existe un élément $\sim x \in A$ tel que:

1) $x \wedge \sim x = 0$,

2) Si $y \in A$ est tel que $x \wedge y = 0$, alors $y \leq \sim x$.

On voit de suite que l'élément $\sim x$ est univoquement derterminé dans le cas où il existe.

Définition 1.1 *Un réticulé distributif A ayant un premier* (0) *et un dernier* (1) *élément sera dit orthocomplementé si chaque élément de A a un orthocomplément.*

Lemme 1.1 *Dans un tel réticulé sont valables les règles de calcul suivantes:*

R1) $\sim 0 = 1$

R2) $\sim 1 = 0$

R3) $x = x \wedge \sim\sim x$

R4) Si $x \leq y$ *alors* $\sim y \leq \sim x$

R5) $\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$

R6) $\sim x \vee \sim y \leq \sim (x \wedge y)$

R7) $\sim\sim\sim x = \sim x$

R8) $\sim\sim (x \wedge y) = \sim\sim x \wedge \sim\sim y$

[1] *Les résultats du §7 ont été exposés dans la "Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina," 1968,* [11]

R9) $\sim\sim(x \vee y) = \sim\sim(\sim\sim x \vee \sim\sim y)$

R10) $\sim(x \vee \sim x) = 0$

R11) $x \wedge \sim x = 0$.

Remarquons que la loi distributive intervient seulment dans les démonstrations de R5) et R10). Daprès P. Ribenboim [14], les égalités R3), R5), R8) et R11) sont caractéristiques pour l'opération $\sim$ qu'on suppose définie sur un réticulé distributif ayant un premier et dernier éléments. D'autres propriétés caractéristiques on été indiquées par K. Matsumoto [4]. Nous nous proposons d'étudier dans cette note le cas particulier indiqué dans la définition suivante:

Définition 1.2 *Un réticulé orthocomplementé A sera dit une* algèbre de Stone *si:* $\sim x \vee \sim\sim x = 1$, *quelque soit* $x \in A$.

Lemme 1.2 *Dans une algèbre de Stone on a:*

$$\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y, \quad \text{quelques soient } x, y \in A.$$

K. Matsumoto [4]

Dém. Indiquons une démonstration distincte de celle de Matsumoto. Comme:

$$\sim(x \wedge y) \wedge \sim\sim(x \wedge y) = 0,$$

nous avons d'après R8):

$$\sim(x \wedge y) \wedge \sim\sim x \wedge \sim\sim y = 0,$$

donc

$$(\sim(x \wedge y) \wedge \sim\sim x \wedge \sim\sim y) \vee \sim y = \sim y,$$

$$((\sim(x \wedge y) \wedge \sim\sim x) \vee \sim y) \wedge (\sim\sim y \vee \sim y) = \sim y,$$

$$(\sim(x \wedge y) \wedge \sim\sim x)) \vee \sim y = \sim y,$$

c'est-à-dire

$$\sim(x \wedge y) \wedge \sim\sim x \leq \sim y,$$

donc

$$\sim x \vee (\sim(x \wedge y) \wedge \sim\sim x) \leq \sim x \vee \sim y.$$

Mais $\sim x \vee \sim y \geq \sim x \vee (\sim(x \wedge y) \wedge \sim\sim x) = (\sim x \vee \sim(x \wedge y)) \wedge (\sim x \vee \sim\sim x) = (\sim x \vee \sim(x \wedge y)) \wedge 1 = \sim x \vee \sim(x \wedge y) \geq \sim(x \wedge y)$, et alors en tenant compte de R6), le lemme est démontré.
Indiquons an outre démonstration, plus simples et plus élégante, en utilisant la thèorie des filtres. D'après R6) on a : $\sim x \vee \sim y \leq \sim(x \wedge y)$, pour tout $x, y \in A$. Supposons qu'il existent $x, y \in A$ tels que $\sim x \vee \sim y < \sim(x \wedge y)$, Alors il existe un filtre premier P tel que:

$$\text{(a)} \quad \sim(x \wedge y) \in P \ \text{ et } \ \text{(b)} \quad \sim x \vee \sim y \notin P.$$

En particulier

$$(\mathrm{c}) \quad \sim x \notin P \ \text{ et } \ (\mathrm{d}) \quad \sim y \notin P.$$

De $\sim x \vee \sim\sim x = 1 \in P$ et (c) on déduit $\sim\sim x \in P$. D'une façon analogue on démontre que $\sim\sim y \in P$. Nous pouvons donc affirmer en tenant compte de R6) et que P est un filtre, que:

$$\sim\sim (x \wedge y) = \sim\sim x \wedge \sim\sim y \in P$$

et alors, en utilisant (a) nous aurons:

$$0 = \sim (x \wedge y) \wedge \sim\sim (x \wedge y) \in P.$$

Cette contradiction termine la démonstration. □

Dans l'étude des algèbres de Stone on peut, eventuallement, se proposer de suprimer les hypothèses inutiles a la validité des raisonements.

Nous allons donc indiquer un ensemble d'axiomes indépendants pour les algèbres de Stone; et si l'on peut considérer, avec raison, que ce n'est pass necessaire on peut auusi dire que ce n'est pas nuisible.

Soit $(A, 0, 1, \sim, \wedge, \vee)$ un système formé par deux éléments $0, 1 \in A$, une opération unaire $\sim$ et deux opèrations $\wedge$ et $\vee$ définies sur A. Nous dirons que ce système est une algèbre de Stone si les axiomes suivants sont vérifiés:

S1) $x \wedge (x \vee y) = x$

S2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

S3) $1 \vee x = 1$

S4) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

S5) $x \wedge \ \sim x = 0$

S6) $\sim 0 = 1.$

D'après M. Sholander [15] les axiomes S1) et S2) montrent que le système $(A, \wedge, \vee)$ est un réticulé distributif. D'après S3), 1 est le dernier élément du réticulé A. Montrons maintenant que:

S7) $0 \vee x = x.$
En effet comme A est un réticulé nous aurons $x \vee (x \wedge y) = x$. En remplaçant dans la formule antérieure y par $\sim x$, et en tenant compte de S5), nous obtenons S7), donc 0 est le premier élément de A.

S8) *Si* $x \ \wedge y = 0$ *alors* $y \leq \sim x$.
De $x \ \wedge y = 0$, on déduit par S4) et S6) que $\sim x \vee \sim y = 1$, donc $y \wedge (\sim x \vee \sim y) = y \wedge 1 = y$, d'où $y \wedge \sim x = y$, c'est-'a-dire $y \leq \sim x$.

Les conditions S5) et S8 montrent que $\sim x$ est l'orthocomplément de x, donc A est un réticulé distributif orthocomplémenté. Montrons maintenant que:

S9) $\sim x \wedge \sim\sim x = 1$. En effet $1 = \sim 0 = \sim (x \wedge \sim x) = \sim x \;\; \sim\sim x$, et S9) montre que A est une algèbre de Stone.

2 Indépendance des Axiomes S1-S6

- **Indépendance de S1**. Soit A un ensemble avec deux éléments distincts 0 et 1. Définons sur A les opérations $\vee$, $\wedge$ et $\sim$, parmi les tables suivants:

$\vee$	0	1	$\wedge$	0	1	$\sim$
0	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1

  Alors on voit de suite que les axiomes S2)-S6) sont vérifiés, tandis que S1) ne l'est pas car: $1 \wedge (1 \vee 0) = 0 \neq 1$.

- **Indépendance de S2**. Soit A le réticulé dont le diagramme est indiqué sur la figure 1. Posons par définition: $\sim 0 = 1$, $\sim a = b$, $\sim b = a$, $\sim c = d$, $\sim d = c$ et $\sim 1 = 0$. Alors tous les axiomes sont vérifiées a exception de S2) car: $a \wedge (c \vee d) = a \wedge 1 = a$ et $(d \wedge a) \vee (c \wedge a) = 0 \vee 0 = 0$.

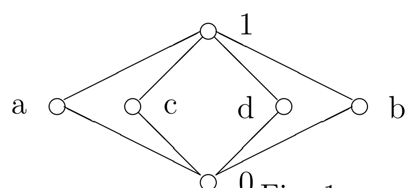

Fig. 1

- **Indépendance de S3**. Soit A le réticulé dont le diagramme est indiqué sur la figure 2. Posons par définition: $\sim 0 = 1$, $\sim 1 = \sim c = 0$. S3) n'est pas vérifiée car: $1 \vee c = c \neq 1$.

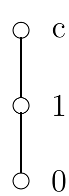

Fig.2

- **Indépendance de S4**. Soit A le réticulé dont le diagramme est indiqué sur la figure 3. Posons : $\sim 0 = 1$, et $\sim x = 0$ si $x \in A - \{0\}$. S4) n'est pas valable car: $\sim (a \wedge b) = \sim 0 = 1$ et $\sim a \vee \sim b = 0 \vee 0 = 0$.

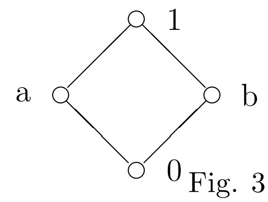

Fig. 3

- **Indépendance de S5**. Considérons encore le réticulé de la figure 3. Alors si l'on pose par définition $\sim 0 = 1 \ \sim a = a \ \sim b = b$ et $\sim 1 = 0$. S5) n'est pas valide car $a \wedge \sim a = a \ \wedge a = a \neq 0$.

- **Indépendance de S6**. Soit A le réticulé indiqué dans la figure 4. Si nous posons $\sim x = 0$ pour tout $x \in A$, S6) n'est pas vérifié car $\sim 0 = 0 \neq 1$.

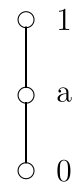

Fig. 4

3 Sous-algèbres

Un sous-ensemble S d'une algèbre de Stone A est une sous-algèbre de A, si S est un $(0,1)$-sous-réticulé A tel que si $s \in S$ alors $\sim s \in S$.
Si X est un sous-ensemble de l'algèbre de Stone A, nous notérons par $ST(X)$ la sous-algèbre de Stone de A engendrée par X. Si S est une sous-algèbre de Stone de A et $\sim a \in A$, nous notérons $ST(S, \sim a)$ au lieu de $ST(S \cup \{\sim a\})$.

Lemme 3.1 $ST(S, \sim a) = \{x \in A : x = (s_1 \vee \sim a) \wedge (s_2 \vee \sim\sim a), s_1, s_2 \in S\}$.

Dém. Soit $Q = \{x \in A : x = (s_1 \vee \sim a) \wedge (s_2 \vee \sim\sim a), s_1, s_2 \in S\}$.
Soit $s \in S$, comme $s = s \vee 0 = s \vee (\sim a \wedge \sim\sim a) = (s \vee \sim a) \wedge (s \vee \sim\sim a)$ alors $S \subseteq Q$. En outre $\sim a = \sim a \wedge 1 = (0 \vee \sim a) \wedge (1 \vee \sim\sim a)$, alors $\{\sim a\} \subseteq Q$, donc (1) $S \cup \{\sim a\} \subseteq Q$. Montrons que (2) Q est une sous-algèbre de A. Comme $0, 1 \in S$ et $S \subseteq Q$ alors $0, 1 \in Q$. Si $x = (s_1 \vee \sim a) \wedge (s_2 \vee \sim\sim a)$ où $s_1, s_2 \in S\}$, alors:

$$\sim x = (\sim s_1 \wedge \sim\sim a) \vee (\sim s_2 \vee \sim a) =$$

$$(\sim s_1 \vee \sim s_2) \wedge (\sim s_1 \vee \sim a) \wedge (\sim s_2 \vee \sim\sim a) \vee (\sim\sim a \vee \sim a) =$$

$$((\sim s_1 \vee \sim s_2)) \vee (\sim a \wedge \sim\sim a)) \wedge (\sim s_1 \vee \sim a) \wedge (\sim s_2 \vee \sim\sim a) =$$

$$[((\sim s_1 \vee \sim s_2) \wedge \sim s_1) \vee \sim a] \wedge [((\sim s_1 \vee \sim s_2) \wedge \sim s_2) \vee \sim\sim a] =$$

$$(\sim s_1 \vee \sim a) \wedge (\sim s_2 \vee \sim\sim a).$$

Si $x, y \in Q$, c'est-'a-dire $x = (s_1 \vee \sim a) \wedge (s_2 \vee \sim\sim a)$, $y = (t_1 \vee \sim a) \wedge (t_2 \vee \sim\sim a)$ où $s_1, s_2, t_1, t_2 \in S$, alors on montre que :

$$x \wedge y = ((s_1 \wedge t_1) \vee \sim a) \wedge ((s_2 \wedge t_2) \vee \sim\sim a)$$

et

$$x \vee y = ((s_1 \vee t_1) \vee \sim a) \wedge ((s_2 \vee t_2) \vee \sim\sim a)$$

Nous vénons ainsi de montrer que (2) Q est une sous-algèbre de A. De (1) et (2) on a: $ST(S, \sim a) \subseteq Q$.

Montrons que $Q \subseteq ST(S, \sim a)$. En effet, si $x \in Q$ alors $x = (s_1 \vee \sim a) \wedge (s_2 \vee \sim\sim a)$ où $s_1, s_2 \in S$, donc $s_1, s_2 \in S \subseteq S \cup \{\sim a\} \subseteq ST(S, \sim a)$. Comme $\sim a \in S \cup \{\sim a\} \subseteq ST(S, \sim a)$, on a aussi que $\sim\sim a \in ST(S, \sim a)$. Alors $x = (s_1 \vee \sim a) \wedge (s_2 \vee \sim\sim a) \in ST(S, \sim a)$. $\square$

4 Images homomorphes d'un réticulé distributif

Soient A et A' des réticulés distributifs et h un homomorphisme de A sur A', c'est-à-dire une fonction de A sur A' qui vérifie:

$$\text{H1)}\ \ h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y), \quad \text{H2)}\ \ h(x \vee y) = h(x) \vee h(y).$$

Nous dirons alors que A' est une image homomorphe de A.

Il est important de savoir déterminer toutes les images homomophes d'un réticulé distributif. A. Monteiro a indiqué une construction qui permettre déterminer toutes les images homomorphes d'un réticulé distributif. Ces démonstrations n'on pas été publiés mais elles on été exposées dans deux cours realizés a l'Universidad Nacional del Sur [7], [8] et dans le "Simposio Panamericano de Matemática Aplicada" [9]. Nous indiquons ici ces résultats.

Soit $\mathbf{P}'$ la famille de tous les filtres premiers de A'. Si $P' \in \mathbf{P}'$ on voit de suite que $P = h^{-1}(P')$ est un filtre premier de A, donc $\mathbf{Q} = h^{-1}(\mathbf{P}')$ est une famille de filtres premiers de A (*qui peut d'ailleurs être vide, si* $\mathbf{P}'$ *est vide, c'est-à-dire si* A' *a un seul élément).* On voit de suite que:

Lemme 4.1 *$h(a) = h(b)$ si et seulement si:* $\{Q \in \mathbf{Q} : a \in Q\} = \{P \in \mathbf{Q} : b \in P\}$

Cette observation conduit à la construction suivante. Soit $\mathbf{Q}$ une famille de filtres premiers de A. Nous écrirons $a \equiv b$, (mod. $\mathbf{Q}$) ou plus simplesment (si $\mathbf{Q}$ est fixée) $a \equiv b$, pour indiquer que la condition du lemme 4.1 est vérifiée, alors on montre de suite que "$\equiv$" est une relation d'équivalence compatible avec les opérations $\wedge$ et $\vee$, c'est-'a-dire "$\equiv$" est une congruence définie sur A. Soit $|a|$ la classe d'équivalence qui contiente l'élément $a \in A$, c'est-à-dire $|a| = \{x \in A : x \equiv a\}$, et soit $A' = A/\equiv$ l'ensemble quotient de A par la relation "$\equiv$". Algèbrisons A' en définisant les opérations $\wedge$ et $\vee$ sur A' par les formules:

$$|a| \wedge |b| = |a \wedge b| \quad \text{et} \quad |a| \vee |b| = |a \vee b|.$$

Dans ces conditions la transformation $h(a) = |a|$ vérifie les conditions H1 et H2 d'où l'on déduit de suite que $(A', \wedge, \vee)$ est un réticulé distributif, et que A' est une image homomorphe de A. Nous écrirons $A/\mathbf{Q}$ pour représenter le réticulé distributif obtenu de cette manière. On vérifie facilement, en utilisant le lemme 4.1, que toutes les images

homomorphes A' d'un réticulé distributif A peuvent être obtenues de la manière que nous venons d'indiquer. Pour cela soit $\mathbf{P}'$ la famille des filtres premiers de A' et $\mathbf{Q} = h^{-1}(\mathbf{P}')$, alors on peut montrer de suite que le réticulé quotient $A/\mathbf{Q}$ est isomorphe à A'.
Il peut naturellement arriver qu'il existent deux familles $\mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{Q}_2$ de filtres premiers de A telles que $\mathbf{Q}_1 \neq \mathbf{Q}_2$, mais que $A/\mathbf{Q}_1$ soit isomorphe à $A/\mathbf{Q}_2$. Il suffit de remarquer que si $\mathbf{Q}_1 = \{P_1\}$ et $\mathbf{Q}_2 = \{P2\}$, où P_1 et P_2 sont deux filtres premiers A telles $P_1 \neq P_2$, alors les réticulés $A/\mathbf{Q}_1$, et $A/\mathbf{Q}_2$ sont isomorphes au réticulé $\{0, 1\}$ où $0 < 1$.

Remarquons que dans l'étude des réticulés distributifs ayant un premier et un dernier élément, pour définir un homomorphism h on doit supposer H1, H2 , H3) $h(0) = 0$, et H4) $h(1) = 1$. Dans le cas actuel on peut affirmer que étant donnée une famille $\mathbf{Q}$ de filtres premiers de A, alors:

$$F = \bigcap_{P \in \mathbf{Q}} P \neq \emptyset,$$

el il est clair que F est la classe d'équivalence $|1|$, mod. $\mathbf{Q}$ et $1^{'} = |1|$ sera le dernier élément de $A/\mathbf{Q}$. De même nous aurons:

$$|0| = \mathcal{C}(\bigcup_{P \in \mathbf{Q}} P) \neq \emptyset.$$

Les résultats precédents s'appliquent naturellement aux algèbres de Boole, car dans ce cas les homomorphismes peuvent être définies para les conditions H1, H2, H3 et H4. Remarquons que dans les algèbres de Boole il suffit connaître le filtre F, pour detérminer le quotient $A/\mathbf{Q}$, mais cette affirmation n'est pas exacte dans les cas précédents. Nous voyons ainsi que la détermination des images homomorphes d'un réticulé distributif n'est pas aussi simples que dans le cas des algèbres de Boole.
On peut encore démontrer le résultat suivant:

Lemme 4.2 *Si A est un réticulé distributif fini, $\mathbf{Q}$ une famille de filtres premiers de A, et $\mathbf{Q}^{'}$ la famille de filtres premiers du quotient $A/\mathbf{Q}$, alors les ensembles ordonés $(\mathbf{Q}, \subseteq)$ et $(\mathbf{Q}^{'}, \subseteq)$ sont isomorphes.*

Ces resultats on été généralissés par A. Monteiro [7], [8] pour le cas des algèbres de De Morgan, et étendues par M. Tourasse Teixeira [16] au cas des M-algèbres.

5 Les filtres premiers d'une algèbre de Stone

Si R est un réticulé distributif, nous répresenterons par $\mathbf{F}(R)$ l'ensemble de tous les filtres de R. Il est bien connue que $(\mathbf{F}(R), \subseteq)$ est un ensemble ordonée. Soit $\mathbf{U}(R)$ l'ensemble de tous les éléments maximales de l'ensemble ordonné $\mathbf{F}(R)$, nous appelerons *ultrafiltres* de R, ces éléments. Nous répresenterons par $\mathbf{P}(R)$ l'ensemble de tous les filtres premiers de R.
La relation la plus simple que puisse existir entre les filtres premiers et les ultrafiltres de R est indiquée dans la définition suivante:

Définition 5.1 *Nous dirons que R a une arithmétique normal si chaque filtre premier P est contenu dans un seul ultrafiltre.* A. Monteiro [5], [6], [10].

Théorème 5.1 *Pour que A ait une arithmétique normal il faut et il suffit qu'étant donnés deux éléments $a, b \in A$ tels que $a \wedge b = 0$ il existent des éléments $a', b' \in R$ tels que $a \wedge b' = a' \wedge b = 0$ et $a' \vee b' = 1$.* [5], [6], [10].

Corollaire 5.1 *Pour qu'un réticulé distributif R orthocomplenté soit une algèbre de Stone il faut et il suffit que R ait une arithmétique normal.*

Dém. Soit R une algèbre de Stone et soient $a, b \in R$ tels que (1) $a \wedge b = 0$. Posons $a' = \sim\sim a$, $b' = \sim a$, alors nous avons $a \wedge b' = a \wedge \sim a = 0$, et comme, par (1) $b \leq \sim a = b'$ alors $a' \wedge b \leq a' \wedge b' = \sim\sim a \wedge \sim a = 0$, donc $a' \wedge b = 0$. En outre $a' \vee b' = \sim a \vee \sim\sim a = 1$, et alors d'après le théorème 5.1, R a une arithmétique normal. Supposons maintenant que le réticulé orthocomplementé R ait une arithmétique normal. Si $b = \sim a$ alors $a \wedge b = 0$ et il existent d'après le théorème 5.1 des éléments $a', b' \in R$ tels que $a \wedge b' = a' \wedge b = 0$ et $a' \vee b' = 1$. De $a \wedge b' = 0$ on déduit (1) $b' \leq \sim a$. De $0 = a' \wedge b = a' \wedge \sim a$ on déduit (2) $a' \leq \sim\sim a$ et alors de (1) et (2) il résulte $1 = a' \vee b' \leq \sim a \vee \sim\sim a$. Donc $\sim a \vee \sim\sim a = 1$. $\square$

On peut aussi démontrer directement le résultat précedent. Dans [5], pag. 87 est indiqué une démonstration direct du résultat dual du corollaire 5.1.

Si A est une algèbre de Stone, et $X \subseteq M$, soit $N^{-1}(X) = \{x \in A : \sim x \in X\}$. Si $P \in \mathbf{P}(A)$ alors en utilisant les propriétés S1,S2,S5,S6, S7 et S8 on demontre facilement que $I = N^{-1}(P)$ est un idéal premier, donc $\varphi(P) = \mathcal{C}N^{-1}(P)$ est un filtre premier de A, où $\mathcal{C}Y$ répresente le complément de l'ensemble $Y \subseteq A$ para rapport à l'ensemble A. [16]. La transformation φ, s'appelle transformation de Birula-Rasiowa, [3], [8], [16].

Observation 5.1 *$x \notin \varphi(P)$ si et seulement si $\sim x \in P$.*

Lemme 5.1 *Si $P \in \mathbf{P}(A)$ alors $P \subseteq \varphi(P)$.*

Dém. Supposons que $P \nsubseteq \varphi(P)$, alors il existe un élément (1) $a \in P$ tel que $a \notin \varphi(P)$, c'est-à-dire (2) $\sim a \in P$. De (1) et (2) nous avons $0 = a \wedge \sim a \in P$, cet qui est impossible parceque P est un filtre propre. $\square$

Lemme 5.2 *Si $P, Q \in \mathbf{P}(A)$ alors:*

1) Si $P \subseteq Q$ alors $\varphi(Q) \subseteq \varphi(P)$.

2) $\varphi^2(P) = \varphi(P)$.

Dém.

1) De $P \subseteq Q$ on a $N^{-1}(P) \subseteq N^{-1}(Q)$ et alors $\varphi(Q) \subseteq \varphi(P)$.

2) Comme P est un filtre premier alors $P \subseteq \varphi(P)$, et par conséquent $\varphi^2(P) \subseteq \varphi(P)$. D'un autre côté comme $\varphi(P)$ est un filtre premier nous avons par le lemme 5.1: $\varphi(P) \subseteq \varphi(\varphi(P)) = \varphi^2(P)$.

$\square$

Lemme 5.3 *Tout filtre premier d'une algèbre de Stone A est contenu dans un seul ultrafiltre.*

Dém. Soit P un filtre premier et supposons que $U, M \in \mathbf{U}(A)$ sont tels que (1) $U \neq M$, (2) $P \subset U$ et (3) $P \subset M$. D'après (1) il existe (4) $u \in U - M$ ou il existe (5) $v \in M - U$. Supposons que (4) est verifiée. Comme $u \notin M$, il existe $m \in M$ tel que (6) $u \wedge m = 0$, et alors (7) $\sim u \vee \sim m = 1 \in P$. Comme P est un filtre premier alors $\sim u \in P$ où $\sim m \in P$. Si $\sim u \in P$, on a aussi $\sim u \in U$ et alors $0 = u \wedge \sim u \in U$, cet qui est impossible. Analoguement si $\sim m \in P$ on arrive a une contradiction. Si (5) est verifiée on arrive aussi a une contradiction. $\square$

Lemme 5.4 *Si A est une algèbre de Stone, $\varphi(P)$ est un ultrafiltre quelque soit $P \in \mathbf{P}(A)$.*

Dém. Supposons qu'il existe $P \in \mathbf{P}(A)$, tel que $\varphi(P)$ n'est pas un ultrafiltre, alors il existe un ultrafiltre U de A, tel que: (1) $\varphi(P) \subset U$.
Soit $x \in A$, tel que (2) $x \in U$ et $x \notin \varphi(P)$, alors (3)$\sim x \in P$. Comme (4) $P \subseteq \varphi(P)$, de (3), (4) et (1) on déduit (5) $\sim x \in U$, d'où par (2) nous avons $0 = x \wedge \sim x \in U$, c'est qui est impossible. $\square$

Nous venons ainsi de montrer que:
Si P est un filtre premier d'une algèbre de Stone A, alors $\varphi(P)$ est l'unique ultrafiltre de A qui contient P.

J. Varlet [17] a montré que: *Un réticulé distributif orthocomplenté est une algèbre de Stone si et seulement si chaque filtre premier est contenu dans un seul ultrafiltre.*

6 Images homomorphes d'une algèbre de Stone

Soit A une algèbre de Stone et P un filtre premier de A, nous savons que $\varphi(P)$ est un filtre premier de A.
Soit $\mathbf{Q}$ une famille non vide de filtres premiers de A tels que $\varphi(\mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{Q}$, c'est-à-dire:

$$(*) \text{ si } P \in \mathbf{Q} \text{ alors } \varphi(P) \in \mathbf{Q}.$$

Dans ces conditions la relation "$\equiv$" définie au §4 est compatible avec l'opération $\sim$. Nous pouvons donc definir sur $A/\equiv$ une structure d'algèbre de Stone en posant $\sim |x| = |\sim x|$. Si nous représentons par $A' = A/\mathbf{Q}$ l'algèbre de Stone ainsi obtenue, on peut affimer que $h(a) = |a|$ est un homomorphisme, *l'homomorphisme naturel*, de A sur A'. Alors toutes les images homomorphes A peuvent être obtenues de la manière indiquée précedament.

Si $h : A \to A'$ est un homomorphisme de l'algèbre de Stone A dans l'algèbre de Stone A', *le noyeau* de h, est l'ensemble $N(h) = \{x \in A : h(x) = 1\}$.

Dans l'étude des algèbres qui peuvent être definies par des égalités il est très important de savoir determiner les algèbres sous-directement irréductibles.

Il est évident que toute algèbre de Boole est une algèbre de Stone. L'exemple le plus simple d'une algèbre de Stone qui n'est pas une algèbre de Boole, est le suivant: Soit $\mathbf{T} = \{0, 1/2, 1\}$ une chaîne, où $0 < 1/2 < 1$, et posons par définition: $\sim 0 = 1$, $\sim 1/2 = 0$, et $\sim 1 = 0$. L'ensemble $\mathbf{B} = \{0, 1\}$ de $\mathbf{T}$ est une sous- algèbre de T, qui est aussi une algèbre de Boole.

Lemme 6.1 *Si P est un filtre premier d'une algèbre de Stone A et $\mathbf{Q}(P) = \{P, \varphi(P)\}$ alors l'algèbre quotient $A/\mathbf{Q}(P)$ est isomorphe a B ou T.*

Dém. Comme P un filtre premier de A nous savons que et $\varphi(P)$ est l'unique ultrafiltre qui contient P. Il est évident que $\mathbf{Q}(P) = \{P, \varphi(P)\}$ verifie la condition (*) indiquée précedement.
Si $P = \varphi(P)$, c'est-à-dire si P est un ultrafiltre alors $A/\mathbf{Q}(P)$ a seulement deux éléments $|1| = P > |0| = A - P$ et $\sim |1| = |0|$. Alors $A/\mathbf{Q}(P)$ est isomorphe a $\mathbf{B}$.
Si $P \subset \varphi(P)$, c'est-à-dire si P n'est pas un ultrafiltre alors $A/\mathbf{Q}(P)$ a seulement trois éléments $|1| = P$, $|0| = A - \varphi(P)$ et $|x| = \varphi(P) - P$, où $x \in \varphi(P) - P$. On a $|1| > |x| > |0|$, et $\sim |1| = \sim |x| = |0|$, $\sim |0| = |1|$, donc $A/\mathbf{Q}(P)$ est isomorphe a $\mathbf{T}$.
Alors dans les deux cas nous pouvons affirmer que $A/\mathbf{Q}(P)$ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathbf{T}$. □

Théorème 6.1 *Si A est une algèbre de Stone contenant plus d'un élément alors A est isomorphe à une sous-algèbre d'un produit cartésien d'algèbres* $\mathbf{T}$.

Dém. Pour chaque $P \in \mathbf{P}(A)$ posons $\mathbf{Q}(P) = \{P, \varphi(P)\}$. Nous avons vue que quelque soit $P \in \mathbf{P}(A)$ alors $A/\mathbf{Q}(P)$ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathbf{T}$. Soit

$$A' = \prod_{P \in \mathbf{P}(A)} A/\mathbf{Q}(P),$$

Pour chaque $P \in \mathbf{P}(A)$ soit h_P l'homomorphisme naturel de A sur $A/\mathbf{Q}(P)$. Chaque élément $a' \in A'$ peut être representé par:

$$a' = (a_P)_{P \in \mathbf{P}(A)} \text{ où } a_P \in A/\mathbf{Q}(P).$$

Étant donné $f \in A$ considérons la fonction $F : \mathbf{P}(A) \to \mathbf{T}$ définie par l'égalité:

$$F(P) = h_P(f) \in \mathbf{T}.$$

Il est claire que $F \in A'$. Soit $\mathcal{S}$ la transformation de A dans A' définie par $S(f) = F$. Il est facile a voir que S est un homomorphisme de A dans A'. Montrons que S est un isomorphisme. Supposons que $f, g \in A$ et que $f \neq g$, alors nous aurons soit (i) $f \nleq g$, soit (ii) $g \nleq f$. Supposons, par example que (i) est vérifiée. Alors il existe un filtre $P \in \mathbf{P}(A)$ tel que $f \in P$ et $g \notin P$, alors $F(P) = 1$ et $G(P) \neq 1$, cela montre que $F \neq G$, c'est-a-dire $\mathcal{S}(f) \neq \mathcal{S}(g)$. □

Corollaire 6.1 *Les seuls algèbres de Stone sous-directement irréductibles sont* **B** *et* **T**.

Remarquons que $h(0) = 0,\ h(1/2) = 1,\ h(1) = 1$ est un homomorphisme de **T** sur **B**, donc **T** n'est pas une algèbre simples. En outre **B** est la seule algèbre de Stone simples. Donc les seules algèbres de Stone semi-simples sont les algèbres de Boole. Cela montre que les algèbres de Stone ne sont en général semi-simples.

7 Détermination de l'algèbre de Stone avec un nombre fini n de générateurs libres.

La notion d'algèbre de Stone libre se définit à la manière habituelle, c'est-à-dire:

Définition 7.1 *Si α est un nombre cardinal ($\alpha > 0$) nous dirons que l'algèbre de Stone L est une algèbre avec α générateurs libres, si les conditions suivantes sont vérifiées:*

L1) L contient un ensemble G de puissance α, telle que L soit la sous-algèbre de L engendrée par G, c'est-à-dire $ST(G) = L$.

L2) Si f est une application de G dans une algèbre de Stone A, alors il existe un homomorphisme h_f de L dans A que prolonge f, c'est-à-dire tel que $h_f(g) = f(g)$ pour tout $g \in G$.

Lorsque nous voudrons mettre en èvidence le nombre cardinal α nous ècrirons $L = L(\alpha)$. Si n est un nombre entier ($n > 0$) nous écrirons $L(n)$ pour indiquer l'algèbre de Stone avec n générateurs libres.
Comme les algèbres Stone sont défines par des égalités, l'existence et l'unicité (a moins d'isomorphisme) de l'algèbre de Stone $L(n)$, est conséquence d'un théorème de G. Birkhoff. On a aussi que l'homomorphisme h_f indiquée dans L2) est unique. Nous nous proposons maintenat de déterminer $L(n)$, et pour cela nous allons utiliser une technique que L. Monteiro a introduite dans [12], [13].

Soit $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ l'ensemble des générateurs libres de $L(n)$, et $f : G \to \mathbf{T}$, alors d'après la définition de $L(n)$ il existe un (unique) homomorphisme $h_f : L(n) \to \mathbf{T}$, tel que $h_f(g) = f(g)$ pour tout $g \in G$. Soit P_f le noyau de h_f, c'est-à-dire $P_f = N(h_f)$. On voit de suite que P_f est un filtre premier de $L(n)$.
Si P est un filtre premier de $L(n)$ et $\mathbf{Q} = \{P, \varphi(P)\}$ alors d'après le lemme 6.1 $C = L(n)/\mathbf{Q}$ est isomorphe á **B** ou **T**. Soit $h : L(n) \to C$, l'homorphisme naturel et f la restriction de h a l'ensemble G, alors $f : G \to \mathbf{T}$. Il est clair que le prolongement h_f de f vérifie $h_f = h$ et que $N(h_f) = N(h)$.

Lemme 7.1 *Si $e, f \in \mathbf{T}^G$ sont tels que $N(h_e) = N(h_f)$ alors $e = f$.*

Dém. Comme $P_e = N(h_e)$ et $P_f = N(h_f)$ sont des filtres premiers de $L(n)$ et $P_e = P_f$ alors $L(n)/\{P_e, \varphi(P_e)\} = L(n)/\{P_f, \varphi(P_f)\} = C$ et par le lemme 6.1, C est isomorphe á $\mathbf{B}$ ou $\mathbf{T}$. Alors nous avons deux cas à considerer.

- *Premier cas* $C = \mathbf{B}$, alors si $x \in P_e = P_f$ nous avons $h_e(x) = h_f(x) = 1$ et pour $x \in L(n) - P_e = L(n) - P_f$, $h_e(x) = h_f(x) = 0$, alors $h_e(x) = h_f(x)$ pour tout $x \in L(n)$, en particulier nous avons $h_e(g) = h_f(g)$ pour tout $g \in G$, et comme $h_e(g) = e(g)$ et $h_f(x) = f(g)$ pour tout $g \in G$, nous avons $e(g) = f(g)$ pour tout $g \in G$, c'est-à-dire $e = f$.

- *Second cas* $C = \mathbf{T}$. Soient $U_e = \varphi(P_e)$ et $U_f = \varphi(P_f)$ les ultrafiltres qui contient P_e et P_f respectivement. Alors $U_e = U_f$, parceque si $U_e \neq U_f$, le filtre premier $P_e = P_f$ serait contennu dans deux ultrafiltres distincts, ce qui est impossible. Alors nous avons:

$$h_e(x) = h_f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \in P_e = P_f, \\ 1/2, \text{ si } x \in U_e - P_e = U_f - P_f, \\ 1 \text{ si } x \in L(n) - U_e = L(n) - U_f. \end{cases}$$

  c'est-à-dire $h_e = h_f$, d'où l'on déduit que $e = f$.

$\square$

Nous avons ainsi qu'il existe une correspondance biunivoque de $\mathbf{T}^G$ sur l'ensemble $\mathbf{P}(L(n))$ des filtres premiers de $L(n)$. Comme $\mathbf{T}^G$ a 3^n éléments, l'ensemble $\mathbf{P}(L(n))$ est aussi fini et alors d'après le théorm̀e 6.1 on peut affirmer que l'algèbre $L(n)$ est finie.
Comme $L(n)$ est un réticulé distributif fini, donc tous les filtres F de $L(n)$ sont des filtres principaux, c'est-à-dire pour chaque filtre F de $L(n)$ il existe un élément $f \in L(n)$ tel que $F = \{x \in L(n) : f \leq x\}$. Dans ces conditions nous dirons que f est le générateur du filtre F, ou que F est le filtre engendré par l'élément f et nous écrirons $F = F(f)$.
Pour qu'un filtre P d'un $(0, 1)$-réticulé distributif fini, soit un filtre premier il faut el il suffit que le générateur p de P soit un élément premier, c'est-à-dire que: 1) $p \neq 0$, 2) Si $p = a \vee b$ alors $p = a$ ou $p = b$.
D'après un résultat de G. Birkhoff [2] un $(0, 1)$-réticulé distributif fini est déterminé à moins d'un isomorphisme par l'ensemble ordonné de ses éléments premiers. Dans ces conditions pour déterminer $L(n)$ il nous suffit de connaître l'ensemble ordonné $\mathbf{p}(n)$ des éléments premiers de $L(n)$.
Nous avons vue que toute application $f : G \to \mathbf{T}$ peut être prolongée a un homomorphisme $h_f : L(n) \to \mathbf{T}$. Remarquons que $h_f(L(n)) = S(f(G))$, c'est-à-dire $h_f(L(n))$ est la sous-algèbre de $\mathbf{T}$ engendré par $f(G)$. Nous savons que $\mathbf{B} = \{0, 1\}$ et $\mathbf{T}$ sont les seules sous-algèbres de $\mathbf{T}$. Nous allons indiquer les conditions necessaires et suffisantes pour que $h_f(L(n))$ soit égale à $\mathbf{B}$ ou à $\mathbf{T}$.

Lemme 7.2 *$h_f(L(n)) = \mathbf{B}$ si et seulement si pour tout $g \in G$ on a $f(g) \neq a$.*

Dém.

$\Rightarrow$) Si $h_f(L(n)) = \mathbf{B}$, alors $h_f(x) \in \{0,1\}$ quelque soit $x \in L(n)$, en particulier $f(g) = h_f(g) \neq a$, pour tout $g \in G$.

$\Leftarrow$) Supposons que $f(g) \neq a$, pour tout $g \in G$, alors $a \notin f(G)$ et par conséquence $f(G) \subseteq \mathbf{B}$, d'où l'on déduit que $S(f(G)) = \mathbf{B}$, c'est-à-dire $h_f(L(n)) = \mathbf{B}$.

□

D'après le lemme 7.2 nous pouvons affirmer que:

Lemme 7.3 $h_f(L(n)) = \mathbf{T}$ *si et seulement si il existe au moins un élément* $g \in G$ *tel que* $f(g) = a$.

Soit $f : G \to \mathbf{T}$, alors il existe un homomorphisme $h_f : L(n) \to \mathbf{T}$, tel que $h_f(g) = f(g)$ pour tout $g \in G$. Soit P_f le noyau de h_f, alors nous savons que P_f est un filtre premier de $L(n)$, et qu'il existe $p_f \in \mathbf{p}(n)$ tel que $F(p_f) = P_f$.

Lemme 7.4 *La transformation* $H(f) = p_f$ *que a chaque* $f \in \mathbf{T}^G$, *fait correspondre l'élément* $p_f \in \mathbf{p}(n)$, *est une transformation biunivoque de* $\mathbf{T}^G$, *sur* $\mathbf{p}(n)$.

Dém.

- *H est surjective.* Etant donné un élément $p \in \mathbf{p}(n)$, soit $P = F(p)$, alors P est premier et par conséquence $C = L(n)/\{P, \varphi(P)\}$ est isomorphe a $\mathbf{B}$ ou $\mathbf{T}$. Soit h l'homomorphisme naturel de $L(n)$ sur C, et f sa restriction à G, alors $f \in \mathbf{T}^G$. Il est evident que h est l'extension de f et que $P_f = P \cap \varphi(P) = P$, c'est-à-dire $H(f) = p_f = p$.

- *H est biunivoque.* Supposons que $H(e) = H(f)$ ou $e, f \in \mathbf{T}^G$, c'est-à-dire $P_e = P_f$, alors par le lemme 7.1 nous avons que $e = f$.

□

Comme $\mathbf{T}^G$ a 3^n éléments, alors l'ensemble ordonné $\mathbf{p}(n)$ a 3^n éléments. Pour connaître $\mathbf{p}(n)$ il suffit de déterminer la relation d'ordre entre les éléments de $\mathbf{p}(n)$.
Pour connaître $f \in \mathbf{T}^G$, il suffit de connaître les valeurs $f(g_i) = f_i \in \mathbf{T}^G$ pour $1 \leq i \leq n$. Nous pouvons representer f par la succession $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ et par le lemme 7.4 nous pouvons encore utiliser cette succession pour représenter l'élément p_f.
Si P est un ultrafiltre de $L(n)$ alors son générateur p est un élément minimal (un atome) de $\mathbf{p}(n)$. Caracterisons les successions qui representent les éléments minimales de $\mathbf{p}(n)$.

Lemme 7.5 *Pour que* p_f *soit un élément minimal de* $\mathbf{p}(n)$ *il faut et il suffit que* $f_i \in \mathbf{B} = \{0,1\}$.

Dém. Si p_f est un élément minimal de $\mathbf{p}(n)$, $P_f = F(p_f)$ est un ultrafiltre de $L(n)$ et alors $L(n)/\{P_f, \varphi(P_f)\} = \mathbf{B}$ c'est-à-dire $f_i = 0$ ou $f_i = 1$. Reciproquement si $f_i = 0$ ou $f_i = 1$, alors l'homomorphisme h_f, extension de f prendre seulement les valeurs 0 et 1, c'est-à-dire $h_f(L(n)) = \mathbf{B}$, ce qui demontre que P_f est un ultrafiltre et par conséquence p_f est un élément minimal de $\mathbf{p}(n)$. $\square$

Théorème 7.1 *Pour que $p_e < p_f$ il faut et il suffit que les conditions suivantes soient verifiées:*

I) $f(g) = 0$ si et seulement si $e(g) = 0$.

II) $f(g) \leq e(g)$ pour tout $g \in G$.

III) Il existe au moins un élément $g \in G$ tel que $e(g) \neq f(g)$.

Dém.

$\Rightarrow$) Supposons que (1) $p_e < p_f$, alors $F(p_f) = P_f \subset P_e = F(p_e)$. Nous savons que $U = \varphi(P_e)$ est le seul ultrafiltre qui contient P_f. Comme $P_e \subseteq \varphi(P_e) \subseteq \varphi(P_f)$ et par consequant $\varphi(P_e) = \varphi(P_f) = U$. Alors :

1) $e(x) = 0$ si et seulement si $x \in L(n) - U$.

2) $e(x) = 1/2$ si et seulement si $x \in U - P_e$.

3) $e(x) = 1$ si et seulement si $x \in P_e$.

1') $f(x) = 0$ si et seulement si $x \in L(n) - U$.

2') $f(x) = 1/2$ si et seulement si $x \in U - P_f$.

3') $f(x) = 1$ si et seulement si $x \in P_f$.

D'après (1) et (1') on déduit I), et de (2), (3), (2'), (3') et (4) $U - Pf = (P_e - P_f) \cup (U - P_e)$ on déduit II). Si $e(g) = f(g)$ pour tout $g \in G$, c'est-à-dire $e = f$, alors comme H est une fonction nous avons $p_e = H(e) = H(f) = p_f$, contradiction. Alors III) est vérifiée.

$\Leftarrow$) Soient $e, f \in \mathbf{T}^G$ verifiant les conditions I, II et III, et demontrons que $p_e < p_f$, ce qui est équivalent a montrer que $P_f \subset P_e$. Pour cela considérons les ensembles suivantes :

$$X = P_e \cap P_f; \quad Y = U_f \cap \mathcal{C}P_f \cap P_e; \quad Z = \mathcal{C}(U_e \cap U_f)$$

où $U_e = \varphi(P_e)$ et $U_f = \varphi(P_f)$ sont les ultrafiltres qui contienent a P_e et P_f respectivement. Alors

1) $x \in X$ si et seulement si $h_e(x) = h_f(x) = 1$.

2) $x \in Y$ si et seulement si $h_f(x) = 1/2$ et $h_e(x) \geq 1/2$.

3) $x \in Z$ si et seulement si $h_e(x) = h_f(x) = 0$.

4) X est un filtre.

5) Z est un idèal.

6) Les ensembles X, Y et Z sont disjointes deux à deux.

Voyons que Y n'est pas vide. En effet par III il existe $g \in G$ tel que $e(g) \neq f(g)$, d'où par I et II on a $h_e(g) = e(g) = 1$ et $h_f(g) = f(g) = 1/2$, c'est-à-dire $g \in P_e$ et $g \in U_f \cap \mathcal{C}P_f$.
Nous allons démontrer que l'ensemble $S = X \cup Y \cup Z$ est une sous-algèbre de $L(n)$ tel que $G \subseteq S$.
D'après (4) on peut affirmer que (7) $1 \in S$, et d'après (5) on tire que (8) $0 \in S$.
On voit tout de suite, en considerant tous les cas possibles (voir la table suivante) que: (9) l'ensemble X est fermé par rapport aux opérations $\wedge$, $\vee$ et $\sim$.

$x \in$	$y \in$	$\sim x \in$	$x \wedge y \in$	$x \vee y \in$
X	X	Z	X	X
X	Y	Z	Y	X
X	Z	Z	Z	X
Y	Y	Z	Y	Y
Y	Z	Z	Z	Y
Z	Z	X	Z	Z

Soient $G_0 = \{g \in G : h_f(g) = 0\}$, $G_{1/2} = \{g \in G : h_f(g) = 1/2\}$, et $G_1 = \{g \in G : h_f(g) = 1\}$, alors on a : $G_0 \subseteq Z$, $G_{1/2} \subseteq Y$ et $G_1 \subseteq X$ et par conséquent:

$$G = G_0 \cup G_{1/2} \cup G_1 \subseteq Z \cup Y \cup X = S.$$

Comme S est une sous-algèbre de $L(n)$ qui contient G, nous avons $S = L(n)$.
Finalement $P_f = P_f \cap L(n) = P_f \cap (X \cup Y \cup Z) = (P_f \cap X) \cup (P_f \cap Y) \cup (P_f \cap Z) = (P_f \cap P_e) \cup \emptyset \cup \emptyset = P_f \cap P_e$, c'est-à-dire $P_f \subseteq P_e$. D'après III, $f \neq g$ alors par le lemme 7.4 on a que $p_e = H(e) \neq H(f) = p_f$ et par conséquant $p_f \neq pe$, alors on peut affirmer que $P_f \subset P_e$.

$\square$

Nous allons maintenant déterminer l'ensemble ordonné $\mathbf{p}(n)$, en tenant compte des propriétés caractéristiques de $\mathbf{p}(n)$; a savoir chaque élément $p \in \mathbf{p}(n)$ est precedé par un seul atome.
Nous nous proposons de determiner les composantes connexes de $\mathbf{p}(n)$, c'est-à-dire nous avons a determiner les atomes de $\mathbf{p}(n)$ et les composantes connnexes qui contienent les atomes.
Nous avons vu que m est un atome de $\mathbf{p}(n)$ si et seulement si $H(a) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ où chaque $a_i \in \{0, 1\} = \mathbf{B}$. Cela signifie que les atomes de $\mathbf{p}(n)$ sont en correspondace

biunivoque avec les applications de G dans $\mathbf{B} = \{0, 1\}$. Nous avons donc 2^n atomes.
Soit $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ et m un atome de $\mathbf{p}(n)$ alors:

$$\begin{cases} a_i = 0, & \text{pour} \ \ i \in J(a) \subseteq I, , \\ a_i = 1, & \text{pour} \ \ i \in I - J(a). \end{cases}$$

Un élément premier $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ tel que $a < p$ doit verifier les conditions:

1) $p_i = 0$ pour $i \in J(a)$,

2) $p_i \in \{1/2, 1\}$ pour $i \in I - J(a)$,

3) Il existe $i \in I - J(a)$ tel que $p_i \neq a_i$ (il est clair qu'on doit avoir $a_i = 1$ et $p_i = 1/2$).

Il est clair que la famille $C(a) = \{p \in \mathbf{p}(n) : a \leq p\}$ est une composante connexe de $\mathbf{p}(n)$. Alors on a: les p_i pour $i \in I - J(a)$ ne peuvent prendre que les valeurs $1/2$ et 1, et dans $C(a)$ on doit ordonner les éléments coordonnées par coordonnées. Comme les coordonnés d'incide $j \in J(a)$ sont fixes et égales a 0, si $J(a)$ a k éléments $0 \leq k \leq n$, alors les $(n-k)$ coordonnées restantes de p varient sur l'ensemble ordonné $\{1/2, 1\}$, où $1/2 < 1$, alors la composante connexe $C(m)$ est une algèbre de Boole avec $(n-k)$ atomes, $0 \leq k \leq n$ que nous répresenterons par B_{n-k}. Il est claire que $B_{n-k} = \mathbf{B}^{n-k}$.
Le nombre de composantes connexes de cette nature est: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $0 \leq k \leq n$ alors:

$$\mathbf{p}(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \mathbf{B}^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbf{B}^{k}.$$

Ou $\sum$ indique la somme cardinale d'ensembles ordonnés.
Rappellons que:

Lemme 7.6 *Si R est un $(0,1)$-réticulé distributif fini, non trivial, dont l'ensemble ordonné $\mathbf{p}(R)$ des éléments premiers de R est isomorphe à l'ensemble ordonné $X = X_1 + X_2$ et si R_i, $i = 1, 2$ est un $(0,1)$-réticulé distributif dont l'ensemble des éléments premiers est isomorphe a X_i, $i = 1, 2$ alors R* est isomorphe à $R_1 \times R_2$.

Nous savons que le $(0,1)$-réticulé distributif ayant pour éléments premiers l'ensemble ordonné $\mathbf{B}^k$ est le $(0,1)$-réticulé distributif $D(k)$ avec k générateurs libres donc:

$$L(n) = \prod_{k=0}^{n} [D(k)]^{\binom{n}{k}}.$$

Alors $L(1)$ a 6 éléments, $L(2)$ a 108 éléments et $L(3)$ a 233.280 éléments.

References

[1] Birkhoff G., *On the combination of sub-algebras*, Proc. Cambridge Phil. Soc 29(1933), 441-464.

[2] Birkhoff G., *Rings of sets*, Duke Math. J., 3 (1937), 443-454.

[3] Bialynicki-Birula A. and Rasiowa H., *On the representation of quasi-Boolean algebras*, Bull. Acad. Polonaise des Sciences. Classe III, 5 (1957), 259-261.

[4] Matsumoto K.,*On a lattice relating to the intuitionistic logic*, Journal of the Osaka University of Sc. and Tech. 2 (1950), 97-107.

[5] Monteiro A., *L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques.* Mémoire présenté à la Soc. Math. de France à l'occasion du jubilé de M. Frechet, (1950). Il a été imprimé dans [10].

[6] Monteiro A., *L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques.* Segundo Symposium de Matemáticas, Villavicencio, Mendoza, Argentina, 21 al 25 Julio 1954, publié par l'Unesco, Montevideo, 1954, 129-161.

[7] Monteiro A., *Algebra de la Lógica III*, Cours réalisé à l'Instituto de Matemática. Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca. Argentina, (1962).

[8] Monteiro A., *Cours sur les algèbres de De Morgan* , Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1966.

[9] Monteiro A., *Generadores de reticulados distributivos finitos*, Actas del Simposio Panamericano de Matemática Aplicada, Buenos Aires Argentina (1968) , p.465.

[10] Monteiro A., *L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques I et II*, Notas de Lógica Matemática 29-30, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1974.

[11] Monteiro A. y Monteiro L., *Algebras de Stone con n generadores libres*, Revista de la Unión Matemática Argentina, 23, Nro. 4 (1968), p.201.

[12] Monteiro L., *Sur les algèbres de Heyting trivalentes*, Notas de Lógica Matemática 19, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1964.

[13] Monteiro L., *Algèbre du calcul propositionnel trtivalent Heyting*, Fundamenta Mathematica 74 (1972), 99-109.

[14] Ribenboim P., *Characteriztion of the sup-complement in a distributive lattice with last element*, Summa Brasiliensis Mathematicæ, 2, fasc.4 (1949), 1-7.

[15] Scholander M., *Postulates for distributive lattices*, Canadian Journal of Mathematics, 3 (1951), pp. 28,30.

[16] Tourasse Teixeira M., *M-álgebras*, Faculdade de Filosofía Ciências e Letras do Rio Claro, São Paulo, Brasil, 1964.

[17] Varlet J. , *On the characterization of Stone lattices*, Acta Scientiarum Mathematicarum, 27 (1966), 81-84.