Los siguientes trabajos fueron publicados en 1978 en la revista Textos y Notas N° 15, editada por el *Instituto Nacional de Investigação Científica, Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais das Universidades de Lisboa* (Portugal).

Esta revista no se encuentra en la Biblioteca del INMABB, y en la versión original se han detectado varios errores de dactilografiado.

Han colaborado en la corrección y nuevo dactilografiado además de quien suscribe, el Lic. Ignacio Viglizzo y la Lic. Sonia Savini.

Dr. Luiz F. Monteiro
Director
INMABB-CONICET-UNS

Junio, 1995

Les éléments réguliers d'un $\mathcal{N}$-lattice

António Monteiro - 1978

Résumé

Si 0 est le premier élément d'un $\mathcal{N}$-lattice A et si nous posons $\lceil x = x \to 0$, nous dirons que $r \in A$ est régulier si $\lceil\lceil r = r$. On montre que l'ensemble $\mathcal{R}$ de tous les éléments réguliers de A, ordonné par la relation d'ordre $\leq$, donnée sur A, est une algèbre de Boole. On détermine des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'application $r(x) = \lceil\lceil x$, de A sur $\mathcal{R}$, soit un homomorphisme.

1. Introduction

La notion de $\mathcal{N}$-lattice, introduite par Helena Rasiowa [10], joue dans l'étude du calcul propositionnel constructif avec négation forte de D. Nelson et A. A. Markov, un rôle analogue à celui des algèbres de Boole dans le calcul propositionnel classique.

Définition 1.1 *Un système $(A, 1, \sim, \wedge, \vee, \to)$ formé par: un ensemble non vide A, un élément $1 \in A$, une opération unaire $\sim$ (négation forte), et trois opérations binaires $\wedge, \vee, \to$ définies sur A, sera dit un $\mathcal{N}$-lattice, ou une algèbre de Nelson, si les conditions suivantes sont vérifiées:*

N1) $x \wedge (x \vee y) = x$

N2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

N3) $\sim\sim x = x$

N4) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

N5) $x \wedge \sim x = (x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y)$

N6) $x \to x = 1$

N7) $(x \to y) \wedge (\sim x \vee y) = \sim x \vee y$

N8) $x \to (y \to z) = (x \wedge y) \to z$

N9) $x \wedge (x \to y) = x \wedge (\sim x \vee y)$

N10) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$

N11) $x \vee 1 = 1$

Nous dirons, pour abréger, que A est un $\mathcal{N}$-lattice.

Cette définition est équivalente, voir [1] et [2], à la définition de Helena Rasiowa. Dans un travail, en collaboration avec Luiz Monteiro, et qui n'est pas encore publié, nous avons établi qu'on peut démontrer $N9), N10), N11)$ à partir de $N1) - N8)$, qui sont des axiomes indépendants pour les $\mathcal{N}$-lattices. Si nous posons $0 = \sim 1$, alors 0 est le premier élément du lattis distributif A. Nous poserons $\lceil x = x \to 0$. Nous supposerons connues les règles de calcul indiquées dans [10] et [11]; auxquelles nous ajoutons la règle

$$(x \vee y) \to z = (x \to z) \wedge (y \to z)$$

démontré dans [7]. Si nous posons:

$$x \leftarrow y = \sim (\sim x \to \sim y)$$

$$\rceil x = \sim \lceil \sim x$$

nous aurons pour ces algèbres un principe de dualité, qu'on peut exprimer, sous une forme abrégée, par la table ci-jointe.

1	0
$\vee$	$\wedge$
$\to$	$\leftarrow$
$\sim$	$\sim$
$\lceil$	$\rceil$

Ce résultat a été énoncé et démontré dans [4].
Si nous posons

$$a \rightarrowtail b = (a \to b) \wedge (\sim b \to \sim a)$$

nous dirons que $\rightarrowtail$ est l'*implication contraposable* et l'on peut montrer que:

$$x \to y = x \rightarrowtail (x \rightarrowtail y).$$

2. Les homomorphismes et le radical

La notion d'homomorphisme se définit à la manière habituelle.

Définition 2.1 *Une partie D d'un $\mathcal{N}$-lattice sera dite:*

1) *Un système déductif si:*

   $D1)$ $1 \in D$.

   $D2)$ *Si a, $a \to b \in D$ alors $b \in D$ (modus ponens).*

2) *Un système déductif contraposable si:*

   $C1)$ $1 \in D$.

*C*2) *Si* a, $a \succ\!\!\!\longrightarrow b \in D$ *alors* $b \in D$ *(modus ponens contraposable).*

Un système déductif D *sera dit propre si* $D \neq A$.

Ces deux notions sont équivalentes [4] à celle de filtre spécial de première espèce introduite par H. Rasiowa [10]. Pour la définition du quotient A/D voir [7], [10], [11]. Toutes les images homomorphes d'un $\mathcal{N}$-lattice donné peuvent être obtenues de cette manière. Comme l'implication $\rightarrow$ vérifie les égalités :

$$I1)\ x \rightarrow (y \rightarrow x) = 1; \qquad I2)\ (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1,$$

on peut utiliser les résultats indiqués dans [8] pag. 427-431, (théorème de la déduction 3.8, théorème de la compacité: 3.7, théorème de la semi-simplicité 3.14, et les résultats sur les systèmes déductifs complètement irréductibles, que jouent un rôle important dans plusieurs théorèmes indiqués dans cette note).

Définition 2.2 *Le radical de* A *est l'intersection,* $\mathrm{Rad}(A)$*, de tous les systèmes déductifs maximaux de* A*. Un* $\mathcal{N}$*-lattice* A *sera dit semi-simples si* $\mathrm{Rad}(A) = \{1\}$. [5].

On peut démontrer que:

Théorème 2.1 *Pour que* $n \in \mathrm{Rad}(A)$ *il faut et il suffit que* n *vérifie une quelconque des conditions suivantes:*

1) $\lceil\lceil n = 1$.

2) Il existe un x *tel que* $n = x \vee \lceil x$.

Théorème 2.2 *Pour qu'un* $\mathcal{N}$*-lattice* A *soit semi-simple il faut et il suffit qu'une quelconque des conditions suivantes soit verifiée:*

S1)	$x \vee \lceil x = 1$	*S2)*	$x \rightarrow y = \lceil x \vee y$
S3)	$\lceil x \wedge \lceil\lceil x = 0$	*S4)*	$\lceil x$ *est un élément booléien*
S5)	$\lceil\lceil\lceil x = \lceil x$	*S6)*	$\lceil\lceil x = \sim \lceil x$
S7)	$(x \rightarrow y) \rightarrow y = y$	*S8)*	$\lceil\lceil x \rightarrow \sim \lceil x = 1$
S9)	$\lceil\lceil \sim \lceil x = \sim \lceil x$	*S10)*	*tout système déductif premier est maximal.*

Les conditions $S1), S2), S7), S10)$ ont été indiquées dans [5] .

Dans [7] nous avons démontré que :

Théorème 2.3 *Les $\mathcal{N}$-lattice qui vérifient la condition $S1)$ coïncident avec les algèbres de Łukasiewicz trivalentes (au sens de Moisil).*

Donc en particulier: Si A est un $\mathcal{N}$-lattice, $A/Rad(A)$ est une algèbre de Łukasiewicz trivalente. Le théorème 2.3 est l'analogue du résultat suivant: *Pour qu'une algèbre de Heyting A soit semi-simples il faut et il suffit que A soit une algèbre de Boole*, voir [3] pag. 157. Voir aussi [9].

D. Vakarelov [13] a été conduit, d'une façon indépendante, a considérer les $\mathcal{N}$-lattices qui vérifient la condition $S1)$, auxquels il a donné le nom de "$\mathcal{N}$-lattices classiques". Gr. Moisil a montré que les algèbres de Łukasiewicz trivalentes sont des algèbres de Heyting. On peut alors montrer que la négation intuitioniste de x, en notation $\rceil x$ est donnée par $\rceil x = \sim \lceil \sim x$. C'est par cette raison que nous avons changé d'accord avec Gr. Moisil la notation habituelle $x \to 0 = \rceil x$ par $x \to 0 = \lceil x$.

3. Les éléments réguliers

Définition 3.1 *Un élément r d'un $\mathcal{N}$-lattice A, sera dit régulier si $\lceil\lceil r = r$, ou ce qui est équivalent si $\rceil\rceil r = r$. Nous représenterons par $\mathcal{R}(A)$, ou plus simplesment par $\mathcal{R}$, l'ensemble de tous les éléments réguliers de A.*

On peut démontrer que :

Théorème 3.1 *L'ensemble $\mathcal{R}$ de tous les éléments réguliers d'un $\mathcal{N}$-lattice A, ordonné par la relation d'ordre $\leq$, donnée sur A, est une algèbre de Boole.*

La démonstration de ce résultat est assez large. Indiquons dans ses lignes générales la marche que nous avons suivie.

Lemme 3.1

1) $(a \to b) \to (\sim \lceil a \to \sim \lceil b) = 1$.

2) Si r et s sont réguliers alors pour que $r \leq s$ il faut et il suffit que $r \to s = 1$.

3) $a \to \lceil\lceil a = 1$.

4) $\lceil\lceil\lceil\lceil a = \lceil\lceil a$.

5) Pour que r soit régulier il faut et il suffit qu'il existe un élément x tel que $r = \lceil\lceil x$.

6) Si r régulier alors $\lceil r$ est régulier.

7) $\lceil\lceil(\lceil\lceil a \wedge \lceil\lceil b) \to (\lceil\lceil a \wedge \lceil\lceil b) = 1$.

8) Si $r, s \in \mathcal{R}$, alors $t = \lceil\lceil(r \wedge s)$ est la borne inférieure, dans $\mathcal{R}$, des éléments r et s et nous écrirons : $t = r \cap s$.

9) Si $r, s \in \mathcal{R}$ alors: $t = \lceil\lceil(r \vee s)$ est la borne supérieure, dans $\mathcal{R}$, des éléments r et s et nous écrirons : $t = r \cup s$.

Il convient de remarquer que si $r, s \in \mathcal{R}$, en général, les éléments $r \wedge s$ et $r \vee s$ ne sont pas réguliers.

Lemme 3.2 *Les éléments* $0, 1 \in \mathcal{R}$ *et en outre si* $r \in \mathcal{R}$ *alors:* $r \cap \lceil r = 0$; $r \cup \lceil r = 1$.

De les conditions 6), 8), 9) du lemme 3.1, et du lemme 3.2 il résulte que :

Lemme 3.3 *Le système* $(\mathcal{R}, 0, 1, \cap, \cup, \lceil)$ *est un réticulé, ayant un premier* 0 *et un dernier élément* 1*, où chaque élément* $r \in \mathcal{R}$ *a un complèment* $\lceil r$.

Il est assez dificile à demontrer que le réticulé $\mathcal{R}$ est distributif. Pour cela nous avons besoin de démontrer que:

Lemme 3.4 *Si* x, y *sont él'ements d'un* $\mathcal{N}$*-lattice alors:*

1)	$\lceil\lceil\lceil x = \sim \lceil\lceil x$	*2)*	$\lceil\lceil(x \to y) = \lceil\lceil x \to \lceil\lceil y$
3)	$\lceil\lceil(x \wedge y) = \lceil\lceil(\lceil\lceil x \wedge \lceil\lceil y)$	*4)*	$\lceil\lceil(x \vee y) = \lceil\lceil(\lceil\lceil x \vee \lceil\lceil y)$.

Nos avons démontré ces égalités par induction transfinie en utilisant les théorèmes et las définitions indiqués dans [8], pages 427-431.

En utilisant les conditions 3) et 4) du lemme 3.4 on montre alors facilement que $(\mathcal{R}, \cap, \cup)$ est un réticulé distributif. En effet: si $a, b, c \in \mathcal{R}$ alors

$$\begin{aligned}
a \cap (b \cup c) &= \lceil\lceil(a \wedge \lceil\lceil(b \vee c)) = \lceil\lceil(\lceil\lceil a \wedge \lceil\lceil(b \vee c)) = \\
&\quad \lceil\lceil(a \wedge (b \vee c)) = \lceil\lceil((a \wedge b) \vee (a \wedge c)) = \\
&\quad \lceil\lceil(\lceil\lceil(a \wedge b) \vee \lceil\lceil(a \wedge c)) = \lceil\lceil((a \cap b) \vee (a \cap c)) = \\
&\quad (a \cap b) \cup (a \cap c)
\end{aligned}$$

et le théorème 3.1 est démontré.

Indiquons encore les résultats suivants:

Lemme 3.5 *Si* r *est régulier alors* $\sim r$ *est régulier et* $\sim r = \lceil r$.

Lemme 3.6 *Si* r *et* s *sont réguliers alors* $r \to s$ *est régulier et* $r \to s = \lceil r \cup s$.

Comme $A/Rad(A)$ est une algèbre de Łukasiewicz trivalente, en général l'algèbre ainsi obtenue n'est pas isomorphe à l'algèbre de Boole $\mathcal{R}$.

On peut montrer que:

Lemme 3.7 *Si A est un $\mathcal{N}$-lattice et $Rad(A)$ son radical, alors pour que le quotient $A/Rad(A)$ soit une algèbre de Boole il faut et il suffit que $\lceil\lceil \sim x = \sim \lceil\lceil x$.*

Lemme 3.8 *Si A est un $\mathcal{N}$-lattice pour que $A/Rad(A)$ soit une algèbre de Boole il faut et il suffit que pour tout système déductif maximal M de A, le quotient A/M soit une algèbre de Boole avec deux éléments, $\{0, 1\}$.*

Lemme 3.9 *Pour que transformation $r(x) = \lceil\lceil x$ de A sur $\mathcal{R}$ soit un homomorphisme il faut et il suffit que $\lceil\lceil \sim x = \sim \lceil\lceil x$.*

Remarquons encore que:

Lemme 3.10 *Si r est un élément régulier tel que $r \in \mathrm{Rad}(A)$, alors $r = 1$.*

donc,

Lemme 3.11 *Si un $\mathcal{N}$-lattice vérifie la condition $\lceil\lceil \sim x = \sim \lceil\lceil x$ alors les algèbres de Boole $\mathcal{R}$ et $A/Rad(A)$ sont isomorphes.*

Il est convenable de comparer les résultats précédents avec les résultats connus sur les éléments réguliers des algèbres de Heyting [11].

Nous laissons de côté les interprétations syntaxiques des résultats précédents. Par example du théorème 2.1 on déduit:*Pour que la formule $\lceil\lceil p$ soit une thèse du calcul propositionnel constructif avec négation forte il faut et il suffit que p soit une thèse du calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz.*

Referencias

[1] Brignole D., *Equational characterization of Nelson Algebras.* Notre Dame J. of Formal Logic 10 (1969) 285-297.

[2] Brignole D. et Monteiro A., *Caractérisation des algèbres de Nelson par de égalités I et II.* Proc. of Japan Academy 43, nº 4 (1967), 279-283; 284-285. Notas de Lógica Matemática 20, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1964.

[3] Monteiro A., *L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques.* Segundo Symposium de Matemáticas, Villavicencio, Mendoza, Argentina, 21 al 25 Julio 1954, publié par l'Unesco, Montevideo, 1954, 129-161.

[4] Monteiro A., *Cours du premier semestre de 1962.* Instituto de Matemática. Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca. Argentina.

[5] Monteiro A., *Algèbres de Nelson semi-simples.* Résumé d'une communication présentée à la U.M.A. en Octobre 1962. Revista de la U.M.A. 21 (1963), 145-146.

[6] Monteiro A., *Construction des algèbres de Nelson finies.* Bull. Acad. Pol. des Sc.. Série sc. math. astr. et Phys. 11 (1963), 359-362. Notas de Lógica Matemática 15, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1964.

[7] Monteiro A., *Construction des algèbres de Łukasiewicz trivalentes dans les algèbres de Boole Monadiques I.* Math. Japonicae. 12(1967), 1-23. Notas de Lógica Matemática 11, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1974.

[8] Monteiro A., *La semi-simplicité des Algèbres de Boole topologiques et les systèmes déductifs.* Revista de la U.M.A. 25 (1971), 417-448.

[9] Monteiro A., *L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques I*, Notas de Lógica Matemática 29, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1974.

[10] Rasiowa H., *$\mathcal{N}$-lattices and constructive logic with strong negation.* Fund. Math. 46 (1958), 61-80.

[11] Rasiowa H., *An algebraic aproach to non-classic logic,* 403 pag. North-Holland, Amsterdam, 1974.

[12] Rasiowa H. and Sikorski R.,*The Mathematics of Metamathematics.* Second edition, 519 pag. Warszawa 1968.

[13] Vakarelov D., *Note on $\mathcal{N}$-lattices and constructive logic with strong negation.* Studia Logica, 1977, 109-125.

Les $\mathcal{N}$-lattices linéaires

António Monteiro - 1978

Résumé

Nous étudions les $\mathcal{N}$-lattices linéaires, c'est-à-dire ceux qui vérifient l'égalité $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$; en indiquand un théorème de représentation et une méthode de décision pour les égalités valables dans ces algèbres.

1. Introduction

Les $\mathcal{N}$-lattices, introduits par Helena Rasiowa [9], jouent dans l'étude du calcul propositionnel constructif avec négation forte, un rôle analogue à celui qui jouent les algèbres de Boole dans le calcul propositionnel classique.

Cette notion peut être définie par des égalités, voir [2] et [3].

Nous nous proposons d'indiquer quelques résultats sur une classe particulière d'algèbres de cette nature indiquées dans la définition suivante:

Définition 1.1 *Un $\mathcal{N}$-lattice A sera dit linéaire si:*

$$\text{(L)} \quad (x \to y) \vee (y \to x) = 1, \textit{ quels que soient } x, y \in A.$$

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble totalement ordonné par la relation $\leq$, ayant un premier 0 et un dernier élément 1. Il est bien connu que $\mathcal{C}$ est un lattis distributif. Nous représenterons par $x \wedge y$ et $x \vee y$ la borne inférieure et la borne supérieure, dans $\mathcal{C}$, de $x, y \in \mathcal{C}$. Supposons que sur $\mathcal{C}$ soit donnée une opération unaire $\sim$ (apelée *négation forte*) telle que:

$M1) \sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$ $\qquad$ $M2) \sim\sim x = x$

alors on voit de suite que:

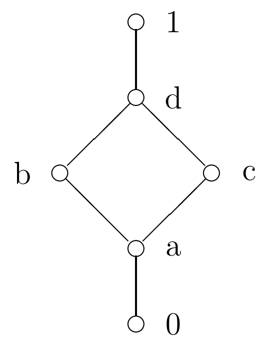
$M3) \sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$ $\qquad$ $M4) \sim 1 = 0$

$M5) \sim 0 = 1$ $\qquad$ $M6) x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y$.

Dans ces conditions nous dirons que le système $(\mathcal{C}, 0, 1, \sim, \wedge, \vee)$ est une chaîne *de Kleene*.

Soit $[0,1]$ le segment de tous les nombres réels x tels que $0 \leq x \leq 1$; si nous posons $\sim x = 1 - x$, pour $x \in [0,1]$, on voit de suite que le système $([0,1], 0, 1, \sim, \wedge, \vee)$ est une chaîne de Kleene.

Il est facile de voir que sur une chaîne de Kleene A, on peut toujours définir une, et une seule, structure de $\mathcal{N}$-lattice. Pour voir qu'il en est ainsi, rappelons que sur un ensemble, ayant un dernier élément 1, totalement ordonné, on peut définir un, et un seul, opérateur d'implication intuitioniste $\Rightarrow$. Il suffit de poser $a \Rightarrow b = 1$ si $a \leq b$ et $a \Rightarrow b = b$ si $a > b$.
Dans ces conditions si nous posons dans une chaîne de Kleene, $a \rightarrow b = a \Rightarrow (\sim a \vee b)$ (voir [6]), alors on vérifie de suite que le système $(\mathcal{C}, 1, \sim, \wedge, \vee, \rightarrow)$ est un $\mathcal{N}$*-lattice* linéaire, et nous dirons pour abréger que $\mathcal{C}$ est une $\mathcal{N}$*-chaîne*.
Nous pouvons donc affirmer que sur une chaîne de Kleene on peut définir une et une seule structure de $\mathcal{N}$-lattice linéaire. Il est aussi clair q'un $\mathcal{N}$-lattice A est une $\mathcal{N}$-chaîne si et seulement si l'ordre donné sur A est un ordre total.
Pour indiquer un exemple d'un $\mathcal{N}$-lattice non-linéaire, considérons le lattis distributif A dont le diagramme est indiqué sur la figure ci-jointe.



Posons $\sim 0 = 1$, $\sim a = d$, $\sim b = c$, $\sim c = b$, $\sim d = a$, $\sim 1 = 0$. A étant un réticulé distributif fini, on peut définir l'implication intuitioniste $\Rightarrow$ sur A.
En posant $x \rightarrow y = x \Rightarrow (\sim x \vee y)$ on voit que $(A, 1, \sim, \wedge, \vee, \rightarrow)$ est un $\mathcal{N}$-lattice (voir [6]) qui n'est pas linéaire car:

$$(b \rightarrow c) \vee (c \rightarrow b) = b \vee c = d \neq 1.$$

2. Les systèmes déductifs

La détermination des images homomorphes d'un $\mathcal{N}$-lattice A se réduit à la détermination des systèmes déductifs de A.

Définition 2.1 *Une partie D de A sera dite un système déductif si:*

D1) $1 \in D$.

D2) Si $a, a \rightarrow b \in D$ alors $b \in D$ (modus ponens).

D sera propre si $D \neq A$, ([7], [10]).

Si D est un système déductif posons $a \equiv b \pmod{D}$ pour indiquer que:

1) $a \to b \in D$; 2) $b \to a \in D$;

3) $\sim a \to \sim b \in D$; 4) $\sim b \to \sim a \in D$.

La relation binaire ainsi définie sur A est une relation d'equivalence compatible avec les opérations $\sim, \wedge, \vee, \to$. Si nous posons $h(a) = |a|$ pour indiquer la classe d'équivalence qui contient l'élément $a \in A$ et si nous represéntons par $A' = A/D = \{|a| : a \in A\}$ et en algébrisant A' de la façon naturelle, nous aurons $|1| = D$ et le système $(A', |1|, \sim, \wedge, \vee, \to)$ est un $\mathcal{N}$-lattice. L'application h de A sur A' est un homomorphisme et $D = h^{-1}(|1|)$, [7] et [10].
Toute image homomorphe de A peut être obtenu de cette manière.

Définition 2.2 *Un système déductif D sera dit premier si $a \vee b \in D$ entraîne $a \in D$ ou $b \in D$.*

S'il en est ainsi D est un filtre premier [9].
Si P est un filtre premier de A posons, avec A. Bialynicki-Birula et H. Rasiowa, [1],

$$\varphi(P) = A - (\sim P)$$

alors $\varphi(P)$ est un filtre premier de A. On voit de suite qu'un filtre premier P est un système déductif si et seulement si $P \subseteq \varphi(P)$, ([9], [10]).
Nous allons caractériser les $\mathcal{N}$-lattice linéaires par des propriétés des systèmes déductifs premiers.

Théorème 2.1 *Pour qu'un $\mathcal{N}$-lattice soit linéaire if faut et il suffit que:*

(K) La famille de tous les systèmes déductifs propres qui contiennent un système déductif premier P, ordonnée par la relation d'inclusion $\subseteq$ soit un ensemble totalement ordonné.

(K') Tout système déductif propre qui contient un système déductif premier est un système déductif premier.

Ces résultats sont analogues à ceux que nous avons obtenu pour las algèbres de Heyting (ou de Brouwer) voir: [4], [5], [8].

Théorème 2.2 *Si D est un système déductif premier d'un $\mathcal{N}$-lattice linéaire, alors A/D est une $\mathcal{N}$-chaîne.*

Il est utile de connaître le résultat suivant:

Lemme 2.1 *Si D est un système déductif d'un $\mathcal{N}$-lattice A et si P est un filtre premier minimal parmi les filtres premiers qui contienent D, alors P est un système déductif.*

En particulier:

Corollaire 2.1 *Les filtres premiers minimaux d'un $\mathcal{N}$-lattice sont des systèmes déductifs.*

Théorème 2.3 (**de représentation**) Tout $\mathcal{N}$-lattice linéaire A est isomorphe à un sous-$\mathcal{N}$-lattice d'un produit cartésien de $\mathcal{N}$-chaînes.

En utilisant ce résultat on peut démontrer que:

Théorème 2.4 *Dans un $\mathcal{N}$-lattice les conditions suivantes:*

(L) $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$

(L1) $a \to (b \vee c) = (a \to b) \vee (a \to c)$

(L2) $(a \wedge b) \to c = (a \to c) \vee (b \to c)$

sont equivalentes deux à deux.

3. Le problème de la décision

Soit $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ un ensemble de n variables propositionelles. L'ensemble $\mathcal{F}_n$ de polynomes de n variables est défini par les conditions suivantes:

1) $g_i \in \mathcal{F}_n,\ (i = 1, 2, \ldots, n)$.

2) Si $p, q \in \mathcal{F}_n$ alors $(p \wedge q) \in \mathcal{F}_n,\ (p \vee q) \in \mathcal{F}_n,\ \sim p \in \mathcal{F}_n,\ (p \to q) \in \mathcal{F}_n$.

L'ensemble $\mathcal{F}$ de tous les polynomes est défini par la formule

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_n \cup \ldots.$$

Si $p \in \mathcal{F}_n$ nous écrirons $p = p(g_1, g_2, \ldots, g_n)$. Étant donné un $\mathcal{N}$-lattice A et un polynome $p = p(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ soit p_A la *fonction polynomial* qu'on obtient en considérant $g_1, g_2, \ldots, g_n$ comme des variables sur A; donc p_A est une application de A^n dans A.

Nous écrirons $p \equiv q$ si $p_A = q_A$ sur toutes les $\mathcal{N}$-lattices A et nous dirons que p et q sont équivalents (identiques).
Dans ce qui suit nous allons considérer seulement des $\mathcal{N}$-lattices linéaires. Nous convenons de représenter la $\mathcal{N}$-chaîne avec k éléments par la notation C_k.
On peut démontrer le résultat suivant:

Théorème 3.1 *Pour que deux polynomes $p(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ et $q(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ soient identiques, dans toutes les $\mathcal{N}$-lattices linéaires, il faut et il suffit qu'ils soient identiques dans les $\mathcal{N}$-chaînes C_{2n+1} et C_{2n+2}, ou, ce qui revient au même, qu'ils soient identiques dans la $\mathcal{N}$-chaîne C_{2n+3}.*

Posons

$$(1) \quad g_1 \succ\!\!\!\longrightarrow g_2 = (g_1 \rightarrow g_2) \wedge (\sim g_2 \rightarrow \sim g_1).$$

Alors, en utilisant le théorème précédent, on peut démontrer l'identité :

$$(L3) \quad g_1 \vee g_2 = ((g_1 \succ\!\!\!\longrightarrow g_2) \succ\!\!\!\longrightarrow g_2) \wedge ((g_2 \succ\!\!\!\longrightarrow g_1) \succ\!\!\!\longrightarrow g_1).$$

en utilisant la $\mathcal{N}$-chaîne C_7.

Il peut se faire, par analogie avec les algèbres de Heyting, que l'égalité (L3) soit équivalente à (L), mais nous ne savons pas le démontrer.

Définition 3.1 *Nous dirons qu'un $\mathcal{N}$-lattice K est caractéristique pour la classe des $\mathcal{N}$-lattices linéaires si la condition suivante est vérifiée:*

- *Pour qu'une identité $p \equiv q$ soit valable dans les $\mathcal{N}$-lattices linéaires il faut et il suffit que: $p_K = q_K$.*

L'ensemble K de tous les nombres rationels de la forme $\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}$ (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$) ordonné par la rélation $\leq$ est un réticulé distributif. Si nous posons pour $x \in K$, $\sim x = 1 - x$, alors K est une chaîne de Kleene.
Donc, si nous posons $a \rightarrow b = a \Rightarrow (\sim a \vee b)$, le systéme $(K, 1, \sim, \wedge, \vee, \rightarrow)$ est une $\mathcal{N}$-lattice linéaire.

Théorème 3.2 $(K, 1, \sim, \vee, \wedge, \rightarrow)$ *est une $\mathcal{N}$-lattice caractéristique pour la classe des $\mathcal{N}$-lattices linéaires.*

Quelques uns des résultats que nous indiquons dans cette note sont des généralisations naturelles pour les $\mathcal{N}$-lattices des résultats que nous avons obtenu pour les algèbres de Heyting telles que :

$$(a \Rightarrow b) \vee (b \Rightarrow a) = 1,$$

(voir [4], [5], [8]) en suivant un chemin ouvert par M. Ward [11].

Referencias

[1] Bialynicki-Birula A. and Rasiowa H., *On the representation of quasi-boolean algebras.* Bull. Acad. Pol. Sc. classe III, 5 (1957), 254-261.

[2] Brignole D., *Equational characterization of Nelson Algebras.* Notre Dame J. of Formal Logic 10 (1969), 285-297.

[3] Brignole D. et Monteiro A., *Caractérisation des algèbres de Nelson par des égalités I, II.* Proc. of Japan Academy 43 nº 4 (1967), 279-283, 284-285.

[4] Monteiro A., *L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques.* Segundo Symposium de Matemáticas, Villavicencio, Mendoza, Argentina, 21 al 25 de julio de 1954, publié par l'Unesco, Montevideo,1954, 129-161.

[5] Monteiro A., *Linéarisation de la logique positive de Hilbert-Bernays.* Revista de la U.M.A., 20 (1962), 308-309.

[6] Monteiro A., *Construction des algèbres de Nelson finies.* Bull. Acad. Pol. des Sc., Série III Sc. Math. Astr. et Phys., 11 (1963), 359-362.

[7] Monteiro A., *Construction des Algèbres de Łukasiewicz trivalentes dans les algèbres de Boole Monadiques I.* Math. Japonicae, 12 (1967), 1-23.

[8] Monteiro A., *L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques I.* Notas de Lógica Matemática, 29 (1974), 1-114, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina.

[9] Rasiowa H., *$\mathcal{N}$-lattices and constructive logic with strong negation.* Fund. Math., 46 (1958), 61-80.

[10] Rasiowa H., *An algebraic aproach to non-classic logic,* 408 pag. North-Holland, Amsterdam, 1974.

[11] Ward M., *Structure residuation.* Ann. Math. 33 (1938), 558-568.