Informe Técnico Interno

Número 102

Sobre álgebras de Nelson

Antonio A. R. Monteiro

Redactores: Luiz F. Monteiro, Rosana Entizne,

Sonia Savini e Ignacio Viglizzo

INMABB
CONICET - UNS

Bahía Blanca, 2017

Sobre álgebras de Nelson

Antonio A. R. Monteiro

Redactores: Luiz F. Monteiro*, Rosana Entizne*
Sonia Savini* e Ignacio Viglizzo**

* Departamento de Matemática-Universidad Nacional del Sur
** INMABB-CONICET-Universidad Nacional del Sur

lfmonteiro0510@gmail.com, rentizne@gmail.com,
ssavini@criba.edu.ar, viglizzo@gmail.com

Resumen

A. Monteiro obtuvo diversos resultados sobre las álgebras de Nelson, de los cuales solo publicó sus enunciados [29, 30, 35, 36]. Las demostraciones de parte de estos resultados se pueden ver en la tesis de magíster de I. Viglizzo, [59]. En las secciones 1 y 2 vamos a reproducir resultados inéditos encontrados en 2012 en manuscritos de A. Monteiro, [37], y que fueron obtenidos entre 1978 y octubre de 1980. Además incluímos algunos resultados de los redactores. En la sección 3, presentamos una construcción de A. Monteiro de un álgebra de Nelson centrada $M(N)$ a partir de un álgebra de Nelson N dada. En la sección 4, recordamos cómo a partir de un álgebra de Heyting H, D. Vakarelov, [58], construye un álgebra de Nelson centrada $V(H)$, generalizamos otro resultado de Vakarelov e indicamos una construcción del álgebra de Post trivalente con n generadores libres. Probamos que si B es un álgebra de Boole y por lo tanto es un álgebra de Nelson y de Heyting, entonces $M(B)$ y $V(B)$ son isomorfas, y recíprocamente, que si H es un álgebra de Heyting y de Nelson tal que $M(H)$ es isomorfa a $V(H)$ entonces H es un álgebra de Boole. También en esta sección incluímos diversos resultados, no publicados, de A. Monteiro, relacionados con la construcción de Vakarelov. En la sección 5 indicamos algunos ejemplos de la construcción de Vakarelov, y en la sección 6, nuevos resultados sobre álgebras de Nelson con centro y con eje. Hemos introducido otros temas para hacer la exposición lo más autocontenida posible.

Índice

1. Introducción **3**

1.1. Álgebras de Nelson 3

1.2. Álgebras de Heyting 9

1.3. Las álgebras C_n, $n \in \mathbb{N}$ 10

1.4. Los abiertos y cerrados de un álgebra de Nelson 11

2. Álgebras de Nelson con centro y con eje **14**

3. Construcción de A. Monteiro **41**

4. Construcción de Vakarelov **49**

5. Ejemplos **69**

6. Otros resultados sobre álgebras con eje y con centro **72**

1. Introducción

1.1. Álgebras de Nelson

La noción de álgebra de Nelson o N-lattice fue introducida por H. Rasiowa, [54], y juega en el estudio del cálculo proposicional constructivo con negación fuerte un rol análogo a aquel de las álgebras de Boole en el cálculo proposicional clásico. Se debe así a H. Rasiowa la contribución decisiva para que se pueda considerar el cálculo proposicional constructivo con negación fuerte como un capítulo especial del álgebra, que tiene precisamente por objetivo el estudio de las álgebras de Nelson. En 1962, A. Monteiro dicta en la Universidad Nacional del Sur un curso, [20], en donde expone nuevos resultados, según sus palabras, "*obtenidos en el segundo semestre de 1961, durante mi estadía como profesor visitante de la Universidad de Buenos Aires.*"

En los años siguientes, algunos de estos resultados fueron publicados [20, 24, 25, 36, 29, 35, 28], mientras que otros permanecieron inéditos, siendo su principal colaboradora, en esos años, Diana Brignole, con quien obtuvo una definición ecuacional de las álgebras de Nelson [7]. Posteriormente D. Brignole [4, 5] indicó una demostración puramente aritmética de ese resultado. Con L. Monteiro determinó en [38, 39] axiomas independientes para estas álgebras, los que se indican a continuación.

Definición 1.1 *Un álgebra* $(N, 1, \sim, \wedge, \vee, \to)$ *de tipo* $(0, 1, 2, 2, 2)$ *se dice un* N-reticulado *o un* álgebra de Nelson*, si se verifican las siguientes condiciones:*

N1) $x \wedge (x \vee y) = x$,

N2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$,

N3) $\sim\sim x = x$,

N4) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$,

N5) $x \wedge \sim x = (x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y)$,

N6) $x \to x = 1$,

N7) $x \to (y \to z) = (x \wedge y) \to z$,

N8) $x \wedge (x \to y) = x \wedge (\sim x \vee y)$.

Para abreviar diremos que N es un álgebra de Nelson.

De N1) y N2) resulta que N es un reticulado distributivo, M. Sholander, [57], luego un poset, donde la relación de orden $\leq$ se define por $x \leq y$ si y solo si $x = x \wedge y$. A partir de los axiomas se prueba que $x \vee 1 = 1$, luego N es un reticulado acotado donde $\sim 1 = 0$ es el primer elemento. De N3), N4) y N5) resulta que N es un álgebra de Kleene [12].
En las álgebras de Nelson se define por $\neg x = x \to 0$, $\nabla x = \neg \sim x$ y $\Delta x = \sim \nabla \sim x = \sim \neg x$, entonces se verifican: (ver A. Monteiro, [29, 30, 35, 22], I. Viglizzo, [59]).

N9) $(x \to y) \wedge (\sim x \vee y) = \sim x \vee y$,

N10) Si $x \leq y$ entonces $x \to y = 1$,

N11) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$, N12) $(x \vee y) \to z = (x \to z) \wedge (y \to z)$ (A. Monteiro, [27]),

N13) $1 \to x = x$,

N14) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$,

N15) Si $x \leq y$ entonces $z \to x \leq z \to y$,

N16) Si $x \leq y$ entonces $y \to z \leq x \to z$,

N17) $\sim x, y \leq x \to y$,

N18) Si $x \wedge y = 0$ entonces $x \leq \sim y$,

N19) $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$,

N20) Si $x \leq y$ entonces $\neg y \leq \neg x$,

N21) $\sim x \leq \neg x$,

N22) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$,

N23) $x \to \neg\neg x = 1$,

N24) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1$,

N25) $((x \to y) \to (x \to z)) \to (x \to (y \to z)) = 1$,

N26) $(x \wedge \sim y) \to \sim (x \to y) = 1$,

N27) $\sim (x \to y) \to (x \wedge \sim y) = 1$,

N28) $x \leq y$ si y solo si $x \to y = 1$ y $\sim y \to \sim x = 1$,

N29) $x \to (x \to y) = x \to y$,

N30) $x \to ((x \to y) \to y) = 1$,

N31) $\neg(x \wedge \sim x) = 1$,

N32) $y \to \neg x = x \to \neg y = \neg(x \wedge y)$,

N33) $\neg\neg\neg x = \sim \neg\neg x$,

N34) $\sim (x \to y) \leq y \to x$,

N35) $\neg x \leq x \to y$,

N36) Si $x \to y = 1$ e $y \to z = 1$ entonces $x \to z = 1$,

N37) Si $x \to y = 1$ entonces $(y \to z) \to (x \to z) = 1$,

N38) Si $x \to y = 1$ entonces $(z \to x) \to (z \to y) = 1$, N39) Si $x \to z = 1$ e $y \to z = 1$ entonces $(x \vee y) \to z = 1$,

N40) Si $x \to y = 1$ y $x \to z = 1$ entonces $x \to (y \wedge z) = 1$,

N41) Si $y \to z = 1$ entonces $(x \wedge y) \to (x \wedge z) = 1$,

N42) Si $y \to z = 1$ entonces $(x \vee y) \to (x \vee z) = 1$,

N43) $x \to \sim x = \ulcorner x$,

N44) $x \leq \ulcorner \sim x = \nabla x$,

N45) $x \wedge \sim x = x \wedge \ulcorner x = x \wedge \nabla \sim x$,

N46) $x \vee \sim x = \sim x \vee \Delta x$,

N47) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$,

N48) Si $x \leq y$ entonces $\nabla x \leq \nabla y$,

N49) $\nabla x \vee \nabla y \leq \nabla(x \vee y)$,

N50) $\Delta(x \vee y) = \Delta x \vee \Delta y$,

N51) Si $x \leq y$ entonces $\Delta x \leq \Delta y$,

N52) $\Delta(x \wedge y) \leq \Delta x \wedge \Delta y$,

N53) $\Delta x \leq x$,

N54) $\Delta(x \wedge \sim x) = 0$,

N55) $\nabla(x \vee \sim x) = 1$,

N56) $(x \to y) \to (\Delta x \to \Delta y) = 1$,

N57) $x \to \Delta x = 1$,

N58) $\Delta x \to x = 1$,

N59) $\Delta\Delta x = \Delta x$,

N60) $\nabla\nabla x = \nabla x$,

N61) $\Delta 0 = 0$, $\Delta 1 = 1$, $\nabla 0 = 0$, $\nabla 1 = 1$,

N62) $\Delta(\Delta x \wedge \Delta y) = \Delta(x \wedge y) \leq \Delta x \wedge \Delta y$,

N63) $\Delta(\Delta x \to \Delta y) = \Delta(x \to y)$,

N64) $\nabla(\nabla x \vee \nabla y) = \nabla(x \vee y)$,

N65) $\nabla(x \to y) = \nabla(\sim x \vee y)$, N66) $\sim \Delta(\Delta x \to 0) = \nabla \Delta x$,

N67) $(\sim x \wedge \Delta x) \to 0 = 1$,

N68) Si $x \leq \sim y$ entonces $\Delta(x \wedge y) = 0$ (A. Monteiro, [37]).
Si $x \leq \sim y$ entonces $x \wedge y \leq \sim y \wedge y$, luego por N51) $\Delta(x \wedge y) \leq \Delta(\sim y \wedge y) \overset{N54)}{=} 0$, luego $\Delta(x \wedge y) = 0$.

N69) $\neg\neg x = \nabla \Delta x$,

N70) $\neg \Delta x = \nabla \sim x$,

N71) $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1$ ([59], pág. 14),

N72) $(x \wedge \sim x) \to y = 1$ ([59], pág. 8).

Lema 1.2 (A. Monteiro, [37]) En toda álgebra de Nelson, $x \to y = 1$ si y solo si $\Delta x \leq \Delta y$.

Dem. Este resultado también aparece en el trabajo de A. Sendlewski, [56], publicado en 1990. Vamos a indicar la demostración de A. Monteiro que es anterior a 1980. Supongamos que (1) $x \to y = 1$. Como (2) $(x \to y) \to (\Delta x \to \Delta y) \overset{N56)}{=} 1$, de (1) y (2) resulta por N13), (3) $\Delta x \to \Delta y = 1$. (4) $\sim \Delta y \to \sim \Delta x = \neg y \to \neg x \overset{N32)}{=} x \to \neg\neg y$. Además, (5) $y \to \neg\neg y \overset{N23)}{=} 1$ y (6) $(x \to (y \to \neg\neg y)) \to ((x \to y) \to (x \to \neg\neg y)) \overset{N24)}{=} 1$.
De (1), (5) y (6) resulta (7) $1 = (x \to 1) \to (1 \to (x \to \neg\neg y)) = 1 \to (x \to \neg\neg y) = x \to \neg\neg y$. De (4) y (7), resulta (8) $\sim \Delta y \to \sim \Delta x = 1$. Luego por (3), (8) y N28), $\Delta x \leq \Delta y$.
Supongamos que $\Delta x \leq \Delta y$, luego $1 \overset{N57)}{=} x \to \Delta x \overset{N15)}{\leq} x \to \Delta y$, y $x \to \Delta y = 1$ y como $\Delta y \to y \overset{N58)}{=} 1$ entonces por N36), $x \to y = 1$. □

Corolario 1.3 (A. Monteiro, [37]) $x \to y = 1 = y \to x$ si y solo si $\Delta x = \Delta y$.

Definición 1.4 *Si N es un álgebra de Nelson, un elemento $r \in N$ se dice* regular *si $\neg\neg r = r$. Sea $\mathcal{R}(N)$ el conjunto de todos los elementos regulares de N.*

$(\mathcal{R}(N), \cap, \cup, \neg, 0, 1)$ es un álgebra de Boole, donde $x \cap y = \neg\neg(x \wedge y)$ y $x \cup y = \neg\neg(x \vee y)$. La demostración de este resultado de A. Monteiro, [29, 30, 35], se puede ver en I. Viglizzo, [59], pág. 55-59.

Lema 1.5 (A. Monteiro, [37]) Si N es un álgebra de Nelson donde $\Delta x = x$ para todo $x \in N$ entonces N es un álgebra de Boole.

Dem. Por hipótesis $\sim \neg x = \Delta x = x$, luego $\neg x = \sim x$ y por lo tanto (1) $\neg\neg x = \neg \sim x = \nabla x$. También por hipótesis $\Delta \sim x = \sim x$, luego (2) $\nabla x = \sim \Delta \sim x = x$. De (1) y (2) $\neg\neg x = x$. Por lo tanto todos los elementos son regulares, luego N es un álgebra de Boole. □

La noción de álgebra de Łukasiewicz trivalente, fue introducida por Gr.C. Moisil ([13, 14, 16]). Estas álgebras desempeñan en el cálculo proposicional trivalente de Łukasiewicz un papel análogo al que desempeñan las álgebras de Boole en el cálculo proposicional clásico. La siguiente definición que se debe a A. Monteiro ([21, 23, 26]) es equivalente a las que fueron indicadas por Moisil.

Definición 1.6 *Un álgebra* $(L, 1, \sim, \nabla, \wedge, \vee)$ *de tipo* $(0, 1, 1, 2, 2)$ *se dice un* álgebra de Łukasiewicz trivalente *si se verifican las siguientes condiciones:*

L1) $1 \vee x = 1$,

L2) $x \wedge (x \vee y) = x$,

L3) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$,

L4) $\sim \sim x = x$,

L5) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$,

L6) $\sim x \vee \nabla x = 1$,

L7) $\sim x \wedge x = \sim x \wedge \nabla x$,

L8) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$.

L. Monteiro ([42], [43]), probó que los axiomas L2) a L8) son idependientes y que el axioma L1) es consecuencia de algunos de estos axiomas.

Diversos resultados sobre estas álgebras se pueden ver en la bibliografía de este trabajo.

Teorema 1.7 (A. Monteiro, [22, 27, 33, 36, 37]) *Un álgebra de Nelson N es semisimple si y solo si para todo $x \in N$, $x \vee \neg x = 1$ o lo que es equivalente $\sim x \vee \nabla x = 1$. Otras condiciones equivalentes a estas son: $\neg x \wedge \nabla \Delta x = 0$, $\nabla \Delta x = \Delta x$, $\nabla \Delta x \to \Delta x = 1$.*

Teorema 1.8 (A. Monteiro, [22, 27, 33, 36]) *Las álgebras de Nelson semisimples coinciden con las álgebras de Łukasiewicz trivalentes.*

Teorema 1.9 *Si A es un álgebra de Nelson semisimple y ponemos $\nabla x = \neg \sim x$, entonces el álgebra $(A, \wedge, \vee, \nabla, \sim, 1)$ es un álgebra de Łukasiewicz trivalente y además $x \to y = \nabla \sim x \vee y$. Recíprocamente, si en un álgebra de Łukasiewicz trivalente ponemos $x \to y = \nabla \sim x \vee y$ entonces el sistema $(A, \wedge, \vee, \to, \sim, 1)$ es un álgebra de Nelson semisimple y además $\nabla x = \neg \sim x$.*

La reproducción de la demostración de los teoremas precedentes también se pueden ver en I. Viglizzo, [59]. L. Monteiro, [45], probó que en toda álgebra de Łukasiewicz trivalente L se verifica: $x = (\Delta x \vee \sim x) \wedge \nabla x$, para todo $x \in L$, ver también [21], pág. 9.

Lema 1.10 *Si N es un álgebra de Nelson entonces $x = (\Delta x \vee \sim x) \wedge \nabla x$, para todo $x \in N$.*

Dem. $(\Delta x \vee \sim x) \wedge \nabla x \overset{N46)}{=} (x \vee \sim x) \wedge \nabla x \overset{N2)}{=} (x \wedge \nabla x) \vee (\sim x \wedge \nabla x) \overset{N44)}{=} x \vee (\sim x \wedge \nabla x) \overset{N45)}{=} x \vee (\sim x \wedge x) = x$. □

En toda álgebra de Łukasiewicz trivalente vale el siguiente resultado (Gr. Moisil, [13, 15, 16]), que se denomina *Principio de determinación de Moisil.* A. Monteiro, [37] probó que también vale en las álgebras de Nelson. La demostración que se indica a continuación, que es más sencilla, es análoga a la indicada por L. Monteiro en [45], para las álgebras de Łukasiewicz trivalentes.

Lema 1.11 *(Principio de determinación de Moisil) Si $\nabla x = \nabla y$ y $\Delta x = \Delta y$ entonces $x = y$.*

Dem. Por el Lema 1.10,

$$x \vee y = (\Delta(x \vee y) \vee \sim (x \vee y)) \wedge \nabla(x \vee y) = (\Delta(x \vee y) \vee (\sim x \wedge \sim y)) \wedge \nabla(x \vee y) \overset{N50)}{=}$$

$$= (\Delta x \vee \Delta y \vee (\sim x \wedge \sim y)) \wedge \nabla(x \vee y).$$

Como $\Delta x = \Delta y$ entonces

$$x \vee y = (\Delta x \vee (\sim x \wedge \sim y)) \wedge \nabla(x \vee y) \leq \Delta x \vee (\sim x \wedge \sim y) =$$

$$(\Delta x \vee \sim x) \wedge (\Delta x \vee \sim y) = (\Delta x \vee \sim x) \wedge (\Delta y \vee \sim y).$$

Por lo tanto, como $\nabla x = \nabla y$ teniendo en cuenta el Lema 1.10

$$(x \vee y) \wedge \nabla x \leq (\Delta x \vee \sim x) \wedge (\Delta y \vee \sim y) \wedge \nabla x =$$

$$(\Delta x \vee \sim x) \wedge \nabla x \wedge (\Delta y \vee \sim y) \wedge \nabla y = x \wedge y.$$

Luego $x \vee y \overset{N44)}{=} (x \wedge \nabla x) \vee (y \wedge \nabla y) = (x \vee y) \wedge \nabla x \leq x \wedge y$, y en consecuencia $x = y$. □

Corolario 1.12 *$x \leq y$ si y solo si* a) $\Delta x \leq \Delta y$ *y* b) $\nabla x \leq \nabla y$.

Dem. Si $x \leq y$ entonces por N51) y N48) resulta que se verifican a) y b). Supongamos ahora que se verifican a) y b), entonces (i) $\Delta(x \vee y) \overset{N50)}{=} \Delta x \vee \Delta y \overset{a)}{=} \Delta y$, (ii) $\nabla(x \vee y) \overset{N64)}{=} \nabla(\nabla x \vee \nabla y) \overset{b)}{=} \nabla\nabla y \overset{N60)}{=} \nabla y$. De (i) y (ii) resulta por el Lema 1.11, que $x \vee y = y$, esto es $x \leq y$. □

1.2. Álgebras de Heyting

Definición 1.13 *Un álgebra* $(H, \wedge, \vee, \Rightarrow, 0, 1)$ *de tipo* $(2, 2, 2, 0, 0)$ *se dice un* álgebra de Heyting ([18, 19, 32]) *o reticulado relativamente pseudo complementado con primer elemento* 0*,* (G. Birkhoff, [2]) *si verifica:*

H0) $0 \wedge x = 0$,

H1) $x \Rightarrow x = 1$,

H2) $(x \Rightarrow y) \wedge y = y$,

H3) $x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y$,

H4) $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow z) \wedge (x \Rightarrow y)$,

H5) $(x \vee y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)$.

Es bien conocido que H es un poset donde $x \leq y \Leftrightarrow x = x \wedge y$.

Lema 1.14 *Si H es un álgebra de Heyting, entonces $(H, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un reticulado distributivo acotado.*

Recordemos que vale:

H6) $x \wedge z \leq y \Leftrightarrow z \leq x \Rightarrow y$.

Lema 1.15 *Si $(H, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un reticulado distributivo con primer elemento 0 y último elemento 1, y $\Rightarrow$ es una operación binaria definida sobre H que verifica:*

PI1) $x \wedge (x \Rightarrow y) \leq y$,

PI2) *Si $x \wedge z \leq y$ entonces $z \leq x \Rightarrow y$.*

entonces $(H, \wedge, \vee, \Rightarrow, 0, 1)$ es un álgebra de Heyting.

Definición 1.16 *En un álgebra de Heyting $(H, \wedge, \vee, 0, 1)$ se define para cada elemento $x \in H$ la operación unaria $\neg x = x \Rightarrow 0$, llamada* pseudo-complemento *o* negación intuicionista .

Vamos a indicar solamente algunas de las propiedades de la negación, que serán utilizadas más adelante.

NI1) $x \wedge \neg x = 0$,

NI2) $x \leq \neg\neg x$,

NI3) $\neg\neg\neg x = \neg x$,

NI4) $x \leq y \Rightarrow \neg y \leq \neg x$,

NI5) $\neg\neg(x \wedge y) = \neg\neg x \wedge \neg\neg y$,

NI6) $\neg(x \Rightarrow y) = \neg\neg x \wedge \neg y$,

NI7) $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$,

NI8) $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) = (x \wedge y) \Rightarrow z$.

Definición 1.17 *Si H es un álgebra de Heyting, dados $x, y \in H$, se dice que y es* orto-gonal *a x si $x \wedge y = 0$, y notaremos $\perp x = \{y \in H : x \wedge y = 0\}$ el conjunto de todos los elementos ortogonales a x.*

Por NI1) $\neg x$ es ortogonal a x y en consecuencia $\neg x \in \perp x$. Además, por H6), si $x \wedge y = 0$, entonces $y \leq x \Rightarrow 0 = \neg x$. Luego $\neg x$ es el último elemento de $\perp x$.

1.3. Las álgebras C_n, $n \in \mathbb{N}$

Definición 1.18 *Diremos que en un reticulado existe la* implicación intuicionista *de dos elementos x e y, si existe un elemento $z = x \Rightarrow y$ que satisface las condiciones* PI1) *y* PI2) *del* Lema 1.15*.*

Lema 1.19 (A. Monteiro, [27]) *En toda álgebra de Nelson N, para todo $x, y \in N$ existe la implicación intuicionista de los elementos $x, (\sim x \vee y)$. Además se verifica*

$$x \to y = x \Rightarrow (\sim x \vee y).$$

Por el lema precedente en toda álgebra de Nelson finita es suficiente conocer las tablas de $\sim$ para construir el operador $\to$, dado que todo reticulado distributivo finito es un álgebra de Heyting.

Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sea $C_n = \{\dfrac{j}{n-1} : 0 \leq j \leq n-1\}$. Este conjunto con su orden natural es un reticulado distributivo acotado, con primer elemento 0 y último elemento 1. Si ponemos $\sim \dfrac{j}{n-1} = 1 - \dfrac{j}{n-1} = \dfrac{n-1-j}{n-1}$ para $0 \leq j \leq n-1$ entonces C_n es un álgebra de Kleene. Como C_n es una cadena, si $x, y \in C_n$ entonces la implicación intuicionista $x \Rightarrow y$ está definida por

$$x \Rightarrow y = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq y, \\ y \text{ si } x > y. \end{cases}$$

Definiendo $x \to y = x \Rightarrow (\sim x \vee y)$, entonces C_n es un álgebra de Nelson.

Como $\neg x = x \to 0 = x \Rightarrow (\sim x \vee 0) = x \Rightarrow\sim x$ entonces $\nabla x = \neg \sim x =\sim x \Rightarrow x$, y $\Delta x =\sim \neg x =\sim (x \to 0) =\sim (x \Rightarrow\sim x)$.
Si n es par, no existe ningún $x \in C_n$ tal que $\sim x = x$, luego (1) $x <\sim x$ ó (2) $\sim x < x$. En el caso (1) $\nabla x = x$ y $\Delta x = 0$ y en el caso (2), $\nabla x = 1$ y $\Delta x = x$. Si $x = \frac{j}{n-1}$ entonces $x <\sim x$ si y solo si $j \leq \frac{n}{2} - 1$ y $\sim x < x$ si y solo si $\frac{n}{2} - 1 < j$, lo que equivale a $\frac{n}{2} \leq j$.
Si n es impar, $\frac{1}{2} \in C_n$, $\sim \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ luego $\nabla \frac{1}{2} = 1$ y $\Delta \frac{1}{2} = 0$ y para todo $x \in C_n \setminus \{\frac{1}{2}\}$ también tenemos dos casos: (1) $x <\sim x$, lo que ocurre si y solo si $x < \frac{1}{2}$ ó (2) $\sim x < x$, si y solo si $\frac{1}{2} < x$. En el caso (1) $\nabla x = x$ y $\Delta x = 0$ y en el caso (2) $\nabla x = 1$ y $\Delta x = x$.

Observación 1.20 *Si $x, y \in C_n$, calculando $x \to y = x \Rightarrow (\sim x \vee y)$, se obtiene*

$$x \to y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \text{ o } x \leq\sim x, \\ \sim x \vee y & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

1.4. Los abiertos y cerrados de un álgebra de Nelson

Daremos a continuación dos denominaciones debidas a A. Monteiro:

Definición 1.21 *Si N es un álgebra de Nelson, un elemento $x \in N$ tal que $\Delta x = x$ se dice un* abierto *de N y $\mathcal{A}(N) = \{x \in N : \Delta x = x\}$ el conjunto de abiertos de N. Dualmente, un elemento $x \in N$ tal que $\nabla x = x$ se dice un* cerrado *de N y $\mathcal{C}(N) = \{x \in N : \nabla x = x\}$, el conjunto de cerrados de N.*

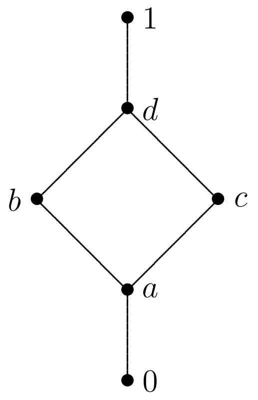
Es claro que $\mathcal{A}(N) = \Delta(N)$, dado que si $x \in \mathcal{A}(N)$ esto es $\Delta x = x$ entonces $x \in \Delta(N)$ y si $y \in \Delta(N)$ entonces $y = \Delta x$, con $x \in N$, luego $\Delta y = \Delta\Delta x \overset{N59)}{=} \Delta x = y$ y por lo tanto $y \in \mathcal{A}(N)$.
Dualmente, $\mathcal{C}(N) = \nabla(N)$, dado que si $x \in \mathcal{C}(N)$ esto es $\nabla x = x$ entonces $x \in \nabla(N)$ y si $y \in \nabla(N)$ entonces $y = \nabla x$, con $x \in N$, luego $\nabla y = \nabla\nabla x \overset{N60)}{=} \nabla x = y$ y por lo tanto $y \in \mathcal{C}(N)$.

Lema 1.22 (A. Monteiro, [37]) $\sim \Delta(N) = \nabla(N)$.

Dem. Si $x \in\sim \Delta(N)$ entonces (1) $x =\sim y$, con $\Delta y = y$, luego $x =\sim y =\sim \Delta y = \sim\sim \nabla \sim y = \nabla \sim y$, por lo tanto $x =\sim y \in \nabla(N)$.
Si $x \in \nabla(N)$ entonces $\nabla x = x$, luego $\sim \Delta \sim x = x$ y por lo tanto $\Delta \sim x =\sim x$. Se sigue que $\sim x \in \Delta(N)$ y entonces $x \in\sim \Delta(N)$. □

Por N61), $0, 1 \in \Delta(N), \nabla(N)$. Por N50), si $x, y \in \Delta(N)$ entonces $x \vee y \in \Delta(N)$. Por N47), si $x, y \in \nabla(N)$ entonces $x \wedge y \in \nabla(N)$. Sin embargo, en general no se verifica que si $x, y \in \Delta(N)$ entonces $x \wedge y, x \to y \in \Delta(N)$ o que si $x, y \in \nabla(N)$ entonces $x \vee y \in \nabla(N)$. En efecto, sea N la siguiente álgebra de Nelson:

Ejemplo 1.23



$\to$	0	a	b	c	d	1	$\sim x$	Δx	∇x
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
a	1	1	1	1	1	1	d	0	a
b	c	c	1	c	1	1	c	b	b
c	b	b	b	1	1	1	b	c	c
d	a	a	b	c	1	1	a	d	1
1	0	a	b	c	d	1	0	1	1

Luego $\Delta(N) = \{0, b, c, d, 1\}$ y $b \wedge c = a \notin \Delta(N)$, $d \to 0 = a \notin \Delta(N)$, $\nabla(N) = \{0, a, b, c, 1\}$ y $b \vee c = d \notin \nabla(N)$.

Observación 1.24 *Si N es un álgebra de Nelson, $x, y \in \Delta(N)$ pongamos por definición: $x \wedge_\Delta y = \Delta(x \wedge y)$, $x \Rightarrow_\Delta y = \Delta(x \to y)$. El siguiente resultado fue publicado por* A. Sendlewski, [56] *en 1990, sin embargo el mismo se encontró en los manuscritos de* A. Monteiro, [37] *que falleciera en 1980.* Sendlewski *define $x \vee_\Delta y = \Delta(x \vee y)$, pero como $\Delta x = x$ y $\Delta y = y$ entonces, $x \vee_\Delta y = \Delta(x \vee y) = \Delta(\Delta x \vee \Delta y) \overset{\text{N50)}}{=} \Delta\Delta x \vee \Delta\Delta y \overset{\text{N59)}}{=} \Delta x \vee \Delta y = x \vee y$.*

Lema 1.25 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson entonces el álgebra $(\Delta(N), \wedge_\Delta, \vee, \Rightarrow_\Delta, 0, 1)$ es un álgebra de Heyting.*

Dem. Probaremos que $(\Delta(N), \wedge_\Delta, \vee, 0, 1)$ es un reticulado distributivo acotado y que el par $(\wedge_\Delta, \Rightarrow_\Delta)$ satisface las condiciones PI1) y PI2) del Lema 1.15.

- Si $x, y \in \Delta(N)$ entonces $x \wedge_\Delta (x \vee y) = x$.

  En efecto, $x \wedge_\Delta (x \vee y) = \Delta(x \wedge (x \vee y)) \overset{\text{N1)}}{=} \Delta x = x$.

- Si $x, y, z \in \Delta(N)$ entonces $x \wedge_\Delta (y \vee z) = (z \wedge_\Delta x) \vee (y \wedge_\Delta x)$.

  $(z \wedge_\Delta x) \vee (y \wedge_\Delta x) = \Delta(z \wedge x) \vee \Delta(y \wedge x) \overset{\text{N50)}}{=} \Delta((z \wedge x) \vee (y \wedge x)) \overset{\text{N2)}}{=} \Delta(x \wedge (y \vee z)) = x \wedge_\Delta (y \vee z)$. Luego por [57], $(\Delta(N), \wedge_\Delta, \vee)$ es un reticulado distributivo. Como la operación $\vee$ es la misma en $\Delta(N)$ que en N entonces el orden en $\Delta(N)$ es el orden de N restringido a $\Delta(N)$. Por lo tanto como $0 \wedge_\Delta x = 0$ y $x \vee 1 = 1$ para todo $x \in \Delta(N)$ entonces $(\Delta(N), \wedge_\Delta, \vee, 0, 1)$ es es un reticulado distributivo con primer y último elemento.

- Si $x, y \in \Delta(N)$ entonces $x \wedge_\Delta (x \Rightarrow_\Delta y) \leq y$.

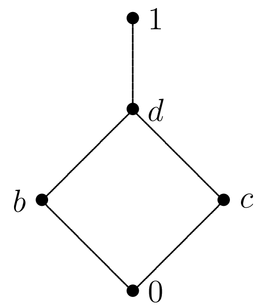
  $x \wedge_\Delta (x \Rightarrow_\Delta y) = \Delta(x \wedge (x \Rightarrow_\Delta y)) = \Delta(x \wedge \Delta(x \to y)) = \Delta(\Delta x \wedge \Delta(x \to y))$.

Como $\Delta(\Delta x \wedge \Delta(x \to y)) \overset{N62)}{=} \Delta(x \wedge (x \to y))$ y $x \wedge (x \to y) \overset{N8)}{=} x \wedge (\sim x \vee y)$ entonces tenemos: $x \wedge_\Delta (x \Rightarrow_\Delta y) \overset{N50)}{=} \Delta(x \wedge (\sim x \vee y)) = \Delta((x \wedge \sim x) \vee (x \wedge y)) \overset{N50)}{=}$ $\Delta(x \wedge \sim x) \vee \Delta(x \wedge y) \overset{N54)}{=} 0 \vee \Delta(x \wedge y) = \Delta(x \wedge y) \overset{N53)}{\leq} x \wedge y \leq y$.

- Si $x, y, z \in \Delta(N)$ son tales que $x \wedge_\Delta z \leq y$ entonces $z \leq x \Rightarrow_\Delta y$.

  Por hipótesis $\Delta(x \wedge z) \leq y = \Delta y$, por el Lema 1.2, $(x \wedge z) \to y = 1$ y por N7), $z \to (x \to y) = 1$ luego por el Lema 1.2, $z = \Delta z \leq \Delta(x \to y) = x \Rightarrow_\Delta y$. $\square$

El álgebra de Heyting $\Delta(N)$, donde N es el álgebra de Nelson indicada en el Ejemplo 1.23 tiene el siguiente diagrama:



Observación 1.26 *En toda álgebra de Hilbert* [11]*, vale* $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$ *y utilizando esta propiedad se deduce que si* $x \to y = 1$ *e* $y \to x = 1$ *entonces* $x = y$*. Esta igualdad no vale en las álgebras de Nelson. Para ello* A. Monteiro, [37]*, indica el siguiente ejemplo: Consideremos el álgebra de Nelson* $C_4 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$.

$\to$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
0	1	1	1	1
$\frac{1}{3}$	1	1	1	1
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

Luego $\left(0 \to \frac{2}{3}\right) \to \frac{2}{3} = 1 \to \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ *y* $\left(\frac{2}{3} \to 0\right) \to 0 = \frac{1}{3} \to 0 = 1$.

Observación 1.27 *En* [37], A. Monteiro *dice: Si* N *es un álgebra de Nelson que también es un álgebra de Heyting, lo que ocurre en todas las álgebras de Nelson finitas, el elemento* $x \Rightarrow y$*, que existe por hipótesis, no se puede obtener a partir de* x *e* y *aplicando las operaciones* $\to, \wedge, \vee, \sim$*. En efecto, consideremos el álgebra de Nelson* $N = C_4 \times C_4$*. Es fácil ver que el subconjunto* $S = \{(0,0), (\frac{1}{3}, 0), (0, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}), (1, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, 1), (1,1)\}$ *de* N *es cerrado con respecto a las operaciones* $\to, \wedge, \vee, \sim$*. Sin embargo* $(\frac{1}{3}, 0) \Rightarrow (0, \frac{1}{3}) = (\frac{1}{3} \Rightarrow 0, 0 \Rightarrow \frac{1}{3}) = (0, 1) \notin S$.

2. Álgebras de Nelson con centro y con eje

Análogamente a lo indicado en la teoría de las álgebras de Łukasiewicz trivalentes [48, 21], definiremos:

Definición 2.1 *Un álgebra de Nelson N se dice* centrada *si existe $c \in N$ tal $\sim c = c$ y c se denomina el* centro *de N.*

Como N es un álgebra de Kleene entonces el elemento c es único. Todas las álgebras C_n, con n impar, son centradas.

Lema 2.2 (A. Monteiro, [37]) *$c =\sim c$ si y solo si $\Delta c = 0$ y $\nabla c = 1$.*

Dem. Supongamos que $\Delta c = 0$ y $\nabla c = 1$. Por el Lema 1.10,

$$c = (\Delta c \vee \sim c) \wedge \nabla c = (0 \vee \sim c) \wedge 1 =\sim c.$$

Supongamos que $c =\sim c$.

$$\neg c = c \to 0 = (c \wedge \sim c) \to 0 \overset{\text{N7)}}{=} c \to (\sim c \to 0) = c \to (c \to 0) = c \to \neg c.$$

Como $c =\sim c \overset{\text{N21)}}{\leq} \neg c$ por N10), $c \to \neg c = 1$ y por lo tanto $\neg c = 1$. Luego $\Delta c =\sim \neg c = \sim 1 = 0$. De $\Delta c = 0$ resulta $\sim \nabla \sim c = 0$ y $\nabla c = \nabla \sim c =\sim 0 = 1$. $\square$

Lema 2.3 (L. Monteiro, [44, 49, 48]) *Si L es un álgebra de Łukasiewicz trivalente centrada y c es su centro, entonces para todo $x \in L$,*

$$x = (\Delta x \vee c) \wedge \nabla x.$$

El siguiente lema es una generalización del resultado precedente.

Lema 2.4 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson centrada y c es su centro, entonces para todo $x \in N$,*

$$x = (\Delta x \vee c) \wedge \nabla x.$$

Dem.

$$\Delta((\Delta x \vee c) \wedge \nabla x) = \Delta((\Delta x \wedge \nabla x) \vee (c \wedge \nabla x)) =$$

$$\Delta(\Delta x \vee (c \wedge \nabla x)) \overset{\text{N50)}}{=} \Delta\Delta x \vee \Delta(c \wedge \nabla x) \overset{\text{N59)}}{=} \Delta x \vee \Delta(c \wedge \nabla x).$$

$\Delta(c \wedge \nabla x) \overset{\text{N52)}}{\leq} \Delta c \wedge \Delta\nabla x = 0 \wedge \Delta \nabla x = 0$, luego (1) $\Delta((\Delta x \vee c) \wedge \nabla x) = \Delta x$.

$$\nabla((\Delta x \vee c) \wedge \nabla x) \overset{N47)}{=} \nabla(\Delta x \vee c) \wedge \nabla\nabla x \overset{N60)}{=} \nabla(\Delta x \vee c) \wedge \nabla x.$$

Como $c \leq \Delta x \vee c$ entonces $1 = \nabla c \leq \nabla(\Delta x \vee c)$, luego $\nabla(\Delta x \vee c) = 1$ y por lo tanto (2) $\nabla((\Delta x \vee c) \wedge \nabla x) = \nabla x$. De (1) y (2) resulta aplicando el Lema 1.11, que $x = (\Delta x \vee c) \wedge \nabla x$. $\square$

Observación 2.5 *Un elemento x de un álgebra de Nelson N se dice booleano, si existe $x' \in N$ tal que $x \vee x' = 1$ y $x \wedge x' = 0$. Notaremos con $\mathcal{B}(N)$ al conjunto de todos los elementos booleanos de N, es claro que $0, 1 \in \mathcal{B}(N)$. Como N es un álgebra de Kleene, es bien conocido el siguiente resultado de* A. Monteiro*: si $b \in \mathcal{B}(N)$ y con b' designamos su complemento booleano entonces $b' = \sim b$.* ([10, 9], [40, 46, 51]).

Veamos ahora que $\sim b = \neg b$. En efecto, por N8)*, $b \wedge (b \to 0) = b \wedge (\sim b \vee 0)$, esto es $b \wedge \neg b = b \wedge \sim b = 0$, entonces por* N18) *$b \leq \sim \neg b = \Delta b$. Por* N53)*, $\Delta b \leq b$, entonces $\sim \neg b = b$ luego $\neg b = \sim b$. Por lo tanto si $b \in \mathcal{B}(N)$, entonces $\sim b = \neg b$ y $\Delta b = b$. Veamos que también $\nabla b = b$. En efecto, como $\sim b \in \mathcal{B}(N)$ entonces $\Delta \sim b = \sim b$ luego $\nabla b = \sim \Delta \sim b = b$. Una demostración diferente de que $\sim b = \neg b$, se puede ver en la Tesis de* I. Viglizzo, [59], pág. 81*. Observemos que si $x \in N$ y $\Delta x = x = \nabla x$, no necesariamente $x \in \mathcal{B}(N)$. En efecto en el* Ejemplo 1.23*, $\Delta b = b = \nabla b$ y $b \notin \mathcal{B}(N)$.*

Análogamente a lo indicado en la teoría de las álgebras de Łukasiewicz trivalentes, daremos la noción de eje.

Definición 2.6 *Diremos que un elemento e de un álgebra de Nelson N es un* eje *de N si*

E1) $\Delta e = 0$,

E2) $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x = \Delta x \vee (e \wedge \nabla x)$ *para todo $x \in N$.*

Observación 2.7 $\neg e \overset{N44)}{=} \nabla \sim e \overset{(E1)}{=} 1$.

Lema 2.8 (A. Monteiro, [37]) *Si N tiene eje entonces es único.*

Dem. Supongamos que e_1 y e_2 son ejes de un álgebra de Nelson N, esto es

$$(1)\ \ \Delta e_1 = 0 \ \ (2)\ \ x = (\Delta x \vee e_1) \wedge \nabla x \ \text{ para todo } x \in N,$$

$$(3)\ \ \Delta e_2 = 0 \ \ (4)\ \ x = (\Delta x \vee e_2) \wedge \nabla x \ \text{ para todo } x \in N.$$

Reemplazando x por e_2 en (2), y teniendo en cuenta (3) tenemos

$$(5)\ \ e_2 = (\Delta e_2 \vee e_1) \wedge \nabla e_2 = (0 \vee e_1) \wedge \nabla e_2 = e_1 \wedge \nabla e_2 \leq e_1.$$

Análogamente reemplazando x por e_1 en (4), y teniendo en cuenta (1) tenemos

$$(6)\ \ e_1 = (\Delta e_1 \vee e_2) \wedge \nabla e_1 = (0 \vee e_2) \wedge \nabla e_1 = e_2 \wedge \nabla e_1 \leq e_2.$$

De (5) y (6) resulta $e_1 = e_2$. $\square$

Lema 2.9 $\Delta x = 0$ *si y solo si* $x \leq \sim x$ *si y solo si* $x \to y = 1$ *para todo* $y \in N$.

Dem. Por el Lema 1.10, $x = (\Delta x \vee \sim x) \wedge \nabla x$, luego si $\Delta x = 0$ entonces $x = \sim x \wedge \nabla x \leq \sim x$. Recíprocamente si $x \leq \sim x$ esto es $x = x \wedge \sim x$ entonces $\Delta x = \Delta(x \wedge \sim x) \overset{\text{N54)}}{=} 0$. Si $x \leq \sim x$ entonces $x \to y = (x \wedge \sim x) \to y \overset{\text{N72)}}{=} 1$. Recíprocamente si $x \to y = 1$ para todo $y \in N$ en particular para $y = 0$ luego $x = x \wedge 1 = x \wedge (x \to 0) \overset{\text{N8)}}{=} x \wedge (\sim x \vee 0) = x \wedge \sim x$, por lo tanto $x \leq \sim x$. $\square$

Lema 2.10 (A. Monteiro, [37]) *Si* N *tiene eje* e *entonces* e *es el mayor elemento* $x \in N$ *que verifica* $\Delta x = 0$. *Además* $e \leq \sim e$ *y* $e \to y = 1$ *para todo* $y \in N$.

Dem. En efecto, si $x \in N$ verifica $\Delta x = 0$ entonces $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x = (0 \vee e) \wedge \nabla x = e \wedge \nabla x \leq e$. Por el Lema 2.9, $e \leq \sim e$ y $e \to y = 1$ para todo $y \in N$. $\square$

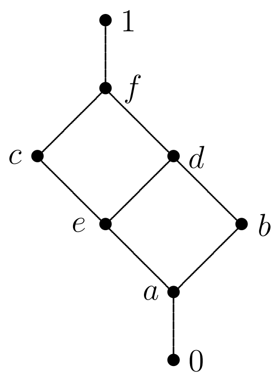
Lema 2.11 *Si* N *es un álgebra de Nelson y* $e \in N$ *entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

a) $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x$ *para todo* $x \in N$,

b) $x = (\Delta x \vee \sim e) \wedge \nabla x$ *para todo* $x \in N$.

Dem. Si vale a), entonces tenemos que $\sim x = (\Delta \sim x \vee e) \wedge \nabla \sim x$, luego $x = \sim\sim x = \sim ((\Delta \sim x \vee e) \wedge \nabla \sim x) = \sim (\Delta \sim x \vee e) \vee \sim \nabla \sim x = (\sim \Delta \sim x \wedge \sim e) \vee \Delta x = (\nabla x \wedge \sim e) \vee \Delta x = (\nabla x \vee \Delta x) \wedge (\sim e \vee \Delta x) = \nabla x \wedge (\sim e \vee \Delta x)$, por lo que vale b). La otra implicación se prueba en forma similar. $\square$

Ejemplo 2.12



$\to$	0	a	b	c	d	e	f	1	$\sim x$	Δx	∇x
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
a	1	1	1	1	1	1	1	1	f	0	a
b	c	c	1	c	1	c	1	1	c	b	b
c	b	b	b	1	d	1	1	1	b	c	c
d	c	c	1	c	1	c	1	1	e	b	1
e	1	1	1	1	1	1	1	1	d	0	c
f	a	a	b	c	d	e	1	1	a	f	1
1	0	a	b	c	d	e	f	1	0	1	1

El elemento e es el eje del álgebra precedente.

Todas las álgebras C_n, con n par, tienen eje. En efecto, sea $e = \frac{\frac{n}{2}-1}{n-1}$. Entonces $e < \sim e$, luego $\Delta e = 0$ (ver Sección 1.3). Si $x \in C_n$ y $x < \sim x$, entonces $x \leq e$; por lo tanto $(\Delta x \vee e) \wedge \nabla x = (0 \vee e) \wedge x = e \wedge x = x$. Si $\sim x < x$, entonces $e < x$; luego $(\Delta x \vee e) \wedge \nabla x = (x \vee e) \wedge 1 = x$.

Observación 2.13 *Si N es un álgebra de Nelson con eje e, que no es un álgebra de Boole, no existe $b \in \mathcal{B}(N) \setminus \{0,1\}$ tal que $e \leq b$, $e \leq \sim b$. En efecto, si ello ocurriera entonces $e \leq b \wedge \sim b = 0$, luego $e = 0$ y por lo tanto $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x = \Delta x \wedge \nabla x = \Delta x$, para todo $x \in N$. Luego por el* Lema 1.5, *N sería un álgebra de Boole, absurdo.*

Si c es centro de N entonces por los Lemas 2.2 y 2.4, c es eje de N, pero la recíproca no es verdadera (ver Ejemplo 2.12).

Lema 2.14 (A. Monteiro, [37]) *Si C es un álgebra de Nelson con centro c y E es un álgebra de Nelson con eje e entonces $N = C \times E$ es un álgebra de Nelson con eje.*

Dem. Sea $f = (c, e)$ luego $\Delta f = \Delta(c, e) = (\Delta c, \Delta e) = (0, 0)$.

$(\Delta(x, y) \vee (c, e)) \wedge \nabla(x, y) = ((\Delta x, \Delta y) \vee (c, e)) \wedge (\nabla x, \nabla y) = (\Delta x \vee c, \Delta y \vee e) \wedge (\nabla x, \nabla y) =$

$((\Delta x \vee c) \wedge \nabla x, (\Delta y \vee e) \wedge \nabla y) = (x, y)$. □

Corolario 2.15 *Si C es un álgebra de Nelson con centro c y B es un álgebra de Boole entonces $N = C \times B$ es un álgebra de Nelson con eje.*

Dem. Como B es un álgebra de Boole, entonces $\Delta x = \nabla x = x$ y 0 es su eje. Luego $(c, 0)$ es el eje de $N = C \times B$. □

En este caso $\nabla e = \nabla(c, 0) = (\nabla c, 0) = (1, 0)$ y $\sim \nabla e = (0, 1)$ luego $\nabla e \vee \sim \nabla e = (1, 1)$ y por lo tanto $\nabla e \in \mathcal{B}(N) = \mathcal{B}(C \times B)$.

Lema 2.16 (A. Monteiro, [37]) *Si C es un álgebra de Nelson con centro c y B un álgebra de Nelson tal que $N = C \times B$ tiene por eje al elemento $e = (c, 0)$ entonces B es un álgebra de Boole.*

Dem. Como $e = (c, 0)$ es eje, entonces

$$(x, y) = (\Delta(x, y) \vee (c, 0)) \wedge \nabla(x, y) = ((\Delta x \vee c) \wedge \nabla x, (\Delta y \vee 0) \wedge \nabla y) = (x, \Delta y).$$

Luego $y = \Delta y$ para todo $y \in B$, entonces por el Lema 1.5, B es un álgebra de Boole. □

Lema 2.17 *Toda álgebra de Nelson N finita tiene eje.*

Dem. Sea $Z = \{z \in N : \Delta z = 0\}$ y $e = \bigvee\limits_{z \in Z} z$. Probemos que e es el eje de N.

E1) $\Delta e = \Delta \bigvee\limits_{z \in Z} z \overset{N50)}{=} \bigvee\limits_{z \in Z} \Delta z = 0$, E2) $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x$, para todo $x \in N$.

En efecto, sea $y = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x$, luego $y \leq \nabla x$ y por lo tanto (1) $\nabla y \leq \nabla\nabla x \stackrel{N60)}{=} \nabla x$.

(2) $\Delta y = \Delta(\Delta x \vee (e \wedge \nabla x)) \stackrel{N50)}{=} \Delta\Delta x \vee \Delta(e \wedge \nabla x) \stackrel{N59)}{=} \Delta x \vee \Delta(e \wedge \nabla x) \leq \Delta x \vee \Delta e = \Delta x \vee 0 = \Delta x$.

De (1) y (2) resulta por el Corolario 1.12, que (3) $y \leq x$.

Como $\Delta(x \wedge \sim x) \stackrel{N54)}{=} 0$ entonces $x \wedge \sim x \leq e$ luego

$$x = x \wedge (x \vee \sim x) \stackrel{N46)}{=} x \wedge (\sim x \vee \Delta x) = (x \vee \Delta x) \wedge (\sim x \vee \Delta x) = (x \wedge \sim x) \vee \Delta x \leq \Delta x \vee e$$

y como $x \leq \nabla x$ entonces (4) $x \leq (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x = y$. De (3) y (4) tenemos $x = y$. $\square$

Definición 2.18 *Un subconjunto F de un álgebra de Nelson N se dice un* filtro *si:*

F1) $1 \in F$,

F2) *Si* $x \in F$, $x \leq y$ *entonces* $y \in F$,

F3) *Para todo* $x, y \in F$, $x \wedge y \in F$.

Un filtro propio P de un álgebra de Nelson N se dice un filtro primo *si $a \vee b \in P$ implica $a \in P$ o $b \in P$.*

Dualmente, un subconjunto I de un álgebra de Nelson N se dice un ideal *si:*

I1) $0 \in I$,

I2) *Si* $x \in I$, $y \leq x$ *entonces* $y \in I$,

I3) *Para todo* $x, y \in I$, $x \vee y \in I$.

Un ideal propio I de un álgebra de Nelson N se dice un ideal primo *si $a \wedge b \in I$ implica $a \in I$ o $b \in I$.*

Definición 2.19 *Un subconjunto D de un álgebra de Nelson N se dice un* sistema deductivo *si:*

D1) $1 \in D$,

D2) *Si* $x, x \to y \in D$ *entonces* $y \in D$.

Es bien sabido que:

Lema 2.20 *Todo sistema deductivo de un álgebra de Nelson es un filtro.*

Si $H \subseteq N$ notaremos con $D_N(H)$ o $D(H)$ al sistema deductivo generado por H en N. Si $H = \{a\}$ notaremos $D(a)$, en vez de $D(\{a\})$. Es bien conocido que

$$D(a) = \{x \in N : a \to x = 1\}.$$

Lema 2.21 *Para que un filtro F de un álgebra de Nelson N sea un sistema deductivo es necesario y suficiente que:* a) *$\Delta x \in F$ para todo $x \in F$.*

Dem. Si F es un filtro que verifica a), entonces D1) $1 \in F$. Supongamos que $x, x \to y \in F$, luego $x \wedge (x \to y) \in F$, pero

$$x \wedge (x \to y) \overset{\text{N8)}}{=} x \wedge (\sim x \vee y) = (x \wedge \sim x) \vee (x \wedge y).$$

Luego por a), $\Delta((x \wedge \sim x) \vee (x \wedge y)) \in F$, y entonces

$$\Delta((x \wedge \sim x) \vee (x \wedge y)) \overset{\text{N50)}}{=} \Delta(x \wedge \sim x) \vee \Delta(x \wedge y) \overset{\text{N54)}}{=} \Delta(x \wedge y) \in F,$$

y como $\Delta(x \wedge y) \overset{\text{N52)}}{\leq} \Delta x \wedge \Delta y \leq \Delta y \overset{\text{N53)}}{\leq} y$, se sigue que $y \in F$.
Recíprocamente si F es un filtro que es un sistema deductivo y $x \in F$, como $x \to \Delta x \overset{\text{N57)}}{=} 1 \in F$ entonces $\Delta x \in F$. $\square$

Es fácil probar a partir de lo anterior que el sistema deductivo generado por un elemento a es $D(a) = F(\Delta a)$, donde $F(x)$ denota el filtro principal generado por x, esto es, $F(x) = \{y : x \leq y\}$.

Si D es un sistema deductivo notaremos $D(D, a)$ al sistema deductivo generado por $D \cup \{a\}$. Es bien conocido (ver A. Monteiro, [33] e I. Viglizzo, [59], páginas 27 y 36), que:

Lema 2.22 *Si N es un álgebra de Nelson $D(D, a) = \{x \in N : a \to x \in D\}$. Si H es una parte no vacía de N entonces, $D(H) = \{x \in N : (\bigwedge_{i=1}^{n} h_i) \to x = 1,$ donde $\{h_i\}_{i=1}^{n} \subseteq H\}$.*

Lema 2.23 (A. Monteiro, [37]) *Si en un álgebra de Nelson N se verifica que para un par de elementos $x, y \in N$:* (1) *$x, y \in \Delta(N)$ y* (2) *$\Delta(x \wedge y) = 0$, entonces $x \leq \sim y$.*

Dem. Por (1), tenemos $\sim \neg y = \Delta y = y$, luego (3) $\neg y = \sim y$. Por (2) $\sim \neg(x \wedge y) = 0$, luego, $\neg(x \wedge y) \overset{\text{N32)}}{=} x \to \neg y = 1 \in D(x)$. Como $x \in D(x) = F(\Delta x) \overset{(1)}{=} F(x)$ entonces $\sim y \overset{(3)}{=} \neg y \in F(x)$, por lo tanto $x \leq \sim y$. $\square$

Notaremos $\mathcal{D}(N)$ al conjunto de todos los sistemas deductivos de un álgebra de Nelson N y con $\mathcal{M}(N)$ al conjunto de todos los sistemas deductivos maximales de N.

Observación 2.24 *Dado un subconjunto X de un álgebra de Nelson N, definimos $\sim X$ como el conjunto $\{\sim x : x \in X\}$. Entonces, se puede ver que si F es un filtro de N, $\sim F$ es un ideal y, más aún, si F es un filtro primo, $\sim F$ es un ideal primo.*

Lema 2.25 (A. Monteiro, [37]) *Si $D \in \mathcal{D}(N)$ y $d \in D$ entonces* a) $\Delta d, \nabla d \in D$, *y si D es propio* b) $\sim d \notin D$ *y* c) $D \cap \sim D = \emptyset$.

Dem. Por el Lema 2.21, si $d \in D$ entonces $\Delta d \in D$. Considerando que por N44), $d \leq \nabla d$ y que D es un filtro resulta que $\nabla d \in D$. Si D es propio y $\sim d \in D$ entonces $d \wedge \sim d \in D$, luego teniendo en cuenta a) y $0 \overset{\text{N54)}}{=} \Delta(d \wedge \sim d) \in D$, tenemos una contradicción. Si $x \in D \cap \sim D$ entonces $x \in D$ y $x \in \sim D$, luego $\sim x \in D$, lo que contradice b). $\square$

Corolario 2.26 *Si $D \in \mathcal{D}(N)$ es propio y N tiene eje e entonces $e \notin D$.*

Dem. Si $e \in D$, como $e \leq \sim e$ entonces $\sim e \in D$ lo que contradice el Lema 2.25. $\square$

Lema 2.27 *Si N es un álgebra de Nelson entonces el conjunto ordenado $(\mathcal{D}(N), \subseteq)$ es isomorfo al conjunto ordenado $(\mathcal{F}(\Delta(N)), \subseteq)$, donde $\mathcal{F}(\Delta(N))$ es el conjunto de todos los filtros del álgebra de Heyting $\Delta(N)$ esto es, de todos los sistemas deductivos de $\Delta(N)$.*

Dem. Si $D \in \mathcal{D}(N)$ sea $\alpha(D) = D \cap \Delta(N)$, luego $\alpha(D) \subseteq \Delta(N)$. Veamos que $\alpha(D)$ es un filtro en $\Delta(N)$.

F1) $1 \in \alpha(D)$.

F2) Si (1) $x \in \alpha(D)$ y (2) $x \leq y$, donde (3) $y \in \Delta(N)$, entonces $y \in \alpha(D)$.
Como $\alpha(D) \subseteq D$, de (1) resulta (4) $x \in D$, luego de (4) y (2) tenemos que $y \in D$ y por (3), $y \in \alpha(D)$.

F3) Si (5) $x, y \in \alpha(D)$ entonces $\Delta(x \wedge y) = x \wedge_{\Delta(N)} y \in \alpha(D)$.
Por (5), tenemos (6) $x, y \in \Delta(N)$ y (7) $x, y \in D$. De (6) resulta $\Delta(x \wedge y) = x \wedge_{\Delta(N)} y \in \Delta(N)$ y de (7), $x \wedge y \in D$ de donde $\Delta(x \wedge y) \in D$, y por lo tanto $x \wedge_{\Delta(N)} y \in \alpha(D)$.

(i) α es suryectiva. Dado $F \in \mathcal{F}(\Delta(N))$, sea $D = D(F)$. Probemos que $\alpha(D) = F$. Como $F \subseteq D(F) = D$ y $F \subseteq \Delta(N)$ entonces $F \subseteq D \cap \Delta(N)$. Sea $x \in D \cap \Delta(N)$ entonces $\Delta x = x$ y $x \in D = D(F)$. Luego por el Lema 2.22, existen $\{f_i\}_{i=1}^{n} \subseteq F$ tales que $(\bigwedge_{i=1}^{n} f_i) \to x = 1$. Como F es un filtro de $\Delta(N)$ tenemos que (8) $f = \bigwedge_{i=1}^{n} f_i \in F$, luego $f \to x = 1$ y por lo tanto (9) $f \Rightarrow_{\Delta(N)} x = \Delta(f \to x) = 1 \in F$, luego de (8) y (9) resulta por ser F un sistema deductivo del álgebra de Heyting $\Delta(N)$ que $x \in F$.

(ii) Es claro que si $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(N)$ y $D_1 \subseteq D_2$ entonces $\alpha(D_1) = D_1 \cap \Delta(N) \subseteq D_2 \cap \Delta(N) = \alpha(D_2)$. Por otro lado si $\alpha(D_1) = D_1 \cap \Delta(N) \subseteq D_2 \cap \Delta(N) = \alpha(D_2)$, entonces, si $x \in D_1$, por N57), $x \to \Delta x = 1$, de donde $\Delta x \in \alpha(D_2)$ por lo que $x \in D_2$ ya que $\Delta x \leq x$.

De (i) y (ii) resulta que α es un isomorfismo de orden. □

Es bien conocido que:

Lema 2.28 (H. Rasiowa, [55]) *Dado un sistema deductivo propio D, existe $M \in \mathcal{M}(N)$ tal que $D \subseteq M$.*

Lema 2.29 (A. Monteiro, [20]) *Si N es un álgebra de Nelson, $D \in \mathcal{D}(N)$ e $y \in D$ entonces $x \to y \in D$, cualquiera que sea $x \in N$.*

Dem. $y \overset{\text{N17)}}{\leq} x \to y$ luego como $y \in D$ y D es un filtro $x \to y \in D$. □

Lema 2.30 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson y $D \in \mathcal{D}(N)$ es propio entonces $\Delta d \neq 0$, cualquiera que sea $d \in D$.*

Dem. Si $d \in D$ por el Lema 2.25, $\Delta d \in D$, luego si $\Delta d = 0$ entonces $D = N$, absurdo. □

Lema 2.31 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson, $D \in \mathcal{D}(N)$ es propio, entonces $D(D, a)$ es propio si y solo si $\Delta(a \wedge d) \neq 0$ para todo $d \in D$.*

Dem. Supongamos que $D(D, a)$ es propio. Como $a, d \in D(D, a)$ para todo $d \in D$ entonces por el Lema 2.20, $a \wedge d \in D(D, a)$ para todo $d \in D$ y por el Lema 2.30, $\Delta(a \wedge d) \neq 0$.

Si $D(D, a)$ no es propio, $0 \in D(D, a)$ y $d = a \to 0 \in D$. Entonces

$$\Delta(a \wedge d) \overset{\text{N53)}}{\leq} a \wedge d = a \wedge (a \to 0) \overset{\text{N8)}}{=} a \wedge (\sim a \vee 0) = a \wedge \sim a,$$

luego $\Delta(a \wedge d) \overset{\text{N59)}}{=} \Delta\Delta(a \wedge d) \overset{\text{N51)}}{\leq} \Delta(a \wedge \sim a) \overset{\text{N54)}}{=} 0$, por lo que $\Delta(a \wedge d) = 0$. □

Lema 2.32 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson, $D \in \mathcal{D}(N)$ y $M \in \mathcal{M}(N)$ es tal que $D \subseteq M$ entonces $\Delta(d \wedge m) \neq 0$ para todo $d \in D$ y $m \in M$.*

Dem. Si $d \in D$ entonces $d \wedge m \in M$ para todo $m \in M$, luego siguiendo el Lema 2.30, $\Delta(d \wedge m) \neq 0$. □

Lema 2.33 (A. Monteiro, [20]) *Si $M \in \mathcal{M}(N)$ y $x \notin M$ entonces para todo $y \in N$, $x \to y \in M$.*

Dem. Sea $M \in \mathcal{M}(N)$, $x \notin M$. Como M es maximal resulta $D(M,x) = N$ y en consecuencia, por el Lema 2.22, cualquiera que sea $y \in N$ verifica $x \to y \in M$. $\square$

Aún más, si cada vez que $x, y \notin M$ entonces $x \to y \in M$, resulta $M \in \mathcal{M}(N)$. En efecto, si M no fuera maximal existiría un M' tal que $M \subset M' \subset N$. Tomemos entonces $x \in M' \setminus M$, $y \in N \setminus M'$. Como $x, y \notin M$, por hipótesis resulta $x \to y \in M \subset M'$ y, en consecuencia $y \in M'$, lo cual es un absurdo.

Lema 2.34 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson y $M \in \mathcal{M}(N)$ entonces cualquiera que sea $x \in N$, $x \wedge \nabla \sim x \notin M$ y $x \in M$ o $\nabla \sim x \in M$.*

Dem. Si $x \wedge \nabla \sim x \in M$, como $x \wedge \nabla \sim x \overset{\text{N45)}}{=} x \wedge \sim x$ entonces $x \wedge \sim x \in M$, luego por el Lema 2.25 y $0 \overset{\text{N54)}}{=} \Delta(x \wedge \sim x) \in M$, absurdo.

Dado el conjunto M y $x \in N$ entonces $x \in M$ o $x \notin M$. En este último caso, como $M \in \mathcal{M}(N)$, por el Lema 2.33, $\nabla \sim x = \neg x = x \to 0 \in M$. $\square$

Lema 2.35 *Si $M \in \mathcal{M}(N)$, entonces M es un filtro primo.*

Dem. Sea $M \in \mathcal{M}(N)$, sabemos que M es un filtro propio. Supongamos que (1) $a \vee b \in M$ y (2) $b \notin M$. De (2) y el Lema 2.33 resulta $b \to a \in M$. Luego, $(a \vee b) \to a \overset{\text{N12)}}{=} (a \to a) \wedge (b \to a) \overset{\text{N6)}}{=} 1 \wedge (b \to a) = b \to a \in M$, y por (1) resulta $a \in M$. $\square$

Observación 2.36 *Si $M \in \mathcal{M}(N)$, por el* Lema 2.35 *es un filtro primo, y si φ es la transformación de Birula-Rasiowa,* (A. Bialynicki-Birula, H. Rasiowa, [1]) *esto es $\varphi(M) = \complement \sim M = \sim \complement M$ entonces $\varphi(M)$ es un filtro primo de N y $M \subseteq \varphi(M)$* (H. Rasiowa [55]). *Además $\varphi(M) = M$ si y solo si $\sim M = \complement M$.*

Lema 2.37 (A. Monteiro, [20]) *Si $M \in \mathcal{M}(N)$ y $x \in \varphi(M) \setminus M$ entonces $\sim x \in \varphi(M) \setminus M$.*

Dem. Si $\sim x \in \complement(\varphi(M) \setminus M) = \sim M \cup M$, entonces (1) $\sim x \in \sim M$ o (2) $\sim x \in M$. Si ocurre (1) entonces $x \in M$, lo que contradice la hipótesis. De (2) resulta $\sim x \notin \complement M$, luego $x \notin \sim \complement M = \varphi(M)$, absurdo. $\square$

Definición 2.38 *Dadas álgebras de Nelson N y N', una función $h : N \to N'$ se dice un* homomorfismo *si para todo $x, y \in N$, $h(1) = 1'$, $h(\sim x) = \sim h(x)$, $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$, $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$ y $h(x \to y) = h(x) \to h(y)$, donde $1'$ es el último elemento de N'. Si h es una función epiyectiva, h se dice un* epimorfismo *y si h es biyectiva, se dice un* isomorfismo *de álgebras de Nelson.*

Si $h : N \to N'$ es un epimorfismo, decimos que N' es una imagen homomorfa *de N, y si existe un isomorfismo entre N y N' notamos esto con $N \cong N'$.*

Denotamos con $Nuc(h)$ al núcleo del homomorfismo h, esto es, el conjunto $\{x \in N : h(x) = 1'\}$.

Lema 2.39 (A. Monteiro, [22, 32], I. Viglizzo, [59], pág 32) *Si N es un álgebra de Nelson, $D \in \mathcal{D}(N)$ entonces la relación definida sobre N por*

$$x \equiv_D y \text{ si y solo si } x \to y, y \to x, \sim x \to \sim y, \sim y \to \sim x \in D$$

es una congruencia de álgebras de Nelson y $D = \{x \in N : x \equiv_D 1\}$.

Notaremos $|x|_D = \{y \in N : y \equiv_D x\}$ y N/D al álgebra cociente.

Observación 2.40 *Si N es un álgebra de Nelson, $u \in N$, $p = u \wedge \sim u$ y $S(u) = S = [p, u] = \{x \in N : p \leq x \leq u\}$ entonces $(S, u, \sim_S, \wedge, \vee, \to_S)$ es un álgebra de Nelson, donde $\sim_S x = \sim x \wedge u$ y $x \to_S y = (x \to y) \wedge u$, para $x, y \in S$* (I. Viglizzo [59], pág. 50-51). *Veamos que si $x \in S$, entonces $\nabla_S x = \nabla x \wedge u$. En efecto,*

$$\nabla_S x = \neg_S \sim_S x \overset{\text{N43)}}{=} \sim_S x \to_S \sim_S \sim_S x = \sim_S x \to_S x = (\sim_S x \to x) \wedge u =$$

$$((\sim x \wedge u) \to x) \wedge u \overset{\text{N7)}}{=} (u \to (\sim x \to x)) \wedge u \overset{\text{N43)}}{=} (u \to \neg \sim x) \wedge u =$$

$$u \wedge (u \to \nabla x) \overset{\text{N8)}}{=} u \wedge (\sim u \vee \nabla x) = (u \wedge \sim u) \vee (u \wedge \nabla x) = p \vee (u \wedge \nabla x) =$$

$$(p \vee u) \wedge (p \vee \nabla x) = u \wedge \nabla x,$$

pues $p \leq x \leq \nabla x$.

En forma similar, para $x \in S$ se tiene que $\Delta_S x = \Delta x \vee p$:

$$\Delta_S x = \sim_S \neg_S x \overset{\text{N43)}}{=} \sim_S (x \to_S \sim_S x) = \sim_S (x \to_S (\sim x \wedge u)) =$$

$$\sim_S ((x \to (\sim x \wedge u)) \wedge u) \overset{\text{N11)}}{=} \sim_S ((x \to \sim x) \wedge (x \to u) \wedge u) \overset{\text{N43)}}{=}$$

$$\sim_S (\neg x \wedge 1 \wedge u) = \sim_S (\neg x \wedge u) = \sim (\neg x \wedge u) \wedge u = (\sim \neg x \vee \sim u) \wedge u =$$

$$(\Delta x \vee \sim u) \wedge u = (\Delta x \wedge u) \vee (\sim u \wedge u) = \Delta x \vee p,$$

pues $\Delta x \leq x \leq u$.

La función $t : N \to S$ definida por $t(x) = p \vee (x \wedge u) = u \wedge (u \to x)$ es un homomorfismo suryectivo tal que $t(x) = x$ para todo $x \in S$, $Nuc(t) = D(u)$, y $N/D(u) \cong S(u)$. (A. Monteiro, [37] e I. Viglizzo, [59], pág. 51-52).
Recordemos además (I. Viglizzo, [59], pag. 53) *que en cada clase de equivalencia módulo $D(u)$ existe un único elemento de $S(u)$. Más precisamente si $x \in N$ entonces $C(x) \cap S(u) = \{u \wedge (u \to x)\}$. Estos resultados son análogos, pero más generales que los indicados por* L. Monteiro *en* [52] *y* [45].
$S(1) = N$ y $S(0) = \{0\}$. Si $b \in \mathcal{B}(N) \setminus \{0, 1\}$ y $S = [0, b]$ entonces $(S, b, \sim_S, \wedge, \vee, \to_S)$ es un álgebra de Nelson, no trivial, $S \neq N$, donde $\sim_S x = \sim x \wedge b$, $x \to_S y = (x \to y) \wedge b$, $\nabla_S x = \nabla x$ y $\Delta_S x = \Delta x$ para todo $x, y \in S$.

Lema 2.41 *Si* $b_1, b_2 \in \mathcal{B}(N) \setminus \{0,1\}$, $b_1 \neq b_2$, $b_1 \wedge b_2 = 0$ *y* $u = b_1 \vee b_2$ *entonces*

$$[0,u] \cong N/D(u) \cong N/D(b_1) \times N/D(b_2) \cong [0,b_1] \times [0,b_2].$$

Dem. En efecto, sea m la función de $S = [0,u]$ en $P = [0,b_1] \times [0,b_2]$ definida por

$$m(x) = (x \wedge b_1, x \wedge b_2).$$

Como $0 \leq x \wedge b_1 \leq b_1$ y $0 \leq x \wedge b_2 \leq b_2$ entonces $x \wedge b_1 \in [0,b_1]$ y $x \wedge b_2 \in [0,b_2]$. El reticulado distributivo $[0,u]$ es isomorfo al reticulado distributivo P (ver, por ejemplo, [52]), vía la función m, que también es un isomorfismo de álgebras de Nelson.
Veamos que m es suryectiva. En efecto, dado $(y_1, y_2) \in P$, esto es $0 \leq y_1 \leq b_1$ y $0 \leq y_2 \leq b_2$ entonces $0 \leq y = y_1 \vee y_2 \leq b_1 \vee b_2 = u$, luego $y \in [0,u]$. Observemos que $y_2 \wedge b_1 \leq b_2 \wedge b_1 = 0$, de donde resulta $y_2 \wedge b_1 = 0$. En forma análoga $y_1 \wedge b_2 = 0$.

$$m(y) = (y \wedge b_1, y \wedge b_2) = ((y_1 \vee y_2) \wedge b_1, (y_1 \vee y_2) \wedge b_2) =$$

$$((y_1 \wedge b_1) \vee (y_2 \wedge b_1), (y_1 \wedge b_2) \vee (y_2 \wedge b_2)) = (y_1 \vee 0, 0 \vee y_2) = (y_1, y_2).$$

m es inyectiva. Sean $y, z \in [0,u]$ tales que $m(y) = m(z)$, esto es $(y \wedge b_1, y \wedge b_2) = (z \wedge b_1, z \wedge b_2)$. Luego $y \wedge b_1 = z \wedge b_1$ e $y \wedge b_2 = z \wedge b_2$ y por lo tanto $y = y \wedge u = y \wedge (b_1 \vee b_2) = (y \wedge b_1) \vee (y \wedge b_2) = (z \wedge b_1) \vee (z \wedge b_2) = z \wedge (b_1 \vee b_2) = z \wedge u = z$.

$m(0) = (0 \wedge b_1, 0 \wedge b_2) = (0,0)$.

$m(u) = (u \wedge b_1, u \wedge b_2) = (b_1, b_2)$.

$m(x \wedge y) = (x \wedge y \wedge b_1, x \wedge y \wedge b_2) = (x \wedge b_1, x \wedge b_2) \wedge (y \wedge b_1, y \wedge b_2) = m(x) \wedge m(y)$.

$m(x \vee y) = ((x \vee y) \wedge b_1, (x \vee y) \wedge b_2) = ((x \wedge b_1) \vee (y \wedge b_1), (x \wedge b_2) \vee (y \wedge b_2)) = (x \wedge b_1, x \wedge b_2) \vee (y \wedge b_1, y \wedge b_2) = m(x) \vee m(y)$.
$m({\sim_S}\, x) = ({\sim_S}\, x \wedge b_1, {\sim_S}\, x \wedge b_2) = ({\sim}\, x \wedge u \wedge b_1, {\sim}\, x \wedge u \wedge b_2) = ({\sim}\, x \wedge b_1, {\sim}\, x \wedge b_2)$.
Como $b_1, b_2 \in \mathcal{B}(N)$ entonces $b_1 \wedge \sim b_1 = 0$ y $b_2 \wedge \sim b_2 = 0$, luego

$$\sim m(x) = \sim (x \wedge b_1, x \wedge b_2) = ({\sim_{S(b_1)}}\, (x \wedge b_1), {\sim_{S(b_2)}}\, (x \wedge b_2)) =$$

$$(\sim (x \wedge b_1) \wedge b_1, \sim (x \wedge b_2) \wedge b_2) =$$

$$((\sim x \vee \sim b_1) \wedge b_1, (\sim x \vee \sim b_2) \wedge b_2) = (\sim x \wedge b_1, \sim x \wedge b_2).$$

$$m(x \to_S y) = m((x \to y) \wedge u) = ((x \to y) \wedge u \wedge b_1, (x \to y) \wedge u \wedge b_2) =$$

$$((x \to y) \wedge b_1, (x \to y) \wedge b_2).$$

$$m(x) \to m(y) = (x \wedge b_1, x \wedge b_2) \to (y \wedge b_1, y \wedge b_2) =$$

$$((x \wedge b_1) \to_{S(b_1)} (y \wedge b_1), (x \wedge b_2) \to_{S(b_2)} (y \wedge b_2)) =$$

$$(((x \wedge b_1) \to (y \wedge b_1)) \wedge b_1, ((x \wedge b_2) \to (y \wedge b_2)) \wedge b_2).$$

Tenemos:

$$(x \wedge b_1) \to (y \wedge b_1) \overset{\text{N7)}}{=} x \to (b_1 \to (y \wedge b_1)) \overset{\text{N11)}}{=}$$

$$x \to ((b_1 \to y) \wedge (b_1 \to b_1)) \overset{\text{N6)}}{=} x \to (b_1 \to y) \overset{\text{N22)}}{=} b_1 \to (x \to y),$$

luego

$$((x \wedge b_1) \to (y \wedge b_1)) \wedge b_1 = b_1 \wedge (b_1 \to (x \to y)) \overset{\text{N8)}}{=} b_1 \wedge (\sim b_1 \vee (x \to y)) =$$

$$(b_1 \wedge \sim b_1) \vee (b_1 \wedge (x \to y)) = 0 \vee (b_1 \wedge (x \to y)) = b_1 \wedge (x \to y).$$

En forma análoga se prueba que $((x \wedge b_2) \to (y \wedge b_2)) \wedge b_2 = b_2 \wedge (x \to y)$.
Entonces $m(x) \to m(y) = ((x \to y) \wedge b_1, (x \to y) \wedge b_2)$. □

Notaremos con $\mathcal{A}(\mathcal{B}(N))$ el conjunto de los átomos de $\mathcal{B}(N)$.

Corolario 2.42 *Si $\mathcal{B}(N) \neq \{0,1\}$, $u = b_1 \vee b_2$ donde $b_1, b_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{B}(N))$, $b_1 \neq b_2$ entonces* $[0,u] \cong N/D(u) \cong N/D(b_1) \times N/D(b_2) \cong [0,b_1] \times [0,b_2]$.

Dem. Como b_1, b_2 son átomos diferentes de $\mathcal{B}(N)$ entonces $b_1 \wedge b_2 = 0$. □

Corolario 2.43 *Si $\mathcal{B}(N) \neq \{0,1\}$, y $\mathcal{A}(\mathcal{B}(N)) = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ entonces*

$$N \cong \prod_{i=1}^{s} [0, a_i].$$

Corolario 2.44 *Si N es un álgebra de Nelson con eje e, que no es centrada, ni un álgebra de Boole y $\nabla e \in \mathcal{B}(N)$, entonces N es isomorfa al producto cartesiano de un álgebra de Nelson centrada por un álgebra de Boole.*

Dem. Como $\Delta e = 0$, si fuera $\nabla e = 1$ entonces por el Lema 2.2, $e = \sim e$ y N sería centrada, absurdo. Si $\nabla e = 0$ entonces como $e \leq \nabla e$ tendríamos (1) $e = 0$.
Luego para todo $x \in N$, $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x \overset{(1)}{=} \Delta x \wedge \nabla x = \Delta x$ y por el Lema 1.5 N sería un álgebra de Boole, absurdo. Por lo tanto $\nabla e \in \mathcal{B}(N) \setminus \{0,1\}$ y también $\sim \nabla e \in \mathcal{B}(N) \setminus \{0,1\}$. Luego por la Observación, 2.40 resulta que $S_1 = [0, \nabla e]$ y $S_2 = [0, \sim \nabla e]$ son álgebras de Nelson, no triviales. Como $e \in S_1$ entonces $\nabla_{S_1} e = \nabla e$ y $\Delta_{S_1} e = \Delta e = 0$, luego e es centro de S_1.
Si $x \in S_2$ entonces $e \wedge \nabla x \leq \Delta x \vee (e \wedge \nabla x) = x \leq \sim \nabla e$, de donde se concluye que

$$e \wedge x \leq e \wedge \nabla x = e \wedge \nabla x \wedge \nabla e \leq \sim \nabla e \wedge \nabla e = 0.$$

Por lo tanto

$$x = x \wedge \sim \nabla e = (\Delta x \vee (e \wedge \nabla x)) \wedge \sim \nabla e = (\Delta x \wedge \sim \nabla e) \vee (e \wedge \nabla x \wedge \sim \nabla e) =$$

$$(\Delta x \wedge \sim \nabla e) \vee 0 = \Delta x \wedge \sim \nabla e.$$

Como $\Delta x \leq x \leq \sim \nabla e$ entonces $\Delta x \wedge \sim \nabla e = \Delta x$ y por lo tanto $x = \Delta x = \Delta_{S_2} x$, luego por el Lema 1.5, S_2 es un álgebra de Boole.

Como $\nabla e, \sim \nabla e \in \mathcal{B}(N) \setminus \{0,1\}$, $\nabla e \neq \sim \nabla e$, $1 = \nabla e \vee \sim \nabla e$ y $0 = \nabla e \wedge \sim \nabla e$, por el Lema 2.41 el álgebra $N = [0,1]$ es isomorfa a $[0, \nabla e] \times [0, \sim \nabla e]$, es decir, N es isomorfa al producto cartesiano de un álgebra de Nelson centrada por un álgebra de Boole. $\square$

De ahora en adelante notaremos $\mathbf{T}$ en vez de C_3. Sobre $\mathbf{T}$ podemos definir una sola estructura de álgebra de Nelson, determinada por las siguientes tablas.

$\wedge$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

$\vee$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	1	1	1

$\to$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

x	$\sim$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

El conjunto $\mathbf{B} = \{0,1\} = C_2$ es una subálgebra de Nelson de $\mathbf{T}$.

Lema 2.45 (A. Monteiro, [33]) *Si N es un álgebra de Nelson y $M \in \mathcal{D}(N)$, entonces $M \in \mathcal{M}(N)$ si y solo si $N/M \cong \mathbf{B}$ o $N/M \cong \mathbf{T}$.*

Lema 2.46 (A. Monteiro, [33], I. Viglizzo, [59]) *Si N es álgebra de Nelson y $M \in \mathcal{M}(N)$ verifica $\varphi(M) = M$ entonces $N/M \cong \mathbf{B}$.*

Por la Observación 2.36, sabemos que si $M \in \mathcal{M}(N)$ entonces $M \subseteq \varphi(M)$.

Definición 2.47 *Si $M \in \mathcal{M}(N)$, M se dice* bivalente *si $N/M \cong \mathbf{B}$, lo que equivale a decir que $\varphi(M) = M$ y M se dice* trivalente *si $N/M \cong \mathbf{T}$, lo que equivale a decir que $M \subset \varphi(M)$.*

Lema 2.48 *Si N es un álgebra de Nelson, $M \in \mathcal{M}(N)$ y $x \in \varphi(M) \setminus M$ entonces $|x|_M = \varphi(M) \setminus M$.*

Dem. Por hipótesis $x \notin M$ y por el Lema 2.37, $\sim x \notin M$. Si $y \in |x|_M$ esto es $x \equiv_M y$, en particular (1) $y \to x \in M$ y (2) $\sim y \to \sim x \in M$. Supongamos que $y \notin \varphi(M) \setminus M$, esto es $y \in M \cup \sim M$, luego (3) $y \in M$ o, (4) $\sim y \in M$. De (1) y (3), $x \in M$, absurdo. De (2) y (4), $\sim x \in M$, absurdo. Luego $|x|_M \subseteq \varphi(M) \setminus M$.
Si $y \in \varphi(M) \setminus M$, de $x, y \notin M$ por el Lema 2.33, (5) $x \to y, y \to x \in M$. Como $x, y \in \varphi(M) = \complement \sim M$ entonces $x, y \notin \sim M$, luego $\sim x, \sim y \notin M$ y por lo tanto (6) $\sim x \to \sim y$, $\sim y \to \sim x \in M$. De (5) y (6), $y \in |x|_M$. Luego $|x|_M = \varphi(M) \setminus M$. $\square$

A. Monteiro en [37] hace el siguiente comentario. En todo espacio topológico E la frontera de $X \subseteq E$, que notaremos $\partial(X)$ se define por $\partial(X) = \overline{X} \cap \overline{\complement X}$, donde $\overline{X}$ indica la clausura de X. Como

$$(X \cap \overline{\complement X}) \cup (\complement X \cap \overline{X}) =$$
$$(X \cup \complement X) \cap (X \cup \overline{X}) \cap (\overline{\complement X} \cup \complement X) \cap (\overline{\complement X} \cup \overline{X}) =$$
$$E \cap \overline{X} \cap \overline{\complement X} \cap (\overline{\complement X} \cup \overline{X}) = \overline{X} \cap \overline{\complement X} = \partial(X),$$

entonces $\partial(X)$ se puede expresar como la unión de dos conjuntos disjuntos.

Definición 2.49 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson y $x \in N$, se define la* frontera de x *por:* $\partial x = \nabla x \wedge \nabla \sim x$.

Como veremos en el Teorema 2.56, A. Monteiro determinó las álgebras de Nelson que verifican la condición

$$\text{(F)} \;\; \partial x = (x \wedge \nabla \sim x) \vee (\sim x \wedge \nabla x).$$

Las álgebras C_n, con n impar no verifican (F). En efecto, $\sim \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $\nabla \sim \frac{1}{2} = \nabla \frac{1}{2} = 1$.

Por lo tanto $\partial \frac{1}{2} = 1$ y $(\frac{1}{2} \wedge \nabla \sim \frac{1}{2}) \vee (\sim \frac{1}{2} \wedge \nabla \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} \wedge 1) \vee (\frac{1}{2} \wedge 1) = \frac{1}{2}$.

Las álgebras C_n, con n par verifican (F). En efecto, dados $x, y \in C_n$ entonces (1) $x <\sim x$ o (2) $\sim x < x$. Si ocurre (1) vimos que $\nabla x = x$ y $\Delta x = 0$, esto es $\nabla \sim x = 1$, luego $\partial x = x$ y $(x \wedge \nabla \sim x) \vee (\sim x \wedge \nabla x) = x \vee (\sim x \wedge x) = x$. En el caso (2) vimos que $\nabla x = 1$ y $\Delta x = x$, esto es $\nabla \sim x = \sim x$, luego $\partial x = \sim x$ y $(x \wedge \nabla \sim x) \vee (\sim x \wedge \nabla x) = (x \wedge \sim x) \vee (\sim x \wedge 1) = \sim x$.

Definición 2.50 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson, se denomina* radical de N *a la intersección de todos sus sistemas deductivos maximales, lo notaremos $Rad(N)$.*

Observación 2.51 *A partir de la definición afirmamos que $N \neq Rad(N) \in \mathcal{D}(N)$.*

Lema 2.52 (A. Monteiro, [29, 30, 35], I. Viglizzo, [59], pág. 77)

$$Rad(N) = \{n \in N : n = x \vee \neg x, \text{ para algún } x \in N\}.$$

Definición 2.53 (A. Monteiro, [37]) *Si $x \in N$ verifica $\neg\neg x = 1$ se denomina* elemento denso. (Ver también I. Viglizzo, [59], pág. 76). *Notaremos $Ds(N)$ el conjunto de todos los elementos densos de N.*

Lema 2.54 (A. Monteiro, [37], I. Viglizzo, [59], pág. 76 y 77)

$$x \in Rad(N) \text{ si y solo si } \neg\neg x = 1 \text{ si y solo si } \Delta\neg x = 0.$$

Luego $Rad(N) = Ds(N)$.

Lema 2.55 (A. Monteiro, [37]) $Rad(N) \subseteq \Delta(N)$.

Dem. Sea $r \in Rad(N)$. Sabemos que (1) $\Delta\Delta r \overset{\text{N59)}}{=} \Delta r$. Probemos que (2) $\nabla\Delta r = \nabla r$. Por el Lema 2.54, $\nabla\Delta r \overset{\text{N69)}}{=} \neg\neg r = 1$. Por el Lema 2.52, $r = x \vee \neg x$, para algún $x \in N$. Luego $\nabla r = \nabla(x \vee \neg x) = \neg \sim (x \vee \neg x) = \neg(\sim x \wedge \Delta x) = (\sim x \wedge \Delta x) \to 0 \overset{\text{N67)}}{=} 1$ y por lo tanto vale (2). De (1), (2) y el Lema 1.11 se concluye que $\Delta r = r$, esto es $r \in \Delta(N)$. $\square$

Teorema 2.56 (A. Monteiro, [29, 30, 35, 37]) *En toda álgebra de Nelson N las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) $\partial x = (x \wedge \nabla \sim x) \vee (\sim x \wedge \nabla x)$,

b) $x \wedge \sim x = \nabla x \wedge \nabla \sim x$,

c) $\varphi(M) = M$, *para todo* $M \in \mathcal{M}(N)$,

d) $\Delta \nabla x = \nabla \Delta x$, *para todo* $x \in N$,

e) $N/Rad(N)$ *es un álgebra de Boole,*

f) $\Delta \partial x = 0$, *para todo* $x \in N$,

g) $N/M \cong \mathbf{B}$, *para todo* $M \in \mathcal{M}(N)$.

Dem. a) $\Rightarrow$ b). Tenemos $x \wedge \nabla \sim x \overset{N45)}{=} x \wedge \sim x$ y $\sim x \wedge \nabla x \overset{N45)}{=} \sim x \wedge x$ entonces de a) resulta b) $x \wedge \sim x = \partial x = \nabla x \wedge \nabla \sim x$.

b) $\Rightarrow$ a). De b) resulta que $\nabla \sim x \wedge x = \nabla x \wedge \nabla \sim x \wedge x = x \wedge \sim x$ y $\nabla x \wedge \sim x = \nabla x \wedge \nabla \sim x \wedge \sim x = x \wedge \sim x$, luego $(x \wedge \nabla \sim x) \vee (\sim x \wedge \nabla x) = x \wedge \sim x \overset{b)}{=} \nabla x \wedge \nabla \sim x = \partial x$.

b) $\Rightarrow$ c). Supongamos que existe $M \in \mathcal{M}(N)$ tal que $M \subset \varphi(M)$ y sea (1) $x \in \varphi(M) \setminus M$, luego por el Lema 2.37, (2) $\sim x \in \varphi(M) \setminus M$. De (1) y (2) resulta por el Lema 2.34, $\nabla \sim x \in M$ y $\nabla x \in M$. Como M es un filtro se concluye que $\nabla x \wedge \nabla \sim x \in M$, de donde resulta por la hipótesis que $x \wedge \sim x \in M$. Luego por el Lema 2.25, $0 \overset{N54)}{=} \Delta(x \wedge \sim x) \in M$, absurdo.

c) $\Leftrightarrow$ d) (A. Monteiro, [29, 30, 35]). Ver demostración en I. Viglizzo, [59], Teorema 4.18, pág. 90.

d) $\Leftrightarrow$ e) (A. Monteiro, [29], 3.20, pág. 7, [30, 35]). Ver demostración en I. Viglizzo, [59], Teorema 4.17, pág. 87.

d) $\Rightarrow$ b) (A. Monteiro, [37]). Consideremos (3) $\Delta(x \wedge \sim x) \overset{N54)}{=} 0$ y (4) $\Delta(\nabla x \wedge \nabla \sim x) \overset{N47)}{=} \Delta\nabla(x \wedge \sim x) \overset{d)}{=} \nabla\Delta(x \wedge \sim x) \overset{N54)}{=} 0$. De (3) y (4) resulta (5) $\Delta(x \wedge \sim x) = \Delta(\nabla x \wedge \nabla \sim x)$. Tenemos (6) $\nabla(x \wedge \sim x) \overset{N60)}{=} \nabla\nabla(x \wedge \sim x) \overset{N47)}{=} \nabla(\nabla x \wedge \nabla \sim x)$. De (5) y (6) resulta por el Lema 1.11, que $x \wedge \sim x = \nabla x \wedge \nabla \sim x$.

d) $\Rightarrow$ f) (A. Monteiro, [37]). Tenemos $\Delta \partial x = \Delta(\nabla x \wedge \nabla \sim x) \overset{N47)}{=} \Delta\nabla(x \wedge \sim x) \overset{d)}{=} \nabla\Delta(x \wedge \sim x) \overset{N54)}{=} \nabla 0 = 0$.

f) $\Rightarrow$ c) (A. Monteiro, [37]). Supongamos que existe $M \in \mathcal{M}(N)$ tal que $M \subset \varphi(M)$ y sea (7) $x \in \varphi(M) \setminus M$, luego por el Lema 2.37, (8) $\sim x \in \varphi(M) \setminus M$. De (7) y (8) resulta por el Lema 2.34, $\nabla \sim x \in M$ y $\nabla x \in M$. Como M es un filtro se concluye que $\partial x = \nabla x \wedge \nabla \sim x \in M$, luego del Lema 2.25, $0 \overset{\text{f)}}{=} \Delta\partial x \in M$, absurdo.

c) $\Rightarrow$ g) (A. Monteiro, [29], 3.21, pág. 7, [30, 35]). Por el Lema 2.46, $N/M \cong \mathbf{B}$, para todo $M \in \mathcal{M}(N)$.

g) $\Rightarrow$ c). Si $N/M \cong \mathbf{B}$ para todo $M \in \mathcal{M}(N)$, entonces como $|1|_M = M, \varphi(M) = \complement \sim M = \complement \sim |1|_M = \complement |0|_M = |1|_M = M$. $\square$

Es claro que $\mathbf{B}$ es la menor álgebra de Nelson no trivial.

Definición 2.57 (A. Monteiro, [37]) *Se denomina* álgebra de Nelson minimal *a toda álgebra de Nelson N que verifica la condición* d) *indicada en el Teorema 2.56. Suponemos que esta denominación se debe a que* d) *es equivalente a* g)*, que nos dice que $N/M \cong \mathbf{B}$, para todo $M \in \mathcal{M}(N)$.*

Es claro que toda álgebra de Boole es un álgebra de Nelson minimal y que si N es un álgebra de Nelson con centro c entonces N no es minimal, dado que $\Delta\nabla c = \Delta 1 = 1$ y $\nabla\Delta c = \nabla 0 = 0$.

Corolario 2.58 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson minimal y $D \in \mathcal{D}(N)$ es propio entonces no existe ningún $x \in N$ tal que $\partial x \in D$.*

Dem. Si existiera $x \in N$ tal que $\partial x \in D$ entonces por el Lema 2.25, $\Delta\partial x \in D$ y como N es minimal, por la condición f) del Teorema 2.56, $\Delta\partial x = 0$ y D no sería propio. $\square$

Este resultado no es válido en las álgebras de Nelson semisimples.

En efecto, sea L un álgebra de Nelson semisimple que no es un álgebra de Boole, y supongamos que $\partial x = \nabla x \wedge \nabla \sim x = 0$, para todo $x \in L$. Luego por N18), $x \leq \nabla x \leq \sim \nabla \sim x = \Delta x \leq x$, de donde resulta que $\nabla x = x$, para todo $x \in L$ y entonces L sería un álgebra de Boole. Por lo tanto existe al menos un $x \in L$ tal que $p = \nabla x \wedge \nabla \sim x \neq 0$. Entonces $\Delta p = \Delta\nabla(x \wedge \sim x) = \nabla(x \wedge \sim x) = p \neq 0$ luego $D(p) = F(\Delta p)$ es propio y $\partial x = p \in D(p)$.

Lema 2.59 (A. Monteiro, [29], 3.22, pág. 7, [30, 35], I. Viglizzo, [59], Lema 3.19, pág. 72) *Si N es un álgebra de Nelson, para que la función suryectiva $r : N \to \mathcal{R}(N)$ definida por $r(x) = \neg\neg x$ sea un homomorfismo de álgebras de Nelson es necesario y suficiente que $\Delta\nabla x = \nabla\Delta x$, para todo $x \in N$.*

Lema 2.60 (A. Monteiro, [29], 3.23, pág. 8, [30, 35], I. Viglizzo, [59], Lema 4.5, pág. 87) *Si N es un álgebra de Nelson entonces $\mathcal{R}(N) \cap Rad(N) = \{1\}$.*

Luego:

Lema 2.61 (A. Monteiro, [29], 3.24, pág. 8, [30, 35], I. Viglizzo, [59], Lema 4.7, pág. 90) *Si N es un álgebra de Nelson minimal, esto es $\Delta\nabla x = \nabla\Delta x$, para todo $x \in N$, entonces las álgebras de Boole $\mathcal{R}(N)$ y $N/Rad(N)$ son isomorfas.*

Definición 2.62 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson, el* radical booleano *de N es el conjunto*

$$Rad_b(N) = \bigcap\{M \in \mathcal{M}(N) : N/M \cong \mathbf{B}\}.$$

A partir de la definición, es inmediato que $Rad(N) \subseteq Rad_b(N)$.

Definición 2.63 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson, y $x \in N$, sea*

$$\omega(x) = (\nabla\Delta x \to \Delta\nabla x) \wedge (\sim \nabla\Delta x \to\sim \Delta\nabla x) \wedge (\Delta\nabla x \to \nabla\Delta x) \wedge (\sim \Delta\nabla x \to\sim \nabla\Delta x).$$

Se denomina radical minimal *de N, y se nota $Rad_m(N)$ al sistema deductivo generado por el conjunto $\{\omega(x)\}_{x\in N}$, esto es, $Rad_m(N) = D(\{\omega(x)\}_{x\in N})$.*

Si N tiene centro c, entonces:

$$\omega(c) = (0 \to 1) \wedge (1 \to 0) \wedge (1 \to 0) \wedge (0 \to 1) = 1 \wedge 0 \wedge 0 \wedge 1 = 0,$$

y por lo tanto $Rad_m(N) = N$.

Lema 2.64 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson, $\nabla\Delta|x|_{Rad_m(N)} = \Delta\nabla|x|_{Rad_m(N)}$, para toda clase de equivalencia $|x|_{Rad_m(N)} \in N/Rad_m(N)$.*

Dem. $\omega(x) \in Rad_m(N)$, luego $\nabla\Delta x \equiv_{Rad_m(N)} \Delta\nabla x$, para todo $x \in N$, entonces $\nabla\Delta|x|_{Rad_m(N)} = |\nabla\Delta x|_{Rad_m(N)} = |\Delta\nabla x|_{Rad_m(N)} = \Delta\nabla|x|_{Rad_m(N)}$. □

Si N es un álgebra de Nelson y $x \in N$, sea $\tau(x) = x\vee \sim x$, y $D_\tau(N) = D(\{\tau(x)\}_{x\in N})$.

Lema 2.65 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson, $D_\tau(N) \subseteq Rad_b(N)$.*

Dem. Sea $y \in D_\tau(N)$ entonces por el Lema 2.22, tenemos que existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in N$ tales que $(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \tau(x_i)) \to y = 1$. Sea $M \in \mathcal{M}(N)$ tal que $N/M \cong \mathbf{B}$, esto es $M = \varphi(M)$. Si $x \in M$ entonces $\tau(x) = x\vee \sim x \in M$ y si $x \notin M$ entonces $\sim x \notin\sim M$, es decir, $\sim x \in \complement \sim M = \varphi(M) = M$, luego también $\tau(x) = x\vee \sim x \in M$. Por lo tanto $\tau(x_i) \in M$, para $1 \leq i \leq n$, y entonces $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \tau(x_i) \in M$. Como $1 \in M$ resulta que $y \in M$, para todo $M \in \mathcal{M}(N)$ tal que $N/M \cong \mathbf{B}$, de donde se concluye que $y \in Rad_b(N)$. □

Lema 2.66 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson sin centro entonces $D_\tau(N)$ es un sistema deductivo propio.*

Dem. Si $0 \in D_\tau(N)$ entonces por el Lema 2.22, existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in N$ tales que $x = \bigwedge_{i=1}^{n} \tau(x_i)$ y $x \to 0 = (\bigwedge_{i=1}^{n} \tau(x_i)) \to 0 = 1$. Como $x_i \wedge \sim x_i \leq x_j \vee \sim x_j$, para $1 \leq i, j \leq n$, entonces $\sim x = \bigvee_{i=1}^{n} (x_i \wedge \sim x_i) \leq x_j \vee \sim x_j$, para $1 \leq j \leq n$ y por lo tanto $\sim x \leq \bigwedge_{j=1}^{n} (x_j \vee \sim x_j) = x$. Luego $1 = (\sim x \vee x) \to 0 \overset{\text{N12)}}{=} (\sim x \to 0) \wedge (x \to 0)$. Por lo tanto $\nabla x = \neg \sim x = \sim x \to 0 = 1$ y $\Delta x = \sim \neg x = \sim (x \to 0) = \sim 1 = 0$, de donde se concluye por el Lema 2.2, que x es centro de N, absurdo. $\square$

Corolario 2.67 *Si N es un álgebra de Nelson sin centro entonces existe $M \in \mathcal{M}(N)$ tal que $N/M \cong \mathbf{B}$.*

Dem. Como $D_\tau(N)$ es un sistema deductivo propio, entonces existe $M \in \mathcal{M}(N)$ tal que $D_\tau(N) \subseteq M$. Si $M \subset \varphi(M)$, existe $y \in N$ tal que (1) $y \in \varphi(M)$ y (2) $y \notin M$. Como $y \vee \sim y \in D_\tau(N) \subseteq M$ y M es un filtro primo, de (2) resulta que $\sim y \in M$, es decir, $y \in \sim M$ y por lo tanto $y \notin \complement \sim M = \varphi(M)$, lo que contradice (1). Luego $M = \varphi(M)$ y entonces $N/M \cong \mathbf{B}$. $\square$

Corolario 2.68 *Si N es un álgebra de Nelson y $N/M \cong \mathbf{T}$ para todo $M \in \mathcal{M}(N)$, entonces N tiene centro.*

Dem. Si N no tuviese centro entonces por el corolario anterior existe $M \in \mathcal{M}(N)$ tal que $N/M \cong \mathbf{B}$, absurdo. $\square$

Lema 2.69 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson, $M \in \mathcal{M}(N)$ y $N/M \cong \mathbf{B}$, entonces $\Delta\nabla x \equiv_M \nabla\Delta x$, para todo $x \in N$.*

Dem. Como por hipótesis $N/M \cong \mathbf{B}$ entonces $|1|_M = M$ y $|0|_M = \complement M$.
Si $x \in M$ entonces $x \in |1|_M$, es decir, $x \equiv_M 1$. Por lo tanto $\Delta x \equiv_M \Delta 1 = 1$ y $\nabla x \equiv_M \nabla 1 = 1$, de donde se concluye $\nabla\Delta x \equiv_M \nabla 1 = 1$ y $\Delta\nabla x \equiv_M \Delta 1 = 1$. Luego $\Delta\nabla x \equiv_M \nabla\Delta x$, para todo $x \in M$.

Si $x \notin M$ entonces $x \in |0|_M$, esto es $x \equiv_M 0$, de donde resulta $\Delta x \equiv_M \Delta 0 = 0$ y $\nabla x \equiv_M \nabla 0 = 0$. Por lo tanto $\nabla\Delta x \equiv_M \nabla 0 = 0$, $\Delta\nabla x \equiv_M \Delta 0 = 0$ y entonces $\Delta\nabla x \equiv_M \nabla\Delta x$, para todo $x \notin M$. $\square$

Corolario 2.70 *Si N es un álgebra de Nelson, $Rad_m(N) \subseteq M$, para todo $M \in \mathcal{M}(N)$ tal que $N/M \cong \mathbf{B}$.*

Dem. Si $M \in \mathcal{M}(N)$ es tal que $N/M \cong \mathbf{B}$, entonces por el Lema 2.69, $\Delta\nabla x \equiv_M \nabla\Delta x$ para todo $x \in N$, esto es $\omega(x) \in M$ para todo $x \in N$, luego $\{\omega(x)\}_{x \in N} \subseteq M$ y por lo tanto $Rad_m(N) = D(\{\omega(x)\}_{x \in N}) \subseteq M$. $\square$

Corolario 2.71 *Si N es un álgebra de Nelson, $Rad_m(N) \subseteq Rad_b(N)$.*

Dem. Por el corolario precedente $Rad_m(N) \subseteq M$, para todo $M \in \mathcal{M}(N)$ tal que $N/M \cong \mathbf{B}$, luego $Rad_m(N) \subseteq \bigcap\{M \in \mathcal{M}(N) : N/M \cong \mathbf{B}\} = Rad_b(N)$. □

Lema 2.72 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson con eje e, $M \in \mathcal{M}(N)$ y $\sim e \in M$, entonces $|e|_M = \complement M = \sim M$ y $| \sim e|_M = M$.*

Dem. Por el Corolario 2.26, (1) $e \notin M$. Probemos que $|e|_M = \complement M$.
Si $x \in |e|_M$, en particular $x \to e \in M$. Si $x \in M$ entonces $e \in M$ y se contradice (1), luego $x \notin M$, esto es $x \in \complement M$ y por lo tanto (i) $|e|_M \subseteq \complement M$.
Sea $x \in \complement M$, esto es (2) $x \notin M$. De (1) y (2) resulta por ser M un sistema deductivo maximal que (3) $x \to e, e \to x \in M$. Como $\sim e \leq \sim x \to \sim e$ y $\sim e \in M$ entonces (4) $\sim x \to \sim e \in M$. De (2) y el Lema 2.34 resulta (5) $\nabla \sim x \in M$. Como $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x$ entonces $\sim x = (\nabla \sim x \wedge \sim e) \vee \Delta \sim x$. De (5) y $\sim e \in M$ se concluye que $\nabla \sim x \wedge \sim e \in M$ y por lo tanto (6) $\sim x = (\nabla \sim x \wedge \sim e) \vee \Delta \sim x \in M$. De $\sim x \leq \sim e \to \sim x$ y (6) resulta que (7) $\sim e \to \sim x \in M$. De (3), (4) y (7) podemos afirmar que $x \equiv_M e$ y por lo tanto (ii) $\complement M \subseteq |e|_M$.
De (i) e (ii) $\complement M = |e|_M$. Como $M = | \sim e|_M = \sim |e|_M = \sim \complement M$ entonces $\complement M = \sim M$. □

Corolario 2.73 *Si N es un álgebra de Nelson con eje e, $M \in \mathcal{M}(N)$ y $\sim e \in M$, entonces $N/M \cong \mathbf{B}$.*

Lema 2.74 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson con eje e, $M \in \mathcal{M}(N)$ y $\sim e \notin M$, entonces $|e|_M = | \sim e|_M$, $|\nabla e|_M = |1|_M = M$ y $| \sim \nabla e|_M = |0|_M = \sim M$.*

Dem. Por el Corolario 2.26, $e \notin M$. Como por hipótesis $\sim e \in \complement M$ entonces $e \in \varphi(M)$, luego (1) $e \in \varphi(M) \setminus M$. Entonces por el Lema 2.48, $|e|_M = \varphi(M) \setminus M$. De (1) resulta por el Lema 2.37, que $\sim e \in \varphi(M) \setminus M$. Luego $|e|_M = | \sim e|_M$.
Como $\sim e \notin M$, por el Lema 2.34 se concluye que $\nabla e \in M$ y por lo tanto $|\nabla e|_M = M$. □

Corolario 2.75 *Si N es un álgebra de Nelson con eje e, $M \in \mathcal{M}(N)$ y $\sim e \notin M$, entonces $N/M \cong \mathbf{T}$.*

Lema 2.76 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson con centro c y $M \in \mathcal{M}(N)$ entonces $c \in \varphi(M) \setminus M$, $M \subset \varphi(M)$ y $N/M \cong \mathbf{T}$.*

Dem. Como M es un sistema deductivo propio, entonces por el Corolario 2.26 (1) $c \notin M$, luego $c = \sim c \notin \sim M$ y por lo tanto (2) $c \in \complement \sim M = \varphi(M)$. De (1) y (2) resulta que $c \in \varphi(M) \setminus M$ y como por la Observación 2.36, $M \subseteq \varphi(M)$ entonces $M \subset \varphi(M)$. De (1), $\sim c = c \notin M$ y como c es eje de N, del Corolario 2.75 se concluye que $N/M \cong \mathbf{T}$. □

Lema 2.77 (A. Monteiro, [37]) *Un álgebra de Nelson N con eje e es minimal si y solo si $\sim e \in M$, para todo $M \in \mathcal{M}(N)$.*

Dem. Supongamos que existe $M \in \mathcal{M}(N)$ tal que $\sim e \notin M$, luego por el Corolario 2.75, $N/M \cong \mathbf{T}$, absurdo.
Si $\sim e \in M$ para todo $M \in \mathcal{M}(N)$, entonces por el Corolario 2.73, $N/M \cong \mathbf{B}$ para todo $M \in \mathcal{M}(N)$ y por lo tanto N es minimal. □

Ejemplo 2.78 *En el Ejemplo* 2.12*, $M_1 = D(b)$ es un sistema deductivo maximal del álgebra N y $\sim M_1 = \complement M_1$, luego $M_1 \cup \sim M_1 = N$. $M_2 = F(c)$ también es un sistema deductivo maximal de N y $\sim M_2 \neq \complement M_2$. En este ejemplo el eje e de N verifica: $\sim e \in M_1$ y $\sim e \notin M_2$.*

Observación 2.79 *Si N es un álgebra de Nelson y $\sim e \in M$ para todo $M \in \mathcal{M}(N)$, entonces $\sim e \in Rad(N)$ y como por el* Lema 2.55*, $Rad(N) \subseteq \Delta(N)$, entonces $\Delta \sim e = \sim e$, y por lo tanto $\nabla e = e$.*

Observación 2.80 *Si N es un álgebra de Nelson con centro c, vimos que $\omega(c) = 0$ y $Rad_m(N) = N$. Como por el* Corolario 2.70*, $Rad_m(N) \subseteq M$, para todo $M \in \mathcal{M}(N)$ tal que $N/M \cong \mathbf{B}$, entonces $N \subseteq M$ y por lo tanto $N = M$. Luego N no tiene ningún sistema deductivo bivalente, lo que está de acuerdo con el* Lema 2.76.

Observación 2.81 *Si N es un álgebra de Nelson y $\Delta\nabla x = \nabla\Delta x$ para todo $x \in N$, entonces $\omega(x) = 1$ para todo $x \in N$, luego $Rad_m(N) = \{1\}$ y por lo tanto $N/Rad_m(N) \cong N$.*

Observación 2.82 *Si $\sim x \leq x$ entonces $\omega(x) = \nabla\Delta x$.*
En efecto, $\Delta \sim x = \Delta(\sim x \wedge x) \overset{N54)}{=} 0$, luego $\nabla x = 1$ y por lo tanto

$$\nabla\Delta x \to \Delta\nabla x = \nabla\Delta x \to 1 = 1, \ \sim \nabla\Delta x \to \sim \Delta\nabla x = \sim \nabla\Delta x \to 0,$$

$$\Delta\nabla x \to \nabla\Delta x = 1 \to \nabla\Delta x = \nabla\Delta x \ \text{ y } \ \sim \Delta\nabla x \to \sim \nabla\Delta x = 0 \to \sim \nabla\Delta x = 1.$$

Luego

$$\omega(x) = 1 \wedge (\sim \nabla\Delta x \to 0) \wedge \nabla\Delta x \wedge 1 = (\sim \nabla\Delta x \to 0) \wedge \nabla\Delta x =$$

$$\neg \sim \nabla\Delta x \wedge \nabla\Delta x = \nabla\nabla\Delta x \wedge \nabla\Delta x \overset{N60)}{=} \nabla\Delta x \wedge \nabla\Delta x = \nabla\Delta x.$$

Lema 2.83 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson con centro c, $M \in \mathcal{M}(N)$ y $a \in \varphi(M) \setminus M$ entonces $b = (a \vee \sim a) \to c \in M$.*

Dem. Como $a \notin M$ entonces por el Lema 2.33, (1) $a \to c \in M$. De la hipótesis $a \in \varphi(M) \setminus M$, resulta por el Lema 2.37 que $\sim a \in \varphi(M) \setminus M$, luego $\sim a \notin M$ y por el Lema 2.33, (2) $\sim a \to c \in M$. De (1) y (2) resulta que $b \overset{N12)}{=} (a \to c) \wedge (\sim a \to c) \in M$. □

Lema 2.84 (A. Monteiro, [37]) *Si* N *es un álgebra de Nelson con centro* c *y* (*) $b = (a\vee \sim a) \to c$ *entonces:*

(a) $b \to c = b \to (a\vee \sim a)$,

(b) $b \wedge (b \to c) = c$.

Dem.

(a) De $c = c\wedge \sim c \overset{N5)}{\leq} a\vee \sim a$, resulta por N15), (1) $b \to c \leq b \to (a\vee \sim a)$.

Probemos ahora que (2) $b \to (a\vee \sim a) \leq b \to c$. En primer lugar veamos que:

(3) $\sim ((a \to c) \to c) \to\sim a = 1$.

Como $c \overset{N17)}{\leq} (a \to c) \to c$ entonces $\sim ((a \to c) \to c) \leq\sim c = c$, de donde se concluye (i) $\sim ((a \to c) \to c) \to c = 1$.

Además $c \to \Delta c \overset{N57)}{=} 1$ y como $\Delta c = 0$, resulta $\Delta c \to\sim a = 1$. Luego por N36), (ii) $c \to\sim a = 1$. De (i) y (ii) resulta (3).

Como $a \to ((a \to c) \to c) \overset{N30)}{=} 1$, luego de (3) y N28) resulta (4) $a \leq (a \to c) \to c$.

De la misma forma resulta que:

(5) $\sim a \leq (\sim a \to c) \to c$.

(6) $a \leq b \to c$.

$$b \to c \overset{N12)}{=} ((\sim a \to c) \wedge (a \to c)) \to c \overset{N7)}{=}$$

$$(\sim a \to c) \to ((a \to c) \to c) \overset{N17)}{\geq} (a \to c) \to c \overset{(4)}{\geq} a.$$

(7) $\sim a \leq b \to c$.

$$b \to c \overset{N12)}{=} ((a \to c) \wedge (\sim a \to c)) \to c \overset{N7)}{=}$$

$$(a \to c) \to ((\sim a \to c) \to c) \overset{N17)}{\geq} (\sim a \to c) \to c \overset{(5)}{\geq} \sim a.$$

De (6) y (7), resulta $a\vee \sim a \leq b \to c$ y por N15),

$$(2)\ b \to (a\vee \sim a) \leq b \to (b \to c) \overset{N29)}{=} b \to c.$$

De (1) y (2) se concluye la igualdad (a).

(b) De (*) resulta por N17) que (8) $c \leq b$ luego (9) $\sim b \leq c$ y por lo tanto $b \wedge (b \to c) = \overset{N8)}{=} b \wedge (\sim b \vee c) \overset{(9)}{=} b \wedge c \overset{(8)}{=} c$.

$\square$

Definición 2.85 *Si N es un álgebra de Nelson y $X \subseteq N$, notaremos $SN(X)$ a la subálgebra de Nelson de N generada por X. Notaremos $SN(X, a)$ al álgebra $SN(X \cup \{a\})$.*

De la misma manera, si L es un álgebra de Łukasiewicz trivalente, notaremos $SL(X)$ a la subálgebra de Łukasiewicz trivalente de L generada por X y notaremos $SL(X, a)$ al álgebra $SL(X \cup \{a\})$.

Lema 2.86 (L. Monteiro, [21], pág. 44) *Si L es un álgebra de Łukasiewicz trivalente con centro c y S una subálgebra de L, entonces $SL(S, c) = \{(s_1 \vee c) \wedge s_2 : s_1, s_2 \in S\}$.*

Lema 2.87 *Si N es un álgebra de Nelson con eje e, S una subálgebra de N tal que (1) $\nabla e \in S$, $T = \{x \in N : \Delta x, \nabla x \in S\}$, $R = \{(s_1 \vee e) \wedge s_2 : s_1, s_2 \in S\}$ entonces $SN(S, e) = T = R$.*

Dem.

(i) $e \in T$. Consecuencia inmediata de (1) y $\Delta e = 0 \in S$.

(ii) T es subálgebra de N. En efecto, sean $x, y \in T$, esto es $\Delta x, \nabla x \in S$, $\Delta y, \nabla y \in S$. Luego como S es una subálgebra, (2) $\Delta(x \vee y) \overset{N50)}{=} \Delta x \vee \Delta y \in S$ y $\nabla x \vee \nabla y \in S$, de donde resulta (3) $\nabla(x \vee y) \overset{N64)}{=} \nabla(\nabla x \vee \nabla y) \in S$. De (2) y (3) se concluye (4) $x \vee y \in T$.

Si $x \in T$ entonces $\Delta \sim x = \sim \nabla x \in S$ y $\nabla \sim x = \sim \Delta x \in S$. Por lo tanto (5) $\sim x \in T$. De (4) y (5) resulta que si $x, y \in T$ entonces $x \wedge y \in T$.

$\Delta(x \to y) \overset{N63)}{=} \Delta(\Delta x \to \Delta y)$, y como $\Delta x \to \Delta y \in S$ resulta (6) $\Delta(x \to y) \in S$. $\nabla(x \to y) \overset{N65)}{=} \nabla(\sim x \vee y)$ y como por (5) $\sim x \in T$ e $y \in T$ resulta por (4) que $\sim x \vee y \in T$, luego $\nabla(\sim x \vee y) \in S$, esto es (7) $\nabla(x \to y) \in S$. De (6) y (7) se concluye que $x \to y \in T$.

(iii) $SN(S, e) \subseteq T$. Consecuencia de (i), (ii) y $S \subseteq T$.

(iv) $T \subseteq SN(S, e)$. En efecto sea $x \in T$, luego $\Delta x, \nabla x \in S \subseteq SN(S, e)$ y como $e \in SN(S, e)$ entonces $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x \in SN(S, e)$.

(v) $T = SN(S, e)$. Consecuencia de (iii) y (iv).

(vi) $R = T$. Si $x \in R$ entonces $x = (s_1 \vee e) \wedge s_2$ con $s_1, s_2 \in S$, luego $\nabla x = \nabla((s_1 \vee e) \wedge s_2) \overset{N47)}{=} \nabla(s_1 \vee e) \wedge \nabla s_2 \overset{N64)}{=} \nabla(\nabla s_1 \vee \nabla e) \wedge \nabla s_2 \overset{N47)}{=}$ $\nabla((\nabla s_1 \vee \nabla e) \wedge s_2)$ y como $s_3 = (\nabla s_1 \vee \nabla e) \wedge s_2 \in S$ entonces $\nabla x = \nabla s_3 \in S$. Además $\Delta x = \Delta((s_1 \vee e) \wedge s_2) = \Delta((s_1 \wedge s_2) \vee (e \wedge s_2)) \overset{N50)}{=} \Delta(s_1 \wedge s_2) \vee \Delta(e \wedge s_2) \overset{N62)}{=}$ $\Delta(s_1 \wedge s_2) \vee \Delta(\Delta e \wedge \Delta s_2) = \Delta(s_1 \wedge s_2) \in S$. Luego como $\nabla x, \Delta x \in S$ resulta que $x \in T$ y por lo tanto $R \subseteq T$.
Si $x \in T$ entonces $\Delta x, \nabla x \in S$, luego $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x \in R$, de donde $T \subseteq R$.

$\square$

Corolario 2.88 *Si N es un álgebra de Nelson con centro c, S una subálgebra de N, $T = \{x \in N : \Delta x, \nabla x \in S\}$, $R = \{(s_1 \vee c) \wedge s_2 : s_1, s_2 \in S\}$ entonces $SN(S, c) = T = R$.*

Lema 2.89 (L. Monteiro, [48], [21], pag. 46) *Si L es un álgebra de Lukasiewicz trivalente con centro c, S una subálgebra de L tal que $\mathcal{B}(L) \subseteq S$ entonces $SL(S, c) = L$.*

I. Viglizzo observó que si L es un álgebra de Lukasiewicz trivalente con centro c e $Y \subseteq L$ verifica $\mathcal{B}(L) \subseteq Y$ entonces $SL(Y, c) = L$. En efecto, si $x \in L$ entonces $x = (\Delta x \vee c) \wedge \nabla x$. Como $\Delta x, \nabla x \in \mathcal{B}(L) \subseteq Y$ entonces $\Delta x, \nabla x, c \in SL(Y, c)$ y por lo tanto $x \in SL(Y, c)$. Por lo tanto el Lema 2.89 es un caso particular del resultado de I. Viglizzo.

Si L es un álgebra de Łukasiewicz trivalente con centro c, esto es L es un álgebra de Post trivalente, y $X \subseteq L$ notaremos $SL_c(X)$ a la subálgebra centrada de L generada por X. $SL_c(X)$ es la menor subálgebra centrada que contiene a X, luego:

Corolario 2.90 *Si L es un álgebra de Łukasiewicz trivalente con centro c, S una subálgebra de L tal que $\mathcal{B}(L) \subseteq S$ entonces $SL_c(S) = SL(S, c) = L$.*

Dem. Como $SL(S, c)$ es una subálgebra con centro que contiene a S entonces $SL_c(S) \subseteq SL(S, c)$. Sea $x \in SL(S, c)$ luego por el Lema 2.86, $x = (s_1 \vee c) \wedge s_2$ donde $s_1, s_2 \in S$, por lo tanto como $S \subseteq SL_c(S)$ y $c \in SL_c(S)$ resulta que $x \in SL_c(S)$. $\square$

Definición 2.91 *Si N es un álgebra de Nelson y $M \in \mathcal{M}(N)$, sea $S(M) = M \cup \sim M$.*

Lema 2.92 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson y $M \in \mathcal{M}(N)$ entonces $S(M)$ es una subálgebra de Nelson de N. Si N tiene centro c entonces $S(M)$ es subálgebra maximal de N.*

Dem. Observemos que (1) $M, \sim M \subseteq S(M)$ y que si $x \in S(M)$ entonces $x \in M$ o $x \in \sim M$.

(i) $1 \in S(M)$.
Como M es un filtro entonces $1 \in M$ luego $1 \in S(M)$

(ii) Si $x \in S(M)$ entonces $\sim x \in S(M)$.
Si $x \in M$ entonces $\sim x \in \sim M$ luego por (1) $\sim x \in S(M)$. Si $x \in \sim M$ entonces $\sim x \in M$ luego por (1) $\sim x \in S(M)$.

(iii) Si $x, y \in S(M)$ entonces $x \vee y \in S(M)$ y $x \to y \in S(M)$.
Por hipótesis: (2) $x \in M$ o (3) $x \in \sim M$, y (4) $y \in M$ o (5) $y \in \sim M$. Si se verifica (2) o (4) entonces por ser M un filtro, $x \vee y \in S(M)$. Si se verifican (3) y (5) entonces por ser $\sim M$ un ideal, $x \vee y \in S(M)$.

Si se verifica (3), $x \notin M$, luego por el Lema 2.33, $x \to y \in M$. Si se verifica (4), por N17), $x \to y \in M$.
Si ocurren (2) y (5) entonces $x \to y \in \sim M$. En efecto, si suponemos que $x \to y \notin \sim M$ entonces (6) $x \to y \in \varphi(M)$. De (2) y $M \subseteq \varphi(M)$ resulta (7) $x \in \varphi(M)$, luego de (6) y (7) tenemos $x \wedge (\sim x \vee y) \overset{N8)}{=} x \wedge (x \to y) \in \varphi(M)$ y como $x \wedge (\sim x \vee y) \leq \sim x \vee y$ entonces $\sim x \vee y \in \varphi(M)$. Por lo tanto, como $\varphi(M)$ es un filtro primo $\sim x \in \varphi(M)$ o $y \in \varphi(M)$, esto es $\sim x \notin \sim M$ o $y \notin \sim M$, absurdo.

De (i), (ii) y (iii) resulta que $S(M)$ es subálgebra de N.

(iv) Si N tiene centro c entonces $c \notin S(M)$.

Supongamos que $c \in S(M)$ entonces $c \in M$ o $c \in \sim M$, lo que equivale a decir que $c = \sim c \in M$. Luego por el Lema 2.25, $0 = \Delta c \in M$, absurdo. Se sigue que en este caso, $S(M)$ es una subálgebra propia de N.

(v) Si N tiene centro, $S(M)$ es subálgebra maximal de N.

Si (8) $a \notin S(M)$ sea $S_a = SN(S(M), a)$ luego (9) $a \in S_a$ y por (1) tenemos (10) $M \subseteq S_a$. Veamos que $S_a = N$.

De (8) resulta $a \notin M$ y $\sim a \notin M$, y como por el Lema 2.35, M es un filtro primo tenemos $a \vee \sim a \notin M$, luego por el Lema 2.33, $b = (a \vee \sim a) \to c \in M$, y por (10), tenemos (11) $b \in S_a$.
De (9), resulta $a \vee \sim a \in S_a$ luego de (11), $b \to (a \vee \sim a) \in S_a$, y por el Lema 2.84, $b \to c = b \to (a \vee \sim a) \in S_a$. Nuevamente por (11), $b \wedge (b \to c) \in S_a$. Como por el Lema 2.84, $b \wedge (b \to c) = c$ tenemos (12) $c \in S_a$.

Es claro que $\{M, \sim M, \varphi(M) \setminus M\}$ es una partición de N. Si $x \in N$ entonces (13) $x \in M$, (14) $x \in \sim M$ o (15) $x \in \varphi(M) \setminus M$. Como $x = (\Delta x \vee c) \wedge \nabla x$ si probamos que $\Delta x, \nabla x \in S_a$ para todo $x \in N$ entonces de (12), $x \in S_a$ y por lo tanto $S_a = N$.
En el caso (13), por el Lema 2.25, $\Delta x, \nabla x \in M$ luego por (10) $\Delta x, \nabla x \in S_a$. En el caso (14) $\sim x \in M$, y por el Lema 2.25, $\Delta \sim x, \nabla \sim x \in M$ luego por (10), $\Delta \sim x, \nabla \sim x \in S_a$ y por lo tanto $\Delta x, \nabla x \in S_a$.
En el caso (15), $x \notin M$ y por el Lema 2.37, $\sim x \notin M$. Entonces por el Lema 2.34, $\nabla \sim x, \nabla x \in M \subseteq S_a$. Luego tenemos que también $\Delta x \in S_a$, concluyendo la demostración.

□

Lema 2.93 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson con centro c y S una subálgebra maximal de N tal que $c \notin S$ entonces existe $M \in \mathcal{M}(N)$ tal que $S = S(M)$.*

Dem. Observemos que S no tiene centro. En efecto, si existiera $s \in S$ tal que $\Delta s = 0$ y $\nabla s = 1$ entonces s sería centro de N, esto es $s = c$, absurdo dado que $c \notin S$. Por lo tanto, por el Corolario 2.67 resulta que existe $M_1 \in \mathcal{M}(S)$, M_1 bivalente, luego $S = M_1 \cup \sim M_1$. Como M_1 es un filtro entonces por el Lema 2.22,

$$D(M_1) = \{x \in N : y \to x = 1, \text{con } y \in M_1\}.$$

Si $D(M_1) = N$ entonces como $c \in N$ resulta $y \to c = 1 \in M_1$ y como $y \in M_1$ tendríamos $c \in M_1$, absurdo. Por lo tanto $D(M_1) \in \mathcal{D}(N)$ es propio, luego por el Lema 2.28, existe $M \in \mathcal{M}(N)$ tal que $D(M_1) \subseteq M$ y como $M_1 \subseteq D(M_1)$ tenemos $M_1 \subseteq M$, de donde $\sim M_1 \subseteq \sim M$ y entonces $S = M_1 \cup \sim M_1 \subseteq S(M)$. Como N tiene centro, por el Lema 2.92, $S(M)$ es una subálgebra maximal de N y como S también lo es por hipótesis, entonces $S = S(M)$. □

Observación 2.94 *Por el* Lema 2.72, *si N es un álgebra de Nelson con eje e, $M \in \mathcal{M}(N)$ y $\sim e \in M$, entonces $S(M) = N$, luego $S(M)$ no es maximal.*

Lema 2.95 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson con centro c, M_1, $M_2 \in \mathcal{M}(N)$, $M_1 \neq M_2$ entonces $S(M_1) \neq S(M_2)$.*

Dem. Supongamos que (1) $S(M_1) = S(M_2) = S$ y que $M_1 \setminus M_2 \neq \emptyset$ y sea $a \in M_1 \setminus M_2$. Luego (2) $a \in M_1$ y (3) $a \notin M_2$. De (2) y (1) resulta que $a \in S$, luego (4) $a \vee \sim a \in S$. De (2) y el Lema 2.25, $\sim a \notin M_1$ y por el Lema 2.33, $\sim a \to c \in M_1 \subseteq S$. De (3) resulta, por el mismo lema, que $a \to c \in M_2 \subseteq S$.
Luego (5) $b = (\sim a \vee a) \to c \overset{N12)}{=} (\sim a \to c) \wedge (a \to c) \in S$.

De (4), (5) y el Lema 2.84 resulta que $b \to (a \vee \sim a) = b \to c \in S$. Por lo tanto $b \wedge (b \to c) \in S$ y como por el Lema 2.84, $b \wedge (b \to c) = c$ entonces $c \in S$, absurdo. □

Definición 2.96 $Min(N) = \{x \in N : \nabla\Delta x = \Delta\nabla x\} = \{x \in N : \neg\neg x = \sim \neg\neg \sim x\}$.

Observación 2.97 (1) *Si N tiene centro c, como $\nabla\Delta c = 0$ y $\Delta\nabla c = 1$, entonces $c \notin Min(N)$.*
(2) *El álgebra de Nelson N indicada en el* Ejemplo 1.23 *verifica $Min(N) = N$, mientras que para la del* Ejemplo 2.12, *$Min(N) \neq N$.*
(3) *$\mathcal{B}(N) \subseteq Min(N)$.*
(4) *En el álgebra de Nelson centrada $V(H)$ indicada en el* Ejemplo 5.2, *$\mathcal{B}(V(H)) \neq Min(V(H))$.*

Lema 2.98 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson y $x \in Min(N)$ entonces $\sim x \in Min(N)$ y $x \vee \sim x \in Min(N)$.*

Dem. Por hipótesis $\neg\neg x = \sim \neg\neg \sim x$ luego $\sim \neg\neg x = \neg\neg \sim x$, esto es $\sim x \in Min(N)$.

Como $\Delta\nabla(x \vee \sim x) \overset{N55)}{=} \Delta 1 \overset{N61)}{=} 1$ y

$$\nabla\Delta(x \vee \sim x) \overset{N69)}{=} \neg\neg(x \vee \sim x) \overset{N19)}{=} \neg(\neg x \wedge \neg \sim x) \overset{N32)}{=} \neg \sim x \to \neg\neg x \overset{\text{hip.}}{=}$$

$$\neg \sim x \to \sim \neg\neg \sim x = \neg \sim x \to \Delta\neg \sim x \overset{N57)}{=} 1,$$

resulta $x \vee \sim x \in Min(N)$. $\square$

Lema 2.99 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson y $x \in Min(N)$ entonces $x \vee \sim x, \Delta(x \vee \sim x) \in Rad(N)$.*

Dem. Como $x \in Min(N)$, vimos en la demostración del Lema 2.98 que $\neg\neg(x \vee \sim x) = 1$, luego por el Lema 2.54, $x \vee \sim x \in Rad(N)$. Como $Rad(N)$ es un sistema deductivo, por el Lema 2.25, $\Delta(x \vee \sim x) \in Rad(N)$. $\square$

Lema 2.100 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson sin centro, entonces $\Delta(\Delta(x \vee \sim x) \wedge r) \neq 0$, para todo $x \in N$ y $r \in Rad(N)$.*

Dem. Supongamos que existe $r \in Rad(N)$ tal que $\Delta(\Delta(x \vee \sim x) \wedge r) = 0$, esto es $\sim \neg(\Delta(x \vee \sim x) \wedge r) = 0$ luego tenemos $1 = \neg(\Delta(x \vee \sim x) \wedge r) \overset{N32)}{=} \Delta(x \vee \sim x) \to \neg r$. Como $r \in Rad(N)$ entonces por el Lema 2.54, $\Delta\neg r = 0$. Por lo tanto,

$$1 = \Delta 1 = \Delta(\Delta(x \vee \sim x) \to \neg r) \overset{N63)}{=} \Delta(\Delta\Delta(x \vee \sim x) \to \Delta\neg r) \overset{N59)}{=}$$

$$\Delta(\Delta(x \vee \sim x) \to 0) \overset{N53)}{\leq} \Delta(x \vee \sim x) \to 0,$$

entonces

$$1 = \Delta(x \vee \sim x) \to 0 \overset{N50)}{=} (\Delta x \vee \Delta \sim x) \to 0 \overset{N12)}{=} (\Delta x \to 0) \wedge (\Delta \sim x \to 0).$$

Luego tenemos (1) $1 = \Delta x \to 0 = \neg\Delta x \overset{N70)}{=} \nabla \sim x$ y $1 = \Delta \sim x \to 0 = \neg\Delta \sim x \overset{N70)}{=} \nabla x$, es decir, (2) $\Delta \sim x = 0$. De (1), (2) y el Lema 2.2 resulta que $\sim x$ es centro de N, absurdo. $\square$

Corolario 2.101 *Si N es un álgebra de Nelson, y existen $x \in N$, $r \in Rad(N)$ tales que $\Delta(\Delta(x \vee \sim x) \wedge r) = 0$, entonces x es centro de N.*

Dem. Si $\Delta(\Delta(x \vee \sim x) \wedge r) = 0$, vimos en la demostración del Lema 2.100, que $\sim x$ es centro de N, luego x es centro de N. $\square$

Observación 2.102 *Si N es un álgebra de Nelson, $D \in \mathcal{D}(N)$ y* (1) *$a \leq b$ entonces $D(D, b) \subseteq D(D, a)$. En efecto, sea $x \in D(D, b)$, esto es* (2) *$b \to x \in D$. De* (1) *y* N16) *resulta* (3) *$b \to x \leq a \to x$. De* (2) *y* (3)*, $a \to x \in D$, luego $x \in D(D, a)$.*

Corolario 2.103 *Si N es un álgebra de Nelson sin centro, entonces $D(Rad(N), x\vee \sim x)$ y $D(Rad(N), \Delta(x\vee \sim x))$ son sistemas deductivos propios, para todo $x \in N$.*

Dem. Por el Lema 2.100, $\Delta(\Delta(x\vee \sim x) \wedge r) \neq 0$ para todo $r \in Rad(N)$, luego como $Rad(N)$ es un sistema deductivo propio, del Lema 2.31, $D = D(Rad(N), \Delta(x\vee \sim x))$ es un sistema deductivo propio para todo $x \in N$.

Como $\Delta(x\vee \sim x) \overset{\text{N53)}}{\leq} x\vee \sim x$, por la Observación 2.102, $D(Rad(N), x\vee \sim x) \subseteq D$ y como D es propio entonces $D(Rad(N), x\vee \sim x)$ es propio. $\square$

Lema 2.104 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson, $x \in N$ entonces $u(x) = \nabla \sim x \vee \Delta x \in Rad(N)$.*

Dem. Sea $M \in \mathcal{M}(N)$. Si $x \in M$ entonces por el Lema 2.25 $\Delta x \in M$, luego $u(x) \in M$. Si $x \notin M$ entonces por el Lema 2.34, $\nabla \sim x \in M$ y por lo tanto $u(x) \in M$. Luego $u(x) \in M$ para todo $M \in \mathcal{M}(N)$, de donde se concluye que $u(x) \in Rad(N)$. $\square$

Lema 2.105 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson, entonces $\Delta(N), \nabla(N) \subseteq Min(N)$.*

Dem. (i) $\Delta(N) \subseteq Min(N)$.

Si $x \in \Delta(N)$ entonces (1) $\Delta x = x$. Probemos que $\nabla\Delta x = \Delta\nabla x$. Por (1), bastará probar que $\nabla x = \Delta\nabla x$. Por N53) sabemos que $\Delta\nabla x \leq \nabla x$. Para probar que $\nabla x \leq \Delta\nabla x$ necesitamos, por N28), probar que $\nabla x \to \Delta\nabla x = 1$, lo que es válido por N57), y que (2) $\sim \Delta\nabla x \to\sim \nabla x = 1$. Como $x \overset{\text{N44)}}{\leq} \nabla x$, luego $x \overset{(1)}{=} \Delta x \leq \Delta\nabla x$ y por lo tanto $\sim \Delta\nabla x \leq\sim x$, entonces (3) $\sim \Delta\nabla x \to\sim x = 1$.
Por N57), sabemos que (4) $\sim x \to\sim \nabla x =\sim x \to \Delta \sim x = 1$. De (3) y (4) por N36) resulta (2).

(ii) $\nabla(N) \subseteq Min(N)$.

Si $x \in \nabla(N)$ entonces $\nabla x = x$ y por lo tanto $\Delta \sim x =\sim x$, luego por la inclusión probada antes, $\sim x \in \Delta(N) \subseteq Min(N)$. Luego por el Lema 2.98, $x \in Min(N)$. $\square$

Lema 2.106 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson, $Rad(N) \subseteq Min(N)$.*

Dem. Por el Lema 2.55, $Rad(N) \subseteq \Delta(N)$ y por el Lema 2.105, $\Delta(N) \subseteq Min(N)$. $\square$

Lema 2.107 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson y $M \in \mathcal{M}(N)$ entonces $\varphi(M) \setminus M \subseteq \complement Min(N)$.*

Dem. Sea $x \in \varphi(M) \backslash M$, luego $\sim x, x \notin M \in \mathcal{M}(N)$. Por el Lema 2.34, $\nabla x, \nabla \sim x \in M$, entonces por el Lema 2.25, (1) $\Delta \nabla x \in M$ y (2) $\sim \nabla \Delta x = \Delta \nabla \sim x \in M$. De (2) resulta (3) $\nabla \Delta x \in \sim M$. Si $x \in Min(N)$, esto es (4) $\nabla \Delta x = \Delta \nabla x$, entonces de (1) y (4), tenemos (5) $\nabla \Delta x \in M$ y de (3) y (5) resulta que $\nabla \Delta x \in M \cap \sim M$, lo que contradice el Lema 2.25. □

Corolario 2.108 *Si N es un álgebra de Nelson, $Min(N) \subseteq S(M)$ para todo $M \in \mathcal{M}(N)$.*

Dem. Por el Lema 2.107, $Min(N) \subseteq \complement(\varphi(M) \setminus M) = M \cup \sim M = S(M)$. □

3. Construcción de A. Monteiro

Si N es un álgebra de Nelson, $M(N) = \{(x, y) \in \Delta(N) \times \nabla(N) : x \leq y\}$, pongamos por definición:

D1) $(a_1, c_1) \cap (a_2, c_2) = (\Delta(a_1 \wedge a_2), c_1 \wedge c_2)$,

D2) $(a_1, c_1) \cup (a_2, c_2) = (a_1 \vee a_2, \nabla(c_1 \vee c_2))$,

D3) $\approx (a_1, c_1) = (\sim c_1, \sim a_1)$,

D4) $(a_1, c_1) \mapsto (a_2, c_2) = (\Delta(a_1 \to a_2), \nabla(\sim a_1 \vee c_2))$,

donde $(a_1, c_1), (a_2, c_2) \in M(N)$.

Teorema 3.1 (A. Monteiro, [37]) $(M(N), (1,1), \approx, \cap, \cup, \mapsto)$ *es un álgebra de Nelson, centrada, cuyo centro es $c = (0, 1)$.*

Dem. Veamos en primer lugar que $M(N)$ es cerrado con respecto a estas operaciones. Por hipótesis:

$$(1) \quad a_1 \leq c_1, \qquad (2) \quad a_2 \leq c_2, \qquad (3) \quad \Delta a_1 = a_1,$$

$$(4) \quad \Delta a_2 = a_2, \quad (5) \quad \nabla c_1 = c_1, \quad (6) \quad \nabla c_2 = c_2.$$

Además

(7) $\Delta(a_1 \wedge a_2) \overset{N53)}{\leq} a_1 \wedge a_2 \overset{(1),(2)}{\leq} c_1 \wedge c_2$.

(8) $a_1 \vee a_2 \overset{(1),(2)}{\leq} c_1 \vee c_2 \overset{N44)}{\leq} \nabla(c_1 \vee c_2)$.

(9) Por N59), $\Delta(a_1 \wedge a_2) \in \Delta(N)$.

(10) $\nabla(c_1 \wedge c_2) = c_1 \wedge c_2$. En efecto: $\nabla(c_1 \wedge c_2) \overset{N47)}{=} \nabla c_1 \wedge \nabla c_2 \overset{(5),(6)}{=} c_1 \wedge c_2$.

(11) $\Delta(a_1 \vee a_2) = a_1 \vee a_2$. En efecto: $\Delta(a_1 \vee a_2) \overset{N50)}{=} \Delta a_1 \vee \Delta a_2 \overset{(3),(4)}{=} a_1 \vee a_2$.

(12) Por N60), $\nabla(c_1 \vee c_2) \in \nabla(N)$.

(13) $\Delta \sim c_1 =\sim c_1$ y $\nabla \sim a_1 =\sim a_1$. En efecto: $\Delta \sim c_1 =\sim \nabla c_1 \overset{(5)}{=}\sim c_1$ y $\nabla \sim a_1 = \sim \Delta a_1 \overset{(3)}{=}\sim a_1$.

(14) $\Delta(a_1 \to a_2) \leq \nabla(\sim a_1 \vee c_2)$.
En efecto: $\Delta(a_1 \to a_2) \overset{N53),N44)}{\leq} \nabla(a_1 \to a_2) \overset{N65)}{=} \nabla(\sim a_1 \vee a_2) \overset{(2)}{\leq} \nabla(\sim a_1 \vee c_2)$.

De (7), (9) y (10) resulta que $(\Delta(a_1 \wedge a_2), c_1 \wedge c_2) \in M(N)$, de (8), (11) y (12) $(a_1 \vee a_2, \nabla(c_1 \vee c_2)) \in M(N)$, como $\sim c_1 \overset{(1)}{\leq}\sim a_1$, de (13) resulta $(\sim c_1, \sim a_1) \in M(N)$ y de (14) como $\Delta(a_1 \to a_2) \in \Delta(N)$ y $\nabla(\sim a_1 \vee c_2) \in \nabla(N)$ resulta $(\Delta(a_1 \to a_2), \nabla(\sim a_1 \vee c_2)) \in M(N)$.

(15) $c_1 \leq c_1 \vee c_2 \leq \nabla(c_1 \vee c_2)$.

N1) $(a_1, c_1) \cap ((a_1, c_1) \cup (a_2, c_2)) = (a_1, c_1)$.

$$(a_1, c_1) \cap ((a_1, c_1) \cup (a_2, c_2)) \overset{D2)}{=} (a_1, c_1) \cap (a_1 \vee a_2, \nabla(c_1 \vee c_2)) \overset{D1)}{=}$$
$$(\Delta(a_1 \wedge (a_1 \vee a_2)), c_1 \wedge \nabla(c_1 \vee c_2)) \overset{(15)}{=} (\Delta a_1, c_1) \overset{(3)}{=} (a_1, c_1).$$

(16) Si $(a_3, c_3) \in M(N)$ entonces $\Delta a_3 = a_3$, $\nabla c_3 = c_3$, $a_3 \leq c_3$ y $\Delta \sim c_3 =\sim c_3$.

N2) $(a_1, c_1) \cap ((a_2, c_2) \cup (a_3, c_3)) = ((a_3, c_3) \cap (a_1, c_1)) \cup ((a_2, c_2) \cap (a_1, c_1))$.

$$((a_3, c_3) \cap (a_1, c_1)) \cup ((a_2, c_2) \cap (a_1, c_1)) \overset{D1)}{=}$$
$$(\Delta(a_3 \wedge a_1), c_3 \wedge c_1) \cup (\Delta(a_2 \wedge a_1), c_2 \wedge c_1) \overset{D2)}{=}$$
$$(\Delta(a_3 \wedge a_1) \vee \Delta(a_2 \wedge a_1), \nabla((c_3 \wedge c_1) \vee (c_2 \wedge c_1))) \overset{N50)}{=}$$
$$(\Delta((a_3 \wedge a_1) \vee (a_2 \wedge a_1)), \nabla(c_1 \wedge (c_2 \vee c_3)) \overset{N47)}{=}$$
$$(\Delta(a_1 \wedge (a_2 \vee a_3)), \nabla c_1 \wedge \nabla(c_2 \vee c_3)) \overset{(5)}{=}$$
$$(\Delta(a_1 \wedge (a_2 \vee a_3)), c_1 \wedge \nabla(c_2 \vee c_3)) \overset{D1)}{=}$$
$$(a_1, c_1) \cap (a_2 \vee a_3, \nabla(c_2 \vee c_3)) \overset{D2)}{=} (a_1, c_1) \cap ((a_2, c_2) \cup (a_3, c_3)).$$

De N1) y N2) resulta por M. Sholander, [57] que $(M(N), \cap, \cup)$ es un reticulado distributivo, luego un poset, donde la relación de orden $\subseteq$ está dada por $(a_1, c_1) \subseteq (a_2, c_2)$ si y solo si $(a_1, c_1) \cap (a_2, c_2) = (a_1, c_1)$, esto es $(\Delta(a_1 \wedge a_2), c_1 \wedge c_2) = (a_1, c_1)$, luego $\Delta(a_1 \wedge a_2) = a_1$ y $c_1 \wedge c_2 = c_1$ luego $a_1 = \Delta(a_1 \wedge a_2) \leq \Delta a_2 = a_2$ y $c_1 \leq c_2$. Recíprocamente si $a_1 \leq a_2$ y $c_1 \leq c_2$ donde $a_1, a_2 \in \Delta(N)$ y $c_1, c_2 \in \nabla(N)$ entonces $(a_1, c_1) \cap (a_2, c_2) = (\Delta(a_1 \wedge a_2), c_1 \wedge c_2) = (\Delta a_1, c_1) = (a_1, c_1)$ por lo tanto $(a_1, c_1) \subseteq (a_2, c_2)$. Luego $(0,0), (1,1)$ son el primer y último elemento, respectivamente, del reticulado $M(N)$.

N3) $\approx \approx (a_1, c_1) = (a_1, c_1)$.

$\approx \approx (a_1, c_1) \overset{D3)}{=} \approx (\sim c_1, \sim a_1) \overset{D3)}{=} (\sim\sim a_1, \sim\sim c_1) = (a_1, c_1)$.

N4) $\approx ((a_1, c_1) \cap (a_2, c_2)) = \approx (a_1, c_1) \cup \approx (a_2, c_2)$.

$$\approx ((a_1, c_1) \cap (a_2, c_2)) \overset{D1)}{=} \approx (\Delta(a_1 \wedge a_2), c_1 \wedge c_2) \overset{D3)}{=} (\sim (c_1 \wedge c_2), \sim \Delta(a_1 \wedge a_2)) =$$

$$(\sim c_1 \vee \sim c_2, \sim\sim \nabla \sim (a_1 \wedge a_2)) = (\sim c_1 \vee \sim c_2, \nabla(\sim a_1 \vee \sim a_2)) \overset{D2)}{=}$$

$$(\sim c_1, \sim a_1) \cup (\sim c_2, \sim a_2) \overset{D3)}{=} \approx (a_1, c_1) \cup \approx (a_2, c_2).$$

(17) $\Delta(a_1 \wedge \sim c_1) = 0$.
Como $\sim c_1 \overset{(1)}{\leq} \sim a_1$ entonces $a_1 \wedge \sim c_1 \leq a_1 \wedge \sim a_1$, luego $\Delta(a_1 \wedge \sim c_1) \overset{N51)}{\leq} \Delta(a_1 \wedge \sim a_1) \overset{N54)}{=} 0$.

(18) $(a_1, c_1) \cap \approx (a_1, c_1) = (0, c_1 \wedge \sim a_1)$.
En efecto: $(a_1, c_1) \cap \approx (a_1, c_1) \overset{D3)}{=} (a_1, c_1) \cap (\sim c_1, \sim a_1) \overset{D1)}{=}$
$(\Delta(a_1 \wedge \sim c_1), c_1 \wedge \sim a_1) \overset{(17)}{=} (0, c_1 \wedge \sim a_1)$.

(19) $\nabla(c_2 \vee \sim a_2) = \nabla(c_1 \vee \sim a_1) = 1$.
Como $\sim c_2 \overset{(2)}{\leq} \sim a_2$ entonces $c_2 \vee \sim c_2 \leq c_2 \vee \sim a_2$, luego $1 \overset{N55)}{=} \nabla(c_2 \vee \sim c_2) \overset{N48)}{\leq} \nabla(c_2 \vee \sim a_2)$. De la misma manera, $\nabla(c_1 \vee \sim a_1) = 1$.

N5) $(a_1, c_1) \cap \approx (a_1, c_1) = ((a_1, c_1) \cap \approx (a_1, c_1)) \cap ((a_2, c_2) \cup \approx (a_2, c_2))$.

$$((a_1, c_1) \cap \approx (a_1, c_1)) \cap ((a_2, c_2) \cup \approx (a_2, c_2)) \overset{(18),D3)}{=}$$

$$(0, c_1 \wedge \sim a_1) \cap ((a_2, c_2) \cup (\sim c_2, \sim a_2)) \overset{D2)}{=}$$

$$(0, c_1 \wedge \sim a_1) \cap (a_2 \vee \sim c_2, \nabla(c_2 \vee \sim a_2)) \overset{(19)}{=} (0, c_1 \wedge \sim a_1) \cap (a_2 \vee \sim c_2, 1) \overset{D1)}{=}$$

$$(\Delta(0 \wedge (a_2 \vee \sim c_2)), c_1 \wedge \sim a_1 \wedge 1) = (\Delta 0, c_1 \wedge \sim a_1) = (0, c_1 \wedge \sim a_1) \overset{(18)}{=}$$

$$(a_1, c_1) \cap \approx (a_1, c_1).$$

N6) $(a_1, c_1) \mapsto (a_1, c_1) = (1, 1)$.

$$(a_1, c_1) \mapsto (a_1, c_1) \overset{\text{D1)}}{=} (\Delta(a_1 \to a_1), \nabla(\sim a_1 \vee c_1)) \overset{(19)}{=} (\Delta 1, 1) = (1, 1).$$

N7) $(a_1, c_1) \mapsto ((a_2, c_2) \mapsto (a_3, c_3)) = ((a_1, c_1) \cap (a_2, c_2)) \mapsto (a_3, c_3)$.

$$r = (a_1, c_1) \mapsto ((a_2, c_2) \mapsto (a_3, c_3)) \overset{\text{D4)}}{=} (a_1, c_1) \mapsto (\Delta(a_2 \to a_3), \nabla(\sim a_2 \vee c_3)) \overset{\text{D4)}}{=}$$
$$(\Delta(a_1 \to \Delta(a_2 \to a_3)), \nabla(\sim a_1 \vee \nabla(\sim a_2 \vee c_3))) \overset{(3)}{=}$$

$$(\Delta(\Delta a_1 \to \Delta(a_2 \to a_3)), \nabla(\sim a_1 \vee \nabla(\sim a_2 \vee c_3))) \overset{\text{N63)}}{=}$$
$$(\Delta(a_1 \to (a_2 \to a_3)), \nabla(\sim a_1 \vee \nabla(\sim a_2 \vee c_3))) \overset{\text{N7)}}{=}$$
$$(\Delta((a_1 \wedge a_2) \to a_3), \nabla(\sim a_1 \vee \nabla(\sim a_2 \vee c_3))).$$

Como
$$\nabla(\sim a_1 \vee \nabla(\sim a_2 \vee c_3)) = \sim \Delta(a_1 \wedge \sim \nabla(\sim a_2 \vee c_3)) =$$
$$\sim \Delta(a_1 \wedge \Delta(a_2 \wedge \sim c_3)) \overset{(3)}{=} \sim \Delta(\Delta a_1 \wedge \Delta(a_2 \wedge \sim c_3)) \overset{\text{N62)}}{=} \sim \Delta(a_1 \wedge a_2 \wedge \sim c_3),$$
entonces
$$r = (\Delta((a_1 \wedge a_2) \to a_3), \sim \Delta(a_1 \wedge a_2 \wedge \sim c_3)).$$
$$s = ((a_1, c_1) \cap (a_2, c_2)) \mapsto (a_3, c_3) \overset{\text{D1)}}{=} (\Delta(a_1 \wedge a_2), c_1 \wedge c_2) \mapsto (a_3, c_3) \overset{\text{D4)}}{=}$$
$$(\Delta(\Delta(a_1 \wedge a_2) \to a_3), \nabla(\sim \Delta(a_1 \wedge a_2) \vee c_3)) \overset{(16)}{=}$$
$$(\Delta(\Delta(a_1 \wedge a_2) \to \Delta a_3), \nabla(\sim \Delta(a_1 \wedge a_2) \vee c_3)) \overset{\text{N63)}}{=}$$
$$(\Delta((a_1 \wedge a_2) \to a_3), \nabla(\sim \Delta(a_1 \wedge a_2) \vee c_3)).$$

Como
$$\nabla(\sim \Delta(a_1 \wedge a_2) \vee c_3) = \sim \Delta \sim (\sim \Delta(a_1 \wedge a_2) \vee c_3) =$$
$$\sim \Delta(\Delta(a_1 \wedge a_2) \wedge \sim c_3) \overset{(16)}{=} \sim \Delta(\Delta(a_1 \wedge a_2) \wedge \Delta \sim c_3) \overset{\text{N62)}}{=} \sim \Delta(a_1 \wedge a_2 \wedge \sim c_3).$$
Entonces
$$s = (\Delta((a_1 \wedge a_2) \to a_3), \sim \Delta(a_1 \wedge a_2 \wedge \sim c_3)) = r.$$

(20) $\Delta(a_1 \wedge \Delta(a_1 \to a_2)) = \Delta(a_1 \wedge (\sim c_1 \vee a_2))$.
$$\Delta(a_1 \wedge \Delta(a_1 \to a_2)) \overset{(3)}{=} \Delta(\Delta a_1 \wedge \Delta(a_1 \to a_2)) \overset{\text{N62)}}{=} \Delta(a_1 \wedge (a_1 \to a_2)) \overset{\text{N8)}}{=}$$
$$\Delta(a_1 \wedge (\sim a_1 \vee a_2)) = \Delta((a_1 \wedge \sim a_1) \vee (a_1 \wedge a_2)) \overset{\text{N50)}}{=} \Delta(a_1 \wedge \sim a_1) \vee \Delta(a_1 \wedge a_2) \overset{\text{N54)}}{=}$$
$$0 \vee \Delta(a_1 \wedge a_2) \overset{(17)}{=} \Delta(a_1 \wedge \sim c_1) \vee \Delta(a_1 \wedge a_2) \overset{\text{N50)}}{=}$$
$$\Delta((a_1 \wedge \sim c_1) \vee (a_1 \wedge a_2)) = \Delta(a_1 \wedge (\sim c_1 \vee a_2)).$$

N8) $(a_1,c_1)\cap((a_1,c_1)\mapsto(a_2,c_2))=(a_1,c_1)\cap(\approx(a_1,c_1)\cup(a_2,c_2))$.

$$(a_1,c_1)\cap((a_1,c_1)\mapsto(a_2,c_2))\overset{D4)}{=}(a_1,c_1)\cap(\Delta(a_1\to a_2),\nabla(\sim a_1\vee c_2))\overset{D1)}{=}$$
$$(\Delta(a_1\wedge\Delta(a_1\to a_2)),c_1\wedge\nabla(\sim a_1\vee c_2))\overset{(20)}{=}(\Delta(a_1\wedge(\sim c_1\vee a_2)),c_1\wedge\nabla(\sim a_1\vee c_2))\overset{D1)}{=}$$
$$(a_1,c_1)\cap(\sim c_1\vee a_2,\nabla(\sim a_1\vee c_2))\overset{D2)}{=}(a_1,c_1)\cap((\sim c_1,\sim a_1)\cup(a_2,c_2))\overset{D3)}{=}$$
$$(a_1,c_1)\cap(\approx(a_1,c_1)\cup(a_2,c_2)).$$

Además $\approx(0,1)=(\sim 1,\sim 0)=(0,1)$. □

Observación 3.2 *De lo precedente tenemos que si* $(x,y)\in M(N)$ *entonces* $\boldsymbol{\neg}(x,y)=(x,y)\mapsto(0,0)=(\Delta(x\to 0),\nabla(\sim x\vee 0))=(\Delta\neg x,\nabla\sim x)=(\Delta\neg x,\sim\Delta x)$*, por lo tanto:*

$$\boldsymbol{\neg}(x,y)=(\Delta\neg x,\sim x)\tag{3.1}$$

$\approx\boldsymbol{\neg}(x,y)=\approx(\Delta\neg x,\sim x)=(x,\sim\Delta\neg x)=(x,\nabla\sim\neg x)=(x,\nabla\Delta x)=(x,\nabla x)$*, esto es*

$$\boldsymbol{\Delta}(x,y)=\approx\boldsymbol{\neg}(x,y)=(x,\nabla x)\tag{3.2}$$

Análogamente

$$\boldsymbol{\nabla}(x,y)=\boldsymbol{\neg}\approx(x,y)=(\Delta\nabla y,\nabla y)=(\Delta y,y)\tag{3.3}$$

En el caso en que N *es un álgebra de Boole, este resultado coincide con uno de* Gr. C. Moisil, [13, 17].

Lema 3.3 (A. Monteiro, [37]) *Si* N *es un álgebra de Nelson, la función* $\alpha: N\to M(N)$ *definida por* $\alpha(x)=(\Delta x,\nabla x)$ *es un monomorfismo de álgebras de Nelson. Luego* $\alpha(N)$*, es una subálgebra de Nelson de* $M(N)$ *isomorfa a* N*. Además las álgebras de Heyting* $\Delta(N)$ *y* $\boldsymbol{\Delta}(M(N))$ *son isomorfas.*

Dem.

(1) $\alpha(1)=(\Delta 1,\nabla 1)=(1,1)$,

(2) $\alpha(\sim x)=(\Delta\sim x,\nabla\sim x)=(\sim\nabla x,\sim\Delta x)=\approx(\Delta x,\nabla x)=\approx\alpha(x)$,

(3) $\alpha(x)\cup\alpha(y)=(\Delta x,\nabla x)\cup(\Delta y,\nabla y)=(\Delta x\vee\Delta y,\nabla(\nabla x\vee\nabla y))\overset{N50),N64)}{=}(\Delta(x\vee y),\nabla(x\vee y))=\alpha(x\vee y)$,

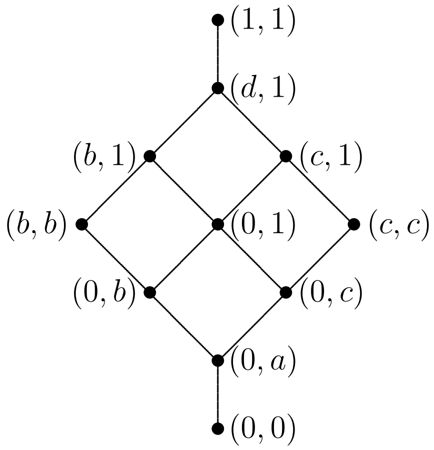
(4) $\alpha(x\wedge y)=\alpha(x)\cap\alpha(y)$. Es una consecuencia de (2) y (3),

(5) $\alpha(x) \mapsto \alpha(y) = (\Delta x, \nabla x) \mapsto (\Delta y, \nabla y) \overset{D4)}{=} (\Delta(\Delta x \to \Delta y), \nabla(\sim \Delta x \vee \nabla y) \overset{N63)}{=}$ $(\Delta(x \to y), \nabla(\nabla \sim x \vee \nabla y)) \overset{N64)}{=} (\Delta(x \to y), \nabla(\sim x \vee y)) \overset{N65)}{=} (\Delta(x \to y), \nabla(x \to y)) =$ $\alpha(x \to y)$.

Luego $\alpha(N)$ es una subálgebra de $M(N)$ y α es una función de N sobre $\alpha(N)$. Supongamos ahora que $\alpha(x) = \alpha(y)$, esto es que $(\Delta x, \nabla x) = (\Delta y, \nabla y)$ luego $\Delta x = \Delta y$, $\nabla x = \nabla y$ y entonces por el Lema 1.11, $x = y$. Luego $\alpha(N)$ es isomorfa a N. $\square$

Corolario 3.4 *Toda álgebra de Nelson es isomorfa a una subálgebra de un álgebra de Nelson con centro.*

Ejemplo 3.5 *Si N es el álgebra de Nelson indicada en el* Ejemplo 1.23 *entonces $M(N)$ tiene el siguiente diagrama:*



Lema 3.6 *Si N es un álgebra de Nelson, entonces $M(N) \cong N$ si y solo si N tiene centro.*

Dem. Si $M(N) \cong N$, como $M(N)$ tiene centro entonces N tiene centro. Supongamos ahora que N tiene centro c. Por el Lema 3.3 sabemos que la función $\alpha(x) = (\Delta x, \nabla x)$, es un monomorfismo de N en $M(N)$. Dado $(r, s) \in M(N)$ esto es $r, s \in N$, (1) $\Delta r = r$, (2) $\nabla s = s$ y $r \leq s$. Sea (3) $x = (r \vee c) \wedge s = r \vee (c \wedge s)$ luego $x \leq s$ y $r \leq x$ y por lo tanto (4) $\nabla x \leq \nabla s = s$ y (5) $r = \Delta r \leq \Delta x$.

De (3) resulta $\nabla x \overset{N47)}{=} \nabla(r \vee c) \wedge \nabla s \overset{(2)}{=} \nabla(r \vee c) \wedge s \overset{N49)}{\geq} (\nabla r \vee \nabla c) \wedge s = 1 \wedge s = s$, luego por (4) tenemos $\nabla x = s$.

De (3) también resulta $\Delta x \overset{N50)}{=} \Delta r \vee \Delta(c \wedge s) \overset{(1)}{=} r \vee \Delta(c \wedge s) \overset{N52)}{\leq} r \vee (\Delta c \wedge \Delta s) = r \vee 0 = r$, luego por (5), $\Delta x = r$, y por lo tanto $\alpha(x) = (\Delta x, \nabla x) = (r, s)$, lo que prueba que α es suryectiva, luego $M(N) \cong N$. $\square$

En el álgebra de Nelson N indicada en el Ejemplo 1.23 el elemento a es eje de N y por lo indicado en el Ejemplo 3.5 $M(N)$ no es isomorfa a N.

Lema 3.7 *Si N es un álgebra de Nelson, entonces $M(N)$ es un álgebra de Nelson semisimple si y solo si N es un álgebra de Nelson semisimple.*

Dem. Si $M(N)$ es un álgebra de Nelson semisimple, entonces toda subálgebra de $M(N)$ es semisimple. Por el Lema 3.3, $\alpha(N)$ es una subálgebra de $M(N)$ isomorfa a N, por lo que N es semisimple.

Si N es un álgebra de Nelson semisimple, entonces por el Teorema 1.8, N es un álgebra de Łukasiewicz trivalente y por lo tanto para todo $a \in N$, (1) $\Delta\nabla a = \nabla a$ y (2) $\sim a \vee \nabla a = 1$.

Sea $(a_1, c_1) \in M(N)$. Como $a_1 \leq c_1$ entonces $\sim c_1 \leq \sim a_1$ y por lo tanto $\nabla \sim c_1 \leq \nabla \sim a_1$ luego

$$(3) \;\; 1 = c_1 \vee \nabla \sim c_1 \leq \nabla c_1 \vee \nabla \sim c_1 \leq \nabla \sim a_1 \vee \nabla c_1.$$

$$\approx (a_1, c_1) \cup \boldsymbol{\nabla}(a_1, c_1) \overset{D3)}{=} (\sim c_1, \sim a_1) \cup \boldsymbol{\nabla}(a_1, \nabla c_1) \overset{(3.3)}{=}$$

$$(\sim c_1, \sim a_1) \cup (\Delta\nabla c_1, \nabla c_1) \overset{(1)}{=} (\sim c_1, \sim a_1) \cup (\nabla c_1, \nabla c_1) \overset{D2)}{=} (\sim c_1 \vee \nabla c_1, \nabla(\sim a_1 \vee \nabla c_1)) =$$

$$(\sim c_1 \vee \nabla c_1, \nabla \sim a_1 \vee \nabla c_1)) \overset{(2),(3)}{=} (1, 1)$$

lo que prueba que $M(N)$ es es un álgebra de Nelson semisimple. □

Si N es un álgebra de Łukasiewicz trivalente, los resultados de A. Monteiro, tienen como caso particular los de Gr. Moisil, [13], ver A. Monteiro, [31], pág. 200-201, Teoremas 6.1, 6.2 y 6.3.

Lema 3.8 *Si N, N_1, N_2 son álgebras de Nelson y $N = N_1 \times N_2$ entonces $M(N_1 \times N_2) \cong P = M(N_1) \times M(N_2)$.*

Dem. Si $(x, y) \in M(N)$, esto es $x \in \Delta(N)$, $y \in \nabla(N)$ y (1) $x \leq y$. Como $x, y \in N = N_1 \times N_2$ entonces $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ donde $x_1, y_1 \in N_1$, $x_2, y_2 \in N_2$. Por (1) tenemos $x_1 \leq y_1$ y $x_2 \leq y_2$. Como $x \in \Delta(N)$ entonces $\Delta x_1 = x_1$ y $\Delta x_2 = x_2$, luego $x_1 \in \Delta(N_1)$ y $x_2 \in \Delta(N_2)$. Análogamente de $y \in \nabla(N)$ resulta que $y_1 \in \nabla(N_1)$ e $y_2 \in \nabla(N_2)$. Luego $(x_1, y_1) \in M(N_1)$ y $(x_2, y_2) \in M(N_2)$. Sea

$$h((x, y)) = h(((x_1, x_2), (y_1, y_2))) = ((x_1, y_1), (x_2, y_2)),$$

luego $h : M(N) \to P$. Si 1_i es el último elemento de $N_i, i = 1, 2$, entonces $1_N = (1_1, 1_2)$ es el último elemento de N, $1_{M(N)} = (1_N, 1_N) = ((1_1, 1_2), (1_1, 1_2))$ es el último elemento de $M(N)$, $(1_i, 1_i)$ es el último elemento de $M(N_i)$, $i = 1, 2$. Por lo tanto $1_P = ((1_1, 1_1), (1_2, 1_2))$ es el último elemento de P y

$$h(1_{M(N)}) = h(((1_1, 1_2), (1_1, 1_2))) = ((1_1, 1_1), (1_2, 1_2)) = 1_P.$$

Sean $A = (((x_1, x_2), (y_1, y_2)), B = ((z_1, z_2), (w_1, w_2)) \in M(N)$.

$$h(\approx_{M(N)} A) = h(\approx_{M(N)} ((x_1,x_2),(y_1,y_2))) = h((\sim_N (y_1,y_2), \sim_N (x_1,x_2))) =$$
$$h(((\sim_{N_1} y_1, \sim_{N_2} y_2),(\sim_{N_1} x_1, \sim_{N_2} x_2))) = ((\sim_{N_1} y_1, \sim_{N_1} x_1),(\sim_{N_2} y_2, \sim_{N_2} x_2)) =$$
$$(\approx_{M(N_1)} (x_1,y_1), \approx_{M(N_2)} (x_2,y_2)) = \sim_P ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sim_P h(((x_1,x_2),(y_1,y_2))) =$$
$$\sim_P h(A).$$

$$A \cap B = (\Delta_N((x_1,x_2) \wedge (z_1,z_2)), (y_1,y_2) \wedge (w_1,w_2)) =$$
$$(\Delta_N(x_1 \wedge z_1, x_2 \wedge z_2), (y_1 \wedge w_1, y_2 \wedge w_2)) =$$
$$((\Delta_{N_1}(x_1 \wedge z_1), \Delta_{N_2}(x_2 \wedge z_2)), (y_1 \wedge w_1, y_2 \wedge w_2)).$$

Luego

$$h(A \cap B) = ((\Delta_{N_1}(x_1 \wedge z_1), y_1 \wedge w_1), (\Delta_{N_2}(x_2 \wedge z_2), y_2 \wedge w_2)) =$$
$$((x_1,y_1) \cap_{M(N_1)} (z_1,w_1), (x_2,y_2) \cap_{M(N_2)} (z_2,w_2))) =$$
$$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \wedge_P ((z_1,w_1),(z_2,w_2)) = h(A) \wedge_P h(B).$$

$$A \mapsto B = ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto ((z_1,z_2),(w_1,w_2)) =$$
$$(\Delta_N((x_1,x_2) \rightarrow_N (z_1,z_2)), \nabla_N(\sim_N (x_1,x_2) \vee_N (w_1,w_2))) =$$
$$(\Delta_N(x_1 \rightarrow_{N_1} z_1, x_2 \rightarrow_{N_2} z_2), \nabla_N((\sim_{N_1} x_1, \sim_{N_2} x_2) \vee_N (w_1,w_2))) =$$
$$((\Delta_{N_1}(x_1 \rightarrow_{N_1} z_1), \Delta_{N_2}(x_2 \rightarrow_{N_2} z_2)), \nabla_N((\sim_{N_1} x_1 \vee_{N_1} w_1), (\sim_{N_2} x_2 \vee_{N_2} w_2))) =$$
$$((\Delta_{N_1}(x_1 \rightarrow_{N_1} z_1), \Delta_{N_2}(x_2 \rightarrow_{N_2} z_2)), (\nabla_{N_1}(\sim_{N_1} x_1 \vee_{N_1} w_1), \nabla_{N_2}(\sim_{N_2} x_2 \vee_{N_2} w_2))).$$

Luego

$$h(A \mapsto B) =$$
$$((\Delta_{N_1}(x_1 \rightarrow_{N_1} z_1), \nabla_{N_1}(\sim_{N_1} x_1 \vee_{N_2} w_1)), (\Delta_{N_2}(x_2 \rightarrow_{N_2} z_2), \nabla_{N_2}(\sim_{N_2} x_2 \vee_{N_2} w_2))) =$$
$$(((x_1,y_1) \mapsto_{M(N_1)} (z_1,w_1)), ((x_2,y_2) \mapsto_{M(N_2)} (z_2,w_2))) =$$
$$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \rightarrow_P ((z_1,w_1),(z_2,w_2)) = h(A) \rightarrow_P h(B).$$

Luego h es un isomorfismo. □

Observación 3.9 *Utilizando los resultados de la* Sección 1.3 *es fácil ver que si n es par, $n \geq 2$ entonces $M(C_n) \cong C_{n+1}$ y que si n es impar, $n \geq 3$, $M(C_n) \cong C_n$.*

Si $N = \mathbf{B}^r \times \mathbf{T}^s$ donde $s, t \in \mathbb{N}$, esto es N es un álgebra de Łukasiewicz trivalente finita, entonces por el Lema 3.8 y la Observación 3.9 tenemos $M(N) \cong M(\mathbf{B}^r) \times M(\mathbf{T}^s) \cong (M(\mathbf{B}))^r \times (M(\mathbf{T}))^s \cong \mathbf{T}^r \times \mathbf{T}^s = \mathbf{T}^{r+s}$. Si $L(n)$ es el álgebra de Łukasiewicz trivalente con n generadores libres entonces $L(n) = \mathbf{B}^{2^n} \times \mathbf{T}^{3^n - 2^n}$, luego $M(L(n)) = \mathbf{T}^{2^n + 3^n - 2^n} = \mathbf{T}^{3^n}$. Es bien conocido que $\mathbf{T}^{3^n}$ es el álgebra de Post trivalente con n generadores libres (ver A. Monteiro, [31]).

Lema 3.10 *Si N es un álgebra de Nelson entonces*

$$\mathcal{B}(M(N)) = \{(x,x) \in M(N) : x \in \mathcal{B}(N)\}$$

y $\mathcal{B}(M(N)) \subseteq \alpha(N)$, donde α es la función de N en $M(N)$ definida en el Lema 3.3.

Dem. En efecto, sea (1) $(x,y) \in \mathcal{B}(M(N))$ entonces $(x,y) \in M(N)$, luego (2) $\Delta x = x$, y (3) $\nabla y = y$. Como $(\Delta y, y) \overset{(3.3)}{=} \boldsymbol{\nabla}(x,y) \overset{(1)}{=} (x,y) \overset{(1)}{=} \boldsymbol{\Delta}(x,y) \overset{(3.2)}{=} (x, \nabla x)$ entonces (4) $\Delta y = x \overset{(2)}{=} \Delta x$ y (5) $\nabla y \overset{(3)}{=} y = \nabla x$. Dado que $\alpha(x) = (\Delta x, \nabla x) \overset{(2),(5)}{=} (x,y)$, se sigue que $\mathcal{B}(M(N)) \subseteq \alpha(N)$.

De (4) y (5) resulta por el Lema 1.10 que $x = y$. Como $(x,y) = (x,x) \in \mathcal{B}(M(N))$, tenemos que

$$(x,x) \cup \approx (x,x) = (x,x) \cup (\sim x, \sim x) = (x \vee \sim x, \nabla(x \vee \sim x)) = (1,1),$$

de donde $x \vee \sim x = 1$ y por lo tanto $x \in \mathcal{B}(N)$.

Veamos que si $x \in \mathcal{B}(N)$ entonces $(x,x) \in \mathcal{B}(M(N))$. Como $x \in \mathcal{B}(N)$, por la Observación 2.5, $\Delta x = \nabla x = x$, y entonces $(x,x) \in M(N)$. Como $\sim x$ también pertenece a $\mathcal{B}(N)$, $(\sim x, \sim x) \in M(N)$ y tenemos que $(x,x) \cup (\sim x, \sim x) = (x \vee \sim x, \nabla(x \vee \sim x)) = (1,1)$, por lo que $(x,x) \in \mathcal{B}(M(N))$. □

Lema 3.11 *Si $N = L(n)$ y G es un conjunto de generadores de N, entonces $M(N) = SL_c(\alpha(G))$.*

Dem. Como $c = (0,1)$ es el centro de $M(N)$ y por el Lema 3.3, $\alpha(N)$ es subálgebra de $M(N)$ isomorfa a N, entonces por los Lemas 2.89, 3.10 y el Corolario 2.90 tenemos, (1) $SL_c(\alpha(N)) = M(N)$.
Si G es el conjunto de generadores de $L(n)$ esto es $SL(G) = L(n) = N$ y como α es un epimorfismo de N en $\alpha(N)$ entonces (2) $N \cong \alpha(N) = SL(\alpha(G))$. Como $SL(\alpha(G)) \subseteq SL_c(\alpha(G))$ entonces (3) $SL_c(SL(\alpha(G))) \subseteq SL_c(\alpha(G))$ luego

$$M(N) \overset{(1)}{=} SL_c(\alpha(N)) \overset{(2)}{=} SL_c(SL(\alpha(G)) \overset{(3)}{\subseteq} SL_c(\alpha(G))$$

esto es $M(N) = SL_c(\alpha(G))$. □

Por lo tanto $\alpha(G)$ es un conjunto de generadores del álgebra de Post trivalente $M(N) = \mathbf{T}^{3^n}$.

4. Construcción de Vakarelov

Dada un álgebra de Heyting H, sea $V(H) = \{(a,b) \in H \times H : a \wedge b = 0\}$. Es claro que

V1) $(1,0), (0,1) \in V(H)$. D. Vakarelov, [58], define en $V(H)$ las siguientes operaciones:

V2) $(a_1, a_2) \sqcup (b_1, b_2) = (a_1 \vee b_1, a_2 \wedge b_2)$,

V3) $(a_1, a_2) \sqcap (b_1, b_2) = (a_1 \wedge b_1, a_2 \vee b_2)$,

V4) $\sim (a_1, a_2) = (a_2, a_1)$,

V5) $(a_1, a_2) \to (b_1, b_2) = (a_1 \Rightarrow b_1, a_1 \wedge b_2)$,

y prueba:

Teorema 4.1 $(V(H), (1,0), \sim, \sqcap, \sqcup, \to)$ *es un álgebra de Nelson.*

Observación 4.2 $(0,1)$ *es el primer elemento de* $V(H)$ *y* $\sim (0,0) = (0,0)$*, luego* $(0,0)$ *es el centro de* $V(H)$*. Además el orden* $\sqsubseteq$ *inducido por* $\sqcap$ *en* $V(H)$ *es* $(a,b) \sqsubseteq (c,d)$ *si y solo si* $a \leq c$ *y* $d \leq b$*.*

En el álgebra de Nelson $V(H)$ *tenemos:*

$$\neg(a,b) = (a,b) \to (0,1) = (a \Rightarrow 0, a \wedge 1) = (\neg a, a), \tag{4.1}$$

$$\Delta(a,b) =\sim \neg(a,b) =\sim (\neg a, a) = (a, \neg a), \tag{4.2}$$

$$\nabla(a,b) = \neg \sim (a,b) = \neg(b,a) = (\neg b, b), \tag{4.3}$$

$$\Delta\nabla(a,b) = \Delta(\neg b, b) = (\neg b, \neg\neg b), \tag{4.4}$$

$$\nabla\Delta(a,b) = \nabla(a, \neg a) = (\neg\neg a, \neg a). \tag{4.5}$$

Además Vakarelov prueba que la función $h : V(H) \to H$ *definida por* $h((a_1, a_2)) = a_1$ *es un epimorfismo de reticulado que verifica* $h((a_1, a_2) \to (b_1, b_2)) = h((a_1, a_2)) \Rightarrow h((b_1, b_2))$ *y* $h(\neg(a_1, a_2)) = \neg h((a_1, a_2))$*.*

El Teorema 4.1 de Vakarelov fue generalizado por L. Monteiro e I. Viglizzo, [53].

Sea H un álgebra de Heyting, y H_0 el conjunto de sus elementos densos, esto es $H_0 = \{x \in H : \neg x = x \Rightarrow 0 = 0\}$. Sean $S_1 = \{(0,x) : x \in H_0\}$, $S_2 = \{(x,0) : x \in H_0\}$ luego $S = S_1 \cup S_2 \subseteq V(H)$. Veamos que S es una subálgebra de $V(H)$ y que en el caso en que H es finita, S tiene eje.
Si (i) $x, y \in H_0$ entonces:

(1) $x \vee y \in H_0$.
$\neg(x \vee y) = (x \vee y) \Rightarrow 0 \overset{\text{H5)}}{=} (x \Rightarrow 0) \wedge (y \Rightarrow 0) \overset{\text{(i)}}{=} 0 \wedge 0 = 0$,

(2) $x \wedge y \in H_0$.
$\neg(x \wedge y) = (x \wedge y) \Rightarrow 0 \overset{\text{NI8)}}{=} x \Rightarrow (y \Rightarrow 0) \overset{\text{(i)}}{=} x \Rightarrow 0 \overset{\text{(i)}}{=} 0,$

(3) $x \Rightarrow y \in H_0$
$(x \Rightarrow y) \Rightarrow 0 = \neg(x \Rightarrow y) \overset{\text{NI6)}}{=} \neg\neg x \wedge \neg y \overset{\text{(i)}}{=} 0.$

Es claro que $(1, 0) \in S$ y que S es cerrado con respecto a $\sim$.

- Si $(0, x), (0, y) \in S_1$ entonces $(0, x) \sqcap (0, y) \overset{\text{V3)}}{=} (0, x \vee y) \overset{(1)}{\in} S_1$, $(0, x) \sqcup (0, y) \overset{\text{V2)}}{=} (0, x \wedge y) \overset{(2)}{\in} S_1$, $(0, x) \to (0, y) \overset{\text{V5)}}{=} (0 \Rightarrow 0, 0) = (1, 0) \in S_2$.
- Si $(x, 0), (y, 0) \in S_2$ entonces $(x, 0) \sqcap (y, 0) \overset{\text{V3)}}{=} (x \wedge y, 0) \overset{(2)}{\in} S_2$, $(x, 0) \sqcup (y, 0) \overset{\text{V2)}}{=} (x \vee y, 0) \overset{(1)}{\in} S_2$, $(x, 0) \to (y, 0) \overset{\text{V5)}}{=} (x \Rightarrow y, 0) \overset{(3)}{\in} S_2$.
- Si $(0, x) \in S_1$, $(y, 0) \in S_2$ entonces $(x, 0) \sqcap (0, y) \overset{\text{V3)}}{=} (0, y) \in S_1$, $(x, 0) \sqcup (0, y) \overset{\text{V2)}}{=} (x, 0) \in S_2$, $(0, x) \to (y, 0) \overset{\text{V5)}}{=} (0 \Rightarrow y, 0) = (1, 0) \in S_2$, $(y, 0) \to (0, x) \overset{\text{V5)}}{=} (y \Rightarrow 0, y \wedge x) = (0, x \wedge y) \overset{(2)}{\in} S_1$.

Si H es finita entonces $V(H)$ es un álgebra de Nelson finita y por lo tanto S es finita, luego por el Lema 2.17 tiene eje. Sea (ii) $x_0 = \bigwedge_{x \in H_0} x$, como H es finita entonces por (2), $x_0 \in H_0$. Si $x \in H_0$ entonces $\Delta(x, 0) = (x, 0) \neq (0, 1)$, $\Delta(0, x) = (0, 1)$ y como $x_0 \overset{\text{(ii)}}{\leq} x$ para todo $x \in H_0$ entonces por la Observación 4.2, $(0, x) \sqsubseteq (0, x_0)$, para todo $x \in H_0$ de donde resulta por el Lema 2.10, que $e = (0, x_0)$ es el eje de S.

Lema 4.3 *Si H es un álgebra de Heyting entonces*

$$\mathcal{B}(V(H)) = \{(x, y) \in V(H) : x \in \mathcal{B}(H), y = \neg x\}.$$

Además $(x, y) \in \mathcal{B}(V(H)) \setminus \{(0, 1), (1, 0)\}$ si y solo si $y = \neg x$ y $x \in \mathcal{B}(H) \setminus \{0, 1\}$.

Dem. Si $(x, y) \in \mathcal{B}(V(H))$, en particular $(x, y) \in V(H)$, luego (1) $x \wedge y = 0$. Además $(x \vee y, y \wedge x) \overset{\text{V2)}}{=} (x, y) \sqcup (y, x) \overset{\text{V4)}}{=} (x, y) \sqcup \sim (x, y) = (1, 0)$, luego (2) $x \vee y = 1$. De (1) y (2) resulta que $x \in \mathcal{B}(H)$. Como el complemento booleano es único y coincide con el pseudocomplemento, resulta que $y = \neg x$.

Si $x \in \mathcal{B}(H)$ e $y = \neg x$ entonces $(x, y) = (x, \neg x) \in V(H)$ y como $(x, \neg x) \sqcap (\neg x, x) = (x \wedge \neg x, x \vee \neg x) = (0, 1)$ y $(x, \neg x) \sqcup (\neg x, x) = (x \vee \neg x, x \wedge \neg x) = (1, 0)$ entonces: $(x, \neg x) \in \mathcal{B}(V(H))$. □

Lema 4.4 (A. Monteiro, [37]) *Si H es un álgebra de Heyting entonces $M(V(H))$ es isomorfa a $V(H)$.*

Dem. Es una consecuencia inmediata del Lema 3.6, dado que $V(H)$ es un álgebra de Nelson con centro. $\square$

Lema 4.5 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson, las álgebras de Nelson $V(\Delta(N))$ y $V(\mathbf{\Delta}(M(N)))$ son isomorfas.*

Dem. Por el Lema 3.3, $\Delta(N)$ y $\mathbf{\Delta}(M(N))$ son álgebras de Heyting isomorfas luego $V(\Delta(N))$ y $V(\mathbf{\Delta}(M(N)))$ son álgebras de Nelson isomorfas. $\square$

Lema 4.6 *Si H es un álgebra de Heyting entonces H es isomorfa a $\Delta(V(H))$.*

Dem. Para todo $x \in H$, $x \wedge \neg x \overset{\mathrm{NI1)}}{=} 0$, luego $(x, \neg x) \in V(H)$ y $\Delta(x, \neg x) \overset{(4.2)}{=} (x, \neg x)$. Si definimos $\beta(x) = (x, \neg x)$, entonces $\beta : H \to \Delta(V(H))$. Si $(x, y) \in \Delta(V(H))$ esto es $(x, \neg x) = \Delta(x, y) = (x, y)$ entonces $\beta(x) = (x, y)$ luego β es suryectiva. Si $(x, \neg x) = \beta(x) = \beta(y) = (y, \neg y)$ entonces $x = y$, luego β es inyectiva. $\beta(0) = (0, \neg 0) = (0, 1)$.
Usando la Observación 1.24 tenemos que $\beta(x) \sqcap_{\Delta} \beta(y) = \Delta((x, \neg x) \sqcap (y, \neg y)) \overset{\mathrm{V3)}}{=} \Delta(x \wedge y, \neg x \vee \neg y) \overset{(4.2)}{=} (x \wedge y, \neg(x \wedge y)) = \beta(x \wedge y)$.
$\beta(x) \sqcup \beta(y) = (x, \neg x) \sqcup (y, \neg y) \overset{\mathrm{V2)}}{=} (x \vee y, \neg x \wedge \neg y) \overset{\mathrm{NI7)}}{=} (x \vee y, \neg(x \vee y)) = \beta(x \vee y)$.
Aplicando nuevamente la Observación 1.24, $\beta(x) \Rightarrow_{\Delta} \beta(y) = \Delta(\beta(x) \to \beta(y)) = \Delta((x, \neg x) \to (y, \neg y)) \overset{\mathrm{V5)}}{=} \Delta(x \Rightarrow y, x \wedge \neg y) \overset{(4.2)}{=} (x \Rightarrow y, \neg(x \Rightarrow y)) = \beta(x \Rightarrow y)$. $\square$

Corolario 4.7 *Si H es un álgebra de Heyting finita, no trivial, y $\mathcal{A}(H)$ es el conjunto de sus átomos, entonces $a \in \mathcal{A}(H)$ si y solo si $\beta(a) \in \mathcal{A}(\Delta(V(H)))$.*

Lema 4.8 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson, las álgebras de Heyting $\Delta(N)$ y $\Delta(V(\Delta(N)))$ son isomorfas. Además N es isomorfa a una subálgebra de Nelson de $V(\Delta(N))$.*

Dem. Por el Lema 1.25, $\Delta(N)$ es un álgebra de Heyting, luego por el Lema 4.6, $\Delta(N)$ y $\Delta(V(\Delta(N)))$ son isomorfas.

Como $\Delta x, \Delta \sim x \in \Delta(N)$ y $\Delta x \wedge_{\Delta} \Delta \sim x = \Delta(\Delta x \wedge \Delta \sim x) \overset{\mathrm{N62)}}{=} \Delta(x \wedge \sim x) \overset{\mathrm{N54)}}{=} 0$ entonces $(\Delta x, \Delta \sim x) \in V(\Delta(N))$ y por lo tanto la función g definida por $g(x) = (\Delta x, \Delta \sim x)$ verifica $g : N \to V(\Delta(N))$. Veamos que se trata de un homomorfismo:

$$g(x) \sqcap g(y) = (\Delta x, \Delta \sim x) \sqcap (\Delta y, \Delta \sim y) \overset{\mathrm{V3)}}{=} (\Delta x \wedge_{\Delta} \Delta y, \Delta \sim x \vee \Delta \sim y) =$$

$$(\Delta(\Delta x \wedge \Delta y), \Delta \sim x \vee \Delta \sim y) \overset{\mathrm{N62),N50)}}{=} (\Delta(x \wedge y), \Delta(\sim x \vee \sim y)) =$$

$$(\Delta(x \wedge y), \Delta(\sim (x \wedge y))) = g(x \wedge y).$$

$$g(x) \sqcup g(y) = (\Delta x, \Delta \sim x) \sqcup (\Delta y, \Delta \sim y) \overset{\mathrm{V2)}}{=} (\Delta x \vee \Delta y, \Delta \sim x \wedge_{\Delta} \Delta \sim y) \overset{\mathrm{N50)}}{=}$$

$$(\Delta(x \vee y), \Delta(\Delta \sim x \wedge \Delta \sim y)) \overset{N62)}{=} (\Delta(x \vee y), \Delta(\sim x \wedge \sim y)) =$$

$$(\Delta(x \vee y), \Delta \sim (x \vee y)) = g(x \vee y).$$

$$\sim g(x) = \sim (\Delta x, \Delta \sim x) \overset{V4)}{=} (\Delta \sim x, \Delta x) = g(\sim x).$$

$$(1) \quad \Delta \sim (x \to y) = \sim \nabla(x \to y) \overset{N65)}{=} \sim \nabla(\sim x \vee y) =$$

$$\Delta \sim (\sim x \vee y)) = \Delta(x \wedge \sim y).$$

$$g(x) \to g(y) = (\Delta x, \Delta \sim x) \to (\Delta y, \Delta \sim y) \overset{V5)}{=} (\Delta x \Rightarrow_\Delta \Delta y, \Delta x \wedge_\Delta \Delta \sim y) =$$

$$(\Delta(\Delta x \to \Delta y), \Delta(\Delta x \wedge \Delta \sim y)) \overset{N63),N62)}{=} (\Delta(x \to y), \Delta(x \wedge \sim y)) \overset{(1)}{=}$$

$$(\Delta(x \to y), \Delta \sim (x \to y)) = g(x \to y).$$

Luego $g(N)$ es una subálgebra de Nelson de $V(\Delta(N))$. Si $g(x) = g(y)$ entonces $\Delta x = \Delta y$ y $\Delta \sim x = \Delta \sim y$, de donde resulta $\nabla x = \nabla y$. Luego por el Lema 1.11, $x = y$. Por lo tanto $N \cong g(N)$. $\square$

El Lema 4.8 es otra forma de probar un resultado de Vakarelov, que se indica más adelante (Corolario 4.34) y que vamos a generalizar.

Lema 4.9 *Si N es un álgebra de Nelson entonces:*

a) $SN(g(N), (0,0)) = V(\Delta(N))$,

b) $(0,0) \in g(N)$ *si y solo si* N *tiene centro,*

c) $N \cong V(\Delta(N))$ *si y solo si* N *tiene centro.*

Dem.

a) Sea $(x, y) \in V(\Delta(N))$ luego $x = \Delta x$ e $y = \Delta y$.
   (i) $\Delta(x, y) \overset{(4.2)}{=} (x, \neg_\Delta x) = (x, \Delta(x \to 0)) = (\Delta x, \Delta(\Delta x \to 0)) \overset{N66)}{=} (\Delta x, \sim \nabla \Delta x) = (\Delta x, \sim \nabla x) = (\Delta x, \Delta \sim x) \in g(N)$.
   (ii) $\nabla(x, y) \overset{(4.3)}{=} (\neg_\Delta y, y) = (\Delta(y \to 0), y) = (\Delta(\Delta y \to 0), \Delta y) \overset{N66)}{=} (\sim \nabla \Delta y, \Delta y) = (\sim \nabla y, \Delta y) = (\Delta \sim y, \Delta y) = g(\sim y) \in g(N)$.
   De (i) y (ii) resulta por el Corolario 2.88 que $(x, y) \in SN(g(N), (0,0))$. Por lo tanto $SN(g(N), (0,0)) = V(\Delta(N))$.

b) Si $(0,0) \in g(N)$ existe $x \in N$ tal que $(\Delta x, \Delta \sim x) = g(x) = (0,0)$, luego $\Delta x = 0$ y $\nabla x = 1$, por lo tanto x es centro de N.
   Si N tiene centro c entonces $g(c) = (\Delta c, \Delta \sim c) = (0,0)$.

c) Si $N \cong V(\Delta(N))$, por la Observación 4.2, N tiene centro. Recíprocamente si N tiene centro c entonces $g(c) = (0,0)$ luego por a) $V(\Delta(N)) = SN(g(N),(0,0)) = SN(g(N)) = g(N)$ y como por el lema precedente $g(N) \cong N$, tenemos $V(\Delta(N)) \cong N$. $\square$

Lema 4.10 *Si N es un álgebra de Nelson finita, no trivial, y $D \in \mathcal{D}(N)$, $D \neq N$, entonces $D = F(i)$ con $i = \bigwedge_{d \in D} d$, $i \neq 0$ y $\Delta i = i$.*

Dem. Como N es es un reticulado distributivo finito y D es un filtro propio entonces $D = F(i)$ con (1) $i = \bigwedge_{d \in D} d \in D$, $i \neq 0$. Como $\Delta i \in D = F(i)$ entonces $i \leq \Delta i$ y como $\Delta i \leq i$ resulta $\Delta i = i$. Además $D(i) = F(\Delta i) = F(i) = D$. $\square$

Lema 4.11 *Si N es un álgebra de Nelson finita, no trivial, entonces $D \in \mathcal{M}(N)$ si y solo si $D = D(a)$ con $a \in \mathcal{A}(\Delta(N))$.*

Dem. Si (1) $D \in \mathcal{M}(N)$ entonces por el Lema 4.10, $D = F(a)$ con $\Delta a = a$ luego $a \in \Delta(N)$ y $a \neq 0$. Si $a \notin \mathcal{A}(\Delta(N))$ entonces existe $b \in \mathcal{A}(\Delta(N))$ tal que $0 < b < a$ y $\Delta b = b$ luego $D = F(a) \subseteq F(b) = F(\Delta b) = D(b)$, luego por (1), resulta (2) $D(b) = N$ o (3) $F(b) = D(b) = F(a)$. Si ocurre (2) entonces $b = 0$, absurdo. Luego de $F(b) = F(a)$ esto es $b = a$, otra contradicción.
Sea (4) $a \in \mathcal{A}(\Delta(N))$ y $D = D(a)$. En particular $\Delta a = a$, luego $D(a) = F(\Delta a) = F(a)$ y como $a \neq 0$ entonces $D(a)$ es un sistema deductivo propio, luego por el Lema 2.28 existe $M \in \mathcal{M}(N)$ tal que $F(a) = D(a) \subseteq M$. Por el Lema 4.10, $M = F(i)$ con $\Delta i = i$, $i \neq 0$. Luego $F(a) \subseteq F(i)$ y por lo tanto $i \leq a$ luego por (4) $i = a$, y en consecuencia $M = F(a) = D(a)$. $\square$

Corolario 4.12 *Si H es un álgebra de Heyting finita, no trivial, entonces $D \in \mathcal{M}(V(H))$ si y solo si $D = D(a)$ donde $a \in \mathcal{A}(\Delta(V(H)))$.*

Lema 4.13 *Si H es un álgebra de Heyting finita, no trivial, entonces:*
a) $(a,b) \in \Delta(V(H))$ *si y solo si* $b = \neg a$,
b) $(a,b) \in \mathcal{A}(\Delta(V(H)))$ *si y solo si* $a \in \mathcal{A}(H)$ *y* $b = \neg a$.

Dem.

a) Si $(a,b) \in \Delta(V(H))$ esto es $(a,b) = \Delta(a,b) = (a,\neg a)$. Recíprocamente si $b = \neg a$ entonces $\Delta(a,b) = (a,\neg a) = (a,b)$.

b) Si (1) $(a,b) \in \mathcal{A}(\Delta(V(H)))$ entonces en particular $(a,b) \in \Delta(V(H))$ luego por (a) $b = \neg a$. Supongamos que existe $y \in H$ tal que $0 < y \leq a$, luego $\neg a \leq \neg y$ y por la Observación 4.2, $(0,1) \sqsubset (y,\neg y) \sqsubseteq (a,\neg a)$. Entonces por (1), $(y,\neg y) = (a,\neg a)$ y por lo tanto $y = a$, luego $a \in \mathcal{A}(H)$.
Si $a \in \mathcal{A}(H)$ y $b = \neg a$ entonces por a), $(a,b) \in \Delta(V(H))$. Supongamos que $(x,y) \in \Delta(V(H))$ es tal que $(0,1) \sqsubset (x,y) = (x,\neg x) \sqsubseteq (a,\neg a)$, luego $x \leq a$ y por lo tanto $x = a$ y $\neg x = \neg a = b$ luego $(x,y) = (a,b)$ y por lo tanto $(a,b) \in \mathcal{A}(\Delta(V(H)))$.

$\square$

Teniendo en cuenta el Lema 4.4, resulta:

Corolario 4.14 *Si H es un álgebra de Heyting finita, no trivial, entonces* $|\mathcal{M}(V(H))| = |\mathcal{A}(H)|$.

Observación 4.15 *Si H es un álgebra de Heyting finita, no trivial, entonces poniendo $s(H) = \bigvee_{a \in \mathcal{A}(H)} a$ tenemos que el radical de H (la intersección de todos sus sistemas deductivos maximales) es $[s(H))$. Este resultado se traslada a $V(H)$ de la siguiente manera: $Rad(V(H)) = [(s(H), \neg s(H)))$ y $[(s(H), \neg s(H)))$ es un poset isomorfo al poset $[s(H))$ de H. Para probar esto, tenemos los siguientes lemas.*

Lema 4.16 *Sea H un álgebra de Heyting. $x \in Rad(H)$ si y solo si $\neg x = 0$*

Dem. Sea $x \in Rad(H)$ y supongamos que $\neg x \neq 0$. Entonces existe un sistema deductivo maximal (equivalentemente, filtro maximal) M tal que $\neg x \in M$. Como $Rad(H) \subseteq M$, resulta que $x \wedge \neg x = 0 \in M$, absurdo.

Sea ahora x tal que $\neg x = 0$ y M un sistema deductivo maximal de H. Si $x \notin M$, entonces $x \Rightarrow 0 = \neg x = 0 \in M$, absurdo. Luego $x \in M$. $\square$

Lema 4.17 *Sea H un álgebra de Heyting. Si $(x, y) \in V(H)$ y $x \in Rad(H)$, entonces $y = 0$.*

Dem. Como $(x, y) \in V(H)$, $x \wedge y = 0$, luego $y \leq \neg x = 0$ por lo tanto $y = 0$. $\square$

Sea H un álgebra de Heyting finita no trivial. Entonces

$$Rad(H) = \bigcap_{M \in \mathcal{M}(H)} M = \bigcap_{a \in \mathcal{A}(H)} [a) = [\bigvee_{a \in \mathcal{A}(H)} a) = [s(H)).$$

Calculemos ahora el radical de $V(H)$: $Rad(V(H)) = \bigcap_{M \in \mathcal{M}(V(H))} M = \bigcap_{a \in \mathcal{A}(\Delta(V(H)))} [a)$.

Como sabemos que $a \in \mathcal{A}(\Delta(V(H)))$ si y solo si $a = (x, \neg x)$ con $x \in \mathcal{A}(H)$, tenemos que

$$Rad(V(H)) = \bigcap_{x \in \mathcal{A}(H)} [(x, \neg x)) = [(\bigvee_{x \in \mathcal{A}(H)} x, \bigwedge_{x \in \mathcal{A}(H)} \neg x)) = [(s(H), \neg s(H))).$$

Para ver que $[(s(H), \neg s(H)))$ es un poset isomorfo al poset $[s(H))$ de H, basta con considerar que un elemento (x, y) está en $[(s(H), \neg s(H)))$ si y solo si $x \in Rad(H)$ e $y = 0$. Entonces la aplicación $\psi : Rad(H) \to Rad(V(H))$ definida por $\psi(x) = (x, 0)$ es biyectiva y respeta el orden.

Lema 4.18 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson con centro c, $a, b \in \Delta(N)$, (1) $\Delta(a \wedge b) = 0$ entonces existe $x \in N$ tal que $\Delta x = a$ y $\Delta \sim x = b$.*

Dem. Sea (2) $x = a \vee (c \wedge \sim b)$, luego $\Delta x = \Delta a \vee \Delta(c \wedge \sim b) = a \vee \Delta(c \wedge \sim b)$. Como $\Delta(c \wedge \sim b) \leq \Delta c = 0$, entonces $\Delta x = a$.
De (2) resulta $\sim x = \sim a \wedge (c \vee b) = (\sim a \wedge c) \vee (\sim a \wedge b)$ y por lo tanto $\Delta \sim x = \Delta(\sim a \wedge c) \vee \Delta(\sim a \wedge b)$ y como $\Delta(\sim a \wedge c) \leq \Delta c = 0$ entonces $\Delta \sim x = \Delta(\sim a \wedge b)$. Por (1) y el Lema 2.23, $b \leq \sim a$, luego $\Delta \sim x = \Delta b = b$. □

Lema 4.19 (A. Monteiro, [37]) *Si N es un álgebra de Nelson con centro c entonces $N \cong V(\Delta(N))$.*

Dem. Sabemos que la función $g : N \to V(\Delta(N))$ definida en el Lema 4.8 es un homomorfismo inyectivo. Si $(a, b) \in V(\Delta(N))$, esto es $a, b \in \Delta(N)$ y $a \wedge_\Delta b = \Delta(a \wedge b) = 0$, luego por el Lema 4.18, existe $x \in N$ tal que $\Delta x = a$ y $\Delta \sim x = b$, luego $g(x) = (a, b)$. □

Una demostración distinta del resultado anterior fue dada en el Lema 4.9, c).

Si H es un álgebra de Heyting sea $Z(H) = \{(x, y) \in H \times H : \neg x = \neg\neg y\}$. Si $(x, y) \in Z(H)$ luego $\neg x = \neg\neg y$ y por lo tanto (1) $\neg\neg x = \neg\neg\neg y \overset{NI3)}{=} \neg y$. Por NI2) $x \leq \neg\neg x$, luego $x \wedge y \leq \neg\neg x \wedge y \overset{(1)}{=} \neg y \wedge y \overset{NI1)}{=} 0$. Por lo tanto $(x, y) \in V(H)$. Luego $Z(H) \subseteq V(H)$.

Lema 4.20 *Si H es un álgebra de Heyting, $Z(H)$ es una subálgebra de $V(H)$, que no contiene al centro de $V(H)$.*

Dem. Es claro que $(1, 0), (0, 1) \in Z(H)$. Sean $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in Z(H)$ luego (1) $\neg a_1 = \neg\neg a_2$ y (2) $\neg b_1 = \neg\neg b_2$ entonces

- $(a_1, a_2) \sqcup (b_1, b_2) \overset{V2)}{=} (a_1 \vee b_1, a_2 \wedge b_2) \in Z(H)$,
  $\neg(a_1 \vee b_1) \overset{NI7)}{=} \neg a_1 \wedge \neg b_1 \overset{(1),(2)}{=} \neg\neg a_2 \wedge \neg\neg b_2 \overset{NI5)}{=} \neg\neg(a_2 \wedge b_2)$.

- $(a_1, a_2) \sqcap (b_1, b_2) \overset{V3)}{=} (a_1 \wedge b_1, a_2 \vee b_2) \in Z(H)$,
  $\neg(a_1 \wedge b_1) \overset{NI3)}{=} \neg\neg\neg(a_1 \wedge b_1) \overset{NI5)}{=} \neg(\neg\neg a_1 \wedge \neg\neg b_1) \overset{(1),(2)}{=} \neg(\neg a_2 \wedge \neg b_2) \overset{NI7)}{=} \neg\neg(a_2 \vee b_2)$.

- $\sim (a_1, a_2) \overset{V4)}{=} (a_2, a_1) \in Z(H)$, ya que $\neg a_2 \overset{(1)}{=} \neg\neg a_1$.

- $(a_1, a_2) \to (b_1, b_2) \overset{V5)}{=} (a_1 \Rightarrow b_1, a_1 \wedge b_2) \in Z(H)$,
  $\neg(a_1 \Rightarrow b_1) \overset{NI6)}{=} \neg\neg a_1 \wedge \neg b_1 \overset{(2)}{=} \neg\neg a_1 \wedge \neg\neg b_2 \overset{NI5)}{=} \neg\neg(a_1 \wedge b_2)$.

Claramente $(0, 0) \notin Z(H)$. □

Lema 4.21 *Si H es un álgebra de Heyting, $Min(V(H)) = Z(H)$.*

Dem. Si (1) $(x,y) \in Min(V(H))$ entonces

$$(\neg y, \neg\neg y) \overset{(4.4)}{=} \Delta\nabla(x,y) \overset{(1)}{=} \nabla\Delta(x,y) \overset{(4.5)}{=} (\neg\neg x, \neg x)$$

luego $\neg x = \neg\neg y$ y por lo tanto $(x,y) \in Z(H)$.
Recíprocamente si $(x,y) \in Z(H)$ entonces (2) $\neg x = \neg\neg y$ luego (3) $\neg\neg x = \neg\neg\neg y \overset{\mathrm{NI3)}}{=} \neg y$ y por lo tanto $\Delta\nabla(x,y) \overset{(4.4)}{=} (\neg y, \neg\neg y) \overset{(2),(3)}{=} (\neg\neg x, \neg x) \overset{(4.5)}{=} \nabla\Delta(x,y)$. □

Corolario 4.22 (A. Monteiro, [37]) *Si H es un álgebra de Heyting entonces $Min(V(H))$ es una subálgebra propia de $V(H)$.*

Dem. Consecuencia inmediata de los Lemas 4.20 y 4.21. □

Lema 4.23 $SN(Min(V(H)), c) = V(H)$.

Dem. Sea $(a,b) \in V(H)$, luego como $V(H)$ tiene centro $c = (0,0)$ entonces por el Lema 2.4, $(a,b) = (\Delta(a,b) \sqcup c) \sqcap \nabla(a,b)$ y como $\neg a \overset{\mathrm{NI3)}}{=} \neg\neg\neg a$ entonces $\Delta(a,b) \overset{(4.2)}{=} (a, \neg a) \in Z(H) = Min(V(H))$.
Por otro lado, $\nabla(a,b) \overset{(4.3)}{=} (\neg b, b)$ y como $\neg(\neg b) = \neg\neg b$ entonces $\nabla(a,b) \in Z(H) = Min(V(H))$, luego por el Corolario 2.88, $(a,b) \in SN(Min(V(H)), c)$. □

Lema 4.24 (A. Monteiro, [37]) *Si H es un álgebra de Heyting y $m = (x,y) \in Min(V(H))$ existen $a \in \Delta(V(H))$, $b \in \nabla(V(H))$ tales que $m = a \sqcup b$.*

Dem. Sea $a = (x, \neg x) = \Delta(x,y)$, luego $a \in \Delta(V(H))$. Por lo indicado en la demostración del Lema 4.21 sabemos que $\neg x = \neg\neg y$ luego (1) $\neg x \wedge \neg y = \neg\neg y \wedge \neg y \overset{\mathrm{NI1)}}{=} 0$ y (2) $\neg x = \neg\neg y \overset{\mathrm{NI2)}}{\geq} y$. Sea $b = (0, x \vee y)$ luego $\nabla b = (\neg(x \vee y), x \vee y) \overset{\mathrm{NI7)}}{=} (\neg x \wedge \neg y, x \vee y) \overset{(1)}{=} (0, x \vee y) = b$, esto es $b \in \nabla(V(H))$. Entonces $a \sqcup b = (x, \neg x) \sqcup (0, x \vee y) = (x, \neg x \wedge (x \vee y)) = (x, (\neg x \wedge x) \vee (\neg x \wedge y)) \overset{\mathrm{NI1)}}{=} (x, \neg x \wedge y) \overset{(2)}{=} (x,y) = m$. □

Corolario 4.25 *Si N es un álgebra de Nelson con centro y $m \in Min(N)$ existen $a \in \Delta(N)$, $b \in \nabla(N)$ tales que $m = a \vee b$.*

Dem. Por el Lema 4.19, sabemos que N es isomorfa a $V(\Delta(N))$. □

Si N es un álgebra de Nelson y $X, Y \subseteq N$ notaremos $X \vee Y = \{x \vee y : x \in X, y \in Y\}$.

Lema 4.26 (A. Monteiro, [37]) *Si H es un álgebra de Heyting y $X = \Delta(V(H)) \cup \nabla(V(H))$ entonces $Min(V(H)) = X \sqcup X$.*

Dem. Si $w \in X \sqcup X$ entonces $w = a \sqcup b$, con $a, b \in X$. Por el Lema 2.105, $X \subseteq Min(V(H))$ luego $a, b \in Min(V(H))$ y como $Min(V(H))$ es una subálgebra, tenemos $w = a \sqcup b \in Min(V(H))$. Luego $X \sqcup X \subseteq Min(V(H))$.
Si $m \in Min(V(H))$ por el Lema 4.24, existen $a \in \Delta(V(H))$, $b \in \nabla(V(H))$ tales que $m = a \sqcup b$. Como $\Delta(V(H)), \nabla(V(H)) \subseteq X$, entonces $m = a \sqcup b \in X \sqcup X$. □

Teorema 4.27 (A. Monteiro, [37]) *Si H es un álgebra de Heyting, entonces:*

$$SN(\Delta(V(H)) = Min(V(H)).$$

Dem. Por el Lema 2.105, $\Delta(V(H)) \subseteq Min(V(H))$ y como $Min(V(H))$ es una subálgebra entonces $SN(\Delta(V(H)) \subseteq Min(V(H))$.
Si $x \in \nabla(V(H))$ entonces $\sim x \in \sim \nabla(V(H)) = \Delta(V(H)) \subseteq SN(\Delta(V(H)))$, luego $x \in SN(\Delta(V(H)))$ por lo tanto: (1) $\nabla(V(H)) \subseteq SN(\Delta(V(H)))$.
Como (2) $\Delta(V(H)) \subseteq SN(\Delta(V(H)))$, de (1) y (2) resulta $X = \Delta(V(H)) \cup \nabla(V(H)) \subseteq SN(\Delta(V(H)))$ luego $Min(V(H)) = X \sqcup X \subseteq SN(\Delta(V(H)))$. □

Lema 4.28 *Si N es un álgebra de Nelson con centro, entonces $Min(N)$ es una subálgebra propia de N.*

Dem. Como N tiene centro, por el Lema 4.9, N es isomorfa a $V(\Delta(N))$ mediante el isomorfismo $g(x) = (\Delta x, \Delta \sim x)$. Observemos en primer lugar que vale la igualdad de conjuntos $g(Min(N)) = Min(V(\Delta(N)))$.
En efecto, si $y \in g(Min(N))$ entonces $y = g(x)$ con $x \in Min(N)$ entonces $\Delta\nabla g(x) = g(\Delta\nabla x) = g(\nabla\Delta x) = \nabla\Delta g(x)$, por lo que $y = g(x) \in Min(V(\Delta(N)))$.

Si $z \in Min(V(\Delta(N)))$, entonces como g es un isomorfismo, existe $a \in N$ tal que $g(a) = z$. Entonces tenemos que $g(\Delta\nabla a) = \Delta\nabla g(a) = \Delta\nabla z = \nabla\Delta z = \nabla\Delta g(a) = g(\nabla\Delta a)$, de donde se sigue que $\Delta\nabla a = \nabla\Delta a$ y $a \in Min(N)$ por lo que $z \in g(Min(N))$.
Dado que $Min(N) = g^{-1}(Min(V(\Delta(N))))$, y por el Corolario 4.22, $Min(V(\Delta(N)))$ es una subálgebra propia de $V(\Delta(N))$, resulta que $Min(N)$ es una subágebra propia de N.

□

Corolario 4.29 *Si N es un álgebra de Nelson con centro, $SN(\Delta(N)) \cong Min(N)$.*

Dem. Por el Lema 4.19, sabemos que (1) N es isomorfa a $V(\Delta(N))$. Luego (2) $\Delta(N) \cong \Delta(V(\Delta(N)))$ y por lo demostrado en el Lema 4.28, (3) $Min(N) \cong Min(V(\Delta(N)))$. De (2) resulta (4) $SN(\Delta(N)) \cong SN(\Delta(V(\Delta(N))))$. Por el Teorema 4.27, $SN(\Delta(V(\Delta(N)))) = Min(V(\Delta(N)))$, por lo tanto, de (3) y (4), $SN(\Delta(N)) \cong Min(N)$. □

Lema 4.30 *Si N es un álgebra de Nelson y $D \in \mathcal{D}(N)$, con $D \neq N$, entonces la relación definida sobre N por*

$$\text{Si } x, y \in N, x \approx_D y, \text{ si y solo si } x \to y, y \to x \in D$$

es una relación de equivalencia, compatible con $\wedge, \vee$ y $\to$. Si $D = \{1\}$ notaremos simplemente $x \approx y$.

Dem. Como $x \to x = 1 \in D$, entonces $\approx_D$ es reflexiva. Claramente $\approx_D$ es simétrica. Probemos que si (1) $x \to y \in D$ y (2) $y \to z \in D$ entonces $x \to z \in D$. En efecto,

$$(3)\ \ (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) \overset{\text{N24)}}{=} 1 \in D.$$

Como, $y \to z \overset{\text{N17)}}{\leq} x \to (y \to z)$ de (2) y $D \in \mathcal{D}(N)$, resulta (4) $x \to (y \to z) \in D$. Luego de (3) y (4) resulta $(x \to y) \to (x \to z) \in D$ y por (1) $x \to z \in D$.
Veamos ahora que $\approx_D$ es compatible con $\wedge, \vee$ y $\to$.

(i) Si $x \approx_D y$ entonces $x \wedge z \approx_D y \wedge z$. En efecto,

$$(x \wedge z) \to (y \wedge z) \overset{\text{N11)}}{=} ((x \wedge z) \to y) \wedge ((x \wedge z) \to z) \overset{\text{N10)}}{=}$$

$$((x \wedge z) \to y) \wedge 1 = (x \wedge z) \to y \overset{\text{N7)}}{=} z \to (x \to y).$$

$x \to y \overset{\text{N17)}}{\leq} z \to (x \to y)$ y como por hipótesis $x \to y \in D$ tenemos que $z \to (x \to y) \in D$. Análogamente se prueba que $(y \wedge z) \to (x \wedge z) \in D$. De (i) resulta inmediatamente que si $x \approx_D y$ y $x_1 \approx_D y_1$ entonces $x \wedge x_1 \approx_D y \wedge y_1$.

(ii) Si $x \approx_D y$ entonces $x \vee z \approx_D y \vee z$. En efecto,

$$(x \vee z) \to (y \vee z) \overset{\text{N12)}}{=} (x \to (y \vee z)) \wedge (z \to (y \vee z)) \overset{\text{N10)}}{=}$$

$$(x \to (y \vee z)) \wedge 1 = x \to (y \vee z).$$

Como $y \leq y \vee z$ entonces, $x \to y \overset{\text{N15)}}{\leq} x \to (y \vee z)$ y como por hipótesis $x \to y \in D$ tenemos $x \to (y \vee z) \in D$.

Análogamente se prueba que $(y \vee z) \to (x \vee z) \in D$. De (ii) resulta inmediatamente que si $x \approx_D y$ y $x_1 \approx_D y_1$ entonces $x \vee x_1 \approx_D y \vee y_1$.

(iii) Si $x \approx_D y$ entonces $x \to z \approx_D y \to z$. En efecto,

$(y \to x) \to ((x \to z) \to (y \to z)) \overset{\text{N71)}}{=} 1 \in D$, y como por hipótesis $y \to x \in D$ resulta que $(x \to z) \to (y \to z) \in D$.

Análogamente se prueba que $(y \to z) \to (x \to z) \in D$.

(iv) Si $x \approx_D y$ entonces $z \to x \approx_D z \to y$. En efecto,

$$(z \to (x \to y)) \to ((z \to x) \to (z \to y)) \overset{\text{N24)}}{=} 1 \in D$$

y como por hipótesis $x \to y \in D$ y $x \to y \leq z \to (x \to y)$, entonces $z \to (x \to y) \in D$. Luego $(z \to x) \to (z \to y) \in D$. Análogamente $(z \to y) \to (z \to x) \in D$.

De (iii) y (iv) resulta que si $x \approx_D y$ y $x_1 \approx_D y_1$ entonces $x \to x_1 \approx_D y \to y_1$. $\square$

Sea $C_D(x) = \{y \in N : y \approx_D x\}$ y consideremos el conjunto cociente $H_D(N) = N/{\approx_D}$. Si $D = \{1\}$ notaremos $C(x)$ en vez de de $C_D(x)$ y $H(N)$ en vez de $H_D(N)$. Definamos

C1) $1_D = C_D(1)$, $0_D = C_D(0)$,

C2) $C_D(x) \wedge_D C_D(y) = C_D(x \wedge y)$,

C3) $C_D(x) \vee_D C_D(y) = C_D(x \vee y)$,

C4) $C_D(x) \Rightarrow_D C_D(y) = C_D(x \to y)$.

Lema 4.31 $(H_D(N), 1_D, 0_D, \wedge_D, \vee_D, \Rightarrow_D)$ *es un álgebra de Heyting.*

Dem. Es claro que $H_D(N)$ es un reticulado distributivo con primer elemento 0_D y último elemento 1_D.
Observemos que $C_D(x) \leq_D C_D(y)$ si y solo si $C_D(x) = C_D(x) \wedge_D C_D(y) \overset{C2)}{=} C_D(x \wedge y)$, esto equivale a $x \to (x \wedge y) \in D$ y $(x \wedge y) \to x \in D$. Como $(x \wedge y) \to x = 1 \in D$ entonces $C_D(x) \leq_D C_D(y)$ si y solo si $x \to (x \wedge y) \in D$. Y como $x \to (x \wedge y) \overset{N11)}{=} (x \to x) \wedge (x \to y) = 1 \wedge (x \to y) = x \to y$. Luego $C_D(x) \leq_D C_D(y)$ si y solo si $x \to y \in D$.

Probemos (1) $C_D(x) \wedge (C_D(x) \Rightarrow_D C_D(y)) \leq_D C_D(y)$.
En efecto, como $(x \wedge (x \to y)) \to y \overset{N7)}{=} (x \to y) \to (x \to y) \overset{N6)}{=} 1 \in D$, por lo observado precedentemente

$$C_D(x) \wedge_D (C_D(x) \Rightarrow_D C_D(y)) \overset{C2),C4)}{=} C_D(x \wedge (x \to y)) \leq_D C_D(y).$$

(2) Si $C_D(x) \wedge_D C_D(z) \leq_D C_D(y)$ entonces $C_D(z) \leq_D C_D(x) \Rightarrow_D C_D(y)$.
En efecto, por hipótesis $C_D(x \wedge z) \overset{C2)}{=} C_D(x) \wedge_D C_D(z) \leq_D C_D(y)$, luego $z \to (x \to y) \overset{N7)}{=} (x \wedge z) \to y \in D$, por lo tanto $C_D(z) \leq_D C_D(x \to y) = C_D(x) \Rightarrow_D C_D(y)$.
De (1) y (2) resulta por el Lema 1.15, que $H_D(N)$ es un álgebra de Heyting. □

Corolario 4.32 $V(H_D(N))$ *es un álgebra de Nelson con centro* $(C_D(0), C_D(0))$.

Lema 4.33 *Si* N *es un álgebra de Nelson y* $D \in \mathcal{D}(N)$*, la transformación* $h : N \to V(H_D(N))$ *definida por* $h(x) = (C_D(x), C_D(\sim x))$ *es un homomorfismo y* h *es inyectiva si y solo si* $D = \{1\}$.

Dem. Como por N72) se verifica $(x \wedge \sim x) \to 0 = 1$, entonces $C_D(x \wedge \sim x) \leq_D C_D(0)$, luego $C_D(x) \wedge_D C_D(\sim x) = C_D(x \wedge \sim x) = 0_D$ y por lo tanto $h(x) = (C_D(x), C_D(\sim x)) \in V(H_D(N))$. Veamos que h es un homomorfismo de álgebras de Nelson. En efecto:

$$h(0) = (C_D(0), C_D(1)) = (0_D, 1_D); \;\; h(1) = (C_D(1), C_D(0)) = (1_D, 0_D).$$

$$h(x \vee y) = (C_D(x \vee y), C_D(\sim (x \vee y))) = (C_D(x) \vee C_D(y), C_D(\sim x) \wedge C_D(\sim y)) \overset{V2)}{=} (C_D(x), C_D(\sim x)) \sqcup (C_D(y), C_D(\sim y)) = h(x) \sqcup h(y).$$

$$h(\sim x) = (C_D(\sim x), C_D(x)) \overset{V4)}{=} \sim (C_D(x), C_D(\sim x)) = \sim h(x).$$

Por N26) y N27), $C_D(\sim (x \to y)) = C_D(x \wedge \sim y)$. Entonces:

$$h(x \to y) = (C_D(x \to y), C_D(\sim (x \to y)) = (C_D(x \to y), C_D(x \wedge \sim y)) =$$

$$(C_D(x) \to_D C_D(y), C_D(x) \wedge_D C_D(\sim y)) \overset{V5)}{=} (C_D(x), C_D(\sim x)) \to (C_D(y), C_D(\sim y)) =$$
$$h(x) \to h(y).$$

Si $D = \{1\}$ y $h(x) = h(y)$ entonces $C_D(x) = C_D(y)$ y $C_D(\sim x) = C_D(\sim y)$, luego

$x \to y, y \to x \in D = \{1\}$ y $\sim x \to \sim y, \sim y \to \sim x \in D = \{1\}$, y por N28) resulta $x = y$.

Supongamos que h es inyectiva y sea $x \in D$. Como $x \to 1 = 1 \in D$ y $1 \to x = x \in D$ entonces $x \approx_D 1$, esto es (1) $C_D(x) = 1_D$. Además $0 \to \sim x = 1 \in D$ y $\sim x \to 0 = \nabla x \in D$ de donde resulta que $\sim x \approx_D 0_D$, es decir (2) $C_D(\sim x) = 0_D$. De (1) y (2) se tiene que $h(x) = (C_D(x), C_D(\sim x)) = (1_D, 0_D) = h(1)$, entonces como h es inyectiva, $x = 1$ y por lo tanto $D = \{1\}$. □

Corolario 4.34 (D. Vakarelov, [58]) *Si N es un álgebra de Nelson, existe un álgebra de Heyting $H(N) = N/\approx$ y un homomorfismo inyectivo h de N en $V(H(N))$.*

Dem. Es una consecuencia de los Lemas 4.31 y 4.33 cuando $D = \{1\}$. □

Observación 4.35 *Si $D = \{1\}$ entonces $|C_D(x) \cap \Delta(N)| = 1$. En efecto, por* N57), N58) *y* N59) *$\Delta x \in C_D(x) \cap \Delta(N)$. Si $y \in C_D(x) \cap \Delta(N)$ entonces (i) $y = \Delta y$ e $y \approx_D x$, luego $x \to y = 1 = y \to x$ luego por el* Lema 1.2, *(ii) $\Delta y = \Delta x$. De (i) e (ii) resulta $y = \Delta x$. Sospechamos que esto fue lo que motivó a* A. Monteiro *a enunciar los* Lemas 4.8 *y* 4.6.

Corolario 4.36 (D. Vakarelov, [58]) *Toda álgebra de Nelson es isomorfa a una subálgebra de un álgebra de Nelson con centro.*

El resultado precedente coincide con el indicado por A. Monteiro en el Corolario 3.4.

Lema 4.37 *Si H es un álgebra de Heyting, la función $\psi_H : V(H)/\approx \to H$ definida por $\psi_H(C_{\{(1,0)\}}(x, y)) = x$ es un isomorfismo* (I. Viglizzo, [59], pág. 134).

Lema 4.38 *Si N es un álgebra de Nelson entonces las álgebras de Heyting $H(N) = N/\approx$ y $\Delta(N)$ son isomorfas vía la transformación $f(C_{\{1\}}(x)) = \Delta x$* (A. Sendlewski, [56], ver Observación 1.24).

Observación 4.39 *Por el Lema 4.38, f es un isomorfismo entre las álgebras de Heyting $N/\approx$ y $\Delta(N)$, entonces la función $F : V(N/\approx) \to V(\Delta(N))$ definida por;*

$$F((C(x), C(y))) = (\Delta x, \Delta y)$$

es un isomorfismo. Si h es el homomorfismo de N en $V(N/\approx)$ definido en el Lema 4.33 y g es el homomorfismo de N en $V(\Delta(N))$ definido en el Lema 4.8 entonces $F \circ h = g$. En efecto, $(F \circ h)(x) = F(h(x)) = F((C(x), C(\sim x))) = (\Delta x, \Delta \sim x) = g(x)$. Luego $F(h(N)) = g(N)$, por lo tanto $h(N) \cong g(N)$.

Teorema 4.40 *Si N es un álgebra de Nelson entonces $M(N) \cong V(\Delta(N))$.*

Dem. Si $(x, y) \in M(N)$ entonces (1) $x \leq y$, (2) $x \in \Delta(N)$ y (3) $y \in \nabla(N) =\sim \Delta(N)$. De (3) resulta que $\sim y \in \Delta(N)$. Como $x\wedge \sim y \overset{(1)}{\leq} y\wedge \sim y$, entonces $\Delta(x\wedge \sim y) \overset{\text{N51)}}{\leq} \Delta(y\wedge \sim y) \overset{\text{N54)}}{=} 0$, por lo tanto (4) $\Delta(x\wedge \sim y) = 0$.
De $x, \sim y \in \Delta(N)$ resulta por la Observación 1.24 que $x \wedge_\Delta \sim y = \Delta(x\wedge \sim y) \overset{(4)}{=} 0$ y por lo tanto $(x, \sim y) \in V(\Delta(N))$.

Sea $t((x, y)) = (x, \sim y)$, luego $t : M(N) \to V(\Delta(N))$. Veamos que t es un isomorfismo.

(i) $t(\approx (x, y)) \overset{\text{D3)}}{=} t((\sim y, \sim x)) = (\sim y, x) \overset{\text{V4)}}{=} \sim (x, \sim y) =\sim t((x, y))$.
(ii)

$$t((x, y)) \sqcap t((z, w)) = (x, \sim y) \sqcap (z, \sim w) \overset{\text{V3)}}{=} (x \wedge_\Delta z, \sim y\vee \sim w) =$$

$$(\Delta(x \wedge z), \sim (y \wedge w)) = t((\Delta(x \wedge z), y \wedge w)) \overset{\text{D1)}}{=} t((x, y) \cap (z, w)).$$

De (i) y (ii) resulta (iii) $t((x, y)) \sqcup t((z, w)) = t((x, y) \cup (z, w))$.
(iv)

$$t((x, y)) \to t((z, w)) = (x, \sim y) \to (z, \sim w) \overset{\text{V5)}}{=} (x \Rightarrow_\Delta z, x\wedge_\Delta \sim w) =$$

$$(\Delta(x \to z), \Delta(x\wedge \sim w)) = (\Delta(x \to z), \sim \nabla(\sim x \vee w)) =$$

$$t((\Delta(x \to z), \nabla(\sim x \vee w))) \overset{\text{D4)}}{=} t((x, y) \mapsto (z, w)).$$

(v) t es suryectiva. Dado $(z, w) \in V(\Delta(N))$, tenemos que $z \in \Delta(N)$, (5) $w \in \Delta(N)$ y $\Delta(z \wedge w) = z \wedge_\Delta w = 0$, luego por el Lema 2.23, $z \leq\sim w$. Además de (5) resulta que $\sim w \in\sim \Delta(N) = \nabla(N)$ luego $(z, \sim w) \in M(N)$ y $t((z, \sim w)) = (z, w)$.
(vi) t es inyectiva. Si $(x, \sim y) = t((x, y)) = t((z, w)) = (z, \sim w)$ entonces $x = z$ y $\sim y =\sim w$ luego $y = w$. □

Corolario 4.41 *Si N es un álgebra de Nelson entonces $M(N) \cong V(\boldsymbol{\Delta}(M(N)))$.*

Dem. Consecuencia del Teorema 4.40 y el Lema 4.5. □

Corolario 4.42 *Si B es un álgebra de Boole, entonces* (i) $M(B) \cong V(B)$*, con las operaciones Δ y ∇, es un álgebra de Post trivalente.* (ii) *Si H es un álgebra de Nelson finita y también un álgebra de Heyting y existe un isomorfismo $\gamma : M(H) \to V(H)$ entonces H es un álgebra de Boole.* (iii) *Si H es un álgebra de Heyting tal que $V(H)$ es un álgebra de Łukasiewicz trivalente entonces H es un álgebra de Boole.*

Dem. (i) B es un álgebra de Nelson y de Heyting, donde $x \to y = x \Rightarrow y = -x \vee y$, $\urcorner x = \neg x = -x$ y por la Observación 2.5, $\Delta x = x$ para todo $x \in B$. Por lo tanto $\Delta(B) = B$ y por el teorema anterior tenemos $M(B) \cong V(B)$. Si $(x, y) \in V(B)$ entonces (1) $x \wedge y = 0$ y $(x, y) \sqcup \urcorner(x, y) \overset{(4.1)}{=} (x, y) \sqcup (\neg x, x) = (x, y) \sqcup (-x, x) \overset{V2)}{=} (x \vee -x, y \wedge x) \overset{(1)}{=} (1, 0)$. Luego $V(B)$ es un álgebra de Nelson semisimple y por el Teorema 1.8 es un álgebra de Łukasiewicz trivalente y como tiene centro es un álgebra de Post trivalente.

(ii) Es claro que la restricción de γ al conjunto $\mathbf{\Delta}(M(H))$ es un isomorfismo entre las álgebras de Heyting $\mathbf{\Delta}(M(H))$ y $\Delta(V(H))$. Como H es un álgebra de Nelson, entonces por el Lema 3.3, (1) $\mathbf{\Delta}(M(H))$ es isomorfa a $\Delta(H)$ y como H es un álgebra de Heyting, por el Lema 4.6, (2) $\Delta(V(H))$ es isomorfa a H. De (1) y (2) resulta (3) $\Delta(H)$ es isomorfa a H. Como (4) H es finita y (5) $\Delta(H) \subseteq H$, entonces de (3), (4) y (5) resulta $\Delta(H) = H$. Luego por el Lema 1.5, H es un álgebra de Boole.

(iii) Como $V(H)$ es un álgebra de Łukasiewicz trivalente, en particular:

$$(b \vee \neg b, 0 \wedge b) \overset{V2)}{=} (b, 0) \sqcup (\neg b, b) \overset{V4)}{=} \sim (0, b) \sqcup (\neg b, b) \overset{(4.3)}{=} \sim (0, b) \sqcup \nabla(0, b) = (1, 0)$$

luego $b \vee \neg b = 1$ y como $b \wedge \neg b = 0$, entonces todos los elementos de H son booleanos, luego H es un álgebra de Boole. □

Sea N un álgebra de Nelson, no trivial. Un elemento $p \in N$ se dice primo si $p \neq 0$ y si $p = a \vee b$ donde $a, b \in N$ entonces $p = a$ o $p = b$. Sea $\pi(N)$ el conjunto de todos los elementos primos de N.

Lema 4.43 *Si N es un álgebra de Nelson con eje e y* (1) $p \in \pi(N)$ *entonces $\Delta p = p$ o $\Delta p = 0$.*

Dem. Como e es el eje de N entonces $p = \Delta p \vee (e \wedge \nabla p)$ luego por (1) $p = \Delta p$ o (2) $p = e \wedge \nabla p$. De (2) resulta $\Delta p = \Delta(e \wedge \nabla p) \overset{N62)}{\leq} \Delta e \wedge \Delta \nabla p = 0 \wedge \Delta \nabla p = 0$. □

Corolario 4.44 *Si N es un álgebra de Nelson con centro c y $p \in \pi(N)$ entonces $\Delta p = p$ o $\Delta p = 0$.*

Si X es un poset notaremos, como es habitual, con X^* el poset dual.

Lema 4.45 *Si N es un álgebra de Nelson finita, no trivial entonces:*

$$\pi(M(N)) = \{(p, \nabla p) : p \in \pi(\Delta(N))\} \cup \{(0, \sim p) : p \in \pi((\Delta(N))^*)\}$$

Dem. Por el Teorema 4.40, sabemos que $t : M(N) \to V(\Delta(N))$ definida por $t((a,c)) = (a, \sim c)$ es un isomorfismo. Luego $s = t^{-1}$ es un isomorfismo de $V(\Delta(N)) \to M(N)$ y $s((a, \sim c)) = (a, c)$. Por los resultados de L. Monteiro e I. Viglizzo [53] sabemos que

$$\pi(V(\Delta(N)) = \{(p, \neg_\Delta p) : p \in \pi(\Delta(N))\} \cup \{(0, q) : q \in \pi((\Delta(N))^*)\}$$

Si $p \in \pi(\Delta(N))$ en particular $p \in \Delta(N)$ esto es (1) $\Delta p = p$. Luego $s((p, \neg_\Delta p)) = s((p, p \Rightarrow_\Delta 0)) = s((p, \Delta(p \to 0))) \overset{(1)}{=} s((p, \Delta(\Delta p \to 0))) \overset{N66)}{=} s((p, \sim \nabla \Delta p)) \overset{(1)}{=} s((p, \sim \nabla p)) = (p, \nabla p)$ y si $q \in \pi((\Delta(N))^*)$ entonces $s(0, q) = (0, \sim q)$. $\square$

Lema 4.46 *Si L es un álgebra de Nelson semisimple, entonces $Min(L) = \mathcal{B}(L)$.*

Dem. Por la Observación 2.97 sabemos que $\mathcal{B}(L) \subseteq Min(L)$. Sea $x \in Min(L)$ esto es (1) $\nabla\Delta x = \Delta\nabla x$. Por el Teorema 1.7 las álgebras de Nelson semisimple, coinciden con las álgebras de Łukasiewicz trivalentes luego (2) $\nabla\Delta x = \Delta x$ y (3) $\Delta\nabla x = \nabla x$. De (1), (2) y (3) resulta $\Delta x = \nabla x$ luego $\nabla x = x$ y por lo tanto $x \in \mathcal{B}(L)$. $\square$

Lema 4.47 *Si N es un álgebra de Nelson con eje e tal que* (1) $Min(N) = \mathcal{B}(N)$ *entonces $SN(\mathcal{B}(N), e) = N$ y N es un álgebra de Nelson semisimple.*

Dem. Sea $x \in N$. Como N tiene eje entonces (2) $x = \Delta x \vee (e \wedge \nabla x)$. Por el Lema 2.105 sabemos que $\Delta(N), \nabla(N) \subseteq Min(N) \overset{(1)}{=} \mathcal{B}(N)$, luego $\Delta x, \nabla x \in \mathcal{B}(N) \subseteq SN(\mathcal{B}(N), e)$ y como $e \in SN(\mathcal{B}(N), e)$ entonces $x \in SN(\mathcal{B}(N), e)$ y por lo tanto $SN(\mathcal{B}(N), e) = N$.
De (2) resulta:

$$\neg x = (\Delta x \vee (e \wedge \nabla x)) \to 0 \overset{N12)}{=} (\Delta x \to 0) \wedge ((e \wedge \nabla x) \to 0) \overset{N7)}{=}$$

$$\neg\Delta x \wedge (\nabla x \to (e \to 0)) = \neg\Delta x \wedge (\nabla x \to \neg e).$$

Por la Observación 2.7, $\neg e = 1$ entonces (3) $\neg x = \neg\Delta x \wedge (\nabla x \to 1) = \neg\Delta x$.
Como $\Delta x \in \mathcal{B}(N)$, entonces por la Observación 2.5, (4) $\neg\Delta x = \sim \Delta x$ de donde $x \vee \neg x \overset{(2)}{=} (e \wedge \nabla x) \vee \Delta x \vee \neg x \overset{(3)y(4)}{=} (e \wedge \nabla x) \vee \Delta x \vee \sim \Delta x = 1$, entonces por el Teorema 1.7, N es un álgebra de Nelson semisimple. $\square$

Lema 4.48 *Si H, H_1, H_2 son álgebras de Heyting y $H = H_1 \times H_2$ entonces $V(H_1 \times H_2) \cong P = V(H_1) \times V(H_2)$.*

Dem. Si $(x, y) \in V(H)$, esto es $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ donde $x_1, y_1 \in H_1$, $x_2, y_2 \in H_2$ y $(0,0) = x \wedge y = (x_1, x_2) \wedge (x_1, x_2) = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2)$. Luego $x_1 \wedge y_1 = 0$ y $x_2 \wedge y_2 = 0$, y por lo tanto $(x_1, y_1) \in V(H_1)$ y $(x_2, y_2) \in V(H_2)$.

Sea

$$h((x, y)) = h(((x_1, x_2), (y_1, y_2))) = ((x_1, y_1), (x_2, y_2)),$$

luego $h : V(H) \to P$.
Probemos que h es un isomorfismo.

Si $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = h((x, y)) = h((z, w)) = ((z_1, w_1), (z_2, w_2))$ luego $(x_1, y_1) = (z_1, w_1)$ y $(x_2, y_2) = (z_2, w_2)$ y por lo tanto $x_1 = z_1$, $y_1 = w_1$, $x_2 = z_2$, $y_2 = w_2$. Luego $(x, y) = (z, w)$, lo que prueba que h es inyectiva.

Veamos que h es suryectiva. Dado $(z, w) \in P$, esto es $(z_1, z_2) = z \in V(H_1)$, $(w_1, w_2) = w \in V(H_2)$ entonces $z_1, z_2 \in H_1$, $w_1, w_2 \in H_2$, $z_1 \wedge z_2 = 0$, $w_1 \wedge w_2 = 0$. Sean $x = (z_1, w_1)$, $y = (z_2, w_2)$, luego $x, y \in H$ y $x \wedge y = (z_1 \wedge z_2, w_1 \wedge w_2) = (0, 0)$ y por lo tanto $(x, y) \in V(H)$ y $h((x, y)) = ((z_1, z_2), (w_1, w_2)) = (z, w)$.

Si $1_i, i = 1, 2$ es el último elemento de $H_i, i = 1, 2$, entonces $1_H = (1_1, 1_2)$ es el último elemento de H, $1_{V(H)} = (1_H, 0_H) = ((1_1, 1_2), (0_1, 0_2))$ es el último elemento de $V(H)$, $(1_i, 0_i)$ es el último elemento de $V(H_i)$, $i = 1, 2$. Por lo tanto $1_P = ((1_1, 0_1), (1_2, 0_2))$ es el último elemento de P y

$$h(1_{V(H)}) = h(((1_1, 1_2), (0_1, 0_2))) = ((1_1, 0_1), (1_2, 0_2)) = 1_P.$$

Sean $A = ((x_1, x_2), (y_1, y_2)), B = ((z_1, z_2), (w_1, w_2)) \in V(H)$.

$$h(\sim_{V(H)} A) = h(\sim_{V(H)} ((x_1, x_2), (y_1, y_2))) = h(((y_1, y_2), (x_1, x_2))) =$$
$$(((y_1, x_1), (y_2, x_2)) =$$
$$(\sim_{V(H_1)} (x_1, y_1), \sim_{V(H_2)} (x_2, y_2))) =\sim_P ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) =\sim_P h(((x_1, x_2), (y_1, y_2))) =$$
$$\sim_P h(A).$$

$$A \sqcap B = ((x_1, x_2) \wedge (z_1, z_2), (y_1, y_2) \vee (w_1, w_2)) =$$
$$((x_1 \wedge z_1, x_2 \wedge z_2), (y_1 \vee w_1, y_2 \vee w_2)).$$

Luego

$$h(A \sqcap B) = ((x_1 \wedge z_1, y_1 \vee w_1), (x_2 \wedge z_2, y_2 \vee w_2)) =$$
$$((x_1, y_1) \sqcap_{V(H_1)} (z_1, w_1), (x_2, y_2) \sqcap_{V(H_2)} (z_2, w_2)) =$$
$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \wedge_P ((z_1, w_1), (z_2, w_2)) = h(A) \wedge_P h(B).$$

$$A \to_{V(H)} B = ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \to_{V(H)} ((z_1, z_2), (w_1, w_2)) =$$
$$((x_1, x_2) \Rightarrow (z_1, z_2)), ((x_1, x_2) \wedge (w_1, w_2))) =$$
$$((x_1 \Rightarrow_{H_1} z_1, x_2 \Rightarrow_{H_2} z_2), (x_1 \wedge w_1, x_2 \wedge w_2)).$$

Luego

$$h(A \to_{V(H)} B) = ((x_1 \Rightarrow_{H_1} z_1, x_1 \wedge w_1), (x_2 \Rightarrow_{H_2} z_2, x_2 \wedge w_2)) =$$

$$((x_1,y_1) \to_{V(H_1)} (z_1,w_1),(x_2,y_2) \to_{V(H_2)} (z_2,w_2)) =$$
$$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \to_P ((z_1,w_1),(z_2,w_2)) = h(A) \to_P h(B).$$

Luego h es un isomorfismo. $\square$

Sea B_0 el álgebra de Boole trivial y B_n el álgebra de Boole con n átomos $n \geq 1$. Es claro que $V(B_1) \cong \mathbf{T}$ luego $|V(B_1)| = 3$ y si $n \geq 2$ entonces B_n es isomorfa al producto de n álgebras de Boole isomorfas a B_1.

Si $n \geq 2$ entonces $V(B_n) \cong \mathbf{T}^n$ luego $|V(B_n)| = 3^n$ y si B es un álgebra de Boole con 3^n átomos entonces $V(B)$ es isomorfa al álgebra de Post trivalente con n generadores libres. Tambien $|M(B_n)| = 3^n$.

Si $H = \{0'\} \oplus B_n$, donde $n \geq 1$ entonces H es un álgebra de Heyting donde si $x, y \in B_n$, $x \Rightarrow y = -x \vee y$, $0' \Rightarrow x = 1$, $x \Rightarrow 0' = 0'$ y $0' \Rightarrow 0' = 1$. Luego

$$V(\{0'\} \oplus B_n) = \{(0',0')\} \cup \{(0',x) : x \in B_n\} \cup \{(x,0') : x \in B_n\}$$

y como $|B_n| = 2^n$ entonces

$$|V(\{0'\} \oplus B_n)| = 1 + 2^n + 2^n = 2^{n+1} + 1.$$

Además

$$V(\{0'\} \oplus B_n) \cong B_n \oplus \{(0',0')\} \oplus B_n.$$

Observemos que $\{0'\} \oplus B_0$ es una cadena con dos elementos y por lo tanto $|V(\{0'\} \oplus B_0)| = 3 = 2^{0+1} + 1$.

Lema 4.49 *Si $(B, \exists)$ es un álgebra de Boole monádica y en $V(B)$ definimos $\exists_V(x,y) = (\exists x, \forall y)$ entonces $(V(B), \exists_V)$ es un álgebra de Post trivalente monádica. Si en $M(B)$ definimos $\exists_M(x,y) = (\exists x, \exists y)$ entonces $(M(B), \exists_M)$ es un álgebra de Post trivalente monádica. Además las álgebras $(M(B), \exists_M)$ y $(V(B), \exists_V)$ son isomorfas.*

Dem. Por el Corolario 4.42, sabemos que $V(B)$ es un álgebra de Post trivalente. Si $(x,y) \in V(B)$ entonces $x \wedge y = 0$, de donde $x \leq -y$ y por lo tanto $\exists x \leq \exists -y = -\forall y$, luego $\exists x \wedge \forall y = 0$ lo que prueba que $\exists_V(x,y) \in V(B)$. Verificamos a continuación las identidades necesarias para probar que se trata de un álgebra de Post trivalente monádica, [50]:

$\exists_V(0,1) = (\exists 0, \forall 1) = (0,1)$.

$(x,y) \sqcap \exists_V(x,y) = (x,y) \sqcap (\exists x, \forall y) \overset{\text{V3)}}{=} (x \wedge \exists x, y \vee \forall y) = (x,y)$.

$\exists_V((x,y) \sqcap \exists_V(z,w)) = \exists_V((x,y) \sqcap (\exists z, \forall w)) \overset{\text{V3)}}{=} \exists_V(x \wedge \exists z, y \vee \forall w) = (\exists(x \wedge \exists z), \forall(y \vee \forall w)) = (\exists x \wedge \exists z, \forall y \vee \forall w) \overset{\text{V3)}}{=} (\exists x, \forall y) \sqcap (\exists z, \forall w) = \exists_V(x,y) \sqcap \exists_V(z,w)$.

$$\exists_V \Delta(x,y) \overset{(4.2)}{=} \exists_V(x,-x) = (\exists x, \forall -x) = (\exists x, -\exists x) \overset{(4.2)}{=} \Delta \exists_V(x,y).$$

$$\nabla \exists_V(x,y) = \nabla(\exists x, \forall y) \overset{(4.3)}{=} (-\forall y, \forall y) = (\exists - y, \forall y) = \exists_V(-y,y) \overset{(4.3)}{=} \exists_V \nabla(x,y).$$

Por el Corolario 4.42, sabemos que $M(B)$ y $V(B)$ son álgebras de Post trivalentes isomorfas, vía la transformación $t((x,y)) = (x,-y)$, luego $t(\exists_M(x,y)) = t((\exists x, \exists y)) = (\exists x, -\exists y) = (\exists x, \forall - y) = \exists_V((x,-y)) = \exists_V t((x,y))$. Por lo tanto $(M(B), \exists_M)$ es isomorfa a $(V(B), \exists_V)$. $\square$

Un álgebra de Heyting se dice trivalente, L. Monteiro, [47], si verifica el axioma

$$\text{(T)} \quad ((x \Rightarrow z) \Rightarrow y) \Rightarrow (((y \Rightarrow x) \Rightarrow y) \Rightarrow y) = 1.$$

Antes de 1964, A. Monteiro propuso a D. Brignole, [8, 3], estudiar las álgebras de Nelson que verifican

$$\text{(C)} \quad ((x \to z) \to y) \to (((y \to x) \to y) \to y) = 1,$$

a las que denominó álgebras de Nelson 5-valuadas, y determinar el álgebra libre. Todas la álgebras C_n con $2 \leq n \leq 5$ verifican (C).

El siguiente lema resuelve un problema planteado por A. Monteiro en sus manuscritos.

Lema 4.50 *H es un álgebra de Heyting trivalente si y solo si $V(H)$ verifica* (C).

Dem. En efecto si $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in V(H)$ entonces

$$r = ((x \to z) \to y) \to (((y \to x) \to y) \to y) =$$

$$(((x_1 \Rightarrow z_1) \Rightarrow y_1) \Rightarrow (((y_1 \Rightarrow x_1) \Rightarrow y_1) \Rightarrow y_1), ((x_1 \Rightarrow z_1) \Rightarrow y_1) \wedge ((y_1 \Rightarrow x_1) \Rightarrow y_1) \wedge y_2).$$

Como H es trivalente entonces $((x_1 \Rightarrow z_1) \Rightarrow y_1) \Rightarrow (((y_1 \Rightarrow x_1) \Rightarrow y_1) \Rightarrow y_1) = 1$. L. Monteiro, [47], probó que (T) es equivalente a (T1) $y = ((x \Rightarrow z) \Rightarrow y) \wedge ((y \Rightarrow x) \Rightarrow y)$, luego $((x_1 \Rightarrow z_1) \Rightarrow y_1) \wedge ((y_1 \Rightarrow x_1) \Rightarrow y_1) \wedge y_2 = y_1 \wedge y_2 = 0$ y por lo tanto $r = (1,0)$.

Sean $x_1, y_1, z_1 \in H$ luego $x = (x_1, \neg x_1), y = (y_1, \neg y_1), z = (z_1, \neg z_1) \in V(H)$. Si $V(H)$ verifica (C) tenemos

$$((x \to z) \to y) \to (((y \to x) \to y) \to y) = (1,0)$$

esto es

$$(((x_1 \Rightarrow z_1) \Rightarrow y_1) \Rightarrow (((y_1 \Rightarrow x_1) \Rightarrow y_1) \Rightarrow y_1), t) = (1,0)$$

donde $t = ((x_1 \Rightarrow z_1) \Rightarrow y_1) \wedge ((y_1 \Rightarrow x_1) \Rightarrow y_1) \wedge \neg y_1$, por lo tanto
$((x_1 \Rightarrow z_1) \Rightarrow y_1) \Rightarrow (((y_1 \Rightarrow x_1) \Rightarrow y_1) \Rightarrow y_1) = 1.$ $\square$

Si L es un álgebra de Lukasiewicz trivalente, sabemos que L es un álgebra de Heyting trivalente (L. Monteiro, [46]), donde $x \Rightarrow y = \Delta \sim x \vee y \vee (\nabla \sim x \wedge \nabla y)$, luego $V(L)$ verifica (C).

Por los resultados de L. Monteiro, [47], sabemos que el álgebra de Heyting trivalente con n generadores libres $H_3(n)$ es isomorfa a $\prod_{k=0}^{n}(\{0'\} \oplus B_{2^k-1})^{\binom{n}{k}}$ luego

$$|V(H_3(n))| = \prod_{k=0}^{n} |V(\{0'\} \oplus B_{2^k-1})|^{\binom{n}{k}} = \prod_{k=0}^{n} (2^{2^k}+1)^{\binom{n}{k}}.$$

Definición 4.51 *Un álgebra de Heyting H se dice lineal si $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1$, para todos $x, y \in H$,* (M. Ward, [60], A. Monteiro, [19]) *y un álgebra de Nelson N se dice lineal si $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$, para todos $x, y \in N$,* (A. Monteiro, [28, 34]).

Lema 4.52 *H es un álgebra de Heyting lineal si y solo si $V(H)$ es un álgebra de Nelson lineal.*

Dem. Supongamos que H es lineal y sean $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V(H)$.

$$((x_1, x_2) \to (y_1, y_2)) \sqcup ((y_1, y_2) \to (x_1, x_2)) \overset{\text{V5)}}{=}$$

$$(x_1 \Rightarrow y_1, x_1 \wedge y_2) \sqcup (y_1 \Rightarrow x_1, y_1 \wedge x_2) \overset{\text{V2)}}{=}$$

$$((x_1 \Rightarrow y_1) \vee (y_1 \Rightarrow x_1), x_1 \wedge y_2 \wedge y_1 \wedge x_2) = (1, 0).$$

Supongamos ahora que $x, y \in H$ y $V(H)$ es lineal. Sabemos $(x, 0), (y, 0) \in V(H)$, luego

$$((x, 0) \to (y, 0)) \sqcup ((y, 0) \to (x, 0)) \overset{\text{V5)}}{=} ((x \Rightarrow y, x \wedge 0)) \sqcup ((y \Rightarrow x, y \wedge 0)) \overset{\text{V2)}}{=}$$

$$((x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x), 0) = (1, 0),$$

de donde $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1$. $\square$

Por los resultados de L. Monteiro, [46, 47], sabemos que toda álgebra de Heyting trivalente es lineal. Observemos que la recíproca no es verdadera. En efecto consideremos el álgebra de Heyting C_4, donde es claro que si $x, y \in C_4$ entonces

$$(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1$$

mientras que (T1) no se verifica:

$$\left(\left(\frac{1}{3} \Rightarrow 0\right) \Rightarrow \frac{2}{3}\right) \wedge \left(\left(\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \frac{2}{3}\right) = \left(0 \Rightarrow \frac{2}{3}\right) \wedge \left(\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}\right) = 1 \wedge 1 = 1 \neq \frac{2}{3}.$$

Lema 4.53 *N es un álgebra de Nelson lineal si y solo si $M(N)$ es un álgebra de Nelson lineal.*

Dem. Supongamos que N es lineal. Sean $(a_1, c_1), (a_2, c_2) \in M(N)$. Como $a_1 \leq c_1$, entonces $a_2 \to a_1 \overset{\text{N15)}}{\leq} a_2 \to c_1$. Análogamente de $a_2 \leq c_2$ resulta $a_1 \to a_2 \leq a_1 \to c_2$. Como N es lineal entonces (1), $(a_2 \to a_1) \vee (a_1 \to a_2) = 1$, y por lo tanto $(a_1 \to c_2) \vee (a_2 \to c_1) = 1$ y en consecuencia (2) $\nabla((a_1 \to c_2) \vee (a_2 \to c_1)) = 1$.

$$((a_1, c_1) \mapsto (a_2, c_2)) \cup ((a_2, c_2) \mapsto (a_1, c_1)) \overset{\text{D4)}}{=}$$

$$(\Delta(a_1 \to a_2), \nabla(\sim a_1 \vee c_2)) \cup (\Delta(a_2 \to a_1), \nabla(\sim a_2 \vee c_1)) \overset{\text{D2)}}{=}$$

$$(\Delta(a_1 \to a_2) \vee \Delta(a_2 \to a_1), \nabla(\nabla(\sim a_1 \vee c_2) \vee \nabla(\sim a_2 \vee c_1))) \overset{\text{N50)}}{=}$$

$$(\Delta((a_1 \to a_2) \vee (a_2 \to a_1)), \nabla(\nabla(\sim a_1 \vee c_2) \vee \nabla(\sim a_2 \vee c_1)) \overset{\text{N65),(1)}}{=}$$

$$(\Delta 1, \nabla(\nabla(a_1 \to c_2) \vee \nabla(a_2 \to c_1))) \overset{\text{N64)}}{=} (1, \nabla((a_1 \to c_2) \vee (a_2 \to c_1))) \overset{(2)}{=} (1, 1).$$

Supongamos que $M(N)$ es lineal, luego como $(\Delta x, \nabla x), (\Delta y, \nabla y) \in M(N)$ entonces:

$$(1, 1) = ((\Delta x, \nabla x) \mapsto (\Delta y, \nabla y)) \cup ((\Delta y, \nabla y) \mapsto (\Delta x, \nabla x)) \overset{\text{D4)}}{=}$$

$$(\Delta(\Delta x \to \Delta y), \nabla(\sim \Delta x \vee \nabla y)) \cup (\Delta(\Delta y \to \Delta x), \nabla(\sim \Delta y \vee \nabla x)) \overset{\text{N63),N65)}}{=}$$

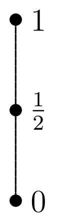
$$(\Delta(x \to y), \nabla(\Delta x \to \nabla y)) \cup (\Delta(y \to x), \nabla(\Delta y \to \nabla x)) \overset{\text{D2)}}{=}$$

$$(\Delta(x \to y) \vee \Delta(y \to x), \nabla(\nabla(\Delta x \to \nabla y) \vee \nabla(\Delta y \to \nabla x))).$$

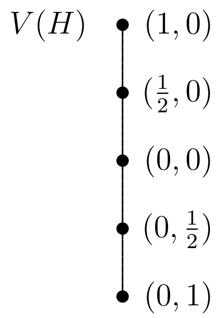
Luego $1 = \Delta(x \to y) \vee \Delta(y \to x) \leq (x \to y) \vee (y \to x)$. □

5. Ejemplos

Ejemplo 5.1 *Sea $H = C_3$ el álgebra de Heyting cuyo diagrama de Hasse es el siguiente:*

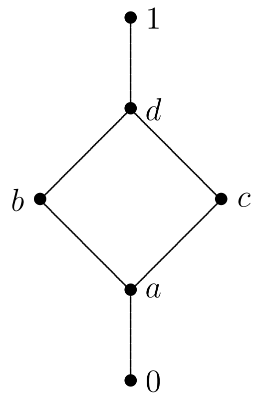


$\Rightarrow$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

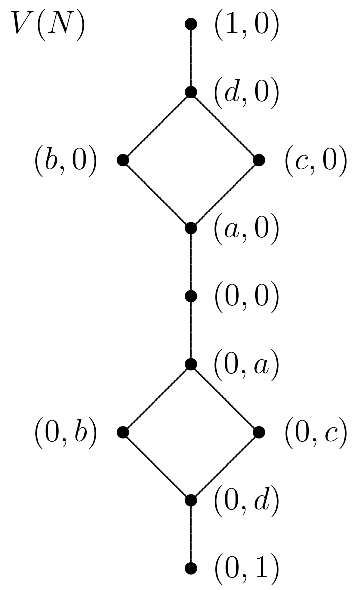


En general si $H = C_n$, con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, entonces $V(C_n) \cong C_{2n-1}$.

Ejemplo 5.2 *El álgebra Nelson N del* Ejemplo 1.23*, cuyo diagrama de Hasse se indica, es tambien un álgebra de Heyting, donde la implicación está dada por la siguiente tabla:*

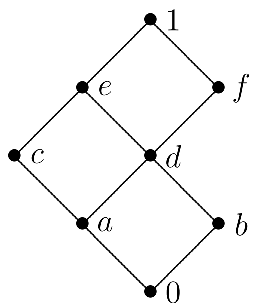


$\Rightarrow$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1	1
b	0	c	1	c	1	1
c	0	b	b	1	1	1
d	0	a	b	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

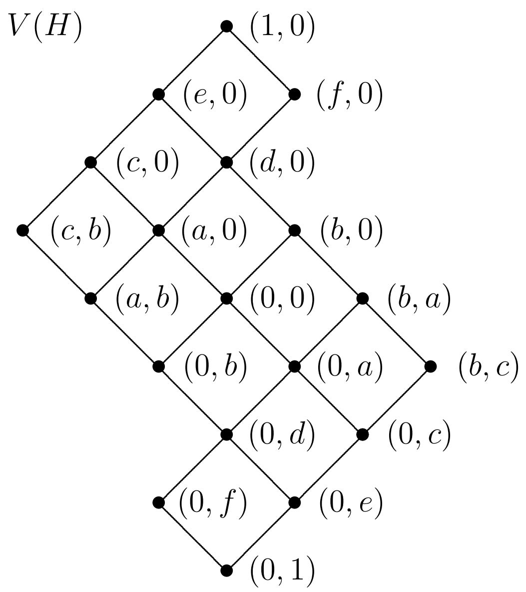


Las álgebras de Nelson $M(N)$ (ver Ejemplo 3.5) y $V(N)$ son diferentes.

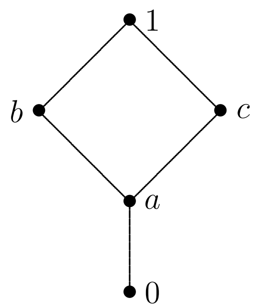
Ejemplo 5.3 *Sea H el álgebra de Heyting cuyo diagrama de Hasse es el siguiente:*



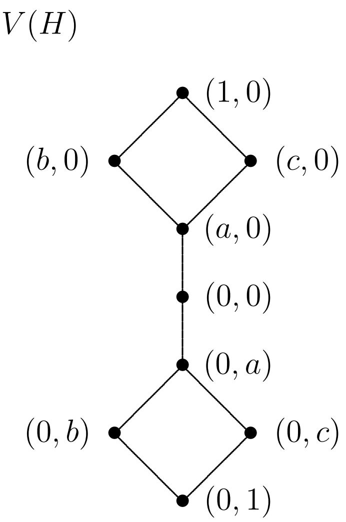
$\Rightarrow$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
a	b	1	b	1	1	1	1	1
b	c	c	1	c	1	1	1	1
c	b	f	b	1	f	1	f	1
d	0	c	b	c	1	1	1	1
e	0	a	b	c	f	1	f	1
f	0	c	b	c	e	e	1	1
1	0	a	b	c	d	e	f	1



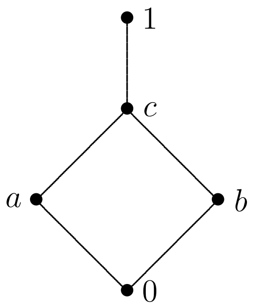
Ejemplo 5.4 *Sea H el álgebra de Heyting cuyo diagrama de Hasse es el siguiente:*



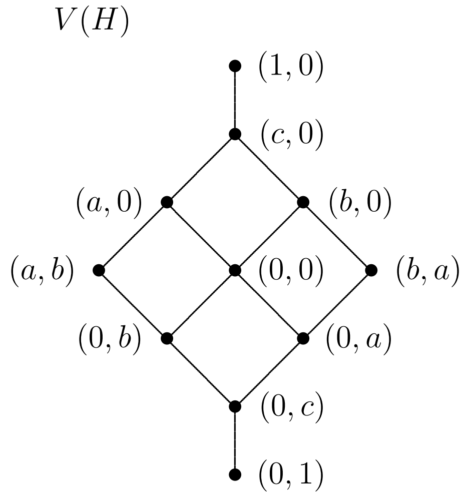
$\Rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1
b	0	c	1	c	1
c	0	b	b	1	1
1	0	a	b	c	1



Ejemplo 5.5 *Sea H el álgebra de Heyting cuyo diagrama de Hasse es el siguiente:*



$\Rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	b	1	b	1	1
b	a	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1



6. Otros resultados sobre álgebras con eje y con centro

Lema 6.1 *Si N es un álgebra de Nelson con eje e y $S_e(N) = S_e = [e,1] = \{x \in N : e \leq x \leq 1\}$ entonces $(S_e, \wedge, \vee, \rightarrow, e, 1)$ es un álgebra de Heyting.*

Dem. Es bien conocido que S_e es un reticulado distributivo con primer elemento e y último elemento 1. Sean $x, y, z \in S_e$. En particular (1) $e \leq x, y$, luego (2) $e \leq x \wedge y$. $\Delta(x \wedge \sim x) \overset{N54)}{=} 0$, luego por el Lema 2.10, (3) $x \wedge \sim x \leq e$. Como $e \overset{(1)}{\leq} y \overset{N17)}{\leq} x \rightarrow y$ entonces $x \rightarrow y \in S_e$.

H0) $e \wedge x \overset{(1)}{=} e$,

H1) $x \rightarrow x \overset{N6)}{=} 1$,

H2) $(x \rightarrow y) \wedge y \overset{N17)}{=} y$,

H3) $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y$,
$x \wedge (x \rightarrow y) \overset{N8)}{=} x \wedge (\sim x \vee y) = (x \wedge \sim x) \vee (x \wedge y) \overset{(3)}{\leq} e \vee (x \wedge y) \overset{(2)}{=} x \wedge y$,
$y \overset{N17)}{\leq} x \rightarrow y$, luego $x \wedge y \leq x \wedge (x \rightarrow y)$.

H4) $x \rightarrow (y \wedge z) \overset{N11)}{=} (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$,

H5) $(x \vee y) \rightarrow z \overset{N12)}{=} (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)$.

□

Corolario 6.2 *Si N es un álgebra de Nelson con centro c y $S_c = [c,1]$ entonces $(S_c, \wedge, \vee, \rightarrow, c, 1)$ es un álgebra de Heyting.*

Si N es un álgebra de Nelson con eje e, sea $T = [0, \sim e]$, $H = T^*$ y si $x, y \in T$, $x \to_T y = \sim (\sim y \to \sim x)$, luego $x \to_T y \in T$. Si $x, y \in H$ sea $x \to_H y = y \to_T x$.

Lema 6.3 *Si N es un álgebra de Nelson con eje e, entonces S_e y $H = T^*$ son álgebras de Heyting isomorfas.*

Dem. Si $x \in S_e(N)$ sea $\beta(x) = \sim x$ luego $\beta : S_e \to H$.

1) $\beta(e) = \sim e$,

2) $\beta(1) = \sim 1 = 0$,

3) $\beta(x \wedge y) = \sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y = \sim x \wedge_H \sim y = \beta(x) \wedge_H \beta(y)$,

4) $\beta(x \vee y) = \sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y = \sim x \vee_H \sim y = \beta(x) \vee_H \beta(y)$,

5) $\beta(x) \to_H \beta(y) = \beta(y) \to_T \beta(x) = \sim (\sim \beta(x) \to \sim \beta(y)) = \sim (x \to y) = \beta(x \to y)$.

6) β es claramente suryectiva e inyectiva.

$\square$

Lema 6.4 *Si N es un álgebra de Nelson con eje e, entonces $\Delta(N)$ y S_e son álgebras de Heyting isomorfas.*

Dem. Por hipótesis (1) $\Delta e = 0$, (2) $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x \leq \Delta x \vee e$ y si $x, y \in \Delta(N)$ entonces (3) $\Delta x = x, \Delta y = y$. Sea $U : \Delta(N) \to S_e$ definida por $U(x) = x \vee e$.

U1) $U(1) = 1 \vee e = 1$.

U2) $U(0) = 0 \vee e = e$.

U3) $U(x \wedge_\Delta y) = U(x) \wedge U(y)$.

$$(4) \;\; U(x \wedge_\Delta y) = (x \wedge_\Delta y) \vee e = \Delta(x \wedge y) \vee e.$$

$U(x) \wedge U(y) = (x \vee e) \wedge (y \vee e) = (x \wedge y) \vee e$ luego

$$(5) \;\; \Delta(U(x) \wedge U(y)) \overset{N59)}{=} \Delta(x \wedge y) \vee \Delta e \overset{(1)}{=} \Delta(x \wedge y).$$

$$U(x \wedge_\Delta y) \overset{(4)}{=} \Delta(x \wedge y) \vee e \overset{N52)}{\leq} (\Delta x \wedge \Delta y) \vee e \overset{(3)}{=} (x \wedge y) \vee e = (x \vee e) \wedge (y \vee e) = U(x) \wedge U(y).$$

$$U(x) \wedge U(y) \overset{(2)}{\leq} \Delta(U(x) \wedge U(y)) \vee e \overset{(5)}{=} \Delta(x \wedge y) \vee e \overset{(4)}{=} U(x \wedge_\Delta y)$$

U4) Si $x \vee e = U(x) = U(y) = y \vee e$ entonces $x = \Delta x = \Delta x \vee \Delta e \overset{N50)}{=} \Delta(x \vee e) = \Delta(y \vee e) \overset{N50)}{=} \Delta y \vee \Delta e = \Delta y = y$.

Dado $y \in S_e$ esto es $e \leq y$, entonces (6) $U(\Delta y) = \Delta y \vee e \leq y \vee e \overset{(1)}{=} y$. Por otro lado (7) $y = (\Delta y \vee e) \wedge \nabla y = U(\Delta y) \wedge \nabla y \leq U(\Delta y)$. De (6) y (7) resulta $U(\Delta y) = y$.

U5) De U3) y U4) resulta que U es un isomorfismo de orden, y como todas las operaciones de las álgebras de Heyting quedan determinadas por la relación de orden, $\Delta(N)$ y S_e son isomorfas.

$\square$

Corolario 6.5 *Si N es un álgebra de Nelson con centro c entonces $\Delta(N)$ y $S_c(N)$ son álgebras de Heyting isomorfas.*

Lema 6.6 *Si N es un álgebra de Nelson con eje e entonces $\Delta(N)$ y $H = [0, \sim e]^*$ son álgebras de Heyting isomorfas.*

Dem. Por el Lema 6.4, $S_e \cong \Delta(N)$ y por el Lema 6.3, $S_e \cong H$. $\square$

Lema 6.7 *Si H es un álgebra de Heyting entonces $H \cong S_c(V(H))$, donde c es el centro de $V(H)$.*

Dem. Como $V(H)$ es un álgebra de Nelson con centro $c = (0,0)$, entonces por el Corolario 6.5, $\Delta(V(H)) \cong S_c(V(H))$ y como por el Lema 4.6, $\Delta(V(H)) \cong H$, tenemos $H \cong S_c(V(H))$. $\square$

Referencias

[1] Andrzej Bialynicki-Birula and Helena Rasiowa. On the representation of quasi-Boolean algebras. *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III*, 5:259–261, XXII, 1957.

[2] Garrett Birkhoff. *Lattice theory*, volume 25 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, R.I., third edition, 1979.

[3] Diana Brignole. On the 5-valued Nelson algebras. *Universidad Nacional del Sur*, preprint:1–12, 1965.

[4] Diana Brignole. Equational characterization of Nelson algebra. *Notre Dame J. Formal Logic*, 10:285–297, 1969.

[5] Diana Brignole. *Equational characterization of Nelson algebra*, volume 9 of *Notas de Lógica Matemática*. Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, 1974.

[6] Diana Brignole and António Monteiro. *Caractérisation des algèbres de Nelson par des égalités*, volume 20 of *Notas de Lógica Matemática*. Instituto de Matemática de Bahía Blanca, Universidad Nacional del Sur, 1964.

[7] Diana Brignole and António Monteiro. Caractérisation des algèbres de Nelson par des égalités. I, II. *Proc. Japan Acad.*, 43:279–283; 284–285, 1967.

[8] Diana Brignole de Martín. Álgebras de Nelson pentavalentes. *Revista de la UMA*, 23:46, 1965.

[9] Roberto Cignoli and Marta S. de Gallego. The lattice structure of some Łukasiewicz algebras. *Algebra Universalis*, 13(3):315–328, 1981.

[10] Roberto Cignoli and António Monteiro. Boolean elements in Łukasiewicz algebras. II. *Proc. Japan Acad.*, 41:676–680, 1965.

[11] Antonio Diego. *Sobre álgebras de Hilbert*, volume 12 of *Notas de Lógica Matemática*. Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, 1965.

[12] J. A. Kalman. Lattices with involution. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 87:485–491, 1958.

[13] Grigore Constantin Moisil. Recherches sur les logiques non-chrysippiennes. *Ann. Sci. Univ. Jassy. Sect. I.*, 26:431–466, 1940.

[14] Grigore Constantin Moisil. Notes sur les logiques non-chrysippiennes. *Ann. Sci. Univ. Jassy. Sect. I.*, 27:86–98, 1941.

[15] Grigore Constantin Moisil. Sur les anneaux de caractéristique 2 ou 3 et leurs applications. *Bull. École Polytech. Bucarest [Bul. Politehn. Bucureşti]*, 12:66–90, 1941.

[16] Grigore Constantin Moisil. Sur les idéaux des algèbres łukasiewicziennes trivalentes. *An. Univ. "C. I. Parhon" Bucureşti Ser. Acta Logica*, 3(1):83–95, 1960.

[17] Grigore Constantin Moisil. *Essais sur les logiques nonchrysippiennes*. Académie de la République Socialiste de Roumanie, 1971.

[18] António Monteiro. Axiomes indépendants pour les algèbres de Brouwer. *Rev. Un. Mat. Argentina*, 17:149–160 (1956), 1955. Publicado también en [41], pp. 1131–1142.

[19] António Monteiro. *Curso de Álgebra de la lógica I.* Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1959.

[20] António Monteiro. *Álgebra de la lógica III.* Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1962. Notas de curso.

[21] António Monteiro. *Álgebras de Łukasiewicz trivalentes.* Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1963. Notas de curso, disponibles como Informe Técnico Interno del Instituto de Matemática de Bahía Blanca, número 83 y [41] pp. 2543–2694.

[22] António Monteiro. Algèbres de Nelson semi-simples. Résumé d'une communication présenté à la UMA en octubre 1962. *Revista de la UMA*, 21:145–146, 1963. Publicado también en [41], pp. 1361–1362.

[23] António Monteiro. Sur la définition des algèbres de Łukasiewicz trivalentes. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roumaine (N.S.)*, 7 (55):3–12, 1963. Publicado también en [41], pp. 1363–1372.

[24] António Monteiro. Construction des algèbres de Nelson finies. *Bulletin de l' Academie Polonaise des Sciences*, 11:359–362, 1963-7. Publicado también en [41], pp. 1357–1360.

[25] António Monteiro. *Construction des algèbres de Nelson finies*, volume 15 of *Notas de Lógica Matemática*. Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, 1964. Publicado también en [41], pp. 1357-1360.

[26] António Monteiro. *Sur la définition des algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, volume 21 of *Notas de Lógica Matemática*. Instituto de Matemática de Bahía Blanca, Universidad Nacional del Sur, 1964. Publicado también en [41], pp. 1363–1372.

[27] António Monteiro. Construction des algèbres de Łukasiewicz dans les algèbres de Boole Monadiques-I. *Mathematica Japonicae*, 12(1):1–23, 1967. Publicado también en Notas de Lógica Matemática 11 y [41], pp. 1407–1429.

[28] António Monteiro. *Les $\mathcal{N}$-lattices linéaires*. Number 15 in Textos e Notas. CMAF, Lisboa, Portugal, 1978. Publicado también en [41], pp. 1731–1739.

[29] António Monteiro. *Les éléments réguliers d'un $\mathcal{N}$-lattice*. Number 15 in Textos e Notas. CMAF, Lisboa, Portugal, 1978. Publicado también en [41], pp. 1721–1729.

[30] António Monteiro. Les éléments réguliers d'un $\mathcal{N}$-lattice. *An. Acad. Brasil. Ciênc.*, 52(4):653–656, 1980. Publicado también en [41], pp. 2039–2042.

[31] António Monteiro. Sur les algèbres de Heyting symétriques. *Portugaliae Mathematica*, 1-4(39):1–237, 1980. Publicado también en [41], pp. 1769–2037.

[32] António Monteiro. Álgebras de Heyting. Informe Técnico Interno 51, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1995. Publicado también en [41], pp. 2061–2096.

[33] António Monteiro. Les algèbres de Nelson semi-simples. Informe Técnico Interno 50, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1995.

[34] António Monteiro. Les $\mathcal{N}$-lattices linéaires. Informe Técnico Interno 43, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1995. Publicado también en [41], pp. 2055–2060.

[35] António Monteiro. Les éléments réguliers d'un $\mathcal{N}$-lattice. Informe Técnico Interno 43, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1995. Publicado también en [41], pp. 2047–2054.

[36] António Monteiro. Les algèbres de Nelson semi-simples. In *Unpublished papers, I*, volume 40 of *Notas de Lógica Matemática*, page 18. Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1996. Publicado también en [41], pp. 2181–2197.

[37] António Monteiro. Notas manuscritas antes de 1980. Halladas por L. Monteiro en los ficheros de la casa de A. Monteiro en Bahía Blanca, 2012.

[38] António Monteiro and Luiz Monteiro. Axiomes indépendants pour les algèbres de Nelson, de Łukasiewicz trivalentes, de De Morgan et de Kleene. Informe Técnico Interno 49, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1995.

[39] António Monteiro and Luiz Monteiro. Axiomes indépendants pour les algèbres de Nelson, de Łukasiewicz trivalentes, de De Morgan et de Kleene. In *Unpublished papers, I*, volume 40 of *Notas Lógica Matemática*, page 13. Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, 1996. Publicado también en [41], pp. 2149–2160.

[40] António Monteiro and Luiz Monteiro. Álgebras de Morgan. Informe Técnico Interno 72, INMABB-CONICET-UNS, 2000. 77 páginas. Publicado también en [41], pp. 2279–2360.

[41] António A. Monteiro. The works of António A. Monteiro. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisbon and The Humboldt Press, London, 2007.

[42] Luiz Monteiro. Axiomes indépendants pour les algèbres de Łukasiewicz trivalentes. *Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P. Roumaine, nouvelle série 7*, 55:199–202, 1963.

[43] Luiz Monteiro. *Axiomes indépendants pour les algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, volume 22 of *Notas de Lógica Matemática*. Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, 1964.

[44] Luiz Monteiro. Sur les algèbres de Łukasiewicz injectives. *Proc. Japan Acad.*, 41:578–581, 1965.

[45] Luiz Monteiro. Sur le principe de détermination de Moïsil dans les algèbres de Łukasiewicz trivalentes. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N.S.)*, 13(61)(4):447–448 (1970), 1969.

[46] Luiz Monteiro. Les algèbres de Heyting et de Łukasiewicz trivalentes. *Notre Dame J. Formal Logic*, 11:453–466, 1970.

[47] Luiz Monteiro. Algèbre du calcul propositionnel trivalent de Heyting. *Fund. Math.*, 74(2):99–109, 1972.

[48] Luiz Monteiro. *Álgebras de Łukasiewicz trivalentes monádicas*, volume 32 of *Notas de Lógica Matemática*. Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, 1974. Doctoral Thesis, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1971.

[49] Luiz Monteiro. *Sur les algèbres de Łukasiewicz injectives*, volume 25 of *Notas de Lógica Matemática*. Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, 1974.

[50] Luiz Monteiro. Algèbres de Post et de Moisil trivalentes monadiques libres. *Logique et Analyse (N.S.)*, 20(79):329–337, 1977.

[51] Luiz Monteiro. M-algèbres de Kleene. *An. Acad. Brasil. Ciênc.*, 53(4):665–672, 1981.

[52] Luiz Monteiro. Álgebras de Boole. Informe Técnico Interno 66, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1998.

[53] Luiz Monteiro and Ignacio Viglizzo. Construcción de álgebras de Nelson. In *Actas del cuarto congreso A. Monteiro*, page 238. Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1997.

[54] H. Rasiowa. $\mathcal{N}$-lattices and constructive logic with strong negation. *Fund. Math.*, 46:61–80, 1958.

[55] Helena Rasiowa. *An algebraic approach to non-classical logics.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1974. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 78.

[56] Andrzej Sendlewski. Nelson algebras through Heyting ones. I. *Studia Logica*, 49(1):105–126, 1990.

[57] Marlow Sholander. Postulates for distributive lattices. *Canadian J. Math.*, 3:28–30, 1951.

[58] Dimiter Vakarelov. Notes on $\mathcal{N}$-lattices and constructive logic with strong negation. *Studia Logica*, 36(1–2):109–125, 1977.

[59] Ignacio Viglizzo. *Álgebras de Nelson.* Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1999. Tesis de Magister en Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1999.

[60] Morgan Ward. Structure residuation. *Ann. of Math. (2)*, 39(3):558–568, 1938.