Construction des algèbres de Boole libres dans les algèbres de Łukasiewicz trivalentes libres

Antonio Monteiro

Instituto de Matemática - Universidad Nacional del Sur - 1966 [1]

Bahía Blanca - Argentina

1 Introduction

L'algèbre de Lindenbaum du calcul propositionnel classique dont l'alphabet contient un nombre cardinal $\alpha > 0$ de variables propositionnelles est l'algèbre de Boole libre $\mathbf{B}(\alpha)$ ayant α générateurs libres et d'une façon analogue, on peut montrer que l'algèbre de Lindenbaum du calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz dont l'alphabet contient α de variables propositionnelles est l'algèbre de Łukasiewicz trivalente libre $\mathbf{L}(\alpha)$ ayant α générateurs libres. Nous nous proposons d'indiquer dans cette note une construction permetant d'obtenir $\mathbf{B}(\alpha)$ a partir de $\mathbf{L}(\alpha)$. Pour cela nous avons besoin de rappeler un certain nombre de résultats sur la théorie des homomorphismes dans les algèbres de Łukasiewicz trivalentes dont les démonstrations ont eté indiquées dans [4], [5], et que le lecteur pourra, sans dificulté, retrouver par lui même.

2 Les algèbres de Łukasiewicz trivalentes

La notion d'algèbre de Łukasiewicz trivalente, a été introduite et leur théorie dévelop-pée par Gr. Moisil [1], [2], [3].

Ces algèbres jouent dans le calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz un rôle analogue à celui des algèbres de Boole dans le calcul propositionnel classique.

La définition suivante (voir [4], [5]) est équivalente à celles qui on été indiquées par Moisil.

Définition 2.1 *Une algèbre de Łukasiewicz trivalente est un système* $(L, 1, \sim, \nabla, \vee, \wedge)$ *formé par 1) un ensemble non vide L; 2) un élément* $1 \in L$*; 3) deux fonctions de L dans L représentées par* $\sim$ *et* ∇*; 4) deux fonctions de* $L \times L$ *dans L représentées par* $\vee$ *et* $\wedge$ *, de telle manière que les conditions suivantes soient vérifiées:*

[1] *Note des rédacteurs: Ces résultats ont été exposées dans un Seminaire due à l'Instituto de Matemática de l'Universidad Nacional del Sur.*

Axiome L1) L est un réticulé distributif par rapport aux opérations $\vee$ et $\wedge$, et 1 *est le dernier élément de L.*

Axiome L2) L'opération $\sim$ vérifie les conditions:

2.1) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$.

2.2) $\sim\sim x = x$.

Axiome L3) L'opération ∇ vérifie les conditions:

3.1) $\sim x \vee \nabla x = 1$.

3.2) $\sim x \wedge x = \sim x \wedge \nabla x$.

3.3) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$.

Nous dirons aussi que L est une algèbre de Łukasiewicz.

Pour identifier cette définition avec celles qui on été indiquées par Moisil on doit poser $\sim x = Nx$ et $\nabla x = \mu x$.
Nous supposerons connues les régles de calcul valables dans ces algèbres, pour la démonstration desquelles nous renvoyons aux travaux de Moisil.
Si nous posons $0 = \sim 1$ alors on peut montrer que 0 est le premier élément du réticulé L. L'opération de *nécéssité* ($\triangle$) est définie par: $\triangle x = \sim \nabla \sim x,\ \ x \in L$.

Soit $T = \{0, 1/2, 1\}$ l'ensemble ordonné où $0 < 1/2 < 1$. Donc T est un réticulé distributif avec premier et dernier éléments 0 et 1 respectivement. Si nous posons $\sim 0 = 1$, $\sim (1/2) = 1/2$, $\sim 1 = 0$ et $\nabla 0 = 0$, $\nabla(1/2) = \nabla 1 = 1$, alors T est une algèbre de Łukasiewicz trivalente. Observons que $\triangle 0 = \triangle(1/2) = 0$, $\triangle 1 = 1$ et que le sous-ensemble $B = \{0, 1\}$ de T est une sous-algèbre de T.

L'example précedent est le plus important car:

Théorème 2.1 *Toute algèbre de Łukasiewicz trivalente, avec plus qu'un élément, est produit subdirect d'algèbres B et T.* [Gr.C. Moisil]

Si L est une algèbre de Łukasiewicz, nous noterons par $B(L)$ l'ensemble de touts les éléments booléens de L, c'est-à-dire:

$$B(L) = \{x \in L : \nabla x = x\} = \{x \in L : \triangle x = x\}.$$

Lemme 2.1 *Si R est un réticulé distributif avec premier et dernier élément et $X \subseteq R$ alors le filtre engendré par X dans R est l'ensemble:*

$$F(X) = \{y \in R : \text{il existent des éléments } x_1, x_2, \ldots, x_n \in X \text{ tels que } \bigwedge_{i=1}^{n} x_i \leq y\}.$$

Définition 2.2 *Une application h d'une algèbre de Łukasiewicz A dans une algèbre de Łukasiewicz A' sera dite un L-homomorphisme de A dans A', si les conditions suivantes sont vérifiées* [4]*:*

H1) $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$,

H2) $h(\sim x) = \sim h(x)$,

H3) $h(\nabla x) = \nabla h(x)$.

Définition 2.3 *Une partie F d'une algèbre de Łukasiewicz L sera dite un $\triangle$-filtre si:*

F1) *F est un filtre du réticulé distributif L,*

F2) *Si $a \in F$ alors $\triangle a \in F$.*

Lemme 2.2 *Si L et L' sont des algèbres de Łukasiewicz et h un L-homomorphisme de L dans L', alors: $h(B(L)) \subseteq B(L')$, et la restriction h' de h a l'ensemble $B(L)$ est un homomorphisme booléen de $B(L)$ dans $B(L')$.*

Il est bien connue que:

Lemme 2.3 *Si h est un homomorphisme booléen de l'algèbre de Boole A sur l'algèbre de Boole A' et X un sous-ensemble de générateurs de A, c'est-à-dire $SB(X) = A$, alors $A' = SB(h(X))$.*

Lemme 2.4 *Si L est une algèbre de Łukasiewicz, $G \subseteq L$, et $L' = SL(G)$ la sous-algèbre de Łukasiewicz de L engendrée par l'ensemble G, alors le sous-ensemble $\triangle G \cup \nabla G$ de $B(L)$ vérifie: $SB(\triangle G \cup \nabla G) = B(L')$,* [4]. [2]

Corollaire 2.1 *Si G est un ensemble de générateurs de L, c'est-à-dire $SL(G) = L$, alors $B(L) = SB(\triangle G \cup \nabla G)$.*

Observation 2.1 *Si L est une algèbre de Łukasiewicz, $X \subseteq B(L)$, nous noterons par $F_B(X)$ le filtre de $B(L)$ engendrée par l'ensemble X et par $F(X)$ le filtre de L engendrée par l'ensemble X. Il est facile a voir que $F_B(X) = F(X) \cap B(L)$.*

Soit $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\alpha)$ l'algèbre de Łukasiewicz avec un ensemble $G = \{g_i : i \in I\}$ de générateurs libres de puissance α ; $\nabla G = \{\nabla g_i : i \in I\}$, et $F = F_B(\nabla G)$. Considérons l'algèbre de Boole quotient $\mathcal{B} = B(\mathcal{L})/F$ et représentons par la notation $|b|$ la classe d'équivalence correspondante que contient l'élément $b \in B(\mathcal{L})$. Dans ces conditions nous pouvons afirmer que:

Théorème 2.2 *$\mathcal{B}$ est l'algèbre de Boole ayant pour générateurs libres les éléments $|\triangle g_i|$, $i \in I$, et la puissance de l'ensemble $G^* = \{|\triangle g_i| : i \in I\}$ est égale à α.*

[2]L.Monteiro (1994), a indiquée une démonstration plus simple que celle de A. Monteiro, voir leur démonstration à la fin de cette note.

Dém. Démontrons tout d'abord que:

(I) F est un filtre propre de $B(\mathcal{L})$.

Si $F = B(\mathcal{L})$, alors $0 \in F$, et d'après le lemme 2.1 on déduit qu'il existent des éléments $\nabla g_{i_1}, \nabla g_{i_2}, \ldots, \nabla g_{i_n} \in \nabla G$ tels que:

$$0 = \bigwedge_{k=1}^{n} \nabla g_{i_k} = \nabla(\bigwedge_{k=1}^{n} g_{i_k}), \text{ et par conséquent on aurait : } \bigwedge_{k=1}^{n} g_{i_k} = 0.$$

Montrons que cela est impossible. Soit f la transformation de G dans l'algèbre T, définie par:

$$f(g_i) = 1, \quad \text{pour tout } i \in I$$

alors il existe un L-homomorphisme h de $\mathcal{L}$ dans T que prolonge f et par conséquant :

$$0 = h(0) = h(\bigwedge_{k=1}^{n} g_{i_k}) = \bigwedge_{k=1}^{n} h(g_{i_k}) = \bigwedge_{k=1}^{n} f(g_{i_k}) = 1,$$

cette contradiction montre que F est un filtre propre de $B(\mathcal{L})$.

Montrons que:

(II) Si $j, k \in I$, et $j \neq k$ alors les classes $|\triangle g_j|$, $|\triangle g_k|$, sont distincts.[3]

En effet supposons que $|\triangle g_j| = |\triangle g_k|$, alors nous aurons:

$$(1) \quad \triangle g_j \wedge t = \triangle g_k \wedge t, \quad \text{où } \ t \in F.$$

Considérons la transformation f de G dans l'algèbre T définie par:

$$f(g_i) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } \ i = k \\ & \\ 1 & \text{si } \ i \neq k \end{cases} , \qquad i \in I \ .$$

Cette transformation f peut se prolonger à un L-homomorphisme h de $\mathcal{L}$ dans T, pour lequel nous aurons:

$$(2) \qquad h(\nabla g_i) = \nabla h(g_i) = \nabla f(g_i) = 1, \quad \text{pour tout } \ i \in I.$$

Soit $D = h^{-1}(1)$ le noyau du L-homomorphisme h, donc $\nabla g_i \in D$, pour tout $i \in I$, et alors d'aprés le lemme 2.1, nous aurons (3) $F \subseteq D$.
Comme $j \neq k$, d'après la définition de f nous aurons $f(g_k) = 1/2$ et $f(g_j) = 1$, donc (4) $h(\triangle g_j) = \triangle h(g_j) = \triangle f(g_j) = \triangle 1 = 1$, et (5) $h(\triangle g_k) = \triangle h(g_k) = \triangle f(g_k) = \triangle(1/2) = 0$.

De la condition (1) on déduit, que:

$$\triangle h(g_j) \wedge h(t) = h(\triangle g_j \wedge t) = h(\triangle g_k \wedge t) = \triangle h(g_k) \wedge h(t).$$

[3] *Note des rédacteurs: A partir de cette point, L. Monteiro a changée les démonstrations pour autres plus simples.*

Donc d'aprés (3), (4) et (5):

$$1 = h(t) = 1 \wedge h(t) = 0 \wedge h(t) = 0.$$

Cette contradiction montre que (II) est valable, et nous pouvons donc afirmer que:

$$\text{L'ensemble } \; G^* = \{|\triangle g_i| : i \in I\} \; \text{ à la puissance } \; \alpha.$$

Soit φ l'homomorphisme booléen naturel de $B(\mathcal{L})$ sur $B(\mathcal{L})/F$, c'est-à-dire $\varphi(b) = |b|$, $b \in B(\mathcal{L})$. D'après le lemme 2.3 l'homomorphisme φ transforme chaque ensemble de générateurs de $B(\mathcal{L})$ dans un ensemble de générateurs de $\mathcal{B}$. D'après le corollaire 2.1 nous savons que $B(\mathcal{L}) = SB(\triangle G \cup \nabla G)$, alors:

$$\{|\triangle g_i| : \; i \in I\} \;\; \cup \;\; \{|\nabla g_i| : \; i \in I\}$$

est un ensemble de générateurs de $\mathcal{B} = B(\mathcal{L})/F$. Mais comme, pour tout $i \in I$, la classe $|\nabla g_i| = |1| = F$ est le dernier élément de $\mathcal{B}$, on n'a pas besoin de la considerer un générateur, et nous pouvons donc affirmer que G^* est un ensemble de générateurs de $\mathcal{B}$.

(III) Toute application f' de l'ensemble $G^* \subseteq \mathcal{B}$ dans l'algèbre de Boole $B = \{0, 1\} \subseteq T$, peut être etendue a un homomorphisme booléen h' de $\mathcal{B}$ dans B.

Considérons l'application f de G dans T définie par les conditions suivantes:

$$f(g_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; f'(|\triangle g_i|) = 1 \qquad (1) \\ 1/2 & \text{si } \; f'(|\triangle g_i|) = 0 \qquad (2) \end{cases}.$$

Par conséquent nous aurons:

$$(3) \;\; \nabla f(g_i) = 1 \;\; \text{pour tout} \;\; i \in I\,,$$

$$\triangle f(g_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; f'(|\triangle g_i|) = 1 \\ 0 & \text{si } \; f'(|\triangle g_i|) = 0 \end{cases},$$

c'est-à-dire: (4) $\triangle f(g_i) = f'(|\triangle g_i|)$, pour tout $i \in I$.

L'application f de G dans T, peut se prolonger à un L-homomorphisme H de $\mathcal{L}$ dans T, et nous aurons d'après (3) que:

$$(5) \qquad H(\nabla g_i) = \nabla H(g_i) = \nabla f(g_i) = 1.$$

Le noyau $N = H^{-1}(1)$ de cet L-homomorphisme est un $\triangle$-filtre de $\mathcal{L}$, et d'après (5) nous avons $\nabla G \subseteq N$, donc $F(\nabla G) \subseteq N$, et alors, voir observation 2.1,

$$F = F_B(\nabla G) = F(\nabla G) \cap B(\mathcal{L}) \subseteq N \cap B(\mathcal{L}) \subseteq N,$$

d'où (6) $H(F) = \{1\}$.

Comme le L-homomorphisme H transforme des éléments booléens de $\mathcal{L}$ dans des éléments booléens de T, [voir lemme 2.2], et $B(T) = \{0,1\}$, alors nous avons $H(B(\mathcal{L})) = \{0,1\}$.

Soit h la restriction de H a l'ensemble $B(\mathcal{L})$, nous pouvons donc afirmer que h est un homomorphisme booléen de $B(\mathcal{L})$ sur $B = \{0,1\}$, et par (6) nous avons (7) $h(F) = \{1\}$. Remarquons que

$$(8) \ \text{“Si } x, y \in B(\mathcal{L}), \ \ x \in |y|, \text{ alors } h(x) = h(y)\text{”}.$$

En effet, comme $x \in |y|$ on a: $x \wedge d = y \wedge d$, où $d \in F$, donc

$$h(x) = h(x) \wedge 1 = h(x \wedge d) = h(y \wedge d) = h(y) \wedge 1 = h(y).$$

D'après le résultat précedent si nous posons $h'(|x|) = h(x)$, $x \in B(\mathcal{L})$, h' est une fonction de $B(\mathcal{L})/F$ sur B. Il est facile a voir que h' est un homomorphisme booléen. Nous allons montrer que h' prolonge f', c'est-à-dire que:

$$h'(|\triangle g_i|) = f'(|\triangle g_i|), \text{ pour tout } i \in I.$$

En utilisant (4) on a:

$$h'(|\triangle g_i|) = h(\triangle g_i) = H(\triangle g_i) = \triangle H(g_i) = \triangle f(g_i) = f'(|\triangle g_i|).$$

Montrons maintenant que G^* est un ensemble de génerateurs libres de $\mathcal{B}$.

(IV) Toute application f de l'ensemble G^* dans une algèbre de Boole A, peut être prolonger a un homomorphisme booléen de $\mathcal{B}$ dans A. *(la demonstration de cet point n'est pas contenue dans les notes de A. Monteiro.)*
Si A à un seule élément, il est évident que (IV) est verifiée. Si l'algèbre de Boole A est isomorphe a l'algèbre de Boole $\{0,1\}$ alors d'après (III) la condition (IV) est verifiée.
Supposons maintenat que A à plus qu'un élément et que A n'est pas simple, alors il est bien connue que A est isomorphe á une sous-algèbre de Boole A' de l'algèbre de Boole $P = \prod_{j \in J} \{A_j = A/M_j\}$, où $\{M_j : j \in J\}$ est l'ensemble de touts les filtres maximales de A, nous savons encore que $A_j \cong \{0,1\}$ pour tout $j \in J$. Nous notérons les éléments de P par $\sqsubset x_j \sqsupset_{j \in J}$ y par p_t la t-projection de P sur A_t, $t \in J$, c'est-à-dire $p_t(\sqsubset x_j \sqsupset_{j \in J}) = x_t$. On peut supposer que A est une sous-algèbre de P. Alors $f : G^* \to A$, $f(g^*) = g' = \sqsubset g'_j \sqsupset_{j \in J}$, $g^* \in G^*$.
Soit $f_j = p_j \circ f$, $j \in J$. Alors $f_j : G^* \to A_j \simeq \{0,1\}$ et par (III) chaque f_j peut être etendue a un homomorphisme booléen h_j de $\mathcal{B}$ sur A_j.
Soit h la fonction de $\mathcal{B}$ dans P définie par $h(x) = \sqsubset h_j(x) \sqsupset_{j \in J}$. Il est évident que h est un homomorphisme booléen. Voyons que h prolonge f.
En effet $h(g^*) = \sqsubset h_j(g^*) \sqsupset_{j \in J} = \sqsubset f_j(g^*) \sqsupset_{j \in J} = \sqsubset p_j(f(g^*)) \sqsupset_{j \in J} =$
$\sqsubset p_j(\sqsubset g'_j \sqsupset_{j \in J}) \sqsupset_{j \in J} = \sqsubset g'_j \sqsupset_{j \in J} = g' = f(g^*)$, quelque soit $g^* \in G^*$.
Par hypothesis $f(G^*) \subseteq A$, et comme $f(G^*) = h(G^*)$, nous aurons $h(G^*) \subseteq A$. $\square$

Note des rédacteurs: Si X est un ensemble finie, nous noterons par $N[X]$ le nombre d'eléménts de X. Dans le cas où G est fini et $N[G] = n$, n nombre naturel, nous savons que $N[\mathcal{L}] = 2^{2^n} \times 3^{3^n - 2^n}$ et que $N[B(\mathcal{L})] = 2^{3^n}$. D'après les résultats précedants $N[B(\mathcal{L})/F_B(\nabla G)] = 2^{2^n}$.
D'autre cotê nous savons que toutes les classes d'équivalence (module $F_B(\nabla G)$) de $B(\mathcal{L})$ ont le même nombre d'éléments, donc:

$$2^{2^n} = N[B(\mathcal{L})/F_B(\nabla G)] = \frac{N[B(\mathcal{L})]}{N[F_B(\nabla G)]} = \frac{2^{3^n}}{N[F_B(\nabla G)]}.$$

Cela montre que le nombre d'éléments de chaque classe d'équivalence est: $2^{3^n - 2^n}$.

Démonstration du lemme 2.4. *L.Monteiro (1995).*
Nous savons que si $b \in B(L)$ alors $\sim b$ est le complèment booléen de b. Si $b \in B(L)$, nous noterons par b^*, b or $\sim b$.

Lemme 2.5 *Si L est une algèbre de Łukasiewicz, $X \subseteq B(L)$, X finie alors $SB(X) = SL(X)$.*

Dém. Si $X = \emptyset$, alors $SB(\emptyset) = \{0, 1\} = SL(\emptyset)$. Supposons que $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Comme $SB(X)$ est une L-sous-algèbre de L telle que $X \subseteq SB(X)$ alors $SL(X) \subseteq SB(X)$. Soit $b \in SB(X)$, si $b = 0$ il est évident que $b \in SL(X)$. Si Si $b \neq 0$ alors il est bien connue que $b = \bigvee\limits_{k=1}^{r} m_k$, où $m_k = \bigwedge\limits_{i=1}^{n} {x^*}_i$. Comme ${x^*}_i \in SL(X)$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$, alors $m_k \in SL(X)$ pour tout k, $1 \leq k \leq r$, donc $b \in SL(X)$. □

Corollaire 2.2 *Si L est une algèbre de Łukasiewicz, $X \subseteq L$, X finie alors $SB(\triangle X \cup \nabla X) = SL(\triangle X \cup \nabla X)$.*

Dém. Est une conséquence du lemme 2.5, car $\triangle X \cup \nabla X$ est un sous-ensemble finie de $B(L)$. □

Si S est une L-sous-algèbre de l'algèbre de Łukasiewicz L et $x \in L$ nous notérons $SL(S, x)$ au lieu de $SL(S \cup \{x\})$.

Lemme 2.6 *Soit $x \in L$ et S une sous-algèbre de L qui vérifie $\nabla x, \sim \triangle x \in B(S)$, alors $B(SL(S, x)) = B(S)$.*

Dém. D'après l' hyphotèse on déduit que:

$$(1) \;\; \triangle x,\; \triangle \sim x,\; \nabla(x \wedge \sim x) \in B(S).$$

Si $s \in S$, nous posons: $\alpha(s) = s \wedge \triangle x$, $\beta(s) = s \wedge \triangle \sim x$, $\gamma(s) = s \wedge \nabla(x \wedge \sim x)$, $\delta(s) = s \wedge x \wedge \sim x$.
Il est bien connue que:

$$SL(S, x) = \{y = \alpha(s_1) \vee \beta(s_2) \vee \gamma(s_3) \vee \delta(s_4) : \text{ où } s_i \in S, 1 \leq i \leq 4\}.$$

Si $z \in B(SL(S,x)) = SL(S,x) \cap B(L)$ alors $\triangle z = z$ et

$$z = \alpha(s_1) \vee \beta(s_2) \vee \gamma(s_3) \vee \delta(s_4); \text{ où } s_i \in S, 1 \leq i \leq 4,$$

donc

$$z = \triangle z = \triangle\alpha(s_1) \vee \triangle\beta(s_2) \vee \triangle\gamma(s_3) \vee \triangle\delta(s_4)$$

et comme $\triangle\delta(s_4) = \triangle s_4 \wedge \triangle x \wedge \triangle \sim x \leq x \wedge \triangle \sim x = 0$, alors:

$$z = \triangle\alpha(s_1) \vee \triangle\beta(s_2) \vee \triangle\gamma(s_3).$$

De $\triangle s_i \in B(S)$, pour $i = 1,2,3$ on déduit en tenant compte de (1) que $z \in B(S)$.
Comme $S \subseteq SL(S,x)$ alors nous avons $B(S) = S \cap B(L) \subseteq SL(S,x) \cap B(L) = B(SL(S,x))$. □

Soit $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subseteq L$ et $L_0 = SB(\triangle G \cup \nabla G)$, $L_1 = SL(L_0, g_1)$, $L_2 = SL(L_1, g_2), \ldots, L_n = SL(L_{n-1}, g_n)$ alors:

Lemme 2.7 *$L_n = SL(G)$ et $B(SL(G)) = SB(\triangle G \cup \nabla G)$.*

Dém. Par construction nous avons $L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_n$, et $g_i \in L_i$, $1 \leq i \leq n$, donc $G \subseteq L_n$ et alors $SL(G) \subseteq L_n$.
Comme $\triangle G$, $\nabla G \subseteq SL(G)$, alors $\triangle G \cup \nabla G \subseteq SL(G)$, donc: (1) $SL(\triangle G \cup \nabla G) \subseteq SL(G)$.
Par hyphotèse G est un sous-ensemble finie, alors d'après le corollaire 2.2:
(2) $SB(\triangle G \cup \nabla G) = SL(\triangle G \cup \nabla G)$.
De (1) et (2) on a $L_0 = SB(\triangle G \cup \nabla G) \subseteq SL(G)$, donc comme $g_1 \in SL(G)$ on a $L_1 = SL(L_0, g_1) \subseteq SL(G)$. De $g_i \in SL(G)$, et $L_{i-1} \subseteq SL(G)$, $2 \leq i \leq n$, on a $L_i = SL(L_{i-1}, g_i) \subseteq SL(G)$, $2 \leq i \leq n$. Cela montre que $L_n = SL(G)$.
Nous avons vue que $L_0 = SB(\triangle G \cup \nabla G) \subseteq SL(G)$, donc $L_0 = L_0 \cap B(L) \subseteq SL(G) \cap B(L) = B(SL(G))$.
Comme $\nabla g_i, \sim \triangle g_i \in B(L_0) = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_n$, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, alors d'après le lemme 2.6, $B(L_1) = B(SL(L_0, g_1)) = B(L_0) = L_0$, et alors $B(L_j) = B(SL(L_{j-1}, g_j)) = B(L_{j-1}) = L_0$, $2 \leq j \leq n$. □

Montrons finalement le lemme 2.4. Soit G un sous-ensemble de l'algèbre de Łukasiewicz L, alors il est bien connue que:

$$SL(G) = \bigcup\{SL(G') : G' \subseteq G,\ G' \text{ finie}\}.$$

Nous allons montrer que: $B(SL(G)) = SB(\triangle G \cup \nabla G)$. Comme $\triangle G \cup \nabla G \subseteq B(L)$ et $\triangle G \cup \nabla G \subseteq SL(G)$, alors $\triangle G \cup \nabla G \subseteq SL(G) \cap B(L) = B(SL(G))$, donc $SB(\triangle G \cup \nabla G) \subseteq B(SL(G))$. Si $b \in B(SL(G))$ alors $b = \triangle b$ et $b \in SL(G)$, donc $b \in SL(G')$ où $G' \subseteq G$ et G' finie, alors par le lemme 2.7, $B(SL(G')) = SB(\triangle G' \cup \nabla G') \subseteq SB(\triangle G \cup \nabla G)$, et comme $b \in B(SL(G'))$ on a $b \in SB(\triangle G \cup \nabla G)$.

Bibliographie

[1] Moisil Gr. C., *Recherches sur les logiques non-chrysipiennes*, Ann. Sc. de l'Université de Yassy, 26 (1940), 431- 466.

[2] Moisil Gr. C., *Notes sur les logiques non-chrysipiennes*, Ann. Sc. de l'Université de Yassy, 27 (1941), 86-98.

[3] Moisil Gr. C., *Sur les idéaux des algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Analele Universitatii C.I. Parohn. Seria Acta Logica 3 (1960), 83-95.

[4] Monteiro A., *Cours sur les algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1963.

[5] Monteiro A., *Sur la définition des algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. de la Soc. Math. et Phys. de la R.P. Roumaine, nouvelle série 7 (55), (1963), 1-12. Préprint in Notas de Lógica Matemática 21, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1974.