Axiomes indépendants pour les algèbres de Nelson, de Łukasiewicz trivalentes, de De Morgan et de Kleene

António Monteiro et Luiz Monteiro

Instituto de Matemática - Universidad Nacional del Sur - 1973
Bahía Blanca - Argentina

1 Introduction

Les algèbres de Nelson (ou $\mathcal{N}$-lattices) ont été définies par des égalités par D. Brignole et A. Monteiro, [2]. Voir aussi [1]. Nous allons indiquer un ensemble d'axiomes indépendants pour les algèbres de Nelson et aussi pour d'autres algèbres. Ces résultats on été obtenues il y a beaucoup de temps, mais ils non été jamais publiés, voir a cet propôs [2], [10].

Toutes les algèbres que nous allons considérer sont des réticulés distributifs et il est donc naturel d'utiliser une des definitions les plus simple de cette notion que nous conaissons: celle qui a été obtenue par M. Scholander [12].

Définition 1.1 *Le système* $(A, \wedge, \vee)$ *est un réticulé distributif si:*

A2) $x \wedge (x \vee y) = x$

A3) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

Nous dirons pour abréger que A *est un réticulé distributif.*

Définition 1.2 *Si le système* $(A, 1, \wedge, \vee)$ *verifie les axiomes A2, A3 et*

A1) $x \vee 1 = 1$

nous dirons que 1 *est le dernier élément du réticulé distributif* A *ou que* A *est un réticulé distributif ayant* 1 *pour dernier élément.*

D'une façon duale on définit la notion de premier élément (0) d'un réticulé distributif.

La notion de réticulé de De Morgan a été considérée en 1935 par Gr. C. Moisil [7], et etudié tout d'abord par J. Kalman [3], [4].

Définition 1.3 *Le systéme* $(A, \sim, \wedge, \vee)$ *est un réticulé de De Morgan si les axiomes A2, A3,*

A4) $\sim\sim x = x$

A5) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

sont vérifiés. Nous dirons que $\sim x$ *est la négation de De Morgan de* x*.*

On voit de suite que:

$$A5^{*}) \quad \sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$$

est une conséquence de N4 et N5.
Les formules A5 et A5* reçoivent souvent le nom de *lois de De Morgan* et cela justifie la terminologie adoptée, qui a été introduite dans [8].

Cette notion a été étudié pou la premiere fois par J. Kalman [4] sous le nom de *distributive i-lattices.*

Définition 1.4 *Le systéme* $(A, 1, \sim, \wedge, \vee)$ *sera dit une algèbre de De Morgan si les axiomes A1-A5 sont vérifiés.*

Cela signifie qu'une algèbre de De Morgan peut être définie comme un réticulé de De Morgan ayant un dernier élément 1. On voit de suite que si l'on pose $0 = \sim 1$, alors 0 est le premier élément de A, c'est-á-dire $0 \wedge x = 0$.

Un cas particulier important des réticulés de De Morgan est celui que nous indiquons dans la definition suivante

Définition 1.5 *Le réticulé de De Morgan* $(A, \sim, \wedge, \vee)$ *sera dit un réticulé de Kleene si:*

$$A6) \ x \wedge \sim x = (x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y)$$

Cette notion a été étudie pour la premiére fois par J. Kalman [3] sous le nom de *normal i-lattices.*

Définition 1.6 *Le systéme* $(A, 1, \sim, \wedge, \vee)$ *sera dit une algèbre de Kleene si les axiomes A1-A6 sont verifiés.*

La notion réticulé de Kleene se présente d'une façon naturelle dans l'etude d'un calcul propositionnel consideréе por la premiere fois par S. C. Kleene [5] et les algèbres de Kleene se presentent dans un contexte special dans les études de H. Rasiowa sur l'algèbrisation du calcul propositionnel constructif avec negation forte [11].

2 Caractèrisation des algèbres de Nelson par des égalités

D'aprés D. Brignole et A. Monteiro [2] une algèbre de Nelson est un systéme $(A, 1, \sim, \wedge, \vee, \rightarrow)$ formé par: 1) un ensemble non vide, A; 2) un élément $1 \in A$; 3) un opérateur monaire $\sim$ défini sur A; 4) trois opérations binaires $\wedge, \vee$ et $\rightarrow$ définies sur A tel que les axiomes suivant soient vérifés:

A1) $x \vee 1 = 1$

A2) $x \wedge (x \vee y) = x$

A3) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

A4) $\sim\sim x = x$

A5) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

A6) $x \wedge \sim x = (x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y)$

A7) $x \rightarrow x = 1$

A8) $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge (\sim x \vee y)$

A9) $(x \wedge y) \rightarrow z = x \rightarrow (y \rightarrow z)$

A10) $(x \rightarrow y) \wedge (\sim x \vee y) = \sim x \vee y$

A11) $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$

Nous nous proposons d'indiquer dans cette note d'autres définitions d'algèbre de Nelson au moyen d'axiomes indépendants.

Voyons que les axiomes A1, A10 et A11 sont une conséquence de A2-A9. Pour cela nous démontrerons les lemmes suivants:

Lemme 2.1 $x \vee 1 = 1$ (Axiome A1).

Dém. On peut indiquer trois démonstrations

1. D'aprés A7 et A8 on peut écrire:

$$x \wedge 1 = x \wedge (x \rightarrow x) = x \wedge (\sim x \vee x) = x$$

2. On utilisant sucesivement A7, A2, A8, A2 et A7 on a:

$$x \vee 1 = x \vee (x \rightarrow x) = (x \wedge (\sim x \vee x)) \vee (x \rightarrow x) =$$

$$(x \wedge (x \rightarrow x)) \vee (x \rightarrow x) = x \rightarrow x = 1.$$

3. D'aprés A2, A8, A7 et A2, on a:

$$x \vee 1 = (x \wedge (\sim x \vee x)) \vee 1 = (x \wedge (x \rightarrow x)) \vee 1 = (x \wedge 1) \vee 1 = 1$$

□

Lemme 2.2 *Si $a \rightarrow b = 1$ alors $a = a \wedge (\sim a \vee b)$.*

Dém. En utilisant l'hypothèse et l'axiome A8 on a:

$$a = a \wedge 1 = a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge (\sim a \vee b)$$

□

Lemme 2.3 $\sim x \vee y \leq x \rightarrow y$ (Axiome A10).

Dém. En utilisant sucesivement A9, A8, A9 et A7 on a:

$$(\sim x \vee y) \rightarrow (x \rightarrow y) = (x \wedge (\sim x \vee y)) \rightarrow y =$$

$$(x \wedge (x \rightarrow y)) \rightarrow y = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y) = 1,$$

et alors par le lemme 2.2

$$\sim x \vee y = (\sim x \vee y) \wedge (\sim (\sim x \vee y) \vee (x \rightarrow y)$$

et d'aprés A4 et A5 on a

$$\sim x \vee y = (\sim x \vee y) \wedge ((x \wedge \sim y) \vee (x \rightarrow y))$$

cest-à-dire

$$\sim x \vee y \leq (x \wedge \sim y) \vee (x \rightarrow y) \leq x \vee (x \rightarrow y)$$

et alors

$$\sim x \vee y = (\sim x \vee y) \wedge (x \vee (x \rightarrow y)) = ((\sim x \vee y) \wedge x) \vee ((\sim x \vee y) \wedge (x \rightarrow y))$$

On tenant compte de A8 on a finalement:

$$\sim x \vee y = (x \wedge (x \rightarrow y)) \vee ((\sim x \vee y) \wedge (x \rightarrow y)) = (x \vee \sim x \vee y) \wedge (x \rightarrow y) \leq (x \rightarrow y).$$

□

Lemme 2.4 $y \leq x \rightarrow y$

Dém. Est une conséquence du lemme 2.3. □

Lemme 2.5 *Si $x \leq y$ alors $y \rightarrow z \leq x \rightarrow z$.*

Dém. Par hypothèse $x = x \wedge y$, alors par A9 on peut écrire

$$x \to z = (x \wedge y) \to z = x \to (y \to z) \tag{1}$$

D'après le lemme 2.4 on a:

$$y \to z \leq x \to (y \to z), \tag{2}$$

et alors de (1) et (2) on déduit:

$$y \to z \leq x \to z$$

□

Lemme 2.6 *Pour toute couple ordonné* (x, y)*d'éléments de* A *il existe l'implication intuitionniste* $x \Rightarrow (\sim x \vee y)$ *et en outre:*

$$x \Rightarrow (\sim x \vee y) = x \to y.$$

Dém. Pour cela on doit démontrer que dans la famille d'éléments z tels que $x \wedge z \leq \sim x \vee y$ il existe un élément maximal et que cet élément est $x \to y$, c'est-à-dire que:

I1) $x \wedge (x \to y) \leq \sim x \vee y$.

I2) Si $x \wedge z \leq \sim x \vee y$ alors $z \leq x \to y$.

La condition I1) est une conséquence de A8. Démontrons alors I2). Par le lemme 2.3 on a:

$$\sim x \vee y \leq x \to y$$

et en tenant compte de l'hypothèse on peut écrire:

$$x \wedge z \leq x \to y \tag{3}$$

d'où par le lemme 2.5 et l'axiome A7:

$$1 = (x \to y) \to (x \to y) \leq (x \wedge z) \to (x \to y)$$

c'est-à-dire $1 = (x \wedge z) \to (x \to y)$, et par A9 nous avons

$$1 = (x \wedge z) \to (x \to y) = z \to (x \to (x \to y)) = z \to ((x \wedge x) \to y) = z \to (x \to y)$$

donc on tenant compte du lemme 2.2, on peut écrire

$$z \leq \sim z \vee (x \to y)$$

d'où

$$z = z \wedge z \leq (z \wedge \sim z) \vee (z \wedge (x \to y))$$

et par A6 on a: $z \wedge \sim z \leq x \vee \sim x$, donc

$$z \leq x \vee \sim x \vee (z \wedge (x \to y)) \leq x \vee \sim x \vee (x \to y)$$

Mais par le lemme 2.3: $\sim x \leq x \to y$, alors on a: $z \leq x \vee (x \to y)$, c'est-à-dire $z = z \wedge (x \vee (x \to y)) = z \wedge ((x \wedge z) \vee (x \to y))$, et alors en tenant compte de (3) on a $z = z \wedge (x \to y)$ c'est- à-dire $z \leq x \to y$. □

Lemme 2.7 $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z) \quad$ (Axiome A11).

Dém. Pour démontre l'axiome A11, on procède comme dans [2], pag. 282.

$$x \to (y \wedge z) = x \Rightarrow (\sim x \vee (y \wedge z)) = x \Rightarrow ((\sim x \vee y) \wedge (\sim x \vee z)) =$$

$$= (x \Rightarrow (\sim x \vee y)) \wedge (x \Rightarrow (\sim x \vee z)) = (x \to y) \wedge (x \to z).$$

□

R. Maronna [6] a demontré qu'un réticulé de De Morgan peut être caracterisé comme un systéme $(A, \sim, \wedge)$ formé par un ensemble non vide, A, un opération monaire $\sim$ et une opération binaire $\wedge$, que verifient les axiomes:

A12) $x = x \wedge \sim (\sim x \wedge \sim y)$

A13) $x \wedge \sim (\sim y \wedge \sim z) = \sim (\sim (z \wedge x) \wedge \sim (y \wedge x))$

Alors il est claire que:

Lemme 2.8 *Pour que le systéme $(A, 1, \sim, \wedge, \to)$ soit une algèbre de Nelson il faut et il suffit que les conditiones suivantes soient vérifiées: A12, A13 et*

A14) $x \wedge \sim x = (x \wedge \sim x) \wedge \sim (y \wedge \sim y)$

A15) $x \wedge (x \to y) = x \wedge \sim (x \wedge \sim y)$

A7) $x \to x = 1$

A9) $(x \wedge y) \to z = x \to (y \to z)$

Les algèbres de Łukasiewicz trivalentes peuvent être caracterisés d'après A. Monteiro [9] (pag. 7, Lemme 3.3) comme des algèbres de Nelson que verifient la condition:

$$x \vee (x \to 0) = 1$$

Cet axiome peut être écrit sous les deux formes suivants:

$$\text{A16)} \quad x \vee (x \to \sim 1) = 1,$$

$$\text{A17)} \quad \sim (\sim x \wedge \sim (x \to \sim 1)) = 1.$$

3 Les exemples

Soit $(A, 1, \sim, \wedge, \vee, \rightarrow)$ un système formé par 1) un ensemble A, qui contient *tout au moins deux éléments distincts*; 2) un élément $1 \in A$; 3) une opération monaire $\sim$ définie sur A et 4) trois opérations binaires $\wedge, \vee, \rightarrow$, définies sur A. Pour chacun des examples nous indiquerons les tables des opérateurs $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow$.

- **Exemple** E_1: 1) $\sim x = x$; 2) $x \wedge y = x \vee y = x \rightarrow y = 1$.
- **Exemple** E_2: 1) $\sim x = x$; 2) $x \wedge y = x \vee y = x$; 3) $x \rightarrow y = 1$.
- **Exemple** E_3: Soit $(A, \wedge, \vee)$ un réticulé distributif ayant un dernier élément 1, et posons : $\sim x = x \rightarrow y = 1$.
- **Exemple** E_4: Soit $(A, 1, \wedge, \vee)$ le réticulé distributif dont le diagramme est indiqué sur la figure 1. Les opérations $\sim$ et $\rightarrow$ sont données par les tables suivantes:

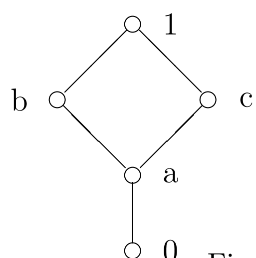

Fig. 1

$\rightarrow$	0	a	b	c	1	$\sim$
0	1	1	1	1	1	1
a	1	1	1	1	1	a
b	c	c	1	c	1	c
c	b	b	b	1	1	b
1	0	a	b	c	1	0

- **Exemple** E_5: Soit $(A, \wedge, \vee,)$ le réticulé distributif dont le diagramme est indiqué sur la figure 2. Posons 1) $\sim 0 = 1$, $\sim a = a$, $\sim b = b$, $\sim 1 = 0$ et 2) $x \rightarrow y = -x \vee \sim x \vee y$, où $-x$ est le complément booléen de x.

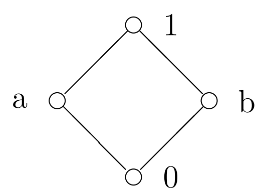

Fig. 2

- **Exemple** E_6: Soit $(A, \wedge, \vee,)$ le réticulé distributif dont le diagramme est indiqué sur la figure 3. Les opérations $\sim$ et $\rightarrow$ ($x \rightarrow y = \sim x \vee y$.) sont données par les tables suivantes:

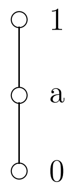

Fig. 3

$\rightarrow$	0	a	1	$\sim$
0	1	1	1	0
a	a	a	1	a
1	0	a	1	0

- **Exemple** E_7: Soit $(A, \wedge, \vee,)$ le réticulé distributif dont le diagramme est indiqué sur la figure 3. Les opérations $\sim$ et $\rightarrow$ sont données par les tables suivantes:

$\rightarrow$	0	a	1	$\sim$
0	1	1	1	0
a	1	1	1	a
1	a	a	1	0

- **Exemple** E_8: Soit $(A, \wedge, \vee,)$ le réticulé distributif dont le diagramme est indiqué sur la figure 3. Les opérations $\sim$ et $\rightarrow$ sont données par les tables suivantes:

$\rightarrow$	0	a	1	$\sim$
0	1	1	1	0
a	1	1	a	a
1	0	a	1	0

- **Exemple** E_9: Soit $(A, \wedge, \vee,)$ le réticulé distributif dont le diagramme est indiqué sur la figure 3. Les opérations $\sim$ et $\rightarrow$ sont données par les tables suivantes:

$\rightarrow$	0	a	1	$\sim$
0	1	1	1	0
a	1	a	1	a
1	0	a	1	0

- **Exemple** E_{10}: Soit $(A, \wedge, \vee,)$ le réticulé dont le diagramme est indiqué sur la figure 4. Les opérations $\sim$ et $\rightarrow$ sont données par les tables suivantes:

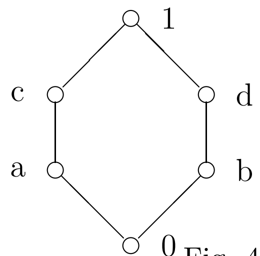

Fig. 4

$\rightarrow$	0	a	b	c	d	1	$\sim$
0	1	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	d	1	d
b	c	c	1	c	1	1	c
c	d	1	d	1	d	1	b
d	c	c	1	c	1	1	a
1	0	a	b	c	d	1	0

- **Exemple** E_{11}: Soit $(A, \wedge, \vee,)$ le réticulé distributif dont le diagramme est indiqué sur la figure 5. Les opérations $\sim$ et $\rightarrow$ sont données par les tables suivantes:

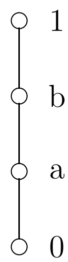

Fig. 5

$\rightarrow$	0	a	b	1	$\sim$
0	1	1	1	1	1
a	1	1	1	1	b
b	a	a	1	1	a
1	0	a	b	1	0

- **Exemple** E_{12}: Soit A la droite numerique et posons par définition $\sim x = -x$, alors $(A, \wedge, \vee, \sim)$ est une algèbre de Kleene. Posons par définition $x \rightarrow y = 1$.

- **Exemple** E_{13}: Soit $A = \{0, 1\}$ une chaîne où $0 < 1$. Posons $\sim x = 0$, pour tout $x \in A$, et $x \rightarrow y = 1$.

4 Axiomes indépendants.

A) **Algèbres de Nelson**. Système $(A, 1, \sim, \wedge, \vee, \rightarrow)$ et axiomes A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8 et A9.

B) **Algèbres de Nelson**. Système $(A, 1, \sim, \wedge, \rightarrow)$ et axiomes A12, A13, A14, A15, A7 et A9.

C) **Algèbres de Łukasiewicz.** Système $(A, 1, \sim, \wedge, \vee, \rightarrow)$ et axiomes A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9 et A16.

D) **Algèbres de Łukasiewicz**. Système $(A, 1, \sim, \wedge, \rightarrow)$ et axiomes A12, A13, A14, A15, A7, A9 et A17.

E) **Algèbres de De Morgan**. Système $(A, 1, \sim, \wedge)$ et axiomes A12, A13 et A18 $(x \wedge 1 = x.)$

F) **Algèbres de Kleene**. Système $(A, 1, \sim, \wedge)$ et axiomes A12, A13, A14 et A18 $(x \wedge 1 = x.)$

Dans la table suivante, pour chaque example E_i, $1 \leq i \leq 13$ nous notérons avec le symbol "+" que l'axiome A_j, $1 \leq j \leq 18$ est verifié, et avec le symbol "•" que l'axiome A_j n'est pas vérifié. Alors on peut voir d'après beaucoup de calculs que les axiomatiques indiquées sont formés par d'axiomes indépendants.

	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
E_1	•	+	+	+	+	+	+	+	•	+	+	+	+	+	•
E_2	+	•	+	+	+	+	+	+	+	•	+	+	•	•	+
E_3	+	+	•	+	+	+	+	+	+	•	+	+	+	+	+
E_4	+	+	+	•	+	+	+	+	•	•	+	•	+	•	+
E_5	+	+	+	+	•	+	+	+	+	+	•	+	+	+	+
E_6	+	+	+	+	+	•	+	+	+	+	+	+	•	•	+
E_7	+	+	+	+	+	+	•	+	+	+	+	•	+	+	+
E_8	+	+	+	+	+	+	+	•	+	+	+	+	+	+	+
E_9	+	+	+	+	+	•	+	+	+	+	+	+	+	+	+
E_{10}	+	•	+	+	+	+	+	+	+	•	+	+	+	+	+
E_{11}	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	•	•	+
E_{12}	+	+	+	+	+	+	•	+	+	+	+	•	•	•	•
E_{13}	+	+	•	+	+	+	•	+	•	+	+	•	+	•	+

References

[1] Brignole D., *Equational characterization of Nelson Algebras.* Notre Dame J. of Formal Logic 10 (1969) 285-297. Notas de Lógica Matemática 9, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1974.

[2] Brignole D. et Monteiro A., *Caractérisation des algèbres de Nelson par de égalités I et II.* Proc. of Japan Academy A3 (1967), 279-283; 284-285. Notas de Lógica Matemática 20, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1964.

[3] Kalman J., *Thèse de Doctorat.* Harvard University, (1955).

[4] Kalman J., *Lattices with involution.* Trans. Amer. Math. Soc. 87 (1958), 485-491.

[5] Kleene S. C., *On notation for ordinal numbers.* J. of Symbolic Logic,3 (1938), 150-155.

[6] Maronna R., *A characterization of Morgan Lattices.* Portugalia Mathematica. Vol. 23-Fasc. 3(1964),pp. 169-171. Notas de Lógica Matemática 18, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1964.

[7] Moisil, Gr. C., *Recherches sur l'algèbre de la logique.* Ann. Sci. Univ. Jassy, 22 (1935), 1-117.

[8] Monteiro A., *Cours sur les algèbres de Hilbert et de Tarski.* Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1960.

[9] Monteiro A., *Construction des Algèbres de Łukasiewicz trivalentes dans les algèbres de Boole Monadiques I.* Math. Japonicae, 12 (1967), 1-23. Notas de Lógica Matemática 11, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1974.

[10] Monteiro A., *Les éléments réguliers d'un $\mathcal{N}$-lattice.* Textos e Notas 15,, CMAF, Lisboa, Portugal (1978). Informes Técnicos Internos Nro. 43, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1995.

[11] Rasiowa H., *$\mathcal{N}$-lattices and constructive logic with strong negation.* Fund. Math. 46 (1958), 61-80.

[12] Scholander M., *Postulates for distributive lattices*, Canadian Journal of Mathematics, v. 3(1951), pp. 28,30.