Les Algèbres de Tarski avec un nombre fini de générateurs libres

Antonio Monteiro et Luisa Iturrioz

Instituto de Matemática - Universidad Nacional del Sur - 1965

Bahía Blanca - Argentina

1 Introduction

Soit $A = 2^E$ la famille de toutes les parties d'un ensemble donné E et considérons l'opération binaire $\rightarrow$ définie sur A au moyen de la formule :

$$X \rightarrow Y = \mathcal{C}X \cup Y$$

(où $\mathcal{C}$ représente le complément de X par rapport à E et $\cup$ l'opération de réunion d'ensembles). Dans ces conditions le système $(A, \rightarrow)$ est une *algèbre*. Une *sous-algèbre* de A est une partie non-vide, A' de A telle que: si $X, Y \in A'$ alors $X \rightarrow Y \in A'$. Si $\mathcal{G}$ est une partie de A, la *sous-algèbre engendreé* par $\mathcal{G}$ est l'intersection $S(\mathcal{G})$ de toutes les sous-algèbres de A qui contient $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{G}$ est une partie finie de A:

$$\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$$

il est bien connu que $S_n = S(\mathcal{G})$ est un ensemble fini et que le nombre de ses éléments $N(S_n)$ vérifie la condition:

$$N(S_n) < 2^{2^n}.$$

Nous nous proposons dans cette note, de déterminer le nombre maximun N, d'éléments qui peut avoir l'algèbre engendré par un nombre fini de sous-ensembles $G_1, G_2, \ldots, G_n$, d'un ensemble arbitraire E.

Nous voulons démontrer ici, que:

$$N = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}.$$

Un problème complètement analogue est celui qu'on obtient en remplaçant l'opération d'implication par celle de différence, définie au moyen de la formule:

$$X - Y = X \cap \mathcal{C}Y.$$

Nous montrerons que N est le nombre de formules logiquement distincts qu'on peut obtenir dans le calcul propositionnel implicatif classique, avec n variables propositionnelles, ou ce qui est équivalent, que N est le nombre d'éléments de l'algèbre de Tarski avec n générateurs libres [4].

2 Les algèbres de Tarski

Nous allons reproduire dans ce paragraphe un certain nombre de notions et de résultats qui ont été exposés par A. Monteiro, pendant le premier semestre de 1960, [5] et qui ont un rapport direct avec le problème que nous étudions ici.

Définition 2.1 *Soit* $(A, \to, 1)$ *un système formé par un ensemble non vide* A*, une opération binaire* $\to$ *définie sur* A*, et* $1 \in A$*, qui vérifie les axiomes suivants:*

T1) $1 \to a = a$.

T2) $a \to a = 1$.

T3) $a \to (b \to c) = (a \to b) \to (a \to c)$.

T4) $(a \to b) \to b = (b \to a) \to a$.

Nous dirons alors que A *est une algèbre de Tarski* [1], [2], [6].

Parmi les règles de calcul valables, nous pouvons indiquer les suivants:

H1) $a \to (b \to a) = 1$.

H2) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$.

H3) $a \to 1 = 1$.

H4) Si $a \to b = 1$ et $b \to a = 1$, alors $a = b$.

Nous pouvons donc affirmer que A est un modèle implicatif au sens de L. Henkin, [3].

Définition 2.2 *Nous écrirons* $a \leq b$*, pour indiquer que* $a \to b = 1$. [3].

Théorème 2.1 *La relation* $\leq$ *est une relation d'ordre, et* $x \leq 1$*, pour tout* $x \in A$. [3].

Théorème 2.2 *Une algèbre de Tarski* A *est un ensemble réticulé superiéurement. Plus précisement, si* $a, b \in A$*, alors:*

$$a \vee b = (a \to b) \to b.$$

Théorème 2.3 *Si* A *est une algèbre de Tarski avec un premier élément* 0*, alors* A *est une algèbre de Boole, par rapport à la relation d'ordre* $\leq$ *indiqué dans le théorème 2.1. Le complément de* $a \in A$ *est donné par la formule* $-a = a \to 0$.

Corollaire 2.1 *Si A est une algèbre de Tarski, et $a \in A$, alors l'ensemble $D(a) = \{x \in A : a \leq x\}$ est une algèbre de Boole.*

D'autres règles de calcul valables dans une algèbre de Tarski, sont:

T5) $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$. (loi de commutation)

T6) $b \leq a \to b$.

T7) $a \vee (b \to c) = (a \vee b) \to (a \vee c)$.

En effet, soit

$$z = (a \vee b) \to (a \vee c).$$

D'après le théorème 2.2,

$$z = ((b \to a) \to a) \to ((c \to a) \to a).$$

D'après T5,

$$z = (c \to a) \to (((b \to a) \to a) \to a) = (c \to a) \to ((b \to a) \vee a).$$

En vertu de T6,

$$z = (c \to a) \to (b \to a),$$

et d'après T5,

$$z = b \to ((c \to a) \to a),$$

et selon T3,

$$z = (b \to (c \to a)) \to (b \to a) = ((b \to c) \to (b \to a)) \to (b \to a),$$

et d'après le théorème 2.2 et T3,

$$z = (b \to c) \vee (b \to a) = (b \to a) \vee (b \to c) =$$

$$((b \to a) \to (b \to c)) \to (b \to c) = (b \to (a \to c)) \to (b \to c),$$

et par T5 :

$$z = (a \to (b \to c)) \to (b \to c) = a \vee (b \to c).$$

3 Les algèbres de Tarski avec un nombre fini de générateurs libres

Soit A une algèbre de Tarski et $X \subseteq A$, nous noterons par $ST(X)$ la sous-algèbre de Tarski de A engendrée par X, et si A est une algèbre de Boole, par $SB(X)$ la sous-algèbre de Boole de A engendrée par X.

Il est bien connu que si A est une algèbre de Boole et nous posons $x \to y = -x \vee y$, où $-x$ est le complément de $x \in A$, alors $(A, \to, 1)$ est une algèbre de Tarski, où 1 est le dernier élément de A.

Lemme 3.1 *Si A est une algèbre de Boole, et $X \subseteq A$ alors $SB(X) = ST(\{0\} \cup X)$, où 0 est le premier élément de A.*

Lemme 3.2 *Soient A et A' des algèbres de Tarski, h un homomorphisme de A dans A', et $X \subseteq A$, alors: $h(ST(X)) = ST(h(X))$.*

La notion d'algèbre de Tarski ayant n générateurs libres (où n est un nombre naturel) est définie de la manière habituelle. Son existence et son unicité résultent d'un théorème d'algèbre universelle, du a Birkhoff.

Soit $T(n)$ l'algèbre de Tarski avec un ensemble fini de n générateurs libres, $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, k un nombre naturel tel que $1 \leq k \leq n$, s_k la borne supérieure de k générateurs différents deux à deux, et $B_{n-k} = \{x \in T(n) : s_k \leq x\}$, alors :

Théorème 3.1 *B_{n-k} est l'algèbre de Boole ayant $(n-k)$ générateurs libres.*

Dem. Nous pouvons supposer, sans perdre de généralité (il suffit de changer la notation) que:

$$s_k = g_1 \vee g_2 \vee \cdots \vee g_k.$$

Prenons:

$$g'_i = s_k \vee g_{k+i}, \ \ 1 \leq i \leq n-k,$$

et considérons la transformation h défine sur $T(n)$, par:

$$h(x) = s_k \vee x.$$

Alors:

1) h est un homomorphisme de $T(n)$ dans $T(n)$.
   En effet: $h(x \to y) = s_k \vee (x \to y) = (s_k \vee x) \to (s_k \vee y) = h(x) \to h(y)$.

2) h est un homomorphisme de $T(n)$ sur B_{n-k}.
   En effet: $s_k \leq s_k \vee x = h(x)$, donc $h(x) \in B_{n-k}$, pour tout $x \in T(n)$.
   Si $x \in B_{n-k}$, c'est-à-dire, si $s_k \leq x$, alors $h(x) = s_k \vee x = x$, et alors $h(T(n)) = B_{n-k}$.

Soient $G_k = \{s_k, g'_1, g'_2, \ldots, g'_{n-k}\} \subseteq B_{n-k}$ et $G' = \{g'_1, g'_2, \ldots, g'_{n-k}\}$.

3) $ST(G_k) = B_{n-k}$.
   h est un homomorphisme de $T(n)$ sur B_{n-k}, alors d'après lemme 3.2 on a:

$$B_{n-k} = h(T(n)) = h(ST(G)) = ST(h(G)),$$

   et comme

$$h(g_1) = h(g_2) = \cdots = h(g_k) = s_k$$

$$h(g_{k+1}) = {g'}_1, h(g_{k+2}) = {g'}_2, \ldots, h(g_n) = {g'}_{n-k}$$

   alors $h(G) = G_k$, donc $B_{n-k} = ST(G_k)$.

4) Les éléments ${g'}_1, {g'}_2, \ldots, {g'}_{n-k}$, engendrent l'algèbre de Boole B_{n-k}.
   B_{n-k} est une algèbre de Tarski, qui possède s_k comme premier élément, alors B_{n-k} est une algèbre de Boole, donc en tenant compte du lemme 3.1 et 3) on a:

$$B_{n-k} = ST(G_k) = ST(\{s_k\} \cup G') = SB(G').$$

Soit L_{n-k} l'algèbre de Boole avec un ensemble $G^* = \{b_1, b_2, \ldots, b_{n-k}\}$ de générateurs libres.
Considérons la transformation de $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subseteq T(n)$, dans L_{n-k} définie par:

$$\alpha(g_1) = \alpha(g_2) = \cdots = \alpha(g_k) = 0,$$

$$\alpha(g_{k+1}) = b_1, \alpha(g_{k+2}) = b_2, \ldots, \alpha(g_n) = b_{n-k}.$$

Alors α peut se prolonger a un homomorphisme β de $T(n)$ dans l'algèbre de Tarski $(L_{n-k}, \rightarrow)$.
Par lemme 3.2 et 3) nous avons

$$\beta(B_{n-k}) = \beta(ST(G_k)) = ST(\beta(G_k)).$$

Mais:

$$\beta(s_k) = \beta(\bigvee_{i=1}^{k} g_i) = \bigvee_{i=1}^{k} \beta(g_i) = \bigvee_{i=1}^{k} \alpha(g_i) = 0,$$

$$(i)\quad \begin{cases} \beta({g'}_1) = \beta(s_k \vee g_{k+1}) = \beta(s_k) \vee \beta(g_{k+1}) = \alpha(s_k) \vee \alpha(g_{k+1}) = 0 \vee b_1 = b_1, \\ \beta({g'}_2) = \beta(s_k \vee g_{k+2}) = \beta(s_k) \vee \beta(g_{k+2}) = \alpha(s_k) \vee \alpha(g_{k+2}) = 0 \vee b_2 = b_2, \\ \quad\vdots \\ \beta({g'}_{n-k}) = \beta(s_k \vee g_n) = \beta(s_k) \vee \beta(g_n) = \alpha(s_k) \vee \alpha(g_n) = 0 \vee b_{n-k} = b_{n-k}, \end{cases}$$

donc en tenant compte du lemme 3.1

$$\beta(B_{n-k}) = ST(\beta(G_k)) = ST(\{0\} \cup G^*) = SB(G^*) = L_{n-k}.$$

De (i) on déduit que: ${g'}_1, {g'}_2, \ldots, {g'}_{n-k}$ sont distincts deux á deux. Alors, on peut dire que B_{n-k} est une algèbre de Boole ayant $(n-k)$ générateurs distincts et que L_{n-k} est une image homomorphique de B_{n-k}, et par conséquant B_{n-k} est isomorphe à L_{n-k}. □

Nous pouvons maintenant démontrer que:

Théorème 3.2

$$N = \mathbf{N}(T(n)) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}.$$

Dem. Soit $A_i = \{x \in T(n) : g_i \leq x\}$. Comme $T(n)$ est l'algèbre de Tarski engendrée par G, alors d'après T6 on a : pour chaque $x \in T(n)$, il existe, au moins, un indice i, $1 \leq i \leq n$, tel que $g_i \leq x$. Donc il est clair que $T(n) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_i$, et alors $\mathbf{N}(T(n)) = \mathbf{N}(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_i)$.

Mais par théorème 3.1 : $\mathbf{N}(A_1) = \mathbf{N}(A_2) = \cdots = \mathbf{N}(A_n) = 2^{2^{n-1}} = \mathbf{N}(B_1)$.

Remarquons que si $i \neq j$,

$$A_i \cap A_j = \{x \in T(n) : g_i \vee g_j \leq x\} = B_{n-2},$$

et

$$\mathbf{N}(A_i \cap A_j) = \mathbf{N}(B_{n-2}) = 2^{2^{n-2}}.$$

D'une manière analogue:

$$\bigcap_{i=1}^{k} A_i = \{x \in T(n) : \bigvee_{i=1}^{k} g_i \leq x\} = B_{n-k}.$$

Alors

$$\mathbf{N}(\bigcap_{i=1}^{k} A_i) = 2^{2^{n-k}}.$$

In particulier, pour $n = k$,

$$\mathbf{N}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = 2^{2^0} = 2.$$

D'après un théorème *d'Analyse Combinatoire*, qui est une generalization du ce que dit : $\mathbf{N}(A \cup B) = \mathbf{N}(A) + \mathbf{N}(B) - \mathbf{N}(A \cap B)$, nous avons:

$$\mathbf{N}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \mathbf{N}(\bigcap_{i=1}^{k} A_i).$$

Alors

$$N = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}},$$

ce qui achève la démonstration. □

References

[1] Abbott J.C., *Semi-boolean algebras*, Mat. Vesnik, 4 (19), (1967), 177-198.

[2] Abbott J.C., *Implicational algebras*, Bull. Math, R.S. Roumaine, 11 (1967), 3-23.

[3] Henkin L., *An algebraic characteriztion of quantifiers*, Fund. Math., 37 (1950), 63-74.

[4] Iturrioz L. y Monteiro A., *Cálculo proposicional implicativo clásico con n variables proposicionales*, Rev. Un. Mat. Argentina, XXII, 3 (1965), 146.

[5] Monteiro A., *Cours sur les algèbres de Hilbert et de Tarski*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1960.

[6] Rasiowa H., *An algebraic approach to non-classical logics*, North-Holland, Amsterdam, 1974.