Representation d'une algèbre de Łukasiewicz trivalente par une algèbre de Łukasiewicz trivalente d'ensembles. Caractère Universel de la construction $\mathcal{L}$ des algèbres de Łukasiewicz trivalentes.

Antonio Monteiro

Instituto de Matemática - Universidad Nacional del Sur - 1966 [1]

Bahía Blanca - Argentina

1 Les algèbres de Łukasiewicz trivalentes

La notion d'algèbre de Łukasiewicz trivalente, a été introduite et leur théorie développée par Gr. Moisil [7], [8] , [9].
Ces algèbres jouent dans le calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz un rôle analogue à celui des algèbres de Boole dans le calcul propositionnel classique.
La définition suivante (voir [12], [13], [17]) est équivalente à celles qui on été indiquées par Moisil.

Définition 1.1 *Une algèbre de Łukasiewicz trivalente* $(L, \vee, \wedge, \sim, \nabla, 1)$ *est une algèbre du type* $(2, 2, 1, 1, 0)$ *de telle manière que les conditions suivantes soient vérifiées:*

L1) $x \vee 1 = 1$

L2) $x \wedge (x \vee y) = x$

L3) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

L4) $\sim\sim x = x.$

L5) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y.$

[1] *Les résultats suivants ont été exposés dans un Seminaire due à l'Instituto de Matemática de l'Universidad Nacional del Sur, leurs éléves: Roberto Cignoli, Luisa Iturrioz et Luiz F. Monteiro. Nous avons ajouté a la Bibliographie des travaux publiés d'aprés 1966.*

L6) $\sim x \vee \nabla x = 1$.

L7) $\sim x \wedge x = \sim x \wedge \nabla x$.

L8) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$.

Nous dirons aussi que L est une algèbre de Łukasiewicz.

L'opération ∇ s'appelle opération de *possibilité.* Il est bien connue que L est un réticulé distributif ayant par dernier élément 1, et plus précisement une algèbre de De Morgan, où $0 = \sim 1$ est le premier élément du réticulé L. L'opération de *nécéssité* (Δ) est définie par: $\Delta x = \sim \nabla \sim x, \ \ x \in L$.

Si R est un réticulé distributif, nous répresenterons par $\mathbf{F}(R)$ l'ensemble de tous les filtres de R. Il est bien connue que $(\mathbf{F}(R), \subseteq)$ est un ensemble ordonée. Soit $\mathbf{U}(R)$ l'ensemble de tous les éléments maximales de l'ensemble ordonné $\mathbf{F}(R)$, nous appelerons *ultrafiltres* de R, ces éléments.
Nous répresenterons par $\mathbf{P}(R)$ l'ensemble de tous les filtres premiers de R, et par $\mathbf{p}(R)$ l'ensemble de tous les filtres premiers minimales de R, c'est-à-dire l'ensemble des éléments minimales de l'ensemble ordonné $(\mathbf{P}(R), \subseteq)$.

Si M est une algèbre de De Morgan, et $X \subseteq M$, soit $\sim X = \{x \in M : \sim x \in X\}$. Si $P \in \mathbf{P}(M)$ alors il est bien connu que $\varphi(P) = \mathcal{C} \sim P$, où $\mathcal{C}Y$ répresente le complément de l'ensemble $Y \subseteq M$ para rapport à l'ensemble M , est une transformation, que s'appelle *transformation de Birula- Rasiowa* [1], [2], de $\mathbf{P}(M)$ dans $\mathbf{P}(M)$, qui verifie (1) $\varphi(\varphi(P)) = P$, et (2) Si $P, Q \in \mathbf{P}(M)$ alors $P \subseteq Q$ si et seulement si $\varphi(Q) \subseteq \varphi(P)$.

Lemme 1.1 *Si $P \in \mathbf{P}(M)$ alors:*

1) $\sim x \in P$ si et seulement si $x \notin \varphi(P)$.

2) $\sim x \notin P$ si et seulement si $x \in \varphi(P)$.

Si K est une algèbre de Kleene, il est bien connue que: Si $P \in \mathbf{P}(K)$ alors: $P \subseteq \varphi(P)$ ou $\varphi(P) \subseteq P$. Si $P \in \mathbf{P}(K)$ verifie $P \subseteq \varphi(P)$ nous dirons que P est un filtre de première espèce [22] , et nous répresentrons par $\mathbf{P}_1(K)$ l'ensemble de tous les filtres de première espèce . Il est claire que $\mathbf{p}(K), \ \mathbf{P}_1(K) \subseteq \mathbf{P}(K)$.

Soit $T = \{0, 1/2, 1\}$ l'ensemble ordonné où $0 < 1/2 < 1$. Donc T est un réticulé distributif avec premier et dernier éléments 0 et 1 respectivement. Si nous posons $\sim 0 = 1, \ \sim (1/2) = 1/2, \ \sim 1 = 0$ et $\nabla 0 = 0, \ \nabla(1/2) = \nabla 1 = 1$, alors T est une algèbre de Łukasiewicz trivalente. Observons que $\Delta 0 = \Delta(1/2) = 0, \ \Delta 1 = 1$ et que le sous-ensemble $B = \{0, 1\}$ de T est une sous-algèbre de T.

Si L est une algèbre de Łukasiewicz, nous noterons par $B(L)$ l'ensemble de touts les éléments booléens de L.

Lemme 1.2

$$B(L) = \{x \in L : \nabla x = x\} = \{x \in L : \Delta x = x\} = \{x \in L : \ x \wedge \sim x = 0\}.$$

Comme toute algèbre de Łukasiewicz est une algèbre de Kleene, c'est- à-dire verifie:

$$x \wedge \ \sim x \leq y \vee \ \sim y$$

alors si $b \in B(L)$, alors le complément booléen de b, que nous notérons $-b$, est égale a $\sim b$, c'est-à-dire $-b = \sim b$. La démonstration que nous avons obtenue a été reproduite sans changement dans [3]. Une démonstration plus simple a été obtenue par L.Monteiro, [19]. Voir à cette propos [16].

Lemme 1.3 (Principe de détermination de Moisil.)*Si* L *est une algèbre de Łukasiewicz,* $x, y \in L$ *tels que* $\nabla x = \nabla y$ *et* $\Delta x = \Delta y$*, alors* $x = y$. [7], [8], [20].

Définition 1.2 *Une application* h *d'une algèbre de Łukasiewicz* L *dans une algèbre de Łukasiewicz* L' *sera dite un L-homomorphisme de* L *dans* L'*, si les conditions suivantes sont vérifiées* [12]*:*

H1) $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$,

H2) $h(\sim x) = \sim h(x)$,

H3) $h(\nabla x) = \nabla h(x)$.

Définition 1.3 *Une partie* F *d'une algèbre de Łukasiewicz* L *sera dite un* Δ*-filtre si:*

F1) F *est un filtre du réticulé distributif* L*,*

F2) Si $a \in F$ *alors* $\Delta a \in F$.

Si X est un sous-ensemble de l'algèbre de Łukasiewicz L, nous notérons par $D(X)$, le Δ-filtre engendrée par l'ensemble X. Si F est un Δ-filtre et $a \in L - F$ nous notérons par $D(F, a)$ le Δ-filtre engendrée par l'ensemble $F \cup \{a\}$. Il est bien connu que:

$$D(F, a) = \{y \in L : \nabla \sim a \vee y \in F\}.$$

Comme la famille des Δ-filtres est inductive supérieurement alors:

Lemme 1.4 *Chaque* Δ*-filtre est contenue dans un* Δ*-filtre maximal.*

Nous répresenterons par $\mathbf{D}(L)$ l'ensemble de tous les Δ-filtres de L, et par $\mathbf{M}(L)$ l'ensemble de tous les Δ-filtres maximales de L.

Lemme 1.5 *Chaque* Δ*-filtre est intersection de* Δ*-filtres maximales.*

Si L et L' sont des algèbres de Łukasiewicz, et h un homomorphisme de L dans L', alors l'ensemble $N(h) = \{x \in L : h(x) = 1'\}$, où $1'$ est le dernier élément de L', est un Δ-filtre de L. Nous dirons que $N(h)$ est le *noyau de* h.

Soit D un Δ-filtre d'une algèbre de Łukasiewicz L. Posons $x \equiv y\ (mod.D)$ pour indiquer qu'il existe un élément $d \in D$ tel que $x \wedge d = y \wedge d$, alors la relation $\equiv$ est une congruence définie sur L. Soit $|x|$ la classe d'équivalence qui contient l'élément $x \in L$. Alors si nous algebrisons l'ensemble $L/\equiv$ des clases d'équivalence par: $|x| \wedge |y| = |x| \wedge y|$, $|x| \vee |y| = |x| \vee |y|$, $\nabla |x| = |\nabla x|$, $\sim |x| = |\sim x|$, $\mathbf{1} = |1|$, alors $(L/\equiv, \vee, \wedge, \sim, \nabla, \mathbf{1})$ est une algèbre de Łukasiewicz trivalente, et la transformation h de L dans $L/\equiv$ definie par $h(x) = |x|$ est un homomorphisme de L sur $L/\equiv$, ayant par noyau D. A l'algèbre $A/\equiv$ que nous venons d'obtenir nous donnerons le nom d'algèbre quotient de L par le Δ-filtre D. Nous notérons aussi cette algèbre par L/D.
Il est bien connue que toutes les images homomorphes d'une algèbre donnée L peuvent être obtenues par la construction que nous venons d'indiquer.

Lemme 1.6 *Si M est un Δ-filtre maximal de L alors l'algèbre quotient A/M est isomorphe soit a l'algèbre B ou a l'algébre T.*

Si X est un sous-ensemble d'une algèbre de Łukasiewicz L, nous notérons par $F(X)$ le filtre engendrée par X dans le réticulé distributif L.

Lemme 1.7 *Si R est un réticulé distributif avec premier (0) et dernier élément (1) et $X \subseteq R$ alors le filtre engendré par X dans R est l'ensemble:*

$$F(X) = \{y \in R : \text{il existent des éléments } x_1, x_2, \cdots, x_n \in X \text{ tels que } \bigwedge_{k=1}^{n} x_k \leq y\}.$$

Lemme 1.8 *Si X est un sous-ensemble de R qui vérifie: Si $x, y \in X$ alors $x \wedge y \in X$, alors $F(X) = \{y \in R : \text{ il existe } x \in X \text{ tel que } x \leq y\}$. Un tel sous-ensemble s'appelle une base multiplicative de filtre. Si $0 \notin X$ alors $F(X)$ est un filtre propre , c'est-á-dire $F(X) \neq R$.*

Observation 1.1 *Si L est une algèbre de Łukasiewicz, $X \subseteq B(L)$, nous noterons par $F_B(X)$ le filtre de $B(L)$ engendrée par l'ensemble X. Il est facile a voir que $F_B(X) = F(X) \cap B(L)$.*

Lemme 1.9 *Si L et L' sont des algèbres de Łukasiewicz et h un L-homomorphisme de L dans L', alors : $h(B(L)) \subseteq B(L')$, et la restriction h' de h a l'ensemble B(L) est un homomorphisme Booléen de B(L) dans B(L').*

Il est bien connue que:

Lemme 1.10 *Si h est un homomorphisme booléen de l'algèbre de Boole A sur l'algèbre de Boole A' et X un sous-ensemble de générateurs de A, c'est-à-dire $SB(X) = A$, alors A' = SB(h(X)).*

Nous allons étudier les relations entre les filtres premiers de L et les Δ-filtres maximales de L.
Si $X \subseteq L$, soit $\nabla X = \{\nabla x : x \in X\}$, et $\Delta X = \{\Delta x : x \in X\}$.

Lemme 1.11 *If X est un sous-ensemble de $B(L)$ qui vérifiee: "(1) Si $x, y \in X$ alors $x \wedge y \in X$", alors $F(X)$ est an Δ-filtre.*

Dém. Soit $y \in F(X)$, alors d'après l'hypothèse (1) et le lemme 1.8, il existe $x \in X$ tel que $x \leq y$, donc $x = \Delta x \leq \Delta y$, donc d'après le lemme 1.8, $\Delta y \in F(X)$. □

Corollaire 1.1 *Si $P \in \mathbf{P}(L)$ alors $F(\Delta P)$, $F(\nabla P)$ sont des Δ-filtres de L.*

Dém. Soient $x, y \in \Delta P$, donc $x = \Delta p,\ y = \Delta q$, où $p, q \in P$, donc $x \wedge y = \Delta(p \wedge q) \in \Delta P$, car $p \wedge q \in P$, alors par le lemme 1.11 $F(\Delta P)$ est un Δ-filtre de L. Analoguement on montre que $F(\nabla P)$ est un Δ-filtre de L. □

Lemme 1.12 *La transformation $\alpha : \mathbf{D}(L) \to \mathbf{F}(B(L))$, definie par $\alpha(D) = D \cap B(L)$, est un isomorphisme d'ordre de l'ensemble ordonée $(\mathbf{D}(L), \subseteq)$ dans l'ensemble ordonée $(\mathbf{F}(B(L)), \subseteq)$, et $\alpha^{-1}(Q) = F(Q),\ Q \in \mathbf{F}(B(L))$.*

Dém. Si $D \in \mathbf{D}(L)$, il est facile a voir que $\alpha(D) \in \mathbf{F}(B(L))$. Soient $D_1, D_2 \in \mathbf{D}(L)$ tels que $D_1 \subseteq D_2$, alors il est claire que $\alpha(D_1) \subseteq \alpha(D_2)$.
Si $D \in \mathbf{D}(L)$, alors $\alpha(D) = D \cap B(L) \subseteq D$ et par conséquant $F(D \cap B(L)) \subseteq F(D) = D$. Si $d \in D$ alors $\Delta d \in D \cap B(L) \subseteq F(D \cap B(L))$ et comme $\Delta d \leq d$ on a $d \in F(D \cap B(L))$. Nous avons ainsi demontré que : (1) $F(D \cap B(L)) = D$.
Soit $Q \in \mathbf{F}(B(L))$, alors comme Q verifie les conditions du lemme 1.11 on a $F(Q) \in \mathbf{D}(L)$, donc $\alpha(F(Q)) = F(Q) \cap B(L)$. Comme $Q \subseteq B(L)$ et $F(Q) \subseteq B(L)$, alors $Q = Q \cap B(L) \subseteq F(Q) \cap B(L)$. Si $y \in F(Q) \cap B(L)$, alors $y \in F(Q)$, donc il existe $x \in Q$ tel que $x \leq y$. Comme $y \in B(L)$ alors (1) $\nabla x \leq \nabla y = y$. De $x \in Q,\ x \leq \nabla x$ et $\nabla x \in B(L)$ on déduit que (2) $\nabla x \in Q$. De (1) et (2) on a $y \in Q$. Nous avons ainsi demontré que $\alpha(F(Q)) = Q$. Cela montre que α est une fonction surjective.
Soient $D_1, D_2 \in \mathbf{D}(L)$ tels que $\alpha(D_1) \subseteq \alpha(D_2)$, c'est-à-dire $D_1 \cap B(L) \subseteq D_2 \cap B(L)$, donc $D_1 = F(D_1 \cap B(L)) \subseteq F(D_2 \cap B(L)) = D_2$. Cela montre que α est une fonction biyective et que $\alpha^{-1}(Q) = F(Q),\ Q \in \mathbf{F}(B(L))$. □

Lemme 1.13 *Si $P \in \mathbf{P}(L)$ et $b \in B(L) \cap P$ alors $b \in F(\nabla P)$.*

Dém. Comme $b \in B(L) \cap P$ alors $b = \nabla b \in \nabla P \subseteq F(\nabla P)$. □
Il est facile a voir que:

Lemme 1.14 *(a) Si $b \notin P \in \mathbf{P}(L)$ et $b \in B(L)$ alors $\sim b \in P$.*

(b) Si F est un filtre propre de L et $b \in F \cap B(L)$ alors $\sim b \notin F$.

Lemme 1.15 *Si $P \in \mathbf{P}(L)$ alors $F(\nabla P) \in \mathbf{M}(L)$ et $F(\nabla P) \subseteq P$.*

Dém.

1) $F(\nabla P) \subseteq P$.
   Montrons que (i) :$\nabla P \subseteq P$. Soit $t \in \nabla P$, alors $t = \nabla p$, où $p \in P$. Comme $p \leq \nabla p = t$ et P est un filtre alors $t \in P$. Comme (ii) P est un filtre, alors de (i) et (ii) on déduit 1).

2) Par le corollaire 1.1, $F(\nabla P)$ est un Δ-filtre. Montrons qu'il est un Δ-filtre maximal.
   Supposons qu'il existe $M \in \mathbf{M}(L)$ tel que: (1) $F(\nabla P) \subset M$. Montrons que (2) $M \nsubseteq P$. D'après (1) il existe un élément $m \in L$ tel que (3) $m \in M - F(\nabla P)$, alors comme M es un Δ-filtre d'après (3) on déduit que (4) $\Delta m \in M$. Comme $\Delta m \leq m$, en tenant compte de (3) on a (5) $\Delta m \notin F(\nabla P)$.
   Si (6) $M \subseteq P$, alors d'après (4), $\Delta m \in P$ et alors $\Delta m = \nabla \Delta m \in \nabla P$, donc $\Delta m \in F(\nabla P)$, ce qui est en contradiction avec (5).
   D'aprés (2) il existe $z \in L$, tel que (7) $z \in M - P$, alors (8) $\Delta z \in M$, (9) $\Delta z \notin P$. D'après (8) en tenant compte du lemme 1.14 , b) on a (10) $\sim \Delta z \notin M$. D'aprés (9) et le lemme 1.14, (a) $\sim \Delta z \in P$, donc $\sim \Delta z = \nabla \sim \Delta z \in \nabla P$, et alors $\sim \Delta z \in F(\nabla P) \subseteq M$, ce qui est en contradiction avec (10).

□

Lemme 1.16 *Chaque filtre premier P d'une algèbre de Łukasiewicz L contient un et seulement un Δ-filtre maximal.*

Dém. Par le lemme 1.15 nous savons qu'il existe un Δ-filtre maximal contenue dans P, a savoir $F(\nabla P)$. Soient M, $M' \in \mathbf{M}(L)$ tels que $M \subseteq P$, $M' \subseteq P$ et $M \neq M'$. Alors il existe $x \in M - M'$ or il existe $x \in M' - M$. Si $x \in M - M'$ alors $\Delta x \in M$ et $\Delta x \notin M'$. Comme M' est un Δ-filtre maximal alors $L = D(M', \Delta x) = \{y \in L :\sim \Delta x \vee y \in M'\}$, donc $\sim \Delta x \in L = D(M', \Delta x)$, et c'est-à- dire $\sim \Delta x = \sim \Delta x \vee \sim \Delta x \in M'$, et comme $M' \subseteq P$ on a $\sim \Delta x \in P$. Comme $\Delta x \in M \subseteq P$, alors on a $\Delta x \in P$ et d'après le lemme 1.14 (b), $\sim \Delta x \notin P$. Contradiction. Si $x \in M' - M$, on arrive aussi a une contradiction.
□

Lemme 1.17 *Si $P \in \mathbf{P}(L)$ alors $F(\nabla P) \subseteq \varphi(P)$.*

Dém. Supposons que (1) $F(\nabla P) \nsubseteq \varphi(P) = \mathcal{C} \sim P$, alors il existe (2) $m \in F(\nabla P)$, (3) $m \notin \varphi(P)$.
De (2) on déduit (4) $\Delta m \in F(\nabla P)$ et comme $\Delta m \leq m$ de (3) et (4) on a (5) $\Delta m \notin \varphi(P)$.
Comme L est une algèbre de Kleene nous savons que tout filtre premier P de L, est comparable avec $\varphi(P)$.
Si $P \subseteq \varphi(P)$, alors comme $F(\nabla P) \subseteq P$, nous avons $F(\nabla P) \subseteq \varphi(P)$, ce qui est en contradiction avec (1). Alors (6) $\varphi(P) \subset P$.
Comme $\Delta m \vee \sim \Delta m = 1 \in \varphi(P)$ et $\varphi(P)$ est un filtre premier, alors en tenant compte de (5), on a $\sim \Delta m \in \varphi(P)$, donc par (6) on a $\sim \Delta m \in P$, d'où par (4)

$0 = \Delta m \wedge \sim \Delta m \in P$.
Démonstration de L. Monteiro. Soit $m \in \nabla P$, alors $m = \nabla p$, où $p \in P$. Comme $\sim p \vee \nabla p = 1 \in \varphi(P)$ et $\varphi(P)$ est un filtre premier alors $\sim p \in \varphi(P)$ ou $\nabla p \in \varphi(P)$. Si $\sim p \in \varphi(P) = \mathcal{C} \ \sim P$, donc $\sim p \notin \sim P$. Cette contradictiom montre que $m = \nabla p \in \varphi(P)$. Nous avons ainsi demontré que $\nabla P \subseteq \varphi(P)$, donc $F(\nabla P) \subseteq \varphi(P)$. □

Lemme 1.18 *Si $P \in \mathbf{P}(L)$, $P \subseteq \varphi(P)$, et $\nabla a \in P$, alors $a \in \varphi(P)$.*

Dém. De (1) $P \subseteq \varphi(P)$, et (2) $\nabla a \in P$. Supposons que (3)$a \notin \varphi(P)$, donc $a \in \sim P$, c'est-à-dire, (4) $\sim a \in P$.
De (2) et (4), on a: $a \wedge \ \sim a = \nabla a \wedge \ \sim a \in P$, donc $a \in P$, et alors par (1), $a \in \varphi(P)$, contradiction. □

Lemme 1.19 *Si L est une algèbre de Łukasiewicz et $P \in \mathbf{P}(L)$ alors $P \in \mathbf{M}(L)$ ou $\varphi(P) \in \mathbf{M}(L)$.*

Dém. Nous savons que (i) $\varphi(P) \subseteq P$ or (ii) $P \subseteq \varphi(P)$. Supposons que (i) $\varphi(P) \subseteq P$. Par le lemme 1.17, (1) $F(\nabla P) \subseteq \varphi(P)$. Supposons que $F(\nabla P) \subset \varphi(P)$, alors il existe (2) $a \in \varphi(P)$ tel que (3) $a \notin F(\nabla P)$. Si $\sim \Delta a = \nabla \sim a \in P$ alors par le lemme 1.13, (4) $\nabla \sim a \in F(\nabla P)$. De (1) et (4) on déduit que $\nabla \sim a \in \varphi(P)$, et comme $\varphi(P) \subseteq \varphi(\varphi(P))$, alors par le lemme 1.18 on a $\sim a \in \varphi(P) \subseteq P$, cet qui est en contradiction avec (2). Comme $\Delta a \vee \sim \Delta a = 1 \in P \in \mathbf{P}(L)$ et $\sim \Delta a \notin P$, on déduit que $\Delta a \in P$, et alors $\Delta a = \nabla \Delta a \in F(\nabla P)$, donc comme $\Delta a \leq a$, nous avons $a \in F(\nabla P)$, ce qui est en contradiction avec (3). Alors $F(\nabla P) = \varphi(P)$. Nous avons ainsi vue que si $\varphi(P) \subseteq P$ alors $F(\nabla P) = \varphi(P)$ est l'unique Δ-filtre maximal contenue dans P. Analoguement si $P \subseteq \varphi(P) = Q$, alors $P = \varphi(P) \subseteq \varphi(P) = Q$, donc $\varphi(P) = Q$, est l'unique Δ-filtre maximal contenue dans $\varphi(P)$. □

Corollaire 1.2 $\mathbf{M}(L) \subseteq \mathbf{P}(L)$.

Dém. Soit M un Δ-filtre maximal, alors il existe $U \in \mathbf{U}(L)$ tel que (1) $M \subseteq U$. Comme $\mathbf{U}(L) \subseteq \mathbf{P}(L)$, alors U est un filtre premier et comme $\varphi(U)$ est comparable avec U, nous avons necessairement (2) $\varphi(U) \subseteq U$. Donc par le lemme 1.19 $\varphi(U)$ est un Δ-filtre maximal, et comme par le lemme 1.16 il existe un unique Δ-filtre maximal contenue dans U, on a $M = \varphi(U) \in \mathbf{P}(L)$. □
Il est bien connue que:

Lemme 1.20 *Si R est un réticulé distributif avec premier et dernier éléments (0 et 1 respectivement), alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) U est un filtre maximal de R.

b) Etant donnée $x \notin U$ il existe $u \in U$ tel que $x \wedge u = 0$.

Lemme 1.21 *Si R est un réticulé distributif avec premier et dernier éléments (0 et 1 respectivement), alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) P est un filtre premier minimal de R.

b) $P = R - I$, où I est un ideal maximal de R.

et les conditions suivantes sont équivalentes

c) I est un ideal maximal de R.

d) Etant donnée $p \notin I$ il existe $q \in I$ tel que $p \vee q = 1$.

Lemme 1.22 *I) $\mathbf{p}(L) \subseteq \mathbf{D}(L)$; II) $\mathbf{p}(L) = \mathbf{M}(L)$.*

Dém.

I) Soit $P \in \mathbf{p}(L)$. Si $0 \in \Delta P$, alors $0 = \Delta p$ où $p \in P$, donc par le lemme 1.21 il existe $q \notin P$ tel que $1 = p \vee q$, donc $1 = \Delta(p \vee q) = \Delta p \vee \Delta q = 0 \vee \Delta q = \Delta q \leq q$, et nous avons ainsi $q = 1 \in P$. Contradiction. Alors $0 \notin \Delta P$ alors en tenant compte du corollaire 1.1 et du lemme 1.8, nous avons que: (*) $F(\Delta P)$ est un Δ-filtre propre de L. Montrons que $P = F(\Delta P)$. Soit $p \in P$, comme $\Delta p \leq p$ et $\Delta p \in F(\Delta P)$ alors $p \in F(\Delta P)$, donc $P \subseteq F(\Delta P)$. Supposons que $P \subset F(\Delta P)$, alorts il existe (1) $x \in F(\Delta P)$, tel que (2) $x \notin P$. D'après (1) il existe $p \in P$ tel que (3) $\Delta p \leq x$. De (2) et (3) on déduit (4) $\Delta p \notin P$, et comme $\Delta p \vee \sim \Delta p = 1 \in P$, nous avons que (5) $\sim \Delta p \in P$. Comme $\Delta p \in F(\Delta P)$ et $P \subset F(\Delta P)$, d'après (5) on déduit $\sim \Delta p \in F(\Delta P)$, et alors $0 = \Delta p \wedge \sim \Delta p \in F(\Delta P)$, ce qui est en contradiction avec (*).

II) a) Soit $P \in \mathbf{p}(L)$ alors par I) P est un Δ-filtre. Supposons qu'il existe $M \in \mathbf{M}(L)$ tel que $P \subset M$, alors il existe (1) $x \in M$ tel que (2) $x \notin P$. Alors (3) $\Delta x \in M$ et (4) $\Delta x \notin P$. Comme $\Delta x \vee \sim \Delta x = 1 \in P$, d'après (4) on a $\sim \Delta x \in P$, et alors (5) $\sim \Delta x \in M$. De (3) et (5): $0 = \Delta x \wedge \Delta x \in M$. Contradiction.

b) Soit $M \in \mathbf{M}(L)$ alors par le corollaire 1.2, $M \in \mathbf{P}(L)$. Si $M \notin \mathbf{p}(L)$, alors il existe (1) $P \in \mathbf{p}(L)$ tel que (2) $P \subset M$. De (1) il résulte par II) a) que $P \in \mathbf{M}(L)$, c'est qui est en contradiction avec (2).

□

Corollaire 1.3 *Chaque filtre premier d'une algèbre de Lukasiewicz contient un unique filtre premier minimal.*

Dém. D'après le lemme 1.16 chaque filtre premier contient un et seulement un Δ-filtre maximal, et d'après le lemme 1.22, (II) la famille des Δ-filtres maximales coïncide avec la famille des filtres premiers minimales. □

Lemme 1.23 *Si $P \in \mathbf{p}(L)$ et $P \notin \mathbf{U}(L)$ alors il existe un et seulement un $P' \in \mathbf{P}(L)$ tel que $P \subset P'$, et plus précisement $P' = \varphi(P)$.*

Dém. Soit $P \in \mathbf{p}(L)$, nous savons que (1) $\varphi(P) \subset P$ ou (2) $P \subseteq \varphi(P)$. Comme $\varphi(P) \in \mathbf{P}(L)$ et P est un filtre premier minimal la condition (1) ne peut pas être vérifiée. Soit $U \in \mathbf{U}(L)$, tel que $\varphi(P) \subseteq U$, alors $\varphi(U) \subseteq \varphi(\varphi(P)) = P$, donc comme P est un filtre premier minimal on doit avoir $\varphi(U) = P$, donc $U = \varphi(P)$.
Alors $\varphi(P)$ est un ultrafiltre qui contient P. On ne peut pas avoir $\varphi(P) = P$, car par hypothèse $P \notin \mathbf{U}(L)$, alors :

$$P \subset \varphi(P) \text{ et } \varphi(P) \text{ ultrafiltre.}$$

Soit $P' \in \mathbf{P}(L)$ tel que (3) $P \subset P'$. Nous allons montrer que (4) $P' \subseteq U = \varphi(P)$. En effet si $P' \not\subseteq U$ il existe (5) $p' \in P'$ tel que (6) $p' \notin U$. De (6) , voir lemme 1.20 , on déduit qu'il il existe (7) $u \in U$ tel que (8) $u \wedge p' = 0$. Si $u \in P'$ alors $0 = u \wedge p' \in P'$, et alors $P' = L$, contradiction. Comme $P' \in \mathbf{P}(L)$ alors par le lemme 1.15:

$$(9)\ F(\nabla P') \in \mathbf{M}(L) \text{ et } (10)\ F(\nabla P') \subseteq P'.$$

Par le lemme 1.22, (II), $\mathbf{p}(L) = \mathbf{M}(L)$, alors (11) $P \in \mathbf{M}(L)$. D'après le lemme 1.16 nous savons que chaque filtre premier d'une algèbre de Łukasiewicz contient un et seulement un Δ-filtre maximal, alors de (9), (10), (11) et (3), on a: (12) $F(\nabla P') = P$.
De (5) on a (13) $\nabla p' \in \nabla P' \subseteq F(\nabla P') = P$. Comme $P \subseteq \varphi(P) = U$ et $P \in \mathbf{M}(L)$, on a d'après le lemme 1.16 $P = F(\nabla U) \subseteq U$.
De (7) on a (14) $\nabla u \in F(\nabla U) = P$, et de (8), (13) et (14): $0 = \nabla 0 = \nabla(u \wedge p') = \nabla u \wedge \nabla p' \in P$, contradiction. Alors $P' \subseteq U = \varphi(P)$.
Supposons que $P' \subset U = \varphi(P)$, alors nous avons $P \subset P' \subset U$, donc $P = \varphi(U) \subset \varphi(P') \subset \varphi(P) = U$. De $\varphi(P') \subset U$, on déduit qu'il existe $u \in U$ tel que $u \notin \varphi(P')$.
Nous savons que P' et $\varphi(P')$ sont comparables. Supposons que $P' \subseteq \varphi(P')$. Comme $u \wedge \sim u \leq u$ alors: (i) $\sim u \wedge \nabla u = u \wedge \sim u \notin \varphi(P')$. De $u \notin \varphi(P')$ on déduit $\sim u \in P'$ et comme $\nabla u \in F(\nabla U) = P \subset P'$, alors $\sim u \wedge \nabla u \in P' \subseteq \varphi(P')$ ce qui est en contradiction avec (i).
Si $\varphi(P') \subseteq P'$, on arrive aussi a une contradiction.
Alors $U = \varphi(P)$ est l'unique filtre premier qui contient a P comme partie propre. $\square$

Corollaire 1.4 *Si $P \in \mathbf{p}(L)$ et $P \notin \mathbf{U}(L)$ alors l'unique filtre propre F qui contient P comme partie propre est $F = \varphi(P)$.*

Dém. Soit F un filtre propre tel que: (1) $P \subset F$, et supposons que $F \notin \mathbf{U}(L)$, alors il existe (2) $U \in \mathbf{U}(L)$ tel que (3) $F \subset U$. De (1) et (3) on a: $P \subset U$, d'où l'on déduit d'après le lemme 1.23 que $U = \varphi(P)$. Soit (4) $x \in U - F$. Comme $F = \bigcap\{P' : P' \in \mathbf{P}(L), F \subseteq P'\}$ et $x \notin F$, alors il existe $P' \in \mathbf{P}(L)$ tel que (5) $F \subseteq P'$ et (6) $x \notin P'$. De (4) et (6) on a (6) $P' \neq U = \varphi(P)$. De (1) et (2): (7) $P \subset P'$. Alors il existe un filtre premier P', diferent de $\varphi(P)$ qui contient P comme partie propre, c'est qui est impossible par le lemme 1.23.

$\square$

Rappellons: Si R est un réticulé distributif fini non trivial, c'est-à-dire avec plus qu'un élément, nous répresenterons par $\Pi = \Pi(R)$ l'ensemble ordonné des éléments premiers de R.

Théorème 1.1 *Si R et $R^{'}$ sont des réticulés distributifs finis, non triviales, telles* $\Pi = \Pi(R),\ \Pi^{'} = \Pi(R^{'})$ *sont des ensembles ordonnés isomorphes alors R et $R^{'}$ sont réticulés isomorphes.*

Dém. Soit $f : \Pi \to \Pi^{'}$ un isomorphisme d'ordre et posons par définition:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ \bigvee\{f(p) : p \in \Pi, p \leq x\}, & \text{si } x \neq 0 \end{cases}.$$

Alors on peut montrer que $H : R \to R^{'}$ est un isomorphisme de réticulé et que $H(p) = f(p)$, pour tout $p \in \Pi$. □

Corollaire 1.5 *Tout réticulé distributif fini R est déterminé , à isomorphisme près, par l'ensemble* $\Pi = \Pi(R)$ *des ses éléments premiers.*

Soit X un ensemble ordonné, un sous-ensemble Y de X s'appelle *section inférieure de X*, si $Y = \emptyset$ ou si verifie *Si $y \in Y$ et $x \leq y$ alors $x \in Y$*. Les sous-ensembles $(x] = \{y \in X : y \leq x\}$ sont des sections inférieures de X.
Nous répresenterons par $\mathbf{S}(X)$ l'ensemble de toutes les sections inférieures de X.

Théorème 1.2 *Si X est un ensemble ordonné fini, il existe un réticulé distributif fini R tel que les ensembles ordonnés X et* $\Pi(R)$ *sont isomorphes.* (G. Birkhoff.)

Dém. Il est bien connue que $(\mathbf{S}(X), \cap, \cup, \emptyset, X)$ est un réticulé distributif avec premier et dernier élément. Comme X est fini alors le réticulé distributif $\mathbf{S}(X)$ est aussi fini.
Il est facile à montrer que $\Pi(\mathbf{S}(X)) = \{(x] : x \in X\}$, et que si nous posons $\beta(x) = (x]$, pour tout $x \in X$ alors β est un isomorphisme d'ordre de X dans $\Pi(\mathbf{S}(X))$. □

Définition 1.4 *Soit X un ensemble ordonné fini. Nous dirons que $x \in X$ est lié à $y \in X$, s'il existe une suite finie $a_1, a_2, \cdots, a_n$ d'éléments de X tels que $a_1 = x, a_n = y$, et a_i est comparable avec a_{i+1}, $1 \leq i \leq n-1$. Pour indiquer que a est comparable avec b, nous écrirons $a \parallel b$, et pour indiquer que x est lié à y nous écrirons $x \approx y$.*

Si $x \neq y \quad x, y \in X$, on peut supposer que les éléments a_i, $\quad 1 \leq i \leq n$, verifient $a_i \neq a_j$, $\ i \neq j$, $\ 1 \leq i, j \leq n$.
Il est bien connu que la relation $\approx$ est une relation d'équivalence définie sur X. Soit $K(x) = \{y \in X : y \approx x\}$ la célule d'équivalence qui contient l'élément $x \in X$. Observons que: Si $y \notin K(x)$, alors y est incomparable avec tous les éléments de $K(x)$.
Soient $K(x_1), K(x_2), \ldots, K(x_n)$ les célules d'equivalence. Il est bien connue que les sous-ensembles $K(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, de X sont des ensembles ordonnés connexes, qu'on peut nommer aussi les *composantes connexes de X*, et que l'ensemble ordonné X est la *somme cardinale* des ensembles ordonnés $K(x_i)$, $\ 1 \leq i \leq n$, c'est-á-dire:

$$X = \sum_{i=1}^{n} K(x_i).$$

Observons encore que les ensembles $K(x_i)$ sont non seulement *disjoints deux à deux*, mais chaque élément (*) $a \in K(x_i)$ est incomparable avec tout $b \in K(x_j)$ si $i \neq j$.
Nous pouvons supposer que les éléments $x_i,\ \ 1 \leq i \leq n$ sont des éléments maximales de l'ensemble ordonné X. En effet chaque $K(x_i)$ est un ensemble ordonné fini, alors il exist $m \in K(x_i)$, m élément maximal de $K(x_i)$. Voyons que m est aussi un élément maximal de X. En effet si $x \in X$ vérifie $m \leq x$, comme $m \in K(x_i)$, alors d'après (*) m est incomparable avec tout élément $y \in K(x_j),\ \ j \neq i$, donc $x \in K(x_i)$ et comme m est un élément maximal de $K(x_i)$ on a $x_i = m$. Cela montre que m est un élément maximal de X. Alors on peut écrire:

$$X = \sum_{i=1}^{n} K(x_i),$$

où les $x_i,\ \ 1 \leq i \leq n$ sont des éléments maximales de l'ensemble ordonné X.

Lemme 1.24 *Si R est un réticulé distributif fini, non trivial, dont l'ensemble ordonné $\Pi = \Pi(R)$ des éléments premiers est isomorphe à l'ensemble ordonné $X = X_1 + X_2$ et si R_i; $i = 1, 2$ est un réticulé distributif dont l'ensemble des éléments premiers est isomorphe a X_i; $i = 1, 2$ alors R* est isomorphe à $R_1 \times R_2$.

Si R est un réticulé distributif fini, alors nous savons que $P \in \mathbf{P}(R)$ si et seulement si $P = F(p) = \{x \in R : p \leq x\}$, où $p \in \Pi = \Pi(R)$.
Soit A est une algèbre de De Morgan, dans ce cas la transformation φ de *Birula-Rasiowa* de $\mathbf{P}(A)$ dans $\mathbf{P}(A)$, induit une transformation ψ de $\Pi = \Pi(A)$ dans Π de la manière suivante: $\psi(p) = q$, si et seulement si $\varphi(F(p)) = F(q)$.
La transformation ψ a les propriétés suivantes:

1) $\psi(\psi(p)) = p$, quelque soit $p \in \Pi$.

2) $p \leq q$ si et seulement si $\psi(q) \leq \psi(p)$, où $p, q \in \Pi$.

Cela signifie que ψ est anti-isomorphisme de l'ensemble ordonné Π sur Π de période 2. Nous dirons que le couple $(\Pi(A), \psi)$ est *le système déterminant* de l'algèbre A.

Définition 1.5 *On appelera espace de Birula–Rasiowa a tout couple (X, α) formé par un ensemble ordonné X et une transformation α de X dans X telle que:*

1) $\alpha(\alpha(x)) = x$, quelque soit $x \in X$.

2) $x \leq y$ si et seulement si $\alpha(y) \leq \alpha(x)$, où $x, y \in X$.

Il est claire que α est une application biunivoque de X sur X, et que le système déterminant d'une algèbre de De Morgan est un espace de Birula–Rasiowa.

Définition 1.6 *Deux espaces de Birula–Rasiowa (X, α), (X', α') seront dits isomorphes s'il existe un isomorphisme d'ordre f de X sur X' tel que $f(\alpha(x)) = \alpha'(f(x))$ pour tout $x \in X$.*

Théorème 1.3 *Si* $(A, \sim)$ *est une algèbre de De Morgan finie, non triviale, et si* $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ *est sont système déterminant alors:*

$$\sim x = \bigvee \{p \in \Pi : \psi(p) \not\leq x\}.$$

[10], [11], [14].

Si nous posons $\Pi_x = \{p \in \Pi : p \leq x\}$ alors L. Monteiro à montré que :

Lemme 1.25 *Si* $(A, \sim)$ *est une algèbre de De Morgan finie, non triviale, et si* $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ *est sont système déterminant alors:*

$$\sim x = \bigvee \{p \in \Pi : p \in \psi(\Pi - \Pi_x)\} = \bigvee \{p : p \in \Pi - \psi(\Pi_x)\} = \bigvee \{\psi(q) : q \in \Pi - \Pi_x\}.$$

Dém. Comme ψ est un bijection alors $\psi(\Pi - \Pi_x) = \psi(\mathcal{C}\Pi_x) = \psi(\Pi) \cap \psi(\mathcal{C}\Pi_x) = \Pi \cap \mathcal{C}\psi(\Pi_x) = \Pi - \psi(\Pi_x)$. Alors: $\sim x = \bigvee\{p \in \Pi : p \in \psi(\Pi - \Pi_x)\} = \bigvee\{p : p \in \Pi - \psi(\Pi_x)\}$.
Comme les conditions (1) $p \in \psi(\Pi - \Pi_x)$, (2) $p = \psi(q)$, $q \in \Pi - \Pi_x$, alors $\sim x = \bigvee\{p \in \Pi : p \in \psi(\Pi - \Pi_x)\} = \bigvee\{\psi(q) : q \in \Pi - \Pi_x\}$.
Nous savons que:

$$F(\sim x) = \bigcap \{P : P \in \mathbf{P}(A), \sim x \in P\} = \bigcap \{F(p) : p \in \Pi(A), \sim x \in F(p)\} =$$

$$\bigcap \{F(p) : p \in \Pi(A), \quad x \notin \varphi(F(p))\} = \bigcap \{F((\psi(q)) : q \in \Pi(A), \quad x \notin \varphi(F(q))\} =$$

$$\bigcap \{F((\psi(q)) : q \in \Pi(A), \quad q \in \Pi - \Pi_x\},$$

et alors $\sim x = \bigvee\{\psi(q) : q \in \Pi - \Pi_x\}$. □

Théorème 1.4 *Si* $(A, \sim)$ *et* $(A', \sim')$ *sont des algèbres de De Morgan finies,non triviales, telles que leurs systèmes déterminants* $(\Pi = \Pi(A), \psi)$, $(\Pi' = \Pi(A'), \psi')$ *soient des espaces de Birula–Rasiowa isomorphes, alors les algèbres de De Morgan* $(A, \sim)$ *et* $(A', \sim')$ *sont isomorphes.*

Dém. Soit $f : \Pi \to \Pi'$ un isomorphisme, c'est-à-dire f est un isomorphisme d'ordre et $f(\psi(p)) = \psi'(f(p))$, pour tout $p \in \Pi$. Nous savons dejá que la transformation $H : A \to A'$ définie comme dans le théorème 1.1 est un isomorphisme de réticulé. Montrons que: (*) $H(\sim x) = \sim H(x)$ pour tout $x \in A$. Si $x = 0$ alors $H(\sim 0) = H(1) = 1 = \sim 0 = \sim H(0)$. Supposons maintenant que $x \neq 0$, alors:

$$H(\sim x) = H(\bigvee \{\psi(q) : q \in \Pi - \Pi_x\} =$$

$$\bigvee \{H(\psi(q)) : q \in \Pi - \Pi_x\} = \bigvee \{f(\psi(q)) : q \in \Pi - \Pi_x\},$$

et

$$\sim H(x) = \bigvee \{\psi'(q') : q' \in \Pi' - \Pi_{H(x)}\}.$$

Soient $U = \{f(\psi(q)) : q \in \Pi - \Pi_x\}$, et $V = \{\psi'(q') : q' \in \Pi' - \Pi_{H(x)}\}$. Montrons que $U = V$, d'où l'on déduit (*).
Soit $u \in U$ alors $u = f(\psi(q))$, où (1) $q \in \Pi - \Pi_x$, alors $u = \psi'(f(q)) = \psi'(q')$ où $q' = f(q) \in \Pi'$. Nous savons que

$$(2)\ \ H(x) = H(\bigvee\{s : s \in \Pi_x\} = \bigvee\{H(s) : s \in \Pi_x\} = \bigvee\{f(s) : s \in \Pi_x\}.$$

Si $q' \in \Pi_{H(x)}$, alors $q' \in \Pi'$ et $q' \leq H(x)$, alors par (2) il existe $s_0 \in \Pi$, (3) $s_0 \leq x$, tel que $f(q) = q' \leq f(s_0)$, et alors :

$$f(\psi(s_0)) = \psi'(f(s_0)) \leq \psi'(f(q)) = f(\psi(q)),$$

et comme f est un isomorphisme d'ordre $\psi(s_0) \leq \psi(q)$, donce (4) $q \leq s_0$.
De (3) et (4) on a $q \leq x$ et comme $q \in \Pi$, $q \in \Pi_x$ contradiction. Alors $q' \in \Pi' - \Pi_{H(x)}$ et alors $u = \psi'(q') \in V$. Reciproquement si $v \in V$, alors $v = \Psi'(q')$ où $q' \in \Pi' - \Pi_{H(x)}$. Comme f est une function surjective alors $q' = f(q)$, où $q \in \Pi$, alors $v = \psi'(f(q)) = f(\psi(q))$. Si $q \in \Pi_x$ alors $q \leq x$, donc $q' = f(q) = H(q) \leq H(x)$ c'est-à-dire $q' \in \Pi_{H(x)}$, contradiction. $\square$

Corollaire 1.6 *Toute algèbre de De Morgan finie, non triviale,* $(A, \sim)$ *est déterminée, à un isomorphisme près, par son système déterminat* $(\Pi = \Pi(A), \psi)$.

Ce dernier résultat a été énoncé en 1960, [10] et sa démonstration a été présentée dans notre cours de 1962, [11] (voir aussi [14]) à l'Universidad Nacional del Sur. La démonstration que nous avons presentée était d'ailleurs très compliquée.

Théorème 1.5 *Si* (X, α) *est un espace de Birula–Rasiowa fini, il existe une algèbre de De Morgan* $(A, \sim)$ *finie, telle que son système déterminat* $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ *est un espace de Birula–Rasiowa isomorphe à* (X, α).

Dém. Nous savons que $\mathbf{S}(X)$ est un réticulé distributif tel que $\Pi(\mathbf{S}(X))$ est un ensemble ordonné isomorphe a X. La transformation $\alpha : X \to X$ induit une transformation $\psi : \Pi(\mathbf{S}(X)) \to \Pi(\mathbf{S}(X))$ de la manière suivante: $\psi((x]) = (\alpha(x)]$, pour tout $x \in X$.
Pour chaque section inférieure Y de X posons (voir lemme 1.25):

$$\sim Y = \bigcup\{\psi((x]) : (x] \in \Pi(\mathbf{S}(X)) - \Pi_Y\}.$$

Alors il est facile a voir que $\sim Y = X - \alpha(Y)$. Nous allons montrer que $\sim Y$ est une section inférieure de X. En effet si $\sim Y = X - \alpha(Y) = \emptyset$, alor $\sim Y$ est une section inférieure. Si $\sim Y = X - \alpha(Y) \neq \emptyset$, soit (1) $p \in X - \alpha(Y)$, et $x \in X$ tel que $x \leq p$. Donc (2) $\alpha(p) \leq \alpha(x)$. Si $x \notin X - \alpha(Y)$, alors $x \in \alpha(Y)$ c'est-à- dire $x = \alpha(y')$, où $y' \in Y$, donc (3) $\alpha(x) = y' \in Y$. Comme $Y \in \mathbf{S}(X)$ alors d'après (1) et (2) on déduit que $\alpha(p) \in Y$ et alors $p = \alpha(\alpha(p)) \in \alpha(Y)$, c'est qui est en contradiction avec (1). On a encore que:

1) $\sim X = X - \alpha(X) = X - X = \emptyset$.

2) $\sim(\sim Y) = X - \alpha(\sim Y) = X - \alpha(X - \alpha(Y))$. Alors comme α est une bijection de période 2, on a: $\sim(\sim Y) = X - (\alpha(X) - Y = X - (X - Y) = X \cap Y = Y$.

3) Comme α est biunivoque alors $\sim(Y \cap Z) = X - \alpha((Y \cap Z) = X - (\alpha(Y) \cap \alpha(Z)) = (X - \alpha(Y)) \cup (X - \alpha(Z)) = \sim Y \cup \sim Z$.

Alors $(\mathbf{S}(X), \sim)$ est une algèbre de De Morgan. Voyons que les espaces de Birula–Rasiowa (X, α) et $(\Pi(\mathbf{S}(X)), \psi)$ sont isomorphes. Nous savons dejá que la transformation $\beta : X \to \Pi(\mathbf{S}(X))$, définie par $\beta(x) = (x],\ \ x \in X$ est un isomorphisme d'ordre. D'après la définition de ψ, on a: $\beta(\alpha(x)) = (\alpha(x)] = \psi((x]) = \psi(\beta(x))$, ce qui termine la démonstration. □

Soit A une algèbre de De Morgan finie, non triviale, $\Pi = \Pi(A)$ l'ensemble de ses éléments premiers et $\Pi = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où $X_i\ \ 1 \leq i \leq n$, où X_i sont les composantes connexes de Π. En général si $p \in X_i$ on ne peut pas affirmer que $\psi(p) \in X_i$, mais dans les algèbres de Kleene finies nous avons:

$$\psi(X_i) = X_i, \ \ 1 \leq i \leq n,$$

car $\psi(p) \parallel p$ pour tout $p \in \Pi$.

Soit A une algèbre de De Morgan finie, non triviale, $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ son système déterminant et $\Pi = \sum_{i=1}^{n} K(p_i)$. Il est claire que si $p, q \in \Pi,\ p \approx q$, alors $\psi(p) \approx \psi(q)$, donc:

I) si $\psi(p) \in K(p)$ on a $\psi(K(p)) = K(p)$.

II) si $q = \psi(p) \notin K(p)$ on a $\psi(K(p)) = K(q)$, et $\psi(K(p) + K(q)) = K(p) + K(q)$.

Nous dirons que $(K(p), \psi)$ et $(K(p) + K(q), \psi)$ sont des composantes ψ-connexes de (Π, ψ), et que les espaces de Birula–Rasiowa

$$(K(p), \psi), \ \ (K(p) + K(q), \psi)$$

sont indécomposables.

Dans le cas où A est une algèbre de Kleene toute composante connexe de $\Pi(A)$ est une composante ψ-connexe de $\Pi(A)$.

Lemme 1.26 *Si A est une algèbre de De Morgan, non triviale, dont leur système déterminant $(\Pi = \Pi(R), \psi)$ est isomorphe à l'espace de Birula– Rasiowa (X, α) où $X = X_1 + X_2$, $\alpha(X_1) = X_1,\ \alpha(X_2) = X_2$ et si $A_i;\ i = 1, 2$ est une algèbre de De Morgan dont le système déterminant $(\Pi(A)_i, \psi_i)$ est isomorphe a $(X_i, \alpha);\ i = 1, 2$, alors A est isomorphe à $A_1 \times A_2$.*

Définition 1.7 *On appelera espace de Kleene a toute espace de Birula–Rasiowa (X, α) où chaque $x \in X$ est comparable avec $\alpha(x)$.*

Lemme 1.27 *Pour qu'une algèbre de De Morgan finie A soit une algèbre de Kleene il faut et il suffit que son système déterminant $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ soit un espace de Kleene.*

Dém. Il est claire que la condition est nécessaire. Voyons que est suffisante. Si $y \wedge \sim y = 0$, alors la condition de Kleene est verifiée. Supposons que $y \wedge \sim y \neq 0$. Por voir que la condition de Kleene est verifiée il est suffisant de montrer que:

$$\{p \in \Pi : p \ \leq y \wedge \sim y\} \subseteq \{q \in \Pi : q \ \leq z \vee \sim z\}$$

Soit $p \in \Pi$ tel que (1) : $p \leq y \wedge \ \sim y$. Par hyphotèse (2) $\psi(p) \leq p$, or (3) $p \leq \psi(p)$. Si (2) est verifiée alors d'après (1) on a : $\psi(p) \leq y \wedge \ \sim y$, alors en particulier $\psi(p) \leq \ \sim y = \bigvee\{\psi(q) : q \in \Pi - \Pi_y\}$, d'où l'on déduit, car $\psi(p) \in \Pi$, que $\psi(p) \leq \psi(q_0)$, où $q_0 \in \Pi - \Pi_y$. Alors $q_0 \leq p$ et d'après (1) on a $q_0 \leq y \wedge \ \sim y \leq y$, donc $q_0 \in \Pi_y$, contradiction. Alors la condition (3) doit être verifiée. Si $\psi(p) \not\leq z$ alors $\psi(p) \in \Pi - \Pi_z$, donc (4) : $\psi(p) \leq \sim z \ \leq z \vee \sim z$. De (3) et (4) on a $p \leq z \vee \sim z$. Si $\psi(p) \leq z$, alors $p \leq z \leq z \vee \sim z$. $\square$

Théorème 1.6 *Si $(A, \sim)$ et $(A', \sim')$ sont des algèbres de Kleene finies, non triviales, telles que leurs systèmes déterminants $(\Pi = \Pi(A), \psi)$, $(\Pi' = \Pi(A'), \psi')$ soient des espaces de Kleene isomorphes, alors les algèbres de Kleene $(A, \sim)$ et $(A', \sim')$ sont isomorphes.*

Corollaire 1.7 *Toute algèbre de Kleene finie, non triviale, $(A, \sim)$ est déterminée, à un isomorphisme près, par son système déterminat $(\Pi = \Pi(A), \psi)$.*

Théorème 1.7 *Si (X, α) est un espace de Kleene fini, il existe une algèbre de Kleene $(A, \sim)$ finie, telle que son système déterminat $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ est un espace de Kleene isomorphe à (X, α).*

Observation 1.2 *1) Si $X = \{x\}$, alors $\alpha(x) = x$, et $A = \{0, 1\}$, où $0 < 1$, $\sim 0 = 1$ et $\sim 1 = 0$.*

2) Si $X = \{x, y\}$, où $x < y$, $\alpha(x) = y$ et $\alpha(y) = x$, alors $A = \{0, c, 1\}$, où $0 < c < 1$, $\sim 0 = 1$, $\sim 1 = 0$, et $\sim c = c$.

Soit L une algèbre de Łukasiewicz finie, alors $(\mathbf{P}(L), \subseteq)$ est un ensemble ordonné fini, donc:

$$\mathbf{P}(L) = \sum_{i=1}^{n} K(P_i),$$

où les P_i, $1 \leq i \leq n$ sont des éléments maximales de l'ensemble ordonné $(\mathbf{P}(L), \subseteq)$. Nous allons montrer que $K(P) = \{P, \varphi(P)\}$, quelque soit $P \in \mathbf{P}(L)$, P élément maximal de $\mathbf{P}(L)$, c'est-à-dire $P \in \mathbf{U}(L)$. Comme $U \parallel \varphi(U)$, quelque soit $U \in \mathbf{U}(L)$, alors $K(U) = \{U, \varphi(U), \ldots\}$.
Il est claire que $\mathcal{V} = \{U \in \mathbf{U}(L) : U \in \mathbf{p}(L)\}$, $\mathcal{W} = \{U \in \mathbf{U}(L) : U \notin \mathbf{p}(L)\}$, est une bipartition de l'ensemble $\mathbf{U}(L)$.

Si $U \in \mathcal{V}$, (1) $U \in \mathbf{U}(L)$ et (2) $U \in \mathbf{p}(L)$. Comme L est une algèbre de Kleene alors (3) $U \subseteq \varphi(U)$ or (4) $\varphi(U) \subseteq U$. De (1) et (4) or de (2) et (4) on a: $U = \varphi(U)$. Soit $P \in K(U)$, où $U \in \mathcal{V}$, alors il existe une suite $P_1, P_2, \ldots, P_n$ d'éléments de $\mathbf{P}(L)$ tels que: $P_1 = U,\ \ P_n = P$, et $P_i \parallel P_{i+1},\ \ P_i \neq P_{i+1}\ \ 1 \leq i \leq n-1$. Par hypothèse $U \parallel P_2$, alors si $U \subseteq P_2$, comme U est un ultrafiltre on a: $P_2 = U$. Si $P_2 \subseteq U$, comme U est un filtre premier minimal on a: $P_2 = U$. Alors $P = U$, quelque soit $P \in K(U)$, donc $K(U) = \{U\}$.

Si $U \in \mathcal{W}$, (1) $U \in \mathbf{U}(L)$ et (2) $U \notin \mathbf{p}(L)$, alors il existe (3) $M \in \mathbf{p}(L)$ tel que (4) $M \subset U$, alors $M \in K(U)$. D'après (4) nous avons que $M \notin \mathbf{U}(L)$. Par le corollaire 1.4 nous savons que (6) $\varphi(M)$ est l'unique filtre propre qui contient a M comme partie propre. De(5) et (6) on déduit que $U = \varphi(M)$, c'est-à-dire $M = \varphi(U)$. Voyons que dans ce cas:

Lemme 1.28 *i) Si $Q \parallel U$ et $Q \neq U$ alors $Q = M$.*

ii) Si $Q \parallel M$ et $M \neq Q$ alors $Q = U$.

iii) Si $U \in \mathcal{W}$ alors $K(U) = \{U, \varphi(U)\}$.

Dém.

i) Comme $Q \parallel U,\ \ Q \neq U$ et U est un ultrafiltre de L alors $Q \subset U$.
Si $Q \notin \mathbf{p}(L)$, alors il existe $P_1 \in \mathbf{p}(L)$ tel que $P_1 \subset Q \subset U$, c'est qui est impossible par le corollaire 1.3. Alors nous avons $Q \in \mathbf{p}(L)$, donc: $Q,\ M \subset U,\ \ Q,\ M \in \mathbf{p}(L)$, $Q, M \notin \mathbf{U}(L)$ et alors par le corollaire 1.4, $Q = M = \varphi(M)$.

ii) D'après $Q \parallel M$, nous avons $Q \subseteq M$ or $M \subseteq Q$, et comme $Q \neq M$, nous avons plus précisement $Q \subset M$ or $M \subset Q$. Mais M est un filtre premier minimal alors on doit avoir $M \subset Q$. De (4) on déduit que $M \notin \mathbf{U}(L)$ et comme $M \in \mathbf{p}(L)$ on déduit par le corollaire 1.4 que $Q = U$.

iii) Soit $U \in \mathcal{W}$ et $P \in K(U)$, alors il existe une suite $P_1, P_2, \ldots, P_n$ d'éléments de $\mathbf{P}(L)$ tels que: $P_1 = U,\ \ P_n = P$, et $P_i \parallel P_{i+1},\ \ P_i \neq P_{i+1}\ \ 1 \leq i \leq n-1$. Comme $P_2 \parallel U$, $P_2 \neq U$, alors d'après (i) $P_2 = M$. Comme $M = P_2 \parallel P_3$ et $P_2 \neq P_3$, alors d'après (ii) on a $P_3 = U$. Alors $K(U) = \{U, \varphi(U)\}$.

$\square$

Alors si L est une algèbre de Łukasiewicz finie les composantes connexes de $\mathbf{P}(L)$ sont de la forme (A) $\{F(p)\} = \{\varphi(F(p))\}$ ou de la forme (B) $\{F(p), \varphi(F(p))\}$, où $p \in \Pi$, p élément minimal de Π. Alors l'ensemble ordonné Π est la somme cardinale d'ensembles ordonnés Π_i, $1 \leq i \leq n$ où chaque Π_i est une châine avec une ou deux éléments. Observons encore que dans le cas (A), comme $F(p) = \varphi(F(p))$ alors $\psi(p) = p$, et dans le cas (B) $F(q) = \varphi(F(p)) \subset F(p)$ alors $p < q$ et $\psi(q) = p$.

Observons que si L est une algèbre de Łukasiewicz on a:

$$\nabla x = \bigwedge\{b \in B(L) : x \leq b\}; \quad \Delta x = \bigvee\{b \in B(L) : b \leq x\}, \ \ x \in L$$

Théorème 1.8 *Si A, $A^{'}$ sont des algèbres de Łukasiewicz finies, non triviales, telles que leurs systèmes déterminants* $(\Pi = \Pi(A), \psi)$, $(\Pi^{'} = \Pi(A^{'}), \psi^{'})$ *soient des espaces de Kleene isomorphes, alors les algèbres de Łukasiewicz A et $A^{'}$ sont isomorphes.*

Dém. Nous savons que la fonction $H : A \to A^{'}$ définie comme dans le théorème 1.1 est un isomorphisme de l'algèbre de Kleene A dans l'algèbre de Kleene $A^{'}$ (voir théorèmes 1.4, 1.6).
Voyons que H vérifie (*) $H(\nabla x) = \nabla H(x)$, pour tout $x \in A$. Il est claire que si $x = 0$, (*) est vérifiée. Supposons que $x \neq 0$. $H(\nabla x) = H\bigwedge\{b : b \in B(K),\ x \leq b\} = \bigwedge\{H(b) : b \in B(K),\ x \leq b\}$ et $\nabla H(x) = \bigwedge\{b^{'} : b^{'} \in B(L'),\ H(x) \leq b'\}$. Montrons que $\{H(b) : b \in B(K),\ x \leq b\} = \{b^{'} : b^{'} \in B(L'),\ H(x) \leq b'\}$, dóu l'on déduit (*).
Soit $y \in \{H(b) : b \in B(K),\ x \leq b\}$, donc $y = H(b)$, où $b \in B(K),\ x \leq b$. Comme H est un isomorphisme de réticulé et $b \in B(L)$, alors $y = H(b) \in B(L')$ et $H(x) \leq H(b) = y$. Reciproquement si $b^{'} \in B(L')$ et $H(x) \leq b'$, comme H est surjective $b^{'} = H(b)$, où $b \in B(L)$, nous avons ainsi que $H(x) \leq H(b)$, d'où l'on déduit que $x \leq b$. □

Corollaire 1.8 *Toute algèbre de Łukasiewicz finie, non triviale, est déterminée , à un isomorphisme près, par son système déterminant.*

Rappellons la définition et le résultat suivant (voir [3], [4]) : Si K est une algèbre de Kleene, nous dirons que l'ensemble $B(K)$ des éléments booléens de K, qui est une algébre de Boole, est:

- *relativement complète supérieurement* si vérifiee: Si $x \in K$ alors il existe $\bigwedge\{b \in B(K) : x \leq b\}$ dans $B(K)$ et $\nabla x = \bigwedge\{b \in B(K) : x \leq b\}$.
- *séparateure* si vérifie: Si $x, y \in K$ et $y \not\leq x$, alors il existe $b \in B(K)$ tel que $x \leq b$ and $y \not\leq b$, or il existe $b' \in B(K)$ tel que $b' \leq y$ and $b' \not\leq x$.

Théorème 1.9 *Si K est une algèbre de Kleene telle que la famille $B(K)$ de ses éléments booléens est relativement complète supérieurement et séparateure, alors il existe une unique estructure d'algèbre de Łukasiewicz sur K,* [3].

Observons que les opérations de possibilité et de nécéssité sont définies par:

$$\nabla x = \bigwedge\{b \in B(K) : x \leq b\}; \quad \Delta x = \bigvee\{b \in B(K) : b \leq x\}, \ \ x \in K$$

Lemme 1.29 *Si K est une algèbre de Kleene finie, non triviale, dont leur système déterminant* $(\Pi = \Pi(K), \psi)$ *est isomorphe à l'espace de Kleene* (X, α) *où* $X = X_1 + X_2$, *(alors* $\alpha(Xi) = X_i,\ i = 1, 2$*) et si* K_i $i = 1, 2$ *est une algèbre de Kleene dont le système déterminant* $(\Pi(K_i), \psi_i)$ *est isomorphe a* (X_i, α), $i = 1, 2$ *alors K est isomorphe à* $K_1 \times K_2$.

Lemme 1.30 *Si* K_1, K_2 *sont des algèbres de Kleene finies et* $B(K_1), B(K_2)$ *sont relativement complètes supérieurement et séparateures, alors* $K_1 \times K_2$ *est une algèbre de Kleene et* $B(K_1 \times K_2)$ *est relativement complète supérieurement et séparateure.*

Théorème 1.10 *Si* (X, α) *est un espace de Kleene fini tel que,* $X = \sum_{i=1}^{t} Y_i$, *et*

$$Y_i = \begin{cases} \{y_i\},\ \alpha(y_i) = y_i, & \text{si } 1 \leq i \leq s, \\ \\ \{z_i, w_i\},\ z_i < w_i,\ \alpha(z_i) = w_i,\ \alpha(w_i) = z_i, & \text{si } s+1 \leq i \leq t. \end{cases}$$

il existe une algèbre de Łukasiewicz A finie, telle que son système déterminant $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ *est un espace de Kleene isomorphe à* (X, α)

Dém. Soit A_i, $1 \leq t$, l'algèbre de Kleene telle que $\Pi(A_i)$ est isomorphe a Y_i, alors (voir observation 1.2):

$$A_i = \begin{cases} \{0_i, 1_i\},\ \sim 0_i = 1_i, & \text{si } 1 \leq i \leq s, \\ \\ \{0_i, t_i, 1_i\},\ \sim 0_i = 1_i,\ \sim t_i = t_i, & \text{si } s+1 \leq i \leq t. \end{cases}$$

Donc

$$\Pi(A_i) = \begin{cases} \{1_i\}, & \text{si } 1 \leq i \leq s, \\ \\ \{t_i, 1_i\}, & \text{si } s+1 \leq i \leq t. \end{cases}$$

Nous avons ainsi que $A = \prod_{i=1}^{t} A_i$ est une algèbre de Kleene.

$$\text{Comme } B(A_i) = \begin{cases} A_i, & \text{si } 1 \leq i \leq s, \\ \\ \{0_i, 1_i\}, & \text{si } s+1 \leq i \leq t, \end{cases}$$

sont des ensembles relativement complètes supérieurement et séparateurs alors d'après le lemme 1.30, $B(A)$ est un ensemble relativement complète supérieurement et séparateur, donc d'après le théorème 1.9 il existe une unique estructure d'algèbre de Łukasiewicz sur A.
Montrons que $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ et (X, α) sont espaces de Kleene isomorphes. En effet il est bien connue que:

$$\Pi(A) = \{(a_1, \ldots, a_s, a_{s+1}, \ldots, a_t) : \text{oú } a_i \in \Pi(A_i) \text{ et } a_j = 0,\ j \neq i,\ \ 1 \leq j \leq t\}.$$

Soient h_i, $1 \leq i \leq t$ isomorphismes de Y_i sur $\Pi(A_i)$. Il est facile a voir que la transformation $\psi : \Pi(A) \to \Pi(A)$ est définie de la maniére suivante:
Si $p = (a_1, \ldots, a_s, a_{s+1}, \ldots, a_t) \in \Pi(A)$ alors $a_i \in \Pi(A_i)$ et $a_j = 0,\ j \neq i,\ \leq j \leq t$. Alors $\psi(p) = (d_1, \ldots, d_s, d_{s+1}, \ldots, d_t)$, où $d_j = 0$ si $1 \leq j \leq t,\ j \neq i$, et $d_i = h_i(\alpha(x))$, où $x \in Y_i$ et $h_i(x) = a_i$.
Si $x \in X$, alors $x \in Y_i$, où $1 \leq i \leq t$, posons par définition $H(x) = a \in \Pi(A)$, où $a_j = 0$ si $j \neq i$ et $a_i = h_i(x)$. Il est facile a voir que H est un isomorphisme d'ordre de X sur $\Pi(A)$. En outre $H(\alpha(x)) = \psi(H(x))$. En effet si $x \in Y_i$ alors $\alpha(x) \in Y_i$, donc $H(\alpha(x)) = a \in \Pi(A)$, où $a_j = 0$ si $j \neq i$ et $a_i = h_i(\alpha(x))$, et comme la composante i de $H(x)$ est $h_i(x)$, alors la composante i de $\psi(H(x)$ est $h_i(\alpha(y))$ où $y \in Y_i$ et $h_i(y) = h_i(x)$, donc $y = x$ et alors $h_i(\alpha(y)) = h_i(\alpha(x))$, et les autres composantes sont égales a 0, alors $H(\alpha(x)) = \psi(H(x))$. $\square$

2 Représentation d'une algèbre de Łukasiewicz trivalente par une algèbre de Łukasiewicz trivalente d'ensembles

Définition 2.1 *Un système* $(M, \wedge, \vee, -, 1, \exists)$ *sera dit une algèbre de Boole monadique, si le système* $(M, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ *est une algèbre de Boole* A *et* $\exists$ *est une application de* A *dans* A *tel que:*

E1) $\exists 0 = 0,$ *où* $0 = -1$.

E2) $x = x \wedge \exists x,$

E3) $\exists(x \wedge \exists y) = \exists x \wedge \exists y.$

A propos de cette notion voir [5], [6]. Nous dirons aussi que $(M, \exists)$ ou que M est une algèbre de Boole monadique.
Nous dirons avec P. Halmos que $\exists$ est un *quantificateur existentiel* définie sur M. Le *quantificateur universel* $\forall$, est définie par l'égalité $\forall x = -\exists - x$.

Soit L une algèbre de Łukasiewicz trivalente, $E = \mathbf{P}(L)$ et et pour chaque $x \in L$ posons $\mathcal{S}(x) = \{P \in E : x \in P\}$. Alors la transformation $\mathcal{S}$, que nous appellons *la transformation de Stone*, est une fonction de L dans l'ensemble de toutes les sous-ensembles de E c'est-à-dire dans l'ensemble 2^E. Avec $\mathcal{C}X$ nous répresenterons le complèment de l'ensemble X par rapport a l'ensemble E. Il est bien connue que : $(2^E, \cap, \cup, \mathcal{C}, E)$ est une algèbre de Boole et d'après les résultats de G. Birkhoff que:

a) $\mathcal{S}(0) = \emptyset,$

b) $\mathcal{S}(1) = E,$

c) $\mathcal{S}(x \wedge y) = \mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y),$

d) $\mathcal{S}(x \vee y) = \mathcal{S}(x) \cup \mathcal{S}(y),$

et que le réticulé distributif L est isomorphe a $L' = \mathcal{S}(L)$.

Pour chaque $X \subseteq E$, posons $\sim X = \mathcal{C}\varphi(X)$, où φ est la *transformation de Birula-Rasiowa.* Comme φ est une bijection de E, alors:

Lemme 2.1 *1)* $\varphi(\mathcal{C}X) = \mathcal{C}\varphi(X)$, *pour tout* $X \subseteq E$.

2) $\varphi(X \cap Y) = \varphi(X) \cap \varphi(Y)$, *quelques soient* $X, Y \subseteq E$.

3) $\varphi(X \cup Y) = \varphi(X) \cup \varphi(Y)$, *quelques soient* $X, Y \subseteq E$.

Lemme 2.2 *1)* $\sim\sim X = X$, *pour tout* $X \subseteq E$.

2) $\sim (X \cap Y) = \sim X \cup \sim Y$, *quelques soient* $X, Y \subseteq E$.

3) $\mathcal{S}(\sim x) = \sim \mathcal{S}(x)$, *quelque soit* $x \in L$.

4) $\sim E = \emptyset$. [2]

Dém.

1) $\sim\sim X = \mathcal{C}\varphi(\sim X) = \mathcal{C}\varphi(\mathcal{C}\varphi(X)) = \mathcal{C}\mathcal{C}\varphi(\varphi(X)) = X$.

2) $\sim (X \cap Y) = \mathcal{C}\varphi(X \cap Y) = \mathcal{C}[(\varphi(X) \cap \varphi(Y)] = \mathcal{C}\varphi(X) \cup \mathcal{C}\varphi(Y) = \sim X \cup \sim Y$.

3) Il est facile a voir que les conditions suivantes sont equivalentes: (a) $P \in \varphi(\mathcal{S}(x))$, (b) $\varphi(P) \in \mathcal{S}(x)$, (c) $x \in \varphi(P) = \mathcal{C} \sim P$, (d) $x \notin \sim P$, (e) $\sim x \notin P$, (f) $P \notin \mathcal{S}(\sim x)$, (g) $P \in \mathcal{C}\mathcal{S}(\sim x)$. Donc $\mathcal{C}\mathcal{S}(\sim x) = \varphi(\mathcal{S}(x))$, et alors $\mathcal{S}(\sim x) = \mathcal{C}\varphi(\mathcal{S}(x)) = \sim \mathcal{S}(x)$.

4) $\sim E = \mathcal{C}\varphi(E) = \varphi(\mathcal{C}E) = \varphi(\emptyset) = \emptyset$.

□

Alors le système $(2^E, \cap, \cup, \sim, E)$ est une algèbre de De Morgan et $(\mathcal{S}(L), \cap, \cup, \sim, E)$ est une sous-algèbre de De Morgan de 2^E.

Considérons l'opération $\exists$ définie sur 2^E par:

i) $\exists\emptyset = \emptyset$,

ii) Si $\emptyset \subset X \subseteq E$, $\exists X = \bigcup_{P \in X} \{P, \varphi(P)\}$.

Observons que : 1) Si $\emptyset \subset X \subseteq E$, $\exists X = \bigcup_{P \in X} \{P, \varphi(P)\} = \bigcup_{P \in X} \{P\} \cup \bigcup_{P \in X} \{\varphi(P)\} = X \cup \varphi(X)$.

2) Si X = {P} où $P \in E$, alors $\exists\{P\} = \{P, \varphi(P)\}$. Nous notérons $\exists P$ ou lieu de $\exists\{P\}$. Observons encore que $\exists\varphi(P) = \exists P$.

Lemme 2.3 *iv)* $X \subseteq \exists X$, *pour tout* $X \subseteq E$.

v) $\exists(X \cap \exists Y) = \exists X \cap \exists Y$, *quels que soient* $X, Y \subseteq E$.

Dém.

iv) $\exists X = X \cup \varphi(X) \supseteq X$.

v) $\exists(X \cap \exists Y) = (X \cap \exists Y) \cup \varphi(X \cap \exists Y) = (X \cap \exists Y) \cup \varphi(X \cap (Y \cup \varphi(Y)) = (X \cap \exists Y) \cup (\varphi(X) \cap (\varphi(Y) \cup Y)) = (X \cap \exists Y) \cup (\varphi(X) \cap \exists Y) = (X \cup \varphi(X)) \cap \exists Y = \exists X \cap \exists Y$.

□ donc le système $(2^E, \cap, \cup, \mathcal{C}, E, \exists)$ est une algèbre de Boole monadique. Rappelons que le *cuantificateur universel* est définie, sur 2^E, par:

vi) $\forall X = \mathcal{C}\exists\,\mathcal{C}X$, pour tout $X \subseteq E$.

Lemme 2.4 *L1)* $\sim X \cup \exists X = E$, *quelque soit* $X \subseteq E$,

L2) $\sim X \cap X = \sim X \cap \exists X$, *quelque soit* $X \subseteq E$.

Dém.

1) $\sim X \cup \exists X = \mathcal{C}\varphi(X) \cup X \cup \varphi(X) = E$.

2) $\sim X \cap \exists X = \mathcal{C}\varphi(X) \cap (X \cup \varphi(X)) = X \cap \mathcal{C}\varphi(X) = \sim X \cap X$.

□

Lemme 2.5 $\exists\mathcal{S}(\nabla x) = \mathcal{S}(\nabla x)$, *quelque soit* $x \in L$.

Dém. Si $x \in L$, alors $\nabla x \in L$ donc $\mathcal{S}(\nabla x) \in L'$. Par le lemme 2.3,iv) nous savons que: $\mathcal{S}(\nabla x) \subseteq \exists\mathcal{S}(\nabla x)$. Soit $P \in \exists\mathcal{S}(\nabla x) = \bigcup_{Q\in\mathcal{S}(\nabla x)} \exists Q = \bigcup_{Q\in\mathcal{S}(\nabla x)} \{Q, \varphi(Q)\}$. Alors il existe $Q \in \mathcal{S}(\nabla x)$ tel que $P \in \{Q, \varphi(Q)\}$, ce qui est équivalent a dire qu'il existe (*) $Q \in \mathcal{S}(\nabla x)$ tel que: (a) $P = Q$, ou (b) $P = \varphi(Q)$. Dans le premier cas nous avons que $P \in \mathcal{S}(\nabla x)$. Si (b) est verifiée, supposons que $\varphi(Q) = P \notin \mathcal{S}(\nabla x)$, c'est-à-dire $\nabla x \notin P = \varphi(Q) = \mathcal{C} \sim Q$ alors $\nabla x \in \sim Q$, donc $\sim \nabla x \in Q$, et alors d'après le lemme 1.14 b), $\nabla x \notin Q$, c'est qui est en contradiction avec (*). □

Lemme 2.6 $\exists\mathcal{S}(x) = \mathcal{S}(\nabla x)$, *quelque soit* $x \in L$.

Dém. Comme $x \le \nabla x$, alors $\mathcal{S}(x) \subseteq \mathcal{S}(\nabla x)$, donc en tenant compte du lemme 2.1: $\exists(\mathcal{S}(x)) \subseteq \exists\mathcal{S}(\nabla x) = \mathcal{S}(\nabla x)$.
Soit $P \in \mathcal{S}(\nabla x)$, c'est-à-dire (i) $\nabla x \in P$. Nous savons que $\varphi(P)$ est comparable avec P. Supposons que (ii) $\varphi(P) \subseteq P$. Mais nous avons vue que $\varphi(P)$ est l'unique Δ-filtre maximal contenue dans P, et que $P \cap B(L) \subseteq \varphi(P)$. Donc de (i) on déduit $\nabla x \in \varphi(P)$. Alors $\varphi(P)$ est un filtre premier de prèmiere espèce tel que $\nabla x \in \varphi(P)$, alors par le lemme 1.19, $x \in P$, donc $P \in \mathcal{S}(x) \subseteq \exists\mathcal{S}(x)$, et alors $P \in \exists\mathcal{S}(x)$.
Si $P \subseteq \varphi(P)$, comme P est un filtre premier de prèmiere espèce et $\nabla x \in P$, en tenant compte du lemme 1.19 on a $x \in \varphi(P)$, c'est-à-dire $\varphi(P) \in \mathcal{S}(x)$, donc $\exists\varphi(P) \subseteq \exists\mathcal{S}(x)$. Mais $\exists\varphi(P) = \{\varphi(P), P\} \subseteq \exists\mathcal{S}(x)$. Alors $P \in \exists\mathcal{S}(x)$. □

Lemme 2.7 $\exists(X \cap Y) = \exists X \cap \exists Y$, *quels que soient* $X, Y \in L' = \mathcal{S}(L)$.

Dém. De $X, Y \in L'$, on a $X = \mathcal{S}(x)$, et $Y = \mathcal{S}(y)$, où $x, y \in L$. Donc $\exists(X \cap Y) = \exists(\mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y)) = \exists(\mathcal{S}(x \wedge y)) = \mathcal{S}(\nabla(x \wedge y)) = \mathcal{S}(\nabla x \wedge \nabla y) = \mathcal{S}(\nabla x) \cap \mathcal{S}(\nabla y) = \exists\mathcal{S}(x) \cap \exists\mathcal{S}(y) = \exists X \cap \exists Y$. □
Comme $(L' = \mathcal{S}(L), \cap, \cup, \sim, E)$ est une algèbre de De Morgan, d'après les lemmes 2.4 et 2.7 on déduit que $(L' = \mathcal{S}(L), \cap, \cup, \sim, \exists, E)$ est une algèbre de Łukasiewicz trivalente. alors, sont valables, les suivantes règles de calcul:

Lemme 2.8 *Quels que soient $X, Y \in L'$, on a:*

1) $\exists(X \cup Y) = \exists X \cup \exists Y$.

2) $\forall(X \cup Y) = \forall X \cup \forall Y$.

3) $\forall(X \cap Y) = \forall X \cap \forall Y$.

3 Caractère Universel de la construction $\mathcal{L}$

Soit $(M, \exists)$ une algèbre de Boole monadique. Nous avons indiquée une construction $\mathcal{L}$ qui permettre construire a partir de M, une algèbre de Łukasiewicz trivalente $\mathcal{L}(M)$. ([15], [21].) Rappelons certains details de cette construction.

Définition 3.1 *Si $x, y \in M$ posons:*

1) $x \to y = \exists\ -x \vee y$;

2) $x \rightarrowtail y = (x \to y) \wedge (-y \to -x)$.

3) $x \sqcup y = (x \rightarrowtail y) \rightarrowtail y = \forall x \vee y \vee (x \wedge \forall - y)$;

4) $x \sqcap y = -(-x \sqcup\ - y) = \exists x \wedge y \wedge (x \vee \exists - y)$.

Lemme 3.1 *Si $x, y \in M$, alors* (voir [21])

1) $\exists(x \sqcup y) = \exists x \vee \exists y$.

2) $\exists(x \sqcap y) = \exists x \wedge \exists y$.

3) $\forall(x \sqcup y) = \forall x \vee \forall y$.

4) $\forall(x \sqcap y) = \forall x \wedge \forall y$.

Définition 3.2 *Nous dirons que l'élément x est congruent à l'élément y et nous écrirons $x \equiv y$ si $x \rightarrowtail y = 1$ et $y \rightarrowtail x = 1$, ou, ce que est équivalent, si $\exists x = \exists y$ et $\forall x = \forall y$.*

Lemme 3.2 *La relation "$\equiv$" définie sur M est une relation d'équivalence compatible avec les opérations, $-, \exists, \sqcap, \sqcup$. Soit $\mathcal{L}(M) = M/\equiv$ l'ensemble quotient de M par "$\equiv$", et représentons par $|m|$ la classe d'équivalence qui contient l'élément $m \in M$. Si nous posons $\mathbf{1} = |1|$; $\sim |x| = |-x|$; $\nabla|x| = |\exists x|$; $|x| \sqcap |y| = |x \sqcap y|$; $|x| \sqcup |y| = |x \sqcup y|$, alors le système $(\mathcal{L}(M), \sqcup, \sqcap, \sim, \nabla, \mathbf{1})$ est une algèbre de Łukasiewicz trivalente.* [15], [21].

Nous allons demontrer le théorème suivant:

Théorème 3.1 *Etant donnée une algèbre de Łukasiewicz trivalente L, il existe une algèbre de Boole monadique M tel que $\mathcal{L}(M)$ est isomorphe a L.* ([16], pag 206), [18].

Il est bien connue que:

Lemme 3.3 *Si A est une algèbre de Boole et R un sous-réticulé de A, tel que $0, 1 \in R$, alors :*

$$SB(R) = \{x \in A : x = \bigvee_{i=1}^{n} (y_i \wedge -z_i),\ \textit{où}\ \ y_i, z_i \in R\}.$$

([23], pag. 74).

Soit L une algèbre de Łukasiewicz trivalente, et $E = \mathbf{P}(L)$, nous avons vue dans le paragraphe 2, que L est isomorphe a l'algèbre de Łukasiewicz trivalente $L' = \mathcal{S}(L) \subseteq 2^E$. Comme L' est un sous-réticulé de l'algèbre de Boole 2^E, et $\emptyset, E \in L'$, alors

$$SB(L') = \{X \in 2^E : X = \bigcup_{i=1}^{n} (Y_i \cap \mathcal{C}Z_i),\ \textit{où}\ Y_i,\ Z_i \in L'\}.$$

Nous avons vue que $(2^E, \exists)$ est une algèbre de Boole monadique, nous allons montrer que: $(SB(L'), \exists)$ *est une sous-algèbre de Boole monadique de l'algèbre de Boole monadique* $(2^E, \exists)$.

Lemme 3.4 *Si $X \subseteq E$ alors:*

1) $\exists \mathcal{C}X = \exists \sim X$.

2) $\forall \mathcal{C}X = \forall \sim X$.

Dém. 1) $\exists \sim X = \exists \mathcal{C}\varphi(X) = \mathcal{C}\varphi(X) \cup \varphi(\mathcal{C}\varphi(X)) = \varphi(\mathcal{C}X) \cup \mathcal{C}\varphi(\varphi(X)) = \varphi(\mathcal{C}X) \cup \mathcal{C}X = \exists \mathcal{C}X$.
2) $\forall \sim X = \mathcal{C}\exists\mathcal{C} \sim X =$ (par 1) $= \mathcal{C}\exists \sim\sim X = \mathcal{C}\exists X = \forall \mathcal{C}X$. □

Corollaire 3.1 *Si $X \in L'$ alors $\exists \mathcal{C}X \in L'$.*

Dém. Si $X \in L'$, alors comme L' est une sous-algèbre de De Morgan de l'algèbre de De Morgan 2^E, $\sim X \in L'$. Donc comme L' est une algèbre de Łukasiewicz trivalente $\exists \sim X \in L'$. Par le lemme 3.4 $\exists \mathcal{C}X = \exists \sim X$, alors nous avons que $\exists \mathcal{C}X \in L'$. □

Lemme 3.5 *Si $X \subseteq E$ alors $\forall X = X \cap \varphi(X) = \sim \exists \sim X$.*

Dém. $\forall X = \mathcal{C}\exists\mathcal{C}X = \mathcal{C}(\mathcal{C}X \cup \varphi(\mathcal{C}X)) = X \cap \mathcal{C}\varphi(\mathcal{C}X)) = X \cap \varphi(\mathcal{C}\mathcal{C}X) = X \cap \varphi(X)$.
$\forall X = \mathcal{C}\exists\mathcal{C}X = \mathcal{C}(\mathcal{C}X \cup \varphi(\mathcal{C}X) = \mathcal{C}\varphi(\mathcal{C}X \cup \varphi(\mathcal{C}X)) = \sim (\mathcal{C}X \cup \varphi(\mathcal{C}X)) = \sim (\exists \mathcal{C}X) = \sim \exists \sim X$. □

Corollaire 3.2 *Si $X \subseteq E$ alors $\exists X = \sim \forall \sim X$.*

Dém. $\sim \forall \sim X =$ par lemme 3.5 $= \sim\sim \exists \sim \sim X = \exists X$. □

Corollaire 3.3 *Si $X \in L'$ alors $\forall X \in L'$.*

Dém. Si $X \in L'$ alors $\sim X \in L'$, donc $\exists \sim X \in L'$, et par conséquant $\sim \exists \sim X \in L'$. Donc par le lemme 3.5, $\forall X \in L'$. $\square$

Corollaire 3.4 *Si $X \in L'$ alors $\forall \mathcal{C} X \in L'$.*

Dém. Si $X \in L'$, alors $\sim X \in L'$, donc par corollaire 3.3, $\forall \sim X \in L'$, et alors par le lemme 3.4, 2) : $\forall \mathcal{C} X \in L'$. $\square$

Lemme 3.6 *Si $X, Y \in L'$ alors $\exists(X \cap \mathcal{C}Y) = (\forall X \cap \exists \sim Y) \cup (\exists X \cap \forall \sim Y) =$ $\exists X \cap \exists \sim Y \cap \forall(X \cup \sim Y)$.*

Dém. $\exists(X \cap \mathcal{C}Y) =$ par définition
$(X \cap \mathcal{C}Y) \cup \varphi(X \cap \mathcal{C}Y) = (X \cap \mathcal{C}Y) \cup (\varphi(X) \cap \varphi(\mathcal{C}Y)) =$
$(X \cup \varphi(X)) \cap (\mathcal{C}Y \cup \varphi(\mathcal{C}Y) \cap (X \cup \varphi(\mathcal{C}Y)) \cap (\varphi(X) \cup \mathcal{C}Y) =$ par définition
$\exists X \cap \exists \mathcal{C}Y \cap (X \cup \varphi(\mathcal{C}Y) \cap \varphi(X \cup \varphi(\mathcal{C}Y)) =$ par lemmes 3.4, 1) et 3.5
$\exists X \cap \exists \sim Y \cap \forall(X \cup \varphi(\mathcal{C}Y) =$ (par définition de la négation $\sim$)
$\exists X \cap \exists \sim Y \cap \forall(X \cup \sim Y)$.
Comme $X, \sim Y \in L'$ alors $\forall(X \cup \sim Y) = \forall X \cup \forall \sim Y$.
Donc $\exists(X \cap \mathcal{C}Y) = \exists X \cap \exists \sim Y \cap (\forall X \cup \forall \sim Y) = (\forall X \cap \exists \sim Y) \cup (\exists X \cap \forall \sim Y)$. $\square$

Corollaire 3.5 *Si $X, Y \in L'$ alors $\exists(X \cap \mathcal{C}Y) \in L'$.*

Dém. Par hypothèse: (1) $X \in L'$, et (2) $Y \in L'$. De (1) on déduit (3) $\exists X \in L'$. De (2) on déduit (4) $\sim Y \in L'$ et par conséquant (5) $\exists \sim Y \in L'$.
De (1) et (4) on a (5) $X \cup \sim Y \in L'$, donc par le corollaire 3.3: (6) $\forall(X \cup \sim Y) \in L'$.
De (3), (5) et (6) on déduit par le lemme 3.6 que $\exists(X \cap \mathcal{C}Y) \in L'$. $\square$

Lemme 3.7 *Si $X \in M = SB(L')$ alors $\exists X \in L'$.*

Dém. Si $X \in SB(L')$, alors $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n}(Y_i \cap \mathcal{C}Z_i)$ où Y_i, $Z_i \in L'$,, donc $\exists X = \exists(\bigcup\limits_{i=1}^{n}(Y_i \cap \mathcal{C}Z_i)) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \exists(Y_i \cap \mathcal{C}Z_i)$. Comme par le corollaire 3.5, $\exists(Y_i \cap \mathcal{C}Z_i) \in L'$, pour tout i, $1 \leq i \leq n$, et L' est un réticulé on a $\exists X \in L'$. $\square$

Corollaire 3.6 *$(M = SB(L'), \exists)$ est une sous-algèbre de Boole monadique de l'algèbre de Boole monadique $(2^E, \exists)$.*

Dém. En effet, si $X \in M = SB(L')$, alors par le lemme 3.7 $\exists X \in L' \subseteq SB(L') = M$. $\square$

Corollaire 3.7 $\exists(SB(L')) = \forall(SB(L')) \subseteq L'$.

Dém. Comme $SB(L')$ est une algèbre de Boole monadique, il est bien connu que $\exists(SB(L')) = \forall(SB(L'))$, et d'après le lemme 3.7 $\exists(SB(L')) \subseteq L'$. $\square$

Lemme 3.8 *Si $X, Y \in L'$ alors $X \sqcup Y \in L'$.*

Dém. Nous avons vue, définition 3.1, 3) que $X \sqcup Y = \forall X \cup Y \cup (X \cap \forall \mathcal{C}Y)$. D'après le corollaire 3.3, $\forall X \in L'$, et d'après le corollaire 3.4, $\forall \mathcal{C}Y \in L'$. Alors comme L' est une algèbre de Łukasiewicz, $\forall X \cup Y \cup (X \cap \forall \mathcal{C}Y) \in L'$. □

Lemme 3.9 *Si $X, Y \in L'$ alors $\forall(X \cap \mathcal{C}Y) = \forall(X \cap \sim Y) = \forall X \cap \forall \sim Y$.*

Dém. $\forall(X \cap \mathcal{C}Y) = \forall X \cap \forall \mathcal{C}Y = \forall X \cap \forall \sim Y = \forall(X \cap \sim Y)$. □

Considérons la relation de congruence "$\equiv$" défine sur $M = SB(L')$, par (voir définition 3.2): Si $X, Y \in M$, $X \equiv Y$ si et seulement si $\exists X = \exists Y$ et $\forall X = \forall Y$. Nous avons vue que $(\mathcal{L}(M) = M/\equiv, \sqcap, \sqcup, \sim, \nabla, |E|)$ est une algèbre de Łukasiewicz trivalente, où $\sim |X| = |\mathcal{C}X|$, $\nabla |X| = |\exists X|$. Nous allons montrer que $\mathcal{L}(M)$ et L sont des algèbres de Łukasiewicz trivalentes isomorphes.

Lemme 3.10 *Si $X, Y \in L'$ et $X \equiv Y$ alors $X = Y$.*

Dém. De $X, Y \in L'$ on déduit $\exists X, \exists Y \in L'$ et $\forall X, \forall Y \in L'$, donc comme par hypothèse $\exists X = \exists Y$, et $\forall X = \forall Y$, et comme $\exists$ et $\forall$ sont les opérateurs de possibilité et de nécessité de l'algèbre de Łukasiewicz L', on déduit par le principe de determination de Moisil que $X = Y$. □

Lemme 3.11 *Si $X, Y \in L'$ alors il existe un unique $Z \in L'$ tel que $X \cap \mathcal{C}Y \equiv Z$.*

Dém. Soit $Z = (\forall X \cap \sim Y) \cup (X \cap \forall \sim Y)$, il est claire que $Z \in L'$.
(1) $\exists Z = \exists(\forall X \cap \sim Y) \cup \exists(X \cap \forall \sim Y) =$
$(\forall X \cap \exists \sim Y) \cup (\exists X \cap \forall \sim Y) =$ (par lemme 3.6) $=$
$\exists(X \cap \mathcal{C}Y)$, et
(2) $\forall Z =$ (lemme $2.8, 2$) $= \forall(\forall X \cap \sim Y) \cup \forall(X \cap \forall \sim Y) =$ (lemme $2.8, 3$)
$(\forall X \cap \forall \sim Y) \cup (\forall X \cap \forall \sim Y) = \forall X \cap \forall \sim Y =$ (par lemme 3.9) $= \forall(X \cap \mathcal{C}Y)$, donc $Z \equiv X \cap \mathcal{C}Y$.
De (1) et (2) on déduit que $X \cap \mathcal{C}Y \equiv Z$ et d'après le lemme 3.10, Z est unique. □

Lemme 3.12 *Si $A, B \in M$ alors $A \cup B \equiv A \sqcup B \sqcup \forall(A \cup B)$.*

Dém. D'après le lemme 3.1:
$\exists(A \sqcup B \sqcup \forall(A \cup B)) = \exists A \cup \exists B \cup \exists\forall(A \cup B) = \exists A \cup \exists B \cup \forall(A \cup B) = \exists(A \cup B) \cup \forall(A \cup B) = \exists(A \cup B)$.
$\forall(A \sqcup B \sqcup \forall(A \cup B)) = \forall A \cup \forall B \cup \forall\forall(A \cup B) = \forall A \cup \forall B \cup \forall(A \cup B) = \forall(A \cup B)$. □

Corollaire 3.8 *Si $A, B \in M$, $X, Y \in L'$ et $A \equiv X$, $B \equiv Y$, alors $A \cup B \equiv Z$, où $Z \in L'$.*

Dém. Nous avons vue dans le lemme 3.12 que $A \cup B \equiv A \sqcup B \sqcup \forall(A \cup B)$. D'après les hypothèses $A \equiv X$, $B \equiv Y$, nous avons $A \sqcup B \equiv X \sqcup Y$ et alors $A \sqcup B \sqcup \forall(A \cup B) \equiv X \sqcup Y \sqcup \forall(A \cup B)$. Observons finalement que comme $A \cup B \in M$ alors par le corollaire 3.7 $\forall(A \cup B) \in L'$, donc par le lemme 3.8 $Z = X \sqcup Y \sqcup \forall(A \cup B) \in L'$. Donc $A \cup B \equiv Z$, où $Z \in L'$. □

Lemme 3.13 *Si $A \in M$, il existe $X \in L'$ tel que $A \equiv X$.*

Dém. Soit $A \in M = SB(L')$, alors $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ où $A_i = Y_i \cap \mathcal{C}Z_i$, et $Y_i,\ Z_i \in L'$, pour $1 \leq i \leq n$. Par le lemme 3.11, $A_i \equiv S_i$, où $S_i \in L'$, pour $1 \leq i \leq n$.
Si $n = 1$, alors le lemme est evidement verifié. Supposons que $2 \leq n$. Par le corollaire 3.8: (1) $A_1 \cup A_2 \equiv Z_2$, où $Z_2 \in L'$.
De (1) et $A_3 \equiv S_3$, par le corollaire 3.8, on a: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \equiv Z_3$, où $Z_3 \in L'$. En appliquant cette rasoinnement, nous aurons d'après $n-1$ fois: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \equiv Z_n$, où $Z_n \in L'$, et la démonstration est terminée. □

Lemme 3.14 *La transformation H de L dans $\mathcal{L}(M)$, définie par $H(x) = |\mathcal{S}(x)|$, vérifie:*

1) H est biunivoque.

2) H est surjective.

Dém. (1) En effet si $H(x) = H(y)$, c'est-à-dire $|\mathcal{S}(x)| = |\mathcal{S}(y)|$, alors $\mathcal{S}(x) \equiv \mathcal{S}(y)$, et comme $\mathcal{S}(x), \mathcal{S}(y) \in \mathcal{S}(L) = L'$, alors d'après le lemme 3.10, $\mathcal{S}(x) = \mathcal{S}(y)$, d'où l'on déduit que $x = y$, car $\mathcal{S}$ est biunivoque.
(2) En effet etant donnée $|A| \in \mathcal{L}(M)$, alors $A \in M$. D'après le lemme 3.13, nous savons qu'il existe $X \in L' = \mathcal{S}(L)$ tel que $X \equiv A$. Alors comme $X = \mathcal{S}(x)$, où $x \in L$, nous avons $H(x) = |\mathcal{S}(x)| = |X| = |A|$. □

Lemme 3.15 *La transformation H vérifie:*

3) $H(x \wedge y) = H(x) \sqcap H(y)$.

4) $H(x \vee y) = H(x) \sqcup H(y)$.

5) $H(\sim x) = \sim H(x)$.

6) $H(\nabla x) = \exists H(x)$.

Dém.

3) (a) $\exists(\mathcal{S}(x) \sqcap \mathcal{S}(y)) =$ (lemme $3.1, 2$) $=$
$\exists\mathcal{S}(x) \cap \exists\mathcal{S}(y) =$ (par lemme 2.7) $= \exists(\mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y))$.
(b) $\forall(\mathcal{S}(x) \sqcap \mathcal{S}(y)) =$ (par lemme $3.1, 4$)
$\forall\mathcal{S}(x) \cap \forall\mathcal{S}(y) =$ (par lemme $2.8, 3$) $= \forall(\mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y))$.
De (a) et (b) on déduit que $\mathcal{S}(x) \sqcap \mathcal{S}(y) \equiv \mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y)$, et alors $H(x \wedge y) = |\mathcal{S}(x \wedge y)| = |\mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y)| = |\mathcal{S}(x) \sqcap \mathcal{S}(y)| = |\mathcal{S}(x)| \sqcap |\mathcal{S}(y)| = H(x) \sqcap H(y)$.

4) (c) $\exists(\mathcal{S}(x) \sqcup \mathcal{S}(y)) =$ (par lemme $3.1, 1$) $=$
$\exists\mathcal{S}(x) \cup \exists\mathcal{S}(y) =$ (par lemme $2.8, 1$) $= \exists(\mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y))$.
(d) $\forall(\mathcal{S}(x) \sqcup \mathcal{S}(y)) =$ (par lemme $3.1, 3$)) $=$
$\forall\mathcal{S}(x) \cup \forall\mathcal{S}(y) =$ (par lemme $2.8, 2$)) $= \forall(\mathcal{S}(x) \cup \mathcal{S}(y))$.
De (c) et (d) on déduit que $\mathcal{S}(x) \sqcup \mathcal{S}(y) \equiv \mathcal{S}(x) \cup \mathcal{S}(y)$, et alors $H(x \vee y) = |\mathcal{S}(x \vee y)| = |\mathcal{S}(x) \cup \mathcal{S}(y)| = |\mathcal{S}(x) \sqcup \mathcal{S}(y)| = |\mathcal{S}(x)| \sqcup |\mathcal{S}(y)| = H(x) \sqcup H(y)$.

5) $\exists\mathcal{S}(\sim x) =$ (par lemme $2.2, 3$) $= \exists \sim \mathcal{S}(x) =$ (par lemme $3.4, 1$) $= \exists\mathcal{C}(x)$, et $\forall\mathcal{S}(\sim x) =$ (par lemme $2.2, 3$)) $= \forall \sim \mathcal{S}(x) =$ (par lemme $3.4, 2$)) $= \forall\mathcal{C}(x)$, nous avons $\mathcal{S}(\sim x) \equiv \mathcal{C}\mathcal{S}(x)$ et alors $H(\sim x) = |\mathcal{S}(\sim x)| = |\mathcal{C}\mathcal{S}(x)| = \sim |\mathcal{S}(x)| = \sim H(x)$.

6) $H(\nabla x) = |\mathcal{S}(\nabla x)| =$ (par lemme 2.6) $= |\exists\mathcal{S}(x)| =$ (par lemme 3.2) $= \nabla|\mathcal{S}(x)| = \nabla H(x)$.

$\square$

D'après les lemmes 3.14 et 3.15 nous avons que : L est isomorphe a $\mathcal{L}(M)$, (Théorème 3.1.)

Bibliographie

[1] Bialynicki-Birula A., *Remarks on quasi-Boolean algebras*, Bull. Acad. Polonaise des Sciences. Classe III, 5 (1957), 615-619.

[2] Bialynicki-Birula A. and Rasiowa H., *On the representation of quasi-Boolean algebras*, Bull. Acad. Polonaise des Sciences. Classe III, 5 (1957), 259-261.

[3] Cignoli, R., *Boolean elements in Łukasiewicz algebras I*, Proc. Japan Acad., 41, 8 (1965), 670-675. Notas de Lógica Matemática 23, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1974.

[4] Cignoli, R. and Monteiro A., *Boolean elements in Łukasiewicz algebras II*, Proc. Japan Acad., 41, 8 (1965), 676-680. Notas de Lógica Matemática 24, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1974.

[5] Halmos P.R., *Finite monadic algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 219-227.

[6] Halmos P.R., *Algebraic Logic*, Chelsea Pub. Co. New York (1962).

[7] Moisil Gr. C., *Recherches sur les logiques non-chrysipiennes*, Ann. Sc. de l'Universitè de Yassy, 26 (1940), 431-466.

[8] Moisil Gr. C., *Notes sur les logiques non-chrysipiennes*, Ann. Sc. de l'Université de Yassy, 27 (1941), 86-98.

[9] Moisil Gr. C., *Sur les idéaux des algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Analele Universitatii C.I. Parohn. Seria Acta Logica 3 (1960), 83-95.

[10] Monteiro A., *Cours sur les algèbres de Hilbert et de Tarski*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1960.

[11] Monteiro A., *Cours sur les N-lattices*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1962.

[12] Monteiro A., *Cours sur les algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1963.

[13] Monteiro A., *Sur la définition des algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. de la Soc. Math. et Phys. de la R.P. Roumaine, nouvelle série 7 (55), (1963), 1-12. Préprint in Notas de Lógica Matemática 21, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1964.

[14] Monteiro A., *Cours sur les algèbres de De Morgan* , Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1966.

[15] Monteiro A., *Construction des Algèbres de Łukasiewicz trivalentes dans les algèbres de Boole Monadiques I.* Math. Japonicae. 12(1967), 1-23. Notas de Lógica Matemática 11, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1974.

[16] Monteiro A., *Sur les algèbres de Heyting symétriques*, Portugaliae Mathematica, 39 (1980), 1-237.

[17] Monteiro L., *Axiomes indépendants pour les algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. de la Soc. Math. et Phys. de la R.P. Roumaine, nouvelle série 7 (55), (1963), 1-12. Préprint in Notas de Lógica Matemática 22, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1964.

[18] Monteiro L., *Sur la construction* $\mathcal{L}$ *des algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Revue Roumaine de Math. Pures et Appliquées, 23 (1978), 77-83.

[19] Monteiro L., *Les algèbres de Heyting et de Łukasiewicz trivalentes*, Notre Dame Journal of Formal Logic, Vol. Xi, 4 (1970), 453-466.

[20] Monteiro L., *Sur le principe de détermination de Moisil dans les algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. de la Soc. sci. Math. de la R. P. Roumaine, 13(61), 4 (1969), 447-448.

[21] Monteiro L. et Gonzalez Coppola L., *Sur une construction des algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Notas de Lógica Matemática 17, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1964.

[22] Rasiowa H., *N-lattices and constructive logic with strong negation*, Fund. Math. 46 (1958), 61-80.

[23] Rasiowa H. and Sikorski R.,*The Mathematics of Metamathematics.* Second edition, 519 pag. Warszawa 1968.