

I.T.I.
98



INFORME TECNICO INTERNO

Nº. 98

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA
INMABB (UNS - CONICET)



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina

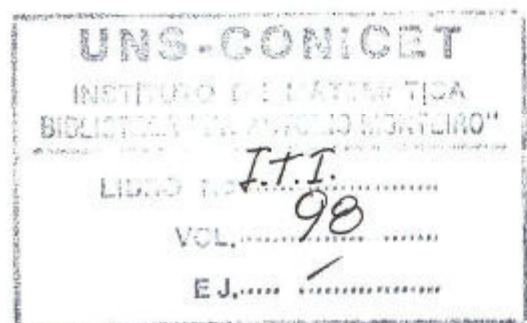


INFORME TÉCNICO INTERNO

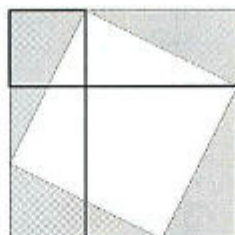
Nº 98

INSTITUTO DE MATEMÁTICA DE BAHÍA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)



Mar 00 4791



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - B8000CPB - BAHIA BLANCA

- 2007 -





INFORME TÉCNICO INTERNO N° 98

Multi – Di – Grafos: 2

Raúl A. Chiappa

Universidad Nacional del Sur

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 2007

Este *Informe Técnico Interno del INMABB – UNS* – tiene por objetivo completar lo programado en ocasión de redactarse el *Informe Técnico Interno Nro 93 – Multi-di-grafos 1*, al cual nos referiremos reiteradamente.

En tales ocasiones, y por razones de brevedad, en lugar de citarlo siguiendo la pauta general , poniendo [Chi06], nos referiremos al mismo indicándolo con 1 seguido de la referencia a citar. Así por caso para remitirnos a su Capítulo 3 pondremos 1 Cap.3.



CONTENIDO (Volumen 1)

PRÓLOGO

Capítulo 1 CONJUNTOS Y RELACIONES BINARIAS 1

Capítulo 2 MULTIGRAFOS Y MULTIDIGRAFOS

2.1	Nociones generales	
2.1.1	Conceptos básicos	9
2.1.2	Algunas configuraciones frecuentes	15
2.1.3	Representaciones topológicas	18
2.1.4	Isomorfismos	21
2.1.5	Submulti-di-grafos	26
2.1.6	k-factores y acoplamientos	30
2.1.7	Recuento de multi-di-grafos	34
2.1.8	Grafos, dígrafos y relaciones binarias	35
2.1.9	Nociones locales	39
2.1.10	Algunas operaciones con multi-di-grafos	46
2.2	Distintas formas de representación	58
2.3	Multi-di-grafos etiquetados (valuados)	67
	Ejercicios	75

Capítulo 3 TRANSITABILIDAD

3.1	Caminos y cadenas.	85
3.2	Distancia y distancia orientada	95
3.3	Algunos entretenimientos	98
3.4	Algunos algoritmos	101
3.5	Circuitos y ciclos	107
3.6	Conexidades	
3.6.1	Conexidad simple	114
3.6.2	Conexidad fuerte y conexidad unilateral	121
3.7	Transitabilidad y matrices	125
3.8	Otros resultados grafo-matriciales	130
3.9	Algoritmo de Roy-Warshall	134
3.10	Caminos elementales	139
3.11	1-difactores, determinantes y permanentes	
3.11.1	1-difactores	145
3.11.2	Determinante y permanente de una matriz	148
	Ejercicios	155

Capítulo 4 PROBLEMA EULERIANO

4.1	Introducción	165
4.2	Caminos y cadenas de Euler	168
4.3	Problema del cartero chino	177
	Ejercicios	179

Capítulo 5 PROBLEMA HAMILTONIANO

5.1	Introducción	185
5.2	Caminos y cadenas de Hamilton	187
5.3	Algunas configuraciones hamiltonianas	195
5.4	Otros resultados sobre hamiltonianos	197
5.5	Condiciones para la hamiltonicidad	
	A) Caso no dirigido	202
	B) Caso dirigido	207
5.6	Problema del viajante de comercio.	209
	Ejercicios	215

Capítulo 6 TRANSITIVIDAD VALUADA

6.1	Introducción	221
6.2	Caminos óptimos	221
6.3	Algunos métodos para hallar caminos óptimos.	225
	6.3.1 Algoritmo de Dantzig	227
	6.3.2 " de Dijkstra	228
	6.3.3 " de Ford	230
6.4	Métodos matriciales	232
	6.4.1 Método Mini-Sum	233
	6.4.2 " de Floyd	235
6.5	Caminos críticos.-- Aplicación P.E.R.T. (M.P.M.) , ,	239
6.6	Rutas Max-Min (Min- Max)	247
	Ejercicios	249

BIBLIOGRAFÍA	255
---------------------	-----

Índice de Términos	299
---------------------------	-----

CONTENIDO (Volumen 2)

Capítulo 7 CONEXIDADES Y CONJUNTOS DESCONECTANTES

7.1	Conexidades no dirigidas y separabilidad	1
7.2	Algunas cuestiones "mini-max"	8
7.3	1-isomorfismo y 2-isomorfismo	10
7.4	Conexidades dirigidas	13
7.5	Periodicidad en fuertemente conexos	17
7.6	Conjuntos desconectantes – Cociclos	20
7.7	Algunas dualidades – Lema de Minty	28
Ejercicios		33

Capítulo 8 ARBOLES Y ARBORESCENCIAS

8.1	Introducción	39
8.2	Arboles	41
8.3	Arboles y coárboles cubrientes	45
8.4	Recuento de árboles	52
8.5	Algoritmos de tipo BFS y de tipo DFS	59
8.6	Arboricidades	62
8.7	Arborescencias	65
8.8	Recuento de arborescencias	71
8.9	Arborescencias y caminos eulerianos	74
8.10	Arborescencias ordenadas (o planas)	80
8.10.1)	orden total por precedencia (o preorden).	82
8.10.2)	" descendencia (o postorden)	83
8.10.3)	" interclusión (o centrado, o simétrico)	84
8.11	Notaciones libres de paréntesis	88
8.12	Arborescencias binarias, y binarias reflejas	90
8.12.1	arborescencias binarias	90
8.12.2	" " estrictas ordenadas	98
8.12.3	" " reflejas	103
Ejercicios		107

Capítulo 9 ARBOLES VALUADOS — ARBORESCENCIAS ETIQUETADAS

9.1	Arboles cubrientes óptimos	117
9.2	Algunos algoritmos para hallar árboles óptimos	120

Algoritmos de Kruskal	121
" de Prim-Jarnik	123
" de Sollin-Borůvka	123
9.3 Algo más sobre árboles óptimos	125
9.4 Codificaciones de menor longitud promedio	128
Método de Huffman	131
Ejercicios	137

Capítulo 10 COLORABILIDAD y PLANARIDAD

10.1 Multigrafos "coloreados"	139
10.2 Problema de los cuatro colores y planaridad	150
10.3 Configuraciones planares	154
10.4 Algunos resultados sobre planaridad	163
10.5 Planaridad y cromaticidad	166
10.6 Algo más sobre planares	170
10.7 Planares duales	173
10.8 Tres "estimadores de no planaridad"	181
Ejercicios	187

Capítulo 11 FLUJOS CANALIZADOS y APLICACIONES

11.1 Introducción	195
11.2 Flujos (canalizados) y tensiones	197
11.3 Flujos $f - s$	203
11.4 Flujos óptimos	205
11.5 Determinación de flujos óptimos	210
11.6 Flujos en grafos	218
11.7 Problemas combinatorios	220
11.8 Problemas de asignación (distribución)	223
11.9 Problema del transporte simple (Hitchcock)	230
11.9.1 Método de la Esquina Nor-Oeste	234
11.9.2 Método del Mínimo Costo (según columnas)	236
11.9.3 Método (Simplex) de aproximaciones sucesivas	239
11.9.4 Método Primal-Dual	244
Ejercicios	251

BIBLIOGRAFÍA	257
--------------	-----

Índice de términos	297
--------------------	-----



CAPÍTULO 7

CONEXIDADES Y CONJUNTOS DESCONECTANTES

En este capítulo volveremos sobre algunas de las nociones vistas en 1 Cap.3, y daremos algunas otras estrechamente ligadas con ellas.

Para más precisiones y deducciones de resultados que se darán podrían consultarse : [Ber70], [BucH90], [CapM78], [CharL79], [Deo74], [Die96], [Fle90], [Har69b], [HarNC65], [Roy69a], [SwaT81], [Tut66/84].

7.1. CONEXIDADES NO DIRIGIDAS y SEPARABILIDAD

Respecto de la noción “conexidad” (ver 1 pág.115) sabemos que :

- Cualquiera sea el multigrafo G , sus componentes conexas G_i , $i \in I$, son disjuntas y están unívocamente determinadas.
- Como cada elemento de G pertenece a una y sólo una de ellas $G = \bigcup_i G_i$.
- G es *conexo* (o *débilmente conexo*) si contiene una única componente conexa, y *disconexo* en caso contrario.

*Para el caso de configuraciones finitas un grafo es conexo si y sólo si sus representaciones topológicas son esquemas conexos en el sentido topológico.
Lo antedicho no puede extenderse al caso de configuraciones infinitas.*

Por ejemplo, el grafo bipartido disconexo que se construye eligiendo como aristas los segmentos horizontales $[p, q]$ con $p = [0, z]$; $q = [1, z]$, para $z \in [0, 1]$ quedaría “representado por el cuadrado unidad”

Sabemos que las configuraciones no discretas carentes de bucles pueden darse por su matriz de incidencia, y que de las conexas cabe una caracterización algebraica. Ella fue demostrada en 1 Prop.3.6.1, y por razones de comodidad es reiterada a continuación.

Proposición 7.1.1

Si G es un multigrafo sin bucles de orden $n \geq 2$, con $m \geq 1$ aristas, y B es su matriz de incidencia entonces G , es conexo si y sólo si los únicos vectores que satisfacen, en $\mathbb{Z}_2$, la igualdad $X.B = 0$ son $X = O_n$ (con n componentes 0) y $X = E_n$ (con n componentes 1).

Extendiendo el corolario de la proposición anterior dado en 1 pág.117, se tiene que :

Si B es la matriz incidencia de un multigrafo de orden n con p componentes conexas no triviales su rango, en Z_2 , es $(n - p)$.

Por otro lado, se sabe que el número de aristas de los grafos conexos sin bucles de orden n está acotado inferiormente por $(n - 1)$ y superiormente por $\binom{n}{2}$.

Extendiendo este resultado se tiene la

Proposición 7.1.2

Si G es grafo sin bucles de orden n , con k componentes conexas y m aristas, se tiene que $n - k \leq m \leq \binom{n - k + 1}{2}$.

Demostración

Cada componente conexa de G con n_i vértices contiene al menos $(n_i - 1)$ aristas, y por lo tanto $m \geq \sum_{i=1}^k (n_i - 1) = n - k$. Además, cada una de ellas contiene a

lo sumo $\binom{n_i}{2}$ aristas, y por lo tanto $m \leq \underline{M} = \sum_{i=1}^k \binom{n_i}{2}$

Veamos que $\underline{M}$ es máximo cuando, excepto uno, todos los valores n_i son 1.

Para esto, suponiendo que en el grafo hay al menos dos componentes con más de un vértice construiremos otro de igual orden y número de componentes, pero con más aristas, procediendo como sigue :

Si G_1 y G_2 son componentes conexas de órdenes $n_1, n_2, 1 < n_1 \leq n_2$ y $\underline{a}$ es vértice de G_1 sean $G'_1 = G_1 - \{\underline{a}\}$ y G'_2 el grafo que se obtiene conectando el vértice $\underline{a}$ con cada uno de los de G_2 .

Ahora se tienen por lo menos $n_2 - (n_1 - 1) \geq 1$ aristas más que antes, y reiterando tanto como sea posible esta operatoria se tiene que el máximo número de aristas posibles con k componentes conexas se alcanza cuando hay $(k - 1)$ componentes de orden uno.

En tal caso, obviamente, la restante tiene $n - (k - 1)$ vértices, y el valor m satisface las cotas indicadas.

Una demostración alternativa se da en [Deo74]-Sec.2.5

En la siguiente tabla se dan (ver [HarP73]) para los órdenes n , $1 \leq n \leq 8$,
 en i) el número de grafos conexos sin ciclos (árboles) ;
 en ii) el de los grafos conexos sin bucles ;
 en iii) el de los grafos conexos sin bucles etiquetados ;
 en iv) el de los digrafos conexos sin bucles

	1	2	3	4	5	6	7	8
i)	1	1	1	2	3	6	11	23
ii)	1	1	2	6	21	112	853	11.117
iii)	1	1	4	38	728	26.704	1.866.256	251.548.592
iv)	1	2	13	199	9.364	1.530.843	880.471.142	1.792.473.955.306

Por otro lado, en [Cad71] se determinó, sin apelar a recurrencias, el número de grafos conexos de orden n con m aristas.

Es claro que :

a) cualquiera sea el multigrafo G , la eliminación de todos sus bucles, como así también la eliminación de todas menos una de las aristas de cada uno de sus conjuntos de aristas paralelas, si los hay, lleva a un grafo sin bucles G^* , que es subgrafo cubriente de G , y tal que ambos tienen sus respectivas componentes conexas inducidas por los mismos conjuntos de vértices.

b) dado un grafo conexo sin bucles distinto del trivial y quitándole vértices (o aristas) se pueden obtener otros que sean desconexos, o el conexo trivial.

Por ello, para extender el concepto que nos ocupa, e introducir una "medida de la conexidad" es habitual considerar, para grafos sin bucles, las siguientes nociones.

Dado un grafo sin bucles G su **conexidad** $\kappa(G)$ (su **arista conexidad** $\kappa'(G)$) es el menor número de vértices (de aristas) que es necesario quitarle para reducirlo a uno desconexo, o al conexo trivial.

Se dice que G es **h -conexo** si $\kappa(G) \geq h$, y **h -arista conexo** si $\kappa'(G) \geq h$.

Así entonces : Un grafo no trivial, sin bucles, es conexo si y sólo si es h -conexo y k -arista conexo, para ciertos $h \geq 1$; $k \geq 1$.

Para justificar el interés en ellas basta ver que el "grado de conexidad" de las redes de comunicación puede servir para estimar su "grado de confiabilidad".

En ocasiones, y en particular en [Deo74]-Sec.4.5, las nociones anteriores se introducen sólo para el caso de los grafos conexos.

Supuesto que G es grafo sin bucles, $\kappa(G) = 0$ y $\kappa'(G) = 0$ si y sólo si G es el grafo trivial, o un grafo desconexo.

Además :

- $\kappa(K_n) = \kappa'(K_n) = n - 1$; $\kappa(K_{p,q}) = \kappa'(K_{p,q}) = \min. \{ p, q \}$
- $\kappa'(G) = 1$ si y sólo si G es conexo con al menos una arista puente.
- Si G es un árbol no trivial $\kappa(G) = \kappa'(G) = 1$.
- Todo h -conexo tiene al menos $(h + 1)$ vértices.

En [Whit32a] se vió que $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$, donde $\delta(G)$ es el menor de los grados de G .

Dichas cotas no pueden mejorarse, pues cualesquiera sean los enteros no negativos $a \leq b \leq c$ existen grafos con $\kappa(G) = a$, $\kappa'(G) = b$, $\delta(G) = c$.
([ChaH68] , [Har69b])

La siguiente condición de suficiencia de [Bon69a] se reencuentra en [CharL79] - Th.5.2, siguiendo ideas de [Boe74],

Sea G un grafo con sucesión gráfica $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$, $n \geq 2$, y h un entero $1 \leq h \leq n-1$. Si para cada entero k no mayor que parte entera de $(n-h+1)/2$, se tiene que $d_k \leq k + h - 2$ implica $d_{n-h+1} \geq n - k$, entonces G es h -conexo.

Corolario

Si $d_1 \geq \lceil (n + h - 2) / 2 \rceil$, G es h -conexo ($\lceil x \rceil$ significa menor entero no menor que x)

Observemos que la función $\lceil x \rceil$ (menor entero no menor que x) suele designarse "ceiling function" y notarse $\lceil x \rceil$, o bien $\{ x \}$.
Por otro lado la función $\lfloor x \rfloor$ (parte entera de x , o equivalentemente : mayor entero no mayor que x) suele ser designada "floor function" y notada $\lfloor x \rfloor$.

Véase que $\lceil x \rceil = - \lfloor -x \rfloor$ y que si x es entero $\lceil x/2 \rceil = \lfloor (x+1)/2 \rfloor$

La caracterización de los 2-conexos como grafos de orden $n \geq 3$ en los cuales para cada par de vértices hay un ciclo elemental que los incluye (ver 1 pág.121) es bien conocida.

Generalizándola se tiene ([Dir60a], [CharL79]-Th.5.8) :

Si G es grafo h -conexo, $h \geq 2$, todo conjunto de h vértices está contenido en un mismo ciclo elemental.

Los grafos C_n , $n \geq 3$, muestran que la recíproca es válida sólo si $h = 2$.

En [Die96] Cap.3 se dan resultados relativos a los 3-conexos, y entre ellos la caracterización de éstos propuesta por Tutte en [Tut61a].

Una reformulación fue dada en [Har69b]-Th.5.7. Ver también [Tut84].

Por otra parte, en [Har69b]-pág.50 se señala que la siguiente caracterización de los h conexos de orden al menos $2.h$, debida a Dirac [Dir60b], puede verse como variación del importante Teorema de Menger, al cual nos referiremos en 7.2

Un grafo de orden $n \geq 2.h$ es h -conexo si y sólo si para todo par de conjuntos disjuntos con h vértices en cada uno, existen h cadenas con extremos en ellos y sin vértices comunes entre sí.

Otras caracterizaciones de los h -conexos y de los h -arista conexos fueron dadas en [Lick73a/73b]. Ver también [Hal69a/69b], [Les74], [Lick69].

Los bipartidos completos $K_{p,q}$ con $p < q$, p arbitrariamente grande, muestran la existencia de grafos no hamiltonianos aún entre los de "conexidad elevada".

Entre los grafos sin bucles de orden n con m aristas, la máxima conexidad (arista conexidad) es cero si $m < n - 1$ y $\lfloor 2.m / n \rfloor$ si $m \geq n - 1$. ([Ber70], [Har62], [Har69b].Th5.4)

En [AlaM71] se acotaron la suma y el producto de las conexidades y de las arista conexidades de los pares de grafos respectivamente complementarios.

En [BeiPl67] se da una condición necesaria y suficiente para que un grafo que tiene 1-factores admita más de uno, y se muestra que en tal caso, si G es un h -conexo admite al menos h de tales subgrafos.

En [Zaks71] se mejora este resultado, viendo que entonces el número de los 1-factores es al menos $h \cdot (h - 2) \cdot (h - 4) \cdot \dots \cdot a$; con $a = 2$ ($a = 1$) si G es de orden par (impar)

En [Edm64] se demostró que la sucesión gráfica $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ es la de un grafo sin bucles, k -arista conexo, $k \geq 2$, si y sólo si para cada i se tiene $d_i \geq k$

Una nueva demostración dada en [WanK74] fue reproducida en [SwaT81]-Th.8.8.

En [CharSt69] y en [Zam70] se dedujeron relaciones entre las conexidades y las arista conexidades de los grafos con la de sus adjuntos.

De entre los algoritmos para evaluar la *vértice conexidad* se destacan los dados en [Din70], [Even75] y [EvenT75] que recurren a la noción "flujo" (ver Cap.11). En [Galil80] se hacen observaciones sobre sus respectivas implementaciones.

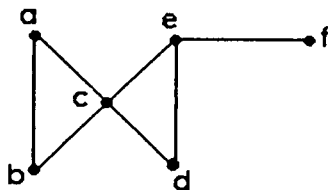
Citemos también al dado en [Zvi80], y al de [HopT73] (ver [Swat81].Cap.14.4) para hallar componentes biconexas.

También se han estudiado nociones similares a las anteriores, pero aplicadas a configuraciones dirigidas. Al respecto, consultar [GellH71]

En 1 pág.120 hemos convenido en denominar **vértice de corte** de un multigrafo G a todo vértice v tal que $G - \{v\}$ tenga más componentes conexas que G , y se ha visto que todo conexo con al menos tres vértices tiene al menos dos que no son de corte.

Los grafos disconexos, y también los conexos con vértices de corte se dicen **separables**. Los restantes son **no separables** y de éstos, los maximales se dicen **bloques**.

Así el grafo



es separable, pues sus vértices c, e , son de corte. Los subgrafos inducidos, respectivamente, por los vértices $\{a, b, c\}$; $\{c, d, e\}$; $\{e, f\}$ son sus bloques.

De otra forma G es no separable si y sólo si todos sus subgrafos (propiamente dichos) tienen dos vértices en común con su complementario.

La siguiente sucesión da el número de bloques con a lo sumo nueve vértices : $1 \setminus 1 \setminus 1 \setminus 3 \setminus 10 \setminus 56 \setminus 468 \setminus 7.123 \setminus 194.066$. Ella difiere de la dada en [HarP73] en su primer valor, pues en este trabajo no se incluye al grafo trivial entre los no separables.

Véase que :

- $\kappa(G) = 1$ si y sólo si $G = K_2$, o bien G es conexo separable.
- todo K_n , $n \geq 1$ es bloque.
- todo conexo separable tiene al menos tres vértices, y submultigrafos propios que son bloques unívocamente determinados y sin aristas comunes.

Constate que a las caracterizaciones indicadas en 1Ejer.3 - 29) se les pueden agregar :

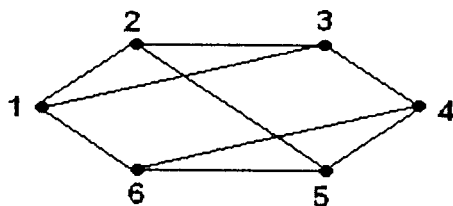
- G es 2-conexo si y sólo si,
- G es conexo de orden $n \geq 3$ y carece de aristas puente.
- G es conexo sin vértices de corte.
- G es no separable de orden $n > 2$.
- G es bloque de orden $n > 2$.

A las precedentes extensiones del concepto "grafo conexo" cabe agregar la siguiente, que sólo citaremos en forma ocasional.

Un grafo se dice **completamente conexo** (*panconnected*) si cada par de vértices está conectado por cadenas elementales de longitud L , cualquiera sea L menor que el orden del grafo y mayor o igual que la distancia entre los vértices en cuestión.

Todo completamente conexo, es completamente hamiltoniano.

La carencia de cadenas de longitud dos con extremos en los vértices 1, 6. del siguiente grafo de orden seis, que pertenece a la familia indicada en [CharL79] pg.191, muestra la falsedad de la afirmación recíproca.



No obstante, en [Fle76] se mostró que la recíproca es válida para los grafos de la forma G^2 .

En [Wills77] (ver [CharL79]-Th.6.9) se demostró que :

Si G es un grafo sin bucles de orden $n \geq 4$, y en cada uno de sus vértices inciden al menos $(n + 2) / 2$ aristas, entonces G es completamente conexo.

Tanto el cubo de los grafos conexos, como el cuadrado de los 2-conexos, son completamente conexos. [AlaW75], [CharHJ74], [FauS76].

En [AlaW75] se dieron, además, tres condiciones suficientes para que un grafo sea completamente conexo. Ellas son similares a las de suficiencia para la existencia de ciclos hamiltonianos de Dirac y Ore.

7.2. ALGUNAS CUESTIONES "MINI - MAX"

En 1 (pág.32 y 65) hemos enunciado un par de teoremas equivalentes entre sí, debidos a König [Kön31] y a Egerváry [Eger31], y relativos a propiedades de carácter "mini-max" que aparecen en problemas de acoplamiento en grafos bipartidos. Ellos son, además, equivalentes del siguiente

Teorema de Existencia de Sistemas de Representantes [HallP35]

Sean $I = \{1, 2, \dots, n\}$ un conjunto finito de índices, y S_i , $i \in I$, una familia de subconjuntos de cierto conjunto S .

Una condición necesaria y suficiente para la existencia de un *sistema de representantes* $x_i \in S_i$; $x_i \neq x_j$; es que se satisfaga la condición:

Para cualquier elección de k ($1 \leq k \leq n$) índices distintos, la reunión de los subconjuntos $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k}$ contiene al menos k elementos distintos

Por ejemplo, dado $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la familia de subconjuntos $S_1 = \{1, 2, 3\}$, $S_2 = \{1, 2, 3\}$, $S_3 = \{1, 3, 5\}$, $S_4 = \{3, 4, 5\}$, $S_5 = \{1, 3, 4, 5\}$ los elementos 1, 2, 5, 4, 3 pueden elegirse, en ese orden, como representantes de los respectivos subconjuntos de la familia dada

Extensiones del mismo se dieron en [Dul58], [MannR53], [MenD58], [MirP66]. Ver también [HofK56a/56b], [Lint74], [Mirs71], [Rys63].

Algunas deducciones de los resultados citados siguen razonamientos combinatorios ([BruR91], [Brya93], [Die96], [HallM67]) pero otras recurren a la noción "flujo canalizado" que consideraremos en Cap.11.

Referencias relativas a esta temática pueden hallarse en [Chi93]-Cap.5 donde, siguiendo ideas de [FordF62], se dedujeron otros varios resultados de carácter combinatorio.

Los teoremas a que hemos hecho referencia son también equivalentes del importante *Teorema de Menger*, del cual se han dado, entre otras, las dos siguientes formalizaciones.

I) [Meng27]

Si u, v , son vértices no adyacentes, el número mínimo de vértices cuya eliminación los desconecta, coincide con el número máximo de cadenas que los conectan y sólo tienen en común sus vértices extremos u, v .

II) [Whit32a]

Un grafo es h -conexo, $h \geq 1$ si y sólo si todos sus pares de vértices u, v , pueden conectarse por al menos h cadenas que sólo tienen en común sus extremos u, v .

La equivalencia indicada resulta de lo siguiente :

- 1) los citados resultados de König y de Egerváry son caso particular del de Menger, para el caso de grafos bipartidos.
- 2) según se indica en [FordF62] Cap.2, el teorema de Menger fue deducido en [Kön36] a partir de [Kön31].

En [Buch90] y en [CharL79]-Cap.5 se reproduce la demostración del resultado de Menger dada por Dirac [Dir66], y a partir de éste se obtiene la precedente caracterización de Whitney de los grafos h -conexos.

Algo similar ocurre en [Har69b] donde además se analizan otros numerosos e interesantes resultados "Tipo Menger".

Las demostraciones del teorema de Menger dadas a [Grüw38] y [Pym69] pueden verse en [Die96]-Cap.3. Otra es la dada en [McC84].

También podrían consultarse [Ber58/70], [BonM76], [Dir63a] y [SwaT81].

De los precedentes resultados caben "versiones arista".

Así por ejemplo, en [EliFS56] y [FordF54] (ver [Buch90], [CharL79]) se demostraron :

Para cualesquiera dos vértices de un grafo, el número máximo de cadenas aristas disjuntas que los tienen por extremos coincide con el mínimo número de aristas cuya eliminación los desconecta.

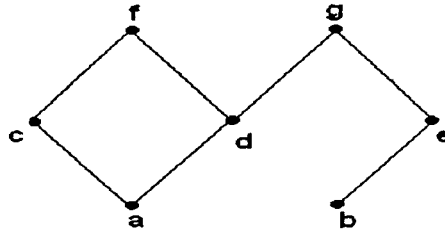
Un grafo no trivial es k -arista conexo si y sólo si todos sus pares de vértices pueden conectarse por al menos k cadenas arista disjuntas.

Esta temática también fue analizada en [Woo78b], donde además de incluir a [Wood78a], reproducir las demostraciones del Teorema de Menger dadas en [Pym69] y en [Ore62] , y de considerar su extensión al caso infinito, se hace una profunda revisión de resultados de "tipo mini-max".

De entre ellos creemos de interés citar el siguiente, debido a Diltworth [Dil50].

En un conjunto finito ordenado, el número mínimo de conjuntos de elementos comparables dos a dos ("cadenas") en que puede descomponerse, coincide con el número máximo de elementos incomparables dos a dos ("anticadenas").

Así por ejemplo, en



el mayor número de elementos incomparables dos a dos es tres, (por ejemplo : c, d, e) y el conjunto dado puede descomponerse en tres "cadenas".(por ejemplo $a, c, f \parallel d, g \parallel b, e$.) pero no en menos.

Otra posible descomposición en "cadenas" es : $a, c, f \parallel d \parallel b, e, g$.

El teorema de Dilworth, que enuncia una importante propiedad de los conjuntos ordenados finitos, fue generalizado de diferentes formas.

A este respecto consultar [Ful56], [GreK76], [HofS77] y [Saks86].

Su demostración inicial, hecha por inducción, está reproducida con leves modificaciones en [HallM67]-Th.5.1.1. Ver también [Perl63].

Otras fueron obtenidas en [DanH56] recurriendo a propiedades de la Programación Lineal, y en [FordF62] a partir del Teorema Fundamental de los Flujos y del Teorema de König–Egerváry .

Esta última puede reencontrarse en [Chi93]-Cap.5-4 donde se siguieron ideas de Ford-Fulkerson. De esta demostración resulta una confirmación parcial de la equivalencia entre los Teoremas de Dilworth y de König .[Chi93]-pág.106/107

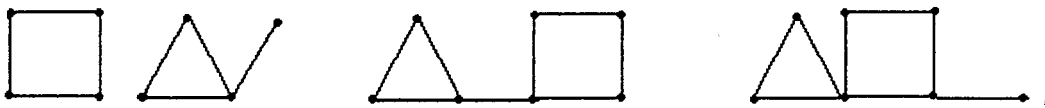
7.3. 1-ISOMORFISMO y 2-ISOMORFISMO

A continuación consideraremos dos conceptos que extienden el de isomorfismo.

Ellos fueron introducidos por Whitney [Whit32a/33a] y pueden darse a partir del de bloque, o del de vértice de corte.

Dos multigrafos son **1-isomorfos** si ambos admiten una misma descomposición en bloques.

En particular, son 1-isomorfos tanto los grafos $K_{1,h}$ y P_{h+1} como los siguientes



Dos multigrafos isomorfos son 1-isomorfos, pero la recíproca sólo se puede afirmar si carecen de vértices de corte; es decir, sólo si son bloques.

Si a es un vértice de corte del conexo G , duplicándolo en a' , a'' , y conviniendo que todos los vértices de cada uno de los bloques de G incidentes en a conservarán, respecto de a' , o bien respecto de a'' , la misma relación de adyacencia que tienen respecto de a ; y que además se conservarán las restantes relaciones de incidencia, se determinan dos conexos G' , G'' , que diremos *obtenidos de G por desdoblamiento de a* .

La identificación de a' y de a'' permitiría reconstruir G a partir de G' y de G'' . Se deja al lector visualizar lo dicho aplicándolo a los multigrafos anteriores.

Esto induce una forma de construir multigrafos 1-isomorfos, y lleva a la siguiente forma alternativa de introducir la noción que nos ocupa.

Dos multigrafos son **1-isomorfos** si son isomorfos, o pueden devenir isomorfos luego de aplicar tantas veces como sea necesario, desdoblamientos, o identificaciones en vértices de corte.

La noción de "1-isomorfismo" se extiende a la de "2-isomorfismo" que es de utilidad en la teoría de redes eléctricas, y aparece también en ocasión de considerar los "duals de grafos planares" (ver pág.173).

Con vistas a esta noción, y supuesto que G contiene dos subgrafos G_1 , G_2 , con sólo el par de vértices a , b , en común, diremos que el conjunto $\{a, b\}$ es un **par de corte**.

Ahora, y procediendo en forma similar a la que lleva a generar 1-isomorfos :

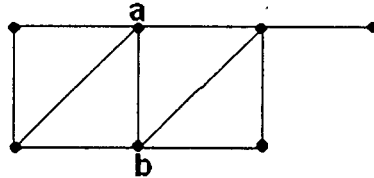
- 1)) si $\{a, b\}$ es un par de corte de G , desdoblado a en a' , a'' , y b en b' , b'' , substituyendo incidencias de aristas de G_1 en a (en b) por incidencias en a' (en b') y de aristas de G_2 en a (en b) por aristas incidentes en a'' (en b'') podrán construirse pares de grafos G' , G'' , sin vértices comunes.
- 2)) luego de ello "se identificará el par de corte".

Notemos que caben *dos formas de efectuar tal identificación*.

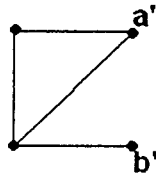
A saber :

- identificando a' con a'' y b' con b'' en cuyo caso se recompone G como unión de G' y G''
- identificando a' con b'' y a'' con b' .

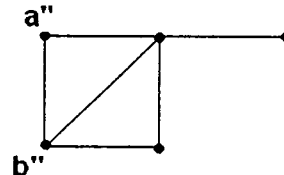
Así por ejemplo, dado G y elegidos



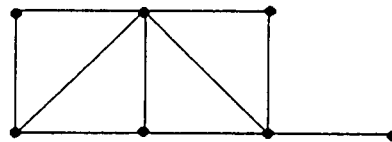
los subgrafos G_1



G_2



según se identifique el "par de corte a, b " se reencontrará G , o se construirá



Dos multigrafos G_1 y G_2 se dicen **2-isomorfos** si son 1-isomorfos, o uno de ellos se obtiene a partir del otro por sucesivos desdoblamiento o identificaciones, de pares de corte.

Para observaciones sobre los grafos 2-isomorfos y sobre la forma de construirlos indicada por Whitney puede consultarse [Iri69] Cap.III.

De las definiciones resulta que dos multigrafos isomorfos son 1-isomorfos y que éstos son 2-isomorfos. Las respectivas recíprocas son falsas.

Dos multigrafos se dicen "*ciclo elementales correspondientes*" si existe una biyección Φ entre sus aristas, y otra Ψ entre sus ciclos elementales, tales que si la u_i pertenece al ciclo elemental C_j entonces $\Phi(u_i)$ pertenece a $\Psi(C_j)$.

Esta noción puede adaptarse al caso dirigido suponiendo además que los arcos adelante de C_j se corresponden con los arcos adelante de $\Psi(C_j)$.

Puesto que todas las aristas de cada ciclo elemental pertenecen a un mismo bloque los multi-di-grafos 1-isomorfos son ciclo elementales correspondientes.

El siguiente resultado, que se considera el más importante de los relacionados con los multigrafos 2-isomorfos es debido a Whitney [Whit33a].

Dos conexos son 2-isomorfos si y sólo si son ciclo elementales correspondientes.

Esto admite la siguiente reformulación.

Dos configuraciones conexas son 2-isomorfos si y sólo si para una adecuada ordenación de sus filas y sus columnas ambas tienen una misma matriz ciclo elemental.

Nuevas demostraciones de este resultado fueron dadas en [Kelm87] y [Wag85].

Del mismo se propusieron, en [SwaW92] una “versión vértice”, y en [Tho82]. otra válida para grafos infinitos.

Nótese que dos redes eléctricas cuyos grafos representativos son 2-isomorfos y tienen un mismo “operador eléctrico” en los tramos que se corresponden, tienen igual comportamiento.

La noción “cociclo”, a introducir en 7.6 permitirá obtener resultados “duales” de los precedentes.

7.4. CONEXIDADES DIRIGIDAS

También para el caso dirigido caben distintos “tipos de conexidad”.

Recordemos que las dadas en 1 Cap.3 responden a las siguientes definiciones :

- un multidigrafo se dice *unilateralmente conexo* (*u-conexo*) si es trivial, o para cada par de vértices existe al menos un camino que lleva de uno al otro
- un multidigrafo se dice *fuertemente conexo* (*f-conexo*) si es trivial, o cualesquiera sean los vértices a, b , $a \neq b$, existen caminos $a \rightarrow b$, $b \rightarrow a$ (existe al menos un circuito que los contiene).
- un multidigrafo se dice *conexo* (*disconexo*), si lo es su sostén.

Así entonces, y supuesto que $G = (V, \Gamma)$ es digrafo no trivial, podemos afirmar :

- G es f-conexo si y sólo si :
 - a) contiene un camino cubriente cerrado no necesariamente simple que incluye a todos los arcos.
 - b) $\Gamma(A) \subseteq A$ se cumple sólo para $A = \emptyset$, ó $A = V$.
- G es u-conexo si y sólo si :
 - c) contiene al menos un camino cubriente, no necesariamente simple.
 - d) su clausura transitiva contiene un torneo
- G es conexo si y sólo si :
 - e) contiene una cadena cubriente, no necesariamente orientable.
 - f) su clausura simétrica $G^{sim} = (V, \Gamma \cup \Gamma^{-1})$ es un digrafo f-conexo.

Los dos siguientes resultados admiten demostraciones similares. Sólo daremos una de ellas.

Proposición 7.4.1

Si G es un digrafo sin bucles de orden $n \geq 2$ con al menos $1 + (n - 1)^2$ arcos, G es fuertemente conexo.

Demostración

La tesis se cumple para $n = 2$, y también si en el G en cuestión existe un vértice en el cual inciden $2.(n - 1)$ arcos.

En caso contrario, y cualquiera sea el vértice x , en $G - \{x\}$ existen por lo menos $1 + (n - 1)^2 - (2.(n - 1) - 1) = 1 + (n - 2)^2$ arcos, y entonces, por hipótesis inductiva $G - \{x\}$ es f-conexo.

Por otra parte, $G - \{x\}$ contiene a lo sumo $(n - 1).(n - 2)$ arcos, y en x inciden al menos $(1 + (n - 1)^2) - ((n - 1).(n - 2)) = n$ de ellos.

En consecuencia, y como tanto el grado positivo de x , como su grado negativo es a lo sumo $(n - 1)$ resulta que en G hay arcos que tienen en x su vértice final, y otros que lo tienen por extremo inicial.

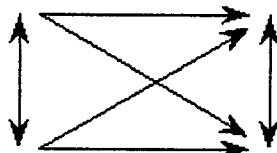
De esto y la fuerte conexidad de $G - \{x\}$ resulta la de G .

Proposición 7.4.2

Todo digrafo de orden $n > 1$ que carece de entradas, salidas, o bucles, y tiene al menos $(n - 1)^2$ arcos es fuertemente conexo.

Del digrafo constituido por un vértice entrada que es conectado a todos los del simetrizado de K_{n-1} resulta que la cota dada en la Prop.7.4.1 no es mejorable.

El siguiente grafo de orden cuatro muestra que tampoco es mejorable la cota dada en la Prop.7.4.2.



Las proposiciones anteriores pueden extenderse a digrafos arco valuados y admiten la siguiente traducción en términos matriciales.

Si P es una matriz de orden n que tiene fuera de su diagonal principal más de $(n-1)^2$ componentes no nulas, P es matriz precedencia de un digrafo arco valuado de orden n fuertemente conexo.

Además, y visto que un digrafo es fuertemente conexo si y sólo si su matriz precedencia es irreducible (1 pág.132) se tiene que :

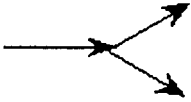
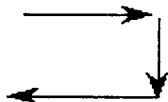
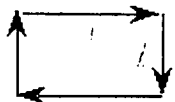
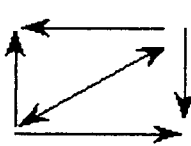
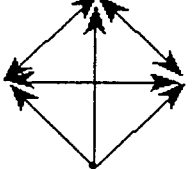
| Si P es una matriz de orden n , sin líneas nulas y con más de $(n-1)^2$ componentes no nulas fuera de su diagonal principal, P es irreducible.

Algunos de los resultados anteriores llevan a observar que “el mayor grado de conexidad” que pueden alcanzar los digrafos de cierto orden está relacionado con el número de aristas distintas de bucles que contienen.

En la siguiente tabla, extraída de [Buch90] y [HarNC65] se dan las cotas correspondientes.

digrafo de orden n	número de arcos distintos de bucles	
	mínimo	máximo
disconexo	0	$(n-1).(n-2)$
conexo	$(n-1)$	$(n-1).(n-2)$
u-conexo	$(n-1)$	$(n-1)^2$
f-conexo	n	$n.(n-1)$

Que las cotas indicadas no son mejorables puede deducirse a partir de los siguientes digrafos de orden cuatro.

	disconexo	conexo	u-conexo	f-conexo
minimo	$4.K_1$			
maximo	$+ \begin{matrix} K_1 \\ K_3^s \end{matrix}$			K_4^s

Los métodos propuestos para determinar las componentes fuertemente conexas de los dígrafos son muy numerosos.

Uno de ellos, basado en que las componentes f-conexas del digrafo $G = (V, \Gamma)$ son los subdígrafos inducidos por los conjuntos de vértices $\vec{\Gamma}(a) \cap \vec{\Gamma}^{-1}(a)$ fue explicitado en 1 pág. 122).

De los restantes sólo mencionaremos los propuestos en [Schi83] y [Schn78].

Este último, que está basado en el de Tarjan [Tar72] (ver [SwaT81] Cap14.4.2) tiene, según referencias, una eficacia comparable con los dados en [Ebe81], o en [EveK77], y al que hemos desarrollado en 1 Cap.3 basado en el Algoritmo de Roy-Warshall.

Recordando que hemos convenido admitir que cada vértice es accesible desde si mismo, aún cuando no sea soporte de bucles, otras de las conexidades dirigidas estudiadas son las que siguen.

Un multidigrafo se dice **casi unilateralmente conexo hacia atrás** (**hacia adelante**) si es trivial o para cada par de vértices hay al menos uno, no necesariamente distinto de ellos, desde el cual ambos son accesibles (que es accesible desde ambos).

Los que son casi unilateralmente conexos hacia adelante y también hacia atrás se dicen **casi unilateralmente conexos** (**c-u-conexos**).

Los unilateralmente conexos son casi unilateralmente conexos. El digrafo de arcos (a, b) , (a, c) , (b, d) , (c, d) muestra que la recíproca es falsa.

Volviendo sobre lo indicado en 1 pág.88 (idem en Ejerc.3-16) y 7.16) puede afirmarse que :

- G es casi unilateralmente conexo hacia atrás (adelante) si y sólo si contiene al menos un vértice raíz (antirraíz).

Los digrafos casi unilateralmente conexos hacia atrás (adelante) están estrechamente ligados con las arborescencias (antiarborescencias) que estudiaremos en Cap. 8.

Los *casi unilateralmente conexos (hacia atrás)* son designados "*quasi fortement connexes*" en [Ber70], [GonM79], [Roy62/69a] y "*quasi strongly connected*" en [SwaT81].

No deben ser confundidos con los "*semi fortement connexes*", vocablo utilizado en [Roy62/69a] para designar a los unilateralmente conexos.

7.5. PERIODICIDAD EN FUERTEMENTE CONEXOS

En esta sección volveremos sobre algunos resultados vistos en 1 Cap.3.8.

A tal efecto recordemos que

- si una matriz es *primitiva*, el multidigrafo que define es fuertemente conexo. Del digrafo $(a, b), (b, c), (c, b), (b, a)$ resulta que la recíproca es falsa.
- si su *índice de primitividad* es k , desde cada uno de sus vértices se puede acceder a todos, incluido el de partida, con caminos de longitud k' , $k' \geq k$.

En consecuencia, supuesto que los vértices son "centros de emisión de mensajes", que éstos se propagan indefinidamente, y que para "recorrer un arco" es necesario una unidad de tiempo resulta que :

Si el índice de primitividad de $P(G)$ es k , todo mensaje emitido en el instante $t = 0$ en alguno de los vértices de G será recibido, simultáneamente en todo vértice de G , incluido el de partida, en cada tiempo $k' \geq k$.

En [Low13] se demostró que el índice de primitividad de las matrices de orden n está acotado superiormente por $1 + (n - 1)^2$.

La matriz precedencia del digrafo de arcos $(a, b), (b, c), (c, a), (c, b)$ permite afirmar que esta cota no es mejorable.

Más precisamente, se demuestra (ver [BusS65]-Th.5.8) que :

Si s es la menor de las longitudes de los circuitos elementales, el índice de primitividad es a lo sumo $n + s$. $(n - 2) \leq 1 + (n - 1)^2$.

Por otra parte, se sabe que

- un multidigrafo G es fuertemente conexo si y sólo si matriz precedencia es irreducible.

En consecuencia, toda matriz primitiva es irreducible, pero la recíproca sólo es válida en casos particulares.

Más precisamente, se demuestra (ver [BusS65] Th.5 -7) que :

Si G es fuertemente conexo no trivial, su matriz precedencia es primitiva si y sólo si el máximo común divisor de las longitudes de sus caminos cerrados es la unidad.

Este máximo común divisor suele ser designado *índice de imprimitividad*.

Por lo tanto .

Un fuertemente conexo no trivial tiene matriz de precedencia *primitiva* si y sólo si su *índice de imprimitividad* es la unidad.

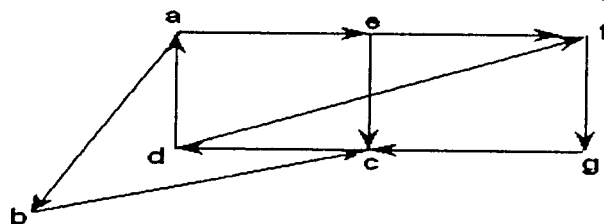
Poco más arriba hemos observado que el *índice de primitividad* resuelve por la afirmativa la pregunta

Dado un digrafo, ¿ hay algún valor L tal que partiendo de un vértice arbitrario a pueda llegarse a todos los restantes y al propio a con caminos de longitud L ?

Veamos ahora que el *índice de imprimitividad* permite solucionar la siguiente.

¿ Existe en los dígrafos fuertemente conexos alguna relación entre las longitudes de sus caminos cerrados ?

Para ejemplificar resultados consideraremos el siguiente digrafo.



El mismo contiene, entre otros, los caminos cerrados : $a, b, c, d, (a) \parallel a, e, c, d, (a) \parallel a, b, c, d, f, g, c, d, (a) \parallel a, e, f, g, c, d, (a) \parallel f, g, c, d, (f)$ cuyas respectivas longitudes son : 4, 4, 8, 6, 4.

Como sus caminos cerrados elementales tienen longitud 4, ó 6, todos sus posibles caminos cerrados tendrán longitud $L = 4 + 2.k$, para algún entero $k \geq 0$.

Reformulando resultados de [BruR91]-Cap3-4, [DulM67/69] y [KemS60], que se pueden reencontrar en [Chi95] resulta que :

Si G es un digrafo fuertemente conexo, no trivial, y $d \geq 1$ es su *índice de imprimitividad*, sus vértices quedan particionados en d clases no vacías $V_1, V_2, \dots, V_d$; sus árcos resultan de la forma (x, y) , $x \in V_i$; $y \in V_{i+1}$ (índices módulo d). y los caminos $x \rightarrow y$ (no necesariamente $x \neq y$) con $x \in V_i$; $y \in V_j$ tienen longitudes congruentes con $j - i$ (mód. d)

Por ello :

Si se supone que para recorrer cada arco es necesaria una unidad de tiempo, cada mensaje enviado desde cierto vértice de la clase V_i alcanza en tiempos T sólo a vértices de la clase V_j , con $j - i = T$ (mód. d).

Si además T es suficientemente grande el "mensaje" alcanzará simultáneamente a todos los vértices de una misma clase.

En la tabla que sigue se resume información sobre la existencia, en el digrafo anterior de caminos $a \rightarrow x$, con longitudes L , $1 \leq L \leq 7$.

	0	1	2	3	4	5	6	7
a	#				#		#	
b		#				#		#
c			#		#		#	
d				#		#		#
e		#				#		#
f			#		#		#	
g				#		#		#

Para este digrafo $d = 2$, y sus vértices pueden partirse en dos clases.

Una de ellas es la determinada por los vértices finales de los caminos $a \rightarrow x$ de longitud par no menor que 4, y la otra la integrada por los que son extremo final de caminos de longitud impar no menor que cinco.

Estas clases son, respectivamente, $\{a, c, f\}$ y $\{b, d, e, g\}$.

Si el índice de imprimitividad es $d = 1$; es decir, si las longitudes de los circuitos a considerar son primas entre sí, la matriz precedencia P es primitiva y todos los vértices quedan en una misma clase.

En este caso, si T es mayor o igual que el índice de primitividad de P el mensaje será recibido simultáneamente en todo vértice de G .

Para ejemplificar esto basta volver al digrafo dado en 1 pág.131, o al de arcos (a,b) , (b, c) , (c, b) , (c, a) con índice de primitividad cinco y de imprimitividad uno.

En la tabla que sigue se indican los tiempos en los que un mensaje emitido desde a en $t = 0$ sería recibido en los diferentes vértices.

	0	1	2	3	4	5
a	#			#		#
b		#		#	#	#
c			#		#	#

Análogamente, los tiempos en los que mensajes emitidos en b (en c) en $t = 0$ alcanzarían los distintos vértices se indican en

	0	1	2	3	4
a			#		#
b	#		#	#	#
c		#		#	#

	0	1	2	3
a		#		#
b		#	#	#
c	#		#	#

7.6. CONJUNTOS DESCONECTANTES - COCICLOS

Dado un multi-di-grafo G numerosos problemas llevan a la necesidad de considerar conjuntos de vértices, o de aristas, cuya eliminación modifique la conexión de G .

Algunas cuestiones sobre este tema fueron vistas en 7.1.

Otras lo serán a continuación.

Se dice **conjunto arista desconectante** de un multi-di-grafo $G = (V, U)$ a todo $U' \subseteq U$ tal que $(V, U - U')$ tiene más componentes conexas que G .

Es claro que :

- 1) Toda configuración no discreta admite conjuntos arista desconectantes.
- 2) Si G es grafo con m aristas distintas de bucles, G contiene a lo sumo $2^m - 1$ conjuntos arista desconectantes.
Estos son exactamente $2^m - 1$ si y sólo si G carece de ciclos.

Seguidamente introduciremos una clase particular de conjuntos arista desconectantes que tienen, según veremos, propiedades duales de otras válidas para ciclos simples.

Dados un multi-di-grafo no discreto $G = (V, U)$ y un conjunto $\emptyset \neq A \subset V$ se dice **cociclo** (de soporte A) al conjunto U_A de arcos (o de aristas) de G con uno de sus extremos en A y el restante en $V - A$.

Obviamente :

- U_A carece de bucles.
- Cualquiera sea el vértice x , el conjunto de las aristas distintas de bucles allí incidentes constituyen un cociclo.
- Toda arista puente es un cociclo.
- G es acíclico si y sólo si cada una de sus aristas es un cociclo.
- Todo cociclo es un conjunto arista desconectante. La recíproca es falsa.
- Todo conjunto arista desconectante contiene al menos un cociclo.

Elegido un conjunto de vértices, el cociclo que lo tiene por soporte está unívocamente determinado, pero la recíproca es falsa.

Más precisamente :

Dado un cociclo "su soporte" está definido a menos de complementariedad, y esto sólo si G es conexo.

Pues de lo contrario, si G tiene dos componentes conexas (V_1, U_1) , (V_2, U_2) , supuesto que $A = B \cup C$, $B \subset V_1$, $C \subset V_2$ se tiene que tanto $B \cup C$ y $B \cup \bar{C}$, como sus respectivos complementos generan el mismo cociclo.

Para el caso dirigido convendrá distinguir los arcos de U_A con vértice inicial en A de aquellos otros con vértice inicial en su complemento.

En tal caso notaremos $U_A = U_A^+ \cup U_A^- = (A, \bar{A}) \cup (\bar{A}, A)$

Si alguno de los conjuntos U_A^+ , U_A^- , fuera vacío, U_A se diría **cocircuito**.

La elección de A como conjunto soporte del cociclo U_A permite partir sus arcos en los de la forma (p, q) con $p \in A$, que diremos *arcos adelante*, y en los de la forma (p, q) con $q \in A$, que diremos *arcos atrás*.

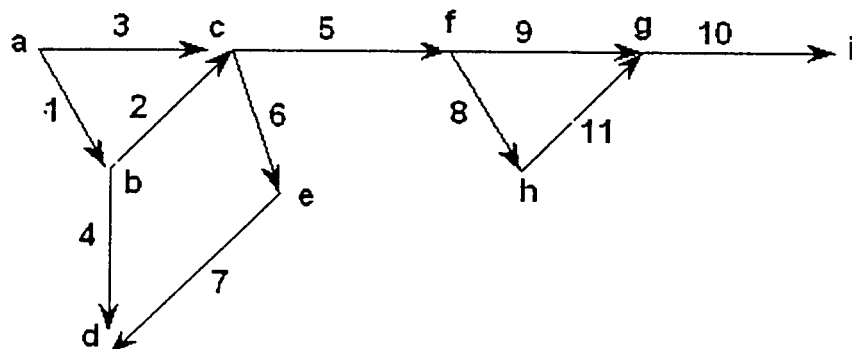
Por ello la elección de A , o de su complementario, como soporte del cociclo U_A puede interpretarse como *asignándole sentido de recorrido* (u *orientación*).

Resumiremos la situación diciendo que : U_A y $U_{\bar{A}}$ están recorridos en sentidos opuestos, y en forma similar a lo hecho para el caso de los ciclos convendremos que dado U_A sus arcos adelante (atrás) serán indicados u ($\tilde{u}$)

Obviamente, para el caso no dirigido la clasificación en arcos adelante y arcos atrás carece de sentido.

Diremos que U_A es **cociclo elemental** si y sólo si el número de componentes conexas de (V, U) , y el de $(V, U - U_A)$ difieren en una unidad.

Así, dado



Si $A = \{a, b\}$, $U_A = U_A^+ = \{2, 3, 4\}$ es un cocircuito elemental.

Si $A = \{a, b, d\}$, $U_A^+ = \{2, 3\}$, $U_A^- = \{7\}$ y U_A es un cociclo elemental.

Si $A = \{a, c, e, g, h\}$ $U_A = \{1, \tilde{2}, 5, 7, \tilde{8}, \tilde{9}, 10\}$ es cociclo no elemental.

Los cociclos suelen decirse "coupe", "cut" o "edge cut", y los cociclos elementales "cut set" o "bond".

De las respectivas definiciones se deducen :

- i) Todo multigrafo no discreto contiene cociclos elementales.
- ii) Si un cociclo es elemental todas sus aristas pertenecen a una misma componente conexa del multigrafo de partida.
- iii) El conjunto U_x de aristas distintas de bucles incidentes en x es un cociclo, pero éste es elemental si y sólo si x no es vértice de corte.

Así, un conexo G es no separable si y sólo si todas sus estrellas U_x son cociclo elementales.

Proposición 7.6.1

Un cociclo es elemental si y sólo si es un conjunto arista desconectante minimal.

Demostración

Es claro que todo conjunto arista desconectante minimal, es cociclo elemental.

Para demostrar la recíproca podremos, en virtud de ii) , suponer que el multigrafo G es conexo.

Si el cociclo U_A no fuera minimal existiría alguna arista u tal que $U_A - \{u\}$ también sería cociclo. En tal caso los vértices del conexo G no estarían repartidos en sólo dos componentes conexas de $G - U_A$ y U_A no sería elemental.

Corolario

1) Si G es conexo, un cociclo U_A es elemental (idem minimal) si y sólo si los multigrafos inducidos por A , o bien por su complementario, son conexos.

Proposición 7.6.2

Todo cociclo de G es unión de cociclos elementales unívocamente determinados y arista disjuntos dos a dos.

Demostración

Por comodidad supondremos que G es conexo. Caso contrario podríamos repetir el siguiente razonamiento para cada una de sus componentes,

Cualquiera sea el cociclo U_A las componentes conexas de $G - U_A$ fijan una partición de A .

Si ella es $A = \bigcup_{i=1}^h A_i$, los A_i inducen grafos conexos, y $U_A = \bigcup_{i=1}^h U_{A_i}$.

Además, los respectivos U_{A_i} están unívocamente determinados y carecen de aristas comunes.

Para ver que cada uno de los cociclos U_{A_i} es unión de elementales disjuntos notemos $B_{i,p}$, con $p \in P_i$, a los conjuntos de vértices de las distintas componentes conexas de $G - U_{A_i}$.

Con tal notación $\bigcup_p B_{i,p}$ coincide con el complementario de A_i , cada $B_{i,p}$ está conectado con A_i , los $U_{B_{i,p}}$ son disjuntos dos a dos, y "a menos de orientación"

los arcos de U_{A_i} coinciden con los de $\bigcup_p U_{B_{i,p}}$.

Como G es conexo cualquiera sea $B_{i,p}$ sus vértices, y los de $A_i \cup \bigcup_p B_{i,p}$, $p \neq \underline{p}$ inducen componentes conexas y $B_{i,\underline{p}}$ es soporte de un cociclo elemental.

El argumento anterior es válido para todo $\underline{p} \in P_i$ y en consecuencia todos los $B_{i,p}$ generan cociclos elementales.

Luego, de lo visto resulta que "a menos de orientación" $U_A = \bigcup_{i=1}^h U_{A_i} = \bigcup_{i=1}^h \bigcup_p U_{B_{i,p}}$ donde los $U_{B_{i,p}}$ son cociclos elementales unívocamente determinados arista disjuntos dos a dos, y esto completa la demostración.

Para ejemplificar lo antedicho, y conservando las notaciones empleadas en la demostración precedente, consideremos en el ejemplo anterior el cociclo de soporte $A = \{a, c, e, g, h\}$.

En tal caso tendríamos $A_1 = \{a, c, e\}$; $A_2 = \{g, h\}$, y $U_A = \{1, \tilde{2}, 5, 7, \tilde{8}, \tilde{9}, 10\}$

Para cuando se considera A_1 se tienen $B_{1,1} = \{b, d\}$; $B_{1,2} = \{f, g, h, i\}$ que dan lugar a los cociclos elementales $\{\tilde{1}, 2, \tilde{7}\}$, $\{\tilde{5}\}$.

Análogamente, en ocasión de considerar A_2 se tienen $B_{2,1} = \{a, b, c, d, e, f\}$; $B_{2,2} = \{i\}$, que generan los cociclos elementales $\{8, 9\}$, $\{10\}$.

La unión de estos cuatro cociclos elementales y disjuntos dan, a menos de orientación, al cociclo inicial $U_A = \{1, \tilde{2}, 5, 7, \tilde{8}, \tilde{9}, 10\}$

Proposición 7.6.3

Cualquiera sea el multigrafo G sus ciclos simples, y sus cociclos, contienen un número par de aristas comunes.

La demostración se basa en la siguiente idea : si se está recorriendo un ciclo C , cada vez que se "entra" al soporte del cociclo se debe "salir" del mismo.

Más precisamente.

Si U_A y C carecen de aristas comunes lo afirmado se cumple vacuamente.

Caso contrario supongamos que al ciclo $C = x_1, u_1, x_2, u_2, \dots, x_h, u_h, (x_1)$ se lo recorre en el sentido del orden creciente inducido por sus índices, módulo h .

A cada arista $u_i \in U_A \cap C$, con $x_i \in A$, se le puede asociar la primera de aquellas que, respetando el orden indicado, pertenecen a $U_A \cap C$ con $x_j \in \bar{A}$, $j > i$.

Como ellas son distintas, pues C es simple, resulta que C y U_A se intersectan en un número par de aristas.

Corolario 1

El multigrafo G es euleriano si y sólo si es conexo y todos sus cociclos tienen número par de aristas.

Corolario 2

Cualquiera sea el multidigrafo G , a cada uno de sus cociclos U_A y a cada uno de sus ciclos simples C , se les pueden asignar sentidos de recorrido tales que $|C^+ \cap U_A^+| + |C^- \cap U_A^-| = |C^+ \cap U_A^-| + |C^- \cap U_A^+|$

En efecto, si $C \cap A = \emptyset$ la expresión a demostrar se cumple vacuamente.

Caso contrario, y sin pérdida de generalidad, fijado A como soporte del cociclo se puede elegir un sentido de recorrido de C tal que exista arco

$u_1 \in C^+ \cap U_A^+$; o bien, tal que $u_1 \in C^- \cap U_A^-$.

Razonaremos para el caso $u_1 \in C^+ \cap U_A^+$. El otro es similar.

Con tal hipótesis, si $u'_1, u'_2, u'_3, \dots, u'_h$ es la subsucesión de arcos de C que intersectan U_A se tiene que

si i es impar $u'_i \in (U_A^+ \cap C^+) \cup (U_A^- \cap C^-)$
 si i es par $u'_i \in (U_A^+ \cap C^-) \cup (U_A^- \cap C^+)$

Como h es par hay tantos índices pares como impares, y por lo tanto, puesto que C se supone simple, resulta la validez del corolario.

Así como en 1 pág.111 hemos asociado vectores a los ciclos simples, también se pueden asociar vectores a los cociclos, y esto teniendo en cuenta los correspondientes sentidos de recorrido.

Más precisamente, si el multidigrafo G contiene arcos u_i , $1 \leq i \leq m$, cada cociclo U_A puede identificarse con un vector de m componentes q_i , tales que :
 $q_i = 1$ si $u_i \in U_A^+$, $q_i = -1$ si $u_i \in U_A^-$, $q_i = 0$ si $u_i \notin U_A$.

En particular, el cociclo de soporte $A = \{a, c, e, g, h\}$ del ejemplo anterior queda identificado por el vector $(1, -1, 0, 0, 1, 0, 1, -1, -1, 1, 0)$.

En el caso dirigido, a cociclos con soportes complementarios corresponden vectores opuestos y volviendo sobre lo dicho en pág.21 "cambiar el soporte del ciclo" puede reinterpretarse como "cambiar su sentido de recorrido".

Para cuando se consideran configuraciones no dirigidas el vector asociado a un cociclo tendrá componentes $q_i = 1$, o bien $q_i = 0$, según que la arista u_i lo integre, o no.

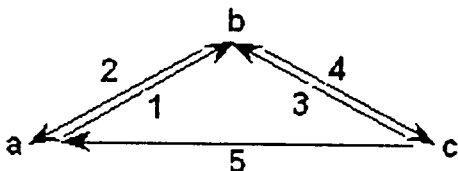
En tales casos a cociclos de soportes complementarios corresponde un mismo vector, y razonamientos análogos a los esbozados en 1 pág.120, y sobre lo cuales se volverá con más detalle en Cap.8 permiten ver que :

Si G es un multigrafo de orden n con m aristas y p componentes conexas pueden elegirse hasta $(n - p)$ vectores cociclos independientes entre sí.

Estos vectores componen, en $\mathbb{Z}_2$, una base del espacio vectorial cuya dimensión es el número cociclomático $(n - p)$.

Por otra parte, dado un multi-di-grafo G , fijado un orden entre sus cociclos, y elegido un "sentido de recorrido" en cada uno de ellos, su **matriz cociclo elemental** $Q(G)$ es aquella cuya i -ésima fila es el vector representativo del i -ésimo cociclo elemental de G , teniendo en cuenta su sentido de recorrido.

En particular para el siguiente digrafo (que reproduce el dado en 1 pág.111) conservando el orden lexicográfico para sus aristas, y para cierto sentido de recorrido de sus cociclos elementales tendremos, poniendo . en lugar de 0



$$Q(G) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & . & . & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & . \\ . & . & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

La $Q(\underline{G})$ correspondiente a su *multigrafo sostén* $\underline{G}$ se obtendría substituyendo los -1 , por 1 .

Puede verificarse que la matriz $C(G)$ dada en 1 pág.111 y la precedente $Q(G)$ son ortogonales en $\mathbb{R}$. Lo mismo puede afirmarse, en $\mathbb{Z}_2$, respecto de las $C(\underline{G})$ y $Q(\underline{G})$ correspondientes al sostén de G .

La siguiente proposición extiende el resultado anterior.

Proposición 7.6.4

Dada una configuración G , sea $C = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ el vector representativo de uno de sus ciclos simples, y $Q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$ el de uno de sus cociclos. Si G es multigrafo los vectores C, Q , son ortogonales en $\mathbb{Z}_2$, y si es multidigrafo son ortogonales en $\mathcal{R}$.

Demostración

La afirmación para el caso no dirigido es consecuencia directa de la Prop.7.6.3, y de la operatoria propia de $\mathbb{Z}_2$.

Para el caso dirigido notemos, previamente, que cambiar el sentido de recorrido del ciclo o bien del cociclo, pero no de ambos, equivale a cambiar el signo de cada producto $c_i \cdot q_i$, $1 \leq i \leq m$.

Así entonces, y excepto que el ciclo y el cociclo en consideración carezcan de arcos comunes, (en cuyo caso los respectivos vectores son ortogonales) cambiando, si es necesario, uno de dichos sentidos de recorrido puede suponerse que cierto u_j es arco adelante en el ciclo y en el cociclo.

Si u_h es, de acuerdo con el sentido de recorrido en C , el "siguiente" de los arcos comunes a C y Q se pueden presentar los siguientes casos, que se complementan y excluyen : i) u_h es arco adelante de C y arco atrás de Q
ii) u_h es arco atrás de C y arco adelante de Q .

En ambos casos $c_i \cdot q_i + c_h \cdot q_h = 0$, y un razonamiento similar para los restantes "pares de consecutivos" completa la demostración.

Corolarios

1) Si $C(G)$ y $Q(G)$ son las matrices ciclo elemental y cociclo elemental de un multidigrafo G , y en ambas las aristas respetan un mismo ordenamiento, entonces: $C(G) \cdot (Q(G))^t = 0$ en $\mathcal{R}$, y $C(G) \cdot (Q(G))^t = 0$ en $\mathbb{Z}_2$

2) Cualquiera sea el multigrafo (multidigrafo) G su espacio vectorial de ciclos simples es ortogonal en $\mathbb{Z}_2$ (en $\mathcal{R}$) al de sus cociclos.

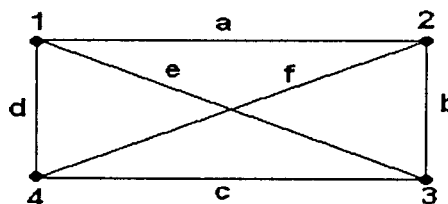
De lo observado en iii) de pág.22 resulta que la matriz incidencia de las configuraciones no separables son matrices cociclo elementales, y esto permite vincular la precedente Prop.7.6.4 con la Prop. 3.5.2 dada en 1pág.112.

Además, resultados citados en 7.3 permiten inferir que :

Las configuraciones quedan definidas por sus matriz ciclo elemental (co-ciclo elemental) sólo a menos de 2-isomorfismo.

Nótese que la ortogonalidad entre los espacios vectoriales de ciclos y de cociclos no implica que ellos sean complementarios ; es decir, que tengan al vector nulo como único vector común.

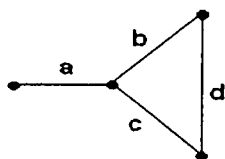
En efecto, en el K_4 etiquetado



el vector $(1,1,1,1,0,0)$ identifica tanto al ciclo elemental a,b,c,d , como al cociclo elemental de soporte $A = \{1,3\}$.

En [SwaT81]—Ejerc.6.10 se propone ver que estos espacios vectoriales son además complementarios si y sólo si el número de árboles (coárboles) cubrientes de G es impar.

Tal el caso del grafo



que contiene tres árboles cubrientes.

Su único vector ciclo elemental es $(0,1,1,1)$ y sus vectores cociclo elemental son $(1,0,0,0)$, $(0,1,1,0)$, $(0,0,1,1)$, $(0,1,0,1)$.

De acuerdo con lo demostrado en [Chen71b] en la afirmación anterior puede substituirse árbol (coárbol) cubriente, por foresta (coforesta) cubriente.

7.7. ALGUNAS DUALIDADES – LEMA DE MINTY

Recordemos que dos afirmaciones se dicen *duales* si cada una de ellas puede ser obtenida a partir de la otra tras simples intercambios de pares de nociones. Tal el caso, en Teoría de Conjuntos, de las expresiones que se obtienen reemplazando los conjuntos involucrados por sus respectivos complementos, e intercambiando las operaciones de unión e intersección.

Así por ejemplo, $C = A \cup B$ si y sólo si $\overline{C} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

La utilidad que deriva del uso de dualidades entre pares de conceptos matemáticos es bien conocida.

En Teoría de Grafos se presentan varios pares de nociones y resultados respectivamente duales.

Así por ejemplo :

- 1) Las *aristas puente* y las *aristas bucle* tienen características duales.
En efecto, los puentes son cociclos y no integran ciclos, mientras que los bucles son ciclos y ningún cociclo los contiene.
- 2) Un multigrafo es *euleriano* si y sólo si es conexo y todos sus vértices son de grado par; o si y sólo si es conexo, y todos sus cociclos tienen número par de aristas.
- 3) Dos aristas están incluidas en un mismo ciclo si y sólo si ambas pertenecen a un mismo cociclo elemental

Por otra parte, en [Saks86] se destaca que los teoremas de König y de Dilworth citados en 7.2 son duales, respectivamente, de

En todo grafo bipartido el grado máximo de sus vértices iguala al número mínimo de acoplamientos necesarios para cubrir todas sus aristas.

En todo conjunto ordenado el número máximo de elementos que componen una *cadena* (comparables dos a dos) coincide con número mínimo de *anticadenas* (conjuntos de incomparables dos a dos) en los que puede descomponerse.

Según se puntualiza en [Iri69]-Cap.III-10 la dualidad posibilitaría un desarrollo axiomático de la Teoría de Grafos, y llevaría al estudio de los "matroides", noción ésta de la cual se han dado referencias bibliográficas en 1 Cap.2-pág.10.

Seguidamente nos referiremos a la dualidad existente entre las nociones "*ciclo simple*" y "*cociclo*", como así también a la que vincula a los dígrafos "*fuertemente conexos*" con los "*carentes de cocircuitos*".

Más adelante nos referiremos, brevemente, en Cap.8 a cierta dualidad entre "árboles y coárboles", en Cap.10 a la que existen entre los "multigrafos planares" y sus "duales" (ligados por intercambio de *caras adyacentes* en *vértices adyacentes*) y en Cap.11 a la que existe entre "flujos" y "tensiones".

Con relación a la “dualidad” entre ciclos simples y cociclos enunciaremos seguidamente un par de afirmaciones que la visualizan.

1)

Así como los ciclos simples (más precisamente los subgrafos que determinan sus aristas) pueden expresarse como unión de ciclos elementales arista disjuntos también los cociclos son unión de cociclos elementales sin aristas comunes.

2)

Si G es multidigrafo los arcos que integran los cociclos de soportes complementarios coinciden, pero los que en uno de ellos son *arcos adelante* en el otro son *arcos atrás*, y recíprocamente. Lo mismo ocurre con los arcos de los ciclos simples al cambiar el sentido en que se los recorre.

La dualidad entre ciclos y cociclos no es ajena a la teoría de redes eléctricas, y está latente en las Leyes de Kirchhoff que gobiernan su comportamiento.

Al respecto se pueden consultar : [Bry67/79], [Chen71a], [ChenM69], [Duf75], [Ghe61], [Minty66/67/75].

Previamente, en [Minty60/61] (ver [Ber70], [BerGH62]) se había enunciado el siguiente

Lema de Minty (o de los arcos coloreados)

Sea G un multidigrafo conexo cuyos arcos están coloreados al azar : de negro, o de verde, o de rojo, y sea u_1 un arco coloreado de negro.

En tales condiciones es cierta una, y sólo una, de las siguientes afirmaciones :

- a) el arco u_1 pertenece a un ciclo elemental sin arcos verdes, con todos sus arcos negros recorridos, en el ciclo, en el mismo sentido que el u_1 .
- b) el arco u_1 pertenece a un cociclo elemental sin arcos rojos, con todos sus arcos negros recorridos, en el cociclo, en el mismo sentido que el u_1 .

Demostración

Marcaremos los vértices de G aplicando reiteradamente las siguientes reglas :

- 1)) Supuesto $u_1 = (a, b)$ se marca b .
- 2)) Si p es un vértice marcado y su adyacente q no lo está, se lo marca si y sólo si (p, q) es arco negro, o rojo, u opuesto del arco rojo (q, p) .

El proceso de marcado lleva a dos situaciones.

A) Se marca el vértice a , inicial del arco u_1 .

En tal caso existe un ciclo elemental de arcos negros y rojos, con todos sus arcos negros recorridos (en el ciclo) en el mismo sentido que u_1 .

Además, no existe cociclo que contenga u_1 con sólo arcos verdes y negros, y con todos sus arcos negros recorridos (en el cociclo) en igual sentido que u_1 .

Pues, cada cociclo que contenga u_1 debe contener al menos otro arco del ciclo que permitió marcar a y dicho arco debe ser rojo o negro, pero en este caso recorrido, en el cociclo, en sentido diferente que u_1 .

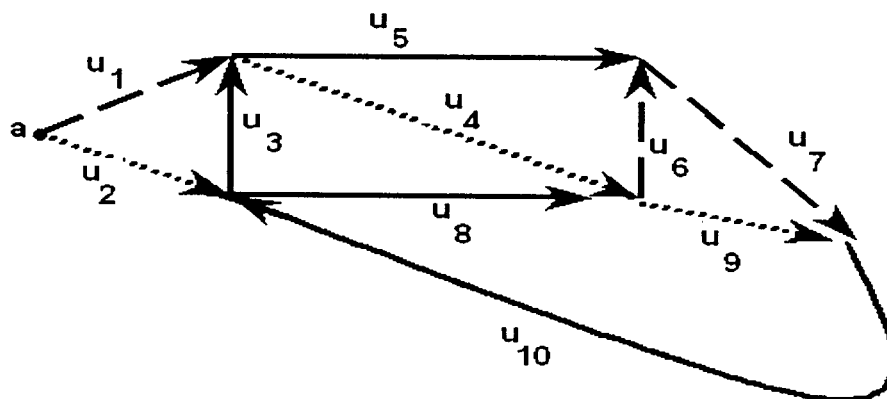
B) No se marca el vértice a , inicial del arco u_1 .

En este caso, sea A el conjunto de vértices no marcados tras la aplicación reiterada de las reglas dadas.

Luego $a \in A$, y el cociclo $U_A = (A, \bar{A}) \cup (\bar{A}, A)$ contiene sólo arcos verdes, o negros, y éstos orientados (en el cociclo) como u_1 . Este cociclo es unión de elementales y uno de ellos contiene u_1 .

Además, no hay ciclos de arcos rojos o negros todos éstos recorridos (en el ciclo) como el u_1 , pues ellos deben pertenecer también al cociclo U_A cuyos arcos negros son recorridos desde A hacia $\bar{A}$.

Así por ejemplo, si en el siguiente digrafo sus arcos negros son u_1, u_6, u_7 , sus arcos rojos son u_2, u_4, u_9 ; y sus arcos verdes son u_3, u_5, u_8, u_{10} .



Es fácil constatar que si $A = \{a\}$ el arco u_1 pertenece al cociclo de arcos negros o rojos $Q_a = \{u_1, u_2\}$ y a ningún ciclo de arcos negros o verdes.

Corolarios

- 1) Dado un multidigrafo G cada uno de sus arcos pertenece a un circuito elemental, o bien a un cocircuito elemental, pero no a ambos.
Inmediato a partir del lema coloreando todos los arcos de negro.
- 2) G carece de circuitos (cocircuitos) si y sólo si cada uno de sus arcos pertenece a un cocircuito (circuito).

En [Minty75] se da una demostración del lema, por inducción sobre el número de "aristas verdes", y en [GonM79]-Cap.5 se enuncia una modificación del mismo, válida también si se admiten arcos no coloreados.

En [Sak84a]-pg.74 se destaca que el Lema de Minty juega un rol central en cuestiones de optimización, y que es, en efecto, equivalente al Teorema Fundamental de los Flujos Canalizados, que daremos en Cap.11.

En Ejerc 7- 25) y 7 - 26) se enuncian otras propiedades duales entre ciclos y cociclos.

La siguiente proposición permite ver como conceptos duales a los de "fuerte conexidad" y "carencia de cocircuitos".

Proposición 7.7.1

Si G es no trivial, las siguientes afirmaciones son equivalentes :

- a) G es fuertemente conexo.
- b) G es conexo y cada uno de sus arcos pertenece a un circuito.
- c) G es conexo y carece de cocircuitos.

Demostración

Que a) implica b) es inmediato (pues cualquiera sea el arco (p, q) existe un camino $q \rightarrow p$) y que b) implica c) resulta de los corolarios anteriores.

Veamos que c) implica a).

Por hipótesis G es conexo. Si no fuera fuertemente conexo existirían al menos dos componentes fuertes que estarían conectadas por arcos no contenidos en circuitos y que constituirían un cocircuito, en contradicción con lo supuesto.

Otra forma de justificar la equivalencia entre a), b) y c) resulta de ver que el precedente Corolario 2 permite afirmar la equivalencia de b) con c) ; y que la supuesta conexidad de G permite inferir la equivalencia entre a) y b).

La "dualidad" también fue tratada en [McKee79/81/83/84a/84b/85/87], [Tho82], y [Wei75].

EJERCICIOS

7 - 1)

Si G es multigrafo regular el grado de cada uno de sus vértices coincide con el promedio de los grados de sus adyacentes.

Vea que para los conexos también es válida la recíproca. ¿ Cabe una afirmación similar si G es no conexo ?

7 - 2)

Demuestre que todo grafo sin bucles con al menos tres vértices es conexo si y sólo si contiene al menos dos subgrafos conexos no triviales $G - \{x_i\}$; $G - \{x_j\}$.

7 - 3)

Suponga que G es grafo conexo sin bucles, y vea que G es 2-arista conexo si y sólo si para todo par de aristas hay un ciclo que las contiene.

7 - 4)

Pruebe que :

- si G es de orden n con al menos dos vértices no adyacentes $\kappa(G) \leq n - 2$.
- $\kappa(G) = 1$ si y sólo si es K_2 , o-bien es conexo separable.
- G es h -arista conexo si y sólo si no existe $A \subset V$ tal que el número de aristas con extremos en A y en $\bar{A}$, sea menor que h .

7 - 5)

Muestre que :

- los vértices de mayor excentricidad no son vértices de corte.
- si x es vértice de corte los restantes vértices pueden partirse en dos conjuntos A, B , tales que si $a \in A, b \in B$, , $d(a, b) = d(a, x) + d(x, b)$.
- todo conexo no trivial contiene al menos dos vértices que no son de corte.

7 - 6)

Vea que un grafo conexo (V, U) de orden $n > 2$ es no separable si y sólo si cualquiera sea $W \subset U$ los subgrafos inducidos por W , y por su complemento tienen al menos dos vértices en común.

7 - 7)

Vea todo grafo hamiltoniano es bloque.

¿ Es válida una afirmación similar substituyendo hamiltoniano por euleriano ?

¿ Valen las respectivas recíprocas ?

7 - 8)

Demuestre que :

- Todo multigrafo G puede expresarse como unión de sus bloques.
- Los bloques de G están unívocamente determinados y son arista disjuntos.
- Un vértice de G pertenece a dos o más de sus bloques si y sólo si es de corte
- Todas las aristas de un ciclo pertenecen a un mismo bloque.

7 - 9)

Sea G un multigrafo con p componentes conexas y b_v el número de bloques de G que inciden en v . Muestre que G tiene $p + \sum_v (b_v - 1)$ bloques.

7 - 10)

Muestre que todo grafo no trivial tiene vértice raíz (antirraíz) si y sólo si es casi unilateralmente conexo hacia atrás (adelante).

¿ Puede afirmar que dicho vértice raíz (antirraíz) es único ?

7 - 11)

Sean p, q , vértices de distintas componentes fuertes de un torneo T .

Vea i) que T contiene el arco (p, q) si y sólo si $gr^+(p) > gr^+(q)$.

ii) que cualesquiera dos de sus vértices de igual grado positivo pertenecen a una misma componente fuerte.

7 - 12)

Muestre que todo digrafo unilateralmente conexo G contiene al menos un camino, no necesariamente simple, cubriente y abierto.

¿ Si G fuera fuertemente conexo, podría afirmar que el camino en cuestión es cerrado y contiene a todos los arcos de G ?

7 - 13)

Cinco estudiantes A, B, C, D, E , son socios de los clubes c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 , de acuerdo con lo que sigue: los socios de c_1 son A, C, E , los de c_2 son C, E , los de c_3 son A, D, E y los de c_4 son A, B, C, E .

¿ Puede elegirse, de entre los socios, representantes de los clubes de forma que cada estudiante represente a un club ?

7 - 14)

Demuestre que en todo digrafo f-conexo el máximo común divisor de las longitudes de sus circuitos coincide con el máximo común divisor de las longitudes de sus circuitos elementales. (este valor se dice índice de imprimitividad).

7 - 15)

¿ Bajo que condiciones puede afirmar que una arista define un cociclo ?

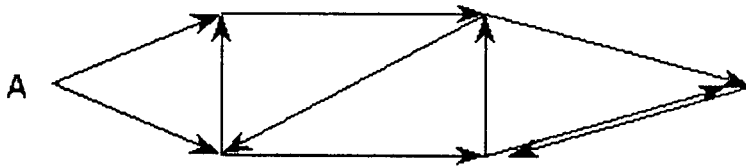
7 - 16)

Vea que dado un multigrafo :

- cada una de sus aristas distinta de bucle pertenece a por lo menos un cociclo elemental.
- dos aristas pertenecen a los mismos cociclos si y sólo si son paralelas.

7 - 17)

Determine el índice de primitividad, y el de imprimitividad del siguiente digrafo y explicité los tiempos en los que un mensaje emitido desde A, en $t = 0$, llegaría a los otros vértices.



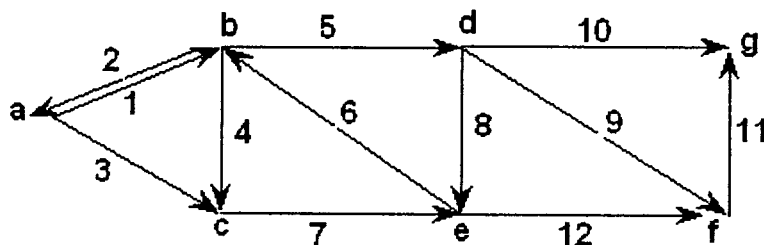
7 - 18)

Pruebe que

- todo multigrafo no discreto sin bucles contiene cociclos elementales.
- todo cociclo de K_n es elemental
- si G es de orden n y todos sus cociclos son elementales, G es K_n .
- todo 2-conexo contiene un ciclo y un cociclo, ambos elementales.

7 - 19)

Determine en el siguiente digrafo el cociclo de soporte $A = \{ a,b,e,g \}$; y expréselo como unión de cociclos elementales disjuntos dos a dos.



7 - 20)

Pruebe que :

- Todo cociclo elemental de un grafo no separable de orden $n > 2$ contiene por lo menos dos aristas.
- Un grafo es no separable si y sólo si cualesquiera dos aristas pertenecen a un cociclo elemental.

7 - 21)

Vea que la matriz incidencia de G es matriz cociclo elemental si y sólo si G es no separable.

7 - 22)

¿ Puede afirmarse que un grafo (V, U) es bipartido si y sólo si su conjunto U de aristas constituye uno de sus cociclos ?

7 - 23)

Sea G un grafo conexo y p, q , dos de sus vértices. Muestre que existen k cadenas de extremos p, q , sin aristas comunes si y sólo si cualquier cociclo que separa p de q tiene al menos k aristas.

7 - 24)

Sea C un ciclo elemental del conexo G , y u, v , dos aristas de C .

Vea que hay al menos un cociclo elemental que contiene a dicho par de aristas.

¿ Puede además contener otras del mismo ciclo C ?

7 - 25)

Sabemos que la diferencia simétrica de dos ciclos (simples) es un conjunto, quizás unitario, de ciclos (simples) arista disjuntos.

Vea que una afirmación similar a la anterior cabe también para el caso de los cociclos.

Muestre al efecto que si $C = A \Delta B$; $U_C = U_A \Delta U_B = U_{A \cup B} \Delta U_{A \cap B}$.

7 - 26)

Pruebe los siguientes resultados, respectivamente duales.

- Si C_1, C_2 , son ciclos de un grafo, u una arista de ambos, y v una de C_1 , pero no de C_2 existe un ciclo que contiene v pero no u .
- Si Q_1, Q_2 , son cociclos de un grafo, p una arista de ambos, y q una de Q_1 , pero no de Q_2 existe un cociclo que contiene q pero no p .

7 - 27)

Vea que si U_A (U_B) es el cociclo de soporte A (B), aún cuando $A \subset B$ no pueden inferirse ninguna de las siguientes afirmaciones

$$U_A \subset U_B \quad \parallel \quad U_B \subset U_A \quad \parallel \quad U_A \cap U_B = \emptyset \quad \parallel \quad U_A \cap U_B \neq \emptyset$$

7 - 28)

Vea

– que en un grafo sin bucles un cociclo U_A tiene número impar de aristas si y sólo si A tiene un número impar de vértices de grado impar.

o equivalentemente

– que cualquier cociclo de un grafo par tiene un número par de aristas.

¿ Sería válida una afirmación similar poniendo par en lugar de impar ?

7 - 29)

Vea que si $G^* = (V, U^*)$ es el multigrafo obtenido a partir de $G = (V, U)$ incrementando U con una arista $[p, q]$, $p \in V$, $q \in V$, se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones :

a) G y G^* tienen las mismas componentes conexas, y el número de ciclos independientes en G^* supera en uno al de ciclos independientes de G .

Así entonces, $\nu(G^*) = \nu(G)$ y $\mu(G^*) = 1 + \mu(G)$.

b) G y G^* tienen distintas componentes conexas, los mismos ciclos y el número de cociclos independientes de G^* supera en uno al de los que tiene G .

Así entonces, $\mu(G^*) = \mu(G)$ y $\nu(G^*) = \nu(G) + 1$.

7 - 30)

Recurra a lo demostrado en el ejercicio anterior para ver que :

– cualquiera sea G , $\mu(G) \geq 0$ y $\nu(G) \geq 0$

– todo multigrafo de orden n con m aristas y p componentes conexas contiene $n - p$ cociclos independientes y $m - n + p$ ciclos independientes.

(sugerencia, recurrir a la incorporación de a una arista por vez, a partir del discreto G_0)

CAPITULO 8

ARBOLES Y ARBORESCENCIAS

8.1. INTRODUCCION

Los conceptos "árbol" (o "árbol libre") y "arborescencia" (o "árbol con raíz"), así como algunos otros estrechamente ligados a ellos, aparecen en forma natural vinculados a problemas muy diversos.

Se muestran útiles tanto en problemas de orden teórico como en aplicaciones, y son fundamentales en la implementación de algoritmos.

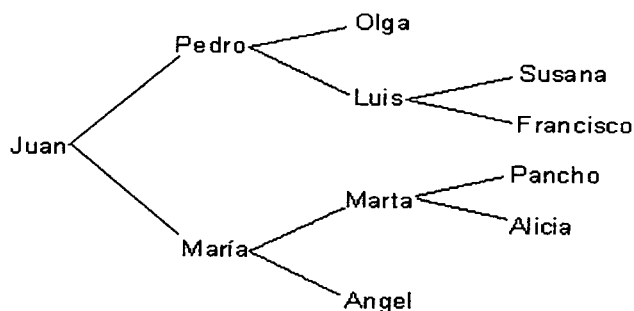
Las *arborescencias* y las *antiarborescencias* se pueden pensar como digrafos opuestos entre sí, y los *árboles* como sus respectivos "grafo sostén"; es decir, como los que resultan de ellos haciendo caso omiso del sentido de recorrido de sus arcos. Son, al decir de Knuth, las más importantes estructuras no lineales

Creemos oportuno observar que en Informática se recurre muy frecuentemente a configuraciones dirigidas sin ciclos. Por ello, "por brevedad", en la bibliografía que le está dedicada se designa *árbol* a lo que diremos *arborescencia* (o *anti-arborescencia*), y *árbol libre* a lo que diremos *árbol*.

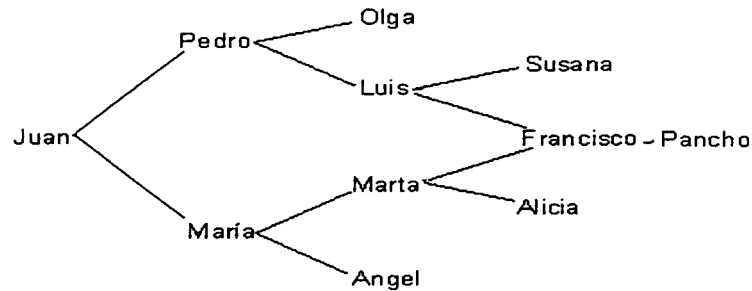
El conocido *árbol genealógico*, (o "árbol de predecesores") con arcos (a, b) si a es hijo de b , es un ejemplo típico de *arborescencia binaria estricta* (ver pág.90).

Para convalidar esta situación debe convenirse en representar a cada persona tantas veces como parejas con descendencia haya formado.

Así por ejemplo, el "árbol genealógico de Juan" podría ser



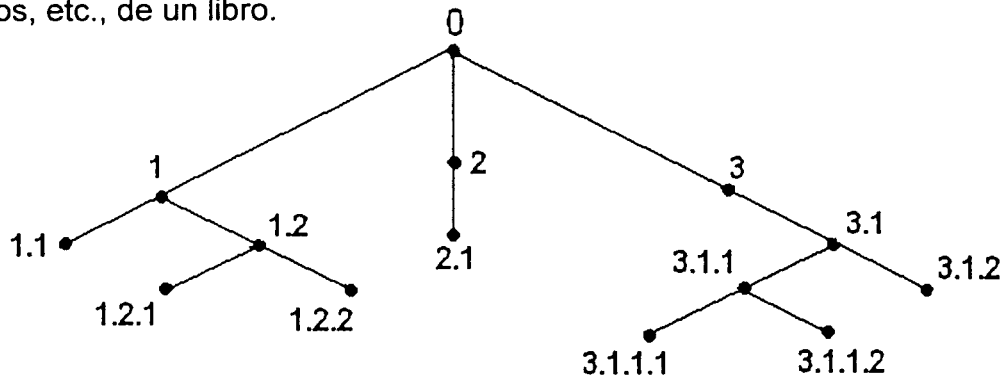
pero no



aún cuando Francisco y Pancho fueran una misma persona.

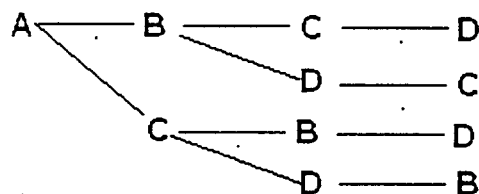
Las *arborescencias* están vinculadas con las estructuras jerárquicas ([DreH90]) y con las cuestiones de clasificación, o de ordenamiento.

Una de ellas es, según ejemplificamos a continuación, la que corresponde a la habitual *Notación de Dewey* para indicar los capítulos, las secciones y los párrafos, etc., de un libro.



Además, y supuesto que en cada instancia haya un número finito de opciones, ellas constituyen un recurso de fácil manejo para asegurar una enumeración exhaustiva.

Por ejemplo, si a excepción del par A, D , las ciudades A, B, C, D , están conectadas entre sí, las distintas formas de recorrerlas saliendo de A y sin retornar a una ya visitada quedan indicadas en el esquema



Por ello son útiles para programar estrategias en juegos donde los competidores alternan sus jugadas y el número de situaciones alcanzables desde cada posición es finito. (ver HorS76/78), (Johs84) Cap.5.7.

Claro que en ocasiones, y en particular para el caso del juego de ajedrez, esta posibilidad es sólo teórica, pues el gran número de opciones en cada jugada puede hacer inmanejable un tal análisis.

En [Gard68] se dan referencias del uso que hicieron de esta noción algunos filósofos del medioevo, mientras que en [BartG88] y [Monj80] son estudiadas en relación con problemas propios de la taxonomía ; es decir, con problemas que surgen al pretender clasificar los elementos de un conjunto tomando en cuenta valores que ponderan “el grado de similaridad” existente entre pares de ellos.

En [Cul67] y [Neb79] aparecen en el estudio de los “lenguajes formales”.y así puede decirse que una característica de los *lenguajes libres de contexto* es la de poder construir para sus sentencias *arborescencias de deducción*.

Además, están vinculadas con los Métodos de Separación y Evaluación Progresiva (S.E.P. ó Branch and Bound) que llevan a una exploración racional del conjunto en estudio, evitando una búsqueda exhaustiva, y permitiendo acotar el valor de las soluciones buscadas.

Para más información sobre estos métodos : [Bert65/66], [GonM79], [HenW73], [HorS76/78], [Hu82], [Kau68b], [LawW66], [Roy69b], [Sak84b].

8.2. ARBOLES

Esta noción, que hemos introducido en 1Cap.3 está estrechamente ligada con la de conexidad. Ella fue utilizada, ya a mediados del siglo XIX.

Más precisamente, la designación del concepto que nos ocupa parece haber sido adoptada por el eminente químico inglés Cayley [Cay57/74/75/89] en ocasión de sus investigaciones sobre el número de hidrocarburos parafínicos isómeros, los que responden a la fórmula $C_n H_{2n+2}$.

Además, y según se indicó en 1Prólogo, esta noción fue utilizada por Kirchhoff [Kir47], para simplificar la resolución de ciertos sistemas de ecuaciones lineales ligados a “problemas de circulación” en redes eléctricas.

También fue empleado por Sylvester [Syl55/82], quien recurrió a ella para formalizar ciertos resultados sobre Teoría de Invariantes en Química.

Para otras referencias ver [BigLW76], [Gri85], [Knu69], [Wils78a].

Reiterando definiciones dadas en 1 pág.118/119 diremos **árbol** a todo grafo conexo sin ciclos , **árbol cubriente de G** a cada subgrafo cubriente de G que sea árbol , **foresta** (o **bosque**) a todo conjunto árboles , y **foresta cubriente** a toda foresta que sea cubriente.

Del concepto árbol, ampliamente tratado en [BarG88] y [Serre77] cabe la siguiente definición recursiva

G es árbol si y sólo si es conexo y cualquiera sea su vértice x se tiene que $G - \{x\}$ es vacío o foresta.

Como todo árbol puede representarse limpiamente en el plano, (ver Ejerc.8 -11) resulta que :

Todo árbol no trivial (finito) admite al menos una arista pendiente y dos vértices pendientes.

La afirmación anterior también puede deducirse por inducción sobre el número de aristas a partir del árbol trivial. (pues el agregado de una de éstas conserva, o bien aumenta en uno, el de vértices pendientes ya existentes).

También puede justificarse a partir de la Prop.8.2.1 que daremos seguidamente.

Por otro lado, todo árbol de orden $(n+1)$ puede obtenerse a partir de otro de orden n , agregándole un vértice y haciendo que éste sea adyacente de exactamente uno de esos n .

Este proceso constructivo induce a que se designen "**2-árboles**" a los grafos obtenidos a partir de K_2 por sucesivos agregados de un vértice que se supone adyacente de exactamente dos de los ya existentes.

Esto lleva a esquemas del siguiente tipo



En forma similar, substituyendo 2 por k se generarían los " **k -árboles**".

Resultados sobre tales configuraciones pueden verse en [BeiM69], [BeiPi69/71], [Foa71], [HarP73]-Cap3.5, [Moon69],[Pal69b], [PipB69]

Notemos que a veces, y por caso en [SwaT81], se dicen " **k -tree**" a las forestas de k -árboles.

Creemos oportuno reiterar ahora una conocida proposición (dada en 1 pág.118, [Ber70], [Chen71a], etc) cuya demostración fue propuesta como ejercicio.

Proposición 8.2.1

Cada una de las siguientes afirmaciones equivale a : T es árbol (de orden n).

- 1) T es conexo sin ciclos.
- 2) Cada par de vértices de T está conectado por una única cadena.
- 3) T es conexo de orden n y tiene exactamente $(n - 1)$ aristas.
- 4) T es acíclico de orden n y tiene exactamente $(n - 1)$ aristas.
- 5) T es conexo y quitándole una arista, pero no un vértice, deja de serlo.
- 6) T es acíclico y agregándole una arista, pero no un vértice, se crea un ciclo.

Al par de Corolarios dados en 1 pág.118 a saber :

- 1) Un grafo (V, U) es árbol si y sólo si es minimal (maximal) entre los conexos (los acíclicos) con vértices V .
- 2) Cualesquiera dos de las tres siguientes afirmaciones permiten afirmar que G es árbol de orden n : G es conexo de orden $n \setminus G$ es acíclico de orden $n \setminus G$ tiene exactamente $(n-1)$ aristas.

puede agregarse el siguiente que reitera una afirmación hecha poco más arriba.

- 3) Todo árbol no trivial tiene al menos una arista y dos vértices pendientes.
(pues carece de vértices aislados y sus grados suman $2.(n-1)$)

En [Bun74] se caracterizan los árboles como grafos conexos, carentes de subgrafos K_3 en los que la distancia entre sus vértices satisface cierta "condición de cuatro puntos".

Observemos además que como todo árbol es un grafo planar cuya única cara es la infinita (ver Cap.10) la relación entre el número de sus aristas y el de sus vértices se puede ver como un caso particular de la conocida *Fórmula de Euler* $C - A + V = 2$, donde C , A , V , son, respectivamente, el número de caras, de aristas, o de vértices, del grafo en cuestión.

Por otro lado, y respecto de la "Conjetura de Ulam", citada en 1 pág.25, cabe notar que el resultado dado en [Kelly57] fue mejorado en [HarP66] al demostrar que para reconstruir árboles basta con conocer sólo la familia de los subárboles obtenidos al eliminar los vértices pendientes.

Posteriormente, en [Bon69b] se vió que basta con tomar en cuenta sólo los que resultan de eliminar los vértices pendientes de mayor excentricidad.

A su vez, en [Manv70] se vió que a excepción de un par de árboles de orden cuatro, y otro de orden seis, para reconstruir el árbol de partida basta con conocer el conjunto, y no la familia, de los subgrafos vértice pendiente eliminados.

A cada G puede asociarse su “*adjunto* $A(G)$ ” (*line-graph, interchange-graph*), Esta noción fue ampliamente estudiada tanto para el caso dirigido como para el no dirigido (ver [HemB78], [Chi82], ó 1 pág.51–54)

En forma similar, a cada conexo se le puede asociar su “*grafo de árboles* $T(G)$ ” (*tree graph*)

Una definición de éstos, que fueron estudiados inicialmente en [Haki61], se da en el Ejerc.8 - 27), donde además se enuncian algunas de sus propiedades.

En [Cum66], [Kam67] y [Sha68] se mostró que los $T(G)$ son hamiltonianos.

Posteriormente, en [HarHo72] (ver [Har74c]) se dedujo que

Si el conexo G contiene ciclos, para cada arista de su $T(G)$ hay un ciclo hamiltoniano que la contiene, y otro que no la contiene.

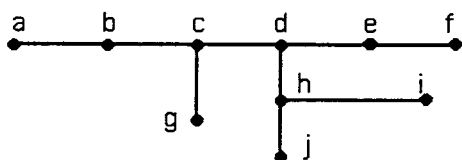
En [KisK69] se demostró (razonando sobre “tree graphs”) el siguiente resultado, que presenta cierta analogía con la citada Conjetura de Ulam.

Si G es grafo sin bucles y T es uno de sus árboles cubrientes, el conjunto formado por T y los restantes árboles cubrientes que se diferencian de T en exactamente una arista determinan G , a menos de aristas pendientes y de “dualidad planar”.

Completaremos esta sección refiriéndonos a un par de nociones que dan lugar a interesantes resultados. Una de ellas, **centro**, fue introducida en 1 pág.97 como “*conjunto de vértices de menor excentricidad*”.

La restante, responde a lo siguiente : dado un árbol T , y cualquiera sea su vértice x , diremos “*peso de x* ” al mayor de los órdenes de los árboles que componen la foresta $T - \{ x \}$ y **centroide** al conjunto de los vértices de peso mínimo.

Para ejemplificar ambos conceptos damos, en la siguiente tabla, las excentricidades $e(x)$, y los pesos $p(x)$, de los distintos vértices del árbol



x	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
$e(x)$	5	4	3	3	4	5	4	4	5	5
$p(x)$	9	8	6	4	8	9	9	7	9	9

El centro del árbol es $\{ c, d \}$, y su centroide es $\{ d \}$.

Véase que

- el centro y el centroide de G pueden, o no, coincidir.
- si T es árbol de orden n , sus vértices pendientes son los de mayor excentricidad, y todos tienen peso $(n-1)$.
- en los árboles que son cadenas, o bipartidos de la forma $K_{1,p}$, sus respectivos centros y centroides coinciden.

Proposición 8.2.2

Todo árbol tiene centro y el mismo está compuesto por un único vértice, o por dos que son adyacentes.

La afirmación es trivial para los árboles de orden menor que tres.

Para los restantes es claro que eliminando de un árbol T todos sus vértices pendientes se obtiene otro árbol T' , y que ahora las excentricidades en T' son las existentes en T disminuidas en uno.

Reiterando este “proceso de poda” se termina en un único vértice, o en dos que son adyacentes, y constituyen el centro de T .

También cabe la siguiente demostración.

Todo árbol tiene al menos un vértice central.

Si tiene al menos dos a, b , como la excentricidad e_a (e_b) está dada por la longitud de una cadena que contiene b (a) se tiene que ellos deben ser adyacentes. De lo contrario existiría otro cuya excentricidad sería menor que ambas e_a y e_b .

Además, si existieran tres vértices centrales las cadenas que dan las respectivas excentricidades determinarían un ciclo. Absurdo.

Se deja al lector verificar la validez de la siguiente

Proposición 8.2.3

Todo árbol tiene centroide y el mismo está formado por un único vértice, o por dos que son adyacentes.

En pág.70 esbozaremos como estas dos últimas proposiciones, y un resultado de Göbel [Göb80] permiten asignar valores numéricos naturales a los árboles.

8.3. ARBOLES Y COARBOLES CUBRIENTES

En [HöftH73] se demostró que la afirmación “todo grafo conexo contiene al menos un árbol cubriente” es equivalente al Axioma de Elección.

En 1 pág. 119 vimos que un multigrafo finito G es conexo si y sólo si admite árboles cubrientes.

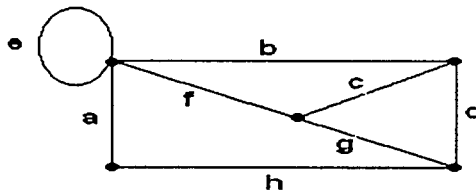
De los métodos constructivos allí indicados y de la Prop. 8.2.1 resulta que si el conexo G tiene n vértices y m aristas distintas de bucle para hallar uno de sus árboles cubrientes será necesario y suficiente :

- eliminar sucesivamente, y de a una por vez, $m - (n - 1)$ de las aristas de G cuidando que la eliminación a efectuar no desconecte el grafo que forman las aún conservadas.

o bien :

- elegir sucesivamente, y de a una por vez, $(n - 1)$ de las aristas de G , cuidando que su incorporación no genere ciclos con las ya elegidas.

Así por ejemplo, en



reteniendo sucesivamente las aristas a, b, c, d , o eliminando sucesivamente las aristas e, f, g, h , se obtiene un mismo árbol cubriente.

Por lo tanto, dado un multigrafo de orden n el número mínimo (máximo) de aristas necesarias (admisibles) para asegurar la conexidad (para posibilitar la carencia de ciclos) es $n - 1$.

Cabe observar que para todos los grafos de orden de n sus conjuntos minimales que aseguran su conexidad tienen $(n - 1)$ aristas.

Una afirmación similar para conjuntos desconectantes no es válida. Basta al efecto considerar en el grafo de aristas $[a, b], [b, c], [b, d], [c, d]$ el cociclo que determina la arista $[a, b]$, o el dado por el par $[b, c], [b, d]$, ambos minimales.

Recordando que si T es árbol cubriente de G las aristas de G incluidas en T se dicen, **ramas** (de T) y las restantes, **cuerdas** (de T) se deja como ejercicio demostrar la

Proposición 8.3.1

Si T es árbol cubriente del multigrafo $G = (V, U)$ entonces :

- cualquier ciclo (cociclo) de G tiene al menos una cuerda (rama) de T .
- si u es cuerda de T , $T \cup u$ contiene un único ciclo, que es elemental.
- si u es rama de T , ella determina un único cociclo, que es elemental, y está integrado por u , y las cuerdas de T pertenecientes a ciclos que contienen u .

Los ciclos (cociclos) de G contruidos a partir de cierta foresta cubriente T siguiendo la metodología indicada en b (en c) de la proposición anterior suelen ser designados **ciclos (cociclos) fundamentales** de G relativos a T ,

Con referencia al grafo anterior y para su árbol a, b, c, d , se tiene que :

- los ciclos definidos por sus cuerdas son : $e \parallel f, b, c \parallel g, c, d \parallel h, a, b, d$.
- los cociclos definidos por sus ramas son : $a, h \parallel b, f, h \parallel c, f, g \parallel d, g, h$.
- el cociclo b, f, h , contiene a la rama b , y a las cuerdas de los ciclos $b, c, f \parallel b, a, d, h$.

La forma de determinar los ciclos (cociclos) fundamentales permiten inferir que sus vectores representativos son independientes dos a dos y que de ellos hay, respectivamente, tantos como cuerdas (ramas) tiene el árbol cubriente T .

Por ello, dado un multigrafo G sus forestas cubrientes permiten determinar conjuntos maximales de ciclos (de cociclos) independientes, y estos constituyen bases de los respectivos espacios vectoriales.

Luego, si n, m, p , son, respectivamente, el número de vértices, el de aristas distintas de bucles, y el de componentes de G , los espacios vectoriales, en $\mathbb{Z}_2$, de ciclos simples, y de cociclos, tienen por dimensiones el *número ciclomático* $\mu(G) = m - n + p$, y el *número cociclomático* $\nu(G) = n - p$.

Para el ejemplo anterior $\mu(G) = 8 - 5 + 1 = 4$, mientras que $\nu(G) = 5 - 1 = 4$

Que los valores $\mu(G)$ y $\nu(G)$ son, respectivamente, el número máximo de ciclos y el de cociclos independientes también puede deducirse constructivamente.

(ver [Ber70], [BerGH62] y Ejerc.7 - 29) y 7 - 30)

No necesariamente todos los ciclos (cociclos) que constituyen un conjunto de linealmente independientes deben ser fundamentales (relativos a cierto T).

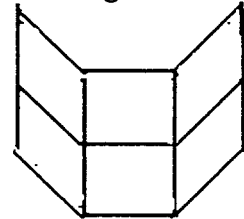
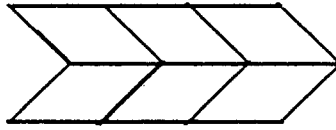
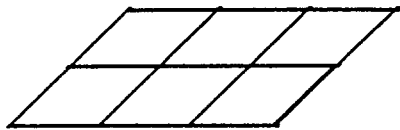
En efecto, de la Prop.10.5.1 resultará que cualquiera sea la “representación limpia” de un multigrafo planar los “contornos de sus caras finitas” constituyen una base de su espacio de ciclos.

Veamos a continuación, y siguiendo razonamientos de [Ore63a], una aplicación de la noción árbol cubriente.

La existencia de charnelas en la estructura reticular $\mathcal{R}$

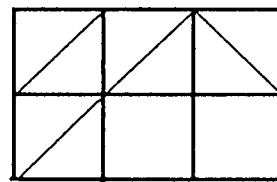
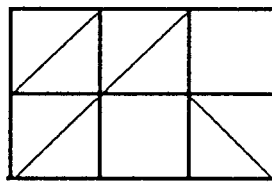
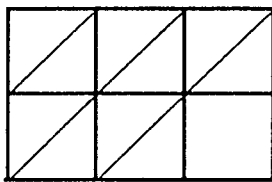


permitiría *deformarla sin modificar longitudes* en alguna de las siguientes:

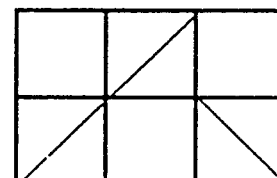
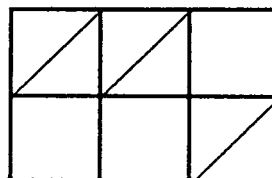
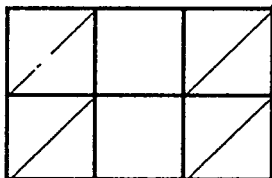


Para anular tal posibilidad será suficiente agregarle riostras, en cantidades y en ubicaciones adecuadas.

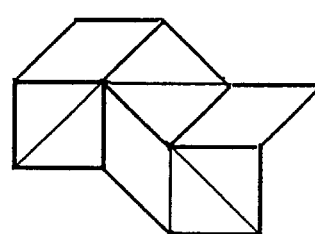
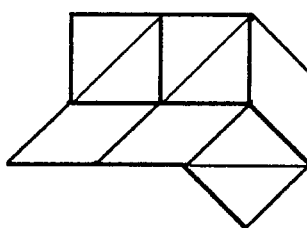
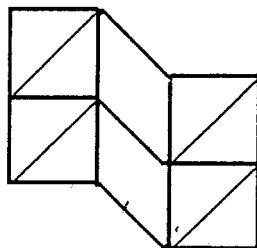
Si indicamos las riostras con diagonales en las celdas rectangulares donde se las ubique, serían indeformables las siguientes estructuras



pero no



que podrían ser llevadas, respectivamente, a



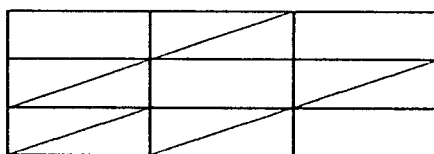
Se presenta así el problema :

¿ Dada una estructura reticular como incorporarle riostras para hacerla indeformable ?

Notemos al respecto que de los ejemplos dados puede inferirse que:

- 1) Cada riostra asegura la rigidez de la celda en la cual está ubicada, pero no la indeformabilidad de la estructura.
- 2) Una estructura reticular es rígida sólo si en cada fila y en cada columna hay al menos una riostra.
- 3) Dos celdas indeformables en una misma fila (columna) no permiten asegurar la indeformabilidad de la estructura.
- 4) Si hay riostras en las celdas $c_{i,j}$, $c_{r,s}$ sólo se podrá asegurar que ambas conservarán solidariamente su carácter de "rectángulo vertical – horizontal" si también lo conserva al menos una de las celdas $c_{i,s}$, $c_{r,j}$ (provenga esto de una riostra propia, o de riostras incorporadas a otras celdas).

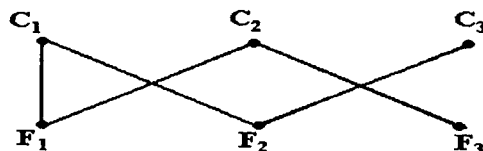
En particular, para el siguiente caso las riostras de las celdas $c_{1,1}$, $c_{1,2}$, $c_{2,1}$, aseguran la rigidez de la celda $c_{2,2}$ y esto permite, recurriendo a las restantes riostras, ver que el diagrama en cuestión es indeformable.



De lo observado resulta que una tal estructura es indeformable si y sólo si todas sus filas y todas sus columnas contienen celdas con riostras, y para cada celda sin riostra c_{i_0, j_0} se puede hallar una sucesión c_{i_0, j_1} , c_{i_1, j_1} , c_{i_1, j_2} , c_{i_2, j_2} , ... de celdas con riostras (ya sean iniciales o incorporadas).

Esta "sucesión de riostras" se puede reinterpretar, como una cadena de extremos $i_0 \in F$, $j_0 \in C$, en el bipartido $G_{\mathcal{R}} = (F \cup C, U)$, con vértices F (C) representantes de las filas (columnas) de $\mathcal{R}$ y aristas $[h, k]$ en correspondencia de las $c_{ih, jk}$ con riostras iniciales.

En particular, para el ejemplo anterior el bipartido en cuestión es



Véase que la riostra a incorporar en $c_{2,2}$ está asociada a la cadena de aristas $[F_2, C_1], [C_1, F_1], [F_1, C_2]$.

Por lo tanto, visto que la existencia de tales sucesiones (cadenas) puede asegurarse para todo par h, k , si y sólo si las riostras de $\mathcal{R}$ (las aristas de $G_{\mathcal{R}}$) aseguran la conexidad de $G_{\mathcal{R}}$, y que un grafo es conexo si y sólo si contiene árboles cubrientes caben las siguientes afirmaciones.

- | Una estructura reticular $\mathcal{R}$ con riostras, es indeformable si y sólo si el grafo bipartido $G_{\mathcal{R}}$ que la representa es conexo.
- | Si la estructura $\mathcal{R}$ tiene p filas y q columnas, para hacerla indeformable serán necesarias al menos $(p + q - 1)$ riostras.

Este número también es suficiente si se las dispone de forma que determinen un árbol cubriente.

En 7.7 nos hemos referido a distintos pares de nociones de la Teoría de Grafos que tienen propiedades duales, y uno de ellos vincula "árboles" con "coárboles".

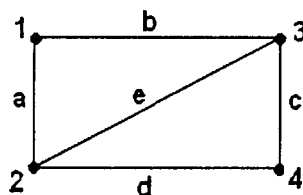
Para motivar una de las formas de introducir este último concepto recordemos que :

Cada *árbol cubriente* de un multigrafo conexo G es un conjunto de aristas minimal entre aquellos que aseguran la interconexión de todos los vértices de G .

Dado un multigrafo conexo G se dice **coárbol** (de G) a todo submultigrafo de G cuyo conjunto de aristas sea maximal entre aquellos cuya eliminación no implica desconectar los vértices de G .

Se dirá **coárbol cubriente** si además es cubriente (eventualmente merced a vértices aislados).

En particular, dado



uno de sus coárboles cubrientes es el de aristas b, d .

Otro lo compone el par de aristas a, c , y un tercero el que determinan las aristas a, d , y el vértice 3.



Obviamente :

- cada bucle de G integra todos su coárboles cubrientes, pero ninguno de sus árboles cubrientes
- cada arista pendiente de G integra todos sus árboles cubrientes, pero ninguno de sus coárboles cubrientes.
- los árboles de G carecen de ciclos, y sus coárboles carecen de cociclos.

Algo más sobre estas “propiedades duales” puede verse en [ChenM69].

Para mostrar que un árbol cubriente también puede ser coárbol cubriente basta considerar las cadenas abiertas elementales P_4 incluidas en el completo K_4 .

Proposición 8.3.2

Dado un multigrafo conexo $G = (V, U)$ sean $H = (V, U')$ y $K = (V, U'')$ dos de sus submultigrafos cubrientes tales que $U = U' \cup U''$ y $U' \cap U'' = \emptyset$. Con tales restricciones H es árbol cubriente si y sólo si K es coárbol cubriente.

En efecto, si H es árbol cubriente, K carece de cociclos.

Además, si u es rama de H , $U' - \{u\}$ induce dos componentes conexas en G , y por lo tanto $U'' \cup \{u\}$ contiene un cociclo. Luego K es maximal entre los caren-tes de cociclos, y por lo tanto es coárbol cubriente.

Recíprocamente, si K es coárbol eliminando sus aristas resta H , que es conexo, pero quitándole una arista deja de serlo, pues K es maximal entre los que carecen de cociclos. Por lo tanto H es árbol cubriente.

Corolarios :

- 1) Si $T = (V, W)$ es árbol cubriente del multigrafo $G = (V, U)$, sus cuerdas y los eventuales vértices aislados de $G - T$ dan el coárbol cubriente $(V, U - W)$.
- 2) Un conexo contiene tantos árboles cubrientes como coárboles cubrientes.

Seguidamente, y para enfatizar la dualidad existente entre las nociones “árbol cubriente” y “coárbol cubriente”, incluiremos las siguientes afirmaciones, extraídas de [Ghe61].

Algunas de ellas vuelven sobre las de la Prop. 8.2.1.

Sea G un multigrafo conexo de orden $n \geq 2$, con m aristas distintas de bucles.

A:

- T es árbol cubriente del conexo G si y sólo si :
 - 1) T carece de ciclos y todo cociclo de G contiene al menos una arista de T .
 - 2) T carece de ciclos y tiene exactamente $(n - 1)$ aristas.
 - 3) T tiene exactamente $(n - 1)$ aristas, y todo cociclo de G contiene al menos una arista de T .
 - 4) T es acíclico maximal.
 - 5) Todo cociclo de G contiene al menos una arista de T y cualquiera sea $u \in T$ hay al menos un cociclo cuya única arista en común con T es u .

B:

- Q es coárbol cubriente del conexo G si y sólo si :
 - 1') Q carece de cociclos de G y todo ciclo de G tiene al menos una arista de Q .
 - 2') Q carece de cociclos de G y tiene exactamente $(m - n + 1)$ aristas.
 - 3') Q tiene exactamente $(m - n + 1)$ aristas y todo ciclo de G contiene al menos una arista de Q .
 - 4') Q carece de cociclos de G , y si se le agrega una arista se crea un cociclo.
 - 5') Todo ciclo de G contiene al menos una arista de Q y cualquiera sea $u \in Q$ hay al menos un ciclo cuya única arista en común con Q es u .

8.4. RECuento DE ARBOLES

Saber cuantos árboles de orden n existen es un interesante y difícil problema combinatorio. Otro, más accesible, es el de evaluar la cantidad de ellos, pero etiquetados.

Entre las motivaciones históricas del primero de estos problemas se destacan los ya mencionados trabajos de Cayley para determinar el número de hidrocarburos parafínicos isómeros. En [Tri83]-Vol.II se los da hasta $n = 50$.

Al respecto digamos que según se puntualiza en [Tri83] y en [Read72c/78] el recuento hecho por Cayley, como así también por otros investigadores, tienen algunos errores que no empañan la importancia de sus respectivos trabajos.

La tabla con el número de árboles dadas en 1 pág.118 puede extenderse con la siguiente, que incluye a los de orden n , ($1 \leq n \leq 16$).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Nro	1	1	1	2	3	6	11	23	47	106	235	551	1.301	3.159	7.741	19.320

En [Rio58] pág.138, en [Har69b]-Ap.3:y en [HarP73]-Ap.1 se la extiende hasta $n = 26$, orden para el cual el número de árboles es 279.793.450.

En [Har69b] se representan los 201 árboles de orden $n \leq 10$.

Habitualmente, para determinar el número en cuestión se recurre a relaciones entre “árboles” y “árboles con raíz”, y al uso de “funciones generatrices”. Algunas pocas referencias al respecto se darán más adelante, en pág.71.

Por otro lado, con vistas a la enumeración de *árboles etiquetados*, y reiterando algo de lo dicho en 1 Cap.2.1.7 digamos que el completo K_3 admite tres árboles cubrientes etiquetados, todos ellos isomorfos a la cadena elemental P_3 .

Por otra parte es fácil verificar que K_4 admite 16 árboles cubrientes etiquetados, cuatro de ellos isomorfos con $K_{1,3}$, y los doce restantes isomorfos con P_4 .

Conviniendo que al considerar subgrafos de cierto G se tomarán en cuenta las designaciones de sus vértices resulta que *el número de árboles cubrientes del completo K_n coincide con el de árboles etiquetados de orden n .*

Se sabe que para $n \geq 2$ dicho número es n^{n-2} .

Amplias referencias sobre las numerosas maneras de obtener dicho valor se pueden ver en [Moon67a/67b/69/70]. Algunas se esbozan en [HarP73]-Cap.1-7.

Es habitual atribuir su determinación a Cayley [Cay57/74/75/89], como consecuencia de sus investigaciones en química, pero no deben ser ignorados los trabajos de sus contemporáneos: Borchardt [Bor60], Sylvester [Syl55/82], y Kirchhoff [Kir47].

Este último recurrió al uso de la matriz $K(G) = (k_{i,j})$ definida por :

- para $i \neq j$ el valor $k_{i,j}$ es el opuesto del número de aristas $[i, j]$.
- para $i = j$ el valor $k_{i,i} = \sum_j k_{i,j}$, $i \neq j$.

Suele ser designada *Matriz de Kirchhoff (o Laplaciana, o de admitancia)* y apelando a ella se dedujo que

El número de árboles cubrientes de un multigrafo conexo G coincide con el cofactor de cualquier elemento de su matriz $K(G)$.

Nótese que ;

— como todas las filas y columnas de $K(G)$ son de suma nula, un conocido resultado del algebra lineal permite afirmar que todos sus cofactores coinciden.

— aún cuando en $K(G)$ no se toman en cuenta los eventuales bucles de G , esto no quita generalidad al resultado.

El precedente resultado de Kirchhoff, y su similar para el caso dirigido son habitualmente dichos *Matriz Tree Theorem*.

Una extensión de ellos, sobre los que volveremos en 8.8, fue dada en [Lew82].

De dicho *Matriz Tree Theorem* resulta que para determinar el número de árboles etiquetados de orden n basta con evaluar uno de los cofactores de la matriz $K(K_n)$.

En particular, en $K(K_3) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ todos sus cofactores valen tres.

Se deja al lector constatar que

| Cualquiera sea n , $n \geq 2$, los cofactores de $K(K_n)$ valen n^{n-2} .

En relación con esta temática creemos útil destacar que :

- Si G carece de bucles, A es su matriz de adyacencia y D es su matriz grado, ($d_{i,i}$ = grado del vértice i ; $d_{i,j} = 0$, $i \neq j$) entonces $K(G) = D(G) - A(G)$.
- Si G es no discreto carente de bucles tiene sentido considerar su matriz de incidencia B , y en tal caso $B \cdot B^tr = D + A$ (ver 1Ejerc.2 - 35).

De donde, en tales casos $B(G) \cdot (B(G))^tr = K(G) + 2 \cdot A(G)$

Análogamente, para el caso dirigido, supuesto que H tiene arcos, pero no bucles, y que $\underline{H}$ es su sostén de 1Ejerc.2 - 35) resulta que

$$B(H) \cdot (B(H))^tr = D(\underline{H}) - A(\underline{H}) = K(\underline{H}).$$

Por lo tanto :

- Dado un multigrafo G sin bucles, y supuesto que G^* denota a alguno de los multidigrafos obtenido a partir de G orientando arbitrariamente sus aristas se puede poner

$$B(G^*) \cdot (B(G^*))^{tr} = K(\underline{G^*}) = K(G).$$

En [BusS65]-Cap.6-5 el valor n^{n-2} es obtenido de forma inductiva siguiendo ideas de [Rén59], y en [Ori78] como corolario de resultados válidos para el caso dirigido.

También se llega al valor en cuestión siguiendo ideas de Trent [Tre54] y apelando a la unimodularidad de las “matrices de incidencia”. (ver 1 pág. 66/67)

Más precisamente, de esta unimodularidad y una observación hecha poco más arriba resulta que :

Si G es un grafo conexo, no trivial sin bucles, G^* el digrafo resultante tras una orientación arbitraria de sus aristas, $B(G^*)$ su matriz incidencia, y $B_i(G^*)$ la que resulta de eliminar en $B(G^*)$ una de sus filas, el número de árboles cubrientes de G es $\det.(B_i(G^*) \cdot B_i(G^*)^{tr})$.

Para mayores precisiones [Ber58]-Cap.16, [BusS65]-pág.138, [ChiS99]-Cap.7, [SwaT81]-Cap.6.

En 1918 Prüfer [Prü18] dedujo el valor n^{n-2} recurriendo explícitamente al número de sucesiones de longitud $(n-2)$ factibles de construir con n elementos. Al respecto ver [BonM76], [Brya93], [Deo74], [Ore62], [Pal78].

Seguidamente deduciremos el valor que nos ocupa siguiendo dicha idea.

A tal efecto, sea $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ el conjunto de vertices de K_n , y T uno de sus árboles cubrientes.

El orden inducido por la designación de los vértices de T permite, según veremos, asociarle una sucesión $q_1, q_2, \dots, q_{n-2}$, unívocamente determinada.

Para ello, sea t_1 el primer vértice, en el orden natural, que es pendiente en T , y q_1 su adyacente.

Eliminados de T el vértice t_1 y la arista $[t_1, q_1]$ queda un nuevo árbol T' para el cual se repite el proceso anterior, eligiendo como t_2 su primer pendiente, y como q_2 su adyacente (t_2 puede coincidir con q_1).

Lo precedente se reitera hasta eliminar t_2 y construir la arista $[t_{n-2}, q_{n-2}]$, momento en el cual sólo queda sin eliminar sólo una de las aristas de T .

Como a distintos árboles cubrientes deben corresponder en alguna etapa del proceso distintos vértices pendientes resulta que la sucesión $q_1, q_2, \dots, q_{n-2}$ está unívocamente determinada por T .

Recíprocamente, dada una sucesión de naturales $Q = q_1, q_2, \dots, q_{n-2}$, y procediendo "a la inversa" construiremos un árbol cubriente de K_n , unívocamente determinado.

Para ello se determina en la sucesión $1, 2, \dots, n$ cual es el primero de los que no pertenecen a Q .

Se lo elige como t_1 y se supone $[t_1, q_1]$ es arista del árbol en construcción.

Se eliminan de N el número t_1 , y de la sucesión Q el q_1 , y se reitera el proceso aplicándolo al conjunto $N - \{t_1\}$ y a la sucesión $Q' = q_2, q_3, \dots, q_{n-2}$.

Esto se repite hasta que se hayan fijado $(n - 2)$ aristas. La arista restante incide en q_{n-2} y en un vértice v cuya etiqueta en N aún no fue eliminada.

Para cada i , el vértice elegido t_i es distinto de los que corresponden a los restantes t_j , y a los q_j , $i \leq j \leq n - 2$.

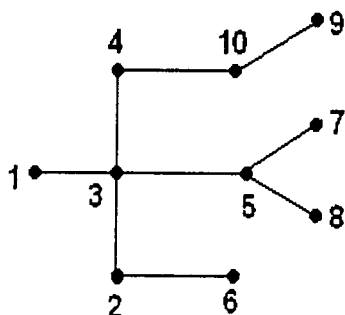
Por ello la arista $[t_i, q_i]$ no forma ciclos con $[q_{n-2}, v]$, ni con las de la forma $[t_j, q_j]$, $i < j \leq n - 2$.

En consecuencia las $n - 2$ aristas de la forma $[t_i, q_i]$ junto con la $[q_{n-2}, v]$ determinan un subgrafo acíclico de orden n , y por ende árbol cubriente de K_n .

Queda así establecida, para cada numeración de los vértices de K_n , una correspondencia biyectiva entre árboles etiquetados cubrientes y sucesiones de naturales $q_1, q_2, \dots, q_{n-2}$ con $q_i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Finalmente, como cada vértice admite n valores distintos el número de árboles cubrientes etiquetados es n^{n-2} .

Así, dado



y siguiendo el proceso indicado quedan determinadas las sucesiones

t_1	1	q_1	3
t_2	6	q_2	2
t_3	2	q_3	3
t_4	7	q_4	5
t_5	8	q_5	5
t_6	5	q_6	3
t_7	3	q_7	4
t_8	4	q_8	10

y resta la arista $[9, 10]$.

Recíprocamente, dada la sucesión 3,2,3,5,5,3,4,10 el método usado en la demostración nos lleva a las siguientes tablas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		3	2	3	5	5	3	4	10
	2	3	4	5	6	7	8	9	10			2	3	5	5	3	4	10
	2	3	4	5		7	8	9	10				3	5	5	3	4	10
		3	4	5		7	8	9	10					5	5	3	4	10
		3	4	5			8	9	10						5	3	4	10
		3	4	5				9	10							3	4	10
		3	4					9	10								4	10
			4					9	10									10
								9	10									

$t_1 = 1$	$t_2 = 6$	$t_3 = 2$	$t_4 = 7$
$u_1 = [1, 3]$	$u_2 = [6, 2]$	$u_3 = [2, 3]$	$u_4 = [7, 5]$
$t_5 = 8$	$t_6 = 5$	$t_7 = 3$	$t_8 = 4$
$u_5 = [8, 5]$	$u_6 = [5, 3]$	$u_7 = [3, 4]$	$u_8 = [4, 10]$

quedan sin t_i asignado los vértices 9, 10, extremos de la arista $u_9 = [9, 10]$ que completa el árbol asociado a la sucesión dada.

De manera coloquial, la *codificación según Prüfer* $q_1, \dots, q_{n-2}$ se podría reformular diciendo q_i denota al adyacente del pendiente de menor valor que resta luego de eliminar los primeros $(i - 1)$ pendientes.

Del precedente algoritmo resulta que cada vértice de grado d , aparece $(d - 1)$ veces en la sucesión $q_1, \dots, q_n$ que determina el árbol.

Otra deducción del resultado que nos ocupa es la dada por Clarke [Cla58].
(ver [Moon67a], [Pal78], [Wils72].Cap.4).

En [Brya93]-Cap.2 se muestra que

Si $n \geq 2$ y los naturales d_i satisfacen $d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2.n - 2$ el número de árboles etiquetados, con su i -ésimo vértice de grado d_i está dado por el coeficiente multinomial

$$\binom{n-2}{d_1-1, \dots, d_n-1} = \frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \dots (d_n-1)!}$$

En [Ber70]-Cap.3.5 a partir de propiedades de los números multinomiales se reencuentran fórmulas para el recuento de árboles etiquetados con diversas restricciones.

Esta temática también fue abordada en "términos espectrales".

Así por caso, en [Hut67] se mostró que si G es grafo k -regular y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$,
($k = \lambda_1$) son los autovalores del polinomio característico de su matriz de adyacencia el número de sus árboles cubrientes es $\frac{1}{n} \prod_{i=2}^n (k - \lambda_i)$.

Luego, en [Cve71], [CveG81] y [Sachs76], entre otros, se hicieron análisis similares a partir de la Matriz de Kirchhoff.

Para mayor información sobre el "enfoque matricial" de la Teoría de Grafos, además de [God81], [Hof68/75], [LovP73] y la bibliografía citada en 1 pág. 60, puede recurrirse, en especial, al par de publicaciones monográficas [CveDS79], [CveDG88].

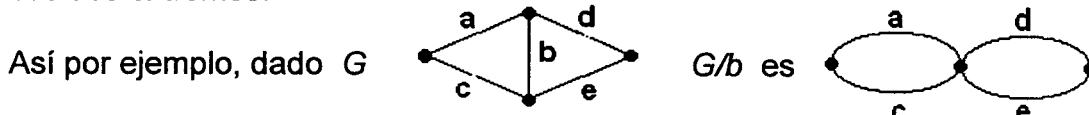
Puntualizemos ahora que extendiendo resultados del Ejer.8 - 33) se demuestra que el número de árboles cubrientes del bipartido completo $K_{p,q}$ es $p^{q-1} \cdot q^{p-1}$.
(ver [EgéR86], [HartW90])

En [Aus60], [EgéR94] y [Lews99] se estudian los k -partidos completos.

Del resultado así obtenido, y reinterpretando K_n como el grafo multipartido de n clases unitarias se reencuentra que el número de árboles etiquetados de orden n es n^{n-2} .

Creemos interesante destacar que el número $\tau(G)$ de árboles cubrientes de cualquier grafo conexo G se puede calcular, recursivamente, aplicando la siguiente “operación de arista contracción”

Notaremos G/u al grafo que resulta de eliminar en G la arista u , y de identificar sus dos extremos.



Es fácil ver que

- Si G tiene n vértices, m aristas, y e es arista puente, G/e tiene $(n - 1)$ vértices, $(m - 1)$ aristas, $\tau(G - \{e\}) = 0$ y $\tau(G) = \tau(G/e)$.
- Si G es árbol no trivial también lo es G/u , cualquiera sea u , y $\tau(G) = \tau(G/u)$.

La operación en cuestión, cuya aplicación en grafos de alto orden puede no ser fácil, permite deducir directamente la siguiente fórmula recursiva.

Cualquiera sea el grafo no discreto G , y supuesto que su arista u no es bucle $\tau(G) = \tau(G - \{u\}) + \tau(G/u)$.

A continuación damos un par de aplicaciones de ella.

- Si G es $K_{2,2}$
 $\tau(G) = \tau(\text{diagrama de } K_{2,2} \text{ sin una arista}) + \tau(\text{diagrama de } K_{2,2} \text{ con una arista}) = 1 + 3 = 4.$
- Si G es $K_4 - \{u\}$
 $\tau(G) = \tau(\text{diagrama de } K_4 \text{ sin una arista}) + \tau(\text{diagrama de } K_4 \text{ con una arista}) = 4 + 4 = 8$

Otras aplicaciones se proponen en los Ejerc. 8 - 34) y 8 - 35).

8.5. ALGORITMOS DE TIPO BFS y DE TIPO DFS

En el Prólogo hemos mencionado la existencia de algoritmos clasificados como “de tipo BFS” (*breadth first search*) o “de tipo DFS” (*depth first search*).

Ellos corresponden, respectivamente, a dos formas de operar con los datos almacenados, a saber : según “colas” (*queue*), o según “pilas” (*stack*) y conllevarán dos maneras de recorrer los vértices de un grafo, e introducir en ellos un “orden total”.

Otras formas de introducir tales órdenes se darán en 8.10.

Los “*etiquetamientos tipo BFS*” responden a las siguientes reglas.

Convendremos que al enunciarlas un vértice se dirá “*explorado*” sólo cuando todos sus adyacentes hayan sido *marcados*, (o *etiquetados*).

1) Se elige un vértice arbitrario, se lo etiqueta v_0 , y luego se etiquetan (de forma arbitraria) $v_1, v_2, \dots, v_h$ todos sus adyacentes.
Ahora v_0 está explorado, los $v_1, v_2, \dots, v_h$ están marcados pero no explorados, y se pasa a 2).

2) Se constata si en la sucesión $v_1, v_2, \dots, v_h$ hay alguno no explorado. Si todos están explorados se da por terminada la aplicación del algoritmo. Caso contrario, sea $v_i, i \geq 0$, el primero (según el orden que inducen los índices respectivos) de los marcados no explorados.

Si hay adyacentes de v_i aún no marcados se los etiqueta $v_{h+1}, \dots, v_k$. Ahora el vértice v_i está explorado, y se reitera 2) pero aplicándola a la sucesión $v_{i+1}, \dots, v_h, v_{h+1}, \dots, v_k$.
Caso contrario (v_i carece de adyacentes no marcados y por lo tanto está explorado.) se reitera 2), aplicándola a la sucesión $v_{i+1}, \dots, v_k$.

Los “*etiquetamientos tipo DFS*” responden al siguiente esquema :

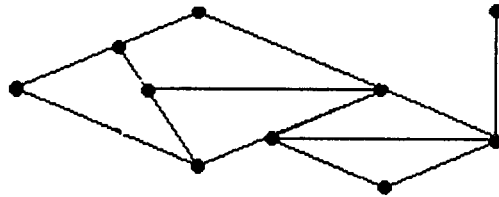
- 1) Se elige un vértice, se lo etiqueta v_0 y se pasa a 2).
- 2) Si existen adyacentes de $v_i, i \geq 0$, aún no etiquetados se elige uno de ellos y se lo etiqueta v_{i+1} .
Esta operación se reitera aplicándola a v_{i+1} , y a posteriores en tanto sea posible hasta obtener una sucesión maximal $v_0, v_1, \dots, v_h$ y se pasa a 3).
- 3) Si todos los vértices han sido etiquetados se da por terminado el proceso. Caso contrario se elige, de entre aquellos que aún tienen adyacentes no etiquetados el de mayor índice y se etiqueta v_{h+1} alguno de éstos.
Ahora se reitera 2) aplicándola a v_{h+1} , y esto hasta obtener una nueva sucesión maximal $v_0, \dots, v_h, v_{h+1}, \dots, v_k, (k \geq h+1.)$ Luego se reinicia 3).

Informalmente podríamos decir que en cada etapa :

- Los algoritmos de tipo BFS se basan en extensiones “tan anchas” (o “tan exhaustivas”) como sea factible, en cada etapa.
Suele decirse que son de tipo “primero marcado, primero explorado”
(o de tipo FIFO (first in – first out)

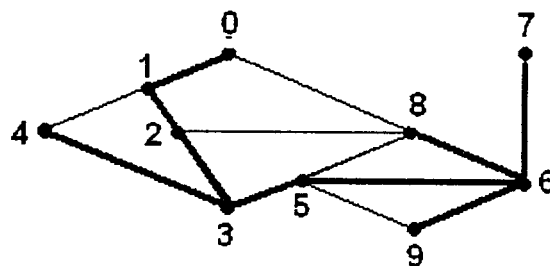
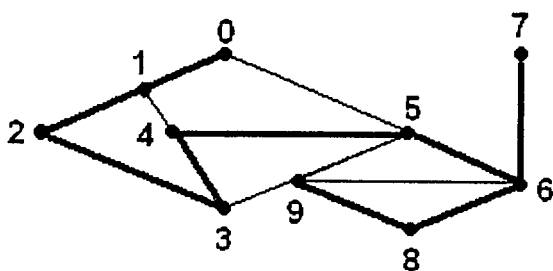
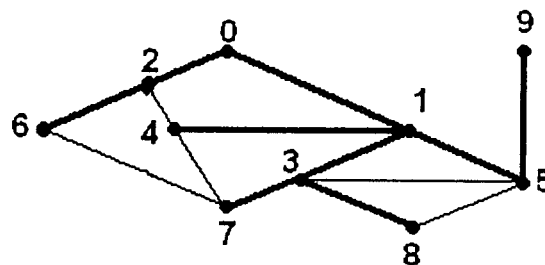
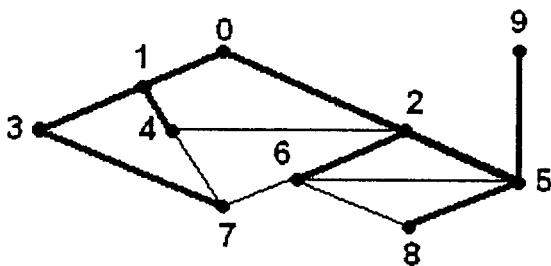
- Los algoritmos de tipo DFS (también dichos “*backtracking*”) se fundan en extensiones “tan profundas” (o “tan largas”) como sea posible, y en retrocesos “tan cortos” como sean necesarios.

Para visualizar de que manera algoritmos de estas clases pueden llevar a recorrer los vértices de un grafo apliquémoslos para hallar árboles cubrientes del siguiente grafo.



Los árboles que siguen quedarán determinados por aristas $[p, q]$ en las que q fue etiquetado desde p .

De ellos, los dos primeros (últimos) fueron obtenidos aplicando etiquetamientos de tipo BFS (de tipo DFS).



Tanto el algoritmo dado en 1Cap.3-2 para hallar distancias entre vértices, como el de Dijkstra, dado en 1Cap.7 para hallar caminos óptimos y el que daremos en Cap.11 para hallar cadenas de aumento de flujo son de Tipo BFS.

En cambio, son de tipo DFS los algoritmos de Tarry, y de Trémaux, (1 Cap.3-4) así como los propuestos en [Hop73] y [Tar72] para hallar, respectivamente, las componentes biconexas, y las fuertemente conexas de cierto G (ver [Swa81]-Cap.14.

En [Tuc80]-Cap.9.2 se hacen consideraciones sobre sus respectivas aplicaciones en arborescencias. Para otras ver [Hag78], [Hor76/78], [Hu82]-Cap.2 y 4, [Johs84]-Cap.5-3, [Sah81].

8.6. ARBORICIDADES

En 1 pág.57/58 nos hemos referido, muy someramente, al problema de "la descomposición" (o "del recubrimiento") de un multigrafo mediante conjuntos de subgrafos de tipo prefijado que sean arista disjuntos dos a dos y permitan reencontrarlo como unión de ellos.

Algunos resultados sobre esta cuestión, que incluye tanto a las "factorizaciones de los multigrafos" (ver 1 Cap.2.1.6), como a las relativas al "espesor de los planares" (ver 10.7) pueden verse en [Bei69].

Dentro de esta problemática cabe la siguientes cuestión.

¿ Cuándo será posible descomponer un multigrafo conexo en árboles cubrientes arista disjuntos dos a dos ? ¿ al menos cuántos serán necesarios ?

Es fácil ver que dicho "menor número" es uno si y sólo si G es árbol, y que el completo K_4 admite seis descomposiciones con dos árboles cubrientes arista disjuntos cada uno (isomorfos con la cadena P_4).

Por otra parte, los completos de orden impar y los ciclos C_n con $n > 2$, no admiten tales descomposiciones.

Si G admite k árboles cubrientes arista disjuntos entre si, cada par de vértices está conectado por al menos k cadenas sin aristas comunes (una en cada árbol) y por lo tanto G es k arista conexo.

La recíproca es falsa, pues los ciclos C_n , $n > 2$, son 2-conexos que no admiten pares de árboles cubrientes sin aristas comunes.

En [NashW61] y en [Tut61b] (ver [Die96]-Cap.3-5, [Fle90]-Cap.III-9) se mostró, en forma independiente, que :

Un multigrafo sin bucles $G = (V, U)$ admite k árboles cubrientes arista disjuntos si y sólo si para cualquier partición de V en p clases, G contiene al menos $k.(p - 1)$ aristas con extremos en clases diferentes.

Así entonces, y como corolario se tiene que :

Todo multigrafo sin bucles $2.p$ – arista conexo, se puede reencontrar como unión de p árboles cubrientes arista disjuntos.

Esto puede deducirse también a partir del siguiente Lema de Kundu.

Todo multigrafo sin bucles k –arista conexo tiene al menos $\lceil \frac{k-1}{2} \rceil$ árboles cubrientes arista disjuntos. ($\lceil x \rceil$ significa : menor entero no menor que x)

Por otro lado, todo multigrafo G sin bucles admite cubrimientos con subgrafos que son forestas cubrientes arista disjuntas dos a dos.

Bastaría para ello elegir forestas integradas por conjuntos de aristas no adyacentes y vértices de G .

El menor número de tales forestas cubrientes en que puede descomponerse G es su **arboricidad** (o más precisamente **arista arboricidad**). La notaremos $ar(G)$.

Visto que todo árbol es una foresta es claro que la arista arboricidad del conexo G es uno si y sólo si G es árbol, y que la de K_4 es dos.

También es dos la arboricidad del grafo de aristas $[a, b], [b, c], [b, d], [c, d]$. Uno de los pares de forestas admisibles es el compuesto por el árbol cubriente de aristas $[a, b], [b, c], [c, d]$ y por la foresta cubriente de arista $[b, d]$ y de vértices aislados a, c .

Por otro lado, la admisión de forestas con vértices aislados permite afirmar que la arboricidad de los ciclos elementales C_n ($n \geq 2$) es dos y que la de K_6 es tres.

En [NashW64] se demostró (ver [CharL79]-Cap.3.3 , [Har69b]-Cap.9) que :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Si } G = (V, U) \text{ es un conexo no trivial sin bucles, y sus subgrafos de orden } \\ n_i \text{ tienen a lo sumo } m_i \text{ aristas, } ar(G) = \max_{n_i} \left\lceil \frac{m_i}{n_i - 1} \right\rceil \\ \text{En particular } ar(K_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil ; ar(K_{p,q}) = \left\lceil \frac{p \cdot q}{p+q-1} \right\rceil . \end{array} \right.$$

($\lceil x \rceil$ denota al menor entero no menor que x ; $\lfloor x \rfloor$ significa parte entera de x)

Nótese que :

– $ar(K_{2,p}) = p$ es compatible con el resultado de 1 pág.192 según el cual $K_{2,p}$ se puede descomponer en p cadenas hamiltonianas abiertas, arista disjuntas.

– en [Bei69] se observó que el precedente resultado de Nash Williams permite inferir que : Todo grafo planar es unión de a lo sumo tres forestas.

– en 1 pág.193 se vió que $K_{2,p+1}$ puede cubrirse con p ciclos hamiltonianos arista disjuntos, y esto es compatible con $ar(K_{2,p+1}) = p+1$.

En efecto, elegido en $K_{2,p+1}$ un vértice arbitrario $\underline{a}$, dichos p ciclos hamiltonianos permiten descomponer $K_{2,p+1}$ en el árbol cubriente de aristas que inciden en $\underline{a}$, y en las p forestas cubrientes que componen las cadenas obtenidas a partir de los p ciclos hamiltonianos al quitarles sus aristas incidentes en $\underline{a}$, e incrementarlas con $\underline{a}$ como vértice aislado.

En dicho trabajo no se estudiaron formas de efectivizar las descomposiciones en cuestión. Este problema fue resuelto para el caso de los grafos K_n y $K_{p,q}$ en [Bei64]. (ver [Har69b] Cap9).

También fue estudiada la descomposición de los grafos sin bucles en forestas cada una de sus componentes conexas, son árboles cubrientes.

Si $r(G)$ es el menor número de estas forestas necesarias para descomponer G se tiene que $ar(g) \leq r(G)$.

En [Chu78] se mostró que

$$\left| \begin{array}{l} \text{Para todo grafo sin bucles de orden } n, \text{ con } m \text{ aristas y } p \text{ componentes} \\ (p-1) + \left\lceil \frac{m}{n-p} \right\rceil \leq r(G) \leq \left\lceil \frac{n+p-1}{2} \right\rceil \quad (\lceil x \rceil = \text{menor entero no menos que } x) \\ \text{Así entonces} \left| \begin{array}{l} \text{si } G \text{ es conexo } \left\lceil \frac{m}{n-1} \right\rceil \leq r(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil . \\ r(K_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil = ar(K_n). \quad (\lfloor x \rfloor = \text{parte entera de } x) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

También se estudió, para el caso de grafos sin bucles $G = (V, U)$, la posibilidad de partir V en conjuntos V_i , $i = (1, 2, \dots, h)$ que induzcan forestas disjuntas..

Estas particiones son siempre posibles, pues bastaría al efecto elegir sólo conjuntos V_i con a lo sumo dos vértices.

El número mínimo de tales conjuntos V_i es dicho **vértice arboricidad**.

La vértice arboricidad de G es uno si y sólo si G es árbol, y la de los ciclos elementales es dos.

Para mayor información sobre esta temática consultar : [CharK69], [CharL79], [HakiS89] y [RinLS97].

8.7. ARBORESCENCIAS

Diremos **arborescencia de raíz r** (o **árbol con raíz r**) al digrafo trivial de vértice r , y a todo digrafo conexo con $gr^-(r) = 0$, y $gr^-(x) = 1$, si $x \neq r$.

Los vértices tales que $gr^+(x) = 0$ son sus **hojas**, o **vértices exteriores**
Los restantes, incluida la raíz, son sus **vértices interiores**.

Si T fuera la arborescencia trivial su único vértice sería raíz y hoja, y tanto vértice exterior como interior.

Diremos **antiarborescencia de antirraíz r** a todo digrafo opuesto de una arborescencia de raíz r .

Al considerar arborescencias (antiarborescencias) es frecuente recurrir no sólo a términos propios de la botánica, sino también a otros que reflejan relaciones familiares.

En particular, si una arborescencia tiene pares de arcos de la forma (p, s) ; (p, t) , suele decirse que p es **padre** de los **hermanos** s, t .

Con esta terminología toda arborescencia de raíz r puede verse como "**árbol de descendientes de r** ".

Otra convención sobre "la relación de precedencia entre sus vértices", (la adoptada en pág.39) lleva a reinterpretar a las "arborescencias binarias estrictas" (pág.90) como "**árbol genealógico**" o "**árbol de ascendientes**".

Es claro que :

– el grafo sostén de una arborescencia de raíz r (de una antiarborescencia de antirraíz r) es un árbol con vértice distinguido r .

– de cada árbol, eligiendo uno cualesquiera de sus vértices como raíz, y orientando adecuadamente sus aristas se obtiene una arborescencia (antiarborescencia).

– todo camino elemental abierto $u_1, \dots, u_h$, $h \geq 1$, es arborescencia de raíz en el vértice inicial de u_1 , y antiarborescencia de antirraíz en el final de u_h .

Las arborescencias son estructuras esencialmente recursivas. Una definición de ellas, que tiene ese carácter es la que sigue.

Una arborescencia no trivial $T = (V, U)$ de raíz r es un dígrafo conexo sin bucles tal que

- 1) T contiene un único vértice distinguido r , para el cual $U_r^- = \{ (x, r) \} = \emptyset$
- 2) Si $T - \{ r \} \neq \emptyset$; el mismo está constituido de arborescencias disjuntas T_i de raíces r_i ; con $1 \leq i \leq |U_r^+|$.

La definición precedente es adecuada pues T queda definida en términos de subdígrafos propios, y cada vértice es una arborescencia trivial.

Las arborescencias son ampliamente utilizadas en Informática, y en especial en la implementación de algoritmos.

En lengua inglesa a las arborescencias (antiarborescencias) se les dice *in-trees* (*out-trees*) y muy frecuentemente, en forma indistinta *rooted trees*.

Estos vocablos deben distinguirse del *directed tree*, utilizado habitualmente para designar dígrafos cuyo sostén es árbol.

En [Knu69]-2.3 y [Stan41] se designan "*oriented trees*" a nuestras *arborescencias*, "*ordered trees*" o "*plane trees*" a las que diremos *arborescencias ordenadas* (o *planas*), y "*free trees*" a lo que denominamos *árboles*.

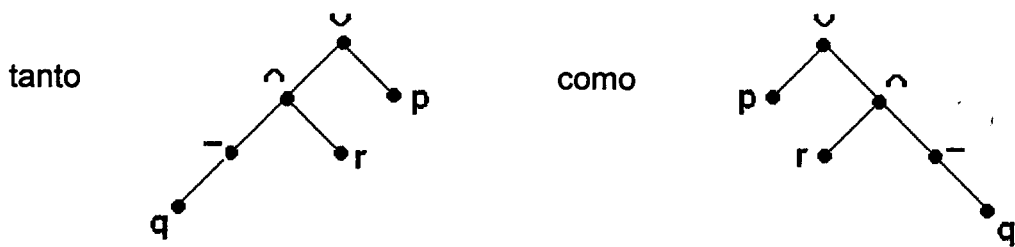
En [Knu69] se supone, además, que salvo mención explícita todos los "trees" a considerar serán "*ordered trees*".

En 8.1 hemos mencionado algunas aplicaciones de las arborescencias.

También se las puede emplear para representar expresiones aritméticas (o lógicas).

En este caso el grado positivo de cada vértice interior dependerá del carácter de la operación allí representada (unaria, binaria, etc.), y sus hojas corresponderán a las distintas ocurrencias de los operandos.

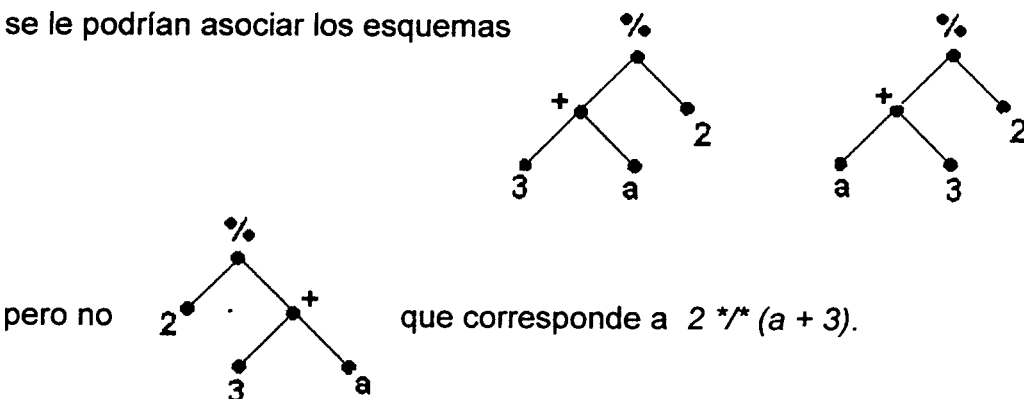
Así por ejemplo, a : $p \cup (-q \cap r)$ pueden asociarse



Si se incluyen operaciones no conmutativas deberá tomarse en cuenta también “como se las representa en el plano”, cuidando de conservar un orden compatible con el de la operación a efectuar.

En tal caso, si $\underline{a}$ representa una operación no conmutativa, para cada par de arcos $(\underline{a}, p)$, $(\underline{a}, q)$ deberemos distinguir si p está a la izquierda, o a la derecha de q

En particular, y respetando el orden izquierda-derecha, a la fórmula $(3 + a) * 2$ se le podrían asociar los esquemas



Para analizar estas situaciones recurriremos a configuraciones que serán dichas “*arborescencias ordenadas*” (o “*planas*”). Ver 8.10.

Así como la Prop.8.2.1 reúne varias formas de introducir el concepto *árbol*, la siguiente provee diferentes maneras de dar el de *arborescencia*.

Dejamos su demostración a cargo del lector.

Proposición 8.7.1

Cada una de las siguientes afirmaciones equivale a: T es arborescencia (de raíz r y orden n).

- 1) T es conexo tal que $gr^-(r) = 0$ y $gr^-(x) = 1$ cualquiera sea $x \neq r$.
- 2) T es de orden n , con raíz r , y $(n - 1)$ arcos.
- 3) T tiene un vértice r desde donde hay un único camino hasta cualquier otro.
- 4) T tiene raíz y pierde esta propiedad si se le quita un arco.
- 5) T tiene vértice raíz y carece de ciclos.

Así entonces, y recordando lo afirmado en pág.17 según lo cual un multidigrafo es casi unilateralmente conexo hacia atrás si y sólo si tiene al menos una raíz se tiene que

Las arborescencias pueden definirse como digrafos casi unilateralmente conexos hacia atrás, minimales en cuanto a su número de arcos.

Por lo tanto cabe la siguiente afirmación, que recuerda a otra análoga válida en el caso no orientado.

Un multidigrafo es casi unilateralmente conexo hacia atrás (admite raíces) si y sólo si contiene arborescencias cubrientes.

En [Ber70], [BerGH62], [GonM79], [Roy69a], [SwaT81] se dan proposiciones similares de la precedente 8.7.1

En muchas circunstancias, para operar con arborescencias será útil clasificar sus vértices en función de sus respectivas distancias orientadas a la raíz.

Así, dada una arborescencia de raíz r es habitual designar

- **altura (profundidad, nivel) de su vértice v** a la longitud del camino $r \rightarrow v$.
- **altura de la arborescencia** a la mayor de las alturas de sus hojas.

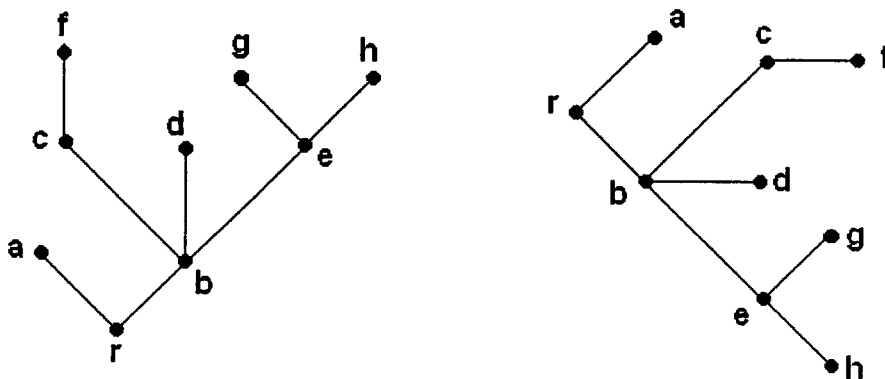
Es obvio que la arborescencia trivial tiene altura (o profundidad) cero, y que vértices hermanos tienen un mismo nivel (o profundidad)..

La altura de cada vértice puede tomarse como indicador del tiempo (o del número de etapas) que requeriría alcanzarlo a partir de la raíz.

Afirmaciones similares a las precedentes son válidas para antiarborescencias.

Modificando levemente la metodología indicada en Ejerc.8 -11) resulta que cada arborescencia puede representarse limpiamente en el plano, ubicando sus vértices de acuerdo con sus alturas (niveles); es decir, tomando en cuenta las respectivas distancias orientadas al vértice raíz.

Así por ejemplo la misma arborescencia de raíz r admite las representaciones



En la tabla que sigue se indican los niveles $N(x)$ y los grados positivos $gr^+(x)$ de los vértices de la arborescencia anterior.

x	r	a	b	c	d	e	f	g	h
$N(x)$	0	1	1	2	2	2	3	3	3
$gr^+(x)$	2	0	3	1	0	2	0	0	0

Véase que si los vértices se suponen ordenados lexicográficamente de izquierda a derecha en cada nivel, la tabla precedente determina unívocamente a la arborescencia de partida.

Las arborescencias suelen representarse también por esquemas que no tienen semejanza con los anteriores.

Por ejemplo :

— mediante diagramas de barras,

en ellos cada barra identifica un vértice, y cada arborescencia A queda representada por la barra asociada a su vértice raíz, y las consecutivas de menor longitud, representativas de los restantes vértices de A .

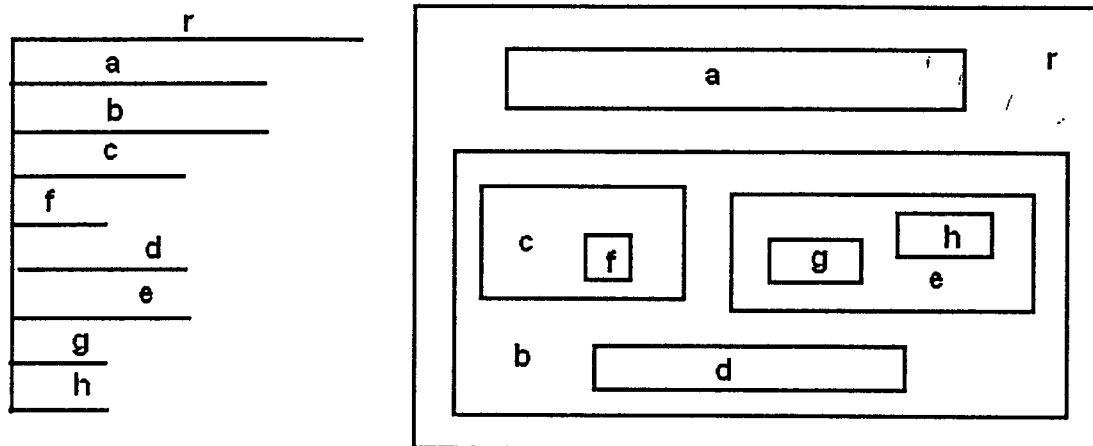
— o mediante esquemas de conjuntos filtrantes

es decir, de conjuntos tales que cada dos de ellos son disjuntos; o bien, uno está contenido en el otro.

— o mediante pares de paréntesis filtrantes

sucesiones en las cuales los vértices de cada subarborescencia están entre pares de paréntesis que constituyen conjuntos filtrantes.

Así, para la arborescencia precedente tendríamos : $r \{ a, b [c (f), d, e (g, h)] \}$



En Informática, y con vista al manejo de estas estructuras con equipos de computación, se analizan otras formas de representarlas.

Destaquemos ahora que un muy interesante resultado de Göbel [Göb80] establece una correspondencia biyectiva entre el conjunto de las arborescencias y el de los números naturales.

Para fijarla se atiende a la descomposición de éstos en sus factores primos.

Dicha correspondencia, una "transformación transitoria" de los árboles en arborescencias, y las precedentes Prop.8.2.2 y 8.2.3 han permitido proponer un par de "codificaciones numéricas de los árboles". (ver [ChiG90], [ChiLS95])

Según se tome en cuenta el centro, o el centroide del árbol, dichas codificaciones asignan de manera inyectiva, pero lamentablemente no biyectiva, a cada árbol un número natural cuya descomposición en factores primos responde a características diferentes,

Estas valuaciones nos retrotraen a la idea de Wiener [Wie47a/47b], ya citada en el Prólogo de 1, de correlacionar ciertos parámetros de los hidrocarburos parafínicos con índices obtenidos en función de las distancias existentes entre los pares de vértices del grafo representativo de la molécula en cuestión. La utilidad de esta idea hizo que fuera luego seguida por numerosos investigadores.

8.8. RECUESTO DE ARBORESCENCIAS

Dado un árbol, y elegido uno cualesquiera de sus vértices, es posible orientar sus aristas de forma que resulte una arborescencia.

Por lo tanto, a cada árbol de orden n se le pueden asociar n arborescencias, no necesariamente no isomorfas.

Así entonces, como hay n^{n-2} árboles etiquetados de orden n , resulta que el número de arborescencias (antiarborescencias) etiquetadas de orden n es n^{n-1} .

En particular, etiquetadas de orden tres hay nueve.

Seis de ellas, que son también antiarborescencias, son isomorfas con el camino (a, b) , (b, c) . Las tres restantes son isomorfas con la de arcos (a, b) , (a, c) . Sus respectivas opuestas son antiarborescencias.

El número de arborescencias (no etiquetadas) de orden n , $1 \leq n \leq 15$, es :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Nro	1	1	2	4	9	20	48	115	286	719	1.842	4.766	12.486	32.973	87.811

Esta tabla se extiende en [Rio58]-pg.138, en [Har69b]-Apend.3 y en [HarP73]-Apénd.1, hasta $n = 26$, orden para el cual el número de ellas es 5.759.636.510.

En [Tri83]-Vol.II se la extiende hasta $n = 50$.

En [Deo74]-Sec10.3 y en [Rio58]-6.7 se deduce una expresión que permite determinar por recurrencia el número que nos ocupa y se observa que la complejidad inherente a su uso hace más recomendable recurrir a "funciones generatrices".

Al respecto, y volviendo sobre algo ya observado en pág.53, notemos que para evaluar el número de árboles, y el de arborescencias, es habitual recurrir a las "funciones generatrices de arborescencias" $A(x)$, y a las "funciones generatrices de árboles" $T(x)$.

Ellas satisfacen la relación $T(x) = A(x) - \frac{1}{2} A^2(x) + \frac{1}{2} A(x^2)$ que suele ser asignada a [Ott48], aún cuando según [Knu69] -2.3.4.4 parece haber sido vislumbrada ya en 1869 por Jordan.

Para más información [Deo74]-Cap.10.3, [Har69b]-Cap15, [HarP73]-Cap.3, [Rio58]-Cap.6.7.

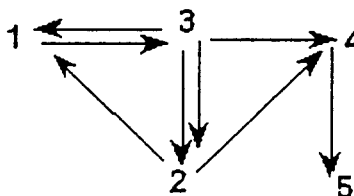
En 8.4 hemos señalado, para el caso no dirigido, ciertas relaciones entre las Matrices de Incidencia y las Matrices de Kirchhoff, y señalado que el número de *árboles cubrientes* de K_n , o equivalentemente el de *árboles etiquetados de orden n* puede obtenerse evaluando cofactores de éstas.

Resultados similares caben para el caso dirigido, considerando ahora "*Matrices de Kirchhoff según filas*" ("*según columnas*") definidas, respectivamente, por :

$$K_f(G) \left| \begin{array}{l} \text{para } i \neq j \quad k_{i,j} \text{ es el opuesto del número de arcos } (i,j) \\ \text{para } i = j \quad k_{i,i} = -\sum_j k_{i,j}, \quad (j \neq i). \end{array} \right.$$

$$K_c(G) \left| \begin{array}{l} \text{para } i \neq j \quad k_{i,j} \text{ es menos el número de arcos } (i,j). \\ \text{para } i = j \quad k_{j,j} = -\sum_i k_{i,j}, \quad (j \neq i). \end{array} \right.$$

Así por ejemplo, dado



$$K_f = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad K_c = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Es claro que

- $K_f(G) = K_c(G)$ si y solo si G es balanceado.
- $\det K_f(G) = \det K_c(G) = 0$
- Si G es multigrafo $K(G) = K_f(G^s) = K_c(G^s)$
- Si G es multidigrafo sin bucles $K_c(G) + (K_f(G))^t = K(\underline{G})$
- $K_f(G) = (K_c(G^{op}))^{tr}$.
- si G tiene p componentes conexas y los vértices se numeran adecuadamente estas matrices toman forma bloque diagonal con p bloques.
- Si G es un camino cerrado elemental $K_f(G) = K_c(G)$.

Las siguientes son afirmaciones similares de otras hechas en pág.54. :

- Si G carece de bucles, $P(G)$ es su matriz precedencia, $D^+(G)$ su matriz grado positivo, y $D^-(G)$ su matriz grado negativo, entonces

$$K_f(G) = D^+(G) - P(G). \quad \parallel \quad K_c(G) = D^-(G) - P(G).$$

- Si G es un multidigrafo sin bucles, no discreto, y $\underline{G}$ es su sostén, entonces

$$B(G) \cdot (B(G))^{\text{tr}} = K(\underline{G})$$

La matriz $(B(G))^{\text{tr}} \cdot B(G)$ suele decirse “versión arista de $K(\underline{G})$ ”.

Una demostración del siguiente y conocido resultado puede verse en [ChiS99]-Cap.7.

Sea G un multidigrafo de n vértices con $(n-1)$ arcos, y $K_{c,jj}(G)$ ($K_{f,jj}(G)$) la submatriz de $K_c(G)$ ($K_f(G)$) que se obtiene eliminando su j -ésima fila y su j -ésima columna.

G es arborescencia (antiarborescencia) de raíz x_j si y sólo si

$$\det.K_{c,jj}(G) = 1 \quad (\det.K_{f,jj}(G) = 1).$$

$$\text{En todo otro caso } \det.K_{c,jj}(G) = 0 \quad (\det.K_{f,jj}(G) = 0).$$

De lo precedente puede deducirse el siguiente e importante resultado.

Proposición 8.8.1. *Matriz Tree Theorem (caso dirigido).*

Dado un multidigrafo G :

El número A_i de sus arborescencias cubrientes con raíz v_i coincide con el cofactor en $K_c(G)$ de cualquier elemento de la i -ésima columna.

El número B_i de sus antiarborescencias cubrientes con antirraíz v_i coincide con el cofactor en $K_f(G)$ de cualquier elemento de la i -ésima fila.

$$\text{En particular } A_i = \det(K_c(G))_{i,i} \quad \text{y} \quad B_i = \det(K_f(G))_{i,i}.$$

Al respecto ver [AarEB51], [BotM54], [CharL79], [Chen71a], [ChiS99], [Har69b], [Mau76], [TutS41], [SwaT81]

Remitiéndonos al ejemplo anterior, de los cofactores de las correspondientes K_c y K_f resulta que hay cuatro arborescencias con raíz en el vértice 1, y ninguna antiarborescencia con dicho vértice como antirraíz.

En [Ori78] se llegó al resultado anterior utilizando el principio de inclusión-exclusión y en [GouJ83] dentro de un contexto más general que el nuestro. También fue generalizado, y aplicado a configuraciones valuadas. Ver [Chai81], [ChaiK78], [DedP85], [Lewn82])

8.9. ARBORESCENCIAS Y CAMINOS EULERIANOS

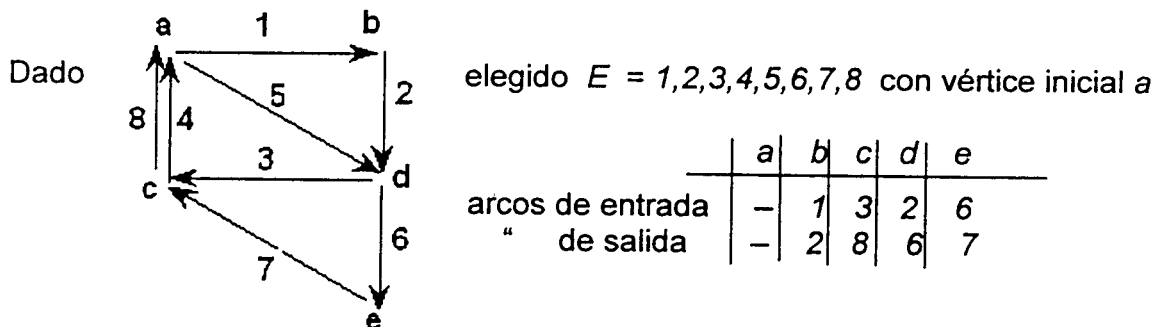
Nuestro siguiente propósito es referirnos a una interesante relación entre caminos eulerianos y arborescencias (antiarborescencias).

Recordemos al efecto que un multidigrafo admite camino euleriano cerrado si y sólo si es conexo balanceado, y convengamos lo siguiente :

Dado un camino euleriano cerrado $E : u_1, u_2, \dots, u_m$ y supuesto que $\underline{a}$ es el vértice inicial de u_1 (final de u_m) diremos, para cualquier $x \neq \underline{a}$, **arco de entrada a x** (**arco de salida de x**) **relativo a E** al arco con vértice final (inicial) x que tiene menor (mayor) subíndice en la sucesión que define E .

Coloquialmente, si $x \neq \underline{a}$, el arco u_i es de entrada a x (de salida de x) relativo a E si es el primero (el último) de los arcos de $E : u_1, \dots, u_m$ que inciden en x .

Visualizemos lo dicho con el siguiente ejemplo :



Proposición 8.9.1.

Si E es un camino euleriano cerrado de G , con vértice inicial $\underline{a}$, y H es el conjunto de arcos de entrada (de salida) relativos a E entonces, H es una arborescencia cubriente de raíz $\underline{a}$ (antiarborescencia cubriente de antirraíz $\underline{a}$).

Demostración

Supongamos que G es de orden n , y que H está formado por los $(n - 1)$ arcos de salida respecto de cierto camino de Euler.

Veamos que H carece de ciclos.

Si H contuviera los arcos $u = (p, q)$, $u' = (q, r)$, en la sucesión que define E' al arco u' debería corresponderle un índice mayor que el de u , pues de lo contrario se volvería al vértice q luego de "haberlo abandonado por última vez" y sería necesario abandonarlo de nuevo.

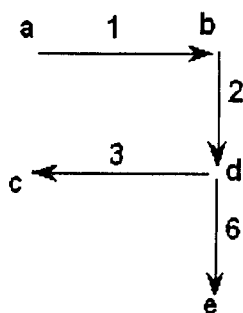
Por lo tanto H carece de caminos cerrados, y visto que para todo x su grado positivo es a lo sumo uno, H carece de ciclos.

Como además los vértices de G superan en uno a los arcos de H se puede afirmar que su sostén constituye un árbol cubriente de G .

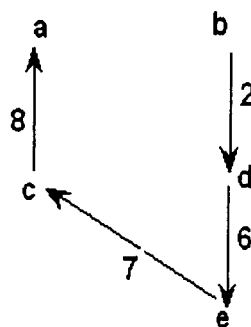
Además, si $x \neq \underline{a}$, $gr^+(x) = 1$ y por lo tanto H es antiarborescencia cubriente de antirraíz $\underline{a}$.

Razonamientos similares son válidos para arborescencias y arcos de entrada.

En particular, para el ejemplo precedente tendremos :



arborescencia de arcos entrada
con raíz a



antiarborescencia de arcos salida
con antirraíz a

Además, como todo circuito euleriano puede darse en la forma $u_1, u_2, \dots, u_m$ con u_1 prefijado, y los arcos de entrada (salida) respecto de distintos caminos eulerianos cerrados pero con igual vértice inicial (final) determinan arborescencias (antiarborescencias) diferentes cada uno de dichos caminos da lugar a una única arborescencia (antiarborescencia) de arcos de entrada (salida), se tiene la

Proposición 8.9.2

Sea G un multidigrafo conexo, balanceado de orden n , y $\underline{a}$ el vértice inicial del arco u_1 .

—Si H es una antiarborescencia cubriente de antirraíz $\underline{a}$, el número de caminos eulerianos cerrados con primer arco u_1 , que admiten a los arcos

de H como arcos de salida es $NE(G) = \prod_{i=1}^n (gr^+(x_i) - 1) !$

—Si H es una arborescencia cubriente de raíz $\underline{a}$, el número de caminos eulerianos cerrados con último arco u_m , que tienen a los arcos de H como

arcos de entrada es $NE(G) = \prod_{i=1}^n (gr^-(x_i) - 1) !$

Demostración

Supondremos que H es antiarborescencia de antirraíz $\underline{a}$. Luego, $u_1 \notin H$.

Fijada H asignemos naturales diferentes a los arcos de G de cualquier manera compatible con la siguiente regla

R₁ u_1 es numerado 1, los restantes arcos de $U_{\underline{a}}^+$ (si los hay) se numeran en forma arbitraria, y para cada $x \neq \underline{a}$ de los números asignados a los arcos de vértice inicial x se reserva el mayor para el arco que integra H .

Con tal numeración la aplicación de la siguiente **R₂** permitirá determinar un único camino euleriano cerrado de primer arco u_1 .

R₂ Luego de elegir el arco u_1 se reitera tanto como sea posible lo siguiente : elegido $u_i \in U_x^-$, se escoge como arco u_{j+1} aquel de los arcos de U_x^+ aún no utilizados que tienen menor número asignado.

Puesto que G es balanceado el proceso indicado sólo puede detenerse en el vértice $\underline{a}$, quedando así fijado un camino C cerrado en $\underline{a}$, de primer arco u_1 .

Veamos que C es euleriano.

Caso contrario existiría un arco $(v_i, v_j) \notin C$, pero entonces alguno de los arcos de $U_{v_j}^+$, y con seguridad el que integra H , no estaría en C .

Si éste fuera (v_j, v_k) tampoco estaría en C el arco de H con vértice inicial v_k , y reiterando el razonamiento quedaría determinado un camino C' con arcos de H , omitidos en C .

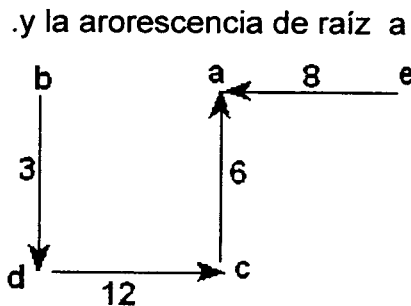
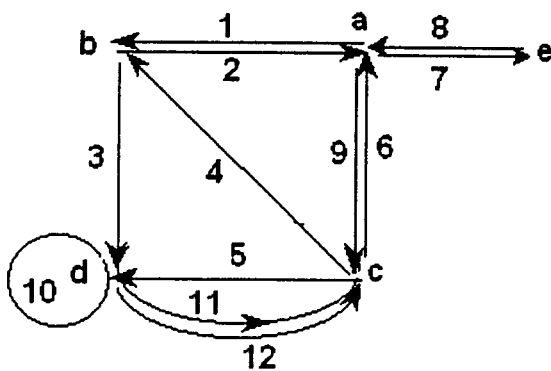
Como H carece de caminos cerrados, C' debiera ser abierto de extremo final $\underline{a}$, pero en tal caso faltaría considerar al menos uno de los de $U_{\underline{a}}^+$, en contradicción con la hipótesis de que no es posible continuar con la aplicación de **R₂**.

Así entonces, aplicando R_2 se determina un camino euleriano cerrado de primer arco u_1 , que está unívocamente determinado.

Pero, como en cada vertice es posible elegir arbitrariamente $(gr^+(x) - 1)!$ numeraciones que respetan R_1 resulta finalmente que $NE(G) = \prod_{i=1}^n (gr^+(x_i) - 1)!$

Para el caso en que H es arborescencia puede razonarse en forma similar, o recurrir a la correspondencia biyectiva entre arborescencias de G , antiarborescencias de su opuesto, y al carácter de balanceado del multigrafo G .

Así por ejemplo, dado

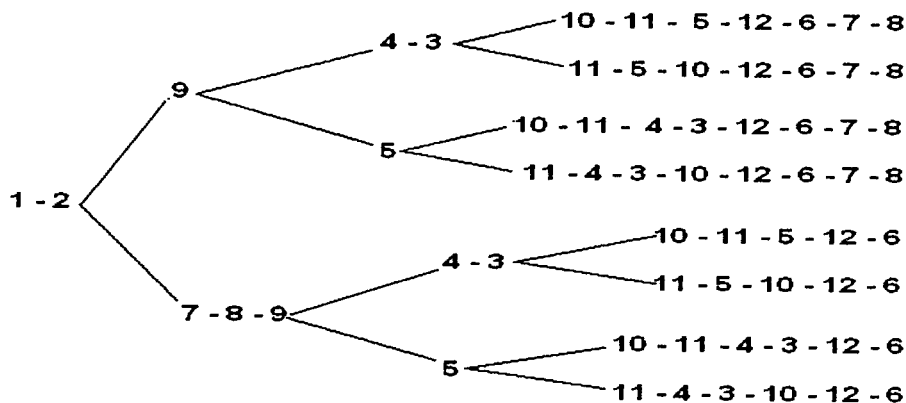


De la tabla

X	a	b	c	d	e
$gr^+(x)$	3	2	3	3	1

 y lo visto resulta $NE(G) = 8$

Los ocho caminos eulerianos cerrados en a, de primer arco 1 que satisfacen las restricciones de la proposición anterior son :



También hay ocho caminos eulerianos cerrados en a, de primer arco 7.

Nótese que

Asociando arcos de salida con arborescencias (arcos de entrada con antiarborescencias)

no serían válidas afirmaciones similares a las de la Prop.8.9.2.

En efecto, en el K_3^s de arcos $p = (1, 2)$, $q = (2, 3)$, $r = (3, 1)$ y sus respectivos opuestos $\check{p}$, $\check{q}$, $\check{r}$ hay tres caminos eulerianos de primer arco p , a saber :

$$e_1 = p, \check{p}, \check{r}, \check{q}, q, r \quad \parallel \quad e_2 = p, q, \check{q}, \check{p}, \check{r}, r \quad \parallel \quad e_3 = p, q, r, \check{r}, \check{q}, \check{p}$$

Sus antiarborescencias de arcos de salida, y de raíz 1 son : $q, r \parallel \check{p}, r \parallel \check{q}, \check{p}$.

En cambio, para ambos e_2 , e_3 correspondería la misma arborescencia p, q , de arcos de entrada ; mientras que a e_1 se asociaría la arborescencia $p, \check{r}$.

Además, la arborescencia $\check{r}, \check{q}$ no sería de arcos de salida de ninguno de los caminos e_1 , e_2 , e_3 .

Veamos finalmente la validez de la siguiente afirmación debida a [AarEB51].

Proposición 8.9.3

Si G es un multidigrafo de orden n , $\underline{a}$ es uno de sus vértices y A_a (B_a) su cantidad de arborescencias (antiarborescencias) cubrientes de raíz (antirraíz) $\underline{a}$, el número de circuitos eulerianos de G es

$$NE(G) = A_a \prod_{i=1}^n (gr^-(x_i) - 1)! = B_a \prod_{i=1}^n (gr^+(x_i) - 1)! \quad @$$

Demostración

Razonaremos para el caso de antiarborescencias, el otro es similar.

La justificación es consecuencia de :

- todo circuito euleriano se puede dar en la forma $u_1, \dots, u_m$ y cada camino euleriano cerrado de primer arco u_1 determina una única antiarborescencia cubriente de arcos de salida.
- si $\underline{a}$ es el vértice inicial de u_1 y H_1, H_2 dos antiarborescencias cubrientes de antirraíz $\underline{a}$, los caminos eulerianos cerrados de primer arco u_1 que tienen por arcos de salida a los de H_1 son distintos de aquellos que satisfacen igual restricción pero respecto de H_2 .

Por lo tanto, si hay, B_a de éstas, la Prop.8.9.2 permite afirmar que el número de caminos eulerianos cerrados de primer arco u_1 es el indicado en @.

Corolarios:

1)

Si todo $gr^+(x) \in \{0, 1\}$ (y puesto que $0! = 1! = 1$) el número de circuitos eulerianos coincide con el de arborescencias (antiarborescencias) cubrientes de raíz (antirraíz) $\underline{a}$.

2)

Si G es euleriano el número de arborescencias cubrientes de raíz $\underline{a}$ coincide con el de antiarborescencias cubrientes de antirraíz $\underline{a}$.

Además, este número es independiente del vértice elegido como raíz (antirraíz).

Pues $NE(G)$ esta fijo y $\prod_{i=1}^n (gr^-(x_i) - 1)! = \prod_{i=1}^n (gr^+(x_i) - 1)!$ no depende de $\underline{a}$.

3)

En todo multidigrafo de orden n , con $m > 2.n$ arcos el número de circuitos eulerianos es par, eventualmente nulo.

En efecto :

Si G no es euleriano lo afirmado se cumple vacuamente.

Caso contrario, si para todo x se tuviera $gr^+(x) \leq 2$ se llegaría a $m \leq 2.n$, en contradicción con la hipótesis $m > 2.n$.

Por ello existe al menos un x_i tal que $gr^+(x_i) \geq 3$ pero entonces $(gr^+(x_i) - 1)!$ es par, y por lo tanto también el número de los caminos buscados.

4)

Los simetrizados de C_n y K_n contienen, respectivamente, n y $n^{(n-2)} \cdot (n-2)!$ circuitos eulerianos.

En efecto, C_n tiene n árboles cubrientes, y fijado en todos ellos un mismo vértice arbitrario r quedan fijadas n arborescencias cubrientes de C_n^s de raíz r .

En todos sus vértices $gr^-(x_i) = 1$ y como $0! = 1$ resulta que $NE(C_n^s) = n$.

Análogamente, fijando en los n^{n-2} árboles cubrientes de K_n un mismo vértice raíz r se tienen n^{n-2} arborescencias cubrientes de K_n^s con raíz r , y como en ellas, en cada uno de sus vértices, $gr^-(x_i) = (n - 1)$ resulta que $NE(K_n^s)$ satisface lo indicado

Se extiende así el resultado dado en 1 Ejerc. 4-20

Como el número A_j de arborescencias (B_j de antiarborescencias) cubrientes de G con raíz (antirraíz) v_j coincide con el cofactor de cualquier elemento de la j -ésima columna (j -ésima fila) de la correspondiente Matriz de Kirchhoff resulta que @ de la Prop.8.9.3 admite la siguiente reformulación.

$$NE(G) = \det K_{c,jj} \cdot \prod_{i=1}^n (gr^-(x_i) - 1)! = \det K_{f,jj} \cdot \prod_{i=1}^n (gr^+(x_i) - 1)!$$

Por esto, a la Proposición 8.9.3, y a partir de las iniciales de los nombres de los autores involucrados en ella, suele denominársela *BEST Theorem*.

Esta temática también fue tratada en [Ori78] donde, además de dar otra deducción del precedente Corolario 1 probado inicialmente en [Tut48a], se reencontró una fórmula de [Knu67] para hallar el número de arborescencias cubrientes de los digrafos adjuntos. Ver [Tut84].

Además, en [JacG79/81] se obtuvieron resultados que llevan a evaluar el número de "arborescencias cromáticas" y a generalizar el BEST Theorem.

Por otra lado, como los circuitos eulerianos de un multidigrafo se corresponden biyectivamente con los circuitos hamiltonianos de su adjunto, de lo visto resulta factible deducir una expresión para evaluar el número de circuitos hamiltonianos en digrafos adjuntos.

Al respecto porían consultarse [Chi82], [Kas63/67], [Ori78]..

8.10. ARBORESCENCIAS ORDENADAS (o PLANAS)

En 8.7 hemos destacado que a cada expresión algebraica (lógica) puede asociársele una arborescencia con tantas hojas como ocurrencias de operandos haya en la expresión, y en la que el grado positivo de sus vértices interiores dependerá del carácter (unaria, binaria, etc.) de la operación allí representada.

Además hemos observado que si cierto vértice interior $\underline{a}$ corresponde a una operación no conmutativa, para cada par de arcos $(\underline{a}, p)$, $(\underline{a}, q)$ interesará diferenciar si en la representación plana correspondiente p está a la izquierda, o bien a la derecha de q

Con más generalidad, dada una arborescencia T de raíz r podría ser necesario tomar en cuenta el orden en que se dan (o se emplean) sus subarborescencias $T_i \subseteq T - \{r\}$; y esto puede verse como equivalente a tener que considerar la forma en que T_i están ubicadas en el plano.

Para enfatizar tales situaciones diremos **arborescencia ordenada** (o **plana**) a toda arborescencia en que se suponga introducido un orden entre sus subarborescencias.

Algunos resultados relativos a la enumeración de arborescencias ordenadas pueden verse en [DerZ80], [Kui70], [Rio75].

Al considerarlas es habitual suponer que “los vértices de un mismo nivel están ordenados (transversalmente) de izquierda a derecha”; y referirse a *subarborescencia izquierda* (*derecha*) ; *hermano izquierdo* (*derecho*) ; *arco extremo a izquierda* (*a derecha*) ; y otras expresiones similares.

En particular, en los siguientes esquemas la subarborescencia izquierda de $\mathcal{T}_1$ es la subarborescencia derecha de $\mathcal{T}_2$, mientras que en ambas c es hermano izquierdo de d .



Es claro que si x es vértice interior de una arborescencia plana T , y $gr^+(x) = 1$ hay una única subarborescencia de T con raíz x .

Convendremos en considerarla subarborescencia “a izquierda”.

También se podría optar por elegirla “a derecha”.

Estas posibilidades serán consideradas explícitamente en 8.12.3.

Se dirá **foresta plana** (u **ordenada**) a todo digrafo formado de arborescencias planas T_i , supuesto que también se toma en cuenta el orden en que están dadas las raíces de las distintas T_i .

Así entonces : Si T es una arborescencia ordenada (no trivial) de raíz $\underline{a}$
 $T - \{\underline{a}\}$ es una foresta ordenada.

La presencia de una estructura arborescente ordenada (plana) permite introducir en el conjunto donde ella está definida diversos órdenes totales; o sea, diferentes formas de listar sus elementos.

Ellos permitirán extender a todo par de vértices el orden trasversal izquierda-derecha que se supone existe entre los de igual nivel.

A continuación nos referiremos a tres de dichos órdenes totales. Al enunciarlos tomaremos “*estar a izquierda de*” como sinónimo de “*ser menor que*”.

8.10.1) Orden total por Precedencia (o Preorden)

Se conviene que cada vértice de una arborescencia está a la izquierda de todos sus descendientes y que si p es hermano izquierdo de q , entonces p y todos sus descendientes están a la izquierda de q .

Así entonces, dados en T los vértices u, v , resulta que u está a la izquierda de v si y sólo si u es ascendiente de v ; o si de los ascendientes de u y de v que son hermanos (quizás ellos mismos) el de u está a la izquierda del de v .

Para todo par de vértices cabe una tal comparación, y por lo tanto el orden así establecido es, efectivamente, un orden total.

Para explicitarlo numeraremos secuencialmente los vértices de la arborescencia en análisis, aplicando reiteradamente y en tanto queden vértices sin ser visitados por segunda vez las reglas :

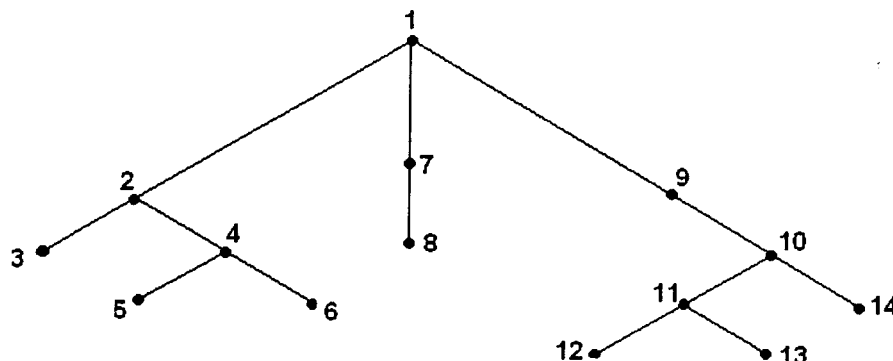
- 1) La raíz se numera 1 y se pasa a 2).
- 2) Si x está numerado i , y tiene descendientes directos aún no numerados se numera $i+1$ el extremo izquierdo de éstos y se reitera 2) aplicándola al recién numerado.
Si en cambio x carece de tales descendientes, o si todos ellos fueron numerados, se pasa a 3.
- 3) Si y es el precedente del vértice x en consideración se vuelve a 2), aplicándola a y .

El proceso anterior puede reinterpretarse como fijando en la arborescencia un recorrido que empieza y termina en su raíz, y tal que emplea cada uno de sus arcos exactamente dos veces, la primera en el sentido de su orientación, y la segunda en el opuesto.

El orden total que se fija sobre los vértices es el que resulta de numerarlos al visitarlos por primera vez.

En particular, el primer (último) vértice de T numerado será su raíz (su hoja extrema derecha).

En la arborescencia que sigue su "ordenamiento por preorden" es el inducido por la sucesión de naturales con que se etiquetaron los vértices.



El doble recorrido de T al que nos hemos referido es el dado por la sucesión :
1, 2, 3, 2, 4, 5, 4, 6, 4, 2, 1, 7, 8, 7, 1, 9, 10, 11, 12, 11, 13, 11, 10, 14, 10, 9, 1.

El subrayado indica la primera vez en que se visita un cierto vértice,

Cada una de sus subsucesiones con j ($1 \leq j \leq 14$) en ambos extremos corresponde a una subarborescencia de raíz j .

Así por caso para la subsucesión 2,3,2 (idem la 2,3,2,4,5,4,6,4,2).

A este orden por precedencia volveremos en 8.11 para introducir la "notación polaca prefija", que permite eliminar el uso de paréntesis.

Adoptando una manera diferente de etiquetar los vértices el "orden por preorden" puede llevar a la que es habitual para indicar, en los libros, sus capítulos, secciones, párrafos, etc.

Esta manera de etiquetar fue visualizada en pág.40 aplicándola a la misma arborescencia precedente, y por razones fáciles de entender el orden en cuestión también suele ser denominado *orden lexicográfico*, o *del diccionario*.

8.10.2) Orden Total por Descendencia (o Postorden)

Otra extensión del citado orden transversal de izquierda a derecha se obtiene conviniendo que

Cada vértice está a la derecha de todos sus descendientes, y si p es hermano izquierdo de q ; entonces q y todos sus descendientes están a la derecha de p .

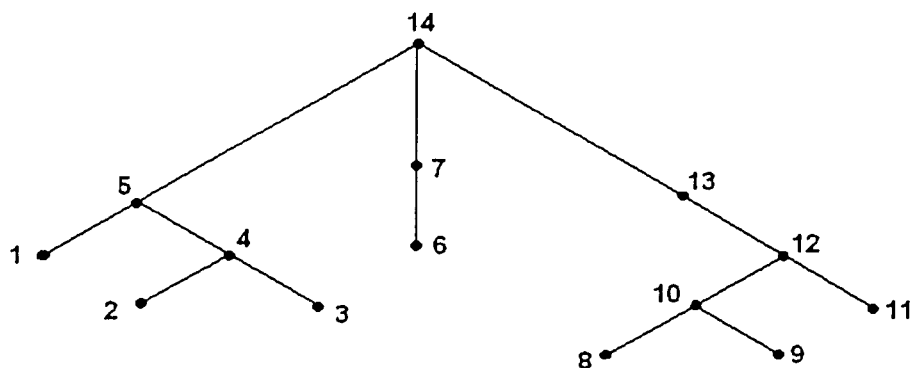
Ahora, dados en T dos vértices u, v , resulta que u está a la izquierda de v , si y sólo si u es descendiente de v , o si de los ascendientes de u y de v que son hermanos (quizás coincidentes con ellos) el de u está a la izquierda del de v .

Para *recorrer por postorden* los vértices de una arborescencia plana no trivial de orden n basta con :

- a) numerar 1 a la hoja extremo izquierdo de T .
- b) reiterar $(n - 1)$ veces la regla : numerar $(j + 1)$ la hoja extremo izquierdo de $T - \{1, 2, \dots, j\}$

Al aplicar la ordenación de referencia se tiene que el primer (último) elemento visitado en T es su hoja extremo izquierdo (su raíz).

El siguiente etiquetamiento de los vértices de la arborescencia dada precedentemente corresponde a su ordenación por postorden.



8.10.3) Orden Total por Interclusión (o Centrado, o Simétrico)

Este ordenamiento, aplicado a las arborescencias que tienen todas sus hojas de igual altura y todos sus vértices interiores con dos hijos, lleva a un etiquetamiento de los vértices que justifica se lo denomine *simétrico*, o *centrado*.

Convendremos que si T es una arborescencia de raíz r , y las arborescencias de $T - \{r\}$ son, de izquierda a derecha, $T_1, T_2, \dots, T_h$, entonces

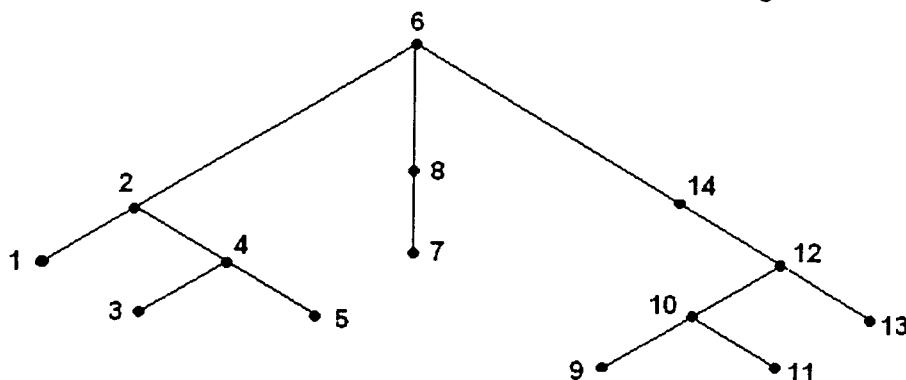
- a) – si $h \geq 2$ cada vértice de T_i ($1 \leq i < h$) está a la izquierda de los incluidos en los distintos T_j , $i < j \leq h$.
- b) – r está a la derecha de los vértices de T_1 y a la izquierda de los incluidos en las restantes T_i , si las hay.
- c) – los distintos T_i están ordenados por interclusión.

Dados dos vértices u, v , para decidir cual de ellos está a la izquierda bastará hallar un w , ascendente común de ellos y ordenarlos en la arborescencia de la cual w es raíz.

La ordenación resultará de etiquetar secuencialmente los vértices siguiendo las siguientes reglas, y sobreentendiendo que al aplicarlas “numerar” equivale a “etiquetar aumentado en uno el último de los números naturales ya utilizado como etiqueta”.

- :
- 1) Sea s la hoja extrema izquierda de T_1 . Se la etiqueta 1, y se pasa a 2).
 - 2) Sea s' el precedente de s . Si s' está etiquetado, y también si no lo está, – pero luego de numerarlo – se pasa a 3).
 - 3) Si hay arborescencias de raíz s' aún sin recorrer se denota s a su hoja extremo izquierda, se la numera, y se vuelve a 2)
Caso contrario, s' se substituye por s y se vuelve a 2).

Ahora la misma arborescencia anterior quedaría recorrida según se indica.



Al aplicar este ordenamiento los vértices de cada subarborescencia extrema izquierda resultan menores que los de su raíz, y ésta menor que los restantes.

Dada una arborescencia plana T de raíz r , por aplicación reiterada de esta metodología resultará que la hoja extremo izquierdo de T se etiquetará 1, y su raíz r con $(1 + n_1)$, siendo n_1 el orden de la arborescencia extremo izquierda de T .

De estos órdenes caben las siguientes formulaciones recursivas abreviadas.

- del orden por precedencia (preorden)
Etiquetar la raíz de T y luego, excepto ya se hayan numerado todos los vértices, recorrer en preorden a la menor de las arborescencias de $T - \{r\}$ aún no recorridas.

- del orden por descendencia (postorden)
Recorrer en postorden la menor de las arborescencias de $T - \{r\}$ aún no visitada y finalmente visitar su raíz r .
- del orden por interclusión (centrado - simétrico)
Recorrer en orden centrado la arborescencia extremo izquierda de $T - r$.
Numerar su raíz, y luego recorrer en orden centrado las sucesivas arborescencias extremo izquierdas.

De los órdenes en cuestión caben las siguientes “visualizaciones”.

Si T es una arborescencia de raíz r ; p es hermano izquierdo de q ; y $T_p (T_q)$ es la subarborescencia de T , de raíz $p (q)$, tendremos, al ordenarla :

por *precedencia*, que si $x \in T_p, y \in T_q : r < p < \{x\} < q < \{y\}$

por *descendencia* que si $x \in T_p, y \in T_q : \{x\} < p < \{y\} < q < r$

Análogamente, y supuesto que $T - \{r\} = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_h$ tendremos, al ordenarla por *interclusión*

que si $x \in T_1, y_j \in T_j : \{x\} < r < \{y_2\} < \{y_3\} < \dots < \{y_h\}$

Todos estos ordenamientos asignan a cualquier arborescencia plana de orden n la misma sucesión $1, 2, 3, \dots, n$.

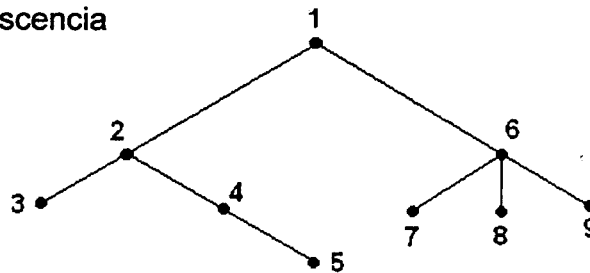
Por consiguiente, no permitirían reencontrar una única arborescencia inicial.

Para lograr esto sería necesario agregarles información, y a tal efecto se han propuesto diferentes formas.

Para el caso de arborescencias *recorridas por precedencia* podríamos optar por alguna de las convenciones que siguen.

- i)
ubicar los vértices de cada arborescencia entre pares de paréntesis filtrantes.
- ii)
tomar en cuenta el grado positivo de cada vértice.
- iii)
atender al número $w(x)$ de vértices de la arborescencia de raíz x .

Así por ejemplo, la arborescencia



aplicando i) sería representada por $1 \{ 2 [3 , 4 (5)] ; 6 [7 , 8 , 9] \}$.

En efecto, la arborescencia de raíz 1 tiene dos subarborescencias, a saber :
la izquierda de raíz 2 con hijos 3, 4, y la derecha de raíz 6 y hojas 7, 8 , 9.

Con igual hipótesis sobre como fueron numerados los vértices, llegaríamos a la misma arborescencia a partir de la siguiente tabla, aplicando ya sea ii) , o iii).

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$gr^+(x)$	2	2	0	1	0	3	0	0	0
$w(x)$	9	4	1	2	1	4	1	1	1

Estas codificaciones presentan ventajas de diferentes tipos.

Así por caso :

- la i) permite reemplazar, sin modificaciones esenciales, una subarborescencia por otra.
- la ii) permite reconocer fácilmente sus hojas.
- la iii) permite reconocer sus hojas y detectar, con la lectura de sólo su primera columna, la magnitud de la arborescencia por almacenar.

Más aún, adoptando iii) los vértices que integran la arborescencia de raíz x son los numerados y_i , con $x \leq y_i \leq (x + w(x) - 1)$.

En particular, la subarborescencia de raíz 2 es de orden cuatro, y está integrada por los vértices 2,3,4,5.

Esto facilitaría la determinación, y eventual reemplazo de cada una de ellas por otra de igual orden.

En [Read72a/72b] se dan otras formas de codificar árboles, o arborescencias, y en [Roy69a]-Cap.V-D más información sobre "órdenes" y "preórdenes" asociados con éstas.

8.11. NOTACIONES LIBRES DE PARENTESISIS

Los precedentes órdenes totales están vinculados con distintas formas en que es posible notar una misma expresión algebraica.

Así por ejemplo la "suma de a con b " puede indicarse : $a + b$, o bien $+ a, b$, o bien $a, b +$.

Ellas corresponden, respectivamente, al recorrido por interclusión, o por preorden, o por postorden, de la siguiente arborescencia ordenada.



En particular, el ordenamiento por preorden (por postorden) nos lleva a la notación libre de paréntesis desarrollada por el lógico C.L. Lukasiewicz, y conocida como *notación polaca prefija* (*postfija*).

La idea básica de estas dos notaciones es colocar el símbolo que indica la operación a realizar inmediatamente a la izquierda (a la derecha) de los correspondientes a los operandos sobre los cuales ella actúa.

Esto, obviamente, presupone tener en cuenta si la operación es unaria, binaria, ternaria, etc.

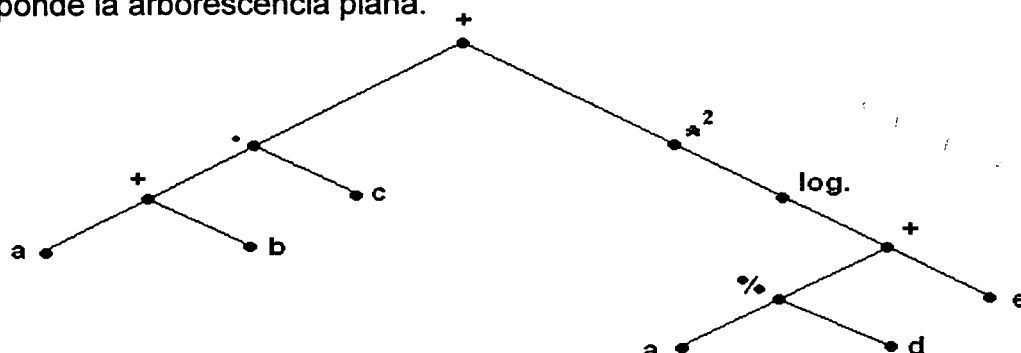
Por ejemplo, si con $A (M)$ denotamos la operación Adición (Multiplicación) en lugar de $(a + b) \cdot c$ tendremos

$M A a b c$ $a b A c M$	adoptando la notación prefija " " postfija.
----------------------------	--

Análogamente, en lugar de $a + (b \cdot c)$ tendríamos $A a M b c$ con notación prefija y $a b c M A$ con notación postfija.

En general, para hallar la formalización sin paréntesis prefija (postfija) de una expresión algebraica basta con recorrer por precedencia (descendencia) la arborescencia que la representa.

Así por ejemplo, a la expresión $((a + b) \cdot c) + (\log. [(a \cdot d) + e])^2$ [I]
corresponde la arborescencia plana.



Reemplazando las operaciones : $+ \parallel \cdot \parallel \cdot^2 \parallel \log \parallel */$, respectivamente,
por : $A \parallel M \parallel P \parallel L \parallel D$ tendremos,

al recorrerla por preorden $A M A a b c P L A D a d e$ [II]

“ por postorden $a b A c M a d D e A L P A$ [III]

Apelando al orden por interclusión se reencontraría la expresión inicial [I] .

Observemos que haciendo en [II] los cambios sintácticos necesarios se obtendría la formalización que permitiría evaluarla en lenguaje FORTRAN.

Obviamente, para evaluar una fórmula primero debemos determinar el orden en que se han de realizar las operaciones involucradas.

Este trabajo de búsqueda y análisis puede reducirse notablemente recurriendo a las notaciones libres de paréntesis.

En éstas, el conocimiento del carácter (unario, binario, etc.) de cada operación permitirá evaluarla “*más linealmente*”.

En efecto, la forma habitual de calcular el valor de [I] lleva a efectuar las operaciones en el orden que se indica $((a + b) \cdot c) + (\log. (a \cdot d) + e)^2$

1 2 7 5 3 4 6

Con [II] tendríamos $A M A a b c P L A D a d e$ y con [III] $a b A c M a d D e A L P A$
721 6543 1 2 3 4567

Ahora, el orden en que deben hacerse las operaciones coincide con el que tienen en [III] sus símbolos identificatorios, y con el opuesto del que tienen, por sectores, en [II]. Nada similar cabe respecto de [I].

La conmutatividad de algunas de las operaciones involucradas nos permitirían construir otras arborescencias, y otras formalizaciones sin paréntesis.

En 8.12.2 se dará, para el caso en que sólo se empleen operaciones binarias, otra forma de introducir una notación sin paréntesis.

8.12. ARBORESCENCIAS BINARIAS y BINARIAS REFLEJAS

Cada uno de los conceptos : *árbol* ; *arborescencia* ; *arborescencia ordenada* (o *plana*) se puede considerar restricción del que lo precede.

En esta sección nos referiremos a dos nociones de las cuales sólo una puede incluirse dentro de las anteriores.

Ambas suelen recibir el mismo nombre y por lo tanto confundirse.

Son aptas, en especial, para analizar procesos de clasificación dicotómica ; es decir, basados en procesos en los cuales cada instancia admite dos resultados, complementarios y excluyentes. Estos son propios de los problemas de *sorting*, *searching* y *coding*, que aborda la Informática.

Una de estas nociones, que diremos "*arborescencia binaria*" y que es fácilmente generalisable a la de "*arborescencia t-aria*" (ver Ejer.8 – 45) se considerará seguidamente.

Para la restante, que introduciremos en 8.12.3 y es de uso frecuente en Informática se supondrá que en toda arborescencia no trivial cada vértice distinto de hoja es raíz de una subarborescencia izquierda y de una subarborescencia derecha, una de ellas eventualmente vacía.

Les diremos "*arborescencias binarias reflejas*".

8.12.1. ARBORESCENCIAS BINARIAS

Diremos que una arborescencia es **binaria** (en sentido amplio) si para todos sus vértices $gr^+(x) \in \{0, 1, 2\}$

La arborescencia trivial, y aquellas otras en las cuales cualquiera sea su vértice interior x se tiene $gr^+(x) = 2$ se dirán **binarias estrictas**.(*fully binary trees* , *complete binary trees*).

Si además interesa tomar en cuenta el orden en que se dan sus subarborescencias se les agregará el calificativo *ordenada* (o *plana*). En Cap. 9 veremos algunas de sus posibles aplicaciones a cuestiones de codificación.

Elas están presentes en circunstancias muy diversas. Así por ejemplo :

- todo programa de computación puede esquematizarse por un diagrama arborescente en el que $gr^+(x)$ es 0, 1, 2, según que x represente, respectivamente, un resultado final, o bien una operación a realizar, o bien una etapa en la cual hay que decidir entre un par de posibilidades.
- son “arborescencias binarias estrictas” los “árboles genealógicos” si se adopta la convención de pág.39; y los “árboles de descendientes” si se adopta la de pág.65.

En [Ore60b/63a].y en [Ore62] Cap.9 se dieron condiciones para que un digrafo bipartido (progenitores – hijos) pueda ser parte de un “árbol genealógico”. (ver Ejerc.8-49)

En Ejerc.8-45) se extienden a las “*t-arias estrictas*” las afirmaciones :

- Las arborescencias binarias estrictas de altura (profundidad) p tienen a lo sumo 2^p hojas, y al menos $p + 1$ hojas.
- Las que además son no triviales de h hojas tienen $(h - 1)$ vértices interiores (incluida la raíz).

De esto resulta que para determinar el ganador de un torneo por eliminación de entre pares en el cual intervienen h equipos serán necesarios $(h - 1)$ encuentros, sin importar la paridad de h .

Como en las *arborescencias binarias estrictas no triviales* el número de vértices exteriores supera en uno al de interiores, ellas son de orden impar.

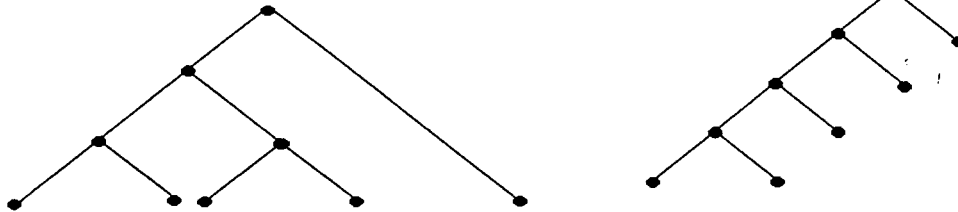
Así entonces, visto :

- que la altura (profundidad) p de una arborescencia es a lo sumo igual al número de sus vértices interiores,
- que en arborescencias binarias no triviales el número h de hojas supera en uno al de vértices interiores y satisface $h \leq 2^p$ se tiene que

Las arborescencias binarias estrictas, no triviales, de h hojas son de orden $n = (2.h - 1)$ y tienen altura p con $\lceil \log_2 h \rceil \leq p \leq (h - 1)$.

A su vez, el orden de las de altura p satisface $2.p+1 \leq n \leq 2^{p+1} - 1$
 ($\lceil x \rceil$ significa menor entero no menor que x .)

Las siguientes arborescencias muestran que para $h = 5$ las cotas indicadas no son mejorables.



Una afirmación similar vale para el caso de las t -arias estrictas.

Creemos útil tener presente que la siguiente operatoria permite asignar a cada arborescencia binaria B de orden p , una arborescencia binaria estricta B^* con $(p + 1)$ hojas, y por ende de orden $(2.p + 1)$.

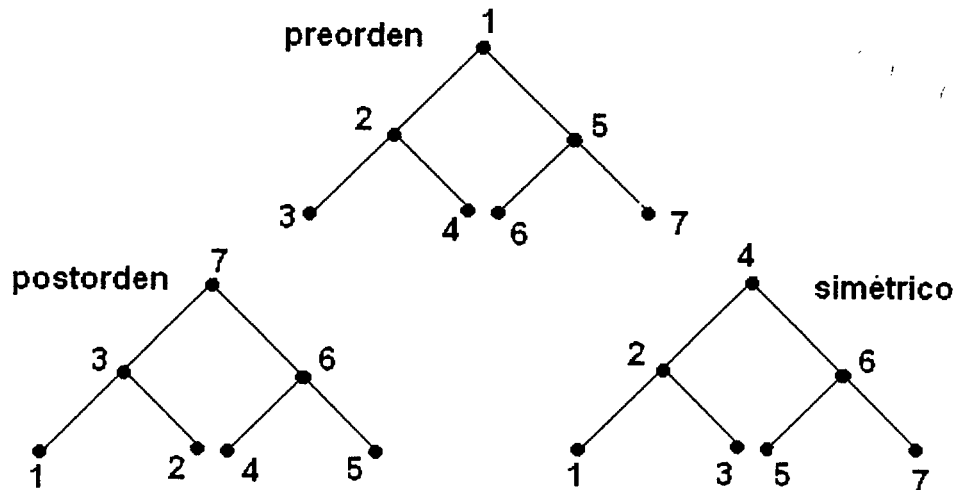
En efecto, si B es una arborescencia binaria de orden p , agregándole un descendiente a cada uno de sus vértices de grado positivo uno, y dos descendientes a cada una de sus hojas se la extiende a una arborescencia binaria estricta B^* con p vértices interiores, y por lo tanto con $(p + 1)$ hojas.

Naturalmente, las reglas dadas en 8.10 para introducir órdenes totales en arborescencias planas admiten formalizaciones más simples en el caso de arborescencias binarias estrictas.

Ellos resultarán de aplicar tanto como posible las siguientes reglas :

- | | |
|------------------|---|
| por precedencia | 1) visitar la raíz. |
| | 2) recorrer en preorden la subarborescencia izquierda |
| | 3) " " " " derecha. |
| por descendencia | 1) recorrer en postorden la subarborescencia izquierda. |
| | 2) " " " " derecha. |
| | 3) visitar la raíz. |
| por simétrico | 1) recorrer en orden simétrico la subarborescencia izquierda. |
| | 2) visitar la raíz. |
| | 3) recorrer en orden simétrico la subarborescencia derecha. |

En particular, llevarían a la arborescencia ordenada binaria estricta con todas sus hojas de altura dos a los siguientes etiquetamientos.



Véase que si una arborescencia binaria estricta se recorre en orden simétrico :

- los vértices de sus subarborescencias izquierdas (derechas) preceden (si-
guen) a su raíz.
- a sus hojas (vértices interiores) corresponden etiquetas impares (pares).
- si además todas las hojas tienen igual altura la raíz esta en el centro de la
sucesión que determinan los de la correspondiente arborescencia.

Las ventajas operativas resultantes de este ordenamiento llevan a designar "*arborescencia de búsqueda*" a toda arborescencia binaria estricta recorrida según el orden simétrico.(o centrado).

A esta temática se dedican capítulos en [CharL79] [HorS76], [Knu69], [Sah81], [Stan41] y [Tar83].

Obviamente, las "arborescencias binarias estrictas" están muy ligadas con los "procesos dicotómicos"

Así por ejemplo, partiendo en dos la sucesión $\{ a, b, c \}$ pueden obtenerse, bien el par $\{ a, b \}, \{ c \}$; o bien el par $\{ a \}, \{ b, c \}$.

Una nueva bipartición llevaría a la sucesión de los unitarios $\{ a \}, \{ b \}, \{ c \}$.

Estas operatorias pueden representarse, respectivamente, por las arborescencias.



En general, dada una sucesión de n elementos, las distintas formas en que es posible reiterar biparticiones hasta obtener una sucesión de n conjuntos unitarios se pueden representar por las distintas arborescencias ordenadas binarias estrictas de n hojas.

La eficacia de estos procesos puede evaluarse en términos del número de operaciones a efectuar.

Más precisamente, dada una tal arborescencia de raíz r , el número de biparticiones necesarias para llegar desde r a cierta hoja x coincide con la longitud del camino $r \rightarrow x$; o sea, con la altura de x .

En consecuencia, la altura de una arborescencia binaria estricta de raíz r mide "el mayor número de comparaciones que puede ser necesario tener que aplicar a r " en el proceso dicotómico de biparticiones, respetando consecutividades.

Este "mayor número de comparaciones eventualmente necesarias" puede reinterpretarse como "peor performance posible"

Si la notamos p ; de lo visto en pág.91 resulta que para el caso de las arborescencias binarias estrictas de h hojas dicha "peor performance p " satisface $\lceil \log_2 h \rceil \leq p \leq (h - 1)$.

Un razonamiento similar para el caso de aplicar " t -particiones (entre contiguos)" a una suceión de n elementos permite, utilizando arborescencias t -arias estrictas, afirmar que en tal caso "las peores performances p_t " están en el intervalo

$$\lceil \log_t n \rceil \leq p_t \leq \frac{n-1}{t-1}. \quad (\lfloor x \rfloor = \text{menor entero no menor que } x).$$

Obviamente, los "valores de ramificación t " influyen notoriamente en la amplitud de estos intervalos. Así por caso, para $n = 9$, se tiene que $4 \leq p_2 \leq 8$ mientras que $2 \leq p_3 \leq 4$.

Para destacar la importancia de disponer de un buen ordenamiento de los elementos de un conjunto basta imaginar las dificultades que presentaría hallar determinado número telefónico en una guía cuyos datos no estuvieran ordenados lexicográficamente.

Por ello se han propuesto numerosos “algoritmos de ordenamiento” (o “métodos de selección”), y un primer problema en relación con ellos es el de estimar el número máximo de iteraciones que pueden llegar a requerir.

Por ejemplo, para ordenar según valores crecientes los elementos de la sucesión 9, 4, 3, 6, 1, podríamos convenir en concretarlo efectuando sucesivas comparaciones entre pares de contiguos.

Esto nos podría llevar a la secuencia : 9,4,3,6,1 $\parallel$ 9,4,3,1,6 $\parallel$ 9,4,1,3,6 $\parallel$ 9,1,4,3,6 $\parallel$ 1,9,4,3,6 $\parallel$ 1,9,3,4,6 $\parallel$ 1,3,9,4,6 $\parallel$ 1,3,4,9,6 $\parallel$ 1,3,4,6,9.

Obviamente, para obtener la sucesión buscada fueron necesarias ocho modificaciones, de ellas cuatro involucraron al 1, y dos al 3.

Aplicando el mismo procedimiento para el caso de n elementos la peor situación podría llevar a tener que efectuar hasta $(n-1)+\dots+2+1 = \binom{n}{2}$ comparaciones.

Por ello, aplicando el método anterior a una sucesión de cardinalidad n , y en las *peores performances* podrían requerirse hasta $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ iteraciones.

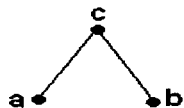
Se resume esto diciendo que “el orden de procesamiento” de este *método del burbujeo* (*bubble sort*) es $O(n^2)$,

Naturalmente, cabe preguntarse si podrán darse otros métodos, definidos también en base a comparaciones de pares de contiguos, cuyos “órdenes de procesamiento” mejoren la cota anterior.

Esta pregunta admite respuesta positiva.; ya que dicha cota puede reducirse a $O(n \ln(n))$.

En efecto, las operaciones dicotómicas involucradas podrían asociarse a

esquemas de la forma



que podrían significar :

- i) c identifica “al mejor del par a, b ”.
- ó
- ii) c está al menos “tan ordenado como el que más, del par a, b ”.

Por ello, si a partir de ciertos "estados iniciales" $x_1, x_2, \dots, x_h$ se ha llegado, reiterando tales operaciones binarias a un "estado final" x_f el proceso efectuado podría ser representado por una arborescencia ordenada binaria estricta de hojas $x_1, \dots, x_h$ y de raíz x_f .

Así entonces, a cada uno de estos procesos de ordenamiento (o de selección) se le podría asociar una arborescencia cuya raíz correspondiera a la solución buscada, cuya altura midiera las eventuales "peores performances", y cuyas hojas permitieran representar todos los posibles estados iniciales a tomar en cuenta.

En consecuencia, y puesto que para abordar estas cuestiones en el caso de conjuntos de n elementos habría que considerar arborescencias binarias estrictas con $n!$ hojas, por lo visto en pág.91 resulta que

*Para ordenar linealmente un conjunto de n elementos, recurriendo a sucesivas comparaciones de pares de contiguos, las arborescencias asociadas serán de altura p , con $\lceil \log_2(n!) \rceil \leq p \leq (n! - 1)$.
($\lceil x \rceil$ = al menor entero no menor que x).*

Por lo tanto, el orden del menor número de comparaciones que, en sus peores performances, pueden llegar a requerir aún los más eficientes de estos algoritmos es $O(\lceil \log_2(n!) \rceil)$,

Veamos que $O(\lceil \log_2(n!) \rceil)$ puede reformularse como $O(n \cdot \ln(n))$.

En efecto, si $L = \log_2(n!)$ y $M = \log_2(e)$ se tiene $L = M \cdot \ln(n!) = M \cdot \sum_{k=1}^n \ln.k$

Además $M \cdot \int_1^n \ln(x) dx \leq L \leq M \cdot \int_2^{n+1} \ln(x) dx$ de donde

$$M \cdot [n \cdot \ln(n) - n + 1] \leq L \leq M \cdot [(n+1) \cdot \ln(n+1) - 2 \cdot \ln 2 - n + 1]$$

Una deducción alternativa del hecho que para conjuntos de n elementos el orden del número mínimo de comparaciones de pares, en las peores circunstancias, es $O(n \cdot \ln(n))$ puede verse en [Johs84] Cap5-6.

Para destacar la importancia que puede tener la elección del método a seguir basta tener presente que si $n = 50$, $n^2 = 2.500$, mientras que $n \cdot \log_2 n$ es, aproximadamente, de sólo 300.

Un método de ordenamiento por comparación de pares cuyo orden de procesamiento es $O(n \cdot \ln(n))$ es el denominado "método de inmersión" (*merge sort*).

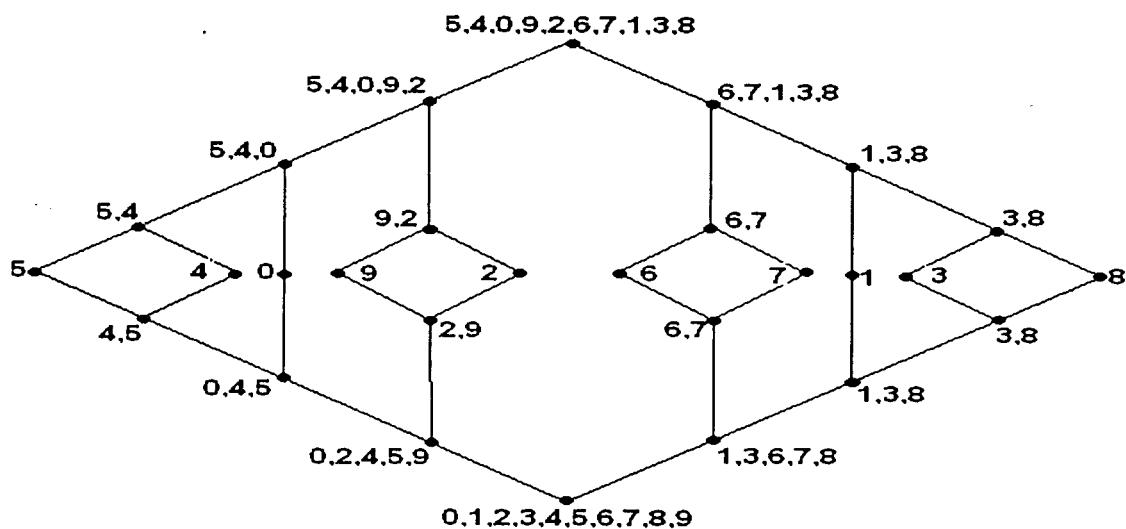
Lo esbozaremos diciendo que :

Consiste en efectuar sucesivas divisiones en dos partes tan equinumerosas como sea posible, y reordenar adecuadamente sus elementos.

Para su justificación ver [Gri85]-Cap.12-3, [Knu69]-Vol.III, o [Tuc80]-Cap.9.5.

En [Tuc80] se observa que, como el trabajo que conlleva efectuar las subdivisiones iniciales es también de orden $O(n \ln(n))$, para valores pequeños de n el método del burbujeo puede ser más eficaz que el de inmersión.

Aplicarlo a la sucesión 5,4,0,9,2,6,7,1,3,8 lleva al siguiente esquema.



Del mismo resulta que tras nueve particiones, y una vez alcanzada la sucesión de conjuntos unitarios 5,4,0,9,2,6,7,1,3,8 para obtener el reordenamiento buscado serían necesarios nueve agrupamientos de pares contiguos.

Podría verse que aplicando a la sucesión precedente el "método del burbujeo" serían necesarias 17 reordenaciones.

Una construcción que se muestra muy útil para el manejo de estructuras arborescentes ordenadas es la llamada "*correspondencia natural*".

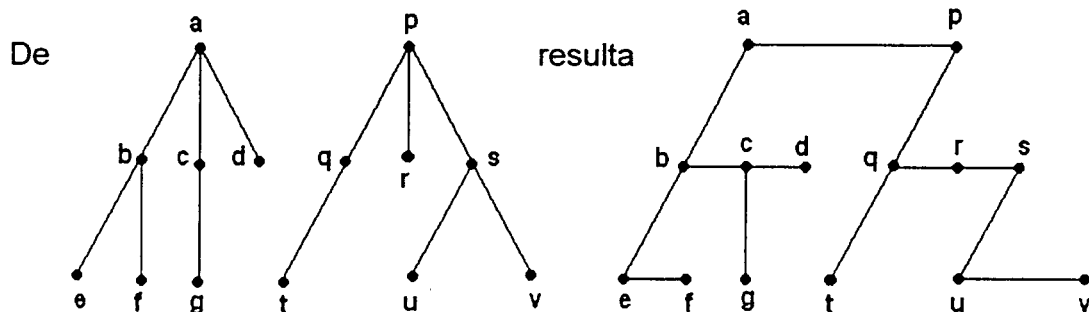
Al efecto ver [Gers82], [HorS76/78], [Knu69]-2.3.2, ó [Stan41].

Ella fija la siguiente correspondencia entre "*forestas planas*" y "*arborescencias binarias planas (ordenadas)*", con arcos de dos clases", ambas de igual orden.

Dada una *foresta ordenada* F , compuesta de k arborescencias A_i de raíces r_i ($1 \leq i \leq k$), la *arborescencia binaria plana asociada* A_F , con arcos de dos clases es la que resulta de aplicar las siguientes reglas :

- Si $k \geq 2$ se supone que las distintas raíces están en un mismo nivel y se las conecta con “arcos horizontales (r_i, r_{i+1}) ”, $1 \leq i < k$.
- En cada A_i , y para cada vértice interior x , de los arcos (x, y) se conserva sólo su arco extremo izquierdo. Todos los otros (si existen) se substituyen por “arcos horizontales (p, q) ”, supuesto que q es el hermano derecho más próximo de p .

Ejemplo



Es claro que una adecuada operatoria con los “arcos horizontales” permitiría reencontrar la foresta ordenada inicial, fijándose así una biyección.

Visto que eliminando la raíz de una arborescencia plana no trivial se obtiene una foresta ordenada, la correspondencia natural permite asociar a cada arborescencia plana no trivial de orden n otra, binaria ordenada con arcos de dos clases y de orden $(n - 1)$.

8.12.2. ARBORESCENCIAS BINARIAS ESTRUCTAS ORDENADAS

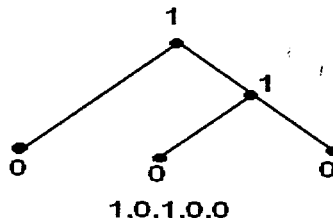
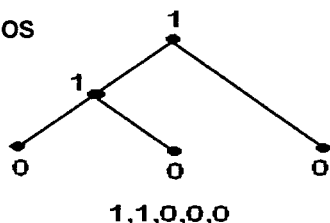
Seguidamente nos referiremos a una codificación de las arborescencias ordenadas binarias estrictas debida al lógico polaco Lukasiewicz.

Ella nos permitirá dar un algoritmo para generarlas, y evaluar su número.

A tal efecto, dada una arborescencia binaria estricta de $h \geq 2$ hojas etiquetaremos con 0 sus hojas, y con 1 sus $(h - 1)$ vértices interiores.

Al recorrerla por precedencia queda fijada una sucesión $x_1, x_2, \dots, x_k$ con h símbolos 0, y $(h-1)$ símbolos 1, tal que $x_1 = 1$ y $x_{k-1} = x_k = 0$.

Así tendríamos



Al respecto destaquemos que si $S = x_1, x_2, \dots, x_k$ con $x_i \in \{0, 1\}$ es la sucesión obtenida al recorrer según acabamos de indicar una tal arborescencia, entonces :

- i) no es factible descomponerla en dos subsucesiones que representen arborescencias análogas.

Pues no podría ser que en ambas el número de 0 superara en uno, al de 1.

- ii) ninguna de las permutaciones circulares de S correspondería al recorrido por precedencia de alguna arborescencia del tipo en cuestión.

Pues las permutaciones a considerar serían del tipo $x_{i+1}, \dots, x_k, x_1, \dots, x_i$ con $x_{i+1} = x_1 = 1$; $x_i = x_{j-1} = x_k = x_{k-1} = 0$; y el vértice interior que ahora representaría x_1 sólo podría ser "hijo a derecha" de alguno de los de la arborescencia que determina $x_{j+1}, \dots, x_k$ modificando alguno de los x_s ($i+1 \leq s \leq k$).

Veamos que en consecuencia, cualquiera sea la sucesión S , con $h \geq 2$ ceros y $(h-1)$ unos, ella, o bien una y sólo una, de sus permutaciones circulares corresponde al recorrido por precedencia de una arborescencia binaria plana estricta con hojas etiquetadas 0 y vértices interiores etiquetados 1.

En efecto, por hipótesis puede afirmarse que la sucesión S , o alguna de sus permutaciones circulares, contiene al menos una terna $t_1 = 1,0,0$. Substituyendo la terna t_1 por 0 se obtiene una sucesión S_1 en la que también el número de ceros supera en uno al de unos, y ella o alguna de sus permutaciones circulares también contiene una terna $t_2 = 1,0,0$, que podría ser substituida por 0.

Por sucesivas reiteraciones de la operación precedente se llega, finalmente, a la sucesión $S_{h-2} = 1,0,0$ cuyos dos 0 provienen, en general, de reemplazos de ternas $1,0,0$.

Como cada reemplazo de una tal terna puede verse como la substitución de una arborescencia (de orden tres) por su raíz, re-etiquetada 0, resulta que "des-hacer" a partir de S_{h-2} y en el orden inverso del que fueron realizadas, las substituciones que llevaron a construirla da lugar a una sucesión S^* que es permutación circular de S y corresponde al recorrido por precedencia de una arborescencia plana binaria estricta A con h hojas etiquetadas 0.

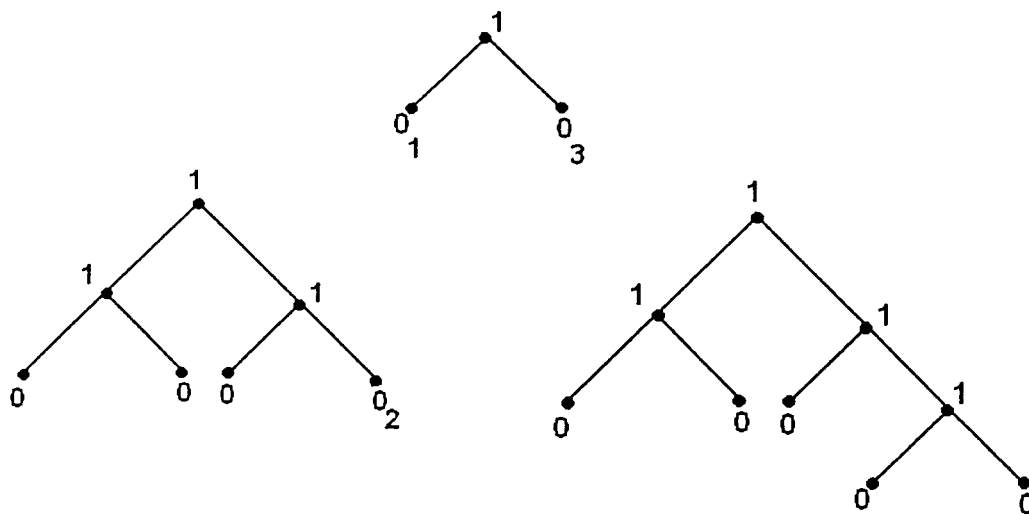
Que S^* es la única de las permutaciones circulares de S que identifica por precedencia a una tal arborescencia es consecuencia de lo visto en ii).

Seguidamente, y ejemplificando lo antedicho, hallaremos la arborescencia binaria estricta así asociada a la sucesión $S = 1,0,0,1,0,1,0,0,1$.

Al efecto, y conviniendo en poner "momentáneamente" $0_1, 0_2, 0_3$, a los 0 que reemplazarían a las sucesivas ternas $1,0,0$ a tomar en cuenta, tendríamos :

$$S_1 = 0_1, 1, 0, 1, 0, 0, 1 \quad \backslash \quad S_2 = 0_1, 1, 0, 0_2, 1 \quad \backslash \quad S_3 = 0_1, 0_3, 1 \quad (0_3 = 1, 0, 0_2)$$

De donde, $1, 0_1, 0_3 \quad \backslash \quad 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0_2 \quad \backslash \quad 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0$ que corresponden a los recorridos por precedencia de los siguientes esquemas



Véase que la sucesión $1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0$ es precisamente una permutación circular de la S inicial.

Restringiéndose al caso de operaciones binarias, la precedente codificación de Lukasiewicz induce una forma diferente de la dada en 8.11 para operar libre de paréntesis.

Por ejemplo, la expresión algebraica $[(a \# b) \# c] \# [(d \# e) \# (f \# g)]$ queda representada por una arborescencia binaria que al ser recorrida por precedencia da origen a la sucesión de Lukasiewicz 1110001100100.

Ella, y la sucesión abcdefg permitirían evaluar la expresión que nos ocupa.

Lo siguiente visualiza como podría operarse a tal efecto.

```

1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0   a b c d e f g
1 1 (ab) c 1 (de) (fg)
1 { (ab) c } { (de) (fg) }
( { (ab) c } { (de) (fg) } )

```

De lo dicho, y visto que el número de sucesiones con $h \geq 2$ ceros, y $(h-1)$ unos es $\binom{2h-1}{h-1}$ se tiene que el número b_h (B_n) de arborescencias planas binarias estrictas con h hojas (de orden $n = 2h-1$) es

$$b_h = B_n = \frac{1}{2h-1} \binom{2h-1}{h-1} = \frac{1}{h} \binom{2h-2}{h-1} = \frac{(2h-2)!}{h! \cdot (h-1)!} = \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n+1}{2}\right)! \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)!}$$

Una deducción de las fórmulas anteriores empleando "funciones generatrices" se puede ver en [Stan41]-Cap.3, o en [Knu69]-2.3.44, donde además se dan otros resultados relativos a esta cuestión.

La siguiente tabla da, incluyendo también a la arborescencia trivial, el número de arborescencias binarias estrictas ordenadas con h hojas (idem de orden n) para $1 \leq h \leq 10$ ($1 \leq n \leq 19$)

H	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
$B_n = b_h$	1	1	2	5	14	42	132	429	1.430	4.862

Las arborescencias ordenadas binarias estrictas de h hojas se pueden clasificar según el número j de hojas de su subarborescencia izquierda (idem derecha), y esto lleva a una forma recurrente de calcular los valores b_h .

Más precisamente, y como ellas son distintas si y sólo si difieren en al menos una de dichas subarborescencias su número resulta de aplicar :

$$b_1 = 1 \quad b_h = \sum_{i=1}^{h-1} (b_i \cdot b_{h-i}) \quad \text{para los } h \geq 2. \quad \#\#$$

Así entonces :

$$b_{2k+1} = 2 \sum_{i=1}^k (b_i \cdot b_{2k+1-i}) . \text{ Por lo tanto, si } h \text{ es impar, } h \neq 1, b_h \text{ es par.}$$

$$b_{2k+2} = \sum_{i=1}^k (b_i \cdot b_{2k+2-i}) + (b_{k+1})^2 + \sum_{i=k+2}^{2k+1} (b_i \cdot b_{2k+2-i}) = (b_{k+1})^2 + 2 \sum_{i=1}^k (b_i \cdot b_{2k+2-i})$$

Los citados valores b_h se presentan en relación con problemas muy diversos, en diferentes ramas del quehacer matemático.

En particular, dada la sucesión a, b, c , de elementos no necesariamente distintos entre sí hay dos formas de reiterar en ella la aplicación de una "operación binaria entre contiguos". A saber : $((a,b),c)$ y $(a,(b,c))$.

Obviamente ellas pueden asociarse a las arborescencias de pág.99 (idem 104).

Análogamente, dada la sucesión a, b, c, d , (no necesariamente distintos dos a dos) hay cinco formas de aplicarle reiteradamente una tal operación binaria.

A saber :

$((a,b),c),d) \parallel ((a,(b,c)),d) \parallel ((a,b),(c,d)) \parallel (a,((b,c),d)) \parallel (a(b(cd)))$.
que pueden asociarse con las arborescencias de pág.105

En general,

Dada una sucesión de h elementos, el número de formas en que es posible aplicar $(h - 1)$ veces una operación binaria entre contiguos coincide con el número b_h de arborescencias planas binarias estrictas de h hojas.

Por otra parte, y según se refiere en [Gabr81], Euler se preguntó, en 1751, sobre el número c_s de formas en que un polígono convexo de $(s + 2)$ vértices puede "descomponerse en triángulos" trazando diagonales que no se corten.

Puede constatarse que $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 5$, $c_4 = 14$.

Poco después, en 1758, von Segner observó que dichos números satisfacen la precedente relación de recurrencia $\#\#$.

Los $c_s = b_{s+1}$ son ahora conocidos como "números de Catalan", quien los reencontró en [Cat38] al contar los monomios de una variable no asociativos de grado $(s + 1)$.

También surgen en problemas propios de estructuras reticulares (ver [Brya93]-Cap.10 y [GolY76]-pág. 20/23).

En [Hu82]-Cap.7 se recurre a ellos con vistas a optimizar el número de operaciones necesarias para efectuar productos de matrices, y en [Lint74] se enuncian y comparan siete de los problemas en los que aparecen.

Para mayores referencias ver : [Brow65], [Dör58]-Pbl.7, [Gard76], [HarPT64], [Ord71], [Perc75], [Pólya56], [Rio73]. [Sing75].

8.12.3. ARBORESCENCIAS BINARIAS REFLEJAS

Si en una arborescencia T un vértice x es raíz de una única subarborescencia T_x al considerar a T como arborescencia ordenada puede ser conveniente ignorar la convención adoptada en pág.81, según la cual ella es "subarborescencia a izquierda" y permitir que también pueda ser tomada "a derecha"

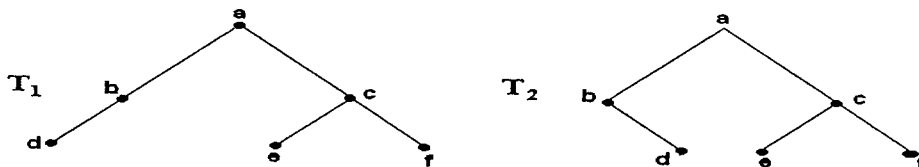
Podríamos formalizar esta situación admitiendo la existencia de arborescencias vacías ; es decir, carentes de vértices.

A tal efecto :

Para el caso de arborescencias binarias planas suele convenirse que a cada vértice x de grado positivo uno se lo supondrá raíz de una arborescencia con dos subarborescencias, una de las cuales es la *arborescencia vacía*, que se podrá suponer "subarborescencia derecha"; o bien, "subarborescencia izquierda".

En tales casos les diremos **arborescencias binarias reflejas**.

Así, la arborescencia de arcos (a, b) , (a, c) , (b, d) , (c, e) , (c, f) genera las dos arborescencias binarias reflejas que esquematizamos seguidamente.



En T_1 se supone que la arborescencia vacía es subarborescencia derecha, y en T_2 que es subarborescencia izquierda.

Las tres arborescencias binarias reflejas de altura uno son ejemplificadas por :



Las dos primeras son de orden dos, e indistinguibles como arborescencias binarias ordenadas. En la primera la subarborescencia vacía es su subarborescencia derecha, mientras que en la otra lo es su subarborescencia izquierda. La tercera carece de subarborescencias vacías.

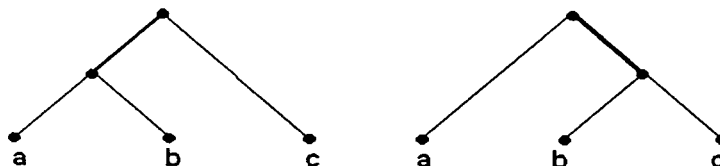
Estos esquemas inducen la siguiente definición recursiva.

Una arborescencia binaria refleja, no vacía, consta de un vértice r , con $gr^-(r) = 0$ y dos arborescencias binarias reflejas, eventualmente vacías, que componen sus respectivas subarborescencias derecha e izquierda.

Las arborescencias que decimos "binarias reflejas" son designadas "binary rooted trees" en [Gri85] y "binary trees" en [Knu69] y [Stan41].

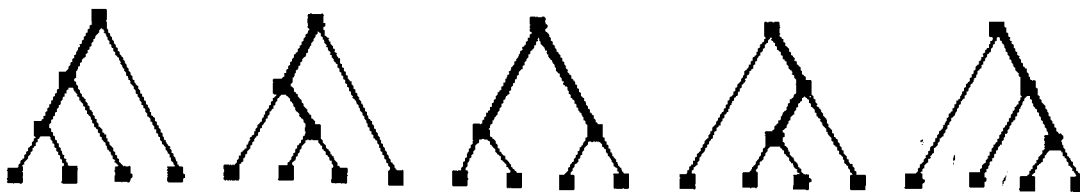
Por otra parte, en [Hu82].Cap.5 se conviene en usar la expresión "binary trees" tanto para las binarias reflejas B como para las binarias estrictas B^* obtenidas a partir de ellas aplicando la metodología indicada en página 92.

A las dos arborescencias binarias reflejas de orden dos visualizadas poco más arriba pueden asociarse, mediante el agregado de hojas a, b, c , y siguiendo la operatoria indicada en pág.92 las siguientes arborescencias ordenadas binarias estrictas



Obviamente, ellas se corresponden con las dos formas ($b_3 = 2$) en que es posible, respetando el orden, aplicar reiteradamente a la sucesión a, b, c , una operación binaria.

Visto que con tres vértices hay cinco arborescencias binarias reflejas, a partir de ellas y recurriendo a la operatoria de pág.92 se obtienen las siguientes arborescencias ordenadas binarias estrictas con cuatro hojas. :



Elas se corresponden con las cinco formas (ver pág.102) en que es factible aplicar repetidas veces una operación binaria a partir de la sucesión a, b, c, d .

Visto que estas observaciones se pueden extender al caso general, y que si la operación en cuestión es no asociativa las distintas expresiones algebraicas resultantes pueden llevar a resultados diferentes se tiene que :

Dada una sucesión de h elementos y aplicándole reiteradamente una operación binaria pueden obtenerse hasta $b_h = \frac{(2h-2)!}{h! \cdot (h-1)!} = \frac{1}{h} \binom{2(h-1)}{h-1}$ expresiones algebraicas distintas.

Si la operación es no asociativa, podrían implicar resultados diferentes.

Tal sucede si se aplica a la sucesión p, q, r, s , la operación // dada por la tabla

//	p	q	r	s	t
p	q	r	s	p	p
q	r	p	q	r	s
r	s	q	t	t	r
s	p	r	t	q	q
t	p	s	r	q	t

EJERCICIOS

8 -1)

José y Pablo compiten en un juego que no admite empates, y convienen en repetir los encuentros hasta que alguno de ellos haya ganado dos veces seguidas, o tres alternadas. ¿ De cuántas formas podrá desarrollarse el torneo ?

8 - 2)

Vea que todo árbol es un grafo bipartido. ¿ Cuándo puede afirmar además que es bipartido completo ?

8 - 3)

¿ Cuándo puede afirmar que un árbol cubriente de G es además su subgrafo vértice inducido ?

8 - 4)

Suponga que T es un árbol con p vértices pendientes y q vértices de grado tres. ¿ Puede decir cual es el orden de T ?

8 - 5)

Se sabe que las valencias del hidrógeno, del oxígeno y del carbono son, respectivamente, 1, 2, 4. Suponga que con h , o , c , átomos de ellos se construye una molécula que es árbol. Vea que $h = 2.c + 2$ cualquiera sea o .

8 - 6)

Demuestre que todo árbol con q vértices de grado al menos tres tiene al menos $(q+2)$ vértices pendientes.

8 - 7)

Vea que todo árbol de orden n tiene $\binom{n-1}{2}$ pares de vértices no adyacentes.

8 - 8)

¿ Puede afirmar que un grafo G es árbol si y sólo si cada una de sus aristas es un ciclo elemental ?

8 - 9)

Muestre que el complemento de un árbol no trivial es conexo, o bien es el disconexo compuesto de un vértice aislado y de un grafo completo.

8 -10)

Demuestre que :

- Toda arista puente en G pertenece a todo árbol cubriente de G .
- G es árbol si y sólo si es conexo y sus vértices no pendent son de corte.
- G es foresta si y sólo si todas sus aristas son puentes.
- Todo árbol de orden $(k + 1)$ puede reencontrarse como subgrafo de cualquier grafo sin bucles que tenga todos sus vértices de grado al menos k .

8 -11)

Vea que aplicando reiteradamente las siguientes reglas todo árbol finito A se puede representar limpiamente en un plano.

1) Se elige en el plano un punto arbitrario a_1 , como representante de uno cualquiera de los vértices de A .

2) Los vértices de A adyacentes del representado por a_1 se identifican con otros puntos $a_2, a_3, \dots$, etc. distintos entre sí y ubicados, en el plano, una unidad por debajo de a_1 , y con cada uno de ellos se construye una arista $[a_1, a_i]$.

3) Se reitera 2) para cada uno de los vértices a_i ($i > 1$) recién representados, tomando en cuenta sólo los respectivos adyacentes en A aún no incorporados al esquema, y esto se repite hasta que todos los vértices hayan sido representados.

Véase además, que “por debajo” puede substituirse por “a derecha”, y que según cual sea el vértice de A que se supone representado en a_1 los esquemas obtenidos pueden diferir mucho entre sí.

8 -12)

Demuestre la Proposición. 8.2.1. aplicando la expresión $\mu(G) = m - n + p$; que da el número ciclomático de cada multigrafo G .

8 -13)

¿ Puede determinar en la clase de los grafos carentes de bucles aquellos tales que él y su complemento son árboles ?

8 -14)

Vea que un grafo (V, U) , sin bucles, es conexo con $|V| = |U|$ si y sólo si contiene un único ciclo elemental C , y árboles sin vértices comunes entre sí, tales que cada uno de estos árboles tiene un único vértice en común con C .
(Se les dice “cactus”).

8 -15)

Vea que $G = (V, U)$ es árbol si y sólo si $|U| = |V| - 1$, y para todo $V' \subset V$ el subgrafo inducido por V' tiene a lo sumo $|V'| - 1$ aristas.

8 -16)

Suponga que $G = (V, U)$ es un grafo conexo de orden n con m aristas. Vea que su subgrafo (V, W) es coárbol cubriente si y sólo si el $(V, U - W)$ es conexo y $|W| = m - n + 1$.

8 -17)

Muestre que un subgrafo de un grafo conexo G puede ser incluido en un coárbol cubriente si y sólo si no contiene cociclos e G .

8 -18)

Demuestre las Proposiciones 8.2.3 y 8.3.1

8 -19)

Vea que en todo árbol su diámetro D y su radio R satisfacen $R = \lfloor (D + 1) / 2 \rfloor$ ($\lfloor u \rfloor$ parte entera de u).

8 - 20)

Vea que en los árboles que son cadena, o bien bipartidos de la forma $K_{1,p}$ sus respectivos centro, y centroide, coinciden.

8 - 21)

Demuestre :

- que un árbol tiene diámetro par si y sólo si tiene un único vértice central
- que en todo árbol de diámetro impar las cadenas de longitud máxima tienen al menos una arista común.

8 - 22)

Vea que si a, b , constituyen el centroide de T , y T_a (idem T_b) es una de las componentes de $T - \{a\}$ (idem $T - \{b\}$) de mayor orden, entonces :

$b \in T_a \ // \ a \in T_b \ // \ |T_a| = |T_b| \ // \ T_a \cap T_b = \{a, b\} \ // \ T$ es de orden par.

Construya un árbol de orden par con un centroide de un único vértice.

8 - 23)

Sean T_1 y T_2 árboles cubrientes de G , y u una rama de T_1 y cuerda de T_2 . Vea existe una arista v , rama de T_2 y cuerda de T_1 tal que $T_1 - \{u\} \cup \{v\}$ es árbol cubriente de G .

8 - 24)

Vea que si T y T^* son árboles cubrientes de G es posible determinar una sucesión $T = T_1, \dots, T_i, T_{i+1}, \dots, T_k = T^*$ de árboles cubrientes tales que cada dos T_i, T_{i+1} se diferencian en sólo una arista.

Ejemplifique la situación, enuncie un algoritmo que le permita construir una tal sucesión, y vea que si G es conexo de orden n , con m aristas distintas de bucle, el método en cuestión requiere de a lo sumo $\min. ((n - 1), (m - n + 1))$ etapas.

8 - 25)

Represente los 16 árboles cubrientes del completo de vértices a, b, c, d .

¿ Cuántos contienen la arista $[b, c]$?

8 - 26)

Vea que cada arista de K_n está en $2 \cdot n^{n-3}$ de sus árboles cubrientes; y que por lo tanto $\tau(K_n - \{u\}) = (n - 2) \cdot n^{n-3}$, cualquiera sea la arista u

8 - 27)

Se dice "grafo de árboles" (*tree-graph*) del conexo G al grafo $T(G)$ que tiene por vértices los árboles cubrientes de G , y en el cual dos vértices son adyacentes si y sólo si los correspondientes árboles tienen todas menos una de sus aristas en común.

Construya el grafo de árboles de P_3 , el de $K_{1,p}$, el de C_4 , y el de $K_4 - \{u\}$.

Muestre además que :

- $T(G)$ es trivial si y sólo si G es árbol.
- $T(G)$ es conexo.
- $T(G)$ es un completo no trivial si y sólo si G es conexo con exactamente un ciclo (es decir, si y sólo si G es un "cactus").
- Si G es de orden n y tiene m aristas distintas de bucles su diámetro es $\min. ((n - 1), (m - n + 1))$.

8 - 28)

Muestre que un grafo contiene k árboles cubrientes arista disjuntos si y sólo si para cada partición $V_1, \dots, V_h$ de su conjunto de vértices, el número de aristas con extremos en diferentes V_i es al menos $k \cdot (h - 1)$.

8 - 29)

Verifique que (admitiendo vértices aislados) las aristas arboricidades de K_4 , K_5 y K_6 son, respectivamente, 2, 3, 3.

8 - 30)

Construya el árbol cuyo Código Prüffer es 3,5,6,5,2,8,8,7,9

8 - 31)

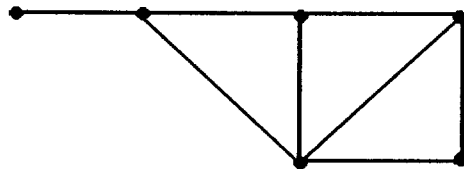
Supuesto que $K(G)$ es la matriz de Kirchhoff de G , demuestre :

a) que los grafos G y G' son isomorfos (a menos de bucles) si y sólo si existe una matriz permutación P tal que $K(G') = P^{-1}.K(G).P$.

b) que los cofactores de $K(K_n)$ valen n^{n-2} .

8 - 32)

Determine, aplicando el Matrix Tree Theorem, el número de árboles cubrientes que admite el siguiente multigrafo y represéntelos.



8 - 33)

Demuestre que el número de árboles cubrientes del bipartido completo $K_{2,q}$ es $\tau(K_{2,q}) = q \cdot 2^{q-1}$.

8 - 34)

Demuestre la fórmula dada en pág.59, según la cual si u no es bucle el número $\tau(G)$ de árboles cubrientes de G es $\tau(G - \{u\}) + \tau(G/u)$.

Aplíquela para ver que $\tau(\text{---}\triangle) = 3$; $\tau(K_{2,3}) = 12$; $\tau(K_{3,3}) = 81$,

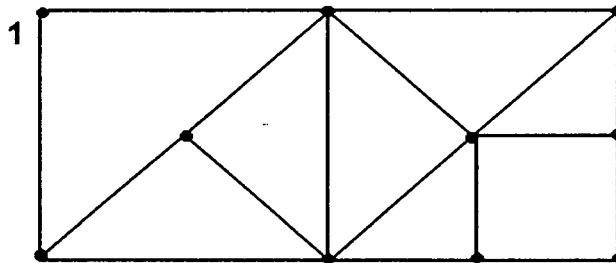
8 - 35)

Utilice la fórmula del ejercicio anterior para :

- ver que si H es el multigrafo de orden n obtenido a partir de G reemplazando cada una de sus aristas $[a, b]$ por k aristas paralelas de extremos a, b , entonces $\tau(H) = k^{n-1} \cdot \tau(G)$.
- verificar que si G es de orden n con m aristas, y H es el grafo obtenido a partir de G reemplazando cada una de sus aristas por una cadena elemental de longitud k , y éstas carecen de vértices interiores comunes, se tendrá que $\tau(H) = k^{m-n+1} \cdot \tau(G)$.
- determinar el número de árboles cubrientes de la *rueda* W_n (es decir del grafo de orden n resultante de agregar al ciclo C_n un vértice c y aristas $[c, x_i]$ para todo $x_i \in C$.

8 - 36)

Numere los vértices del siguiente grafo aplicando, a partir de 1 algoritmos tipo BFS , y de tipo DFS.



8 - 37)

Constata la validez de lo afirmado en pág.68 según lo cual

G es arborescencia si y sólo si es casi unilateralmente conexo hacia atrás, minimal en cuanto al número de arcos.

8 - 38)

Tres "regiones" de dimensiones adecuadas pueden disponerse en el plano de cuatro maneras en "forma filtrante" (es decir, de manera que sean disjuntas, o una incluida en otra), a saber : $A \subset B \subset C \parallel A \subset B \text{ y } B \cap C = \emptyset \parallel A \subset C, B \subset C \text{ y } A \cap B = \emptyset \parallel A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$.

Represéntelas y asocie a cada una de ellas una arborescencia de orden cuatro.

Vea que en general, el número de formas en que n circunferencias distintas pueden disponerse en forma filtrante (es decir, sin intersecciones entre ellas) coincide con el de arborescencias de orden $(n + 1)$.

8 - 39)

Volviendo sobre lo afirmado en págs.55 y 73 demuestre que :

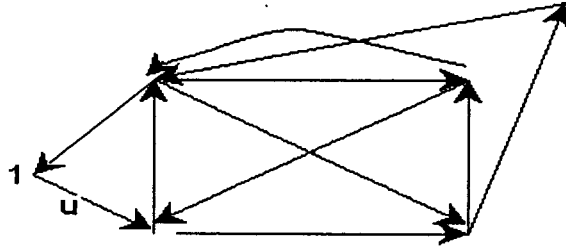
Si G es un multigrafo no discreto sin bucles, y $B(G^*)$ es la matriz incidencia de algún multidigrafo G^* obtenido a partir de G orientando arbitrariamente sus arista entonces $B(G^*) \cdot (B(G^*))^t = K(\underline{G^*}) = K(G)$.

8 - 40)

Dado el siguiente digrafo

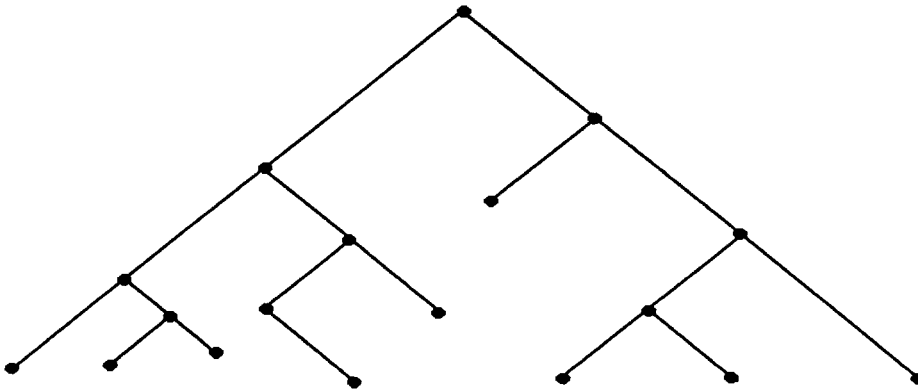
¿ Cuáles son sus arborescencias cubrientes de raíz 1, y cuáles sus antiarborescencias de antirraíz 1 ?

¿ Cuántos caminos eulerianos de primer arco u (o equivalentemente, cuántos circuitos eulerianos) tiene G ?



8 - 41)

Etiquete los vértices de la siguiente arborescencia recorriéndola, por precedencia, por descendencia y por interclusión.



8 - 42)

Demuestre que si una arborescencia de raíz r es recorrida por precedencia (descendencia) todos los descendientes a derecha (izquierda) de los vértices del camino $r \rightarrow x$ son mayores (menores) que x .

¿ Valen también las recíprocas ?

8 - 43)

Represente las arborescencias ordenadas que corresponden a las expresiones algebraicas . $(r+s).(t-u)^2$ $\parallel$ $((r+s).(t+u))^2$ $\parallel$ $(r+s) + [\log(t+u)]$.

Formalicelas sin paréntesis recurriendo a la notación polaca prefija (postfija).

8 - 44)

Cada una de las siguientes secuencias es la representación en notación prefija de una expresión algebraica. ¿ Cuáles son sus respectivas arborescencias asociadas y sus notaciones habituales ?

$+r-st$ $\parallel$ $+ -rst$ $\parallel$ $++rs+tu$.

Idem para las siguientes con notación posfija $rs+s-$ $\parallel$ $rst+ -$.

8 - 45)

Se dice **arborescencia--t-aria** a toda arborescencia en la que cualquiera sea su vértice interior x se tiene que $gr^+(x) \in \{0, 1, \dots, t\}$ y **t-aria estricta** si es la trivial, o para todos sus vértices interiores $gr^+(x) = t$.

Vea que si A es una arborescencia no trivial t -aria estricta, $t \geq 2$, con h hojas :

a) tiene $i = \frac{h-1}{t-1}$ vértices interiores (incluida su raíz), y es de orden

$$n = (t \cdot i + 1) = \frac{ht - 1}{t - 1}.$$

b) si $M(m)$ es la mayor (menor) de las alturas de sus hojas : $t^m \leq h \leq t^M$

c) las cotas anteriores no son mejorables.

De a) y b) resulta la siguiente extensión de lo visto en pág. 91.

Si A es una arborescencia t -aria estricta, $t \geq 2$, de h hojas y altura M
 $\lfloor \log_t h \rfloor \leq M \leq \frac{h-1}{t-1}$, $(\lfloor \rfloor x \rfloor = \text{menor entero no menor que } x)$

8 - 46)

Represente :

los catorce árboles de orden $n \leq 6$, y los once de orden 7.

las diez y siete arborescencias de orden $n \leq 5$.

las arborescencias binarias de orden 5 (idem estrictas con 6 hojas)

las " " estrictas de orden 5.

las " " estrictas y planas de orden cinco (siete).

las " " reflejas de orden dos, tres y cuatro,

8 - 47)

Suponga que al asignar 1 (0) a los vértices interiores (exteriores) de una arborescencia recorrida por precedencia, se obtiene 1,1,0,0,1,1,1,0,0,0,1,0,0.

Representéla, y constate que ninguna de sus permutaciones circulares goza de características similares.

8 -48)

Suponga que A es una arborescencia binaria estricta. Se preguntan :

- el orden de A puede ser par ?
- cuál es el máximo (mínimo) número de vértices en el nivel $i \geq 1$?
- cuál es el máximo (mínimo) orden de A , si su altura es k ?

8 - 49)

Volviendo sobre algo afirmado en pág.91 suponga tener los digrafos bipartidos :

- G_1 de vértices $h_1, h_2, h_3, p_1, p_2, p_3$ y de arcos $(p_1, h_1), (p_1, h_2), (p_2, h_1), (p_2, h_2), (p_2, h_3), (p_3, h_3)$;
- G_2 con los mismos vértices, pero de arcos $(p_1, h_1), (p_1, h_2), (p_2, h_1), (p_2, h_3), (p_3, h_2), (p_3, h_3)$

Vea :

- que el primero de ellos puede representar : h_1, h_2 , son hermanos, y además medio-hermanos de h_3 .
- que el segundo no puede, para el caso de especies bisexuadas, representar situaciones en las cuales a, b, c , tienen al menos un progenitor común.

Generalizando lo precedente considere digrafos bipartidos $(X \cup Y, U)$ con arcos (x, y) , $x \in X$; $y \in Y$; $gr^-(y) = 2$.

Vea que en ellos el conjunto X puede partirse en dos conjuntos, H, M , si y sólo si en cada ciclo del tipo $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k, (x_1)$ se tiene que k es par (o equivalentemente, si y sólo si el número de arcos que lo componen es múltiplo de cuatro).

8 - 50)

Demuestre que las cantidades b_h de arborescencias planas binarias estrictas de h hojas (los números de Catalan c_{h-1}) dados en pág.100 y 101 satisfacen

- a) la relación $b_h = \frac{4h-6}{h} \cdot b_{h-1}$; o equivalentemente $b_{p+1} = \frac{4p-2}{p+1} \cdot b_p$
 - b) las cotas $2^{h-2} \leq b_h < 4^{h-2}$
 - c) b_h es impar si y sólo si $h = 2^n$.
 - d) $b_h \geq \frac{1+3^{h-2}}{2}$, $h \geq 2$
-

CAPITULO 9

ARBOLES VALUADOS – ARBORESCENCIAS ETIQUETADAS

9.1. ARBOLES CUBRIENTES OPTIMOS

Numerosos y variados problemas pueden abordarse determinando, en grafos valuados, “árboles cubrientes óptimos”.

Algunos de los problemas típicos cuya resolución podría encararse con esta noción son :

a) Dada una red de comunicaciones (vial, férrea, telefónica, etc.) entre n ciudades; ¿ cuáles tramos deben conservarse para mantenerlas intercomunicadas, no necesariamente en forma directa, con una red que tenga en total la menor longitud posible ?

Idem, con una red sin ciclos que tenga la mayor longitud posible ?

b) ¿ Como mantener n puntos de una red eléctrica a igual potencial con la menor longitud de cableado ?

Idem, de forma que implique el menor costo de mantenimiento ?

c) Supongamos que dado un conjunto de n ciudades se conoce cuantas personas deben viajar desde cada una de ellas a cada una de la restantes.

Si sólo se dispone de $(n - 1)$ vehículos, y éstos son capaces de realizar solamente un viaje de ida y vuelta entre un único par de ciudades, ¿ como disponer los viajes para posibilitar el traslado del mayor número de personas, cuidando que de cada ciudad salga al menos un vehículo ?

Es fácil ver que los problemas indicados pueden encuadrarse en el siguiente esquema.

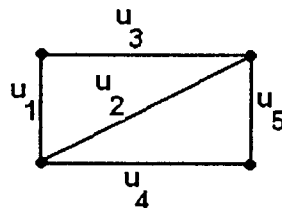
Dado un conexo G , y asignado a cada una de sus aristas u_i un valor w_i , determinar, entre todos sus árboles cubrientes T_r , un T_o tal que $w(T_o)$ sea máximo (mínimo) de entre los distintos $w(T_r) = \sum_{u_i \in T_r} w_i$

Según referencias, en [GraH85] se dió una buena reseña de trabajos sobre este problema, que parece estar entre los primeros de optimización que fueron estudiados.

Obviamente, para determinar en G árboles cubrientes óptimos puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que G carece de bucles; y también de aristas paralelas, pues caso contrario bastaría conservar de cada conjunto de paralelas una de las que tiene asignado mayor (menor) valor según se trate de un problema de maximización (de minimización).

Los árboles óptimos no están siempre unívocamente determinados, aunque si lo está su valor.

Así por ejemplo, dado



u_i	1	2	3	4	5
w_i	1	3	3	2	6

los árboles de aristas u_1, u_2, u_4 , y u_1, u_3, u_4 , son mínimos, de valor 6.

A su vez, el u_2, u_3, u_5 , es el único árbol cubriente máximo.

Nótese que las aristas u_2, u_3 , integran tanto "árboles máximos" como "árboles mínimos".

Modificando "levemente" los datos y asignando, respectivamente, a las aristas u_2, u_3 , valores 3 y $(3 + \varepsilon)$ con $0 < \varepsilon < 1$, el único árbol cubriente mínimo sería el u_1, u_2, u_4 .

Si en cambio a las aristas u_2, u_3 les asignamos, respectivamente, los valores $(3 + \varepsilon)$ y 3 obtendríamos el árbol mínimo u_1, u_3, u_4 .

De los algoritmos que daremos resultará que si los valores de las aristas son distintos dos a dos hay un único árbol cubriente óptimo, y aún cuando dicha hipótesis no siempre es válida, de lo que sigue se infiere que siempre se lo puede suponer, sin alterar esencialmente las soluciones.

Además, bajo la hipótesis de asignar valores diferentes a las distintas aristas la formulación de los algoritmos es más cómoda.

Si hay k aristas con un mismo valor $\underline{a}$, y este es superado por el de otras, eligiendo un $\varepsilon > 0$ tal que $(\underline{a} + (k - 1) \cdot \varepsilon)$ sea menor que cualesquiera de los valores que superen $\underline{a}$, y dando a esas k aristas u_i valores $\underline{a} + (i - 1) \cdot \varepsilon$, se obtendrá una valuación de ellas con todos valores distintos, y tales que "respetan" el orden preexistente con las restantes.

En forma similar podríamos proceder si las aristas con valor coincidente fuesen las de mayor valor.

Esta "revaluación momentánea" se podría hacer de $k!$ maneras diferentes, sin afectar el valor del árbol cubriente óptimo, y reiterar en cada grupo de arista con valor repetido.

En ocasiones, el valor de los árboles óptimos elegidos se podría mejorar agregando a la configuración vértices y aristas.

Por ejemplo, dado un cuadrado unitario, sus cuatro árboles cubrientes tienen valor tres, pero agregándole al cuadrado las dos diagonales y un vértice donde ellas se cruzan su árbol cubriente mínimo tiene valor $2\sqrt{2}$.

Lo precedente permite vislumbrar el sentido de la afirmación "*el agregado de un cliente ficticio puede mejorar el costo por distribución*"

En los problemas reales suelen presentarse situaciones que implican la necesidad de determinar "árboles óptimos entre los que satisfacen determinadas restricciones suplementarias".

Por ejemplo : que en cada punto incidan a lo sumo h aristas del árbol, o que ciertos tramos estén necesariamente incluidos (excluidos), o que entre cada par de puntos haya a lo sumo h ramas, o que el mayor (menor) de los valores de las ramas sea tan bajo (alto) como posible, etc.

Estas situaciones, más acordes con la realidad no serán estudiadas.

Obviamente, para estos "problemas con segundos criterios" los árboles óptimos que determinaremos sólo podrían ser aceptados como primera aproximación de la solución buscada.

A continuación nos limitaremos a la búsqueda de árboles mínimos.

Para hallar árboles máximos podría procederse en forma similar, o reducir el problema a uno de árboles mínimos previo un cambio de signo en los valores de las aristas.

Proposición 9.1.1

Si en el grafo conexo G los valores de sus aristas son distintos dos a dos, las siguientes afirmaciones son equivalentes

- a) u_o es rama de algún árbol cubriente mínimo T .
- b) u_o es arista de valor mínimo en algún cociclo elemental Q .
- c) u_o es arista puente, o en cada uno de los ciclos que la contienen hay otra arista con mayor valor.

Demostración

$a \rightarrow b$))

Las componentes de $T - \{ u_o \}$ determinan un cociclo elemental, y sus aristas deben tener valor mayor que el u_o (de lo contrario T no sería mínimo).

$b \rightarrow c$))

si u_o es arista puente nada hay por demostrar. Caso contrario, si es de valor mínimo en el cociclo elemental Q , cualquier ciclo C al cual pertenezca u_o debe tener otra arista del cociclo Q , y por lo tanto de mayor valor que u_o .

$c \rightarrow a$))

si u_o es arista puente está en todo árbol cubriente, y en particular en los óptimos. De lo contrario, eliminando aristas con mayor valor que el de u_o pueden destruirse todos los ciclos que la contienen y hacer que u_o sea arista puente de cierto G^* . Ahora, $G^* - \{ u_o \}$ es subgrafo cubriente de G constituido por dos componentes conexas, y sus árboles cubrientes mínimos aumentados de u_o dan un árbol mínimo de G .

Así entonces :

 | Cada rama de un árbol cubriente mínimo es de menor valor en al menos
 | un cociclo, y en todo ciclo que la contenga hay otra de mayor valor.

9.2. ALGUNOS ALGORITMOS PARA HALLAR ARBOLES OPTIMOS

En lo que sigue supondremos que G es un grafo conexo sin bucles, y que a sus aristas se les han asignado valores distintos dos a dos.

De acuerdo con lo visto las modificaciones que serían necesarias para considerar casos en los que se admiten valores repetidos son simples.

Podrían trasladarse a los algoritmos que daremos substituyendo en ellos la expresión "la arista de menor valor" por "cualquiera de las de menor valor"

Respecto de los numerosos algoritmos propuestos para resolver la cuestión que nos ocupa digamos que :

– En 1956, Kruskal [Kru56] propuso tres algoritmos, y razones de dualidad lo indujeron a sugerir la existencia de un cuarto.

– En [Rost67] recurriendo a relaciones entre árboles, ciclos, y cociclos, se dedujeron siete algoritmos, que pueden verse como variaciones de los "cuatro" de Kruskal. Al respecto ver también [GonM79]-Cap.4-2

– Según se puntualiza en [Agui90] y [Tar83] el método habitualmente asignado a Sollin ([BerGH62], [Roy69a]) fue propuesto inicialmente por Borůvka en 1926 [Bor26], reencontrado por Choquet en 1938 [Cho38], y luego por Lukaszewicz y otros en 1951 [LucFP51].

– Cabe observar también que el método dado en 1957 por Prim [Prim57] había sido enunciado en 1936, por Jarník [Jar36].

Según se muestra en [Agui90] los órdenes de los tiempos de procesamiento de los *algoritmos clásicos de Kruskal, Prim, y Sollin* aplicados a un grafo conexo de orden n con m aristas son, respectivamente, y supuesto que se han dado implementaciones adecuadas : $O(m \cdot \log(n))$; $O(n^2)$; $O(m \cdot \log(\log(n)))$.

Los algoritmos citados pertenecen a la clase de los denominados *ingenuos* (o *glotones*, o *voraces*), es decir, al de aquellos que permiten llegar al óptimo a través de sucesivos “óptimos locales”.

Recordemos que según se puntualizó en el Prólogo de 1 no todos los algoritmos gozan de esta propiedad.

En [Tar83] puede tenerse mayor información sobre los algoritmos en cuestión y sobre otros propuestos para abordar variantes del problema que nos ocupa.

Para mayor información sobre esto [HorS76/78], [Maf81], [Roux75], [Roy69a]-Cap.6, [Sah81], [Yao75]..

Por otra parte, en [GonM79]-Cap.4-3 se estudia la búsqueda de “arborescencias de peso mínimo”.

ALGORITMOS DE KRUSKAL

Antes de enunciarlos observemos :

- que sus reglas básicas están estrechamente ligadas con las indicadas en pág.46 para hallar árboles cubrientes.
- que si el conexo G tiene n vértices y m aristas según cual sea el algoritmo utilizado habrá que retener $(n - 1)$ aristas, o eliminar $m - (n - 1)$ de ellas.

Kruskal I

Reiterar tanto como sea posible la siguiente regla.

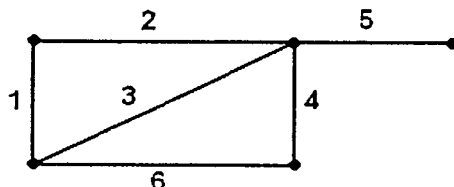
Retener, de entre las aristas de G que no forman ciclo con las ya retenidas, la de menor valor

Kruskal II

Reiterar tanto como sea posible la siguiente regla.

Eliminar, de entre las aristas de G aún incluidas en ciclos, la de mayor valor.

Así por ejemplo, dado



para obtener su *árbol cubriente mínimo* podríamos :

- retener sucesivamente las aristas de valor 1,2,4,5,
o bien
- eliminar sucesivamente las aristas de valor 6,3.

Obviamente, en ambos casos el árbol obtenido es de valor 12.

Para construir el *árbol cubriente máximo* habría que retener (eliminar) sucesivamente las aristas de valor 6,5,4,2 (1,3). Se obtendría así uno de valor 17.

Una forma de demostrar el Algoritmo de Kruskal I es la siguiente.

Si G es de orden n el árbol buscado tiene $(n - 1)$ aristas y por las hipótesis hechas sobre las valuaciones de las aristas está unívocamente determinado.

Supongamos que la sucesión de aristas elegidas aplicando la regla indicada es $A = u_1, u_2, \dots, u_{(n-1)}$

Veamos que A es árbol cubriente mínimo.

De lo contrario existiría otro árbol cubriente B de menor valor.

Sea en tal caso u_j , $j \geq 1$ la primera (en el orden que inducen los índices) de las aristas de A no incluida en B .

Luego, $B \cup \{ u_j \}$ contiene un ciclo con al menos una aristas no contenida en A . Si la notamos $\underline{b}$; podemos afirmar que $C = B \cup \{ u_j \} - \{ \underline{b} \}$ es árbol cubriente de G (pues es acíclico con $n-1$ aristas), pero como el valor de u_j es menor que el de $\underline{b}$ (de lo contrario al construir A se hubiera elegido $\underline{b}$ en lugar de u_j). tendríamos $w(C) < w(B)$, en contradicción con la supuesta optimalidad de B . Luego A es mínimo.

Otros dos conocidos algoritmos son los ya citados de Sollin-Borůvka, y de Prim-Jarnik.

Ambos se basan en la idea de ir agregando, reiteradamente, la arista de menor valor que conecta determinados pares de subgrafos disjuntos.

Para sus respectivas justificaciones bastaría recordar que las aristas de los árboles mínimos son las de menor valor en algún ciclo elemental.

ALGORITMO DE PRIM-JARNIK

En $G = (V, U)$ se elige un vértice v_1 . Se supone $H_1 = (V_1, U_1)$ con $V_1 = \{v_1\}$; $U_1 = \emptyset$ y se aplica tanto como sea posible la siguiente regla:

Supuesto $H_i = (V_i, U_i)$, $i \geq 1$, sea $u_i = [x, y]$ con $x \in V_i$ la arista de menor valor que conecta V_i con su complemento, se construye $H_{i+1} = (V_{i+1}, U_{i+1})$ con $V_{i+1} = V_i \cup \{y\}$ y $U_{i+1} = U_i \cup \{u_i\}$, y se lo reitera hasta $i = n - 1$.

En [AlbH88] y en [Hu82] se destacan vinculaciones entre este algoritmo, y el de Dijkstra [Dij59], para hallar caminos mínimos. Ver también [Gri85] y [Johs84].

ALGORITMO DE SOLLIN-BORŮVKA

Puede ser aplicado simultáneamente por varios operadores en un mismo grafo. Consta de las siguientes reglas.

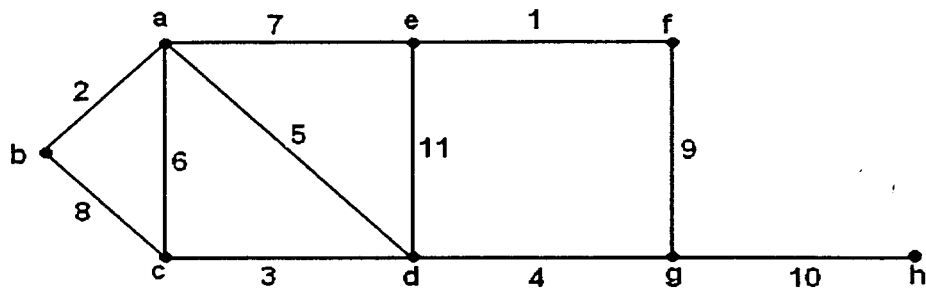
1) Elegir para cada vértice v la arista de menor valor incidente en v , y determinar los subgrafos conexos inducidos por estas aristas.

Si se obtiene una única componente conexa se tiene el árbol mínimo. Caso contrario pasar a 2).

2) Construir el multigrafo $G' = (V', U')$ que tiene por vértices los subgrafos conexos determinados al aplicar 1) y cuyas aristas $[A, B]$ están en correspondencia biyectiva con las de G de la forma $[a, b]$ con $a \in A$, $b \in B$,

3) Las aristas de G' se valúan con el valor que tienen sus respectivas correspondientes en G y se vuelve a 1) aplicándola a G' , en lugar de G .

Para dar una idea de las diferencias operativas entre los algoritmos enunciados aplicaremos todos ellos al siguiente ejemplo.



Aplicando :

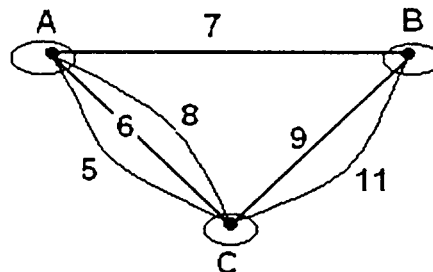
Kruskal I Se retienen, sucesivamente, las aristas de valor 1,2,3,4,5,7,10.

Kruskal II Se eliminan, sucesivamente, las aristas de valor 11,9,8,6.

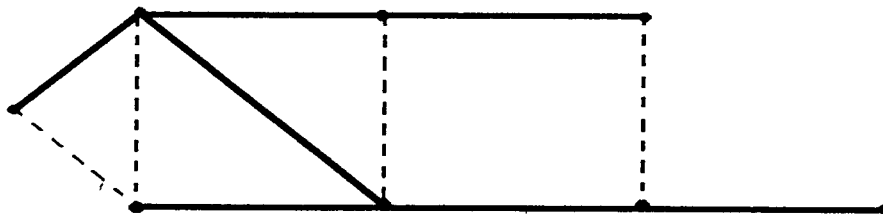
Prim (A partir de $v_1 = a$). Se eligen sucesivamente las aristas :
 $[a, b]$, $[a, d]$, $[d, c]$, $[d, g]$, $[a, e]$, $[e, f]$, $[g, h]$.

Sollin Conviniendo en elegir los vértices siguiendo el orden alfabético, en la primera aplicación de la regla 1) se seleccionan las aristas
 $[a, b]$, $[c, d]$, $[e, f]$, $[g, d]$, $[h, g]$

Elas determinan las componentes conexas inducidas, respectivamente, por los conjuntos de vértices : $A = \{ a, b \}$; $B = \{ e, f \}$; $C = \{ c, d, g, h \}$ y por aplicación de la regla 2) se construye el siguiente multigrafo



Ahora, la elección de las aristas con valores 5,7, lleva a tener una única componente, que es el árbol buscado.



Dichos algoritmos y el propuesto en [CherT76], son expresados, en [Tar83], en términos de "colorear aristas", respetando las siguientes reglas :

- Regla 1 Inicialmente no hay aristas coloreadas.
Regla 2 (azul) Elegir un ciclo sin aristas azules y de entre sus aristas no coloreadas pintar de azul (aceptar) una de las de menor valor.
Regla 3 (roja) Elegir un ciclo simple sin aristas rojas y de entre sus aristas no coloreadas pintar de rojo (rechazar) una de las de mayor valor.

Cuando todas las aristas estén coloreadas, las azules componen un árbol mínimo.

9.3 ALGO MAS SOBRE ARBOLES OPTIMOS

Seguidamente nos referiremos a tres problemas, cada uno de los cuales puede ser estudiado recurriendo a árboles óptimos..

A))

En 1 Cap.5.6. nos hemos referido a la dificultad que presenta resolver el problema del viajante de comercio.

Veamos ahora como el valor de los ciclos hamiltonianos que lo resuelven se puede acotar mediante árboles cubrientes óptimos.

Para esto sea x uno cualesquiera de los vértices del digrafo valuado G , y C uno de los ciclos hamiltonianos que resuelven el problema en cuestión.

La eliminación de las dos aristas de C incidentes en x lo transforman en una cadena C' que es árbol cubriente de $G - \{x\}$.

Así entonces, el valor de C está acotado inferiormente (superiormente) por el que resulta de sumar los valores de dicho par de aristas al de los árboles cubrientes mínimos (máximos) de $G - \{x\}$.

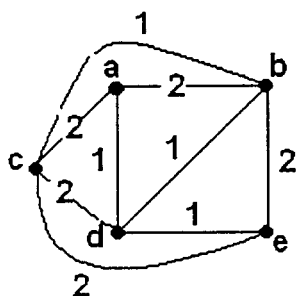
Como para determinar las cotas buscadas se desconoce tal C debemos tomar en cuenta el valor de todos los pares de aristas incidentes en cada vértice.

Por lo tanto, si con α_x (β_x) notamos al menor (al mayor) de los valores que se obtienen sumando los valores de los pares de aristas que inciden en x , cualquiera sea tendremos las siguientes cotas del valor buscado.

$$\alpha_x = \max_x (\alpha_x + \text{valor del árbol cubriente mínimo de } G - \{x\} \leq w(C))$$

$$\beta_x = \min_x (\beta_x + \text{valor del árbol cubriente máximo de } G - \{x\} \geq w(C))$$

En el siguiente ejemplo el menor (mayor) de los valores de los ciclos hamiltonianos es 7 (9), y como el mismo coincide con el de la cota hallada resulta que la operatoria indicada no es mejorable.



x	α_x	$arbmin$	
a	3	3	6
b	2	4	6
c	3	3	6
d	2	5	7
e	3	3	6

$$\alpha \equiv 7$$

x	β_x	$arbmax$	
a	4	6	10
b	4	6	10
c	4	5	9
d	3	6	9
e	4	6	10

$$\beta \equiv 9$$

B))

Un problema conocido ya en el siglo XVII, que sólo citaremos a título informativo, y que es de interés en la construcción de circuitos impresos, es el del *Árbol Mínimo de Steiner*.

El mismo consiste, en esencia, en :

Dado en el plano un conjunto de puntos, determinar un árbol que los conecte mediante segmentos rectos, y sea de longitud total mínima.

En ocasiones se impone además que las ramas del árbol a determinar sean segmentos horizontales, o bien verticales.

Recordando lo observado en pág.117 resulta inmediato que para mejorar el resultado puede ser conveniente incorporar vértices auxiliares.

Esta cuestión es estudiada, entre otros, en [AhoGH77], [Coc67/70], [DreyW72], [DuH82], [GilP68], [Haki71], [Han66], [Hwa76], [Melz61].

Cabe destacar además el libro [HwaRW92], y que en [GareJ77], [GareGJ71], se estudia la complejidad de los algoritmos inherentes a este problema.

C))

Como tercero de estos problemas consideraremos el relativo a la determinación de las rutas MAX-MIN (o bien MIN-MAX) ya citado en 1 Cap.6.6.

Recordemos al efecto que la búsqueda de cadenas min-max (max-min) apunta a resolver problemas del siguiente tipo :

Dada una red vial, conocida la longitud (la confiabilidad) de cada uno de sus tramos, y elegidos un par de puntos determinar un recorrido que los conecte y minimice la mayor de las longitudes (maximice la menor de las confiabilidades) de los tramos a recorrer.

En el caso no dirigido estos problemas pueden resolverse, simultáneamente para todos los pares de puntos, apelando al concepto de árbol cubriente óptimo.

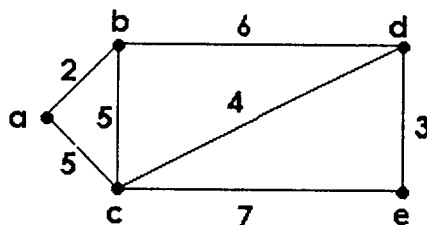
En efecto, cualesquiera sean los vértices p, q , y el árbol cubriente mínimo A , si C es la cadena de extremos p, q , contenida en A , y existe otra cadena C' , también de extremos p, q toda arista de C' no contenida en A debe tener valor mayor o igual que las contenidas en C . Caso contrario A estaría mal hallado.

Razonamientos similares llevan a que los árboles cubrientes máximos faciliten la determinación de cadenas max-min.

Así entonces, y visto que cada uno de los árboles cubrientes conecta todos los pares de vértices resulta que

Cada árbol cubriente mínimo (máximo) determina una cadena MIN-MAX (MAX-MIN) de extremos p, q , cualesquiera sean estos vértices.

Para el siguiente grafo valuado, reiteración del dado en 1pág.248,



sus cadenas MIN-MAX de extremos a, e , son :

la de aristas $[a, c], [c, d], [d, e]$ y la de aristas $[a, b], [b, c], [c, d], [d, e]$ pues todas las otras que los conectan tienen al menos un tramo con "longitud" mayor que cinco.

Su única cadena MAX-MIN de extremos a, e , es la de aristas $[a, c] ; [c, e]$.

9.4. CODIFICACIONES DE MENOR LONGITUD PROMEDIO

Seguidamente nos referiremos a un problema de minimización totalmente diferente de los vistos para el caso de árboles.

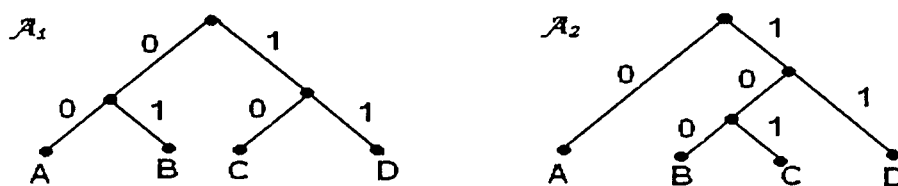
Está vinculado a cuestiones de codificación y lo estudiaremos mediante arborescencias binarias estrictas.

Sin dificultades podría extenderse al caso de arborescencias t -arias estrictas.

Para motivar su estudio recordemos que con el fin de almacenar, o de transmitir información, en lugar de los símbolos habituales (letras, números, signos de puntuación, etc.) pueden adoptarse otras codificaciones, y que al efecto es frecuente recurrir a sucesiones de un alfabeto binario.

Tal el caso del Lenguaje Morse para la transmisión telegráfica, o el del Código ASCII (American Standard Code for Information Interchange) habitual en Informática.

Las siguientes arborescencias con arcos etiquetados 0, 1, ejemplifican como se podrían codificar los símbolos A, B, C, D , asociándolos a las sucesiones de 0 y de 1 que determinan los caminos desde la raíz hasta la hoja que representa al símbolo en cuestión.



En nuestro caso, de acuerdo con la codificación inducida por $\mathcal{A}_1$ tendríamos las codificaciones $A = 00$; $B = 01$; $C = 10$; $D = 11$; mientras que con la definida a partir de $\mathcal{A}_2$ tendríamos $A = 0$; $B = 100$; $C = 101$; $D = 11$.

Obviamente

- la longitud de las distintas *sucesiones (palabras) codificadoras* coincide con la altura de las respectivas hojas.
- la codificación generada por $\mathcal{A}_1$, pero no la obtenida a partir de $\mathcal{A}_2$ es “de longitud fija”,
- aumentando el número de hojas pueden darse codificaciones similares para mayor cantidad de símbolos.

Adoptando los esquemas anteriores, a cada una de las letras A, B, C, D, corresponde una determinada “palabra binaria”, y con éstas podríamos codificar fácilmente todas las palabras compuestas con dichas letras.

Así, por ejemplo, la palabra ABCD resultará codificada 00011011 si se recurre a $\mathcal{A}_1$, pero 01001011 empleando $\mathcal{A}_2$.

Con referencia a la *decodificación* de las sucesiones de 0 y 1 notemos que supuesto se ha empleado $\mathcal{A}_1$ a cada una de las letras A, B, C, D está asociada una secuencia de longitud dos y en consecuencia 00011111 codifica ABDD.

En cambio, la misma sucesión 00011111 no podría decodificarse utilizando $\mathcal{A}_2$.

Por otro lado, en ninguna de las dos codificaciones anteriores las palabras binarias asignadas a los símbolos son subpalabras iniciales de las de alguna otra (en tal caso se dice que son “*códigos con propiedad de prefijo*”) y esto permite decodificar sin ambigüedades, y fácilmente, mensajes escritos con ellos.

Nótese que tener “propiedad de prefijo” es condición suficiente para asegurar una decodificación unívoca, pero no necesaria según resulta del ejemplo que sigue.

Supuesto que $P = 0$, $Q = 01$, $R = 11$, en la sucesión 00001111 los tres primeros 0 deben representar a P, el cuarto podría corresponder a P, o bien a Q, pero la paridad del número de 1 consecutivos que la completan hace que la sucesión dada codifique, necesariamente, a la palabra PPPRR.

Obviamente, la palabra AAAAC será codificada 0000000010 si se elige la codificación $\mathcal{A}_1$, pero 0000101 si se opta por la generada a partir de $\mathcal{A}_2$.

Esto nos lleva, de forma natural, a plantear el problema de cómo elegir codificaciones que permitan minimizar “la longitud promedio de los mensajes”.

Para ello veremos como construir arborescencias binarias estrictas T que hagan mínima la suma $w(T) = \sum_{i \in I} w_i \cdot h_i$, donde w_i es la “frecuencia promedio” (o “peso”) y h_i la altura de la hoja que corresponde al i -ésimo símbolo a codificar.

Parece natural, a tal efecto, asignar “palabras codificadoras más breves” a los símbolos que se usan con más frecuencia, y del método que daremos resulta que esta idea intuitiva es correcta.

Como hay un número finito de hojas, también es finita la cantidad de arborescencias y por lo tanto el de valores $w(T)$. Luego dicho óptimo es alcanzable.

El algoritmo que daremos responde a la idea de asignar sucesiones más largas a los símbolos menos empleados.

Nos llevará a una codificación de longitudes variables, con propiedad de prefijo.

Para enunciarlo nos referiremos a una arborescencia binaria estricta T , de altura l^* , con i -ésima hoja de altura h_i , y de peso w_i .

Lema I

Si la i -ésima hoja de T tiene altura $h_i = l^*$, su hermano también es hoja.

En efecto, caso contrario su hermano no sería hoja, y no sería cierto que l^* es la mayor de las alturas de las hojas.

Lema II

Si T minimiza $w(T)$, y $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_k$ entonces $h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_k$.

Para la demostración razonaremos por el absurdo.

Visto que pares de hojas de igual peso pueden suponerse etiquetadas de forma que se satisfaga lo indicado, bastará limitarse a considerar pares de hojas con pesos diferentes entre sí.

Supuesto que para cierta arborescencia óptima T existen hojas r, s , tales que $w_r < w_s$ y $h_r < h_s$; sea T' la que se obtiene intercambiando las hojas r, s .

Como en T' las alturas de las hojas son $h'_i = h_i$ ($r \neq i \neq s$); $h'_r = h_s$; $h'_s = h_r$;

$$\sum w_i \cdot h_i - \sum w_i \cdot h'_i = (w_r h_r + w_s h_s) - (w_r h'_r + w_s h'_s) = (w_r - w_s) \cdot (h_r - h_s) > 0$$

Pero entonces $w(T') < w(T)$ en contradicción con lo supuesto.

Corolario

En toda "arborescencia óptima" las dos hojas de menor peso son hermanas y a ellas corresponde altura máxima.

Lema III

Supuesto que T es una arborescencia y T' la que se obtiene eliminando en T sus hojas 1, 2, y asignando a su predecesor inmediato el peso $w_1 + w_2$ resulta que: T es óptima para los pesos w_i ($1 \leq i \leq k$) si y sólo si T' lo es para los pesos $w'_1 = w_1 + w_2$; $w'_i = w_{i+1}$ ($2 \leq i \leq (k-1)$).

Demostración

En efecto, por hipótesis y lemas anteriores se tiene $h_1 = h_2 = l^*$.

Además, $h'_1 = l^* - 1$; $h'_j = h_{j+1}$ para $2 \leq j \leq k-1$, de donde :

$$\begin{aligned} w(T) &= \sum_{i=1}^k w_i \cdot h_i = (w_1 + w_2) + (w_1 + w_2) \cdot (l^* - 1) + \sum_{i=3}^k w_i \cdot h_i = \\ &= (w_1 + w_2) + \sum_{i=1}^{k-1} w_i' \cdot h_i' = (w_1 + w_2) + w(T') \end{aligned}$$

METODO DE HUFFMAN [Huf52] (ver [HorS76/78], [Hu82], [SwaT81])

Para construir arborescencias binarias estrictas que generen códigos binarios que minimicen "la longitud promedio de los mensajes".

Las arborescencias buscadas serán construidas a partir de sus hojas, generándose conjuntos de arborescencias que se irán conectando entre sí hasta constituir una sola.

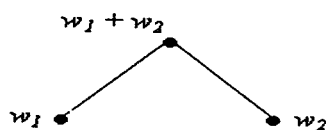
De los datos, o del proceso a seguir, puede ser que en ciertas etapas se presenten "pesos" repetidos.

En tal caso, por cierta ambigüedad de interpretación resulta que la arborescencia buscada no estará, en general, unívocamente determinada, aunque sí su valor.

Las arborescencias serán obtenidas tras aplicación reiterada de las siguientes reglas :

- 1) Con los "pesos" de las hojas se forma la sucesión $S_n = w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n$

y la arborescencia.



- 2) Con los $(n-1)$ valores $(w_1 + w_2)$, w_3 , ..., w_n se determina, reordenándolos, la sucesión $S_{n-1} = w'_1 \leq w'_2 \leq \dots \leq w'_{n-1}$

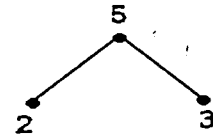
- 3) Si $(n-1) > 1$ se reitera 1) aplicándola a S_{n-1} .

Caso contrario la arborescencia construida satisface lo buscado.

Ejemplo

Supongamos dados los símbolos A, B, C, D, E, F, y que sus "pesos" respectivos son 2, 3, 5, 6, 3, 7,

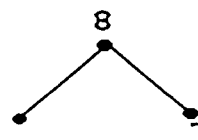
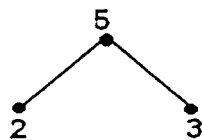
Aplicando 1) se tienen la sucesión $S_6 = 2, 3, 3, 5, 6, 7$ y la arborescencia



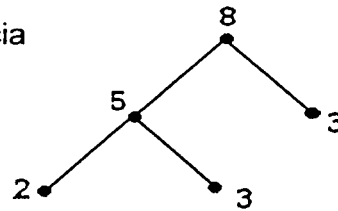
Ahora, los "nuevos pesos" a considerar son 3, 5, 6, 7, 5 y aplicando 2) se halla la sucesión $S_5 = 3, 5, 5, 6, 7$,

Para una nueva aplicación de la regla 1) debe elegirse el par 3, 5, y el 5 puede pensarse "peso" de una de las hojas, o "peso" de la raíz de la arborescencia recién construida.

Si suponemos que corresponde al peso de una de las hojas al aplicar el método se tendrá el par de arborescencias

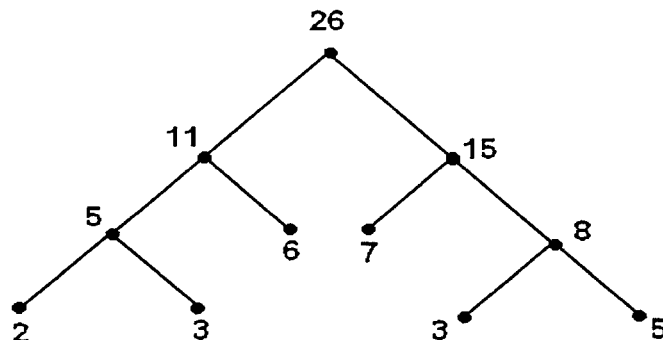


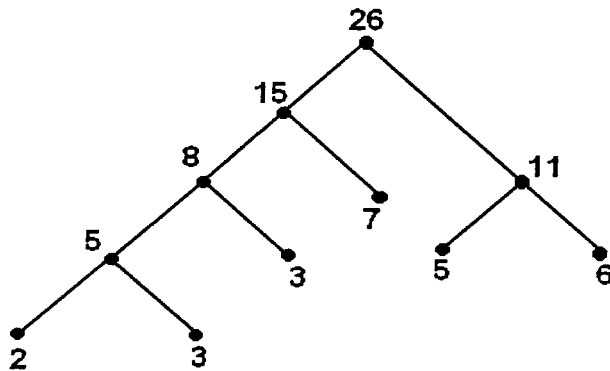
Caso contrario, tendremos la arborescencia



En ambos casos los nuevos "pesos" llevan a la sucesión $S_4 = 5, 6, 7, 8$.

Reiterando en ambas forestas el procedimiento indicado, se obtendrían, finalmente las dos arborescencias





En las dos el “peso” de la raíz es $\sum w_i = 26$. y $w(T) = \sum_i w_i \cdot h_i = 65$.

Etiquetando en ellas con 0 (1) los arcos que llevan a cada hijo izquierdo (derecho) se tienen codificaciones unívocamente determinadas, excepto eventualmente para símbolos de igual peso.

En particular, en nuestro caso la primera arborescencia nos lleva a :

A = 000 ; B = 001 ; C = 111 ; D = 01 ; E = 110 ; F = 10 ;

o bien: a la que resulta de intercambiar B con E.

La restante nos lleva a A = 0000 ; B = 0001 ; C = 10 ; D = 11 ; E = 001 ; F = 01 ;
o bien, a la que resulta de intercambiar B con E.

En la primera, pero no en la segunda, a los dos símbolos de igual frecuencia (a saber B, E) corresponden sucesiones binarias de igual longitud.

Los mensajes que contuvieran exactamente una vez cada una de “letras” en cuestión tendrían por longitud la suma de las alturas de las hojas, y ella sería 16 ó 17 según cual fuera la codificación adoptada.

El procedimiento que acabamos de considerar se puede extender, sin modificaciones esenciales, al caso de arborescencias t -arias estrictas.

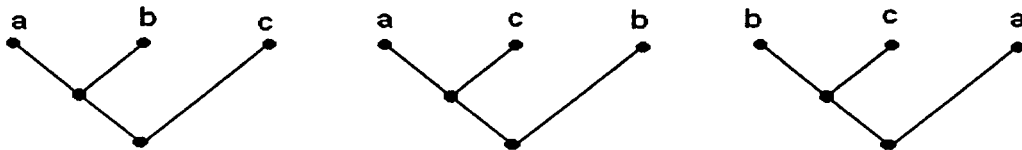
También fue estudiado en relación con “funciones costo” distintas de la $\sum w_i \cdot h_i$, y en cuestiones que toman en cuenta restricciones sobre el peso y la altura de sus vértices interiores.

Consultar [GlaK74], [HorS76/78], [Hu82] Cap.5, [Hor84], [ParkS79/80], [SwaT81]-Cap.15

Seguidamente ejemplificaremos otro de los problemas para cuya resolución resulta útil el Método de Huffman.

Dadas los conjuntos $a = \{ 3 \}$, $b = \{ 4, 5, 7 \}$, $c = \{ 1, 2, 6, 8 \}$ ordenar en forma creciente los números que los componen, recurriendo para ello a sucesivas comparaciones de pares de conjuntos.

Las tres formas de abordar su solución están esquematizadas en :



Convinando en tomar como “costo de una comparación” a la cantidad de números involucrados en ella, y puesto que la cantidad de veces que cierto elemento debe ser comparado coincide con la altura de la hoja en la cual se encuentra, resulta que :

si w_i es la cantidad de elementos de la i -ésima hoja, y h_i es su nivel en la arborescencia, ella contribuye al costo buscado con $w_i \cdot h_i$.

Así entonces, y para el caso planteado los distintos “costos por ordenamiento” serían $2 \cdot (1+3) + 4 = 12 \quad \parallel \quad 2 \cdot (1+4) + 3 = 13 \quad \parallel \quad 2 \cdot (3+4) + 1 = 15$

En general, el “costo de dichos ordenamientos” estaría dado por $\sum w_i \cdot h_i$; y la utilidad del método de Huffman para minimizarlo es evidente.

El siguiente es otro ejemplo de cuestiones que llevan a vincular arborescencias binarias estrictas ordenadas, con operaciones binarias aplicadas reiteradamente en una sucesión.

Dada la sucesión 2,3,3,1, las distintas formas en que es posible aplicar en ella (entre contiguos) una operación binaria se corresponden con las cinco arborescencias ordenadas binarias estrictas de cuatro hojas dadas en pág.105, y representativas de las expresiones algebraicas $((2+3)+3)+1 \parallel ((2+(3+3))+1) \parallel ((2+3)+(3+1)) \parallel (2+((3+3)+1)) \parallel (2+(3+(3+1)))$.

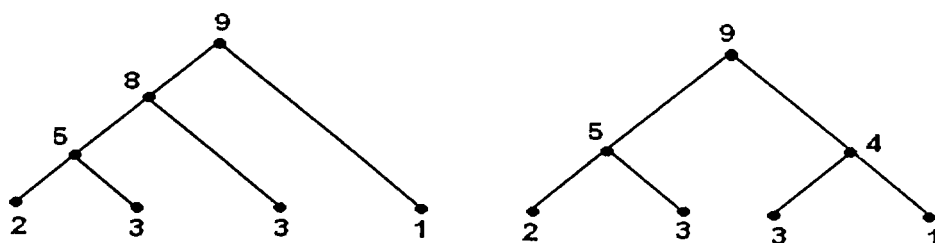
Todas suman nueve, pero la situación es diferente si se trata de evaluar la suma de las “sucesivas sumas de pares de contiguos” involucrados en el proceso.

En efecto, a partir de $((2+3)+3)+1$ tendríamos $((5+3)+1)$, y de ésta resultaría $(8+1) = 9$. Por lo tanto la suma de las sucesivas sumas de pares de contiguos sería $5+8+9 = 22$

En cambio, a partir de $((2+3)+(3+1))$ tendríamos $5 + 4 = 9$ y la suma que nos ocupa sería $5+4+9 = 18$.

La correspondencia entre arborescencias binarias estrictas ordenadas, y las distintas formas de asociar pares de contiguos al aplicar una operación binaria, lleva a interpretar a los valores de estas sucesivas sumas parciales como "pesos" de los vértices interiores de la arborescencia representativa..

Esto permite asociar lo antedicho a los siguientes esquemas, y otros similares.



Generalizando lo antedicho caben las siguientes preguntas :

Dada una sucesión numérica $a_1, \dots, a_n$ ¿ Como disponer los pares de paréntesis para que la suma de las sucesivas sumas de pares de contiguos, resultantes del proceso seguido, sea mínima ?

Dada una sucesión numérica $a_1, \dots, a_n$, y tomando a_i como peso de la i -ésima hoja, construir una arborescencia binaria estricta tal que la suma de los pesos de sus $(n - 1)$ vértices interiores sea mínimo.

En [Hu82] - Cap.3 se observa que estos problemas están relacionados con las **arborescencias lexicográficas**, es decir con aquellas en las cuales interesar tomar en cuenta si el orden con que se enumeran habitualmente los símbolos a codificar es respetado por la codificación resultante.

En particular, la codificación definida por la arborescencia $\mathcal{A}_1$ de pág.128 es lexicográfica pues según ella a los símbolos A, B, C, D, se asignan, respectivamente, los números binarios $00 = 0$ // $01 = 1$ // $10 = 2$ // $11 = 3$.

En cambio no lo es la definida por la arborescencia $\mathcal{A}_2$ pues según ella D es codificado $11 = 3$ mientras que C lo es $101 = 5$.

Podríamos decir que las arborescencias lexicográficas corresponden al proceso de búsqueda en los diccionarios.

Obviamente, en los textos en castellano la letra A no está entre las utilizadas con menor frecuencia, y por lo tanto la metodología de Huffman aplicada al alfabeto español no llevaría a una arborescencia lexicográfica.

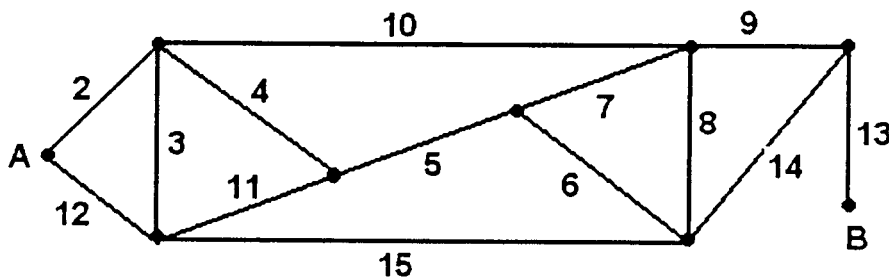
En cuanto a la construcción de “*codificaciones lexicográficas*” observemos que

- en [Hu82] Cap.3-4 se estudia el algoritmo que, recurriendo a la Programación Dinámica, fue propuesto a tal efecto en [GilM59], y se observa que el mismo fue mejorado en [Knu71] al reducirse su tiempo de procesamiento
 - en [Hu82]-Cap.5 se incluyen, además de referencias bibliográficas, una detallada descripción del algoritmo propuesto por Hu yTucker [HuT71], como así también de la modificación que le fue introducido en [GarW77]. Al respecto ver también [Knu69].Vol.III–6.2.2,
-

EJERCICIOS

9 -1)

Determine, recurriendo a los distintos métodos dados el árbol cubriente mínimo (máximo) del siguiente grafo valuado.



9 - 2)

Dado un grafo conexo $G = (V, U)$ sea G_1 el que se obtiene valuando sus aristas u_i con w_i , y G_2 el que resulta de valuarlas con $w'_i = K - w_i$, (K constante)

¿ Puede afirmar que los árboles cubrientes máximos de G_1 coinciden con los árboles cubrientes mínimos de G_2 ?

9 - 3)

¿ Puede darse un grafo G de orden n con al menos $(n - 1)$ aristas de valor menor que el de cierta arista u ; pero tal que u integre todos los árboles cubrientes mínimos de G ?

9 - 4)

Sabemos que si G es un grafo conexo tal que todas sus aristas tienen valores distintos, G contiene un único árbol cubriente óptimo.

¿ Podría afirmar algo similar si en G hubiera exactamente dos aristas de igual valor ?

9 - 5)

Demuestre la validez del Algoritmo de Kruskal II.

9 - 6)

Determine en el grafo del Ejerc.9 -1) una cadena de extremos A, B, en la que el mayor (menor) valor de las longitudes de sus tramos sea tan pequeño (tan grande) como posible

9 - 7)

Sea A una arborescencia binaria estricta con todas sus hojas de altura l .

Vea que etiquetando sus arcos izquierdos (derechos) con 0 (1) sus hojas quedan identificadas por las notaciones binarias de los naturales x tales que : $0 \leq x \leq 2^l$. ¿ Podría darse algo similar en relación con otras bases numéricas ?

9 - 8)

Construya, aplicando la metodología de Huffman, las arborescencias binarias estrictas que minimicen la "longitud promedio" de los mensajes a enviar con los símbolos A, B, C, D, E, F, G , y esto supuesto que sus respectivas frecuencia son : 2, 8, 3, 5, 6, 3, 10.

Elegida una de ellas :

- ¿Cuál sería la codificación del símbolo D ?
- Codifique el mensaje $ACDGBDBFGBA$.
- Decodifique 000011000110001011.

9 - 9)

Determine una codificación binaria que, ignorando los acentos, minimice la longitud de la sucesión que codificaría la frase : "en ese alto horno había una temperatura de mil seiscientos sesenta y seis grados centígrados."

CAPITULO 10

COLORABILIDAD y PLANARIDAD

En ocasiones interesa clasificar los vértices (las aristas) de un multigrafo atendiendo a características o propiedades particulares, y para operar con ellos (ellas) suele ser útil suponer que sus elementos han sido "numerados" o "coloreados" bajo ciertas restricciones.

En la sección 10.1 daremos algunos pocos resultados sobre esta cuestión.

En las restantes nos referiremos al "Problema de los Cuatro Colores", ya mencionado en 1 y al de los "multi-di-grafos planares" cuyo estudio fue encarado, en gran parte, con el objeto de resolver dicho problema.

Destaquemos al respecto que si bien, en general, las representaciones topológicas de los multi-di-grafos sólo tienen carácter ilustrativo, las de aquellos que son "planares" ; es decir, la de los que admiten "representaciones topológicas limpias" (ver 1 Cap.2) puede ser esencial.

Por eso, a veces, para distinguir entre los multi-di-grafos y sus representaciones topológicas nos referiremos a éstas designándolas *multi-di-grafos geométricos*.

Algunas breves consideraciones al respecto pueden verse en [LecM69].

10.1. MULTIGRAFOS "COLOREADOS"

A este efecto sólo se admitirán "coloraciones" de los vértices (de las aristas) tales que a vértices (aristas) adyacentes correspondan "colores" diferentes.

Se dice **número cromático** (**número arista cromático**) del multigrafo G a la menor cantidad de colores necesarios para colorear sus vértices (sus aristas) de forma que los (las) adyacentes tengan "colores" diferentes.

Notaremos $\psi(G)$ al *número cromático*, y $\psi'(G)$ al *número arista cromático*. Este último también suele decirse *índice cromático*.

Cuando el número cromático de G sea k diremos que G es **k -cromático** (o **k -coloreable**). Análogamente se introduce el concepto de **k -arista cromático**.

La existencia de bucles impide colorear los vértices con la restricción que hemos indicado, y para el análisis de tales coloraciones cada conjunto de aristas paralelas puede substituirse por sólo una de ellas.

Por lo tanto, para la problemática de las "vértice coloraciones" bastará limitarse a considerar grafos sin bucles.

Para determinar el valor de estos "números cromáticos" puede recurrirse a la Programación Lineal Entera o al Método Booleano de Maghout [Mag59/63]. Al respecto ver [Mars71]-Cap.5 ; [Kau68b]-Cap.3, y el ejemplo de pág.146.

La búsqueda de ellos suele ser ardua, excepto para el caso de los bipartidos, situación en que $\psi(G) = 2$.

Recuérdese al respecto que según se vió en 1 pág.108 un multigrafo es bipartido (o bicoloreable) si y sólo si carece de ciclos de longitud impar.

En [HarHM77] se probó que el número máximo de bipartidos necesarios para cubrir un grafo G sin bucles es $\lceil \log_2(\psi(G)) \rceil$.

Por lo tanto, y a partir del resultado de Appel-Haken según el cual la conjetura de los cuatro colores es válida, resulta que para los planares dicho valor es dos.

Es fácil ver que :

- el número cromático de los grafos discretos es uno, y el de los que contienen aristas (distintas de bucles) es al menos dos.
- $\psi(K_n) = n$; $\psi(C_n)$ es dos si n es par (bipartido), y tres si n es impar
- si $G' \subseteq G$, $\psi(G') \leq \psi(G)$.
- $\psi(G)$ es a lo sumo igual al orden de G , y $\psi'(G)$ igual o mayor que el máximo número de aristas incidentes en un mismo vértice.

En cada vértice coloración de G sus vértices de igual color son independientes entre sí (es decir, son no adyacentes dos a dos).

Ellos constituyen conjuntos *estables interiormente* (o equivalentemente, inducen clanes en el complementario de G).

Por lo tanto, $\psi(G)$ coincide con el menor número de clanes disjuntos que cubren los vértices de su grafo complementario

Por otro lado, y puesto que si G contiene clanes de orden k , para colorear sus vértices se necesitan al menos k colores, es claro que el número cromático de G es mayor o igual que el máximo de los órdenes de sus clanes.

Aquellos, para los cuales cualesquiera sean sus subgrafos inducidos vale la igualdad entre su número cromático y el mayor de los órdenes de sus clanes, se dicen “*grafos perfectos*”.

De estos grafos sólo diremos que :

- entre ellos están los *bipartidos*, los de *intervalo*, y los de *comparabilidad*
- un grafo es perfecto si y sólo si también lo es su complementario [Lov72].

Para más información [Ber75], [BerCh84], [Die96], [Golu80], [Lov83], [Toft66].

Observemos además que los Cap.12-15-16 de [Ber70] están dedicados, respectivamente, al número arista cromático, al número cromático y a los grafos perfectos.

Antes de dar algunos resultados propios de esta sección recordemos que según hemos convenido, dado un grafo G notaremos :

- $G - \{u\}$ al que se obtiene a partir de G eliminándole su arista u ,
- G/u al que resulta de “contraer su arista u ” ; es decir, de eliminar u , e identificar sus extremos.

Un grafo G se dirá *contraíble* a G^* , si G^* puede obtenerse a partir de G aplicando reiteradamente la precedente “contracción de aristas”

- 1) Obviamente, si K_h es subgrafo de G entonces $\psi(G) \geq h$.
 Pero la recíproca sólo es válida para $h = 2$

En efecto, para $h = 3$ es invalidada por los ciclos elementales de longitud impar mayor que tres, y en general por el siguiente y sorprendente resultado.

Para cada entero positivo k existe un grafo k -cromático sin “triángulos”.

Esta afirmación fue alcanzada en diversas oportunidades. Para mayores datos [CapM78], [CharL79], [Chv74], [Har69b], [Luc79], [Mars71], [Myc55].

Por otro lado, de [Dir52b/52b/53] resulta que

| Si G es 4-cromático, entonces G tiene subgrafos que son subdivisiones de K_4

Este resultado, cuya demostración puede reencontrarse en [BonM76] y [Luc79] verifica parcialmente la siguiente *Conjetura de Hadwiger* [Hadw43].

Si G es k -cromático, contiene subgrafos "contraíbles" a K_k .

Esta conjetura está estrechamente ligada con la de Hajós [Haj61], y ambas son estudiadas en [Tho88b].

Ver [Ber70], [BonM76], [Die96], [Har69b], [Mars71], [Ore67], [Saa72], [Tut78].

Observemos además que la Conjetura de Hadwiger es válida si $k \in \{1, 2, 3, 4\}$; que para $k = 5$ implica la validez de la ya verificada Conjetura de los Cuatro Colores, y que el recíproco de este resultado fue demostrado en [Wag60/64].

2) Cualquiera sea el grafo G con m aristas $\psi(G) \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 8 \cdot m}}{2}$

En efecto, supuesto $k = \psi(G)$, y dada una k -coloración de G , cualesquiera sean los colores c_i, c_j existe al menos una arista con extremos coloreados c_i, c_j , (caso contrario ambos colores podrían identificarse y el número cromático de G sería menos que k) Luego, $2 \cdot m \geq k \cdot (k - 1)$, y resolviendo $k^2 - k - 2 \cdot m \leq 0$ se tiene la solución indicada.

3) Para todo grafo sin bucles, de orden n con m aristas

$$\frac{n^2}{n^2 - 2 \cdot m} \leq \psi(G) \leq 1 + \sqrt{\frac{2 \cdot m (n - 1)}{n}}$$

Para $G = K_n$ se satisfacen ambas igualdades, y para $G = K_5$, $n \geq 5$, ambas desigualdades. [CapM78]

4) En [NorG56] se demostró que :

| Si G es un grafo sin bucles de orden n , los números cromáticos de G , y de su complementario $\overline{G}$, satisfacen

i) $2\sqrt{n} \leq \psi(G) + \psi(\overline{G}) \leq 1 + n$

ii) $n \leq \psi(G) \cdot \psi(\overline{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

Otras deducciones pueden encontrarse en [CharL79], [CharM71] y [Har69b].

Las cotas indicadas son inmejorables para una infinidad de valores de n . En particular, la cota superior de i) es alcanzada, por ejemplo, cuando G es K_n , o su complementario, y la inferior si G es K_1 ó C_4 .

Análogamente, las de ii) se alcanzan respectivamente con K_1 y con K_n .

- 5) Si el grafo G carece de bucles y Δ es el mayor grado de sus vértices,
 $\psi(G) \leq 1 + \Delta$.

Para demostrarlo indicaremos como obtener una tal "coloración".

Al efecto notaremos, arbitrariamente, $v_1, v_2, \dots, v_n$ los vértices; asignaremos a v_1 el "color 1", y en general, a cada v_j el primero de los naturales que no está en el conjunto S_j de los naturales asignados a los v_i ($i < j$) adyacentes de v_j . Como los S_j tienen a lo sumo Δ vértices se necesitan a lo sumo $(1+\Delta)$ colores.

También se lo demuestra por inducción sobre el número de vértices.

- 6) Mejorando el resultado anterior cabe el siguiente, debido a Brooks [Bro41].
 Del mismo resulta que el valor $1+\Delta$ sólo es alcanzado en "un par" de casos.

Si el grafo G carece de bucles, y Δ es el mayor de los grados de sus vértices, entonces $\psi(G) \leq \Delta$ excepto:

- si $\Delta = 2$ y al menos una de las componentes conexas de G es un ciclo de longitud impar.
- si $\Delta > 2$ y al menos una de las componentes conexas de G es un completo de orden $(\Delta+1)$;

casos en los cuales $\psi(G) = \Delta + 1$.

Corolario

– Todo grafo 3 regular sin bucles distinto de K_4 es tres vértice colorable.

El resultado de Brooks es deducido en [Ber70] y [Luc79] siguiendo la metodología de [MeiV69]; y en [BonM76] y [CharL79] las ideas de [Lov75].

También se lo demuestra en [Brya93], [Die96], [Pon69] y [Wils72].

- 7) Visto que el número cromático del bipartido $K_{1,\Delta}$ es dos, aún para los Δ arbitrariamente grandes, resulta que la cota anterior puede diferir mucho de la exacta.

Otra, menos dependiente que ella de las características locales de G es la que sigue, debida a [Wilf67].

Si G es grafo conexo sin bucles y χ es el mayor autovalor de su matriz de adyacencia, entonces $\psi(G) \leq (1 + \chi)$.

El Teorema de Perron-Frobenius asegura que χ no supera al máximo grado de los vértices de G , y en consecuencia la cota de Wilf es al menos tan ajustada como la de Brooks. Ver [Hof70].

En ocasiones cabe preguntarse :

¿ De cuántas formas pueden colorearse con k colores, y con las restricciones del caso, los vértices de un determinado grafo ?

Para tratar esta cuestión es frecuente recurrir a los “*polinomios cromáticos*”, noción ésta introducida por Birkhoff [Birk12] con el fin de abordar el “Problema de los Cuatro Colores”, y extendida luego al caso de grafos sin bucles por Whitney [Whit32c/32d],

Para mayor información [Birk34], [Read68], [ReadT88], [Tut54/75/84].

Esta temática cobró interes propio a partir del importante trabajo de Birkhoff y Lewis [BirkL46].

Notando, según es habitual, $P(G, k)$ al número de formas en que es posible colorear con a lo sumo k colores los vértices de G , se constata que :

si G es discreto de orden n : $P(G, k) = k^n$

si G es el completo K_n : $P(G, k) = k.(k-1).(k-2). \dots .(k-(n-1))$

si G es el ciclo C_3 : $P(G, k) = k.(k-1).(k-2)$

si G es un árbol de orden n : $P(G, k) = k.(k-1)^{n-1}$

si G es obtenido a partir de H , agregando un vértice adyacente a todos los de H , entonces $P(G, k) = k. P(H, k - 1)$.

A grafos isomorfos corresponde un mismo polinomio cromático.

Para constatar que le recíproca es falsa basta elegir un par de árboles no isomorfos de igual orden.

Veamos que

| Si G es grafo de orden n , el valor $P(G, k)$ puede reencontrarse mediante un polinomio en k , de grado n .

Para ello convengamos en notar $\alpha(G, h)$ al número de particiones de los vértices de G en exactamente h ($1 \leq h \leq n$) subconjuntos estables interiormente, (es decir, en h conjuntos de vértices sin pares de adyacentes).

Dado un conjunto de k colores ($k \geq h$) hay $k.(k-1).(k-2) \dots (k-h+1)$ formas de colorear, con las restricciones del caso, a los vértices de cada uno de dichos $\alpha(G, h)$ conjuntos, y como cada uno de ellas da lugar a una k -coloración de G resulta que el número de formas en que es posible colorear G con k colores está dado por el siguiente polinomio en k de grado n .

$$P(G, k) = \sum_{h=1}^n k \cdot (k-1) \dots (k-(h-1)) \cdot \alpha(G, h) \quad \#$$

Otra demostración, por inducción, puede verse en [Brya93]-Cap.11.

Reencontremos, a partir de $\#$ algunos de los resultados de la lista anterior

- i) Para cuando $G = K_n$ y puesto que en este caso $\alpha(G, h) = 1$ para $h = n$, y $\alpha(G, h) = 0$ en caso contrario, el resultado buscado es inmediato.
- ii) Para $G = K_{1,2} = P_3$, $\alpha(G, h) = 1$ si $h \in \{2, 3\}$ y $\alpha(G, h) = 0$ si $h = 1$.
De donde, aplicando $\#$ $P(G, h) = k.(k-1) + k.(k-1).(k-2) = k.(k-1)^2$ que es el número cromático de los árboles de orden tres.
- iii) Si G es el discreto de orden tres, para $h = 1$ y para $h = 3$, vale $\alpha(G, h) = 1$, mientras que para $h = 2$ se tiene $\alpha(G, h) = 3$.
Por lo tanto $P(G, h) = k + 3.k.(k-1) + k.(k-1).(k-2) = k^3$.

Veamos que $P(G, k) = P(G - \{u\}, k) - P(G/u, k) \quad @$

En efecto, si $u = [a, b]$, $a \neq b$, las k -coloraciones de G se corresponden biyectivamente con las de $G - \{u\}$ en las que a, b , tienen colores diferentes, mientras que aquellas de $G - \{u\}$ en las que a, b , tienen igual color se compensan con las de G/u .

En [ReadT88] se muestra como @ nos puede llevar a determinar el número cromático de cierto G conociendo los de algunos de sus subgrafos.

En particular, notando C_n (T_n) al ciclo elemental (a todo árbol) de orden n :

$$P(C_4, k) = P(T_4, k) - P(C_3, k) = k \cdot (k-1)^3 - k \cdot (k-1) \cdot (k-2) = (k-1)^4 + (k-1).$$

Por inducción sobre n puede verse que $P(C_n, k) = (k-1)^n + (-1)^n \cdot (k-1)$

Si $a_p k^p + a_{p-1} k^{p-1} + \dots + a_1 k + a_0$ es el polinomio cromático de un grafo, no necesariamente conexo, sin bucles de orden n con m aristas entonces :

- 1) $p = n$
- 2) $a_p = 1$
- 3) $a_0 = 0$
- 4) $a_{p-1} = -m$
- 5) los coeficientes a_i son de signos alternados.
- 6) el menor r con $a_r \neq 0$ es su número de componentes conexas
- 7) si G es conexo, $|a_r| \geq (n-1)/(r-1)$

Las propiedades precedentes no permiten caracterizar a los polinomios que son "polinomios cromáticos" de algún grafo

Caso contrario $k^4 - 3k^3 + 3k^2$ sería polinomio cromático de un grafo de orden cuatro, con tres aristas y dos componentes ; es decir, sería polinomio cromático del grafo $K_3 \cup K_1$; pero el correspondiente a este grafo es $k^4 - 3k^3 + 2k^2$.

Consultar al respecto [CapM78]-Cap.1, [Har69b]-Cap.12 , [Wilf73].

Veamos ahora como se podría, supuesto que G es un grafo de orden n , con m aristas, y número cromático p , hallar una de las posibles p coloraciones.

Para ello, sean : $B(G) = (b_{ij})$ la matriz de incidencia de G , y $M = (m_{ij})$ una matriz de orden $p \times n$ definida por $m_{ij} = 1$ si el vertice j tiene color i ; y $m_{ij} = 0$ en caso contrario.

Visto que la existencia de una p -coloración equivale a que cada cada componente de $M(G) \cdot B(G) \in \{0, 1\}$ resulta que hallar una p -coloración equivale a elegir, de entre las soluciones enteras del siguiente problema de incógnitas m_{ij} , aquellas en la cuales $m_{ij} \in \{0, 1\}$.

$$\sum_i m_{i,j} = 1 \quad ; \quad \sum_j m_{i,j} \cdot b_{j,k} \leq 1 \quad ; \quad i \in \{1, \dots, p\} \quad ; \quad j \in \{1, \dots, n\} \quad ; \quad k \in \{1, \dots, m\}$$

El análisis del sistema, y la determinación de sus soluciones, corresponden a la Programación Lineal Entera.

Obviamente, si hay tantos colores como vértices hay solución, y esto se refleja en que si $p = n$ basta elegir como M la matriz identidad

Respecto de las “arista-coloraciones” es obvio que si Δ es el número máximo de aristas incidentes en algún vértice de G , entonces $\psi'(G) \geq \Delta$

Más precisamente, Vizing [Viz64] demostró que :

Si G admite conjuntos de a lo sumo p aristas paralelas (es p -grafo), carece de bucles, y Δ es el mayor de los grados de sus vértices, entonces

$$\Delta \leq \psi'(G) \leq \Delta + p.$$

Corolario

Si G es grafo k -regular sin bucles su número arista cromático es k ó $k+1$

Para demostraciones del resultado de Vizing ver [Brya93], [CharL79], [Die96], [Luc79] o [BonM76], en donde se sigue la de [Four73].

En [Ber70] cuyo Cap.12 está dedicado a esta temática se lo reencuentra como corolario de un resultado más amplio.

El completo K_4 (K_3) permite ver que la precedente cota inferior (superior) no es mejorable. También en [BeiW73] se dan grafos en los cuales se alcanza la cota superior.

Otros resultados son :

- Todo multigrafo sin bucles y tres regular y hamiltoniano, es 3-arista coloreable (suele decirse que admite una coloración de Tait)
- Si G es un ciclo de orden n , su número arista cromático es dos si n es par, y tres si n es impar.
- Si G es un bipartido de grado máximo q entonces $\psi'(G) = q$.
Esto permite reencontrar el resultado de 1pág.42 según el cual todo grafo bipartido k -regular, $k > 0$, es 1-factorisable, y reciprocamente.

En [Shan49] se demostró que

Si G es multigrafo carente de bucles, y Δ es su grado máximo, entonces

$$\psi'(G) \leq \left\lceil \frac{3 \cdot \Delta}{2} \right\rceil.$$

Este resultado es fácilmente deducible a partir del de Vizing. (ver [Ber70]).

El completo K_3 muestra que para $\Delta = 2$ la cota precedente no es mejorable.

– En [AlaB71] y [Viz64] (ver [CapM78]-Cap.1.3) se demostró que :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Si } G \text{ es grafo de orden } n \\ 2 \cdot \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1 \leq \psi'(G) + \psi'(\overline{G}) \leq n + 2 \cdot \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \\ 0 \leq \psi'(G) \cdot \psi'(\overline{G}) \leq (n-1) \cdot \left(2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right) \quad ([x] \text{ parte entera de } x) \end{array} \right.$$

Todas estas cotas son alcanzables.

Para las cotas inferiores tomar $G = K_n$, y para las superiores $G = K_{1, n-1}$.

Veamos que el corolario precedente admite la siguiente especificación

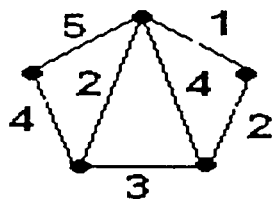
$$\text{Si } n > 1 \text{ entonces } \psi'(K_n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es impar.} \\ n-1 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Si n es **impar** ($n > 1$) podremos razonar sobre un n -ágono regular operando de acuerdo con lo siguiente :

- 1) Las aristas de "su contorno" se colorean : 1, 2, ..., n .
- 2) Cada "arista diagonal $[a, b]$ divide al contorno en dos partes", una de ellas con cantidad par de aristas y la otra con número impar, y este sector tiene, naturalmente, una "arista central"

Asignando a la arista $[a, b]$ el mismo color que el dado a dicha "arista central" y reiterando esto, se alcanza una $(n-1)$ -arista coloración de las incidentes en cada vértice.

El esquema
etapas.



visualiza, para $n = 5$, la aplicación de estas

- 3) Además y como el "color ausente en $\underline{x}$ " es el de la "arista central del contorno" cuando se lo recorre totalmente (desde $\underline{x}$ hasta $\underline{x}$) puede afirmarse que a vértices diferentes corresponden distintos "colores ausentes".

Por lo tanto la coloración así concretada genera, efectivamente, una n - coloración de las aristas del n -ágono.

Si n es par ($n > 2$) supondremos que nuestro $G = K_n$ fue obtenido agregando a $H = K_{n-1}$ un vértice $\underline{0}$ y haciendo que éste sea adyacente de todos los de H .

Coloreando H según se acaba de indicar para el caso de los órdenes impares, y atento a lo observado en 3), el *color ausente en cada vértice $\underline{x}$ de H* puede asignarse a la arista $[\underline{0}, \underline{x}]$ y obtener así una $(n-1)$ -arista coloración del $G = K_n$.

Estos resultados como así también otros similares referidos al "numero arista-cromático" y al "número total cromático" de los completos y de los bipartidos completos se pueden ver en [BehChC67].

Un par de problemas que pueden resolverse apelando a las nociones que acabamos de introducir son :

- 1) Dado un conjunto de alumnos, y otro de profesores, y conociendo para cada alumno cuántas entrevistas debe tener con cada profesor ¿ cómo organizar las entrevistas (todas de igual duración) para terminar con ellas en el menor tiempo posible ?

Para resolverlo consideremos un multigrafo bipartido con tantas aristas (a_i, p_f) como entrevistas debe rendir el alumno a_i con el profesor p_f , y determinar su número arista cromático.

Cada uno de los colores correspondería a una de las fechas de entrevistas.

- 2) Supongamos que $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$, integran las cinco subcomisiones $S_1 : A, E, H \parallel S_2 : B, E, F, H, I, J \parallel S_3 : C, F, H, I \parallel S_4 : D, E, G, I \parallel S_5 : B, G, J$.

Si cada subcomisión debe sesionar durante una hora por semana, y se toma en cuenta que nadie puede estar presente en reuniones distintas realizadas al mismo tiempo, ¿ cuál es el menor número de horas necesarias para el funcionamiento de todas ellas ?

Visto que cada par de las cuatro primeras tiene al menos un integrante en común serán necesarios al menos cuatro horas.

Como S_5 carece de elementos en común con S_1 (idem con S_3) ellas pueden sesionar en simultáneo, y el número buscado es cuatro.

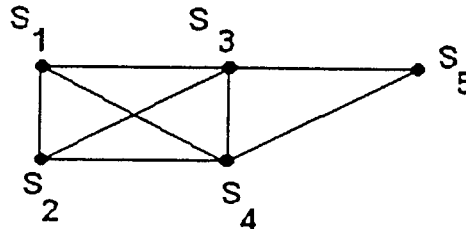
El problema anterior, que es caso particular del que se presenta al considerar la confección de "horarios de clase", admite la siguiente generalización

Dado un conjunto $S_i, i \in \{1, \dots, h\}$ de situaciones que pueden, o no, desarrollarse en forma simultánea, ¿cual es el menor tiempo necesario para satisfacerlas a todas?

Para resolverlo bastará construir un grafo de vértices S_i , y aristas $[S_i, S_j]$ si y sólo si ambos S_i, S_j son incompatibles en el tiempo, y hallar su número cromático, número este que resolverá la cuestión.

Cada vértice coloración corresponderá a una distribución horaria de los S_i , compatible con las restricciones, y recíprocamente.

Para el caso anterior corresponde el grafo



Su número cromático es cuatro, y las dos formas de colorear sus vértices con cuatro colores corresponden a las dos formas en que es posible hacer sesionar a las cinco subcomisiones en sólo cuatro horas.

Un algoritmo que permite abordar el precedente "time table problem" y acotar el número cromático de G en términos de los grados de sus vértices puede verse en [WeIP67].

A la bibliografía sobre cuestiones de cromaticidad citada pueden agregarse : [Boll78/79], [BusS65], [Deo74], [Dir53], [FioW77/78], [Gor88], [JenT95], [Ore62], [Ore67], [Sau71], [Tuc80], [Wils78b], [Wilf69].

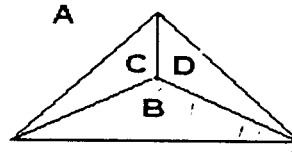
10.2 PROBLEMA DE LOS CUATRO COLORES y PLANARIDAD

En el Prólogo de 1 hemos dicho que ciertas observaciones de los cartógrafos del siglo XIX llevaron a la siguiente *Conjetura de los Cuatro Colores* :

Para colorear cualquier mapa, asignando colores diferentes a países con frontera común, bastan cuatro colores.

Las dificultades en resolver sobre su validez hicieron de este problema uno de los más famosos desafíos matemáticos.

Para colorear con las restricciones indicadas el mapa



no alcanzarían tres colores, y por lo tanto no es aceptable una conjetura similar disminuyendo el número de colores necesarios.

Desde 1976, fecha en que Appel y Haken resolvieron por la afirmativa la conjetura en cuestión, se sabe que dicho valor cuatro no sólo es necesario sino también suficiente. Resumimos tal situación diciendo

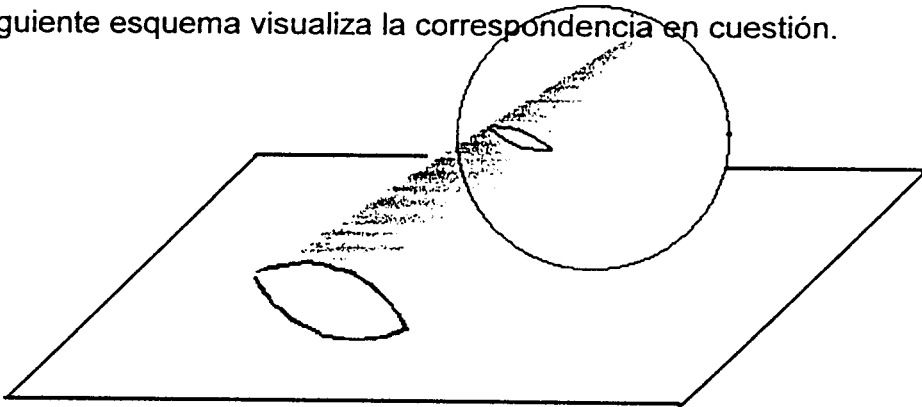
El número cromático del plano es cuatro.

Veamos que también es cuatro el número cromático de la esfera.

Al efecto, y para justificar que a cada *representación limpia* (ver 1 pág.20) de un multi-di-grafo en un plano puede asignarse otra en una esfera, y que también es válida la recíproca, basta recurrir a *proyecciones estereográficas*.

Para ello, dado en un plano $\mathcal{P}$, un diagrama $\mathcal{G}$ representativo del planar G , y elegida una esfera $\mathcal{S}$ cuyo "polo sur" pertenece a $\mathcal{P}$ pero no incide en curvas de $\mathcal{G}$ bastaría proyectar el esquema $\mathcal{G}$, sobre $\mathcal{S}$ y desde su "polo norte".

El siguiente esquema visualiza la correspondencia en cuestión.



Visto que la correspondencia indicada da lugar a una biyección entre las "regiones" del plano y de esfera, resulta claro que los respectivos "números cromáticos" (mínimo necesario y suficiente para colorearlas asignando colores distintos a las regiones adyacentes) de la esfera y del plano coinciden.

Según se observó en 1 pág.20 el problema de referencia está estrechamente ligado con el estudio de los *multi-di-grafos planares*; es decir, con el de aquellos que admiten *representaciones limpias* en el plano (o equivalentemente en la esfera).

Algunas afirmaciones equivalentes a la conjetura de los cuatro colores se incluyen en [Har69c] y otra lo es en [Whit31].

Por otro lado, la noción "*polinomio cromático*" permite dar de ella la siguiente formulación : Si G es multigrafo planar, $P(G,k) > 0$ si y sólo si $k \geq 4$.

La resolución afirmativa de la conjetura de los cuatro colores permite deducir que el siguiente problema, aparentemente propuesto por Möbius, carece de solución positiva

Dividir el plano en cinco (o más) regiones tales que cada dos tengan frontera común,

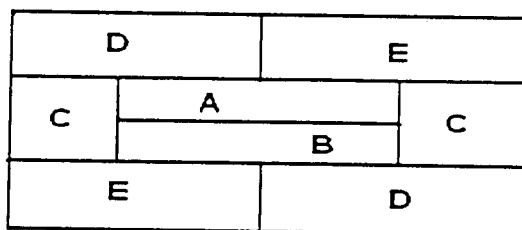
En relación con la problemática que nos ocupa destaquemos que :

A) paradójicamente, el problema en cuestión fue resuelto antes que en el plano y en la esfera, en "otras superficies más complicadas".

En efecto, y aún cuando sobre esto volveremos en 10.7 creemos oportuno destacar que en 1968 Ringel y Youngs completaron detalles de la demostración de cierto resultado de Heawood de 1890, que resolvía – en lo esencial – la determinación del número cromático de las *superficies orientables de género $g \geq 1$* . Sólo desde 1976, después de Appel-Haken, se conoce el número cromático de las *superficies orientables de género cero* (plano y esfera).

B) los países a considerar deben ser conexos en sentido topológico.

Caso contrario podría darse el siguiente esquema, donde cada uno de los cinco países A, B, C, D, E , es fronterizo de los restantes, y para colorearlos con las restricciones del caso no alcanzarían cuatro colores.



C) no se consideran países fronterizos aquellos cuyas fronteras se reducen a puntos aislados.

D) la admisión de "países no conexos" llevaría a a una extensión del problema que no será considerado.

E) reconocer la planaridad de cierta configuración puede tener interés no sólo teórico. Por caso, en ocasión de tener que diseñar "circuitos impresos". //

El problema que nos ocupa parece haber sido planteado, a mediados del siglo XIX, por F. Guthrie a su profesor A. De Morgan, del Univ. College (Londres), pero considerado de interés recién a partir de 1852 cuando De Morgan le escribió a W. Hamilton, profesor del Trinity College (Dublin), indicándole que no había podido resolverlo.

Luego, en 1878, Cayley volvió sobre el problema en una reunión de la London Mathematical Society.

Entre los primeros trabajos dedicados a esta problemática merecen citarse el de Cayley [Cay79] y los del abogado y eclesiástico Kempe [Kempe79/80] cuya respuesta afirmativa a la conjetura se dió por válida durante once años, hasta que en 1890, al estudiar una generalización del problema en cuestión, Heawood [Hea90] mostró que el razonamiento de Kempe era válido para cinco colores, pero no para cuatro. Ver [TutW72], [WhitT75].

Representaciones del grafo de Heawood que permitió rechazar los argumentos de Kempe pueden verse en [CapM78]-pág.7, y en [Saa72].

Tentativas más recientes, para resolver sobre la conjetura en cuestión, fueron las de [OreS69/70] y [Stro75], donde se la verificó para mapas con a lo sumo cuarenta, y con a lo sumo cincuenta y dos países, respectivamente.

También puede verse las aproximaciones algebraicas de [Bern75] y [Rost76].

Además pueden citarse [BigLW76], [Cox57/59], [Gard59/60], [Mars71], [May65], [RouB92] y [Saa72] donde se enumeran una veintena de trabajos en los que se abordó esta cuestión.

Finalmente, recién en 1976, la *Conjetura de los Cuatro Colores* fue resuelta por la afirmativa, por Appel y Haken tras un uso intensivo de equipos de computación. ([App76], [AppH76/77a/77b/77c/78/89]),

Para lograr su objetivo siguieron ideas de Kempe y redujeron, tras miles de horas de computación, la infinidad de mapas posibles a una cantidad finita que permitió una verificación satisfactoria, y así afirmar la validez de la conjetura.

En [Johs84]-Cap.4 se proponen ejercicios que permiten inferir la metodología seguida por Appel-Haken, y en [Ger82]-pág.94 comentarios al respecto.

Otra demostración, de dicha conjetura, que también recurre al uso de computadoras, y que en [Die96]-pág.121 se indica como más breve y manejable que la de Appel-Haken, fue dada en [RobST96/97].

Para mayor información al respecto : [Bern77], [Big83], [Die96], [Dir60c/63b], [Fran39], [Hak77], [KaiS77], [Ore67], [Rin74], [SaaK77], [Tut48b/78], [WooW78].

Además del problema de los cuatro colores, otro cuyo estudio lleva al concepto *planaridad* es el que plantea el siguiente y conocido entretenimiento.

Supongamos tener tres casas C_1, C_2, C_3 , y tres fuentes de aprovisionamiento F_1, F_2, F_3 . Se pregunta ¿será posible conectar directamente, y en un mismo plano, cada casa con las tres fuentes, y esto de forma tal que dichas conexiones no se interfieran ?

Es fácil ver que la respuesta sería afirmativa si y sólo si fuera posible construir un grafo bipartido completo $K_{3,3}$ de vértices $C_i, F_i, i \in \{1,2,3\}$, cuyas aristas estén representadas en el plano, por curvas continuas que no se intersecten.

De resultados a citar en pág.182, y de los esquemas de pág.160 se puede deducir que en el plano podrían concretarse hasta ocho conexiones sin interferencias, pero que sí serían factibles las nueve en un Toro (Anillo Circular).

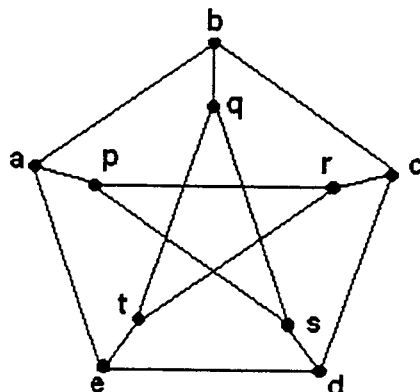
10.3. CONFIGURACIONES PLANARES

Sabemos que los multigrafos planares fueron caracterizados por el matemático polaco Kuratowski [Kur30] en términos de subgrafos no permitidos.

De ella cabe la siguiente formulación.

*Un multigrafo G es planar
si y sólo si ni K_5 , ni $K_{3,3}$, están inmersos en G ,
o equivalentemente,
si y sólo si G no contiene subgrafos homeomorfos con K_5 ó con $K_{3,3}$.*

Para visualizar la situación reiteremos seguidamente lo dicho en 1 pág.48 en relación con ella y el Grafo de Petersen



El subgrafo obtenido por eliminación de las aristas $[p, r]$, $[d, e]$ es homeomorfo del $K_{3,3}$ con vértices en las clases $\{a, q, c\}$, $\{b, s, t\}$. Así entonces $K_{3,3}$ está inmerso (o sumergido) en el grafo en consideración

La idea de Kuratowski de caracterizar a las configuraciones planares en términos de “subgrafos no permitidos” se mostró útil y se extendió a numerosos casos, en particular al de los grafos adjuntos (*line-graphs*). Además, en [CharGH71] fue utilizada para unificar el estudio de diversas clases de grafos, y ello les permitió relacionar resultados sin aparente conexión entre sí.

Para demostraciones de la caracterización de Kuratowski consultar [BusS65] o [Mars71] en donde se sigue la dada en [Ber58]; o bien, [BonM76] o [CharL79] o [Har69b] en las cuales se sigue la de [DirS54]. También en [Chen81], [Dick84], [Die96], [Rost76], [Tho80/81], [Tve89] se trata esta cuestión.

Según [Gob88]-pág 141 la caracterización asignada a Kuratowski había sido enunciada, pero no publicada, tres años antes por Pontriaguin. Ver además [Bur78]

En [Tho84] se dió un refinamiento del criterio de caracterización de Kuratowski.

La operación de “arista contracción” (pág.141) llevó a [Wag37], y a [HarT65], (ver [CharL79], [Die96], [Har69b]) a dar la siguiente reformulación de la caracterización de Kuratowski.

G es planar si y sólo si no contiene subgrafos contraíbles a K_5 o $K_{3,3}$.

Por otro lado, y según se puntualiza en [Har69b] y [SwaT81], el algoritmo propuesto en [Tut63a] para dibujar grafos provee una demostración alternativa de la caracterización que nos ocupa.

Otra debida a Whitney [Whit32b/33b/33c/33d] se dará en pág.176.

También cabe mencionar la siguiente caracterización algebraica propuesta por Mac-Lane [MacL37a/37b]. Ver [BerGH62], [Deo74], [Die96], [Ghe61], [Har69b].

Una condición necesaria y suficiente para la planaridad de G es que contenga una base de ciclos tal que cada arista aparezca en a lo sumo dos de los ciclos que la componen.

Las caracterizaciones precitadas son elegantes pero difíciles de manejar, y no llevaron a enunciar algoritmos útiles al efecto.

En cambio, la dada en [DemMP64], en términos de cotas del número cromático de ciertos subgrafos auxiliares, les permitió proponer un buen algoritmo para decidir sobre la planaridad de un dado G

Este algoritmo es analizado en [BonM76], [ChaL79], y [Walt84].

Otros fueron propuestos en [HopT71/73/74], [LemEC67] y [Tut63a]. Comentarios sobre ellos en [Deo76], [Read79] ó [Walt84]-Cap.10.

En [Nis90] y [NisCh88] se incluyen datos sobre otros algoritmos propuestos para tratar distintos problemas referidos a grafos planares.

Para el estudio de las configuraciones planares se recurre a resultados propios de la *Topología*, rama esta que según hemos indicado en 1 Cap.2 incluye el estudio de "*propiedades invariantes bajo transformaciones continuas*"; es decir, de "*propiedades asociadas a deformaciones que respetan la vecindad*".

En cuanto a bibliografía donde se trata esta noción, y volviendo sobre la dada en 1 pág.19 citemos a [BusS65], [CouR41], [FréKF46], [Gard60], [Har64/67b], [RouB92], [TucB50], [Tut63a].

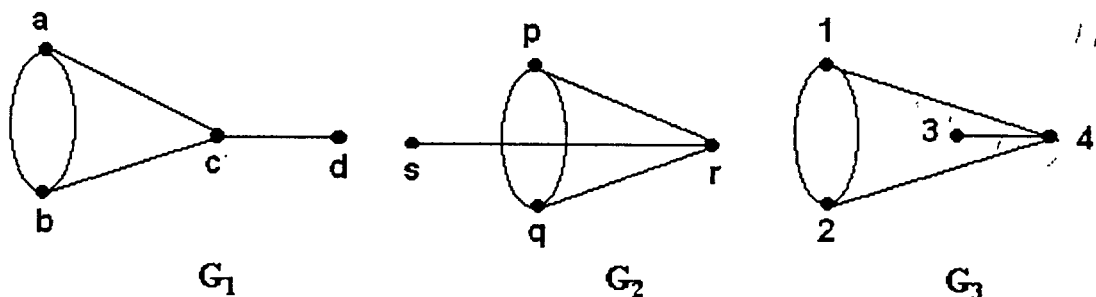
Para un análisis más profundo de ella, como así también de la relación existente entre la Teoría de Grafos y la Topología Combinatoria podemos citar a [Ger83], [Gib177], [GroT87], [HilCV32], [Kai73], [MohT97], [Ore67], [Pat56], [Rin74], [Sco51/61], [Stal83], [Veb22], [Whi73], [WhiB78], [Zyk49].

Creemos útil efectuar el siguiente par de observaciones :

1) Distintas representaciones geométricas de un dado G pueden no ser equivalentes desde un punto de vista topológico.

Pues puede suceder que no sea factible definir una transformación continua de una en otra.

Tal el caso de los siguientes pares $G_1 - G_2 \not\equiv G_2 - G_3$.



Así entonces, dos representaciones de un mismo grafo planar pueden ser equivalentes para la teoría de grafos, pero no para la topología.

2) Según veremos en pág.176, al considerar "dualidad planar", también es posible que dos representaciones planas de un mismo grafo puedan no ser equivalentes frente a cuestiones propias de la Teoría de Grafos.

Si bien esta "geometría de la lámina de goma, sin roturas ni pegamentos" escapa a nuestros alcances algunas de sus propiedades son "ingenuamente evidentes" y serán admitidas como "afirmaciones intuitivas".

En particular, admitiremos

- que las superficies pueden ser *orientables* ; o bien, *no orientables*,
- que todo multi-di-grafo admite *representaciones limpias en superficies S_h cerradas orientables de género h suficientemente elevado*,
- que las superficies S_h se pueden ver como "deformaciones elásticas" (topológicamente equivalentes) de las esferas con " h asas".
(S_0 = esfera , S_1 = toro , S_2 = doble toro).

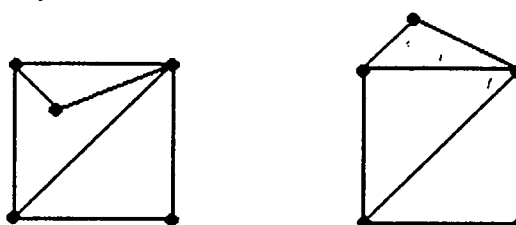
Una conocida superficie no orientable, que goza de sorprendentes propiedades es la denominada Cinta de Möbius.

Información sobre ella puede obtenerse en [BusS65]-Cap.4, [CouR41]-CapV-4, [Gard93]-Cap.II, [Kra30]-VIII-4. Para un análisis más profundo remitirse a la indicada poco más arriba..

Con refeencia a las representaciones limpias de los multi-di-grafos, cabe decir que todos pueden serlo en $\mathcal{R}^3$. (ver 1 pág.21) y también en superficies orientables de género suficientemente alto, pero que para toda superficie existen configuraciones que no son inmersibles en ella. [BonM76 - pág.137]

Se dice (ver [Deo74]-pág.98) que *la inmersión de un planar no separable está unívocamente determinada* cuando todas sus representaciones limpias pueden hacerse coincidentes mediante rotaciones y deformaciones continuas.

Así por caso dados los esquemas



y visto que sólo uno de ellos tiene una región delimitada por cinco aristas la inmersión del grafo que definen no está unívocamente determinada.

Entre los grafos con inmersión única se incluyen las cadenas y los ciclos.

Cabe además citar el siguiente e interesante resultado de Whitney [Whit32b] cuya demostración puede reencontrarse en [Tut63a], o en [Fle90]-Cap.III.

La inmersión en el plano de todo planar 3-conexo está unívocamente determinada.

En cuanto a las representaciones topológicas de los multigrafos notemos que :
 | si G es planar, y $\mathcal{G}$ es una de sus representaciones limpias, las aristas
 | de G se identifican con *arcos de curvas continuas que no se intersectan*.

Esto lleva a $:: G$ es grafo conexo si y sólo si $\mathcal{G}$ lo es en sentido topológico.

Los arcos de curva en cuestión fueron estudiados por C.Jordan [Jor69].

Ellos satisfacen numerosos resultados *intuitivamente claros*, pero difíciles de demostrar. Algunos serán enumerados a continuación.

Más precisamente :

– se dice *Curva de Jordan abierta (cerrada)* a todo conjunto de puntos en correspondencia biunívoca y continua con un segmento de recta (con una circunferencia).

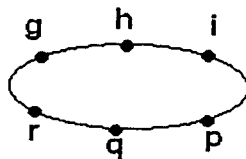
Así, “ingenuamente” las Curvas de Jordan abiertas (cerradas) son deformaciones elásticas de segmentos (de ovalos).

En lo que sigue supondremos que dichas curvas son "planas" ; es decir, que están contenidas en un plano, y admitiremos :

- 1) Si J es una Curva de Jordan plana y cerrada, ella particiona al plano que la contiene en tres regiones, a saber: $J \setminus J^o$ (el interior de J) $\setminus J^e$ (el exterior de J).
- 2) Con el concepto usual de distancia, los puntos de la región J^o están a distancia finita, pero no cabe igual afirmación respecto de los de la región J^e .
- 3) Cualquier otra curva continua del mismo plano y con extremos en puntos de J^o y de J^e intersecta J .
- 4) Cualesquiera dos puntos p, q , de J pueden conectarse por una curva plana que a excepción de p, q , está contenida totalmente en J^o , o bien en J^e .
- 5) Si J es una curva de Jordan plana cerrada, y p, q , dos puntos coplanares con J pero no pertenecientes a J , ambos están en J^o , o bien ambos en J^e , si y solo si el segmento de extremos p, q , intersecta a J un número par de veces.
- 6) Si sobre cierta curva de Jordan plana cerrada J hay cuatro puntos g, h, p, q , dispuestos en ella según el orden lexicográfico, será factible conectar g con p , y h con q , mediante curvas planas que no se intersecten, sólo si excluidos sus extremos una de ellas esta en J^o y la restante en J^e .

Nótese que aún cuando estas afirmaciones no son demostrables dentro de la teoría de grafos, sí son aplicables en ésta teoría, pues las representaciones geométricas de los grafos permiten interpretarlos como conjuntos de curvas.

De 6) se tiene que si sobre una curva de Jordan plana cerrada J se tienen seis puntos g, h, i, p, q, r , dispuestos en orden lexicográfico (ver esquema siguiente)



sería imposible conectar los pares $g,p \setminus h,q \setminus i,r$ mediante curvas planas que no se intersecten, pues al menos dos de las curvas involucradas estarían en una misma de las regiones del plano que determina J .

De esto resulta que el problema de "las tres casas y las tres fuentes" planteado en pág.154 no admite solución afirmativa.

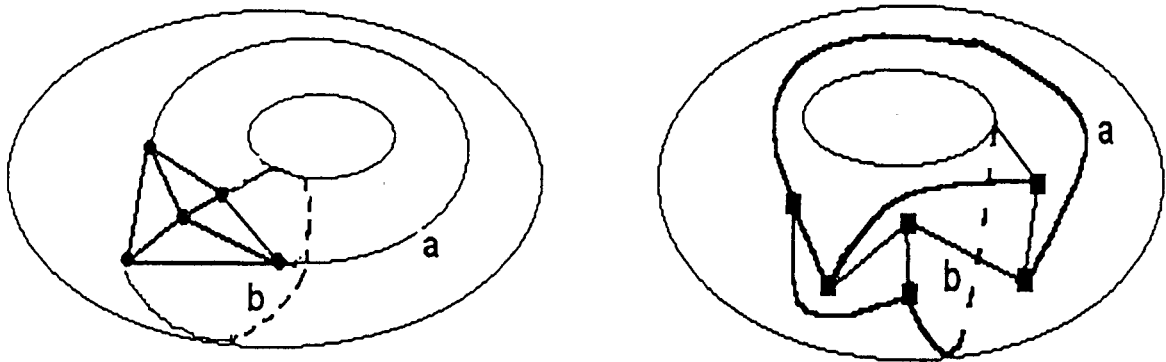
Caso contrario las curvas planas $C_1 - F_1 \setminus F_1 - C_2 \setminus C_2 - F_2 \setminus F_2 - C_3 \setminus C_3 - F_3 \setminus F_3 - C_1$ determinarían una curva plana cerrada que contiene a la secuencia $C_1, F_1, C_2, F_2, C_3, F_3$, y en ella, por las razones anteriores, podrían trazarse sin intersectarse a lo sumo dos de las tres $C_1 - F_2 \setminus F_1 - C_3 \setminus C_2 - F_3$.

Hemos visto así, que $K_{3,3}$ no es planar.

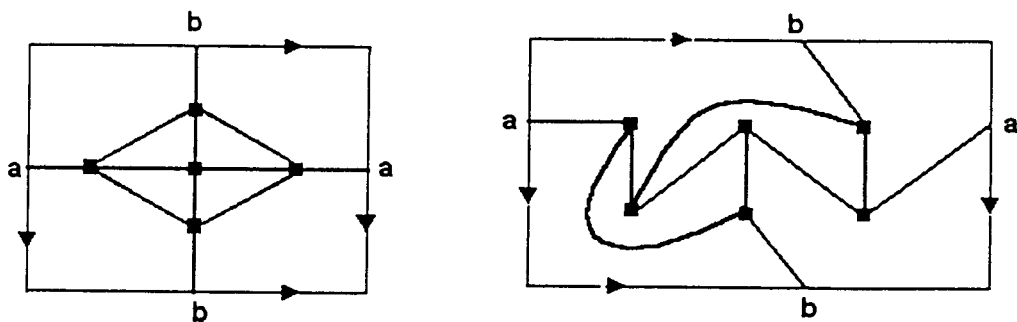
Procediendo en forma similar podría deducirse que tampoco lo es K_5 .

La "Fórmula de Euler" (pág.168) nos permitirá demostrar de otra forma que ni K_5 , ni $K_{3,3}$, son planares.

En cambio, de los esquemas que siguen puede inferirse que ambos K_5 , $K_{3,3}$ son representables limpiamente en un Toro (Anillo Circular).



Recurriendo a la conocida representación del Toro como "rectángulo con lados opuestos debidamente identificados" podríamos poner



Volviendo sobre afirmaciones anteriores y supuesto que $\mathcal{G}$ es un multigrafo plano representativo del planar G diremos :

aristas de $\mathcal{G}$ a los arcos de curva de Jordan que en $\mathcal{G}$ corresponden a las aristas de G .

caras de $\mathcal{G}$ a toda región del plano limitada por aristas y tal que sea conexa en sentido topológico ; es decir, a toda región Z tal que dos cualesquiera de sus puntos puedan conectarse mediante curvas continuas contenidas totalmente en Z .

Si todos los puntos de cierta cara Z_i están (en la métrica usual de $\mathbb{E}_2$) a distancia finita de un punto prefijado arbitrariamente la cara Z_i se dice **cara finita (de $\mathcal{G}$)**. Caso contrario se dirá **cara infinita**.

Nótese que :

Si G es conexo, $\mathcal{G}$ tiene una única cara infinita.

Es habitual convenir que existen tantas caras infinitas como componentes conexas tiene G .

Admitida tal convención resulta que el grafo discreto de orden n tiene n caras infinitas, y 0 caras finitas.

Ella permite expresar ciertos resultados con mayor regularidad, y puede reinterpretarse como sobreentendiendo que las distintas componentes conexas son representadas en planos (en esferas) diferentes.

Nótese que dicha convención **no es** la adoptada en [Wils72]-Cap.5-13

Dada una representación plana se dice :

a) **frontera de la cara Z** al conjunto de aristas cuyos puntos pertenecen, "en la topología usual", a la clausura de la región Z pero no a su interior.

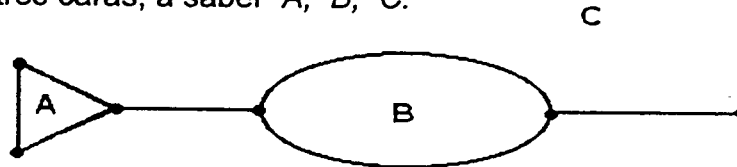
b) **contorno de la cara Z** al subconjunto de aristas de la frontera que constituyen el ciclo que contiene en su interior a la cara Z .

Así, toda arista pendiente pertenece a fronteras pero no a contornos, y las caras infinitas tienen fronteras pero no contornos.

Las caras cuyas fronteras tienen aristas comunes se dicen **caras adyacentes**

Para el caso dirigido, es decir para el caso de multigráficos cuyo sostén es un multigráfico planar, valen afirmaciones similares.

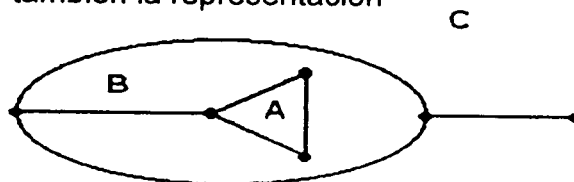
El siguiente esquema representa un multigráfico planar conexo de orden seis, con siete aristas y tres caras, a saber A , B , C .



Sus dos caras finitas son A , B , y ambas son adyacentes de la cara infinita C , pero no entre sí.

La frontera de C , que es su cara infinita, incluye las siete aristas.

El mismo multigráfico, admite también la representación



Ahora :

- la frontera de su cara infinita está formada por un par de aristas paralelas y una arista pendiente.
- la frontera de B incluye seis aristas
- las dos caras finitas son adyacentes entre sí, pero sólo una de éstas lo es de la infinita.

Nótese que si G es conexo, G_1 es una de sus representaciones limpias, y Z_1 es una cualesquiera de sus caras finitas, de G puede obtenerse otra representación limpia G_2 , para la cual dicha cara Z_1 deviene infinita, mientras que la cara infinita de G_1 resulta cara finita en G_2 .

Para ello bastaría aplicar una doble proyección estereográfica.

A tal efecto bastaría elegir una esfera S cuyo *polo sur* fuera un punto interior de la cara Z_1 , proyectar desde el *polo norte* de S al multigráfico G_1 sobre la esfera S y proyectar luego al "esqueleto" así obtenido desde el *polo sur* de S sobre un plano que contenga al *polo norte* de la esfera y sea paralelo al plano inicial.

En consecuencia, si bien las caras infinitas tienen fronteras, pero no contornos, esta característica depende de la representación limpia elegida.

Esto nos lleva a volver sobre lo observado en pág.157 respecto de posibles eventuales diferencias entre distintas representaciones topológicas de un mismo planar.

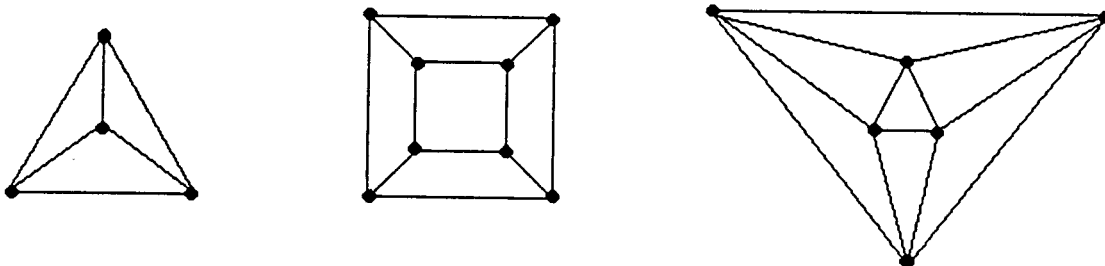
La doble proyección estereográfica permite reencontrar las conocidas representaciones planas de los cinco poliedros platónicos (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro)

A tal efecto bastaría

- 1) suponer una esfera S en el interior del poliedro a representar.
- 2) proyectar desde el centro de S , y sobre su superficie, el poliedro en cuestión, obteniéndose así un "esqueleto" representativo del mismo.
- 3) elegir como Polo Norte un punto interior de alguna de las caras de éste "esqueleto" y proyectarlo desde dicho Polo Norte sobre el plano tangente a la esfera en su Polo Sud.

De tal forma, a las caras del poliedro inicial corresponderían "caras del poliedro esférico"; y a éstas, "caras del grafo plano" final.

En particular para los tetraedros, hexaedros, y octaedros, obtendríamos grafos 3-regulares isomorfos a los siguientes :



10.4. ALGUNOS RESULTADOS SOBRE PLANARIDAD

Antes de enunciar algunos resultados referidos a multigrafos planares notemos que, según se infiere del par de observaciones siguientes, para estudiar el concepto *planaridad* podríamos, sin pérdida de generalidad, limitarnos a considerar grafos sin bucles, no separables.

En efecto, dado cierto multigrafo G es fácil ver que :

- la incorporación a G (o la eliminación de G) de vértices aislados, o de bucles, o de aristas pendientes, o de paralelas de alguna otra que se conserva, no modifica su planaridad.
- G es planar si y sólo si lo son todas sus componentes conexas y éstas lo son si y sólo si también lo son sus respectivos bloques (conexos, no separables, maximales).

Algunos de los resultados que siguen fueron citados en 1 pág.201.

- la validez de la Conjetura de Tait [Tait80/84] según la cual “*todo grafo planar 3-conexo y 3-regular admite ciclos hamiltonianos*” hubiera permitido resolver por la afirmativa la Conjetura de los Cuatro Colores, pero ella fue refutada por Tutte [Tut46] al dar un grafo débilmente hamiltoniano de orden 46 que la invalidaba. Luego se hallaron otros grafos de órdenes menores.
- todo grafo planar 4-conexo es hamiltoniano. [Tut56/77], [Berm78].
- todo grafo plano, sin bucles, con todas sus caras triangulares y sin ciclos de longitud tres distintos de los que son contornos de sus caras es hamiltoniano. [Whit31]
- un grafo sin bucles G tiene adjunto planar si y sólo se satisfacen las tres condiciones que siguen : G es planar, sus vértices son de grado a lo sumo cuatro y los de grado cuatro son vértices de corte. [Sed64] (ver [CharL79])
- todo grafo plano con menos de cuatro “triángulos” es 3-cara coloreable. [Grü63], [Har69b].
- el estudio de los 3-regulares hamiltonianos llevó a Bosak [Bos67] a enunciar cuatro condiciones, tales que la imposibilidad de construir un grafo en el que ellas se satisfagan implicaría la validez de la conjetura de los cuatro colores.
- en [Grin68] ([Berm78], [BonM76], [ChaL76], [NashW75]) se dió la siguiente condición necesaria para ser grafo planar hamiltoniano.
Si G es grafo plano sin bucles con ciclo hamiltoniano H y c_i , (d_i) es el número de caras con fronteras de exactamente i aristas contenidas en el interior (en el exterior) de H entonces $\sum_i (i-2).(c_i - d_i) = 0$.

El interés en los grafos planares hamiltonianos se remonta a Whitney [Whit31] (ver [Har69b]-Cap.12, [Tut72/77]) donde se demostró que

Para comprobar la Conjetura de los Cuatro Colores basta limitarse a comprobarlo en los planares hamiltonianos.

Obviamente, de este último resultado se infiere una "simplificación" del problema que planteaba la conjetura de los cuatro colores.

Otra "simplificación" es la que resulta de la siguiente afirmación.

Si la Conjetura de los Cuatro Colores es válida para los multigrafos planos regulares de grado tres, también lo es para el caso general.

Para justificar esta afirmación, cuya recíproca también es válida, bastará asociar a cada grafo plano G un "grafo cúbico" G_{3r} cuya k -cara-colorabilidad implique una k -cara-colorabilidad de G .

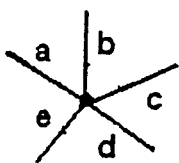
Para ello :

- 1) Eliminaremos de G sus eventuales vértices aislados, o pendientes.
- 2) Si en el vértice x de G inciden sólo las aristas $[a, x]$, $[x, b]$, $a \neq x \neq b$, substituiremos dicho par de aristas por la $[a, b]$ (eventualmente $a = b$) y eliminaremos x .

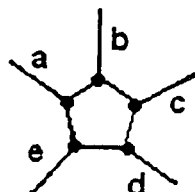
La aplicación reiterada de 1) y 2) nos llevará a un multigrafo G' (eventualmente $G' = G$) con todos sus vértices de grado mayor o igual que tres.

- 3) "Substituyendo" cada vértice de G' con grado h , $h > 3$, por un h -gono, y modificando incidencias según se esboza a continuación se construye finalmente un G_{3r} que satisfará nuestro propósito.

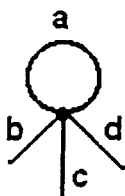
Substituir



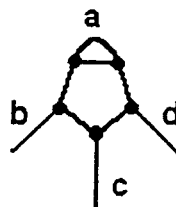
por



Substituir



por



En general, la "substitución" indicada lleva a "reemplazar" cada vértice de grado $h > 3$ por h vértices de grado 3.

Visto que "países opuestos por el vértice" no se consideran fronterizos se tiene que la "contracción de cada h -gono a un punto" hace que cada k -coloración admisible de las caras de G_{3r} de lugar a una k -cara coloración admisible en G .

Resumiendo $\left\{ \begin{array}{l} \text{Las configuraciones planas son 4-cara-colorables, si y sólo si} \\ \text{también lo son las configuraciones planas 3-regulares.} \end{array} \right.$

Para más detalles, o por modificaciones no esenciales del procedimiento indicado ver [BusS65]-pág.87/88, [Brya 93]-pág.169, [Har69b]-pág.133, [Mars71]-pág.135, [Ore63a]-Cap.9.

10.5 PLANARIDAD Y CROMATICIDAD

Algunos otros resultados sobre cuyas deducciones pueden consultarse [Ber58], [Brya93], [BusS65], [Fle90], [GolY76], [Har69b], [Stein63d] o [Wils72] son :

A)

(*Teorema de los dos colores*) Para colorear, con las restricciones del caso, los países de un mapa, bastan dos colores si y sólo si su "multigrafo de fronteras" tiene todos sus vértices de grado par (o sea, si y sólo si es euleriano)

B)

(*Teorema de los tres colores*) Las regiones de un mapa cúbico; (es decir, tal que su multigrafo asociado carece de bucles y es 3-regular) pueden colorearse con tres colores si y sólo si cada una de las caras es adyacente de un número par (o sea, si y sólo si su grafo asociado es bipartido).

C) (Heawood)

Si G es un grafo planar regular de grado tres sin aristas puente y $\mathcal{G}$ una de sus representaciones topológicas las tres siguientes afirmaciones son equivalentes.

- : — las caras de $\mathcal{G}$ son cuatro colorables.
- su número arista cromático es tres. (admite coloración de Tait)
- es posible asignar a cada vértice v un valor $p(v) \in \{+1, -1\}$ de forma tal que supuesto la suma se extiende a todos los vértices del contorno de cada cara se cumpla $\sum p(v) = 0 \pmod{3}$.

Así entonces :

- i) Si la frontera de cada una de las caras de G está constituida por un número de aristas que es múltiplo de tres, ellas pueden colorearse con cuatro colores.
- ii) Idem i) substituyendo múltiplo de tres por múltiplo de dos

Otro resultado a destacar es

Todo grafo planar sin bucles puede representarse utilizando sólo líneas rectas. [Wag36]

En [BusS65]-pág.75/77 y en [Mars71]-pág.81/83 se reproduce la demostración que de este resultado se dió en [Fáry48]. Ver también [Brya93], [Tho88a].

Proposición 10.5.1

Sea $G = (V, U)$ un multigrafo planar y $\mathcal{G}$ una de sus representaciones limpias. Los contornos de sus caras finitas constituyen un conjunto maximal de ciclos elementales linealmente independientes en Z_2 .
o equivalentemente
Un multigrafo plano contiene tantas caras finitas como indica su número ciclomático $\mu(G) = n - m + p$ (donde n, m, p , son, respectivamente, su número de vértices, de aristas, y de componentes conexas).

Su demostración por inducción sobre el número de caras resulta de reiterar en cada una de sus componentes conexas el argumento que sigue.

Lo afirmado vale si $\mathcal{G}$ (conexo) contiene una única cara finita.

Si el conexo $\mathcal{G}$ tiene $k \geq 2$ caras finitas, existe una arista u perteneciente al contorno de dos de ellas, a las que notaremos Z_1, Z_2 .

$\mathcal{G}' = \mathcal{G} - \{u\}$ tiene $(k - 1)$ caras finitas, y sus contornos, por hipótesis inductiva, constituyen una base del espacio de ciclos de $\mathcal{G}'$.

Substituyendo en este conjunto el que corresponde a la cara $Z_1 \cup Z_2$ por los de las caras Z_1, Z_2 , y puesto que los dos ciclos agregados son diferentes entre sí, e independientes de los restantes, (ninguno contiene la arista u), puede afirmarse que en $\mathcal{G}$ habrá k contornos cuyos ciclos asociados son independientes, y esto termina la demostración,

Corolarios

- 1) Para todo multigrafo planar conexo de orden $n \geq 1$, con $m \geq 0$ aristas se tiene $f = m - n + 2$.

Pues f supera en uno al número de caras finitas, y éste coincide con el número ciclomático $\mu(G) = m - n + 1$

- 2) El número de caras de cada multigrafo planar es independiente de la representación topológica adoptada.
- 3) Si el planar G tiene n vértices, m aristas, y p componentes conexas, G tiene $f = m - n + 2.p$ caras,

En efecto, y por la convención según la cual el número de componentes conexas coincide con el de caras infinitas, si su i -ésima componente G_i tiene n_i vértices y m_i aristas su número de caras es $f_i = m_i - n_i + 2$

Luego, G tiene $\sum_i f_i = m - n + 2.p$ caras.

Si no se adoptara la convención en cuestión la correspondiente fórmula sería $f = m - n + 1 + p$. (ver [Wils72]-Cap.5-13)

La expresión $f - m + n = 2$ es conocida como Fórmula de Euler, aún cuando hay referencias que indican fue enunciada previamente por Descartes, en 1640, con motivo de sus estudios en poliedros convexos en $\mathbb{E}^3$.

En este contexto se la suele expresar : $E_2 - E_1 + E_0 = 2$, donde E_i indica el número de caras de dimensión i en el poliedro en cuestión.

De la Fórmula de Euler se conocen también demostraciones por inducción sobre el número de aristas [GolY76], y constructivas ([HilCV32]). Ver [Ore67].

Por otro lado, y como todo árbol es un grafo conexo planar cuya única cara es la infinita, la conocida relación $m = n - 1$ entre sus números de vértices y de aristas, puede verse como caso particular de la Fórmula de Euler.

La Fórmula de Euler permite deducir :

- a) que $K_{3,3}$ no es planar.

Caso contrario aplicándola tendríamos $f = m - n + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$ caras. Además, la frontera de cada cara contendría al menos cuatro aristas, y cada una de éstas se contaría en dos caras, de donde $4.f \leq 2.m$.

Se tendría así, $20 \leq 18$. Absurdo.

b) K_5 no es planar

Si fuera planar tendría $f = 10 - 5 + 2 = 7$ caras, y la frontera de cada una de ellas con al menos tres aristas.

Razonando en forma similar al caso anterior llegaríamos al absurdo $21 \leq 20$.

Puesto que la inserción (remoción) de vértices de grado dos, en las aristas de G no afecta el valor de $f - m + n$ se tiene que en a) y b) se reencuentra, parcialmente, la conocida caracterización de Kuratowski.

Una conocida aplicación de la Fórmula de Euler es aquella que la relaciona con los "poliedros platónicos".

Nos permitimos observar que ellos eran conocidos ya en épocas anteriores a Platon (428-348 AC), que entonces se les atribulan propiedades místicas, y que durante la Edad Media fueron tomados como símbolos de la "Armonía del Universo".

Los poliedros platónicos son *completamente regulares*, pues tienen todas sus caras limitadas por igual cantidad de aristas, y en todos sus vértices inciden un mismo número de aristas.

Que sólo hay cinco poliedros completamente regulares no triviales (tres de ellos fueron representados en pág.163) se puede deducir tanto con argumentos propios de la topología [HilCV32], [Sco51/61], como con razonamientos geométricos [Dör58], o aplicando la Fórmula de Euler a los grafos planos que representan a sus respectivos "esqueletos" [CharL79]. Ver [RouB92]-pág.130/135.

Para justificar lo recién afirmado consideraremos grafos planos conexos, presupondremos que todas sus caras están limitadas por $h > 2$ aristas, y que en todos sus vértices inciden $k > 2$ aristas.

De las hipótesis se tiene que $2.m = h.f = k.n$. De ello, y de la fórmula de Euler,

$$\text{resulta que } \frac{2.m}{h} - m + \frac{2.m}{k} = m \cdot \left(\frac{2.k - h.k + 2.h}{h.k} \right) = 2 > 0$$

Como h, k, m , son positivos, $2.k - h.k + 2.h > 0$

De donde, $h.k - 2.h - 2.k + 4 < 4$, y entonces $(h - 2). (k - 2) < 4$.

Como además $h \geq 3$, $k \geq 3$, y $(h - 2).(k - 2) < 4$ sólo hay cinco pares de enteros positivos a considerar

A saber :

- | | | | | |
|---|-------------------------|----------|----------------|--------------|
| - | $(h-2) = (k-2) = 1$ | de donde | $h = k = 3$ | (tetraedro) |
| - | $(h-2) = 2 ; (k-2) = 1$ | " | $h = 4, k = 3$ | (hexaedro) |
| - | $(h-2) = 1 ; (k-2) = 2$ | " | $h = 3, k = 4$ | (octaedro) |
| - | $(h-2) = 3 ; (k-2) = 1$ | " | $h = 5, k = 3$ | (dodecaedro) |
| - | $(h-2) = 1 ; (k-2) = 3$ | " | $h = 3, k = 5$ | (icosaedro) |

Omitiendo las restricciones $h > 2, k > 2$, caben también las siguientes soluciones

- | | | | |
|------|---------------------------|----------|---|
| para | $k = 2$ y h arbitrario, | de donde | los ciclos elementales C_n . |
| " | $k = 1$ y $h = 2$, | " | el grafo K_2 . |
| " | $k > 1$ y $h = 2$, | " | los multigrafos de orden dos con un número arbitrario de aristas. |

10.6 ALGO MAS SOBRE PLANARES

Veamos algunas otras propiedades de los grafos planares.

Proposición 10.6.1

Si G es un grafo planar conexo sin bucles, de orden $n > 2$, con m aristas, y con f caras, entonces :

- $f \leq 2.m / 3$.
- su grado promedio $2.m / n$ es menor que seis.
- en G existe al menos un vértice cuyo grado es a lo sumo cinco.
- $m \leq 3.(n - 2)$.

En efecto, por hipótesis la frontera de su cara infinita tienen al menos tres aristas, y lo mismo puede afirmarse respecto del contorno de cada una de sus caras finitas. Por lo tanto $3.f \leq 2.m$, de donde $f \leq 2.m / 3$, y esto demuestra a).

Si en contradicción con lo supuesto en b) se tuviera $(2.m / n) \geq 6$, y por lo tanto $n \leq m / 3$, por lo visto en a) llegaríamos al siguiente absurdo $2 = f - m + n \leq (2.m / 3) - m + (m / 3) = 0$.

Así entonces, $2.m < 6.n$ y de esto se infiere la existencia de al menos un vértice con grado menor o igual que cinco.

Para justificar d) basta notar que $m \leq 3.n - 6$ es consecuencia directa de $3.f \leq 2.m$ y de la Fórmula de Euler.

Corolario :

Un grafo conexo sin bucles de orden $n > 2$ con m aristas es planar sólo si :

- 1) tiene al menos un vértice con grado a lo sumo cinco.
o sólo si
- 2) $m \leq 3.(n - 2)$.

Se tienen así un par de condiciones necesarias para la planaridad.
Ellas son fáciles de verificar.

Un razonamiento similar al llevado a cabo para demostrar a) de la Prop.10.6.1 permite deducir que

Si G es un grafo planar bipartido con $n \geq 3$ vértices y m aristas, entonces $m \leq 2.n - 4$.

Obviamente, lo afirmado en Prop.10.6.1 c) puede reformularse diciendo :

Todo grafo planar sin bucles tiene al menos un vértice de grado menor que seis,

De ello y recurriendo a la noción "dualidad geométrica" (ver pág.173) puede inferirse que :

Todo grafo plano tiene al menos una cara cuya frontera tiene a lo sumo cinco aristas.

Proposición 10.6.2

Todo grafo planar sin bucles tiene número cromático a lo sumo cinco.

La demostraremos por inducción.

Obviamente, la proposición es válida para todos aquellos grafos con a lo sumo cinco vértices.

Para el caso general podemos, sin pérdida de generalidad, suponer que G no es grafo discreto (pues entonces lo afirmado es inmediato) y que es conexo (caso contrario bastaría reiterar el razonamiento para cada componente).

Con tales hipótesis y supuesto que $\underline{x}$ es uno de los vértices de G con grado a lo sumo cinco (existe por Prop.10.6.1) veamos que si los vértices de las componentes conexas de $G - \{ \underline{x} \}$ son cinco coloreables también lo es G

A tal efecto supondremos que para colorear $G - \{ \underline{x} \}$ son necesarios, a lo sumo, los colores $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$.

Si en el coloreado de $G - \{x\}$ para los vértices adyacentes de x se emplean a lo sumo cuatro colores, G podrá colorearse sin requerir más de cinco.

Caso contrario, supuesto que en G los adyacentes de x son, ordenados en sentido horario a, b, c, d, e , y que a ellos corresponden, respectivamente, los colores $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ veamos que es posible, procediendo de acuerdo con lo siguiente, definir una recoloración adecuada.

Convengamos en notar $G_{\alpha\beta}$ al subgrafo engendrado por los vértices de colores α, β , y en forma similar para con los inducidos por otros pares de colores.

Si a, c , pertenecen a distintas componentes conexas de $G_{\alpha\gamma}$ en una de ellas se intercambian α, γ . La nueva coloración es compatible con las restricciones y ahora x puede colorearse bien α , o bien γ .

Si en cambio a, c , pertenecen a una misma componente conexa de $G_{\alpha\gamma}$ los vértices b, d , no pueden estar conectados en $G_{\beta\delta}$, pues por el ordenamiento elegido las cadenas que los conectan debieran tener, en tal caso, al menos un vértice de $G_{\alpha\gamma}$ y por lo tanto con dos colores distintos.

Luego, en tal situación cabe para b, d , un razonamiento similar al del caso en que a, c , pertenecían a distintas componentes conexas de $G_{\alpha\gamma}$, y previa permutación de los colores β, δ en una de las componentes conexas de $G_{\beta\delta}$ el vértice x podrá colorearse bien β , o bien δ .

La Prop.10.6.2 y la noción de "multigrafo dual geométrico" (ver pág.173) permiten deducir el siguiente

Teorema de los cinco colores.

| Toda carta geográfica puede colorearse, asignando colores diferentes a países fronterizos, con a lo sumo cinco colores.

Esta afirmación, conocida a partir de los trabajos de Headwood en 1890 puede también ser obtenida sin recurrir al concepto "dualidad".

Veamos ahora que :

Si G y $\overline{G}$ son grafos complementarios sin bucles de orden $n > 10$ al menos uno de ellos es no planar.

En efecto, podrían ser planares ambos grafos sólo si $m + \overline{m} = \frac{n(n-1)}{2}$ y

además ambos $m, \overline{m}$, fueran menores o iguales que $3n - 6$.

Es decir, sólo si $n^2 - 13n + 24 \leq 0$, y esto implica $n \leq 10$.

Un resultado que lo mejora es el siguiente, debido a [Pic64].

Ver [BusS65]-pág79, [ChaGM79]-Cap.9.

Sean G y $\overline{G}$ grafos complementarios sin bucles de orden n .

si $n \leq 4$ ambos son planares.

si $n \in \{5, 6, 7\}$ al menos uno de ellos es planar.

si $n = 8$ tanto si G es planar como si no lo es, $\overline{G}$ puede o no ser planar.

si $n > 8$ al menos uno de ellos es no planar.

Así entonces :

- Los grafos complementarios sin bucles G y $\overline{G}$ pueden ser ambos planares sólo si son de orden a lo sumo ocho.
- Todo planar de orden $n \geq 9$ tiene complementario no planar.

Así, no serían posibles concretar "circuitos impresos a dos caras" de grafos que contengan K_9 .

10.7. PLANARES DUALES

La utilidad del uso de pares de "propiedades duales" es conocida.

En capítulos anteriores hemos considerado algunas vinculadas con las nociones *ciclos* \ \ *cociclos*, y otras con las de *árbol* \ \ *coárbol*.

Veamos seguidamente otra, definida entre configuraciones planares, y estudiada también para el caso de los grafos infinitos [Tho80].

Dado un multigrafo planar G , sea $\mathcal{G}$ uno de los multigrafos planos que lo representa limpiamente.

A dicho $\mathcal{G}$ se le pueden asociar otros $\mathcal{G}_i^*$, todos isomorfos entre sí, que definen al **multigrafo dual (geométrico) de $\mathcal{G}$** , que notaremos $\mathcal{G}^*$.

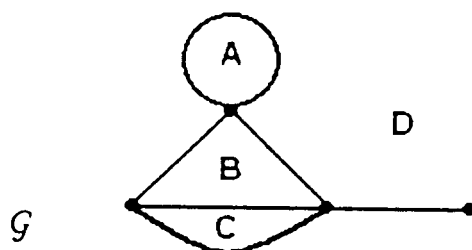
Para obtener tales G_i^* operaremos según se indica a continuación :

- En cada cara Z de G se elige un punto interior Z^* que será uno de los vértices de G_i^* .
- A cada arista u de G perteneciente a la frontera de las caras Z_i, Z_j (eventualmente $Z_i = Z_j$) se le asocia una arista u^* con extremos en los vértices Z_i^*, Z_j^* y tal que intersecte u una única vez, y a ninguna otra arista de G .
- Los eventuales vértices aislados de G se reencuentran como vértices aislados en G_i^* .

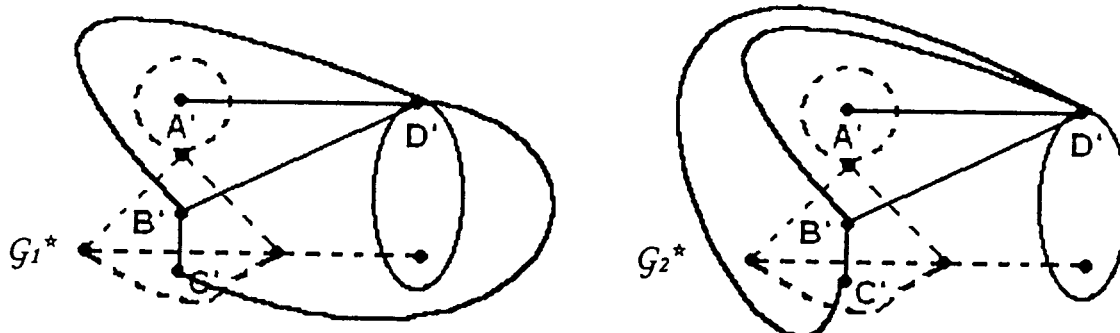
Así por ejemplo :

I) el dual del ciclo elemental C_h es el multigrafo de orden dos con h aristas.

II) a partir de



podríamos tener los siguientes duales (geométricos)



Véase que :

- 1 – Si G es un multigrafo propiamente dicho, cada G_i^* tiene al menos un vértice de grado dos.
- 2 – Si dos caras de G tienen más de una arista en común, cada G_i^* es multigrafo propiamente dicho.

- 3 – Si G es el grafo discreto de orden n , también lo es G^* .
- 4 – G y G^* tienen un mismo número de componentes conexas.
- 5 – A cada bucle (arista pendiente) de G corresponde una arista pendiente (bucle) en cada G_i^* .
Así entonces, G tiene aristas pendientes (bucles) si y sólo si G^* tiene bucles (aristas pendientes)
- 6 – Si G carece de aristas pendientes, G es h -cara-coloreable si y sólo si su dual geométrico es h -vértice coloreable.

Haciendo uso explícito de la convención por la cual G tiene tantas caras infinitas como componentes conexas, se tiene que

Los números f, m, n, p , de caras, aristas, vértices y componentes de G coinciden, respectivamente, con los n^*, m^*, f^*, p^* de vértices, aristas, caras y componentes de G^*

Así entonces

| El número ciclomático $\mu(G) = m - n + p$ (cociclomático $\nu(G) = n - p$) de G coincide con el número cociclomático (ciclomático) de su dual G^* .

En efecto, sabemos que $f = n^* ; m = m^* ; n = f^* , p = p^*$ y que tanto para G como para G^* se satisface la fórmula de Euler , $f = m - n + 2.p$.

Por lo tanto $\mu(G) = m - n + p = f - p = n^* - p^* = \nu(G^*)$

$$\nu(G) = n - p = f^* - p^* = m^* - n^* + p^* = \mu(G^*)$$

En Ejerc.10 - 40) se propone constatar que los duales de los poliedros platónicos también son poliedros platónicos..

La convención por la cual hay tantas caras infinitas como componentes conexas permite decir que G y G^{**} son isomorfos. ([Die96], [Ore67], [Tor76], [Wils72])

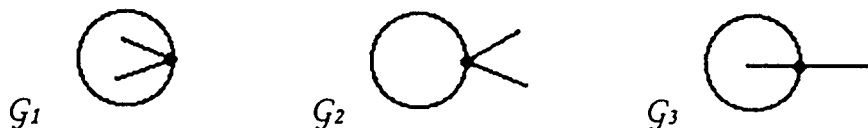
Si en cambio se conviniera que siempre hay una única cara infinita no podríamos afirmar $p = p^$, ni G y G^{**} son isomorfos.*

En particular, si se adoptase esta última convención tendríamos :



De los ejemplos que siguen resulta que los duales geométricos de distintas representaciones planas de un mismo multigrafo pueden, o no, ser isomorfas.

En efecto, aún cuando los siguientes grafos planos de orden tres, G_1 , G_2 , G_3 son isomorfos, G_1^* es isomorfo con G_2^* , pero éstos no lo son con G_3^* .



Otro ejemplo, pero con grafos *carentes de bucles* podría obtenerse substituyendo en los dados G_1 , G_2 , G_3 , sus respectivos bucles por ciclos elementales de longitud h .

Resumiendo :

Grafos planos isomorfos pueden tener duales (geométricos) no isomorfos.

Puede afirmarse (ver Corol 3 de la siguiente Prop.10.7.1) que son 2- isomorfos.

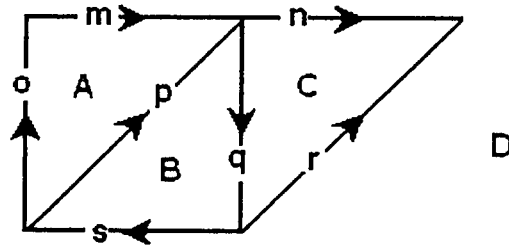
Esto confirma la observación hecha en pág.157 según la cual diferentes representaciones planas de un mismo G *no siempre pueden ser intercambiables* frente a cuestiones topológicas, o propias de la teoría de grafos.

En el caso dirigido, si G es un multidigrafo planar, y $\mathcal{G}$ es una de sus representaciones limpias, para determinar su **multidigrafo dual** (geométrico) $\mathcal{G}^*$ procederemos según se indica seguidamente.

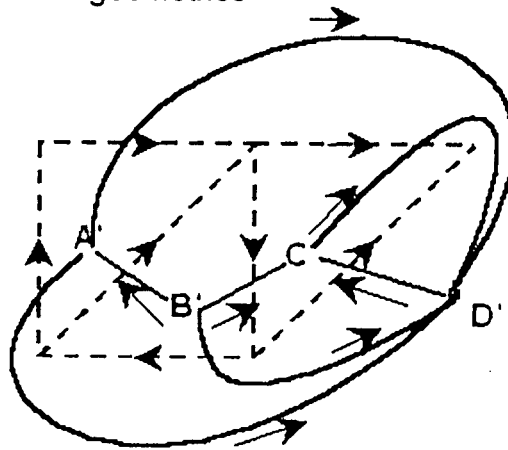
- 1) A partir del multigrafo $\mathcal{G}$, sostén de $\mathcal{G}$, y operando como para el caso no dirigido. se construye uno de sus duales geométricos $\mathcal{G}_\pi^*$
- 2) Las aristas de $\mathcal{G}_\pi^*$ se orientan de forma tal que cada arco u^* forme con el arco $u \in \mathcal{G}$, y midiéndolo en sentido antihorario, un ángulo φ , ($0 < \varphi < \pi$).

Los multidigrafos así hallados son isomorfos y dan lugar al buscado **dual** (geométrico) de $\mathcal{G}$.

Así por ejemplo, a partir del siguiente multidigrafo de arcos m, n, o, p, q, r , y de caras A, B, C, D



podríamos obtener como dual geométrico



Véase que :

- Si en $\mathcal{G}$ el contorno de la cara Z es un circuito, el vértice Z^* de $\mathcal{G}^*$ es de entrada; o bien, de salida.
En particular, si G tiene bucles suponer en ellos “distinto sentido de recorrido” conlleva intercambiar entradas por salidad.
- Si G es multidigrafo propiamente dicho, $\mathcal{G}^*$ contiene al menos un vértice con grado positivo y con grado negativo, ambos iguales a la unidad.

Si $\mathcal{G}$ es un multidigrafo y $\mathcal{G}_s$ es su sostén, de $\mathcal{G}_s^{**} = \mathcal{G}_s$ y de la forma de orientar sus arcos resulta que $\mathcal{G}^{**} = \mathcal{G}^{op}$.

Así entonces, la operación “pasar al dual” es *involutiva* en el caso no orientado, pero *anti-involutiva* en el caso orientado.

Proposición 10.7.1

Si $\mathcal{G}$ es un multi-di-grafo plano conexo y $\mathcal{G}^*$ su dual (geométrico) entonces :

a) Un conjunto de aristas (arcos) determina un ciclo elemental de $\mathcal{G}$ si y sólo si sus correspondientes aristas (arcos) determina un cociclo elemental de $\mathcal{G}^*$. Además, a ciclos independientes se asocian cociclos independientes.

b) Idem a) substituyendo ciclos por circuitos y cociclos por cocircuitos.

Para demostrar a) notemos que :

Todo ciclo elemental $u_1, \dots, u_h$ determina en $\mathcal{G}$ una curva de Jordan plana y cerrada cuyo interior contiene un cierto conjunto M de caras.

Si M^* es el conjunto de vértices correspondientes en $\mathcal{G}^*$ a las caras de M , resulta que el multigrafo inducido por los vértices de M^* , y también el inducido por los de su complemento son conexos, pues en $\mathcal{G}$ siempre se puede (recurriendo eventualmente a la cara infinita) "ir desde una cara, a otra".

Por lo tanto, el conjunto de aristas de $\mathcal{G}^*$ con un único extremo en M^* define un cociclo elemental de $\mathcal{G}^*$ y sólo resta constatar que dicho cociclo elemental está dado por el conjunto $u_1^*, \dots, u_h^*$.

El carácter involutivo de la operación dualidad —caso no dirigido— permite justificar la afirmación que resulta de intercambiar los vocablos ciclo, cociclo.

Además, ciclos independientes se corresponden con cociclos independientes.

De a) y en mérito a la forma de orientar los arcos de $\mathcal{G}^*$ resulta la validez de b).

Corolarios

1) A cada base de ciclos (cociclos) de $\mathcal{G}$ se asocia una base de cociclos (ciclos) de $\mathcal{G}^*$.

2) Si $\mathcal{G}$ es un multi-di-grafo conexo, los contornos de sus caras finitas determinan un conjunto maximal de vectores ciclos independientes.

En efecto, los vectores ciclo de sus $f_f = f - 1$ caras finitas son linealmente independientes, y por la fórmula de Euler $f_f = m - n + 1 = \mu(G)$.

3) Los duales geométricos de G son 2-isomorfos entre sí.

En efecto, si G_1 y G_2 son duales geométricos de G , cada ciclo elemental de G_1 determina unívocamente un cociclo elemental de G , y éste a su vez un único ciclo elemental de G_2 .

Luego los G_1 y G_2 son ciclo correspondientes y por lo tanto 2-isomorfos.

4) Las aristas asociadas a las que determinan un árbol cubriente de G determinan en su dual G^* un coárbol cubriente, y recíprocamente.

En efecto, si T es árbol cubriente, T carece de ciclos de G y el correspondiente T^* carece de cociclos. Por lo tanto T^* no desconecta G^* .

Como además T^* es maximal con esta propiedad, pues la incorporación de alguna arista u^* correspondería a la creación de un ciclo en G y por lo tanto a la de un cociclo en G^* , resulta que T^* es coárbol de G^* .

En particular, si G es el multidigrafo de pág.177:

- al ciclo elemental $m, n, \tilde{r}, s, o.$, en cuyo interior están las caras A, B, C , corresponde en G^* el cociclo de soporte $\{A^*, B^*, C^*\}$ con arcos adelante m^*, n^*, o^*, s^* , y arco atrás r^* .
 - al circuito p, q, s de G (contorno de su cara B), corresponde, en G^* el cocircuito de arcos p^*, q^*, s^* todos ellos con vértice inicial en B^* .
 - el árbol cubriente o, p, q, n se corresponde con el coárbol o^*, p^*, q^*, n^* .
- Las restantes aristas de G^* determinan uno de sus árboles cubrientes.

La precedente noción de *dualidad geométrica* fue introducida a partir de representaciones limpias, y por ello sólo es aplicable a los multigrafos planares; o sea a los representales limpiamente en "superficies orientables de género cero".

Para cuando se traten configuraciones no planares podría razonarse en forma similar tomando en cuenta superficies orientables de género adecuado.

También es posible, para el caso de multigrafos no necesariamente planares, introducir un concepto de "*dual*" independiente de las representaciones topológicas adoptadas.

Esta noción, que fue ideada por Whitney [Whit32b/33d] responde a la siguiente definición

G_2 es **dual (combinatorio)** de G_1 , si y sólo si entre las aristas de ambos existe una biyección tal que si H_1 es subgrafo cubriente de G_1 , y H_2 es su correspondiente en G_2 entonces $\mu(H_1) + \nu(\overline{H}_2) = \nu(G_2)$,
(μ, ν números ciclomático y cociclomático)

En particular, volviendo al ejemplo de página 177 tendríamos :

- Si H_1 es, en G , el subgrafo cubriente de aristas m, n, o, p, q ; $\overline{H}_2$ es, en G^* , el subgrafo r^*, s^* . En tal caso $\mu(H_1) = 1$; $\nu(\overline{H}_2) = 2$; $1 + 2 = 3 = \nu(G^*)$.

La prueba de que las nociones "dual geomátrico" y "dual combinatorio" son equivalentes es, según se puntualiza en [Deo74]-pág.107, complicada. Al respecto consultar [Whit33b/33d], [SesR61].

Admitiendo tal equivalencia serán designadas, simplemente, **dual**.

En [Whit32b]-Th.29 se demostró que

Un multigrafo es planar si y sólo si tiene dual,

y a partir de dicho resultado se reencontró la caracterización de Kuratowski.

La deducción de este importante resultado puede ser consultada en [SesR61]-Cap.3, donde se siguen las ideas de Whitney, o en [Deo74]-Cap.5, y [SwaT81]-Cap.7, donde se siguen las de Parsons [Par71], que conlleva admitir la caracterización de Kuratowski.

También se prueba (ver [Deo74]-Cap.5) que :

- Los grafos G y H son, uno dual del otro, si y sólo si entre sus aristas hay una correspondencia biyectiva tal que a ciclos de H asocia cociclos de G , y recíprocamente.
- Los duales de un planar G son 2-isomorfos entre sí, y todo 2-isomorfo de un dual de G también es dual de G .

En particular, y como la inmersión de los planares 3-conexos está unívocamente determinada (pág.158) resulta que :

Los duales de los planares 3-conexos son isomorfos.

10.7. TRES "ESTIMADORES DE NO PLANARIDAD"

Seguidamente nos referiremos, muy brevemente, a tres conceptos que podrían tomarse como estimadores de "no planaridad".

Ellos son : *menor número de cruzamientos* \ \ *espesor* \ \ *género*.

Se dice **número de cruzamientos de G** (*crossing number*) al menor número de cruzamientos que, tomando en cuenta todas las posibles representaciones topológicas de G , pudieran tener sus aristas. Lo notaremos $cr(G)$.

Su conocimiento lleva a la búsqueda de "representaciones óptimas"; es decir, con el menor número posible de tales cruzamientos. En [Guy72] se observa que no siempre restricciones de tales representaciones son también óptimas.

En [Guy67/69] y [HarHi63], entre otros, se dedujo que

$$cr(K_n) \leq \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor \quad ([x] \text{ significa parte entera de } x).$$

Luego en [Guy72] y [Saa70] se mostró que para los $n \leq 10$ tal cota es exacta.

Por otro lado, de lo visto en [Zar54], y cierta corrección efectuada a su razona-

miento ([Guy69]) se tiene $cr(K_{p,q}) \leq \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{q-1}{2} \right\rfloor$ ($[x]$ parte entera de x).

Posteriormente, en [Kle70], se vió que si $\min.\{p,q\} \leq 6$ dicha cota es exacta.

Obviamente : G es planar si y sólo si $cr(G) = 0$
de $cr(K_{3,3}) = cr(K_5) = 1$ resulta, nuevamente, que ni $K_{3,3}$,
ni K_5 son planares.

En Ejer.10 - 47) se reformulan las cotas $cr(K_n)$; $cr(K_{p,q})$ sin recurrir a la función parte entera.

Se dice **espesor (*thickness*) de un multigrafo G** al menor número de subgrafos planares, arista disjuntos, cuya unión da G . Lo notaremos $th(G)$.

Es claro que los multigrafos planares coinciden con los de espesor uno.

La determinación del “espesor de G ” sólo fue resuelto para algunas pocas clases de multigrafos.

Obviamente, el problema de “determinar el espesor de cierto multigrafo” está ligado con el de su “descomposición en subgrafos arista disjuntos” al cual nos hemos referido en 1 pág.57/58, y en 8.6, al considerar la arboricidad de los multigrafos.

Naturalmente, los multigrafos G tales que $th(G) = 2$ se dicen *biplanares*, y tanto ellos como los planares son de interés al diseñar “circuitos impresos”.

En [BatHK62] y [Tut63b], entre otros, se mostró que K_9 es el grafo de menor orden que no es planar, ni bipanar.

En [Bei67a], donde se reiteran resultados de [BeiHM64], se muestra que

- cualquier grafo no planar es homeomorfo a un bipanar.
 - el espesor de los grafos sin bucles de orden $n \geq 3$, con m aristas está acotado inferiormente por $\left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil$ y por $\left\lceil \frac{m}{2n-4} \right\rceil$ si es bipartido.
- En ocasiones ellas son estrictas. ($\lceil x \rceil$ denota al menor entero no menor que x)

A su vez, de resultados obtenidos en [AleG76], [BatHK62] y [Vas76], donde además se completaron algunos otros dados en [Bei67b] y [BeiH64/65a] resulta que

$$th(K_n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n \in \{9, 10\} \\ \left\lceil \frac{n+7}{6} \right\rceil & \text{caso contrario, excepto posiblemente para ciertos} \\ & \text{valores } n \equiv 4 \pmod{6}. \quad (\lceil x \rceil \text{ significa parte entera de } x) \end{cases}$$

Así entonces, y para los “no plares esenciales” $th(K_5) = 2$; $th(K_{3,3}) = 2$.

En [Bei69] se recopilan resultados que mejoran algunos de los recién citados, y se consideran otros que involucran superficies distintas del plano.

Para más información sobre el precedente par de parámetros o sobre extensiones de ellos se pueden consultar además [BeiH65b], [CharL79], [Har64/69b], [ErdG73], [Guy70], [Tut63d/70], [WhiB78].

Visto que todo multigrafo admite representaciones limpias en alguna superficie cerrada orientable S_h , con h suficientemente elevado, es natural decir **multigrafo de género** (genus) h a los que pueden ser inmersos en una S_h pero no en las $S_{h'}$, con $h' < h$.

El "género" de G es menor o igual que su número de cruzamientos y puede verse como el "menor número de asas" que debe tener una superficie orientable para poder representarlo limpiamente en ella.

El género de G está bien definido. Los "planares" son de género cero, mientras que los "toroidales" (como el K_5 y el $K_{3,3}$) son de género uno.

Determinar el género de los grafos es, en general, un problema difícil.

Se sabe ([WhiB78]-Th 5.3, [Wils72]-pág.71) que si G es un grafo conexo sin bucles, de orden $n \geq 3$ con m aristas, su género está acotado inferiormente por $\left\lceil \frac{1}{6}(m - 3n + 6) \right\rceil$, y por $\left\lceil \frac{1}{4}(m - 2n + 4) \right\rceil$ si además carece de "triángulos",
(significa $\lceil x \rceil$ igual al menor entero no menor que x).

Heawood supuso que las cotas anteriores no eran mejorables, y esto fue confirmado parcialmente en 1965 por Ringel [Rin65] al demostrar que el género del bipartido $K_{p,q}$ es $\left\lceil \frac{1}{4}(p-2).(q-2) \right\rceil$ ($\lceil x \rceil$ igual al menor entero no menor que x).

El problema análogo para el caso de los grafos completos mostró ser más difícil de resolver. Sólo en 1968, Ringel y Youngs pudieron llegar a una confirmación similar al mostrar que el género de K_n es $\left\lceil \frac{1}{12}(n-3).(n-4) \right\rceil$.

En realidad, los estudios que en ocasión de analizar el trabajo de Kempe permitieron a Heawood constatar la validez de una supuesta "conjetura de cinco colores", lo llevaron a mostrar que el número cromático de las superficies de género $h \geq 1$ está acotado superiormente por $\left\lceil \frac{1}{2}(7 + \sqrt{1 + 48h}) \right\rceil$ si la superficie es orientable, y por $\left\lceil \frac{1}{2}(7 + \sqrt{1 + 24h}) \right\rceil$ si no lo es. ($\lceil x \rceil$ denota parte entera de x).

Heawood conjeturó que dichas cotas del número cromático podían alcanzarse, y constatarlo requirió de un largo y arduo esfuerzo.

La solución por la afirmativa de este "Problema de Headwood" sólo fue resuelto en 1968, por Ringel y Youngs. [RinY68a/69a/69b].

Para información sobre esta temática ver [Whi73/78] y [You67/70], como así también [BusS65], [CharL79], [Dir56], [GroT87], [Har69b], [MohT97], [Rin59/74].

Remarquemos que aún cuando el resultado de Appel y Haken :
El número cromático del plano (y de la esfera) es cuatro,

podría parecer caso particular, para $h = 0$, del de Ringel y Youngs que acabamos de citar, debe destacarse que esto no es correcto, pues el proceso deductivo que llevó a este último presupone $h \geq 1$.

Así, el caso de los grafos planares ($h = 0$) fue resuelto en 1976, mientras que el de aquellos grafos de género $h \geq 1$ lo había sido en 1968, y en gran medida en 1890.

Resumiendo, y volviendo sobre lo afirmado en pág.152, resulta que la determinación del número cromático del plano y de la esfera exigió mayores esfuerzos que la evaluación de dicho parámetro para las otras superficies orientables.

Si G es de género h , las representaciones limpias de G en S_n también permiten construir *duals geométricos* G^* , y pueden demostrarse afirmaciones parcialmente similares a las deducibles para el caso en que G es planar.

Así por ejemplo, si el conexo G es de género h los cociclos de G se corresponden con los ciclos de G^* , pero hay $r(G)$, ($0 \leq r(G) \leq 2.h$) ciclos independientes en G que no corresponden a cociclos de G^* . (ver [BerGH62]-pág.140 ; [Ghe61]-pág.114).

En estas circunstancias cabe la siguiente generalización de la Fórmula de Euler

Si el multigrafo G es conexo de orden n , con m aristas, f caras y está inmerso en una superficie de género h , entonces :

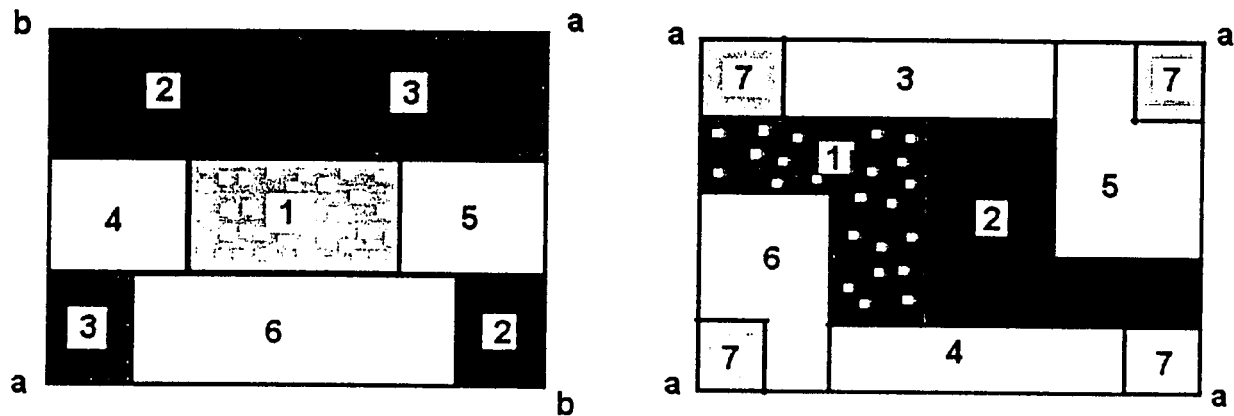
$f - m + n = 2 - 2.h$	si se está en una superficie orientable
$f - m + n = 2 - h$	en caso contrario.

Al valor $f - m + n$ se le dice *característica de la superficie*.

Ella es dos para el caso del plano y la esfera, uno para la cinta de Möbius y cero para el toro

De las cotas deducidas por Heawood, para cuando $h=1$, resulta que seis (siete) colores alcanzan para colorear, con las restricciones del caso, cualquier mapa dibujado sobre una Cinta de Möbius (un Toro).

Para constatar que estas cotas no son mejorables volveremos a recurrir a la representación habitual de la Cinta de Möbius, y del Toro, como "rectángulo con lados opuestos adecuadamente identificados" y a los siguientes mapas dibujados en ellos.



Así entonces, el número cromático del Toro es siete, y el de la Cinta de Möbius es seis.

EJERCICIOS

10 - 1)

Determine el número cromático y el número arista cromático del Grafo de Petersen, dado en pág.155.

10 - 2)

Muestre que :

- todo *natural* es número cromático (número arista cromático) de algún grafo.
- pueden darse los tres casos : $\psi(G) < \psi'(G)$, $\psi(G) = \psi'(G)$, $\psi(G) > \psi'(G)$.

10 - 3)

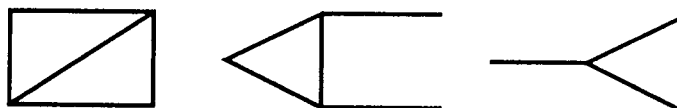
Vea que :

- $\psi(G) = 2$ si y sólo si G es bipartido (carece de ciclos de longitud impar).
- $\psi(G)$ coincide con el orden de G si y sólo si $G = K_n$.
- excepto G sea el grafo discreto, su número cromático coincide con el de los obtenidos a partir de G incorporándole aristas pendientes.

10 - 4)

Determine el polinomio cromático de los grafos $C_4 = K_{2,2}$; C_5 ; $K_{2,3}$.

Idem de los siguientes



10 - 5)

Vea que si G tiene p componentes conexas G_i ; $P(G, k) = \prod_{i=1}^p P(G_i, k)$.

10 - 6)

¿ Cómo puede determinarse el número cromático de un dado G a partir de su polinomio cromático ?

10 - 7)

Muestre, aplicando el Teorema de Brooks, que si G es un grafo regular tal que $\psi(G) + \psi(\bar{G}) = n + 1$ entonces : G es el discreto de orden n ; o el completo K_n ; o un ciclo elemental de longitud impar.

10 - 8)

Un grafo se dice *k-cromático crítico* si tiene número cromático k y quitándole un vértice arbitrario se obtiene un grafo cuyo número cromático es $(k - 1)$.

Vea que si G es *k-cromático crítico* entonces :

- G es conexo y carece de vértices de corte.
- todos sus vértices tienen grado mayor que $(k - 2)$.

10 - 9)

Vea que todo grafo *k-cromático* contiene un subgrafo *k-cromático crítico*.

10 -10)

¿ Puede dar un grafo 4-cromático crítico distinto de K_4 ?

10 -11)

Vea que todo multigrafo sin bucles 3-regular hamiltoniano, es tres arista colorable (es decir, admite una "coloración de Tait");

10 -12)

Vea que si G es multigrafo planar 3-cara colorable también lo es el que se obtiene a partir de G substituyendo sus aristas por pares de aristas paralelas con los mismos vértices extremos.

¿ Puede afirmarse lo mismo si G es 2-cara colorable ?

10 -13)

Muestre que si G es un grafo sin bucles k -regular de orden impar, su número arista cromático es $k+1$. Así, si n es impar $\psi'(K_n)=n$.

10 -14)

Demuestre que si G es un grafo sin bucles, su número arista cromático coincide con el número cromático de su adjunto.

10 -15)

Sea G de orden n con m aristas. Vea que $\psi'(G) \geq \frac{m}{\lfloor n/2 \rfloor}$, $\lfloor x \rfloor$ parte entera de x .

10 -16)

Sea G un grafo sin bucles en el cual todo vértice, excepto uno, tiene grado d . Muestre que si G puede ser arista coloreado con d colores, entonces G es de orden impar y tiene un vértice de grado nulo.

10 -17)

Se debe organizar un congreso al que asistirán los científicos A, B, C, D, E, F, G , y se sabe que entre ellos no están en buenas relaciones los pares $A, B \parallel A, D \parallel A, E \parallel B, C \parallel B, D \parallel B, E \parallel B, F \parallel C, D \parallel C, F \parallel C, G \parallel D, E \parallel D, G \parallel F, G$

¿ Serán suficientes cuatro hoteles para alojarlos de forma que no haya en un mismo hotel dos que tengan conflictos entre sí ?

10 -18)

Suponga que en la tabla se indican cuales de los elementos $A, B, C, D, E, F, G, H, I$, se deben ensamblar para obtener los productos P_i ($1 \leq i \leq 7$), y que se quiere organizar una muestra de todos los productos que es posible construir.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
P1	*	*	*	*		*		*	
P2	*		*		*		*		
P3		*						*	*
P4	*			*	*		*		
P5				*					*
P6	*	*	*					*	
P7							*		*

¿ Cuántos días debe durar la exposición, como mínimo, si sólo se dispone de una unidad de cada uno de los elementos a utilizar, y cada armado-desarmado de los productos requiere de un día ?.

¿ Hay una única forma de organizar exposiciones de menor duración ?

10 - 19)

Una Comisión Directiva tiene quince subcomisiones, y cada una de ellas debe reunirse una hora por semana. Se quiere establecer un horario de reuniones que minimice el número de horas semanales ocupadas respetando que nadie puede estar presente en dos reuniones realizadas al mismo tiempo.

¿ Podría plantear su resolución como problema de grafos vértice coloreados ?

10 - 20)

Un campo puede dividirse entre tres hermanos de forma que cada uno de ellos sea vecino de los otros dos

¿ Puede afirmar lo mismo si los hermanos son cuatro ? Idem cinco ?

10 - 21)

Sea T un árbol y $G = T^2$. Vea que G es planar si y sólo si ningún vértice de T tiene grado mayor que tres.

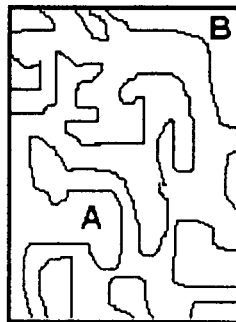
10 - 22)

Muestre que :

- son planares todos los grafos acíclicos, todos los multigrafos de orden $n \leq 4$, y todos los de orden cinco distintos de K_5 .
- $K_{p,q}$ es planar si y sólo si $\inf.(p,q) \in \{1,2\}$.
- G es planar si y sólo si lo son cada uno de sus bloques.
- un grafo planar tiene vértices de corte si y sólo si también los tiene su dual .

10 - 23)

Suponga que las siguientes líneas son parte de una misma Curva de Jordan Cerrada C , y que A está en el interior de dicha curva. ¿ En que región está B ? o equivalentemente ¿ Es posible ir desde A hasta B sin cruzar C ?



10 - 24)

Deduzca la Fórmula de Euler por inducción sobre el número de aristas.

10 - 25)

Demuestre que si G es grafo planar bipartido de orden $n \geq 3$ con m aristas entonces $m \leq 2.n - 4$.

10 - 26)

¿ Puede extenderse la Prop.10.6.2 al caso en que se admiten aristas paralelas ?

10 - 27)

Pruebe que todo grafo planar conexo sin bucles con menos de doce vértices tiene al menos un vértice de grado a lo sumo cuatro.

10.- 28)

Muestre que si G es grafo planar de orden n con m aristas que contiene ciclos, y éstos tienen al menos r aristas, entonces $(r - 2).m \leq r.(n - 2)$.

10 - 29)

Vea que el máximo número posible de regiones planas contiguas dos a dos es también el número máximo de puntos del plano tales que cada dos son extremos de curvas planas que no se intersectan entre sí.

10 - 30)

Sea G un grafo planar conexo cuyos vértices tienen grados $2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5$.
¿ Cuántos vértices, aristas y caras tiene G ?

10 - 31)

¿ Que puede decir del número de vértices de un mapa que contiene doscientos países tales que cada uno de ellos limita con cinco ?

10 - 32)

Suponga sobre una esfera un grafo h -regular sin bucles con m aristas, que contiene n vértices y f caras, cada una de ellas limitada por k aristas.

Vea que $h \cdot n = 2 \cdot m = k \cdot f$.

10 - 33)

Sea G un multigrafo plano conexo. Pruebe que sus caras pueden ser coloreadas, con las restricciones del caso, con dos colores si y sólo si G es euleriano.

10 - 34)

Si en una circunferencia se eligen $2 \cdot p$ puntos y con extremos en ellos se trazan p curvas que no se intersectan entre sí quedan determinadas $2 \cdot p + 1$ regiones interiores a la circunferencia. Muestre que para colorearlas dando colores diferentes a las adyacentes, bastan dos colores.

10 - 35)

¿ Puede darse un grafo sin bucles, planar regular de grado seis ?

¿ Vale la misma respuesta si se admiten bucles (aristas paralelas) ?

10 - 36)

Sea G un multigrafo planar de orden n , con m aristas y f caras. Vea que :

a) si en cada vértice inciden al menos $k \geq 3$ aristas , $m \leq \frac{k \cdot (f - 2)}{k - 2}$

b) si la frontera de cada una de sus caras tiene al menos $k \geq 3$ aristas,

entonces G es grafo sin bucles, y $m \leq \frac{k \cdot (n - 2)}{k - 2}$

f

10 - 37)

Vea que todo grafo planar cúbico tiene al menos una cara cuyo contorno tiene a lo sumo cinco aristas.

10 - 38)

Admitiendo la extensión de la Fórmula de Euler $f - m + n = 2 - 2g$ (g = género de la superficie) vea que el género de los grafos sin bucles de orden $n \geq 4$ con m aristas satisface $6 \leq g \leq m - 3n + 6$. (x [menor entero no menor que x])

10 - 39)

Vea que la operación de arista contracción (definida en pág.141) permite deducir que G es planar si y sólo si no contiene subgrafos contraíbles a K_5 ó $K_{3,3}$.

10 - 40)

Explicite los parámetros n, m, f, h, k de los poliedros platónicos, y determine para cada uno de ellos cual es el que corresponde al dual de su grafo poliedral. Vea que, en particular, el tetraedro es auto-dual.

10 - 41)

Si en un círculo se traza una cuerda el mismo queda dividido en dos regiones. Si se trazan dos cuerdas sin extremos comunes, el círculo queda dividido en cuatro, o bien en tres regiones, según que las cuerdas se intersecten, o no, en puntos interiores del círculo.

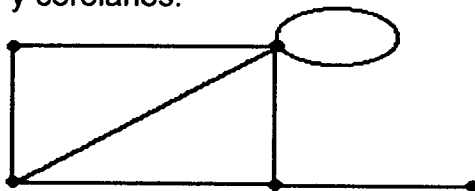
Generalizando, suponga que a un círculo se le trazan c cuerdas cuyos respectivos extremos son distintos dos a dos, que dichas cuerdas se intersectan en p puntos interiores del círculo, y que en cada uno de estos puntos sólo se cortan dos de las cuerdas.

¿ Puede decir en cuantas regiones ha quedado dividido el círculo ?

¿ Sería válido el resultado anterior si también se admitieran cuerdas con extremos coincidentes en un mismo punto de la circunferencia ?

10 - 42)

Represente al menos dos duales (geométricos) del siguiente grafo, y constate lo afirmado en Prop.10.7.1 y corolarios.



10 - 43)

Idem ejercicio anterior, respecto de algún digrafo obtenido a partir del mismo.

10 - 44)

Los siguientes grafos de orden cuatro son isomorfos. ¿ Puede afirmar lo mismo respecto de sus respectivos duales (geométricos) ?



10 - 45)

Constataste que K_4 es isomorfo a su dual (geométrico), y que los planares autoduales de orden n contienen $m = 2.(n - 1) = 2.(f - 1)$ aristas.

10 - 46)

Sea G el grafo constituido por un bucle y h vértices aislados. Halle su dual, y vea que en ambos se cumple la fórmula de Euler extendida $f = m - n + 2.p$.

10 - 47)

Sea G un multigrafo plano de orden n con m aristas, y G^* uno de sus duales (geométricos). Muestre que :

- G^* es multigrafo propiamente dicho si y sólo si existen al menos dos caras de G cuyas fronteras tienen más de una arista en común.
- cada cara finita de G^* "contiene" exactamente un vértice de G .
- si ambos G , G^* , son isomorfos $m = 2.n - 2 = 2.f - 2$.
- G contiene vértices de corte si y sólo si también los admite G^* .

10 - 48)

Vea que las cotas del número de cruzamientos de K_n ($K_{p,q}$) dadas en pág.181 pueden reformularse poniendo :

$$cr(K_n) \leq \begin{cases} (n.(n-2)^2.(n-4)) / 64 & n \text{ par} \\ ((n-1)^2.(n-3)^2) / 64 & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$cr(K_{m,n}) \leq (m.n.(n-2).(m-2)) / 16 \quad n, m, \text{ pares}$$

$$\begin{cases} cr(K_{2p, 2q}) \leq p.q(p-1).(q-1) & \vee \vee \vee \quad cr(K_{2p+1, 2q+1}) \leq p^2.q^2. \\ cr(K_{2p, 2q+1}) \leq p.(p-1).q^2. \end{cases}$$

CAPITULO 11

FLUJOS CANALIZADOS Y APLICACIONES

Este capítulo pretende ser de introducción a la teoría y al uso de conceptos que se muestran sumamente eficaces.

La noción “*flujo*” (más precisamente “*flujo canalizado*”) que utilizaremos será útil para abordar el estudio de problemas de optimización sujetos a restricciones lineales cuyo carácter particular permite resolverlos con métodos más simples y directos que los propios de la Programación Lineal.

Además, la “*dualidad*” (propia de la Programación Lineal) permitiría asociar problemas relativos a “*flujos*” con otros que pueden enunciarse en términos de “*tensiones*”. A éstos nos referiremos sólo muy ocasionalmente.

Demostraciones, e informaciones más precisa sobre los resultados a dar pueden hallarse en [Agui90], [AhuMO89/93], [BazJ77], [Bec64b], [Ber58/61/70], [BerGH62], [BonM76], [BusS65], [CharL79], [Chi93], [Deo74], [Die96], [Dig77], [Doñ82], [FauRT76], [FordF62], [Fra66], [FraF71], [Ful66], [Gass58], [GhoH64], [GonM79], [Had63], [Hu69], [Iri69], [JauMA71], [Law76], [Roc84], [Roy69a], [Ruhe91], [Sak84a/84b], [SesR61], [Sim62], [Tuc80], [Walt84] y en las publicaciones presentadas en el Congreso de Pisa [GallS86], entre las que destacamos [GloGK86] y [Tar86].

11.1. INTRODUCCION

En lo que sigue nos referiremos a problemas en los cuales
cabe imaginar cierto bien que circula en estado de régimen, sin variar su cantidad total, excepto quizás en algunos puntos prefijados.

Según veremos, los valores de un tal “flujo” podrán corresponder tanto a caudales de un fluido en circulación, como al número de vehículos que en cada instante transita por determinado tramo de la red, o a correspondencias biyectivas en problemas de índole combinatoria.

Entre estos últimos se incluirían también ciertos problemas de “*asignación*” (o “*distribución*”), y una generalización de ellos llevaría al “*problema del transporte*” del cual daremos un esbozo en 11.9.

Los tramos de las “redes” en las cuales el bien en cuestión se desplaza pueden, o no, tener sentido de circulación prefijado.

Los casos en los que el sentido de circulación no está predeterminados se podrían estudiar, en principio, en grafos.

De ellos nos ocuparemos, brevemente, en la Sección 11.6..

Para el caso dirigido algunas aplicaciones típicas de la noción a estudiar son

1)

Dada una *red de distribución*, asignados a cada uno de sus tramos sentido de circulación y las cotas (inferior, superior) del “volumen” que puede fluir por ellos en cada unidad de tiempo, podemos preguntarnos:

– es posible la “*circulación*” de algún fluido en forma conservativa, respetando las canalizaciones y los sentidos prefijados ?

– en tal caso, si además hay dos puntos distinguidos f, s , cuál es el mayor (el menor) “volumen” que puede (debe) enviarse desde f hasta s ?

Si además se conoce, para cada uno de los tramos, el “*costo unitario por circulación*” puede ser de interes hallar “*circulaciones a costo mínimo (máximo)*”.

2)

Programar una distribución de mercaderías, respetando las restricciones de canalización de la red a utilizar, y las de aprovisionamiento y demanda que correspondan.

3)

Dados p obreros y q tareas, y supuesto que para cada uno de los obreros se conocen cuales son las tareas que es capaz de ejecutar, determinar el número máximo de tareas que pueden realizarse simultáneamente, y elegir una asignación adecuada al efecto.

Si además el rendimiento de los obreros varía con las tareas por realizar, como optimizar la asignación ?

4)

Además, entre otros resultados combinatorios dicha noción permitiría resolver la siguiente pregunta.

Dada una aplicación $f: P \rightarrow Q$ ¿ cuando será posible afirmar la existencia de una biyección φ incluida en f ?

11.2. FLUJOS (CANALIZADOS) Y TENSIONES

Diremos

– **red** (o **multidigrafo canalizado**) a todo multidigrafo $G = (V, U)$ tal que a cada uno de sus arcos u_i le ha sido asignado un *intervalo de canalización* $[b_i, c_i]$ ($0 \leq b_i \leq c_i$)

– **flujo** (o **circulación**) a toda función $\varphi = U \rightarrow \mathcal{R}$ tal que, supuesto $\varphi_i = \varphi(u_i)$ se satisfacen; cualesquiera sean $u_i \in U$; $x \in V$; las restricciones

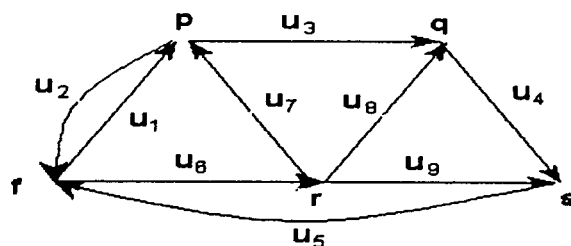
$$\begin{array}{l} \text{R1)} \quad 0 \leq b_i \leq \varphi_i \leq c_i \quad \text{de canalización.} \\ \text{R2)} \quad \sum_{u_i \in A} \varphi_i = \sum_{u_i \in B} \varphi_i, \quad A = U_x^-, \quad B = U_x^+ \quad \text{de conservación.} \end{array}$$

En ocasiones, y sin diferencias esenciales, se estudian flujos en los que se supone $\varphi : U \rightarrow \mathbb{Z}$.

Un flujo se dirá **flujo entero** si lo son todos sus valores φ_i .

Ejemplo

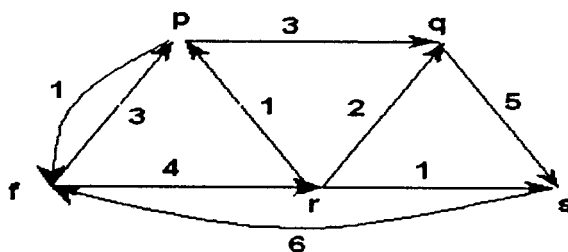
Dado el digrafo



y las canalizaciones

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9
b_i	1	0	1	0	2	2	0	0	0
c_i	8	3	5	5	7	5	3	3	5

uno de sus flujos enteros es



El mismo puede darse por el vector $\varphi = (3, 1, 3, 5, 6, 4, 1, 2, 1)$

Los arcos u_i tales que $b_i < \varphi_i < c_i$ se dicen *arcos fluidos*. Caso contrario u_i se dirá *saturado superiormente* si $\varphi_i = c_i$, y *saturado inferiormente* si $\varphi_i = b_i$.

Dado un flujo φ cada $\varphi_i > 0$ puede interpretarse como la cantidad de cierto bien que (en una unidad de tiempo) recorre el arco $u_i = (p, q)$ desde p hasta q ; o como aquella que se desplaza desde q hasta p por el resto de la red.

Si r_b (r_c) es la función $U \rightarrow \mathcal{R}$ determinada por las cotas de canalización inferiores (superiores), y B es la matriz de incidencia de G , las precedentes restricciones de canalización R1) y las de conservación R2) pueden expresarse de forma más compacta poniendo, respectivamente:

$$r_b \leq \varphi \leq r_c \quad \text{y} \quad B \cdot \varphi = 0$$

Es importante notar que si toda cota de canalización inferior b_i es nula no hay problemas para la existencia de flujos, pues en este caso existe al menos el flujo nulo. (con $\varphi_i = 0$ para cada u_i .)

Caso contrario la situación no es tan simple.

Una condición de existencia será dada poco más adelante.

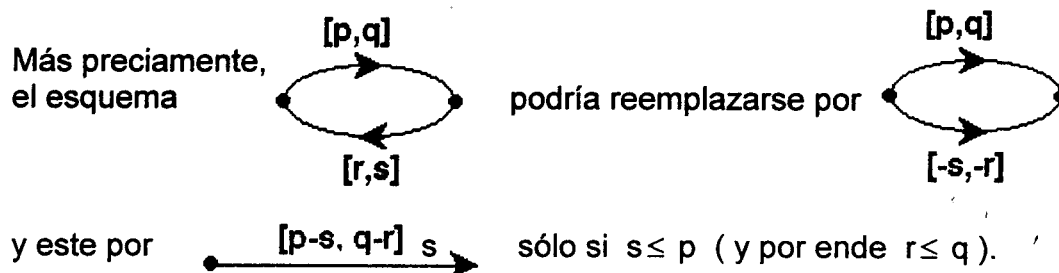
Obviamente, para las cuestiones que llevan a utilizar "flujos" basta limitarse a redes sin bucles.

También puede verse que suponer la carencia de arcos paralelos, y restringirse al caso de cotas de canalización no negativas, no quita generalidad al estudio.

En efecto:

- 1) cada par de arcos paralelos u_1, u_2 , canalizados, respectivamente, $[b_1, c_1]$, $[b_2, c_2]$, podrá reemplazarse por un único arco canalizado $[b_1 + b_2, c_1 + c_2]$.
- 2) supuesto existieran cotas de canalización negativas caben dos situaciones:
 - i) si u_i tiene sus dos cotas de canalización b_i, c_i , negativas, la situación se puede resolver substituyéndolo por su opuesto, canalizado $[-c_i, -b_i]$
 - ii) si u_i está canalizado $[b_i, c_i]$ y sólo b_i es negativa se lo substituye por un par de arcos opuestos, uno canalizado $[0, c_i]$, y el otro $[0, -b_i]$.

Por otro lado, notemos que el reemplazo de "pares de arcos opuestos" por "uno único adecuadamente canalizado" es posible sólo si los respectivos intervalos de canalización no se traslapan.



En particular, y según se puntualiza en [Kau68b]-Cap.5 no sería lícito substituir dos arcos opuestos (x, y) , (y, x) canalizados $[0, p]$, $[0, q]$, con $p > q$, por un único arco (x, y) canalizado $[0, p - q]$.

En efecto, $\varphi(x, y) = 1$, $\varphi(y, x) = 2$ podrían ser componentes de un flujo en una red con arcos (x, y) , (y, x) canalizados, respectivamente, $[0, 5]$, $[0, 2]$, pero no serían compatibles con flujos en la red con el arco (x, y) canalizado $[0, 3]$.

Omitiendo las restricciones de canalización R1), conservando las restricciones de conservación R2), y admitiendo también valores $\varphi_i < 0$ se estaría frente al concepto **flujo libre**.

Para enfatizar la diferencia entre este concepto y el que consideraremos, a éste último podría decirse **flujo canalizado**.

Nótese que :

- cada “vector ciclo” (ver 1 pág.111) puede interpretarse como “vector flujo libre”.
- que toda combinación lineal de *vectores ciclo* da lugar a un *vector flujo libre*.
- “ “ “ “ convexa de flujos canalizados de cierta red, determina un vector flujo canalizado de la misma.

Por otro lado, diversos problemas muestran la necesidad de estudiar modificaciones del concepto *flujo (canalizado)* que hemos introducido.

Una de ellas es la que se obtiene suponiendo restricciones de canalización también en los vértices de la red ; y otra aquella en la que los intervalos de canalización son $[p, q]$ con $-\infty < p \leq q < +\infty$.

De lo visto poco más arriba resulta que esta última situación puede reducirse a aquellos con canalizaciones $[b, c]$ con $0 \leq b \leq c$.

Por otra parte, también puede ser de interés analizar la existencia varias *circulaciones simultáneas en una misma red*.

Esto lleva a los "*multiflujos*", es decir, al análisis de funciones cuyos valores en los arcos u_i son h -uplas $(\varphi_1(u_i), \dots, \varphi_h(u_i))$ en las que cada una de sus componentes φ_j es un flujo canalizado.

Para referencias : [BazJ77], [FraF71], [GonM79], [Hu63/69], [Jew67], [Rock84], [Sim62], [Walt84].

Por otro lado, de la definición resulta que si bien a cada *flujo* puede asociarse un *desplazamiento en estado de régimen* (independiente del tiempo), en ocasiones, podría ser necesario recurrir a esquemas en los que interese tomar en cuenta el tiempo que lleva recorrer cada tramo de la red

Para diferenciar ambas situaciones podríamos convenir en designarlos, respectivamente, *flujos estables*, y *flujos dinámicos*.

También surge la necesidad de estudiar *flujos aleatorios*, o *flujos no necesariamente conservativos*, y en particular *flujos con multiplicadores*.

Algunas observaciones pueden verse en [FordF62], [GonM79], [Roy69]-CapIX.

Para mayor precisión y para evitar confusiones precisemos que en lo que sigue, salvo indicación expresa, sólo consideraremos **flujos canalizados estables**.

Además, frecuentemente se recurre al uso de "*flujos con costos*"; es decir, al de flujos definidos en redes a cada uno de cuyos arcos (i, j) se asignó un "*costo de circulación* $c_{i,j}$ " por unidad de flujo que lo recorre.

Habitualmente el "*costo por circulación*" resulta de la expresión $\sum \varphi_{i,j} \cdot c_{i,j}$, donde $\varphi_{i,j}$ indica la magnitud del flujo que circula por el arco (i, j)

Tal sucede, en particular, en relación con los "problemas de asignación valuada" y los de "transporte", a los que nos referiremos oportunamente.

También podría verse como problema de "*flujos de costo mínimo*" la determinación de caminos de "longitud" mínima, tratada en 1 Cap.6.

Bastaría al efecto canalizar $[0, \infty)$ todos los arcos, suponer que el “costo” de cada arco coincide con su “longitud” y restringirse a flujos con $\varphi_i \in \{0, 1\}$.

Esto permite vincular a la Teoría de Flujos con problemas combinatorios, o de caminos críticos, y en particular con el Método PERT. (ver 1 Cap.6)

Así como los flujos libres están relacionados con los *ciclos* ; sus duales, los *co-ciclos* (ver 7.6) lo están con la siguiente noción, a la cual nos referiremos sólo muy brevemente.

Se dice **tensión** (o **diferencia de potencial**) de $G = (V, U)$ a toda función $\theta : U \rightarrow \mathcal{R}$ tal que cualquiera sea el ciclo elemental con arcos adelante C' , y arcos atrás C'' , se tiene
$$\sum_{u_i \in C'} \theta(u_i) = \sum_{u_i \in C''} \theta(u_i)$$

(o más suscintamente $C \cdot \theta = 0$, con C matriz ciclo elemental)

Si G es conexo y θ una tensión de G , fijado arbitrariamente un valor t_0 a un vértice x_0 , y por aplicación reiterada de la regla $t_b = t_a + \theta(a, b)$, (cualquiera sea el arco (a, b)) queda definida una “función potencial” $f : V \rightarrow \mathcal{R}$.

Así, dada una tensión, las funciones potenciales definidas por ella están definidas, a menos de constante aditiva en cada componente conexa.

Los flujos libres y las tensiones satisfacen propiedades duales que están latentes en las Leyes de Kirchhoff, reguladoras en primera aproximación del funcionamiento de las redes eléctricas.

Para detalles al respecto [Bry67/79], [Chen71a], [Duf75], [GhoH64], [SesR61].

Notemos que en [Hu82]-Cap.2 se destaca debe distinguirse entre “flujo” y “corriente eléctrica”

El concepto “tensión” se muestra útil también para abordar la problemática de los “caminos de longitud óptima”, pues cada diferencia de potenciales $t_q - t_p$ puede equipararse con longitudes mínimas de caminos $p \rightarrow q$.

Observemos también que resultados sobre flujos y tensiones propios de redes eléctricas se mostraron útiles para abordar el “problema del cubrimiento de un rectángulo (cuadrado, triángulo) en figuras similares que no se traslapan”

A tal efecto se asociaron, a tales cubrimientos grafos representativos de redes eléctricas construidas “ad hoc”. Para información al respecto ver [BonM76]-Cap.12, [BroST40/92], [Gard58], [Hon77]-Cap.7, [KazW73], [Stein61/63b/63c], [Tut48a/50/65].



Supuesto que $G = (V, U)$ es digrafo de orden n , con m arcos y p componentes conexas se demuestran :

a)

Una condición necesaria y suficiente para que un vector φ (θ) sea flujo libre (tensión) es ser combinación lineal de vectores ciclo (cociclo) elementales.

b)

Un vector $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ determina una tensión en (V, U) si y sólo si existe una función $t: V \rightarrow \mathcal{R}$ tal que para todo arco $u_i = (p, q)$ se cumple $\theta_i = t_q - t_p$.

c)

Los espacios vectoriales de los flujos libres y de las tensiones son ortogonales.

d)

Si T es foresta de árboles cubrientes del digrafo G , y los correspondientes ciclos fundamentales c_i (cociclos fundamentales q_i) se orientan de forma que las $(m - n + p)$ cuerdas ($(n - p)$ ramas) de G respecto de T sean arcos adelante, entonces cualesquiera sean los valores φ_i (θ_i) asignados a dichas cuerdas (ramas) queda determinado un flujo libre (una tensión).

Por lo tanto, los *flujos libres* de G tienen $(m - n + p)$ valores que pueden fijarse arbitrariamente, y constituyen un espacio vectorial de dimensión $(m - n + p)$.

Para el caso de las *tensiones* cabe una afirmación similar poniendo $(n - p)$ en lugar de $(m - n + p)$

Por otro lado, para el caso de flujos canalizados cabe la siguiente afirmación

Todo flujo canalizado de G puede imaginarse como generado a partir de "líneas de corriente" asociadas a los ciclos de la red en cuestión, y obtenerse como combinación lineal de los ciclos fundamentales relativos a cierto árbol cubriente, asignando a sus cuerdas valores adecuados.

Así por caso, en el ejemplo dado en pág.197 sus ciclos fundamentales, relativos al árbol cubriente de aristas u_6, u_7, u_8, u_9 son $\mu_1 = (1, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 0, 0) \parallel$
 $\mu_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0) \parallel \mu_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, -1, 0) \parallel \mu_4 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, -1) \parallel$
 $\mu_5 = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$, y asignando a sus cuerdas u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 los valores 3, 1, 3, 5, 6, con la combinación lineal $3.\mu_1 + 1.\mu_2 + 3.\mu_3 + 5.\mu_4 + 6.\mu_5$ se encuentra el flujo φ .

El concepto "tensión" también es aplicable en problemas de coloración.

Más precisamente, en [Jae88] (ver también [Duf75]) se destaca que la dualidad entre “flujos libres” y “tensiones” se manifiesta claramente en multigrafos planares y permite demostrar la equivalencia entre la Conjetura de los Cuatro Colores y la afirmación

Todo digrafo planar 2-conexo admite flujos enteros con valores $\varphi_i \in \{+1, +2, +3, -1, -2, -3\}$

Esto lleva a cierta “conjetura de Tutte” [Tut54] y a profundizar en el estudio de los “flujos sin nulos”

Ver [Die96]-Cap.6, [Sey66], [Jae75a/75b/75c/76] y en especial [Jae88].

Aún cuando en lo que sigue nos referiremos a “tensiones” sólo muy ocasionalmente creemos conveniente destacar que también se han enunciado importantes “propiedades duales” entre “flujos canalizados” y “tensiones canalizadas”.

11.3. FLUJOS $f-s$

Para lo que sigue será útil convenir que :

Dado un multidigrafo $G = (V, U)$ y una función $f : U \rightarrow \mathcal{R}$ notaremos $f(A)$ a la suma de los valores $f(u_i)$ extendida a todos los arcos $u_i \in A \subset U$

Así entonces, y apelando a la convención según la cual dado un digrafo (V, U) y supuestos $A \subset V ; B \subset V$ se nota (A, B) al conjunto de arcos con extremo inicial en A y extremo final en B , se podrán simplificar ciertas notaciones.

Por ejemplo, cualquiera sea $A \subset V$ podremos poner

si φ es un flujo, $\varphi(A, \bar{A}) = \varphi(\bar{A}, A)$.

Para numerosos problemas será de interés la siguiente noción.

Dada una red $G = (V, U)$ con dos vértices distinguidos f (fuente), s (sumidero), se dice **flujo $f-s$** , (de valor φ_0) a toda función $\varphi : U \rightarrow \mathcal{R}$ tal que

$$R'1) \quad 0 \leq b_i \leq \varphi_i \leq c_i.$$

$$R'2) \quad \varphi(x, V) - \varphi(V, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f \neq x \neq s \\ \varphi_0 & \text{si } x = f \quad (\text{idem } -\varphi_0 \text{ si } x = s) \end{cases}$$

Convendremos en notar los vértices f, s , de forma que φ_0 sea no negativo.

Naturalmente, se dirá que un flujo $f-s$ es **máximo (mínimo)** si su valor es el mayor (menor) de todos los que pueden tomar los distintos flujos $f-s$,

Nótese que tanto el conjunto R2) de restricciones de conservación involucradas en la definición de flujo, como el de las incluidas en R'2) en la definición de flujo $f-s$ son redundantes. (pues una cualesquiera de ellas es consecuencia de las restantes)

No obstante, se las conserva para mantener una correspondencia biyectiva entre ecuaciones y vértices.

Si bien los flujos son conservativos en todo vértice, y los flujos $f-s$ no lo son en los vértices f, s , entre las nociones "flujo" y "flujo $f-s$ " no hay diferencias esenciales.

En efecto, puede pasarse del uno al otro mediante la eliminación (el agregado) de un arco (s, f) , canalizado $[0, +\infty]$. Un tal arco se dirá **arco de retorno**.

Así por ejemplo, eliminando de la red de página 197 su arco $u_5 = (s, f)$ el flujo allí dado da origen a un flujo $f-s$ de valor $\phi = \phi(u_5)$.

Véase que si ϕ es un flujo $f-s$ de valor ϕ_0 , entonces :

- 1) $\phi_0 = \phi(f, V) - \phi(V, f) = \phi(V, s) - \phi(s, V)$.
- 2) Cualquiera sea el conjunto de vértices A tal que $f \in A, s \notin A$, se tiene $\phi_0 = \phi(A, \bar{A}) - \phi(\bar{A}, A) \leq \phi(A, \bar{A}) \leq c(A, \bar{A})$.

Determinar en una red (V, U) de arcos canalizados $[b_i, c_i]$ un flujo $f-s$ máximo (mínimo) equivale a resolver el siguiente problema de Programación Lineal

$$\left| \begin{array}{l} \text{Maximizar (Minimizar) } \phi_0 = \phi(f, V) - \phi(V, f) \\ \text{supuesto que } \left| \begin{array}{l} \phi(x, V) - \phi(V, x) = 0 \quad \text{si } f \neq x \neq s. \\ \phi_i - b_i \geq 0 \quad \text{para todo arco } u_i. \\ c_i - \phi_i \geq 0 \quad \text{para todo arco } u_i. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Para hallar tales flujos podría recurrirse al conocido *Método Simplex*, de la Programación Lineal.

No obstante las correspondientes características particulares permiten resolverlos aplicando procedimientos más simples y directos.

Frecuentemente se presentan casos en los que los conjuntos de vértices a considerar "*fuentes*", o "*sumideros*", no son necesariamente unitarios, y en los que desde cualquier "*fuentes*" puede llegarse a todo "*sumidero*"

Se deja al lector constatar que en tales casos agregando a lo sumo dos vértices y algunos arcos la situación se puede reducir a otra en la que hay solamente una fuente y un sumidero.

11.4. FLUJOS OPTIMOS

Observemos primeramente que entre los problemas de maximización y los de minimización no hay diferencias esenciales.

En efecto, dada una matriz cuadrada de componentes $c_{ij} \geq 0$ todo acoplamiento (biyección entre filas y columnas) que maximiza la suma de los c_{ij} involucrados en el mismo puede reencontrarse como de minimización en una matriz de componentes $c'_{ij} \geq 0$, y recíprocamente.

Para justificar lo afirmado véase que :

1) Si todos los c_{ij} se alteran en una misma constante aditiva los acoplamientos que posibilitan alcanzar soluciones óptimas no se modifican

2) Un acoplamiento permite alcanzar el máximo valor de $\sum c_{i,j}$ si y sólo si permite alcanzar el mínimo valor de $\sum -c_{i,j}$.

Así entonces, los acoplamientos que maximizan $\sum c_{i,j}$ minimizan $\sum -c_{i,j}$ y también $\sum K - c_{i,j}$. Además, si $K \geq \max c_{i,j}$, vale $K - c_{i,j} = c'_{ij} \geq 0$.

Supuesto que φ es un flujo $f-s$, y que $C : u_1, u_2, \dots, u_m$ es una cadena que lleva desde f hasta s , diremos **capacidad residual superior de C (respecto de φ)** al valor $\varepsilon = \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, con $\varepsilon_1 = \min (c_i - \varphi_i)$ extendida a todos los arcos adelante de C (si los hay), y $\varepsilon_2 = \min (\varphi_i - b_i)$ extendida a todos los arcos atrás de C (supuesto los haya).

Véase que :

– $\varepsilon \neq 0$ si y sólo si C carece de arcos adelante saturados superiormente y de arcos atrás saturados inferiormente.

– si φ es un flujo $f-s$; C una cadena que lleva desde f hasta s , con capacidad residual superior ε , y se pone

$$\tilde{\varphi}_i = \begin{cases} \varphi_i & \text{si } u_i \notin C, \\ \varphi_i + \varepsilon & \text{si } u_i \text{ es arco adelante en } C \\ \varphi_i - \varepsilon & \text{si } u_i \text{ es arco atrás en } C \end{cases}$$

se obtiene un nuevo flujo $f-s$, $\tilde{\varphi}$, cuyo valor incrementa en ε al de φ .

Así entonces, C es una **cadena de aumento de flujo** (respecto de φ) si y sólo si en todos sus arcos adelante $\varphi_i < c_i$, y en todos sus arcos atrás $\varphi_i > b_i$.

En particular, vimos que eliminando del digrafo de pág.197 su arco u_5 se obtiene un flujo $f-s$ de valor seis.

Respecto de él, la cadena u_1, u_7, u_9 , es de aumento de flujo, y su capacidad residual superior es $1 = \min. \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \}$ ($\varepsilon_1 = \min. \{ 5, 4 \}$, $\varepsilon_2 = \min. \{ 1 \}$)

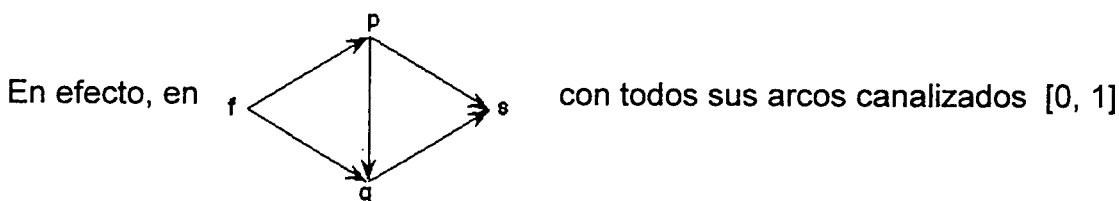
Análogamente se introducen los conceptos de *capacidad residual inferior*, y de *cadena de disminución de flujo* (son aquellas en las que se tiene $\varphi_i > b_i$ en sus arcos adelante, y $\varphi_i < c_i$ en sus arcos atrás)

Se deja a cargo del lector mostrar que

Si G es una red canalizada $[0, c_i]$ que admite un flujo $f-s$ de valor $\varphi_0 > 0$, existe al menos un camino desde f hasta s , en cada uno de cuyos arcos $\varphi_i > 0$

Un flujo $f-s$ es máximo (mínimo) si y sólo si no hay cadenas de aumento (de disminución) de flujo.

Destaquemos que en esta última afirmación **no** es lícito *substituir cadena por camino*.



el flujo con $\varphi(f, p) = \varphi(p, q) = \varphi(q, s) = 1$; $\varphi(f, q) = \varphi(p, s) = 0$ carece de “caminos de aumento de flujo”, pero no es máximo.

Los flujos $f - s$ que carecen de caminos $f \rightarrow s$ con capacidad residual superior positiva suelen decirse **flujos completos**.

Del ejemplo anterior resulta que una misma red puede admitir flujos $f - s$ completos de valores diferentes.

Para lo que sigue será útil :

- recordar que dado un digrafo $G = (V, U)$ y supuesto $A \subset V$, su *cociclo de soporte* A es $U_A = U_A^+ \cup U_A^- = (A, \bar{A}) \cup (\bar{A}, A)$
- convenir que el **cociclo** U_A **separa f de s** , si $f \in A, s \notin A$.
- llamar **valor del cociclo** U_A al número $c(A, \bar{A}) - b(\bar{A}, A) = \sum_{u_i \in U_A^+} c_i - \sum_{u_i \in U_A^-} b_i$

Si toda cota de canalización inferior es $b_i = 0$ dicho valor se reduce a $c(A, \bar{A})$, y suele decirse **capacidad del cociclo**.

Para los cociclos caben clasificaciones similares a las indicadas para los flujos.

En particular, un cociclo se dirá *máximo* (*mínimo*) si lo es su valor, y *entero*, si lo son los valores de todos sus arcos.

Una fructífera relación entre “los valores de los cociclos que separan f de s ”, y “los valores de los flujos $f - s$ ” (supuesto existan) es la dada por el siguiente e importante resultado debido a Ford y Fulkerson [FordF54/55/62].

Su demostración inicial es constructiva, pues recurre al algoritmo que daremos en pág.211.

Otra, dada en [DanF56], hace uso del Teorema de Dualidad de la Programación Lineal, y ubica al problema en un contexto más amplio.

Cabe también citar la propuesta en [EliFS56], que se basa en la descomposición de la red en estudio en otras más simples y en combinar las soluciones de estos casos.

Las tres demostraciones están tratadas en [FraF71]-Cap.3 (pág.39 a 55).

Otras, con leves varianantes en sus respectivas formalizaciones pueden verse en [Agui90], [Bec64b], [Ber70], [Deo74], [Die96], [Roy69a], [Sak84b].

Teorema Fundamental (de Ford y Fulkerson)

Si la red $G = (V, U)$ canalizada $0 \leq b_i \leq c_i$ admite flujo $f - s$, entonces cualquiera sea $A \subset V$ con $f \in A$, $s \notin A$, se tiene que

a) $\max. \varphi_0 = \min. (c(A, \bar{A}) - b(\bar{A}, A))$.

b) $\min. \varphi_0 = \max. (0, b(A, \bar{A}) - c(\bar{A}, A))$.

Si f es entrada (o si s es salida) la igualdad b) puede reformularse

b') $\min. \varphi_0 = \max. (b(A, \bar{A}) - c(\bar{A}, A))$.

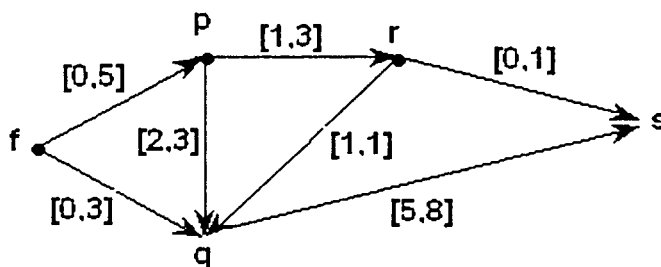
De a) que admite la siguiente enunciación más coloquial,

El valor máximo de los flujos $f - s$ coincide con el valor mínimo de los cociclos que separan f de s

se infiere que $\max. \varphi_0 \leq \min. c(A, \bar{A})$.

Nótese que la "utilidad práctica" del teorema anterior es escasa, pues el mismo implica, en principio, analizar el valor de 2^{n-2} cociclos (n orden del digrafo).

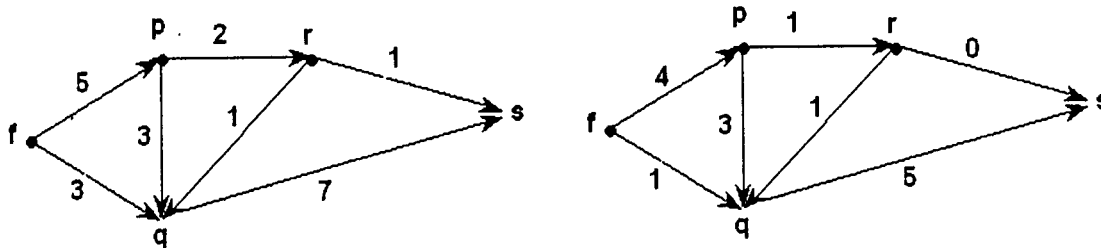
Para ejemplificar el teorema precedente consideremos la red.



De la siguiente tabla, en donde se incluyen todos los cociclos que separan f , s , se deduce que los valores máximo, y mínimo, de sus flujos $f - s$ son, respectivamente, 8 y 5.

A	$\alpha = c(A, \bar{A})$	$\beta = b(\bar{A}, A)$	$\alpha - \beta$	$\gamma = b(A, \bar{A})$	$\delta = c(\bar{A}, A)$	$\gamma - \delta$
f	8	0	<u>8</u>	0	0	0
f,p	9	0	<u>9</u>	3	0	3
f,q	13	3	10	5	4	1
f,r	10	1	9	1	3	-2
f,p,q	11	1	10	6	1	<u>5</u>
f,p,r	8	0	<u>8</u>	3	0	3
f,q,r	14	3	11	5	6	-1
f,p,q,r	9	0	9	5	0	<u>5</u>

Un par de tales flujos óptimos son



En [Hof74] y en [FraF71]-Cap.3-6. se dan generalizaciones de este Teorema Fundamental

Se demuestra que tanto el precedente Teorema Fundamental de Ford y Fulkerson, como el de Factibilidad de Gale que daremos en pág.230, son equivalentes del siguiente Teorema de Existencia, debido a Hoffman [Hof60]

Teorema de existencia de flujos canalizados (de Hoffman)

La red $G = (V, U)$ canalizada $0 \leq b_i \leq c_i$ admite flujo si y sólo si cualquiera sea el cociclo $U_A = (A, \bar{A}) \cup (\bar{A}, A)$ se satisface :

i) $c(A, \bar{A}) \geq b(\bar{A}, A)$

o equivalentemente

ii) $c(\bar{A}, A) \geq b(A, \bar{A})$.

La equivalencia entre i) y ii) es inmediata. Basta substituir A por $\bar{A}$.

También es inmediato que la condición i) es necesaria .

Pues cualesquiera sean φ, A , se tiene $c(A, \bar{A}) \geq \varphi(A, \bar{A}) = \varphi(\bar{A}, A) \geq b(\bar{A}, A)$.

La importancia del resultado reside en mostrar que ella también es suficiente, pero esto es más laborioso.

La condición i) puede interpretarse como :

“de A podría salir al menos tanto como lo que debe entrar en A ”.

mientras que la condición ii) puede verse como

“lo que pudiera entrar en A es mayor o igual que lo que debe salir de A ”.

La condición i) se corresponde con la idea de circulaciones sin atascamientos, y la ii) con la de aquellas sin agotamientos.

Para el caso en que f es entrada (o s es salida) el teorema de existencia anterior admite la siguiente reformulación :

Si el vértice f (s) es entrada (salida) de la red (V, U) , ésta admite flujo $f - s$ si y sólo si cualquiera sea el conjunto $A \subset V$ que contenga, bien a ambos vértices f, s , o bien a ninguno de ellos, se satisface :

$$I) \quad c(A, \bar{A}) \geq b(\bar{A}, A)$$

o equivalentemente

$$II) \quad c(\bar{A}, A) \geq b(A, \bar{A})$$

Puntualizemos que, de acuerdo con lo señalado en Cap.7-pág.31, el Teorema Fundamental de Flujos también es equivalente del Lema de Minty y que según se indica en [GonM79]-pág.133 una leve modificación de este Lema permite dar descripciones simples de varios de los “algoritmos de flujos”, incluido el “de los arcos no conformes” (*out of kilter*) útil para abordar el Problema del Transporte.

11.5. DETERMINACIÓN DE FLUJOS ÓPTIMOS

La determinación de los flujos óptimos puede efectuarse considerando el correspondiente problema de Programación Lineal, pero las particularidades propias del problema permiten resolverlo de manera más rápida y sencilla usando otros métodos.

En particular, y a tal efecto podría recurrirse al Algoritmo de Ford y Fulkerson, [FordF54/55/62] que daremos a continuación.

Destaquemos previamente que :

1 así como para apelar al Método Simplex de la Programación Lineal se exige el conocimiento de una solución básica inicial, para aplicar el algoritmo en consideración se requiere conocer un “flujo de partida”

2 según reiteraremos en pág.217, dicho algoritmo sólo es válido para el caso de canalizaciones a valores racionales, pero modificaciones simples permiten extenderlo al caso de canalizaciones a valores reales.

3 excepto casos particulares, el conocimiento de un flujo inicial es inmediato sólo si todas las cotas de canalización b_i son nulas; pues en tal caso podrá tomarse como flujo inicial, el flujo nulo.

Poco más adelante, en pág.215, veremos como los casos restantes pueden reducirse a esta situación.

Del algoritmo en cuestión se han dado formalizaciones con leves variantes. Ver [Agui90], [Bec64b], [BusS65], [Deo74], [GonM79], [Hu82], [Roy69a], [Sak84b], [Sim62], [Walt84]

El algoritmo que nos ocupa consta, en esencia, de dos partes :

$\mathcal{A}$ de etiquetamiento de vértices.

$\mathcal{B}$ de modificación del flujo conocido.

La primera lleva a fijar cadenas de aumento (o de disminución) de flujo con extremos f , s .

La restante permite, modificando los valores φ_i en los arcos de dichas cadenas, y solamente en ellos, obtener otro flujo φ' de mayor (de menor) valor.

Algoritmo de Ford y Fulkerson

Lo enunciaremos para el caso en que interese hallar flujos $f - s$ máximos. Para determinar flujos mínimos sería similar.

Reglas $\mathcal{A}$

$\mathcal{A}_1$ Conocido un flujo $f - s$ de valor φ_0 se supone que el vértice f está marcado, y se aplica reiteradamente; hasta marcar s , o hasta constatar que ello es imposible, la siguiente regla

$\mathcal{A}_2$ Si cierto vértice v está marcado, se marcan :

con v^+ todos los vértices z no marcados, tales que $\varphi(v, z) < c(v, z)$

con v^- todos aquellos z no marcados, tales que $\varphi(z, v) > b(z, v)$.

Si no es posible marcar s , el flujo es máximo; caso contrario se lo modifica aplicando las siguientes

Reglas $\mathcal{B}$

$\mathcal{B}_1$ Se determina en forma regresiva, (o sea, comenzando por s) una cadena $f = x_1, x_2, x_3, \dots, x_k = s$ tal que si x_j está marcado v^+ , o v^- , entonces la marca de x_{j-1} es v .

Una vez fijada dicha *cadena de aumento de flujo* se pasa a $\mathcal{B}_2$

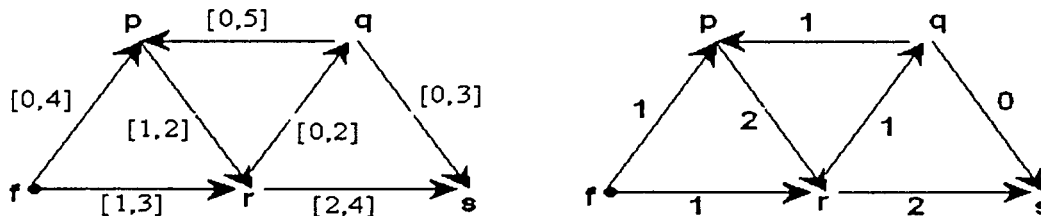
Nótese que si x_j está marcado v^+ el arco $(x_{j-1}, x_j) = (v, v^+)$ es arco adelante, y que si está marcado v^- el arco $(x_{j-1}, x_j) = (v, v^-)$ es arco atrás.

$\mathcal{B}_2$ Se determina el ínfimo del conjunto de valores $c_i - \varphi_i$ correspondientes a los arcos adelante, y del conjunto de valores $\varphi_i - b_i$ ligados con los arcos atrás de dicha cadena.

Si dicho ínfimo es ε , aumentando en ε el φ_i de los arcos adelante, y disminuyendo en ε el φ_i de los arcos atrás, se determina un nuevo flujo φ' con valores $\varphi'_i = \varphi_i + \varepsilon$, y se aplica $\mathcal{B}_3$

$\mathcal{B}_3$ Se borran todas las marcas y se vuelve al algoritmo aplicando nuevamente $\mathcal{A}_1$, pero a partir del flujo φ' .

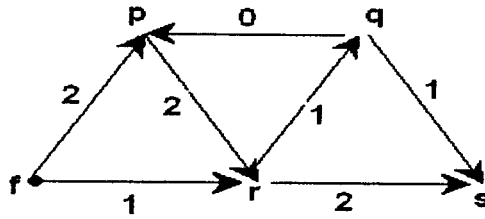
Consideremos la siguiente red con un flujo inicial de valor 2.



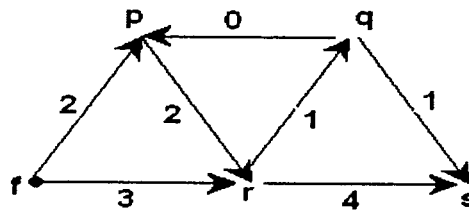
Por aplicación de las reglas $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ los vértices p, r , se deben marcar f^+ ; el vértice q debe señalarse p^- , y el s con q^+ .

Con las marcas elegidas y aplicando las reglas $\mathcal{B}_2$ se determina la cadena de aumento de flujo f, p, q, s , con arcos adelante (f, p) , (q, s) y arco atrás (q, p) .

Ahora $\varepsilon = 1$ y el nuevo flujo φ' , de valor 3 es



Reiterando la aplicación del algoritmo se determina ahora la cadena de aumento de flujo f, r, s , con $\varepsilon = 2$. El nuevo flujo φ'' , de valor 5, es



Una nueva aplicación del algoritmo sólo permite marcar los vértices f, p , y por lo tanto el flujo φ'' es máximo.

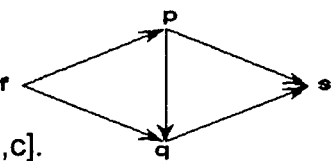
Nótese que :

- En la primera aplicación del algoritmo también hubiéramos podido optar por marcar ambos vértices q, s , con r^+ .
- En cada aplicación de las reglas $\mathcal{A}$ cada vértice se marca una sola vez, pero sus respectivas marcas no están determinadas unívocamente.
- Si φ no es máximo pueden existir varias cadenas de aumento de flujo, con capacidades residuales superiores no necesariamente iguales..
- Si φ no es óptimo los valores φ_i a modificar son sólo los correspondientes a una cierta cadena de aumento de flujo.
- Si φ es flujo entero y las cotas b_i, c_i , son enteros, también lo son ε y el nuevo flujo φ' . Además, en tal caso $\varepsilon = \varphi'_0 - \varphi_0 \geq 1$.

De v) resulta que en redes canalizadas $[0, c_i]$ con todos los c_i enteros, para determinar un flujo máximo bastará un número finito de iteraciones del algoritmo.

Más precisamente, dicho número de iteraciones estará acotado superiormente por el valor de los flujos máximos.

La posibilidad de efectuar "reiteradas malas elecciones" hace que dicha cota no pueda mejorarse.

Consideremos al efecto la red  con el arco (p, q) canalizado $[0, 1]$ y los restantes $[0, c]$.

Obviamente, la elección de la cadena f, p, q, s da lugar a un flujo $f - s$ de valor 1, y eligiendo luego la cadena f, q, p, s se determinaría ahora un flujo de valor 2, con $\varphi'(p, q) = 0$

Es fácil constatar que reiterando sucesivas elecciones del mismo par de cadenas para alcanzar el flujo máximo de valor $2c$ serían necesarias, a partir del flujo nulo, $2c$ iteraciones del algoritmo.

El algoritmo que nos ocupa podría modificarse de forma que, primeramente se determinaran flujos *completos* (sin caminos de aumento de flujos) y que luego de tal aproximación se tomaran en cuenta las *cadena*s de aumento de flujo.

También podríamos modificar las marcas asignadas a los vértices haciendo que al marcar s quedara, al mismo tiempo, determinado el valor con que la cadena que posibilitó marcarlo permitiría aumentar el valor flujo en cuestión.

Para ello bastaría marcar f con (f, ∞) y aplicar reiteradamente las siguientes reglas, inspiradas en las del algoritmo que nos ocupa.

—si x está marcado (y^+, α) , o bien (y^-, α) , entonces

—si $\varphi(x, z) < c(x, z)$ el vértice z se marca (x^+, α') con $\alpha' = \min. \{\alpha, c(x, z) - \varphi(x, z)\}$

—si $\varphi(z, x) > b(z, x)$ el vértice z se marca (x^-, α') con $\alpha' = \min. \{\alpha, \varphi(z, x) - b(z, x)\}$

La modificación que acabamos de indicar lleva a admitir diversas marcas en un mismo vértice pero permite, atendiendo a la segunda componente, elegir cadenas que conlleven mayor aumento de flujo.

Volviendo sobre algo ya observado recordemos que para aplicar el algoritmo de Ford-Fulkerson es necesario conocer un “flujo inicial” y que, en general, un tal flujo es inmediato sólo si para todo arco u_i su cota de canalización b_i es nula.

Caso contrario, para hallar (si los hay) en la red $G = (V, U)$ de arcos canalizados $[b_i, c_i]$ un flujo que tomaremos como “inicial” al momento de aplicar el algoritmo que nos ocupa recurriremos a cierta red auxiliar $G' = (V', U')$ de arcos canalizados $[0, c_i^*]$.

Para su construcción asignaremos a cada $x \in V$ el valor $\delta_x = b(x, V) - b(V, x)$

Véase que $\sum_{x \in V} \delta_x = 0$. En consecuencia $\sum_{\delta_x > 0} \delta_x = - \sum_{\delta_x < 0} \delta_x$.

La red auxiliar $G^* = (V^*, U^*)$ satisfará :

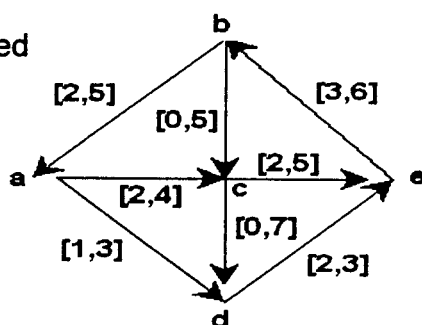
$V^* = V \cup f^* \cup s^*$ con $f^* \notin V$; $s^* \notin V$.

$U^* = U \cup W$ donde W es el conjunto de arcos $f^*, x)$ si $\delta_x < 0$, y de arcos (x, s^*) si $\delta_x > 0$.

Los arcos de G^* se canalizan $[0, c^*_i]$ con. $c^*_i = \begin{cases} c_i - b_i & \text{si } u_i \in U \\ |b_x| & \text{caso contrario.} \end{cases}$

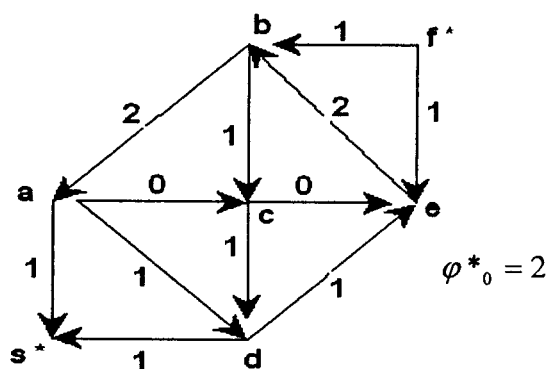
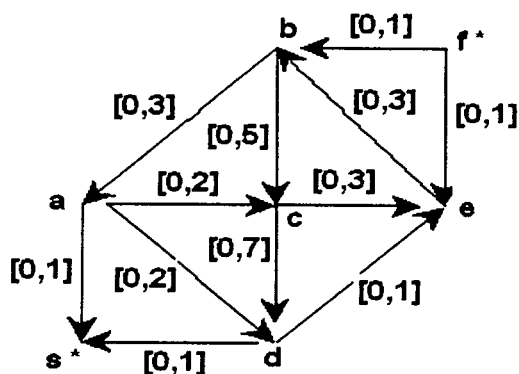
Se deja al lector ver que la determinación en G^* de un flujo φ^* que sature superiormente sus arcos de entrada (idem los de salida) y las substituciones $\varphi_i = \varphi^*_i - b_i$ permiten hallar un flujo φ de la red inicial G .

Así, dada la red

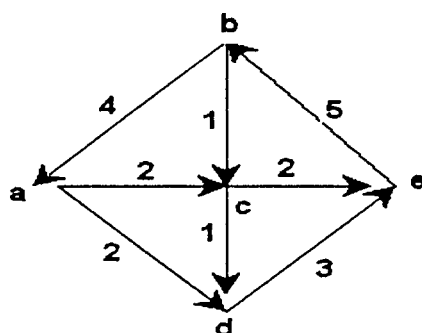


x	$b(x, V)$	$b(V, x)$	δ_x
a	3	2	1
b	2	3	-1
c	2	2	0
d	2	1	1
e	3	4	-1

tendremos



de donde, poniendo $\varphi_i = \varphi^*_i + b_i$ resultará el siguiente flujo φ en G .



Así entonces

La existencia de un flujo φ en G equivale a la de un flujo φ^* que sature superiormente los arcos de salida (idem los de entrada) de G^*

Ambos flujos están vinculados por $\varphi_i = \varphi^*_i + b_i$, para cada $u_i \in U$.

Si en el ejemplo quitamos el arco (d, e) se genera un flujo $e - d$, de valor 3.

Obviamente, $\varphi^*(d, e) + \varphi^*_0 = 3$.

El problema de constatar la “*existencia de flujos $f - s$* ” en cierta red H se reduce al anterior, eligiendo como G a la red H incrementada con un arco de retorno (s, f) .

Según vimos, todo flujo de G (si existe) puede obtenerse a partir de un flujo nulo en la red auxiliar G^* .

De esto, y v), de pág.213 resulta que si todas las cotas de canalización de cierta red (que admite flujo) son números enteros, puede afirmarse que existen flujos óptimos enteros.

Para hallarlos bastará un número finito de aplicaciones del algoritmo.

Sobre esta importante consecuencia, conocida como *Teorema de los Flujos Enteros* volveremos en 11.7. Ver [RoyBN65].

Para cuando haya cotas de canalización racionales, pero no las haya irracionales, un adecuado cambio de unidad permitirá aplicar también a estos casos el algoritmo anterior.

En cambio, según se muestra en [FordF62]-Cap.II, si existen cotas de canalización irracionales la implementación del mismo podría llevar a elegir una sucesión infinita de flujos $f - s$, tales que sus respectivos valores convergieran a uno muy distinto del óptimo.

En relación con lo recién observado notemos que desde un punto de vista práctico la existencia de cotas irracionales puede soslayarse, puesto que todo irracional puede aproximarse, tanto como se quiera, por racionales.

Por otro lado, destaquemos que las señaladas dificultades teóricas se pueden eliminar tomando recaudos fáciles de implementar.

A tal efecto bastaría con tomar en cuenta el orden en que se marcan (etiquetan) los vértices, incorporando al algoritmo la siguiente modificación

Hacer que cada vértice "primer etiquetado" sea "primer explorado".

Esta modificación del Algoritmo de Ford-Fulkerson implica que :

antes de explorar un vértice w deben explorarse todos los etiquetados antes de que lo fuera w

Fue propuesta por Edmons-Karp [EdmK72], y conlleva elegir un orden de etiquetamiento compatible con sucesivas elecciones de cadenas con menor número de arcos.

Tal modificación convierte al algoritmo de Ford-Fulkerson en uno de tipo BFS que permite hallar flujos máximos con a lo sumo $(n^3 - n) / 4$ iteraciones (n orden del digrafo). Su implementación fue mejorada por Dinic [Din70].

Otros métodos para hallar flujos óptimos fueron dados en [Kar74] y [MaIKM78].

Ellos, como así también las citadas modificaciones de Edmons-Karp y de Dinic son analizados y comparadas en [Hu82]-Cap.2.

Ver también [Agui90], [CharL79], [EvenT75], [Tar83].

Referencias a varios de los algoritmos para determinar flujos máximos, como así también una tabla con los "índices de complejidad de procesamiento" de una quincena de ellos puede verse en [Ruhe91]-Cap.2.

Una versión reducida de dicha tabla se da en [Tar83]-pág.98.

Notemos finalmente que según se observa en [Anch70] el "método de las compensaciones sucesivas" propuesto en [Opre69] para hallar flujos máximos en redes canalizadas $[0, c_i]$ no siempre lleva a buen término.

No obstante, dicho método, que es simple y fácil de expresar matricialmente permite hallar "flujos de aproximación".

11.6. FLUJOS EN GRAFOS

No siempre una red de distribución tiene establecido, para cada uno de sus tramos, un sentido de desplazamiento prefijado.

En ellas, "un bien en circulación" podría desplazarse –a priori– en cada tramo en cualquier dirección, pero sólo puede hacerlo efectivamente en una de ellas.

Para determinar *flujos unidireccionales* en redes con tramos sin dirección pre-asignada, y bajo la hipótesis de que cada uno de éstos está canalizado $[0, c_i]$ se puede razonar sobre el digrafo que se obtiene simetrizando el representativo de la red en estudio, y eligiendo en él un flujo $\tilde{\varphi}$ que permita hallar otro, $\hat{\varphi}$, apto para la red inicial G .

Para ello :

- A) Dado un grafo $G = (V, U)$ con sus aristas u_i canalizadas $[0, c_i]$ sea G^s la red obtenida al substituir cada arista u_i por el par de arcos opuestos $u_i, \tilde{u}_i$, (ambos con los mismos extremos que u_i) canalizados también $[0, c_i]$.
- B) A cada flujo canalizado $\tilde{\varphi}$ de G^s , y eligiendo $\hat{\varphi}(u_i) = \max.(0, \tilde{\varphi}(u_i) - \tilde{\varphi}(\tilde{u}_i))$ puede asignarse, también en G^s , otro flujo $\hat{\varphi}$, con $0 \leq \hat{\varphi}(u_i) \leq c_i$ y tal que el producto $\hat{\varphi}(u_i) \cdot \hat{\varphi}(\tilde{u}_i)$ sea nulo. (así, de cada par de arcos opuestos a lo más uno tiene flujo no nulo)
- C) Si $\hat{\varphi}(u_i) > 0$ (y por ende $\hat{\varphi}(\tilde{u}_i) = 0$), y u_i es el arco $(p, q) \in G^s$, haciendo que la arista $[p, q]$ de G sea recorrida, desde p hasta q , por $\varphi(u_i) = \hat{\varphi}(u_i)$ unidades, queda definido en G un flujo unidireccional φ .
- D) Recíprocamente, a cada flujo unidireccional φ en G puede asociarse en G^s un flujo $\hat{\varphi}$ que satisfaga la restricción que corresponde.

Resulta así posible establecer una correspondencia biyectiva entre flujos $\hat{\varphi}$ de G^s que satisfagan $\hat{\varphi}(u_i) \cdot \hat{\varphi}(\tilde{u}_i) = 0$, y flujos unidireccionales φ en G .

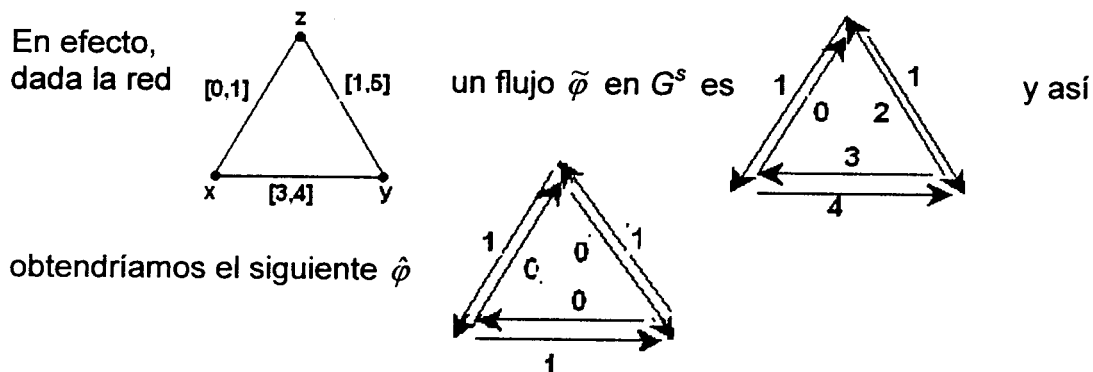
Además, los flujos $\hat{\varphi}$ y φ , tienen igual valor

Una posible aplicación de lo antedicho sería :

Dada una red vial, y conocidas las "capacidades de tránsito" de cada tramo, se quiere saber cual es el mayor número de vehículos que pueden recorrerla desde A hasta B, y cual debe ser el sentido de circulación que para ello deben imponerse a sus tramos.

Resumiendo, dada la red, ¿ donde deben ponerse los indicadores "no avanzar" para maximizar el flujo desde A hasta B ?

Nótese que si en el grafo G hay cotas de canalización inferior $b_i > 0$ las correspondencias que acabamos de indicar pueden, o no, existir.



En este caso, en la arista $[x, y]$ los valores $0, 1$, no satisfacen la canalización $[3, 4]$, pero en cambio para la arista $[x, z]$ no habría dificultades.

Luego :

Si existen cotas de canalización inferior no nulas la substitución de cada arista de G , por un par de arcos opuestos, y la "compensación" entre los valores $\hat{\varphi}(u_i) \setminus \hat{\varphi}(\tilde{u}_i)$ en G^s para decidir sobre $\varphi(u_i)$ en G , no siempre es aceptable.

Por lo tanto, y de acuerdo con lo señalado en [FordF62]-Cap.II, para el caso de admitir cotas de canalización inferior no nulas existe una diferencia esencial entre los problemas de flujo para el caso dirigido y el no dirigido.

En [Hu82] se estudia, para el caso de "redes no dirigidas" la determinación de "flujos maximos entre todos los pares de vértices" y se analiza (en pág.62-82) el Algoritmo de Gomory-Hu [GomH60/75] propuesto al efecto.

Ver también [BerGH 62]-Cap.10-1, [Ruhe91], [Sim62], [Walt84].

En [Hu69] se dió un algoritmo para hallar, en un número finito de iteraciones, flujos máximos en redes no dirigidas, aún con cotas de canalización que admitan irracionales, y se afirmó que el mismo podía ser aplicado también al caso dirigido.

En [Pon72] se mostró que esta última afirmación es incorrecta y se propuso una modificación que soluciona el inconveniente.

11.7. PROBLEMAS COMBINATORIOS

De la siguiente afirmación pueden inferirse importantes resultados de tipo combinatorio. Varios de ellos fueron enunciados en 1 Cap.2, y en Cap.7.2

Teorema de los flujos enteros.

Si en una red que admite flujos $f-s$ todas sus cotas de canalización están dadas por enteros, existen flujos $f-s$ máximos (mínimos) que son enteros.

Una forma constructiva de justificar esta afirmación fue indicada en pág. 217.

Este teorema, que no es válido para el caso de los *multiflujos*, puede también demostrarse recurriendo a la Programación Lineal, pues la matriz asociada al problema es *totalmente unimodular* (todas sus submatrices cuadradas tienen determinante $0, +1, -1$).

Alguna poca información sobre estas matrices y sobre resultados que las vinculan con la Teoría de Grafos fue dada en 1 pág.66 / 67.

Consultar al respecto, además de la bibliografía allí indicada, [Ful59/66], [HamR68], [Hof60/76/79], [Hu69], [GonM79]-Anexo2, [Sim62]-Cap.11-3.

Además, en [Law76]-Cap.4-12 se dan varias caracterizaciones de las matrices unimodulares y se observa que la metodología del "*out of kilter method*" – sobre el cual volveremos en pág.231– permite dar una demostración constructiva del precedente teorema de los flujos enteros.

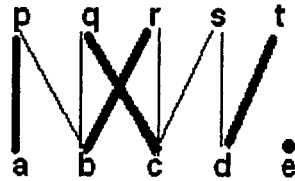
Reiterando ideas de [FordF62], ya seguidas en [Chi93]-Cap.5, demostraremos seguidamente uno de los resultados citados en Cap.7.2, a saber el

– *Teorema de König-Egerváry*

- 1) En cada grafo bipartido el número máximo de aristas independientes dos a dos (es decir, no adyacentes entre sí) es igual al número mínimo de vértices de un soporte de su conjunto de aristas. [Kön31]
o equivalentemente

2) En una matriz de componentes 0,1, el número máximo de componentes 1 ubicadas en líneas (filas o columnas) distintas coincide con el número mínimo de líneas que contienen al total de las 1. [Ege31]

Ejemplo :

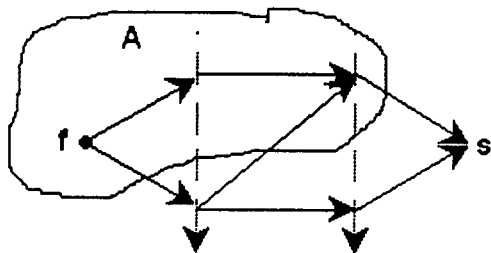


	p	q	R	s	t
a	<u>1</u>	.	.	.	.
b	1	1	<u>1</u>	.	.
c	.	<u>1</u>	1	1	.
d	.	.	.	1	<u>1</u>
e	.	.	.	.	.

En cuanto a la demostración notemos, primeramente, que de la biyección entre grafos bipartidos y matrices 0, 1, resulta inmediata la equivalencia entre 1) y 2).

Por otro lado, como el número máximo de aristas independientes es necesariamente menor o igual que el número mínimo de vértices de sus soportes para justificar lo afirmado bastará ver que la igualdad se alcanza.

Para ello aplicaremos el Teorema Fundamental, a la red construida a partir del bipartido $G = (V_1 \cup V_2, U)$ esquematizado a continuación.



con arcos (f, x) ; $x \in V_1$ canalizados $[0, 1]$
 " " (y, s) ; $y \in V_2$ " $[0, 1]$
 " " $(x, y) \in U$ " $[0, \infty]$

En la red así construida se tiene que

Todo cociclo U_A de valor mínimo, que separe f de s , carece de arcos de la forma (x, y) con $x \in (A \cap V_1)$; $y \in (\bar{A} \cap V_2)$.

Caso contrario, de contenerlos, el valor de U_A sería ∞ .

La carencia de tales arcos permite afirmar que en consecuencia, todo arco de G incide en $S = (\bar{A} \cap V_1) \cup (A \cap V_2)$, y por lo tanto que S es soporte de U .

Como $f \in A$, $s \notin A$, la cardinalidad de S coincide con el valor del cociclo U_A que, por hipótesis, es mínimo.

Por lo tanto, S es soporte mínimo y tiene $|\bar{A} \cap V_1| + |A \cap V_2|$ vértices.

Finalmente, como el número máximo de arcos independientes coincide con el valor de todo flujo máximo el Teorema Fundamental permite completar la demostración buscada.

Además de los *Teoremas de Dilworth* (sobre descomposición de conjuntos ordenados), de *Menger* (sobre caracterizaciones de h -conexos), y de *Hall* (sobre sistemas de representantes), a los cuales nos hemos referido en Cap.7.2, otro importante resultado combinatorio ya citado en 1 pág.37, que también puede demostrarse recurriendo a la Teoría de Flujos, y del cual en [Die96]-Cap.2 se dieron tres demostraciones, es el :

– *Teorema de König-Hall*

El bipartido $(P \cup Q, \Gamma)$ admite un acoplamiento si y sólo si su deficiencia es nula; o sea si y sólo si $|A| \leq |\Gamma(A)|$ cualquiera sea $A \subseteq P$.

El acoplamiento será perfecto si y sólo si $|P| = |Q|$. [Kön36]

o equivalentemente

La aplicación $\Gamma : P \rightarrow Q$ contiene una función inyectiva f si y sólo si para todo $A \subseteq P$ se tiene que $|A| \leq |\Gamma(A)|$.

Si además $|P| = |Q|$ y sólo entonces, f es biyección. [HallP35]

Corolario :

Un digrafo (V, Γ) carece de 1-difactores si y sólo si existe al menos un conjunto $A \subseteq V$ tal que $|A| > |\Gamma(A)|$.

De esta afirmación adecuadamente reformulada (ver 1 pag.62) y puesto que toda matriz cuadrada puede realizarse como matriz precedencia de cierto multidigrafo es factible, según se observó en 1 pág.152, afirmar que :

Dada una matriz M de orden n , todos los monomios del desarrollo de su determinante son nulos si y sólo si M contiene alguna submatriz nula de tipo $p \times q$ tal que $p + q > n$.

En [Chi93]-Cap.5, donde se reunió información relativa a estos resultados combinatorios, se dio además una demostración de la equivalencia entre el precedente resultado de König–Hall y el de Hall (de existencia de Sistemas de Representantes) citado en 7.2.

Creemos oportuno observar que la ya mencionada equivalencia entre los Teorema de Ford y Fulkerson, y de Hoffman, puede extenderse, incluyendo además de los teoremas combinatorios que acabamos de citar, el de Menger dado en 7.2 y el de Gale, a enunciar en pág.222.

11.8. PROBLEMAS DE ASIGNACION (DISTRIBUCION)

Uno de los típicos “*problemas de asignación*” es el siguiente

$\mathcal{P}_1$

Dados, un conjunto de p obreros y otro de q tareas, y conociendo para cada obrero cuales son las tareas que es capaz de realizar hallar una asignación que respete las restricciones y maximice el número de pares obrero-tarea que puedan concretarse simultáneamente.

Se sobreentiende que sólo es posible asignar a cada obrero una de las tareas para las que es apto, y a cada tarea uno de los obreros capaces de ejecutarla.

Entre este problema “de asignación” y el “de acoplamiento” a que se refiere el Teorema de König-Egerváry hay notorias semejanzas. Para resolverlo bastará construir una red similar a la utilizada para demostrar dicho teorema.

Más precisamente, bastará recurrir a una red $\mathcal{G} = (f \cup s \cup V_1 \cup V_2, U)$ de arcos (f, i) para cada $i \in V_1$, de arcos (j, s) para todo $j \in V_2$, y de arcos (i, j) en $V_1 \times V_2$. si y sóloamente si el obrero i es apto para la tarea j ; con todos los arcos canalizados $[0, 1]$.

Todo flujo $f - s$ entero dará una de las posibles asignaciones, y su valor el número de pares obrero-tarea que la componen.

Estos problemas también se pueden formalizar directamente en matrices C de componentes (c_{ij}) que se clasificarán en “*admisibles*” y “*no admisibles*”.

Bastará al efecto convenir en poner

- $c_{ij} = 1$ (componente admisible) si el obrero i es capaz para la tarea j .
- $c_{ij} = 0$ (“ no admisible) caso contrario.

Así, las componentes admisibles estarán en correspondencia biyectiva con los arcos de $V_1 \times V_2$ en la red $\mathcal{G}$.

Conviniendo en designar “*acoplamiento admisible*” a cada conjunto de componentes admisibles de C que determine un acoplamiento entre subconjuntos de filas y de columnas resulta que para resolver $\mathcal{P}_1$ bastará hallar *acoplamientos admisibles maximales* en C , o equivalentemente, conjuntos maximales de arcos independientes dos a dos en $V_1 \times V_2$.

Para resolverlos podríamos recurrir al algoritmo que enunciaremos a continuación, y que es habitualmente denominado "Método Húngaro". [Kuhn54/55/56]. Su idea directriz es simple, pero su enunciación compleja, se basa en elegir un acoplamiento admisible inicial y luego extenderlo reiteradamente;

Algoritmo húngaro para hallar un acoplamiento admisible maximal.

Sea $C = (c_{ij})$ una matriz que admite "acoplamientos de admisibles".

- 1) Se elige un acoplamiento admisible y se etiquetan con 1 las componentes que lo integran. Si en cada fila de C hay un 1 se ha determinado un acoplamiento maximal. Caso contrario se pasa a 2).
- 2) a) Se marca con * toda fila de C que carezca de 1 y se aplica b)
b) Si i es una de las filas marcadas *, se marcan i todas las columnas de C aún no marcadas que tienen, en la fila i , componentes admisibles no etiquetadas con 1.

Se reitera b) para las restantes filas marcadas * aún no exploradas, y una vez agotadas las posibles reiteraciones se pasa a 3).

- 3) Si h es una de las columnas marcadas por aplicación de 2 b) caben dos posibilidades :
– si en h no existe componente etiquetada 1 se pasa a 4).
– caso contrario se marca h la fila del 1 en cuestión y se reitera 2b) para dicha fila

Se repite 3) hasta que no sea posible continuar las marcas, en cuyo caso se ha determinado un acoplamiento maximal. o bien hasta marcar una columna carente de 1, en cuyo caso se pasa a 4.

- 4) Se ha marcado una columna que carece de 1, pero etiquetando 1 una de sus componentes admisibles es factible construir un acoplamiento de mayor valor que el de partida. La secuencia que lleva al nuevo acoplamiento se determina siguiendo, en forma egresiva, las marcas.

Más precisamente, si q es la última columna marcada, y tiene marca p se coloca un 1 en $c_{p,q}$, se borra el 1 que estaba en la fila p , y supuesto que éste estuviera en $c_{p,r}$ se coloca un 1 en la columna r y en la fila que había permitido marcarla.

Esta operación se reitera hasta llegar a una de las filas marcada inicialmente con *.

- 5) Ahora el número de componentes marcadas con 1 ha sido aumentado en una unidad. Se borran todas las marcas y se recomienza por 1).

Para otras versiones : [BonM76], [FauRT76], [HamR68], [Kau62/68b], [Sim62].

La resolución del "time table problem", (ver [BonM76]-Cap 6-3) que se presenta por ejemplo al confeccionar horarios de clases es difícil. En [Lio66] se lo estudia aplicando el Algoritmo Húngaro, y en [Wer69] apelando a la teoría de flujos.

Véase que :

- satisfacer la etapa 1) equivale a determinar un flujo entero en G .
- las filas que resultan marcadas * al aplicar 2a) corresponden, en G , a los vértices i para los cuales el flujo del arco (f, i) es nulo,
- las columnas marcadas $\bar{u}$ al aplicar 2b) corresponden a vértices finales de arcos (i, j) con $\phi_{i,j} = 0$.

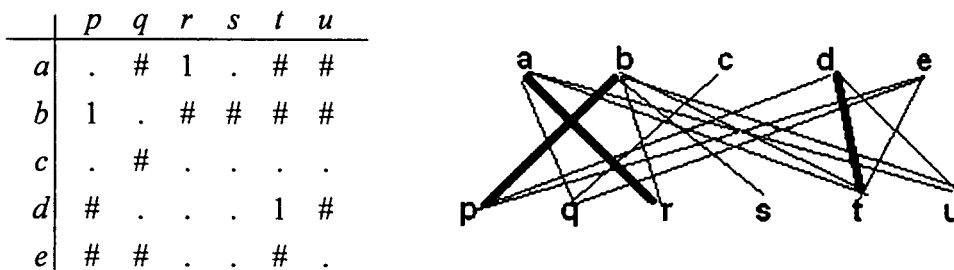
Ejemplo

Sea $C =$

	p	q	r	s	t	u
a	.	#	#	.	#	#
b	#	.	#	#	#	#
c	.	#	.	.	.	.
d	#	.	.	.	#	#
e	#	#	.	.	#	.

donde # indica componente admisible

Por aplicación de la etapa 1) puede elegirse el acoplamiento (a,r) , (b,p) , (d,t) de valor tres que visualizamos en



Por aplicación de 2a) marcaremos con * las filas c , e , y podríamos marcar bien con $\underline{c}$ la columna q , o bien con $\underline{e}$ las columnas p , q , t .

En ambos casos la marca 1 agregada a la columna q nos permitirá extender el acoplamiento anterior al (a,r) , (b,p) , (c,q) , (d,t) , de valor cuatro.

Una nueva aplicación del algoritmo nos lleva a marcar con * la fila e , y con $\underline{e}$ las columnas p , q , t .

Ahora, en todas las columnas etiquetadas $\underline{e}$ hay un 1.

Eligiendo al aplicar 3) la columna p , marcaremos $\underline{p}$ la fila b , y luego (al aplicar 2b) etiquetaremos $\underline{b}$ a las columnas r, s, t, u .

	p	q	r	s	t	u	
a	.	#	1	.	#	#	
b	1	.	#	#	#	#	$\bar{p}$
c	.	1	.	.	.	.	
d	#	.	.	.	1	#	
e	#	#	.	.	#	.	*
	$\bar{e}$	$\bar{e}$	e		$\bar{e}$		
			$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	

Como se ha marcado la columna s , que carece de componentes 1, por aplicación de 4) se etiqueta 1 a la componente (b, s) , se elimina el 1 de (b, p) , y se etiqueta 1 la componente (e, p) .

Así, en el grafo asociado, el arco (b, p) es substituido por los arcos (b, s) , (e, p) , y queda determinado el acoplamiento (flujo) máximo (a, r) , (b, s) , (c, q) , (d, t) , (e, p) de valor cinco.

La secuencia de componentes admisibles que, en el ejemplo anterior, nos permitió pasar de un acoplamiento de valor 4 a otro de valor 5 puede reinterpretarse en G como una "cadena alternada"; de arcos adelante (e, p) , (b, s) con flujo 1, y arco atrás (b, p) con flujo nulo.

En general, a dichas secuencias de componentes admisibles podrán asociarse cadenas alternadas $u_1, u_2, \dots, u_L$ con L impar, tales que $\varphi(u_i) = 0$ si i es par y $\varphi(u_i) = 1$ es impar. En ellas sus arcos adelante se alternan con sus arcos atrás.

Problemas de asignación más reales y de una mayor complejidad que $\mathcal{P}_1$ son aquellos en los cuales a cada par obrero-tarea (profesor-aula \ \ depósito-cliente \ \ etc.) se le asocia un "valor $c_{i,j}$ " que mide el costo (eficiencia, rendimiento, índice de confiabilidad, tiempo de adaptación, etc) que implicaría asociarlos,

Frecuentemente pueden verse como problemas de "acoplamiento valuado" y resolverse aplicando variaciones del Método Húngaro.

Entre dichos problemas caben :

los de Tipo $\mathcal{A}$)

Hallar una asignación que "optimice su valor total"; es decir, hallar un acoplamiento admisible tal que la suma de los valores que corresponden a los pares que lo componen sea máxima (mínima) entre todas las posibles.

los de Tipo $\mathcal{B}$)

Hallar, de entre las distintas asignaciones posibles una en la que sea mínimo el mayor (o máximo el menor) de los valores involucrados en los pares que las componen.

Dentro de los de Tipo $\mathcal{A}$) está el siguiente "problema de asignación valuada".

$\mathcal{P}_2$

Dados un conjunto de p obreros, otro de q tareas, y conociendo el costo (la eficiencia) $c_{i,j}$ de asignar al obrero i la tarea j , hallar una asignación obreros-tareas que minimice el costo (maximice la eficiencia) total.

Si todas las $c_{i,j}$ tienen un mismo valor se reencuentra el problema $\mathcal{P}_1$.

Nótese que la formalización precedente es válida aún en el caso en que a ciertos obreros no se le puedan asignar determinadas tareas.

Basta para ello convenir que en tales casos se dará a los correspondientes $c_{i,j}$ valores que aseguren no serán elegidos.

Así por ejemplo, la imposibilidad de asignar al obrero o_i la tarea t_j se puede formalizar, si se buscan mínimos, con $c_{i,j}$ suficientemente grande (lo notaremos $c_{i,j} = \infty$).

Un buen algoritmo para resolver esta cuestión fue propuesto en [Kuhn55] y en [Mun57]. En [BonM76] se lo estudia siguiendo ideas de Edmonds. (no publicado).

Dentro de los problemas de tipo $\mathcal{B}$) cabe el siguiente

$\mathcal{P}_3$

Supongamos que a cada componente (i, j) de cierta tabla cuadrada se asigna un valor $c_{i,j}$ que mide la eficiencia (o la confiabilidad, o el rendimiento) del obrero i al realizar la tarea j , y que se quiere hallar una asignación que ocupe a todos los obreros, que permita realizar todas las tareas, y que maximice la eficiencia mínima.

Para resolverlo debe hallarse una *asignación* que maximice el mínimo de los valores c_{ij} incluidos en ella, y esto equivale a determinar una biyección B que permita alcanzar el $\max (\min (c_{ij}))$, presuponiendo que $j = B(i)$.

Para ello elegiremos sucesivas biyecciones $B_0, B_1, \dots$, etc., a cada una de las cuales asociaremos "*componentes B_{h+1} admisibles*"; es decir, componentes cuyos respectivos valores superen al $\max (\min (c_{ij}))$, supuesto $j = B_h(i)$

Ejemplo

		p	q	r	s	
	a	1	3	0	5	
Dada	b	2	3	4	3	y elegida la biyección
	c	5	4	6	1	
	d	5	2	4	3	

i	a	b	c	d
$B_0(i)$	q	p	r	s

se tiene que $\min (c_{ij})$ con $j = B_0(i)$ es 2

Para mejorar este resultado buscaremos una biyección restringida a las componentes B_1 admisibles; es decir, a aquellas que tienen asignados valores mayores que 2.

Ellas son las indicadas con * en la tabla que sigue.

	p	q	r	s	
a	.	*	.	*	
b	.	*	*	*	
c	*	*	*	.	
d	*	.	*	*	

y si se elige

i	a	b	c	d
$B_1(i)$	q	s	r	p

se tendrá que $\min (c_{ij})$ con $j = B_1(i)$ es 3

Ahora las componentes B_2 admisibles son

	p	q	r	s	
a	.	.	.	*	
b	.	.	*	.	
c	*	*	*	.	
d	*	.	*	.	

y eligiendo la biyección

i	a	b	c	d
$B_2(i)$	s	r	q	p

se tiene $\min (i, B_2(i)) = 4$, que no es mejorable.

Por la operatoria seguida, el valor final es independiente del de los intermedios y en cada caso pueden hallarse todas las asignaciones que mejoran una ya obtenida.

Otro problema de tipo $\mathcal{A}$) es el siguiente, sobre el cual volveremos en 11.9.

$\mathcal{P}_4$ Supongamos :

- que para cierto producto se tiene un conjunto F de fábricas (fuentes) y otro S de clientes (sumideros)
- que cada fabrica i tiene una capacidad de aprovisionamiento de $a(i)$ unidades, y cada cliente j una demanda $d(j)$ de ellas, todas en un mismo lapso de tiempo.
- que además se conoce la red de distribución (V, U) a usar, el intervalo $[b_i, c_i]$ de canalización de cada tramo u_i , y el "costo por circulación" c_{ij} de cada unidad del producto que fluya por el arco (i, j) .

¿ Bajo que condiciones podrá asegurarse que es factible satisfacer las demandas, y cómo hallar una tal distribución cuyo "costo por circulación" sea mínimo ?

Supondremos al efecto que, como es habitual, el "costo por circulación" resulta de $\sum \varphi_{i,j} \cdot c_{i,j}$, donde φ_{ij} indica la magnitud del flujo que "recorre" el arco (i, j) .

Para encarar su resolución consideraríamos la

Red de aprovisionamiento y demanda $G = (V', W)$ con

$$\begin{array}{l|l} \text{vértices} & V = F \cup S \cup T ; (F \text{ fuentes, } S \text{ sumideros, } T \text{ de tránsito,} \\ & \text{eventualmente vacío)} \\ & V' = f \cup s \cup V, \quad f \notin V, \quad s \notin V \\ \hline \text{arcos} & W = U \cup \{(f, i)\} \cup \{(j, s)\} ; \quad i \in F, \quad j \in S \\ & \text{los } (f, i) \quad \text{canalizados } [0, a(i)] \\ & \quad " \quad (j, s) \quad \quad " \quad [d(j), \infty] \\ & \quad " \quad u_i \in U \quad \quad " \quad [b_i, c_i] \end{array}$$

Obviamente, para poder satisfacer todas las demandas es necesario que

$$a(F) = \sum_{x \in F} a(x) \geq \sum_{y \in S} d(y) = d(S) \quad \#$$

Extendiendo la función aprovisionamiento con $a(x) = 0$ a todo vertice $x \notin F$ y la función demanda con $d(y) = 0$ a todo $y \notin S$, tendríamos que :

- Si $F \subseteq A : a(F) = a(A)$, y si $S \subseteq A : d(S) = d(A)$

Una respuesta parcial de la pregunta anterior es la dada por el siguiente

Teorema de Factibilidad de Gale. [Gale57] .

Si $\mathcal{G} = (V \cup f \cup s, W)$ es una tal red de aprovisionamiento y demanda, será factible satisfacer sus restricciones si y sólo si para todo $A \subseteq V$ se cumple $d(A) + b(A, \bar{A}) \leq a(A) + c(\bar{A}, A)$ ##

Visto que cualquiera sea $A \subseteq V$, $f \notin A$ y $s \notin A$ la condición ## se puede reformular diciendo :

lo que debe salir de A no puede superar a lo que pueda entrar en A.

Que ella es condición necesaria es fácil de entender.

La importancia del resultado que nos ocupa reside en que ella también es condición suficiente.

Recordemos que según señalamos en pág.222 el precedente Teorema de Gale es equivalente del Teorema Fundamental y del de Existencia de Flujos Canalizados, así como de otros varios de índole combinatoria.

11.9. PROBLEMAS DE TRANSPORTE SIMPLE (HITCHCOCK)

Numerosas cuestiones propias de la Investigación Operativa pueden abordarse recurriendo a formalizaciones que llevan a problemas de tipo $\mathcal{P}_4$.

La búsqueda de soluciones nos llevará a determinar "flujos $f - s$ con mínimo costo por circulación".

Para resolverlos suele recurrirse a alguno de los dos siguientes esquemas.

- 1) Determinar, de entre los flujos $f - s$ de valor φ_0 , uno que maximice (minimice) su costo por circulación.
- 2) Determinar, de entre los flujos $f - s$ con costo por circulación predefinido, uno que maximice (minimice) su valor φ_0 .

Esbozos de algoritmos para resolverlos pueden verse en [Hu82]-Cap.2-4.

Aquellos para los cuales la red de distribución es bipartida suelen decirse "*Problemas de Transporte Simple*" y también "*Problemas de Hitchcock*", en recuerdo de quien en [Hit41] formalizó y continuó estudios previos de Appel [App28], y de Monge [Mon81].

Ellos fueron luego continuados en [Kan42], [Koo49/51] y [KooR51].

Otras formas de abordar la problemática podrían verse en [Iri60] y [IvaR67].

De los diversos métodos que fueron propuestos para resolverlos algunos serán ejemplificados poco más adelante.

Varios son heurísticos y llevan a soluciones que son óptimas sólo ocasionalmente, pero que siempre pueden adoptarse como soluciones a mejorar.

Los restantes llevan a soluciones óptimas y pueden agruparse en dos clases :

i) — la de los basados en el Método Simplex de la Programación Lineal, debido a Dantzig ([Dan51a/51b/55]), y en los trabajos de Charnes-Cooper [CharC54]

Suelen decirse de tipo "*stepping stone*" y a ellos está dedicado el Cap.11 de [Sim62].

ii) — la de aquellos que se han desarrollado a partir de [FordF55/56a/56b], y, recurren a la Dualidad en la Programación Lineal

Suelen decirse de tipo "*primal-dual*" y a ellos están dedicados, por ejemplo, los Cap.14 y 15 de [Sim62] y el Cap.5 de [Sak84b].

Ver [Brig62], [DanFF56],[Flo53], [Jew58], [Sim63/69].

Cabe también mencionar el algoritmo de tipo primal-dual dado en [Ful61] bajo el nombre "*out of kilter*". (o "*des arcs non conformes*" [GonM79]) y que en [Agui90] Cap.6 se dice "*de los arcos fuera de orden*".

El mismo, que extiende al dado en [Jew58], y al propuesto en [FordF57], es analizado también en [BerGH62], [GonM79], [Law76] y [Sim63].

Ver también [BazJ77], [Brig52], [Doñ82], [Gass58], [HofM63], [Vaj58/60]

En [JauMa71] se ejemplifican :

- en Cap.8-3 (pág.200-222) el uso de seis de los métodos heurísticos, y
- en Cap.8-4 (pág.222-268) el de cinco de los métodos basados en resultados de la Programación Lineal. Entre éstos, el "primal-dual" de Ford y Fulkerson.

Del "Problema del Transporte Simple" caben diversas modificaciones, y generalizaciones que no consideraremos.

Algunas son tratadas en [AvoB79], [Gass58], [JauMA71], [MagCS62], [Sim62].

También omitiremos el análisis de problemas más generales, entre las cuales tendrían cabida algunos que podrían presentarse en redes no necesariamente bipartidas, y otros en los cuales los "costos por circulación" no fueran proporcionales al valor de lo que fluye por cada arco.

Tampoco consideraremos problemas que llevarían a estudiar problemas duales de los anteriores, y en particular al "*Problema General de las Tensiones*".

En lo que sigue sólo nos referiremos a problemas de tipo $\mathcal{P}_4$ en los cuales se supondrá :

- que hay p fábricas y q clientes,
- que desde cada fábrica puede llegarse a cada uno de los clientes,
- que no hay restricciones sobre la cantidad máxima que es posible transportar por las distintas rutas,
- que el costo por circulación en cada una de éstas es proporcional a la cantidad transportada.

Para estudiarlos razonaremos sobre una "red de aprovisionamiento y demanda" $G = (f \cup s \cup V, W)$, con $f \notin V, s \notin V$, generada a partir del bipartido completo $K_{p,q} = (V_1 \cup V_2, U)$.

Sus arcos (f, i) , $1 \leq i \leq p$, se supondrán canalizados $[0, a_i]$, y sus arcos (j, s) , $1 \leq j \leq q$, canalizados $[d_j, \infty]$.

En todos estos supondremos un costo por circulación nulo.

En cambio los arcos $(i, j) \in U$ se canalizarán $[0, \infty]$, y a ellos se asignará un costo por circulación $c_{i,j}$ representativo del que corresponde a dicho arco por cada por cada unidad que lo recorre.

Resolver la cuestión planteada equivale a determinar en una red de aprovisionamiento y demanda un flujo $f-s$ de valores $\varphi_{i,j}$ que resuelva el siguiente

Problema de Programación Lineal.

$$\min. \sum_{(i,j)} \varphi_{i,j} \cdot c_{i,j} \quad \text{supuestos } (i,j) \in U ; \quad \sum_{j=1}^q \varphi_{i,j} \leq a_i ; \quad \sum_{i=1}^p \varphi_{i,j} \geq d_j$$

Dentro del esquema anterior se pueden incluir casos en los que ciertos pares fábrica—cliente no están permitidos. Para ello bastaría asignar al correspondiente arco un costo suficientemente elevado, o canalizarlo $[0, 0]$.

Nótese que :

- a) – si $\sum d_j = 0$ la solución óptima es el flujo nulo.
- b) – como es posible ir de cada fábrica a cualquier cliente, y no hay restricciones de capacidad máxima en las rutas, una condición necesaria y suficiente para la existencia de solución es $\sum a_i \geq \sum d_j$.
- c) – siempre podrá suponerse $A = \sum a_i = \sum d_j = D$, y así llevar el problema a una “formalización estándar”.

En efecto, si de acuerdo con los datos iniciales el volumen de aprovisionamientos A' fuera mayor que el de demandas D' bastaría suponer la incorporación de una demanda ficticia $d_f = D' - A'$ con costos c_{ij} suficientemente elevados, que aseguren no serán elegidos.

Análogamente, para el caso $A' < D'$ bastará el agregado de un aprovisionamiento ficticio $a_f = A' - D'$ y costos c_{fi} tan altos como necesarios para evitar que sean tomados.

En ambos casos la solución buscada resultará de la obtenida tomando en cuenta estos agregados, e ignorando luego los valores que les están asociados.

- d) – visto que el sostén de $\mathcal{G} - \{f \cup s\}$ es el grafo $K_{p,q}$ y que las “soluciones básicas” se corresponden con sus árboles cubrientes resulta que cada una de ellas contendrá $(p + q - 1)$ valores $\varphi_{i,j} \neq 0$, con al menos un valor no nulo en cada una de las filas, y de las columnas.

Así entonces, elegida una “solución básica S”, cada $\varphi_{i,j} = 0$ corresponde a una cuerda del árbol cubriente asociado a S, y cada una de éstas, agregada al árbol, da lugar a un ciclo que está unívocamente determinado, y diremos “ciclo alternado”.

En pág.239 veremos que estos “ciclos alternados” se corresponden con “ciclos de modificación del costo por circulación”.

- e) – si $\sum a_i = \sum d_j$ siempre existen “soluciones básicas”, y si en cada etapa intermedia del proceso se satura una única restricción (tanto aprovisionamiento como demanda) la nueva solución obtenida también será “básica”

Si en alguna etapa se llegara a una "solución no básica" el problema se modificaría procediendo de acuerdo con lo que sigue.

Supuesto que w es un valor suficientemente pequeño bastaría incrementar en $q.w$ el aprovisionamiento a_1 ; en w el de cada una de las q demandas, y en aplicar el método a dar en pág.236 para solucionar esta nueva situación.

Para resolver el Problema de Hitchcock se han propuesto diferentes procedimientos iterativos, que aplicados a problemas cuyos datos son números enteros permiten hallar soluciones a valores enteros.

Seguidamente ejemplificaremos la aplicación de cuatro métodos.

Dos de ellos son heurísticos. Los otros dos están fundados, respectivamente, en el Método Simplex de la Programación Lineal, y en propiedades Primitives-Duales de la Programación Lineal.

Todos serán aplicados a un mismo problema.

De entre los procesos heurísticos ejemplificaremos el uso de los métodos denominados "*de la Esquina Nor-Oeste*" y "*del Mínimo Costo según columnas*".

Ellos se diferencian, en esencia, sólo en el criterio usado para elegir los sucesivos $\varphi_{i,j} \neq 0$.

En el Método de la Esquina Nor-Oeste se opta por seguir el orden "inducido por los índices de filas y columnas" de la tabla de costos, y en el restante se respeta el orden que inducen las magnitudes de los distintos costos $c_{i,j}$.

Por ello, aunque algo más complicado, podría ser preferido.

11.9.1. Método de la Esquina Nor-Oeste

Este método es cómodo y rápido, pero de acuerdo con lo ya dicho, sólo ocasionalmente da una solución óptima.

Además, y según veremos, la solución a la cual se llega al aplicarlo puede depender de la forma en que se dispusieron los datos.

Un análisis del mismo puede encontrarse en [Gass78]- Cap.10.

Consiste en ir adoptando, a partir de la esquina superior izquierda de la tabla (de ahí el nombre del método) valores $\varphi_{i,j}$ que satisfagan sucesivos "aprovisionamientos y demandas residuales".

Ejemplificaremos su uso aplicándolo a la siguiente tabla de costos $c_{i,j}$, presuponiendo aprovisionamientos a_i , $1 \leq i \leq 3$, y demandas d_j , $1 \leq j \leq 4$.

		d_j			
		3	3	6	2
a_i	5	2	3	2	4
	5	4	3	2	1
	4	5	6	4	3

como $\sum a_i = \sum d_j = 14$ hay soluciones.

Primeramente se elige $\varphi_{1,1} = 3 = \inf \{a_1, d_1\}$ con lo cual se satisface la demanda d_1 y queda un "aprovisionamiento residual" $\bar{a}_1 = 2$.

Luego se elige $\varphi_{1,2} = \inf(\bar{a}_1, d_2) = 2$ con lo cual se ha utilizado todo el aprovisionamiento de a_1 , y queda por satisfacer una demanda residual $\bar{d}_2 = 1$.

Ahora se elige $\varphi_{2,2} = \inf(a_2, \bar{d}_2) = 1$, con ello resulta satisfecha la demanda d_2 y resta un aprovisionamiento residual $\bar{a}_2 = 4$.

Reiterando el proceso anterior se obtiene finalmente el flujo dado en la siguiente tabla, en la cual (idem en lo que sigue) los $\varphi_{i,j} = 0$ se indican con .

$$\varphi = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 2 & . & . \\ \hline . & 1 & 4 & . \\ \hline . & . & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Dicho flujo respeta los aprovisionamientos, satisface las demandas, y su costo por circulación es $\sum_{i,j} c_{i,j} \cdot \varphi_{i,j} = 37$

Para mostrar que las soluciones obtenidas con este método pueden depender del orden en que se dieron los datos, constatemos que si los datos dados se hubieran dispuesto en la forma

		d_j			
		2	3	3	6
	4	3	5	6	4
a_i	5	4	2	3	2
	5	1	4	3	2

el método nos llevaría al flujo

2	2	.	.
.	1	3	1
.	.	.	5

de valor 39.

Si los datos se hubieran dispuestos de acuerdo con la tabla

		d_j			
		3	6	3	2
	5	2	2	3	4
a_i	4	5	4	6	3
	5	4	2	3	1

hubiéramos obtenido la solución **no** básica

3	2	.	.
.	4	.	.
.	.	3	2

Operando según se esbozó (pág.234) y aplicando el método a partir de la tabla

		d_j			
		$3+w$	$6+w$	$3+w$	$2+w$
	$5+4w$	2	2	3	4
a_i	4	5	4	6	3
	5	4	2	3	1

obtendríamos la solución básica

		$3+w$	$6+w$	$3+w$	$2+w$
	$5+4w$	$3+w$	$2+3w$	.	.
	4	.	$4-2w$	$2w$	.
	5	.	.	$3-w$	$2+w$

de valor $37 + 10w$.

11.9.2. Método del Mínimo Costo según columnas

Ejemplificaremos su uso aplicándolo al problema anterior, pero a partir de la siguiente tabla.

		d_j			
		2	3	3	6
a_i	4	3	5	6	4
	5	4	2	3	2
	5	1	4	3	2

Se elige, en la primera columna una cualesquiera de las componentes cuyo valor c_{ij} es mínimo. En nuestro caso debe elegirse $c_{3,1} = 1$.

Poniendo $\varphi_{3,1} = \min.(a_3, d_1) = 2$, se satisface la primera de las demandas, y queda un primer aprovisionamiento residual $\bar{a}_3 = 3$.

Obviamente, en la segunda columna el mínimo se alcanza con $c_{2,2}$.

Ahora, poniendo $\varphi_{2,2} = \min.(a_2, d_2) = 3$, se satisfará la demanda d_2 y quedará un aprovisionamiento residual $\bar{a}_2 = 2$.

El problema que aún queda por resolver puede representarse en la tabla

		$\bar{d}_j$			
		0	0	3	6
$\bar{a}_i$	4			6	4
	2			3	2
	3			3	2

El mínimo de la tercera columna se alcanza en la segunda y en la tercera fila, y hay dos opciones. Consideraremos ambos casos.

Caso a)

Si optamos por el de la tercera fila debemos poner $\varphi_{3,3} = \min.(\bar{a}_3, d_3) = 3$.

Se satisface así la demanda d_3 y agota el aprovisionamiento residual $\bar{a}_3 = 0$

Caso b)

Si optamos por el de la segunda fila eligiendo $\varphi_{2,3} = \min.(\bar{a}_2, d_3) = 2$ se agota el aprovisionamiento de la segunda fila, y queda una demanda residual $\bar{d}_3 = 1$

Ahora debemos considerar la cuarta columna, y en ambos habrá que considerar sólo uno de sus $c_{ij} = 2$.

En particular :

- en el caso a) luego de poner $\varphi_{2,4} = \min.(\bar{a}_2, d_4) = 2$ restan $\bar{a}_2 = 0$ y $\bar{d}_4 = 4$.
- en el caso b) poniendo $\varphi_{3,4} = \min.(\bar{a}_3, d_4) = 3$, quedan $\bar{a}_3 = 0$ y $\bar{d}_4 = 3$

Se llegan así a los flujos y restricciones que esquematizamos seguidamente

		$\bar{d}_j$			
		0	0	0	4
$\bar{a}_i$	4	.	.	.	.
	0	.	3	.	2
	0	2	.	3	.

caso a)

		$\bar{d}_j$			
		0	0	1	3
$\bar{a}_i$	4	.	.	.	.
	0	.	3	2	.
	0	2	.	.	3

caso b)

En ambas situaciones resta satisfacer una demanda de cuatro unidades y debe reiniciarse el proceso anterior, pero limitándolo a la submatriz inducida por las filas y columnas aún con aprovisionamientos y demandas positivas.

En el caso a) ella es la determinada por la intersección de la primera fila y de la cuarta columna.

Obviamente deberá elegirse $\varphi_{1,4} = 4$, y con ello dar por terminada la aplicación del proceso en cuestión.

Análogamente, para el caso b) tendremos que poner $\varphi_{1,3} = 1$, $\varphi_{1,4} = 3$, y dar por terminada la aplicación

Así entonces, los respectivos flujos finales obtenidos ahora serían :

$$\varphi_a = \begin{bmatrix} . & . & . & 4 \\ . & 3 & . & 2 \\ 2 & . & 3 & . \end{bmatrix}$$

$$\varphi_b = \begin{bmatrix} . & . & 1 & 3 \\ . & 3 & 2 & . \\ 2 & . & . & 3 \end{bmatrix}$$

El costo por distribución respetando φ_a es 37, pero optando por φ_b es 38.

El método que acabamos de aplicar es similar al de aquellos en los que se toman en cuenta "mínimos segun filas", o "mínimos de la tabla", y que sólo se diferencian por el criterio elegido para seleccionar los c_{ij} mínimos.

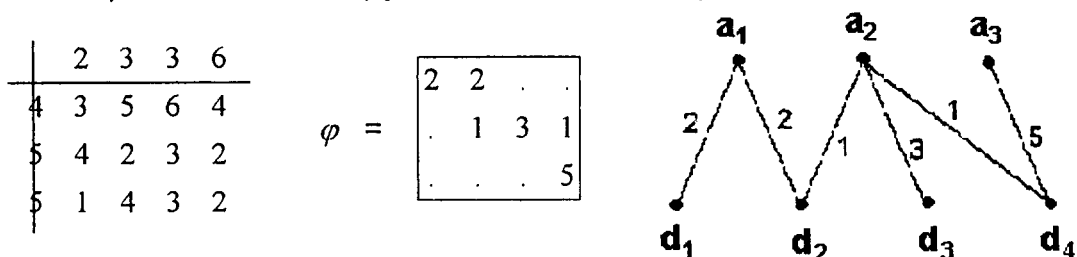
Todos ellos fueron ejemplificados en [JauMA71] y responden a la idea engañosa, y propia de los *algoritmos ingenuos* ("*greedy-algorithms*") de elegir sucesivamente valores $c_{i,j}$ "mínimos entre los aún aceptables".

11.9.3. Método (Simplex) de aproximaciones sucesivas

Para aplicar este método, a diferencia de lo ocurre con los anteriores, y en consonancia con lo que sucede en el Método Simplex es necesario el conocimiento de una solución inicial.

Supuesto que $\sum a_i = \sum d_j$ y que se conoce una "solución básica", el método se basa en la búsqueda de "ciclos alternados" (ver pág.233) que permitan, a partir de "variables no básicas" (son aquellas con $\varphi_{i,j} = 0$), mejorar el valor de la solución que está en consideración.

Para ilustrar su metodología volveremos al problema anterior, a partir de las siguiente tabla (de costos, aprovisionamientos y demandas), del siguiente flujo φ , (con costo por circulación 39) y del árbol cubriente que le está asociado.



Si al árbol cubriente que corresponde a tal el flujo se agrega la arista $[a_2, d_1]$, asociada con $\varphi_{2,1} = 0$, se construye el ciclo $[a_2, d_1], [d_1, a_1], [a_1, d_2], [d_2, a_2]$.

Aumentando en 1 los valores $\varphi_{2,1}$, $\varphi_{1,2}$; disminuyendo en 1 los $\varphi_{1,1}$, $\varphi_{2,2}$; y conservando los restantes $\varphi_{i,j}$ se determina el siguiente flujo $\tilde{\varphi}$ que también

satisface las restricciones del problema $\tilde{\varphi} =$

1	3	.	.
1	.	3	1
.	.	.	5

Este cambio implicaría un aumento del costo por circulación de $4-3+5-2 = 4$ unidades, y no sería conveniente para nuestro propósito.

Volviendo al flujo inicial, y operando como en el caso precedente, pero a partir de $\varphi_{3,1} = 0$, que está asociado a la arista $[a_3, d_1]$ se generaría el ciclo alternado $[a_3, d_1], [d_1, a_1], [a_1, d_2], [d_2, a_2], [a_2, d_4], [d_4, a_3]$.

Aumentando en 1 los valores $\varphi_{3,1}, \varphi_{1,2}, \varphi_{2,4}$; disminuyendo en igual cantidad los $\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}, \varphi_{3,4}$ y conservando los restantes se construirá un flujo cuyo costo incrementaría en $1-3+5-2+2-2 = 1$ el costo del inicial, y tampoco sería recomendable..

En cambio a partir de $\varphi_{1,4} = 0$ se tendría el $[a_1, d_4], [d_4, a_2], [a_2, d_2], [d_2, a_1]$.

Si se aumentan en 1 los $\varphi_{1,4}, \varphi_{2,2}$, se disminuyen en 1 los $\varphi_{1,2}, \varphi_{2,4}$ y se conserva el resto, se determina un flujo, con costo asociado $39 + (4-5+2-2) = 38$.

En general, si φ no es de costo mínimo, para al menos una de las componentes con $\varphi_{i,j} = 0$ (son "celdas no básicas") el ciclo alternado que le está asociado es de costo negativo y permite determinar otro flujo $\tilde{\varphi}$ que también satisface las restricciones, y conlleva un menor costo por distribución que el de φ .

A partir de $\tilde{\varphi}$ y reiterando el proceso tanto como necesario se llegaría, finalmente, a una solución óptima.

Pero, como el número de operaciones necesarias para lograrlo hace que este procedimiento sea, en general, poco recomendable se propone mejorarlo apelando al uso de "valores auxiliares".

Para ello

- 1) Supuesto que $\sum a_i = \sum d_j$ y que se está frente a una solución básica, se introducen "valores auxiliares" u_i, v_j ,
Son calculados, a partir de algún u_i (o de algún v_j) inicial, arbitrario, aplicando a cada par i, j con $\varphi_{i,j} \neq 0$ la expresión $u_i + v_j = c_{i,j}$.
Una vez elegido un valor auxiliar inicial, los diferentes u_i, v_j quedan bien determinados. Algunos pueden ser negativos.
- 2) Con dichos u_i, v_j , se determinan "costos marginales" $c'_{i,j} = u_i + v_j$.

Por el proceso seguido resulta claro que para las componentes con $\varphi_{i,j} \neq 0$; (son correspondientes a ramas de un árbol cubriente), se tendrá $c'_{i,j} = c_{i,j}$.

Veamos ahora como dichos *valores auxiliares* u_i, v_j permiten simplificar el precedente método para evaluar si un cierto ciclo alternado permite, o no, mejorar el costo por distribución.

En particular, para el caso del primero de los tres ciclos alternados que hemos indicado el aumento de costo implicado por cada unidad agregada a $\varphi'_{2,1} = 0$ se puede dar por $c_{2,1} - c_{1,1} + c_{1,2} - c_{2,2} = c_{2,1} - (u_1 + v_1) + (u_1 + v_2) - (u_2 + v_2) = c_{2,1} - (v_1 + u_2) = c_{2,1} - c'_{2,1}$.

Así entonces, la suma que toma en cuenta todos los costos del ciclo alternado generado a partir de $c_{2,1}$ se reduce a otra que sólo involucra a $c_{2,1}$ y el costo marginal $c'_{2,1} = u_2 + v_1$.

Es claro que si $c'_{2,1} > 0$ incrementar el valor $\varphi_{2,1}$ y modificar adecuadamente los restantes valores permitirá obtener un flujo que respete las restricciones y conlleve un menor costo de distribución que el implicado por φ .

Un mismo razonamiento vale en general.

Por lo tanto :

- 1) Si para cierto par i, j , con $\varphi_{i,j} = 0$ el *costo marginal* $c'_{i,j} = u_i + v_j$ es mayor que $c_{i,j}$ una modificación de flujo que llevara a un $\varphi'_{i,j} > 0$ implicaría una disminución del costo por distribución en $c'_{i,j} - c_{i,j}$, por cada unidad en $\varphi'_{i,j}$.
- 2) Si para todo par i, j , con $\varphi_{i,j} = 0$ se cumple $c'_{i,j} = u_i + v_j < c_{i,j}$ la solución alcanzada es optima.

Distintos ciclos alternados, correspondientes a otros $c'_{i,j} = c_{i,j}$ permitirían determinar otros flujos de igual costo que el que se esta analizando.

Resumiendo,:

Para mejorar las soluciones halladas bastan reiteradas aplicaciones de las siguientes etapas.

- 1) Supuesto $\sum a_i = \sum d_j$ y que se conoce una solución básica φ se determinan (a partir de cierto u_i arbitrario) para todos los i , y todos los j , valores auxiliares u_i, v_j tales que, si $\varphi_{i,j} \neq 0$, $u_i + v_j = c_{i,j}$,

- 2) Luego se evalúan, todos los "costos marginales" $c'_{ij} = u_i + v_j$.
 Si todo $c'_{ij} \leq c_{ij}$ la solución dada por φ es óptima.
 Caso contrario, supuesto $c'_{ij} > c_{ij}$ se elige un ciclo alternado que lo contenga, e incrementando $\varphi_{i,j}$ en $c'_{ij} - c_{ij} = \delta_{i,j}$ se determina un nuevo flujo φ' que mejora en tanto como $\varphi_{i,j} \cdot \delta_{i,j}$ la solución dada por φ .
- 3) Se vuelve a la etapa 1) aplicándola a φ' .

Notemos que :

- si durante el proceso indicado se genera una solución no básica, ésta deberá ser transformada en otra que sea básica (ver pág.236)
- si al aplicar 3) hay ciclos alternados asociados con diferentes $c'_{ij} > c_{ij}$ disjuntos dos a dos, pueden elegirse todos ellos simultáneamente.
- distintos ciclos alternados de valor nulo permitirían tomar en cuenta "criterios secundarios" (a saber : mejor distancia, más confiabilidad, menor riesgo, etc.)

Volviendo a nuestro ejemplo de pág. 239, y tomando como de referencia su flujo de costo por circulación 39, los diferentes valores u_i, v_j , calculados a partir de $u_1 = 0$ por aplicación reiterada de $u_i + v_j = c_{ij}$, para aquellos pares i, j , con $\varphi_{i,j} \neq 0$ se resumen en

		v_j			
		3	5	6	5
u_i	0	*	*		
	-3		*	*	*
	-3				*
	-3				

(los * corresponden a $\varphi_{i,j} \neq 0$)

de donde los c'_{ij} dados por

	3	5	6	5
0	*	*	6	5
-3	0	*	*	*
-3	0	2	3	*

(* significa $c_{ij} = c'_{ij}$).

Visto que $c'_{1,4} = 5 > c_{1,4} = 4$ existen flujos φ' con $\varphi'_{1,4} > \varphi_{1,4}$ que previa elección de ciclos alternados dan lugar a flujos que mejoran el costo por circulación.

Uno de ellos es el que resulta de incrementar $\varphi_{1,4}$, disminuir $\varphi_{1,2}$, aumentar $\varphi_{2,2}$ y disminuir $\varphi_{2,4}$.

Lo máximo que puede modificarse el flujo en dichas componentes es de 1 unidades, y esto lleva al siguiente flujo φ' de costo 38.

$$\varphi' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & . & 1 \\ . & 2 & 3 & . \\ . & . & . & 5 \end{bmatrix} \quad (. \text{ significa } \varphi_{i,j} = 0)$$

Eliendo nuevamente $u_i = 0$, los costos $c_{i,j}$, y los $\varphi'_{i,j} \neq 0$ permiten determinar nuevos valores marginales con los cuales se construye la tabla

		v_j									
		3	5	6	4			3	5	6	4
	0	*	*		*	de donde los $c'_{i,j}$	0	*	*	6	*
u_i	-3		*	*			-3	0	*	*	1
	-2				*		-2	1	3	4	*

Como el costo marginal $c'_{3,3} = 4$ supera al $c_{3,3} = 3$ es posible determinar un nuevo flujo con menor costo de distribución.

Para esto aumentaremos en una unidad los valores $\varphi'_{3,3}$, $\varphi'_{2,2}$, $\varphi'_{1,4}$, y disminuirémos en igual cantidad los $\varphi'_{2,3}$, $\varphi'_{1,2}$, $\varphi'_{3,4}$.

De donde, el flujo φ'' de valor 37.

$$\varphi'' = \begin{bmatrix} 2 & . & . & 2 \\ . & 3 & 2 & . \\ . & . & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Ahora, con $u_2 = 0$ y tomando en cuenta φ'' se determina la tabla

		v'_j									
		1	2	3	2			1	2	3	2
	2	*			*	de donde los $c'_{i,j}$	2	*	4	5	*
u'_i	0		*	*			0	1	*	*	2
	0			*	*		0	1	2	*	*

Como no hay costos marginales estrictamente mayores que los respectivos c_{ij} no hay ciclos alternados de valor positivo, y φ'' es de costo mínimo.

Puede verse que previa reordenación de filas y columnas en la tabla de costos el flujo φ'' coincide con hallado en la primera aplicación del Método de la Esquina Nor-Oeste

Los ciclos alternados de costo nulo asociados a componentes con $\varphi''_{i,j} = 0$ permiten deducir que este no es único entre los mínimos.

Otros dos flujos enteros de costo mínimo son

2	.	.	2
.	3	1	1
.	.	2	3

2	.	.	2
.	3	.	2
.	.	3	2

11.9.4. Método Primal - Dual

Sus fundamentos teóricos se remiten a la Teoría de Dualidad, de la Programación Lineal. Es de enunciación compleja y sólo veremos como aplicarlo.

Para justificaciones podrían consultarse [BazJ77], [Gass58], [GonM79], [Hu70], [JauMA71], [Sak84a/84b], [Sim62], [Vaj58/60].

El método consiste en :

Dados los datos $c_{ij} \geq 0$; $a_i \geq 0$, $d_j \geq 0$, con $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$,

hallar valores $\varphi_{i,j} \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ que resuelvan :

$$\text{el Problema primal } \mathcal{P} \left\{ \begin{array}{l} \text{minimizar } \sum_{(i,j)} \varphi_{i,j} \cdot c_{i,j} \\ \text{supuestos } \sum_j \varphi_{i,j} \leq a_i \quad , \quad \sum_i \varphi_{i,j} \geq d_j \end{array} \right.$$

$$\text{y su dual } \mathcal{P}^* \left\{ \begin{array}{l} \text{maximizar } \sum_j d_j \cdot \beta_j - \sum_i a_i \cdot \alpha_i \\ \text{supuestos } \beta_j - \alpha_i \leq c_{i,j} \quad , \quad \alpha_i \geq 0 \quad , \quad \beta_j \geq 0 \end{array} \right.$$

Las "variables duales" α_i , β_j juegan un rol análogo al de las tensiones (o diferencias de potencial) y pueden interpretarse como precios.

Por propiedades de la Dualidad en Programación Lineal, y si el problema planteado es de minimización, cualesquiera sean las soluciones $\underline{x}$ del problema primal, y $\underline{u}$ de su dual, el valor $\mathcal{P}(\underline{x})$ está acotado inferiormente por $\mathcal{P}^*(\underline{u})$.

Así entonces, si para un par de "soluciones duales" se satisface la igualdad entre sus respectivos valores, ambas son soluciones óptimas de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}^*$.

El proceso a seguir busca determinar, en forma alternada, sucesivas aproximaciones a soluciones de los problemas primal y dual.

Para ello, se aplicarían a partir de una "pre-solución" del dual, las siguientes tres rutinas.

1) Señalamiento de componentes (de arcos) admisibles

Dado un par de valores α_i, β_j que satisfagan las restricciones del problema dual fijar como *componentes admisibles* (*arcos admisibles*) sólo a los pares i, j , tales que $c_{ij} = \beta_j - \alpha_i$.

En la primera instancia pueden elegirse los $\alpha_i = \varphi_{i,j} = 0$, y los $\beta_j = \min_i c_{ij}$.

2) Elección de flujo.

Hallar un flujo máximo, que respete los datos, y admita valores $\varphi_{i,j} > 0$ sólo en las componentes (los arcos) *admisibles* (aquellas con $c_{ij} = \beta_j - \alpha_i$)

Más precisamente, resolver el siguiente problema auxiliar

$$\underline{\mathcal{P}} \left| \begin{array}{l} \text{maximizar} \quad \sum_{(i,j)} \varphi_{i,j} \\ \text{supuestos} \quad \varphi_{i,j} \geq 0, \quad \sum_j \varphi_{i,j} \leq a_i, \quad \varphi_{i,j} = 0 \quad \text{si} \quad c_{ij} > \beta_j - \alpha_i \end{array} \right.$$

3) Cambio de variables duales

Si el flujo máximo así hallado no es solución del problema primal $\mathcal{P}$ las marcas provenientes de la última aplicación del algoritmo de Ford-Fulkerson permitirán hallar otra solución de su dual y con ella reiniciar el proceso.

Para esto, y supuesto que I (J) es el conjunto de índices de las filas (de las columnas) marcadas en la última aplicación del algoritmo para resolver el problema auxiliar $\underline{P}$ se debe evaluar $\delta = \min_i (c_{i,j} + \alpha_i - \beta_j)$ extendido a las componentes (i, j) con $i \in I$, $j \notin J$, calcular las nuevas variables duales

$$\alpha_i^* = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } i \in I \\ \alpha_i + \delta & \text{si } i \notin I \end{cases} \quad \beta_j^* = \begin{cases} \beta_j & \text{si } j \in J \\ \beta_j + \delta & \text{si } j \notin J \end{cases}$$

y volver a 1).

Se demuestra que al pasar de una etapa a la siguiente, los elementos admisibles de $I \times J$, y los de $\bar{I} \times \bar{J}$, se conservan.

Aplicaremos este método al mismo problema de minimización ya resuelto.

Los datos correspondientes se resumen en

		d_j			
		3	3	6	2
α_i	5	2	3	2	4
	5	4	3	2	1
	4	5	6	4	3

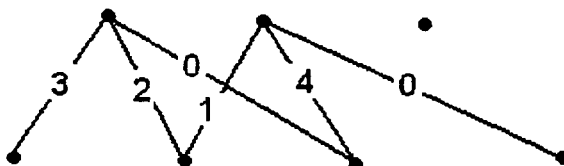
Elegida la "solución" del dual $\alpha_i = 0$, $\beta_j = \min_i (c_{i,j})$ sus correspondientes componentes (arcos) admisibles son indicados a continuación.

		β_j			
		2	3	2	1
α_i	0	*	*	*	
	0		*	*	*
	0				
	0				



Un flujo máximo, con $\varphi_{i,j} \neq 0$ sólo en tales componentes (arcos) es :

3	2	0	.
.	1	4	0
.	.	.	.



Al aplicar la tercera rutina para el cálculo de δ se tendrán $I = \{3\}$, $J = \emptyset$ y por lo tanto, considerando los $(i, j) \in I \times \bar{J}$ resulta $\delta = \min (c_{i,j} + \alpha_i - \beta_j) = 2$

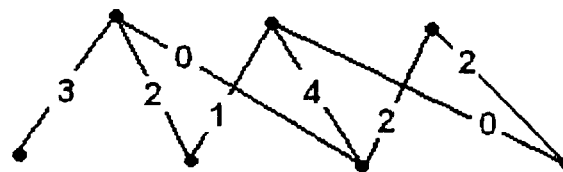
Los nuevos valores de las variables duales y sus correspondientes *componentes (arcos) admisibles* son los indicados seguidamente

	β_j			
	4	5	4	3
α_i	2	*	*	*
	2		*	*
	0		*	*



Un flujo máximo, con valores $\varphi_{i,j} \neq 0$ sólo en lugares admisibles es el siguiente, que resuelve el problema planteado

$$\varphi'' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & . \\ . & 1 & 4 & 0 \\ . & . & 2 & 2 \end{bmatrix}$$



Las tablas que siguen resumen los datos, y las soluciones obtenidas de los problemas primal y dual.

	d_j			
	3	3	6	2
a_i	5	2	3	2
	5	4	3	2
	4	5	6	4

	β_j			
	4	5	4	3
α_i	2	*	*	*
	2		*	*
	0		*	*

$$\varphi'' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & . \\ . & 1 & 4 & 0 \\ . & . & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Puede constatarse que los valores obtenidos implican, efectivamente, que

$$\sum_{(i,j)} \varphi_{i,j} \cdot c_{i,j} = \sum_j d_j \cdot \beta_j - \sum_i a_i \cdot \alpha_i = 37$$

OBSERVACION :

Veamos que eventuales modificaciones en los aprovisionamientos pueden llevar a disminuir el "costo por circulación", y esto aún aumentando las demandas.

Para ello supongamos que φ es un flujo que satisface el problema de Hitchcock, para cierta distribución de aprovisionamientos, demandas y costos dados.

Redistribuyendo aprovisionamientos, o incrementando alguno de ellos, es posible que aumentando algún $\varphi_{i,j}$, y disminuyendo en igual cantidad otro $\varphi_{h,j}$, se determine otro flujo $\hat{\varphi}$ que también satisfaga las restricciones.

Obviamente, si $c_{ij} < c_{hj}$ el costo por circulación resultante de aplicar $\hat{\varphi}$ será menor que el resultante de aplicar φ .

Así entonces, puede suceder que conservando los valores c_{ij} , y para nuevos aprovisionamientos que permitan satisfacer las demandas, sea factible elegir un nuevo flujo $\hat{\varphi}$ cuyo costo por distribución sea menor que el de φ .

Y esto aún cuando el costo por distribución que implica φ fuera mínimo para el planteo inicial.

Así, para el problema anterior, y adoptando la tabla

		d_j			
		3	3	6	2
	5	2	3	2	4
a_i	5	4	3	2	1
	4	5	6	4	3

el costo mínimo de sus "flujos de distribución" es según vimos 37.

		d_j			
		3	3	6	2
	5	2	3	2	4
	<u>7</u>	4	3	2	1
a_i	<u>2</u>	5	6	4	3

Pero, dada la tabla

el flujo

3	2	.	.
.	1	5	1
.	.	1	1

satisface las restricciones y su costo de distribución es $33 < 37$.

Esta situación puede presentarse también aún cuando se aumente la magnitud de las demandas a satisfacer.

En efecto, modificando algunos de los aprovisionamientos y demandas anteriores en una unidad, pero conservando los costos unitarios, el problema anterior podría llevarnos al que resume la siguiente tabla

		d_j			
		3	3	$\overline{5}$	$\overline{4}$
a_i	5	2	3	2	4
	7	4	3	2	1
	$\overline{3}$	5	6	4	3

que admite la solución $\varphi =$

3	2	.	.
.	1	5	1
.	.	.	3

Es fácil constatar que ahora, con una unidad más de demandas que en el caso inicial el problema se resuelve con un “costo por distribución” de $35 < 37$

La situación indicada lleva a la siguiente afirmación :

Es posible que modificando aprovisionamientos, y conservando los costos unitarios, sea posible satisfacer iguales o mayores demandas que la inicial, y esto con un menor “costo por distribución”.

Esta afirmación es conocida como “*Paradoja del Transporte*”, y el ejemplo dado confirma su validez.

En [Szw71] se la estudia y se proponen dos métodos para abordarla.

EJERCICIOS

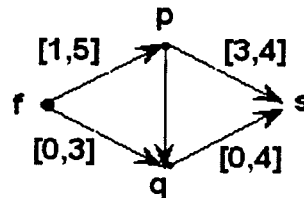
11 - 1)

Vea que mediante el agregado de a lo sumo un vértice y un arco todo problema de flujo $f-s$ puede llevarse a otro, de flujo f^*-s , con f^* entrada.

11 - 2)

Con referencia al siguiente esquema canalize, si ello es factible, el arco (p, q) de forma que la red obtenida admita flujo $f-s$.

Idem de manera que no admita un tal flujo.



11 - 3)

Indique como operaría para reducir, a modelos compatibles con la definición de pág.197 problemas de flujos en los cuales debieran además respetarse restricciones de capacidad en los vértices.

11 - 4)

Construya un red que admita al menos dos flujos $f-s$ completos de valores diferentes.

11 - 5)

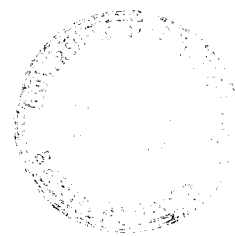
Suponga que se tiene una red que admite flujo $f-s$ con todos sus arcos canalizados $[0, c_i]$ y con todos los c_i distintos entre sí.

¿ Puede, o no, afirmarse que entre los cociclos que separan f de s existe uno único de capacidad mínima (máxima) ?

11 - 6)

Convengamos en decir "*arco más vital*" de G a todo arco cuya eliminación provoca la mayor disminución en el valor de sus flujos $f-s$ máximos

¿ Puede afirmar que los arcos "más vitales" son aquellos con máximo valor φ (con máxima cota c_i)



11 - 7)

Demuestre que si la red G admite flujo $f - s$, de $\varphi(x, V) = \varphi(V, x)$, $f \neq x \neq s$, resulta la existencia de cierto valor $\varphi_0 = \varphi(f, V) - \varphi(V, f)$.

11 - 8)

Suponga tener una red canalizada $[b_i, c_i]$ que admite un flujo $f - s$ de valor φ_0 , que $(A, \bar{A})$ es un cociclo que separa f de s , y que sus arcos de vértices inicial en A (en $\bar{A}$) se denotan r_i (s_i).

Vea que en tal caso : $\varphi_0 = \varphi(A, \bar{A}) - \varphi(\bar{A}, A)$

$$\sum_{r_i} b_i - \sum_{s_i} c_i \leq \varphi_0 \leq \sum_{r_i} c_i - \sum_{s_i} b_i$$

11 - 9)

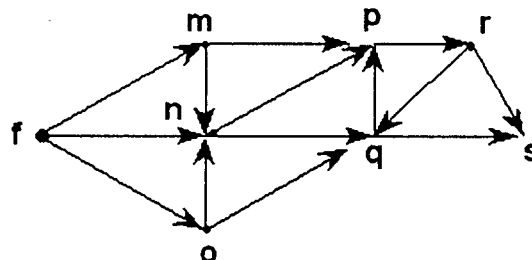
Una combinación lineal $\sum \alpha_i \varphi_i$ se dice "convexa" si $\sum \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$.

Vea que toda combinación lineal convexa de flujos canalizados de una red, es también flujo canalizado de la misma.

11 - 10)

Suponga que cada arco u_i de la siguiente red está canalizado $[0, c_i]$ y que las respectivas cotas superiores son las indicadas en la tabla

$(f, m) = 3$	$(o, n) = 7$
$(f, n) = 2$	$(o, q) = 3$
$(f, o) = 5$	$(p, r) = 2$
$(m, p) = 3$	$(q, p) = 3$
$(m, n) = 4$	$(q, s) = 6$
$(n, p) = 2$	$(r, q) = 4$
$(n, q) = 4$	$(r, s) = 6$



Determine en dicha red un flujo $f - s$ que sea máximo, y otro mínimo.

11 - 11)

Demuestre que el conjunto R2) de las restricciones de conservación en la definición de flujo es redundante.

11 - 12)

Vea que si U_A y U_B son cociclos mínimos que separan f, s , también lo son $U_{A \cap B}$ y $U_{A \cup B}$.

11 - 13)

Vea que si todo arco está canalizado $[0, c_i]$ y la red admite flujo $f - s$ de valor $\varphi_0 > 0$ se puede hallar una familia de caminos C_j , no necesariamente arco disjuntos dos a dos, a cada uno de los cuales pueden asignarse valores φ_j tales que $\varphi_0 = \sum_j \varphi_j$.

¿ Se puede afirmar lo mismo para el caso de redes que admiten canalizaciones $[b_i, c_i]$ con $b_i > 0$?

11 -14)

Se sabe que dada una red con canalizaciones enteras el número de veces que debe aplicarse el algoritmo de Ford y Fulkerson para alcanzar el máximo está acotado por éste valor.

Constata, con un ejemplo distinto del dado en pág.214 que, efectivamente, dicha cota sea alcanzada.

11 -15)

Las familias A, B, C, D, E , tienen, respectivamente, 3, 3, 4, 5, 5, miembros y disponen de cinco vehículos, con cuatro asientos cada uno.

¿ Será posible organizar una salida de forma tal que todos puedan ir de excursión sin que haya dos miembros de una misma familia en un mismo coche?

En tal caso halle una tal salida .

Idem si además no pueden viajar juntos miembros de las familias A y B .

11 -16)

¿ Podría plantear en términos de flujos canalizados la siguiente generalización del ejercicio anterior ?

Un conjunto de p familias dispone de q vehículos. Las familias tienen, respectivamente, $m_1, m_2, \dots, m_p$ miembros, y los vehículos $n_1, n_2, \dots, n_q$ asientos.

¿ Bajo que condiciones será posible organizar una excursión en la que participen todos los miembros de las familias, pero no haya dos de una misma familia en un mismo vehículo ?

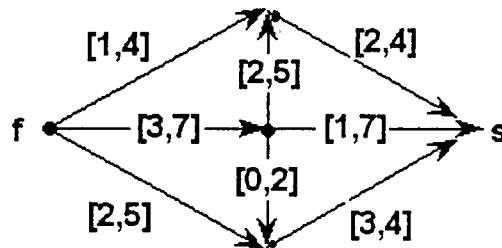
11 - 17)

Muestre que la determinación de un flujo $f - s$ máximo conlleva determinar al menos un ciclo mínimo que separa f de s

11 - 18)

Constate que si H se obtuvo a partir de G siguiendo la metodología propuesta en pág. 215, la existencia en H de un flujo que sature los arcos de salida (entrada) equivale a la existencia de flujos en G .

Aplique el método de referencia a la red



11 - 19)

Vea que una forma alternativa de la propuesta en pág. 215 para construir, a partir de una red G canalizada $[b_i, c_i]$ otra canalizada $[0, c'_i]$, que lleve a determinar un "flujo inicial" en G es la que sigue :

Agregarle una entrada f' , una salida s' , y para cada arco $u_i = (x, y)$ con $b_i > 0$ substituir este valor por $b_i = 0$ y agregar arcos (f', y) , (x, s') canalizados $[0, b_i]$.

Vea que también ahora la los flujos de G están en correspondencia biyectiva con los de la así construida que saturan sus arcos de salida (entrada)

11 - 20)

Suponga que el obrero A esta habilitado para las tareas t_1, t_4 , que el obrero B lo está para las t_2, t_3 , el C para t_3, t_5 , el D para t_1, t_3 , y el E para t_1, t_2 .

¿ Puede establecer una biyección entre obreros y tareas que solo incluya pares de elementos aptos ? Caso contrario, cuál es el mayor número de pares obrero-tarea que puede formar ?

¿ Como operaría si además debiera tomar en cuenta "la eficacia" de los obreros para ejecutar las tareas ?

11 - 21)

Suponga que en la siguiente tabla los elementos "admisibles" son los indicados con *, Determine, aplicando el Algoritmo Húngaro, un "acoplamiento máximo de admisibles".

	p	q	r	s	t
a	*	.	.	*	*
b	*	*	*	.	*
c	*	.	*	.	*
d	*	*	.	*	.
e	*	*	*	.	.

11 - 22)

Suponga que cinco tareas deben ser desarrolladas por cinco obreros y que en la siguiente cada una de sus componentes c_{ij} da el costo (el rendimiento) de la asignación i -ésimo obrero- j -ésima tarea.

$$C = \begin{vmatrix} 10 & 8 & 7 & 9 & 15 \\ 7 & 6 & 4 & 10 & 12 \\ 5 & 8 & 9 & 7 & 7 \\ 6 & 7 & 9 & 10 & 6 \\ 7 & 9 & 4 & 9 & 8 \end{vmatrix}$$

Halle una asignación que minimice el costo (maximice el rendimiento) total.

11 - 23)

Supuesto que la tabla precedente mide tiempos (confiabilidades) determine una asignación que permita concretar todas las tareas y maximice el tiempo mínimo (minimice la máxima confiabilidad) de los pares que la componen.

11 - 24)

Dada la siguiente tabla de aprovisionamientos, demandas, y costos unitarios por circulación aplique los distintos métodos dados para resolver el problema de Hitchcock que le está asociado.

		d_j					
		3	4	7	5	8	
a_i	5	5	3	4	8	2	
	7	3	2	5	6	4	
	8	6	3	5	7	2	
	4	2	6	7	7	2	
	3	5	5	6	3	3	

11 - 25)

Rehaga el ejercicio disponiendo los datos de otra forma

11 - 26)

Una industria que posee tres tornos, dos fresadoras y tres taladros tiene órdenes de trabajo que le exigen emplear todo su equipo.

Coloca un aviso solicitando operarios y se presentan :

- a) dos que saben manejar tornos y fresadoras.
- b) dos " " taladros y fresadoras
- c) dos " " " y tornos
- d) dos " " , " , " y fresadoras.

Se pregunta

¿ podrá la empresa cumplir con su objetivo ?

¿ cuál sería la asignación más económica supuesto que :

los salarios de los operarios de b) y de c) coinciden.

" " " de a) superan en 10 % al de los de b)

" " " de d) superan en 20 % al de los de b) ?

11 - 27)

Supuesto que los datos harían factible la resolución del siguiente problema, determine una red que le permita resolverlo en términos de flujos enteros.

- un centenar de los habitantes de un pueblo están asociados a uno o varios, de los clubes $C_1, C_2, \dots, C_p$, y a solamente uno solo de los partidos políticos $P_1, \dots, P_q$.
- los clubes deben elegir, de entre sus socios, un representante, que puede representar a sólo uno de los clubes (aún cuando sea socio de varios).

Elegir los representantes de manera tal que el número de ellos pertenecientes a un cada partido político P_i esté acotado inferiormente por b_i y superiormente por c_i .

BIBLIOGRAFIA

A

- AarEB51 AARDENNE-EHRENFEST van, T.- BRUIJN de, N.G. *Circuits and trees in oriented linear graphs*. Simon Stevin, 28 (1951), 203/217. M.R.13 pág. 857. Zb. 44 pág. 382.
- *Agui90 AGUILERA, N. *Algoritmos para grafos y flujos en redes*. INTEC-PEMA Univ. Nac. del Litoral (1990).
- AhoGH77 AHO, A.V.- GAREY, M.R - HWANG, F.K. *Rectilinear Steiner trees. Efficient special case algorithms*. Networks 7 (1977), 37/58. M.R. 57 # 4588. Zb. 351 # 05102.
- AhuMO89 AHUJA, R.K.- MAGNANTI, Th.L.- ORLIN, J.B. *Networks flow*. Cap.4 de [NemRT89] 211/369.
- *AhuMO93 AHUJA, R.K.- MAGNANTI, Th.L.- ORLIN, J.B. *Networks flow. Theory, Algorithms and applications*. Prentice Hall (1993). M.R. 94e # 90035.
- AlaB71 ALAVI, Y.- BEHZAD, M. *Complementary graphs and edge chromatic numbers*. SIAM J. Appl. Math. 20 (1971), 161/163. M.R. 44 # 3923.
- AlaM71 ALAVI, Y.- MITCHEM, J. *The connectivity and line-connectivity of complementary graphs*. Lect. Notes in Math 186. Springer-Verlag. (1971), 1/3.
- AlaW75 ALAVI, J.- WILLIAMSON, J.E. *Panconnected graphs*. Studia Sci. Math. Hung. 10 (1975), 19/23. M.R. 56 # 8423.
- *AlbH88 ALBERTSON, M. O.- HUTCHINSON, J. P. *Discrete Mathematics with algorithms*. J. Wiley (1988). M.R. 89i # 05001.
- AleG76 ALEKSEEV, V.B.- GONCHAKOV, V.S. *Thickness of arbitrary complete graphs*. Mat. Sbornik 101-143 (1976), 212/230.
- Anch70 ANCIAUX, M.- HANSEN, P. *Sur la méthode des compensations succesives*. Rev. Franç. Infor. et Rech. Opérat. (4ème. année) V-3 (1970), 11/14.
- App28 APPEL, P. *Le problème géométrique des déblais et des remblais*. Mémor. des Sciences Math. 27 (1928).
- App76 APPEL, K. *The proof of the four-colour theorem*. New Scientist 72 (1976), 711/712. M.R. 54 # 12561.
- AppH76 APPEL, K.- HAKEN, W. *Every planar map is four colorable*. Bull. Amer. Math. Soc. 82-5 (1976), 711/712. M.R. 54 # 12561.

- AppH77a APPEL, K.- HAKEN, W. *Every map is four colorable. Part I. Discharging.* Illinois J. Math. 21 (1977), 429/490. M.R. 58 # 27598a.
- AppH77b APPEL, K.- HAKEN, W.- KOCH, J. *Every map is four colorable. Part II. Reducibility.* Illinois J. Math. 21 (1977), 491/567. M.R. 58 # 27598b.
- AppH77c APPEL, K.- HAKEN, W. *The solution of the four-color-map problem.* Scientific American 237 (1977) - October, 108/121.
- AppH78 APPEL, K.- HAKEN, W. *The four color problem.* en [Steen78], 153/180.
- *AppH89 APPEL, K.- HAKEN, W. *Every planar map is four colorable.* Amer. Math. Soc. (1989). M.R. 91m # 05079.
- Aus60 AUSTIN, T.L. *The enumeration of point labelled chromatic graphs and trees.* Canad. J. Math. 12 (1960), 535/545.
- AvoB79 AVONDO-BoDINO, G. *Graph theory and operations research.* Cap. 8 de [WilsB79], 223/253.

$\mathcal{B}$

- *BarG88 BARTHÉLEMY, J.P.- GUÉNOCHE, A. *Les arbres et les représentations des proximités.* Masson (1988).
Trees and proximity representations. J. Wiley (1991). M.R. 93b # 05042.
- BatHK62 BATTLE, J.- HARARY, F.- KODAMA, Y. *Every planar graph with nine points has a nonplanar complement.* Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962), 569/571. M.R. 27 # 5248.
- *BazJ77 BAZARAA, M.- JARVIS, J. *Linear programming and networks flow.* J. Wiley (1977).
Programación lineal y flujo en redes. Limusa (1995).
- *Bec64a BECKENBACH, E.F.(Edit) *Applied combinatorial mathematics.* J. Wiley (1964/81). M.R. 30 # 4687.
- Bec64b BECKENBACH, E.F. *Network flow problems* Cap.12 de [Bec64a], 348/368.
- BehChC67 BEHZAD, M.- CHARTRAND, G.- COOPER, J.K. *The colour numbers of complete graphs.* J. London Math. Soc. 42 (1967), 226/228.
- Bei64 BEINEKE, L.W. *Decompositions of complete graphs into forests.* Publ. Mat. Inst. Hungar. Acad. Sci. 9 (1964), 589/594. M.R. 32 # 4031. Zb, 137 pg. 181.
- Bei67a BEINEKE, L.W. *Complete bipartite graphs. Decomposition into planar subgraphs.* en [HarB67], 42/53.
- Bei67b BEINEKE, L.W. *The decomposition of complete graphs into planar subgraphs.* en [Har67a], 139/153.

- Bei69 BEINEKE, L.W. *A survey of packings and coverings of graphs*. Lect. Notes in Math.110. Springer Verlag (1969), 45/53.
- BeiH64 BEINEKE, L. W.- HARARY, F. *On the thickness of the complete graph*. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 618/620. M.R. 29 # 1636.
- BeiH65a BEINEKE, L.W.- HARARY, F. *The thickness of the complete graph*. Canad. J. Math. 17 (1965), 850/859. M.R. 32 # 4032.
- BeiH65b BEINEKE, L.W.- HARARY, F. *Some inequalities involving the genus of a graph and its thickness* Proc Glasgow Math. Assoc. 7 (1965), 19/21.
- BeiM69 BEINEKE, L.W.- MOON, J.W. *Several proofs of the number of labelled 2 dimensional trees*. en [Har69a], 11/20. M.R. 40 # 7149. Zb. 197 pg. 505.
- BeiPi69 BEINEKE, L.W.- PIPPERT, R.E. *The number of labeled k-dimensional trees*. J. Comb. Th. 6 (1969), 200/205. M.R. 38 # 3182. Zb. 175 pg. 209.
- BeiPi71 BEINEKE, L.W.- PIPPERT, R.E. *Properties and characterizations of k-trees*. Mathematika 18 (1971), 141/151.
- BeiPl67 BEINEKE, L.W.- PLUMMER, D. *On the 1-factors of a nonseparable graph*. J. Comb. Th. 2 (1967), 285/289. M.R. 35 # 1499. Zb. 149 pg. 414.
- BeiW73 BEINEKE, L.W.- WILSON, R.J. *On the edge-chromatic number of a graph*. Discrete Math. 5 (1973), 15/20. M.R. 47 # 4836.
- *BeiW78 BEINEKE, L.W.- WILSON, R.J. (Edit.) *Selected topics in graph theory*. 1 Acad. Press (1978). M.R. 81e # 05059. Zb. 423 # 00003.
- *BeiW83 BEINEKE, L.W.- WILSON, R.J. (Edit.) *Selected topics in graph theory*. 2. Acad. Press (1983). M.R. 86e # 05002.
- *BeiW88 BEINEKE, L.W.- WILSON, R.J. (Edit.) *Selected topics in graph theory*. 3. Acad. Press (1988). M.R. 93h # 05003.
- BeiHM64 BEINEKE, L.W.- HARARY, F.- MOON, J.W. *On the thickness of the complete bipartite graph*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 60 (1964), 1/6. M.R. 28 # 1611.
- *Ber58 BERGE, C. *Théorie des graphes et ses applications*. Dunod (1958-63-67). M.R. 21 # 1608. Zb. 88 pg. 154.
The theory of graphs and its applications. Meuthen (1962). M.R. 24A # 2381.
Teoría de las redes y sus aplicaciones. C.E.C.S.A. (1967).
- Ber61 BERGE, C. *Les problèmes de flot et de tension*. Cahiers du Centre d' Etudes de Rech. Operat. (Bruxelles). (1961). Vol.3 Nro. 2, 69/93.
- *Ber67 BERGE, C.(Edit) *Théorie des Graphes. Journées Internationales d'étude - Rome 1966*. Dunod - Gordon-Breach (1967).

- *Ber70 BERGE, C. *Graphes et hypergraphes*. Dunod (1970-73). M.R. 50 # 9639 / 41.
Zb. 213 pg. 257.
Graphs and hypergraphs. North Holland (1973). M.R. 50 # 9640. Zb. 254 # 05101.
- Ber75 BERGE, C. *Perfect graphs*. en [Ful75a], 1/22.
- *BerCh84 BERGE, C.- CHVATAL, V. *Topics on perfect graphs*. North Holland (1984)
- *BerGH62 BERGE, C.- GHOUILA-HOURI, A. *Programmes, jeux et réseaux de transport*.
Dunod (1962). M.R. 33 # 1137.
Programming, games and transportations networks. Methuen J.Wiley (1965).
M.R. 33 # 7114.
Programas, juegos y sistemas de transporte. C.E.C.S.A. (1965).
- Berm78 BERMOND, J.C. *Hamiltonian graphs*. Cap. 6 de [BeiW78], 127/167.
- Bern75 BERNHART, F.R. *The four color theorem proved by multi-linear algebra ?*
Proc. Conf. Algebra Toronto (1975), 219/225. Zb. 313 # 05110.
- Bern77 BERNHART, F. *A digest of four color theorem*. J. Graph Theory 1 (1977) 207/225.
- *Bert65 BERTIER, P. *Les problèmes de distribution et de collecte*. SEMA-Rap. Rech. 11
(1965).
- *Bert66 BERTIER, P. *Procédures pour élaborer des tournées de distribution*. METRA- 8
(1966).
- Big 83 BIGGS, N. L. *De Morgan on map colouring and separation axiom*. Arch.Hist. Exact.
Sci. 28 (1983),165/170. M.R. 85b # 01018.
- *BigLW76 BIGGS, N. L.- LLOYD, E. K.- WILSON, R. J. *Graph theory 1736-1936*. Oxford
Univ. Press (1976/86). M.R. 88e # 01035. Zb. 595 # 05003.
- Birk12 BIRKHOFF, G.D. *A determinantal formula for the number of ways of coloring a
map*. Ann. of Math. 14 (1912), 42/46.
- Birk34 BIRKHOFF, G.D. *On the polynomial expressions for the number of ways of coloring
a map*. Ann. Scuola Norm. Sup – Pisa. (1934), 85/104.

Idem en Collected Math. Papers. Vol. 3 Amer. Math. Soc.(1950),29/47
- BirkL46 BIRKHOFF, G.D.- LEWIS, D.C. *Chromatic polynomials* Trans. Amer. Math. Soc.
60 (1946), 353/451. M.R. 8 pg.284.
- Boe74 BOESCH, F.T. *The strongest monotone degree condition for n -connectedness of a
graph*. J. Comb. Th. 16 B (1974), 162/165.
- Boll66 BOLLOBÁS, R. *Extremal graph theory*. Cap. 23 de [GraGL66], 1231/1293.

- *Boll78 BOLLOBÁS, B. *Extremal graph theory*. Acad.Press (1978). M.R. 80a # 05120. Zb. 419 # 05031.
- *Boll79 BOLLOBÁS, B. *Graph theory. An introductory course*. Springer-Verlag (1979/90). M.R. 80j # 05053. Zb. 411 # 05032.
- Bon69a BONDY, J.A. *Properties of graphs with constraints on degrees*. Studia Sci. Math. Hungar. 4 (1969), 473/475. M.R. 43 # 7354.
- Bon69b BONDY, J.A. *On Kelly's congruence theorem of trees*. Proc. Comb. Phil.Soc. Vol. 65-2 (1969), 387/397. M.R. 41 # 5238. Zb.169 # 554.
- *BonM76 BONDY, J.A.- MURTY, U.S.R. *Graph theory with applications*. Amer. Elsevier Publ. (1976/77). M.R. 54 # 117.
- Bor60 BORCHARDT, C.W. *Über eine der Interpolation entsprechende Darstellung der Elimination Resultante*. J. für die reine und angewandte mathematik. 57 (1860), 111/121
- Bor26 BORŮVKA, O. *O jistém problému minimálním (On a minimal problem)*. Práce Moravské Přírod. Spol. 3 (1926), 37/58. (en checoeslovaco)
- Bos67 BOSÁK, J. *Hamiltonian lines in cubic graphs*. en [Ber67a], 35/46. M.R. 36 # 5022
- BotM54 BOTT, R.- MAYBERRY, J.P. *Matrices and trees*. Economic Activity Analysis. (Edit. Morgensten) J.Wiley (1954), 391/407. M.R. 16 pg.665
- Brig62 BRIGGS, F.E.A. *A dual labelling method for the Hitchcock problem*. Operat. Res. 10 (1962), 507/514. M.R. 26 # 7437.
- Bro41 BROOKS, R.L. *On colouring the nodes of a network*. Proc. Cambridge Phil. Soc. 37 (1941), 194/197. M.R. 6 pg. 281.
- BroST40 BROOKS, R.L.- SMITH, C.A.- STONE, A.H.- TUTTE, W.T. *The dissection of rectangles into squares*. Duke Math. 7 (1940), 312/340. M.R. 2 pg. 153. Zb.24 pg. 165.
- BroST92 BROOKS, R.L.- SMITH, C.A.- STONE, A.H.- TUTTE, W.T. *Determinants and current flow in electric networks*. Discrete Math. 100 (1992), 291/301. M.R. 93c # 94011.
- Brow65 BROWN, W. *Historical note on a recurrent combinatorial problem*. The Amer. Math. Monthly 72 (1965), 973/977. Zb. 136 pg.212.
- *BruR91 BRUALDI, R.A.- RYSER, H.J. *Combinatorial matrix theory*. Cambridge Univ. Press (1991). M.R. 93a # 05087.
- Bry67 BRYANT, P.R. *Graph theory applied to electrical networks*. Cap.3 de [Har67a], 111/137.

- Bry79 BRYANT, P.R. *Graph theory and electrical networks*. Cap.4 de [WilsB79], 81/119.
- *Brya93 BRYANT, V. *Aspects of combinatorics*. Cambridge Univ. Press (1993).
- *Buch90 BUCKLEY, F. HARARY, F. *Distance in graphs*. Addison-Wesley (1990).
Zb.688 # 05017.
- Bun74 BUNEMAN, P. *A note on the metric properties of trees*. J. Comb. Th. B 17 (1974), 48/50.
- Bur78 BURSTEIN, M. *Kuratowski – Pontriaguin theorem on planar graphs*. J. Comb. Th. Ser. B 24 (1978), 228/232. M.R. 80h # 05023.
- *BusS65 BUSACKER, R. G.- SAATY, T. L. *Finite graphs and networks. An introduction with applications*. Mc.Graw Hill Co.(1965). M.R. 35 # 79. Zb. 146 pg. 201.

C

- Cad71 CADOGAN, C.C. *The Möbius function and connected graphs*. J. Comb. Th. 11 (1971), 193/200. M.R. 44 # 1605.
- *CapM78 CAPOBIANCO, M.- MOLLUZZO, J. C. *Examples and counterexamples in graph theory*. North Holland (1978). M.R. 58 # 10536
- Cat38 CATALAN, E. *Note sur une équation aux différences finies*. J. Math. Pures Appl. 1 (1838), 508/516.
- Cay57 CAYLEY, A. *On the theory of the analytical forms called trees*. Philos. Magaz. 13 (1857), 172/176.
Idem Collected Math. Papers - Cambridge Vol.3 (1890), 242/246.
- Cay74 CAYLEY, A. *On the mathematical theory of isomers*. Philos. Magaz. 47 (1874), 444/446.
Idem Collected Math. Papers - Cambridge Vol.9 (1895), 202/204.
- Cay75 CAYLEY, A. *On the analitical forms called trees, with applications to the theory of chemical combinations*. Report. British Assoc. for Adv. of Sciene (1875), 257/305.
Idem Collected Math. Papers - Cambridge Vol.9 (1895), 427/460.
- Cay79 CAYLEY, A. *On the colouring of maps*. Proc. Roy. Geog. Soc. 1 (1879), 259/261.
Idem Collected Math. Papers - Cambridge Vol. 2 (1891), 7/8).
- Cay89 CAYLEY, A. *A theorem on trees*. Quart. J. Pure Math. 23 (1889), 376/378.
Idem Collected Math. Papers - Cambridge Vol. 3 (1897), 26/28.
- Clar58 CLARKE, L.E. *On Cayley's formula for counting trees*. J. London Math. Soc. 33 (1958), 471/474. M.R. 20 # 7282.

- Coc67 COCKAYNE, E.J. *On the Steiner problem*. Canad. Math. Bull. 10 (1967), 431/450. M.R. 35 # 6585.
- Coc70 COCKAYNE, E.J. *On the efficiency of the algorithm for Steiner minimal trees*. SIAM J. Appl. Math. 18 (1970), 150/159. M.R. 41 # 1579.
- *CouR41 COURANT, R. ROBBINS, H. *What is mathematics ?* Oxford Univ. Press (1941/43) ¿ *Qué es la Matemática ?* Edit. Aguilar - ALDA (4a edición 1964).
- Cox57 COXETER, H.S.M. *Map coloring problems*. Scripta Math. 23 (1957), 11/25.
- Cox59 COXETER, H.S.M. *The four colour map problem 1890-1940*. The Math. Teacher 52 (1959), 283/289.
- Cul67 CULIK, K. *On the ordered rooted trees used in theory of languages*. en [Ber67], 69/76.
- Cum66 CUMMINS, R.L. *Hamilton circuits in tree graphs*. IEEE Trans. Circuit Theory. CT 13 (1966), 82/90. M. R. 39 # 6667.
- Cve71 CVETKOVIC, D.M. *The spectral method for determining the nunmbers of trees*. Publ. Inst. Math. (Beograd) 11- 25 (1971), 135/141. M.R. 46 # 8877.
- CveG81 CVETKOVIC, D.M.- GUTMAN, I. *A new spectral method for determining the num-ber of sapnning trees*. Publ. Inst. Mathématique 29 (1981), 49/52.
- *CveDS79 CVETKOVIC, D.M.- DOOB, M.- SACHS, H. *Spectra of graphs.theory and applications*. Acad. Press (1979) / VEB Deutscher (1982). M.R. 84a # 05046. Zb.458 # 05042.
- *CveDG88 CVETKOVIC, D.M.- DOOB, M.- GUTMAN, I.-TORGASEV, A. *Recent results in the theory of graphs spectra*. North Holland (1988). M.R. 89d # 05130.

Cñ

- *ChaGM79 CHACHRA, V.- GHARE, P.M.- MOORE, P. *Applications of Graph Theory and Algorithms*. North Holland (1979).
- Chai81 CHAIKEN, S. *A combinatorial proof of the all minors matrix tree theorem*. (Tech. Report 81-3. Dept Comp. Sci. State Univ. New York, at Albany (1981) 1/24) Idem SIAM J. Algebraic Discrete Methods 3 (1982), 319/329. M.R. 83h # 05062.
- ChaiK78 CHAIKEN, S.- KLEITMAN, D. *Matrix tree theorems*. J. Comb. Th. A 24 (1978), 377/381.
- ChaC54 CHARNES, A.A.- COOPER, W.W. *The stepping stone method of explaining linear programming in transportation problems*. Management Science 1 (1954), 49/69.

- CharH68 CHARTRAND, G.- HARARY, F. *Graphs with prescribed connectivities*. Theory of Graphs (Edit. P. Erdos - G. Katona) Akad. Kiadó Budapest (1968), 61/63.
- CharK69 CHARTRAND, G.- KRONK, H.V. *The point-arboricity of planar graphs*. J. London Math. Soc. 44 (1969), 612/616. M.R. 80h # 05020.
- *CharL79 CHARTRAND, G.- LESNIAK, L. *Graphs and digraphs*. Wadsworth Brooks (1979).
- CharM71 CHARTRAND, G.- MITCHEM, J. *Graphical theorems of the Nordhaus-Gaddum class*. Lectures Notes in Math. 186. Springer-Verlag (1971), 55/61.
- CharSt69 CHARTRAND, G.- STEWART, M.J. *The connectivity of line graphs*. Math. Ann. 182 (1969), 170/174. M.R. 43 # 3161. Zb. 167 pg. 522.
- CharGH71 CHARTRAND, G.- GELLER, D.- HEDETNIEMI, S. *Graphs with forbidden subgraphs*. J. Comb. Th. 10 (1971), 12/41.
- CharHJ74 CHARTRAND, G.- HOBBS, A.- JUNG, H.- KAPOOR, S.- NASH WILLIAMS, C. St. *The square of a block is hamiltonian connected*. J. Comb. Th. B 16(1974), 290/292. M.R. 49 # 10595. Zb. 277 # 05129.
- *Chen71a CHEN, W. K. *Applied graph theory. Graphs and electrical networks*. North Holland (1971/76). M.R. 48 # 3620 / 57 # 11940.
- Chen71b CHEN, W.K. *On vector spaces associated with a graph*. SIAM J. Appl. Mat. 20 (1971), 526/529. M.R. 44 # 3905
- Chen81 CHEN, C.C. *On a characterization of planar graphs*. Bull. Austral. Math. Soc. 24 (1981), 289/294.
- ChenM69 CHEN, W.K.- MARK, S.K. *On the algebraic relationships of trees, co-trees, circuits and cutsets of a graph*. I.E.E.E. Trans. Circuit C.T. 16-2 (1969), 176/184.
- CherT76 CHERITON, D.- TARJAN, R.E. *Finding minimum spanning trees*. SIAM J. Comput. 5 (1976), 724/742.
- *Chi82 CHIAPPA, R.A. *Palabras circulares equilibradas. Grafos adjuntos*. Notas de Matemática Discreta Nro.1, INMABB - Univ.Nac.del Sur (1982), 1/128. M.R. 84d # 05109. Zb. 502 # 05053.
- Chi89 CHIAPPA, R. A. *Algunas motivaciones históricas en la Teoría de Grafos*. Rev. de Educación Matemática. (REM) Vol 4 - Nro 1 (1989), 37/54.
- *Chi91 CHIAPPA, R.A. *Temas de la Teoría de Grafos – I – Nociones básicas*. Informe Técnico Interno Nro. 29. INMABB - Univ.Nac. del Sur (1991), 1/53.
- *Chi93 CHIAPPA, R.A. *Teoría de flujos canalizados*. Publicación Nro.153 Fac. Filosofía, Humanidades y Arte. Univ. Nac. de San Juan (1993), 1/116.

- *Chi95 CHIAPPA, R.A. *Temas de la Teoría de Grafos – II – Transitabilidad – I.-* Informe Técnico Interno Nro. 48. INMABB - Univ. Nac.del Sur, (1995), 1/65.
- *Chi96 CHIAPPA, R.A. *Temas de la Teoría de Grafos – II – Transitabilidad – II.-* Informe Técnico Interno Nro. 55. INMABB - Univ. Nac. del Sur (1996), 1/56.
- *Chi06 CHIAPPA, R.A. *Multi-di-grafos 1.* Informe Técnico Interno Nro. 93. INMABB – Univ. Nac.del Sur (2006)), 1/301,
- ChiG90 CHIAPPA, R.A.- GASTAMINZA, M.L. *An injective function from trees to natural numbers.* Math. Japonica 35 (1990), 693/697. M.R. 91h # 05044. Zb.735 # 05026.
- *ChiS99 CHIAPPA, R.A.- SANZA, C.A. *Una introducción a grafos y matrices.* EDIUNS. Editorial Univ.Nac. del Sur (1999), 1/202.
Idem, en Red Olímpica Argentina (2004).
- ChiLS95 CHIAPPA, R.A.- LUSENTE, M.J.- SANZA, C. A. *A numerical identification of finite trees.* Math. Japonica 42 (1995), 337/342. M.R. 96h # 05043. Zb. 841 # 05016.
- Cho38 CHOQUET, G. *Etude de certains réseaux de route.* C. R. Acad. Sci. Vol 206 (1938), 310/313.
- Chu78 CHUNG, F.R.K. *On partitions of graphs into trees.* Discrete Math. 23 (1978), 23/30. M.R. 80a # 5071.
- Chv74 CHVÁTAL, V. *The minimality of the Mycielski graph.* Lect. Notes in Math. 406 Springer-Verlag (1974), 243/246.

D

- Dan51a DANTZIG, G.B. *Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities.* Cap. XXI de [Koo51]
- Dan51b DANTZIG, G.B. *Application of the simplex method to a transportation problem.* Cap. XXIII de [Koo51].
- Dan 55 DANTZIG, G.B. *Generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality restraints.* Pacific J. of Math. 5 (1955),
- Dan57 DANTZIG, G.B. *Discrete variable extremum problems.* JORSA (1957), 266/277.
- DanF56 DANTZIG, G.B.- FULKERSON, D.R. *On the max flow min cut theorem of network.* en [KuhnT56], 215/221.
- DanFF56 DANTZIG, G.B.- FORD, L.R.- FULKERSON, D.R. *A primal-dual algorithm for linear programs.* en [KuhnT56], 171/181.
- DanH56 DANTZIG, G.B.- HOFFMAN, A.J. *Dilworth's theorem on partially ordered sets.* en [KuhnT56], 207/214.

- DedP85 DEDÒ, E.- PORCU, L. *Some properties of a multidigraph by semi-incidence matrices.* Discrete Math. 55 (1985), 1/11. M.R. 87c # 05084. Zb. 565 # 05032.
- DemMP64 DEMOUCRON, G.- MALGRANGE, Y.- PERTUISET, R. *Graphes planaires. Reconnaissance et construction de représentations planaires topologiques.* Rev. Franç. Rech. Opér. 8ème année. Nro 30. (1964), 33/47.
- *Deo74 DEO, N. *Graph theory with applications to engineering and computer science.* Prentice Hall (1974). M.R. 50 # 12772. Zb. 285 # 05102.
- Deo76 DEO, N. *Note on J. Hopcroft and R. Tarjan's planarity algorithm.* J. Assoc. Comp. Mach. 23 (1976), 549/568. M.R. 52 # 7194.
- DerZ80 DERSHOWITZ, N.- ZAKS, Sh. *Enumeration of ordered trees.* Discrete Math. 31 (1980), 9/28.
- Dick84 DICK, W. *Discrete characterizations of planarity I. The classical viewpoint.* Linear and Multilinear Algebra 16 (1984), 39/65. M.R. 86f # 05054.
- *Dig77 DIEGO, A. *Lecciones de Programación Lineal.* Notas de Algebra y Análisis Nro 6. INMABB - Univ. Nac. Del Sur (1977), 1/123.
- *Die96 DIESTEL, R. *Graphentheorie.* Springer-Verlag (1996).
Graph Theory. Springer-Verlag (1997).
- Dij59 DIJKSTRA, E.W. *A note on two problems in connexion with graphs.* Numer. Math. 1 (1959), 269/271. M.R. 21 # 6334.
- Dil50 DILTWORTH, R.P. *A decomposition theorem for partially ordered sets.* Annals of Math. 51 (190), 161/166. M.R. 11 pg. 309.
- Din70 DINIC, E.A. *Algorithm for solution of a problem of maximum flow in a network with power estimation.* Soviet Math. Dokl. 11 (1970), 1277/1280.
- Dir52a DIRAC, G.A. *A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs* J. London Math. Soc. 27 (1952), 85/92.
- Dir52b DIRAC, G.A. *Connectivity theorems for graphs.* Quart. J. Math. Oxford Series 2. Vol 3 (1952), 171/174.
- Dir53 DIRAC, G.A. *The sructure of k-chromatic graphs.* Fund. Math. 40 (1953), 42/55.
- Dir56 DIRAC, G.A. *Map colour theorems related to the Headwood colour formula.* J. London Math. Soc. 31 (1956), 460/471. M.R. 18 pg. 408.
- Dir60a DIRAC, G.A. *In abstrakten Graphen vorhande vollständige 4-Graphen und ihre unterteilungen.* Math. Nachr. 22 (1960), 61/85.
- Dir60b DIRAC, G.A. *Généralisations du théorème de Menger.* C. R. Acad. Sci. Paris 250 (1960), 4252/4253.

- Dir60c DIRAC, G.A. *4-chrome Graphen und vollständige 4-Graphen*. Math. Nachr. 22 (1960), 51/60.
- Dir63a DIRAC, G.A. *Extensions of Menger's theorem*. J. London Math. Soc. 38 (1963), 148/161. M.R. 27 # 1939.
- Dir63b DIRAC, G.A. *On the four colour conjecture*. Proc. London Math. Soc. 3 ème Serie XIII (1963), 193/218.
- Dir66 DIRAC, G.A. *Short proof of Menger's graph theorem*. Mathematika 13 (1966) 42/44.
- DirS54 DIRAC, G.A.- SCHUSTER, S. *A theorem of Kuratowski*. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 57 (1954), 343/348.
- *Doñ82 DOÑAS, R.F. *Redes de transporte. Modelos y soluciones*. Univ. Fco. Santa María (1982).
- *Dör58 DÖRRIE, H. *Triumph der Mathematik*. Physica -Verlag (1958)
100 great problems of elementary mathematics. Dover Publications (1965).
- *DreH90 DRESS, A.- HAESLER von, A. (Edit) *Trees and hierarchical structures*. Springer (1990).
- DreyW72 DREYFUS, S.E.- WAGNER, R.A. *On the Steiner problem in graphs*. Networks 1 (1972), 195/207.
- DuH82 DU, D.Z.- HWANG, F.K. *A short proof of a result of Pollak on Steiner minimal trees*. J. Comb. Th A 32 (1982), 396/400.
- Duf75 DUFFIN, R.J. *Electrical network models*. en [Ful75a], 94/138.
- Dul58 DULMAGE, A.L. *Some generalizations of the problem of distincts representatives*. Canad. J. Math. 10 (1958), 230/241.
- DulM67 DULMAGE, A.L.- MENDELSON, N.S. *Graphs and Matrices*. Cap. 6 de [Har67a], 167/227. M.R. 40 # 5468. Zb. 204 pg. 244.
- DulM69 DULMAGE, A.L.- MENDELSON, N.S. *Some graphical properties of matrices with non-negative entries*. Aequations Math. 2 (1969), 150/162. Zb. 174 pg. 267.

$\mathcal{E}$

- Ebe81 EBERT, J. *A sensitive transitive closure algorithm*. Inform Process. Lett. 12 (1981), 255/258. M.R. 83e # 68023.
- Edm64 EDMONDS, J. *Existence of k -edge-connected ordinary graphs with prescribed degrees*. J. Res. Nat. Bur. Stand. B 68 (1964), 73/74.

- EdmK72 EDMONDS, J.- KARP, R.M. *Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problem.* J. Assoc. Comp. Mach. (JACM) 2 (1972), 248/264.
- EgéR86 EGÉCIOGLU, O.- REMMEL, J.B. *Bijections for Cayley trees, spanning trees and their q-analogues.* J. Comb. Th. A 42 (1986), 15/30.
- EgéR94 EGÉCIOGLU, O.- REMMEL, J.B. *A bijection for spanning trees of complete multi-partite graphs.* Congr. Numer. 100 (1994), 225/243.
- Eger31 EGERVÁRY, E. *Matrix kombinatorikus tulajdonságairol.* Mat Fis. Lapok 38 (1931), 16/28. (traducción en : *On combinatorial properties of matrices.* Off. Naval Research Logistics Project. Princeton Univ. (1953).
- EliFS56 ELIAS, P.- FEINSTEIN, A.- SHANNON, C.E. *A note on the maximun flow through a network.* IRE Trans. Inform. Theory IT-2 (1956), 117/119.
- ErdG73 ERDŐS, P.- GUY, R.K. *Crossing numbers problems.* The Amer. Math. Monthly 80 (1973), 52/58. M.R. 52 # 2894.
- EveK77 EVE, J.- KURKI, S.R. *On computing the transitive closure of a relation.* Acta Informat. 8 (1977), 303/314. M.R. 57 # 4595.
- Even75 EVEN, S. *An algorithm for determining whether the connectivity of a graph is at least k.* SIAM J. Comput. 4 (1975), 393/396. M.R. 51 # 12017.
- EvenT75 EVEN, S.- TARJAN, R.E. *Network flow and testing graph connectivity.* SIAM J. Comput. 4 (1975), 507/518. M.R. 55 # 9898.

$\mathcal{F}$

- Fáry48 FÁRY, I. *On straight line representations of planar graphs.* Acta Sci. Math. Szeged. 11 (1948), 229/233.
- FauS76 FAUDREE, R.J.- SCHELP, R.H. *The square of a block is strongly path connected.* J. Comb. Th. Ser. B 20 (1976), 47/61. M.R. 54 # 12568.
- *FauRT76 FAURE, R.- ROUCAIROL, C.-TOLLA, P. *Chemins et flots. Ordonnancement.* Gauthiers-Villars (1976). M.R.56 # 7765.
- *FioW77 FIORINI, S.- WILSON, R.J. *Edge colorings of graphs.* Pitman (1977). M.R. 58 # 27599. Zb. 421 # 05023.
- FioW78 FIORINI, S.- WILSON, R.J. *Edge colorings of graphs.* Cap. 5 de [BeiW78] 103/126. Zb. 435 # 05024.
- Fle76 FLEISCHNER, H.J. *In the square of graphs, Hamiltonicity and pancyclicity, Hamiltonian connectedness and panconnectedness are equivalent concepts.* Monatshe Math 82 (1976), 125/149. M.R. 55 # 171.

- *Fle90 FLEISCHNER, H.J. *Eulerian graphs and related topics. (Part1 Vol.1)* North Holland (1990). M.R. 91g # 05086.
- Flo53 FLOOD, M.M. *On the Hitchcock distribution problem.* Pacific J. of Math.3 (1953).
- Foa71 FOATA, D. *Enumerating k-trees.* Discrete Math.1 (1971), 181/186. Zb. 219 # 5066.
- FordF54 FORD, L.R.- FULKERSON, D.R. *Maximal flow through a network.* RAND Corp. Paper (1954).
Idem en Canad. J. of Math. 8 (1956), 399/404. M.R. 18 # 56.
- FordF55 FORD, L.R.- FULKERSON, D.R. *A simple algorithm for finding maximal networks flows and an application to the Hitchcock problem.* RAND Corp. Paper (1955).
Idem en Canad. J. of Math. 9 (1957), 210/218.
- FordF56a FORD, L.R.- FULKERSON, D.R. *A primal-dual algorithm for the capacitated Hitchcock problem.* RAND Corp. Paper (1956).
Idem en Naval Research Logistics Quarterly, 4 (1957).
- FordF56b FORD, L.R.- FULKERSON, D.R. *Solving the transportation problem.* RAND Corp. Paper (1956)
Idem Manag. Science Vol.3 Nro.1 (1957). Zb.397 # 90093.
- FordF57 FORD, L.R.- FULKERSON, D.R. *Constructing maximal dynamic flows from static flows.* RAND Corp. Paper (1957)
Idem en J. Oper. Res. JORSA 6 (1958), 419/433.
- *FordF62 FORD, L.R.- FULKERSON, D.R. *Flots in networks.* Princenton Univ. Press (1962). M.R. 28 # 2917.
Flots dans les graphes. Gauthier Villars (1967).
- Four73 FOURNIER, J.C. *Colorations des arêtes d'un graphe.* Cahiers du Centre de Rech. Opérat. CERO 15 (1973), 311/314.
- Fra66 FRANK, A. *Connectivity and networks flows.* en [GraGL66], Cap.2, 111/178.
- *FraF71 FRANK, H. - FRISCH, L.T. *Communication, transmission and transportation networks.* Addison-Wesley (1971). M.R. 49 # 12063.
- Fran39 FRANKLIN, P. *The four color problem.* Scripta Math. 6 (1939), 149/156 ; 197/219.
- *FréKF46 FRÉCHET, M.- KY-FAN, A. *Introduction à la Topologie Combinatoire.* Vuibert (1946)
Initiation to combinatorial topology. Prindle, Weber, Schmit (1967).
Introducción a la Topología Combinatoria. EUDEBA (1959).
- Ful56 FULKERSON, D.R. *Note on Dilworth's chain decomposition theorem for partially ordered sets.* Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 701/702.
- Ful59 FULKERSON, D.R. *A network-flow feasibility theorem and combinatorial applications.* Canad. J. of Math. 11 (1959), 440/451.

- Ful61 FULKERSON, D.R. *An out-of-kilter method for minimal-cost flow problems.* J. Soc. Ind. Appl. Math. (SIAM) 9 (1961), 18/27.
- Ful66 FULKERSON, D.R. *Flow networks and combinatorial operations research.* The Amer. Math. Monthly 73-2 (1966), 115/138.
Idem en [Ful75a], 139/171.
- Ful75a FULKERSON, D.R. (Edit.) *Studies in graph theory (Part I –II)* Vol.11–12 de MAA Studies in Mathematics. The Math. Assoc. of America, (1975).

G

- Gabr81 GABRIEL, P. *Un jeu ? Les nombres de Catalan.* UNI - Mitteilungsblatt des Rektorats der Univ. Zürich. 6-12 (1981), 4/5.
- Gale57 GALE, D. *A theorem on flows in networks.* Pacific J. Math. 7 (1957), 1073/1082.
- Galil80 GALIL, Z. *Finding the vertex connectivity of graphs.* SIAM J. Comput. 9 (1980) 197/199.
- *GallS86 GALLO, G.- SANDI, C. (Edit.) *Network at Pisa.* North Holland (1986).
M.R. 87a # 90057.
- Gard58 GARDNER, M. *Mathematical games.* Scientific American (1958), 136/142
- *Gard59 GARDNER, M. *New mathematical diversions.* Scientific American Inc.(1959/60/61)
Nuevos pasatiempos matemáticos. Edit. Alianza (1972/80/82/84).
- Gard60 GARDNER, M. *The celebrated four-color map problem of topology.* Scientific American 203, Mars (1960), 218/226. M.R. 22 # 5040.
- Gard68 GARDNER, M. *Combinatorial problems involving "tree" graphs and forests of trees.* Scientific American-February (1968), 118/121.
- Gard76 GARDNER, M. *Mathematical games. Catalan numbers.* Scientific American 234, June (1976), 120/125.
- *Gard93 GARDNER, M. *Miscelánea Matemática.* Salvat Editores, (1993).
- GareJ77 GAREY, M.R.- JOHNSON, D.S. *¿ Is the rectilinear Steiner tree problem is NP complete ?* SIAM J. Appl. Math. 32 (1977), 826/834. M.R. 56 # 1796.
- GareGJ71 GAREY, M.R.- GRAHAM, R.I.- JOHNSON, S. *The complexity of computing Steiner minimal trees.* SIAM J. Appl. Math. 32 (1971), 835/859.
- GarW77 GARSIA, A.M.- WACHS, M.L. *A new algorithm for minimal binary search trees.* SIAM J. Computing 6 (1977), 622/642.

- *Gass58 GASS, S.I. *Linear programming. Methods and applications*. McGraw Hill (1958/69)
M.R. 20 # 3037. 33 # 3772. 42 # 1502.
Programación lineal. Métodos y aplicaciones. C.E.C.S.A.
- *GavS80 GAVRILOV, G.P.- SAPOZHENKO, A. *Problemas de matemática discreta*. MIR (1980).
- GellH71 GELLER, D.- HARARY, F. *Connectivity in digraphs*. Lect. Notes in Math. 186.
Springer- Verlag (1971), 105/115
- Ger83 GERSTEN, S.M. *Intersections of finitely generated subgroups of free groups and resolutions of graphs*. Inv. Math. 71 (1983), 567/591. M.R. 85m # 05037b.
- *Gers82 GERSTING, J.L. *Mathematical structures for computer science*. W.H.Freeman Co. (1982/87).
- Ghe61 GHELLINCK de, G. *Aspects de la notion de dualité en théorie des graphes*. Cahiers Centre d' Études Rech. Opérat. (CERO) -Vol.3 (1961), 94/123.
M.R. 24 A # 692. Zb. 135 pg. 422.
- GhoH64 GHOUILA HOURI, A. *Flots et tensions dans un graphe*. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 81 (1964), 267/339.
- *GibI77 GIBLIN, P.J. *Graphs, surfaces and homology. An introduction to algebraic topology*. Chapman-Hall (1977). M.R. 55 # 11235 / 82a 55001
- GilM59 GILBERT, E.N.- MOORE, E.F. *Variable length binary encodings*. Bell. System Tech. J. 38 (1959), 933/968.
- GilP68 GILBERT, E.N.- POLLAK, H.O. *Steiner minimal trees*. SIAM J. Appl. Math. 16 (1968), 1/29. M.R. 36 # 6317.
- GlaK74 GLASSEY, C.R.- KARP, R.M. *On the optimality of Huffman trees*. O.R.C. 74-21 Univ. of California - Berkeley (1974).
- GloGK86 GLOVER, F.- GLOVER, R.- KLINGMAN, D. *Threshold assignment algorithm*. En [GallS86], (1986), 12/37.
- Göb80 GÖBEL, F. *On a 1-1 correspondence between rooted trees and natural numbers*. J. Comb. Th.B 29 (1980), 141/143.
- *God81 GODSIL, C.D. *Spectra of trees. Convexity and Graph Theory*. (Jerusalem 1981) North Holland Math. Stud.87 (1984), 151/159.
- GolY76 GOLOVINÁ, L.I.- YAGLÓM, I.M. *Inducción en la geometría*. Edit. MIR (1976/81).
- *Golu80 GOLUMBIC, M.C. *Algorithmic graph theory and perfect graphs*. Acad. Press (1980). M.R. 81e # 68081.

- GomH60 GOMORY, R.E.- HU, T.C. *Multi-terminal network flows*. I.B.M. Report 318, (1960).
Idem en *Journal of SIAM* 9 (1961), 551/570.
- GomH75 GOMORY, R.E.- HU, T.C. *Multi-terminal flows in a network*. en [Ful75a], 172/199.
- *GonM79 GONDRAN, M.- MINOUX, M. *Graphs and algorithms*. J. Wiley (1979/84);
Graphes et algorithmes. (2da. Edic. revisada y aumentada). Eyrolles (1985).
M.R. 82g # 68059 // 85d # 90037. Zb. 497 # 05023 // 611 # 90096.
- *Gor88 GORBÁTOV, V. A. *Fundamentos de la matemática discreta*. MIR (1988).
M.R. 89i # 00002.
- *GouJ83 GOULDEN, I.P.- JACKSON, D.M. *Combinatorial enumeration*. J.Wiley (1983).
M.R. 84m # 05002.
- *GraGL66 GRAHAM, R.L.- GRÖTSCHEL, M.- LOVÁSZ, L. (Edit) *Handbook of combinatorics*
(I - II). MIT Press and North Holland (1966/95).
- *GraH85 GRAHAM, R.L.- HELL, P. *On the history of the minimum spanning tree problem*.
Ann. History of Computing (1985).
- GreK76 GREENE, C.- KLEITMAN, D.J. *Strong versions of Sperner's theorem*. *J. Comb.Th.*
A 20 (1976), 80/88.
- *Gri85 GRIMALDI, R.P. *Discrete and combinatorial mathematics. An applied introduction*.
Addison Wesley (1985/89).
Matemáticas discreta y combinatoria. Introducción y aplicaciones. Limusa (1989/97)
- Grin68 GRINBERG, E.J. *Plane homogeneous graphs of degree three without hamiltonian*
circuits. *Latvian Math. Yearbook* 4 (1968), 51/58. (en ruso)
- *GroT87 GROSS, J.L.- TUCKER, T.W. *Topological graph theory*. J.Wiley Interscience (1987).
M.R. 88h # 05034.
- Grü63 GRÜNBAUM, B. *Grötzsch theorem on 3-colorings*. *Michigan Math. J.* 10 (1963)
303/310.
- Grüw38 GRÜNWARD, T. *Ein neuer Beweis eines Mengerschen Satzes*. *J. London Math.*
Soc. 13 (1938), 188/192.
- Guy67 GUY, R.K. *The crossing number of the complete graph*. *Mathematics Depart. Univ.*
of Calgary. Research Paper 8 (1967).
- Guy69 GUY, R.K. : *The decline and fall of Zarankiewicz's theorem*. en [Har69a], 63/69.
M.R. 40 # 7144. Zb. 192 pg. 606.
- Guy70 GUY, R.K. : *Latest results on crossing numbers*. *Lect. Notes in Math.* 186. Springer-
Verlag (1970), 143/156.

Guy72 GUY, R. K. *Crossing numbers of graphs*. Lect. Notes in Math. 303 - Springer-Verlag (1972), 111/124. M.R. 49 #2442.

$\mathcal{H}$

Had63 HADLEY, G. *Linear Programming*. Addison Wesley Publ. Co. (1963)

Hadw43 HADWIGER, H. *Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe*. Vierteljschr. Naturforsch. Gesellsch. Zürich 88. (1943), 133/142.

Hag78 HAGGARD, G. *Pruning and depth first search*. Lect. Notes in Math. 642. Springer-Verlag (1978), 216/224.

Haj61 HAJÓS, G. *Über eine Konstruktion nicht n -färbbarer Graphen*. Wiss. Zeitschr. Martin Luther Univ. Halle-Wittenberg, A-10 (1961), 116/117.

Hak77 HAKEN, W. *An attempt to understand the Four Color Problem*. J. Graph Th. 1-3, (1977), 193/206.

Haki61 HAKIMI, S.L. *On trees of a graph and their generation*. J. Franklin Inst. 272 (1961), 347/359. M.R. 24 A # 1226.

Haki71 HAKIMI, S.L. *Steiner's problem in graphs and its implications*. Networks 1 (1971), 113/135.

HakiS89 HAKIMI, S.L.- SCHMEICHEL, E.E. *A note on the vertex arboricity of a graph*. SIAM J. Discrete Math.. 2 (1989), 64/67. Zb. 684 # 05028.

Hal69a HALIN, R. *Zur Theorie der n -fach zusammenhängenden Graphen*. Abh. Math.Sem. Univ. Hamburg 33 (1969), 133/164.

Hal69b HALIN, R. *A theorem on n -connected graphs*. J. Comb. Th. 7 (1969), 150/154. M.R. 40 # 1297.

*HallM67 HALL, M. (Jr) *Combinatorial theory*. Blaisdell Publ. Co. (1967) (J. Wiley (1986)). M.R. 37# 80 // 87j 05001. Zb. 196 pg. 24.

HallP35 HALL, Ph. *On representatives of subsets*. J. London Math. Soc. X (1935), 26/30.

*HamR68 HAMMER, P.L.- RUDEANU, S. *Boolean methods in operations research and related areas*. Springer - Verlag (1968), M.R.38 # 4132. Zb. 155 pg. 280. *Méthodes booléennes en recherche opérationnelle*. Dunod (1970), M.R. 41 #5035. Zb.214 pg. 186.

Han66 HANAN, M. *On Steiner's problem with rectilinear distance*. SIAM J. Appl. Math. 14 (1966), 255/265.

Har62 HARARY, F. : *The maximum connectivity of a graph*. Proc.Nat. Acad. Sci. USA 48 (1962), 1142/1146.

- Har64 HARARY, F. *Recent results in topological graph theory*. Acta Math. Acad. Sci. Hung. XV (1964), 405/412.
- *Har67a HARARY, F. (Edit.) *Graph theory and theoretical physics*. Academic Press (1967). M.R. 37 # 6208. Zb. 202 pg. 556.
- Har67b HARARY, F. *Topological concepts in graph theory*. en [HarB67], 13/17.
- *Har69a HARARY, F. (Edit.) *Proof techniques in graph theory*. Acad. Press (1969). Zb. 193, pg. 281.
- *Har69b HARARY, F. *Graph theory*. Addison Wesley (1969-72). M.R. 41 # 1566. Zb. 182 pg 577.
- Har69c HARARY, F. *The four color conjecture and other graphical diseases*. en [Har69a], 1/9. M.R. 40 # 7150.
- Har74c HARARY, F. *Recent results on trees*. Lect. Notes in Math. 406 Springer-Verlag (1974), 1/9.
- *Har79 HARARY, F. (Edit.) *Topics in graph theory*. Acad. Press (1979).
- *HarB67 HARARY, F.- BEINEKE, L. (Edit.). *A Seminar on Graph Theory*. Holt-Rinehart-Winston (1967), Zb. 159 pg. 541.
- HarHi63 HARARY, F.- HILL, A. *On the number of crossing in the complete graphs*. Proc. Edimburgh Math. Soc. 13 (1963), 333/338. M.R. 29 # 602.
- HarHo72 HARARY, F.- HOLZMANN, C. *On the tree graph of a matroid*. SIAM J. Appl. Math. 22 (1972), 187/193.
- HarP66 HARARY, F.- PALMER, E.M. *The reconstruction of a tree from its maximal subtrees*. J. Canad. Math. XVIII, 4-(1966), 803/810. M.R. 34 # 89. Zb. 141 pg. 214.
- *HarP73 HARARY, F.- PALMER, E.M. *Graphical enumeration*. Acad. Press (1973). M.R. 50 # 9682. Zb. 276 pg. 284.
- HarT65 HARARY, F.- TUTTE, W.T. *A dual form of Kuratowski's theorem*. Canad. Math. Bull. 8-1 (1965), 17/20 ; 8-3 (1965), 373.
Idem Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965), 168. M.R. 32 # 8329/30/31. Zb. 135 pg 420.
- HarHM77 HARARY, F.- HSU, D.- MILLER, Z. *The biparticity of a graph*. J. Graph Theory 1 (1977), 131/133. Zb. 376 # 5043.
- *HarNC65 HARARY, F.- NORMAN, R.- CARTWRIGHT, D. *Structural models. An introduction to the theory of directed graphs*. J. Wiley (1965). M.R. 32 # 2345. Zb. 139 pg. 415.
Modèles structuraux. Introduction à la théorie des graphes orientés. Dunod (1968). Zb. 176 pg. 225.

- HarPT64 HARARY, F.- PRINS, G.- TUTTE, W.T. *The number of plane trees.* Indagationes Mathematicae XXVI (1964), 319/329.
- *Harr70 HARRIS, B. (Edit.) *Graph theory and its applications.* Acad. Press (1970). M.R. 41 # 8283.
- HartW90 HARTSFIELD, N.- WERTH, J.S. *Spanning trees of the complete bipartite graph.* Topics in Combinatorics and Graph theory (1990), 339/346. M.R. 91m # 05100.
- Hea90 HEAWOOD, P.J. *Map colour theorem.* Quart. J. Math. Pure Appl. 24 (1890), 332/338.
- HemB78 HEMMINGER, R.L.- BEINEKE, L.W. *Line graphs and line digraphs.* Cap.10 de [BeiW78], 271/305. Zb. 434 # 05056.
- *HenW73 HENLEY, E.J.- WILLIAMS, R.A. *Graph theory in modern engineering.* Acad. Press (1973). M.R. 50 # 12465.
- *HilCV32 HILBERT, D.- COHN VOSSEN, S. *Anschauliche geometrie.* Springer (1932). *Geometry and imagination.* Chelsea Publ. (1952/56).
- Hit41 HITCHCOCK, F.L. *The distribution of a product from several sources to numerous localities.* J. Math. and Phys. 20 (1941), 224/230.
- Hof60 HOFFMAN, A.J. *Some recent applications of the theory of linear inequalities to extremal combinatorial analysis.* Proc. of Symposia in Applied Mathematics (Vol. 8) Amer. Math. Soc. (1960), 113/127.
- Hof68 HOFFMAN, A.J. *Some recent results on spectral properties of graphs.* Beitrage zur Graphentheorie (Kolloquium, Manebach) (1968), 75/80.
- Hof70 HOFFMAN, A.J. *On eigenvalues and colorings of graphs.* En [Harr70], 79/91. M.R. 44 # 1601. Zb 221 # 05061.
- Hof74 HOFFMAN, A.J. *A generalization of Max Flow-Min Cut.* Math. Programming 6 (1974), 352/359.
- Hof75 HOFFMAN, A.J. *Eigenvalues of graphs.* en [Ful75a], 225/245. M.R. 53 # 10656.
- Hof76 HOFFMAN, A.J. *Total unimodularity and combinatorial theorems.* Linear Algebra and its Applications 13 (1976), 103/108.
- Hof79 HOFFMAN, A.J. *Linear programming and combinatorics.* Proc. of Symposia in Pure Mathematics. 34 (1979), 245/253.
- HofK56a HOFFMAN, A.J.- KUHN, H.W. *Systems of distinct representatives and linear programming.* The Amer. Math. Monthly 63 (1965), 455/460.
- HofK56b HOFFMAN, A.J.- KUHN, H.W. *On systems of distinct representatives.* en [KuhnT56] 199/206.

- HofM63 HOFFMAN, A.J.- MARKOWITZ, H.M. *A note on shortest path, assignment and transportation problem.* Naval Res. Logist. Quart. 10 (1963), 375/379. M.R. 29 # 2094. Zb.128 pg.395.
- HofS77 HOFFMAN, A.J.- SCHWARTZ, D.E. *On partitions of a partially ordered set.* J. Comb.Th. B - 23 (1977), 3/13.
- HöftH73 HÖFT, H. - HOWARD, P. *A graph theoretic equivalent to the axiom of choice.* Zent. Mat. Logik Grundlagen Math.19 (1973), 191. M.R. 47 # 4831.
- *Hons77 HONSBEREGER, R. *Ingenuity in mathematics.* Math. Assoc. of America (1977). *El ingenio en las matemáticas.* Colección La Tortuga de Aquiles. Nro.4. Ind.Gráfica Lavel – España (1994)
- HopT71 HOPCROFT, J.- TARJAN, R. : *Planarity testing in $V \log V$ steps.* Computer Science Technical Report Nro. 201. Stanford Univ. (1971), 18/20.
- HopT73 HOPCROFT, J. - TARJAN, R. *Efficient algorithms for graph manipulation.* J Assoc. Com. Vol.16 (1973), 372/378.
- HopT74 HOPCROFT, J. - TARJAN, R. *Efficient planarity testing.* J. Assoc. Com. 21 (1974), 549/568. M.R. 50 # 11841. (erratum M.R. 52 # 7194)
- HopK73 HOPCROFT, J.- KARP, R.M. *An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matching in bipartite graphs.* SIAM J. Comput. 2 (1973), 225/231.
- Hor84 HORIBE, Y. *Remarks on "compact" Huffman trees.* J. Comb. Inform. System Sci. 9 (1984), 117/120. M.R. 90a # 05061.
- *HorS76 HOROWITS, E.- SAHNI, S. *Fundamentals of data structures.* Comp.Sci. Press (1976/83).
- *HorwS78 HOROWITS, E.- SAHNI, S. *Fundamentals of computer algorithms.* Comp. Sci. Press (1978).
- Hu63 HU, T.C. *Multy-commodity network flows.* J.O.R.S.A. 11 (1963), 344/360.
- *Hu69 HU, T.C. *Integer Programming and Network Flows.* Addison-Wesley (1969/70).
- Hu82 HU, T.C. *Combinatorial algorithms.* Addison-Wesley (1982). M.R. 87j # 90091.
- HuT71 HU, T.C.- TUCKER, A.C. *Optimal computer search trees, and variable lenght alphabetic codes.* SIAM J. on Appl. Math. 21 (1971), 514/532.
- Huf52 HUFFMAN, D.A. *A method for the construction of minimum redundancy codes.* Proc. IRE 40 (1952), 1098/1101.
- Hut67 HUTSCHENREUTER, H. *Einfacher Beweis des Matrix Gerüst Satzes der Netzwerk-theorie.* Wiss. Z. TH Ilmenau 13 (1967), 403/404.

Hwa76 HWANG, F.K. *On Steiner minimal trees with rectilinear distance*. SIAM J. Appl. Math. 30 (1976), 104/114.

*HwaRW92 HWANG, F.K. - RICHARDS, D. - WINTER, P. *The Steiner tree problem*. North Holland (1992). M.R. 94a # 05051.

I

Iri60 IRI, M. *A new method of solving transportation networks problems*. J.O.R.Japan 3 (1960), 27/87.

*Iri69 IRI, M. *Network flow, transportation and scheduling*. Acad. Press (1969). M.R. 43 # 7197.

IvaR67 IVĂNESCU, P.L.- RUDEANU, S. *A pseudo-boolean approach to matching problems in graphs with applications to assignement and transportation problemms*. en [Ber67a], 161/175.

J

JacG79 JACKSON, D.M.- GOULDEN, I.P. *Sequence enumeration and the de Bruijn-van Aardenne-Ehrenfest-Smith-Tutte theorem*. Canad. J. Math. XXXI (1979), 488/495. M.R. 81j # 05013. Zb. 431 # 05004.

JacG81 JACKSON, D.M.- GOULDEN, I.P. *The generalisation of Tutte's results for chromatic trees by Lagrangian methods*. Canad. J. Math. 33 (1981), 12/19. M.R. 82f # 05032.

Jae75a JAEGER, F. *Sur les flots non-nuls dans les graphes*. Analyse Appliquée et Informatique Bordeaux 1 (1975), 229/235.

Jae75b JAEGER, F. *On nowhere-zero flows in multigraphs*. Proc. Fifth Comb. Conf. Univ. of Aberdeen, July (1975), 373/378. M.R. 52 # 16570.

Jae75c JAEGER, F. *Flows and generalized coloring theorems*. I.R.M.A. Univ. Scientifique et Médicale de Grenoble. (1975), 1/17.

Jae76 JAEGER, F. *Flots, tensions et colorations d'un graphe*. Seminaire sur la théorie des graphes et la combinatoire. (Edit.C.Berge - M.Las Vergnas), (1975/76), 1/11.

Jae88 JAEGER, F. *Nowhere-zero flow problems*. Cap. 4 de [BeiW88], 71/95.

Jar36 JARNIK, V. *O jistém problém minimálnim*. Práca Moravské Prirodvedecké Spol.. 6 (1936), 57/63. (en checoeslovaco).

*JauMA71 JAUFFRED, F.- MORENO, A.- ACOSTA, J. *Métodos de optimización. Programación Lineal Gráfica*. Representaciones y Servicios de Ingeniería. México (1971).

*JenT95 JENSEN, T.R.- TOFT, B. *Graph coloring problems*. J. Wiley (1995).

- Jew58 JEWELL, W.S. *Optimal flow through networks with gains*. Operat. Research 10 – 4 (1962), 476/480.
- Jew67 JEWELL, W. *Multi-commodity network solutions*. en [Ber67a], 183/192.
- *Johs84 JOHNSONBAUGH, R. *Discrete Mathematics*. Mac Millan Publ. (1984/86). *Matemáticas Discretas*. Edit. Iberoamerica (1988).
- Jor69 JORDAN, C. *Sur les assemblages de lignes*. J. Reine Angew. Math. 70 (1869), 185/190.

$\mathcal{K}$

- Kai73 KAINEN, P.C. : *Some recents results in topological graph theory*. Lect.Notes in Math. 406 Springer-Verlag (1973), 76/108. M.R. 51 # 2966.
- *KaiS77 KAINEN, P.C.- SAATY, T.L. *The four color problem, assaults and conquest*. Mac. Graw Hill (1977).
- Kam67 KAMAE, T. *The existence of a hamilton circuit in a tree graph*. I.E.E.E.Trans.Circuit Theory CT 14 (1967), 279/283. M.R. 40 # 58.
- Kan42 KANTOROVITCH, L. *On the translocation of masses*. Dokl. Akad. Nauk. SSSR 37 (1942), 199/201. (traducción en Manag. Science 5 (1958)
- Karz74 KARZANOV, A.V. *Determining the max flow in a network by the method of preflows* Soviet Math. Dokl. 15 (1974), 434/437.
- Kas63 KASTELEYN, P.W. *A soluble self-avoiding walk problem*. Physica 29 (1963), 1329/1337.
- Kas67 KASTELEYN, P.W. *Graph theory and crystal physics*. Cap. 2 de [Har67a], 44/110. M.R. 40 # 6903. Zb. 205 pg. 284.
- *Kau62 KAUFMANN, A. *Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle: (I-II-III)*. Dunod (1962-64-72-74). M.R. 34 # 2332 / 57 # 18752. Zb. 128 pg. 395. *Graphs, dynamics programming and finite games* (tomo II). Acad. Press (1967). *Métodos y modelos de la programación dinámica* (tomo II). C.E.C.S.A. (1966).
- *Kau68b KAUFMANN, A. *Introduction à la combinatoire en vue des applications*. Dunod (1968). M.R. 51 # 10109. Zb. 169 pg. 18. *Graphs, dynamic programming and finite games*. Acad. Press (1967). *Introducción a la combinatoria y sus aplicaciones*. C.E.C.S.A. (1971).
- KazW73 KAZARINOFF, N.- WEITZENKAMP. *Squaring rectangles and squares*. The Amer. Amer. Math. Monthly 80–8 (1973), 877/888.
- Kelly57 KELLY, P.J. *A congruence theorem for tree*. Pacific J. Math. 7 (1957) 961/968. M.R.19 pg. 442. Zb. 78 pg.371.

- Kelm87 KELMANS, A. *A short proof and a strengthening of the Whitney 2-isomorphism theorem on graphs.* Discrete Math. 64 (1987), 13/25. M.R. 88i # 5170. Zb. 613 # 05034.
- *KemS60 KEMMENY, J.G.- SNELL, J.L. *Finite Markov Chains.* Van Nostrand (1960). M.R. 22B # 5998.
- Kempe79 KEMPE, A.B. *On the geographical problem of the four colors.* Amer. J. Math. 2 (1879), 193/204.
- Kempe80 KEMPE, A.B. *How to colour a map with four colours.* Nature 21 (1879-80), 399/400.
- Kir47 KIRCHHOFF, G. *Über die Auflösung der Gleichungen auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird.* Ann. der Phys. und Chemie. 72 (1847), 497/508. Traducción en I.R.E. Trans. Circuit Theory C.T. 5 (1958), 4/8.
- KisK69 KISHI, G.- KAJITANI, Y. : *Subsets of trees wich determine the original graph.* Electron. Commun. Japan 52-2 (1969), 23/30. M.R. 41 # 1580.
- Kle70 KLEITMAN, D.J. *The crossing number of $K_{5,n}$.* J. Comb. Th. 9 (1970), 315/323. M.R. 43 # 2776.
- Knu67 KNUTH, D.E. : *Oriented subtrees of an arc digraph.* J. Comb. Th. 3 (1967), 309/314. M.R. 35 # 5361.
- *Knu69 KNUTH, D. E. *The art of computer programing – Vol.I Fundamental algorithms - Vol.II Seminumerical algorithms - Vol.III Sorting and Searching.)* Addison-Wesley (1969/73/75/81). M.R. 44 # 3530/31 // 51 # 14624 // 56 # 4281. Zb. 191 pg. 179/80. *El arte de programar ordenadores. Algoritmos fundamentales.* Reverté S.A. (1985)
- Kön31 KÖNIG, D. *Graphen und Matrizen* Mat. Fis. Lapok 38 (1931), 116/119.
- *Kön36 KÖNIG, D. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.* Akad. Verlag-Leipzig (1936). M.R. 12 pg.195. Zb.13 pg. 228. Reimpreso por Chelsea (1950) y por Teubner-Verlag (1986) con el trabajo de Euler 1736. M.R. 88i # 01168. *Theory of finite and infinite graphs.* Birkhäuser-Boston (1990). M.R. 91f # 01026.
- *Koo49 KOOPMANS, T.C. *Optimum utilization of the transportation system.* Econometrica Vol.17, Supplement (1949), 136/145.
- *Koo51 KOOPMANS, T.C. (Edit) *Activity analysis of production and allocation.* Cowles Commission Monog 13.– J. Wiley (1951).
- KooR51 KOOPMANS T.C.- REITER, S. *A model of transportation.* en Cap.XII de [Koo51], 222/250.

- *Kra30 KRAÏTCHIK, M. *La mathématique des jeux*. Bruxelles (1930/53).
Mathematical recreations. Norton (1942). Dover (1953). M.R. 14 pg. 620.
Matemáticas recreativas. Edit. El Ateneo – Bs.As. (1946).
A matemática dos jogos (Traducción parcial) Public. Europa-América (1958).
- Kru56 KRUSKAL, J.B. *On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem*. Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 48/50. M.R. 17 pg. 1231. Zb. 70 pg 184.
- Kuhn54 KUHN, H.W. *A combinatorial algorithm for the assignment problem*. Logistic Papers 11. George Washington Univ. (1954).
- Kuhn55 KUHN, H.W. *The hungarian method for solving the assignment problem*. Naval Research Logistic Quarterly 2 (1955), 83/97.
- Kuhn56 KUHN, H.W. *Variants of the Hungarian Method for assignment*. Naval Research Logistic Quarterly 3 (1956), 253/258.
- KuhnT56] KUHN, H.W.- TUCKER, A.W. (Edit) *Linear Inequalities and Related Systems*. Annals of Math. Studies 38 – Princeton Univ. Press (1956).
- Kui70 KUICH, W. *Languages and the enumeration of planted plane trees*. Indagationes Mathematicae XXXII (1970), 268/280.
- Kur30 KURATOWSKI, G. *Sur le problème des courbes gauches en topologie*. Fund. Math. 15 (1930), 271/283.

$\mathcal{L}$

- *Law76 LAWLER, E. *Combinatorial optimization. Networks and matroids*. Holt-Rinehart Winston (1976), M.R.55 # 12005.
- LawW66 LAWLER, E.- WOOD, D.E. *Branch and bound methods. A survey*. J.O.R.S.A. Vol.14-4. (1966), 699/719.
- LecM69 LECLERC, B.- MONJARDET B. *Représentation graphique d'un graphe*. Math. et Sciences Humaines Nro. 26 (1969), 51/57.
- LemEC67 LEMPEL, A.- EVEN, S.- CEDERBAUM, I. *An algorithm for planarity testing of graphs*. en [Ber67], 215/232
- Les74 LESNIAK, L. *Results on the edge-connectivity of graphs*. Discrete Math. 8 (1974), 351/354. Zb. 277 # 05123.
- Lew82 LEWIN, M. *A generalisation of the matrix tree theorem*. Math. Zeit. 181 (1982), 55/70. M.R. 84c # 05035. Zb.478 # 05036.
- Lews99 LEWIS, R.P. *The number of spanning trees of a complete multipartite graph*. Discrete Math. 197/198 (1999), 537/541. M.R. 99i # 05100.

- Lick69 LICK, D.R. *Critically and minimally n -connected graphs*. Lect. Notes in Math. 110. Springer-Verlag (1969), 199/205.
- Lick73a LICK, D.R. *Characterizations of n -connected and n -line connected graphs*. J. Comb. Th. B 14 (1973), 122/124.
- Lick73b LICK, D.R. *A survey of critically and minimally n -connected and n -line connected graphs*. Math Japonica 18 (1973), 99/106. Zb. 283 # 05107.
- *Lint74 LINT van, J. H. *Combinatorial theory. Seminar Eindhoven*. Lect. Notes in Math. 382. Springer-Verlag (1974). M.R. 50 # 4311. Zb. 315 # 05001
- Lio66 LIONS, J. *Matrix reduction using the hungarian method for the generation of school time-tables*. Communications of the ACM 9-5 (1966), 349/354.
- Lov72 LOVÁSZ, L. *A characterization of perfect graphs*. J. Comb. Th. B -13 (1972), 95/98. M.R.46 # 8885.
- Lov75 LOVÁSZ, L. *Three short proofs in graph theory*. J. Comb. Th. 19 B (1975), 269/271. M.R. 53 # 211.
- Lov83 LOVÁSZ, L. *Perfect graphs*. Cap.3 de [BeiW83], 55/87.
- LovP73 LOVÁSZ, L.- PELIKÁN, J. *On the eigenvalues of trees*. Periodica Math. Hungarica Vol. 3, (1973), 175/182
- *LovP86 LOVÁSZ, L.- PLUMMER, M.D. *Matching theory*. North Holland (1986). M.R. 88b #90087.
- Low13 LOWENHEIM, L. *Potenzen im Relativkalkül und Potenzen allgemeiner endlicher*. Sitz. ber. Berliner Math. Ges. 12 (1913), 137/148.
- *Luc79 LUCCHESI, C.L. *Introdução à teoria dos grafos*. Inst. Mat. Pura e Aplicada (IMPA). Brasil (1979).
- LukFP51 LUKASIEWICZ, C.L.- FLOREK, K.- PERKAL, J.- STEINHAUS, H.- ZUBRZYCKI, S. *Sur la liaison et la division des points d'un ensemble fini*. Colloq. Math. 2 (1951), 282/285.

$\mathcal{M}$

- MacL37a MAC LANE, S. *A combinatorial condition for planar graphs*. Fund. Math. 28 (1937), 22/32. Zb. 15 pg. 375.
- MacL37b MAC LANE, S. *A structural characterisation of planar combinatorial graphs*. Duke Math. 3 (1937), 466/472.

- Maf81 MAFFIOLI, F. *Complexity of optimum undirected tree problems. A survey of recent results.* Analysis and Designs in Combinatorial optimization. International Center. Courses and Lectures 266. Springer-Verlag (1981).
- Mag59 MAGHOUT, K. *Sur la détermination des nombres de stabilité et du nombre chromatique d'un graphe.* C. R. Acad. S.P. 81959), 3522/3523.
- Mag63 MAGHOUT, K. *Applications de l'algèbre de Boole à la théorie des graphes et aux programmes linéaires et quadratiques.* Cahiers Centre d' Études Rech. Opérat. (CERO) Vol.5 (1963), 21/99. M.R. 28 # 1985. Zb. 114 pg. 121.
- MagCS62 MAGHOUT, K.- COMES, G.- STEINBERG, N. *Généralisation à n dimensions du problème du transport.* Rev. Française de Rech. Opérat. 6-22, (1962), 21/34.
- MalKM78 MALHOTRA, V.M.- KUMAR, P.- MAHESHWARI, S.N. *An $O(n^3)$ algorithm for finding maximum flows in networks.* Inf. Proc. Letters 7 (1978), 277/278.
- MannR53 MANN, H.B.- RYSER, H.J. *Systems of distincts representatives.* The Amer. Math. Monthly 60 (1953), 397/401.
- Manv70 MANVEL, B. *Reconstruction of trees.* Canad. J. Math. 22 (1970), 55/60. M.R. 41 # 1581. Zb.199 pg.274.
- *Mars71 MARSHALL, C. W. *Applied graph theory.* J. Wiley (1971). M.R. 48 # 1951. Zb. 226 # 05101.
- Mau76 MAURER, S.B. *Matrix generalizations of some theorem on trees cycles and cocycles in graphs.* SIAM J. Appl. Math. 30 (1976), 143/148.
- May65 MAY, K.O. *The origin of the four color problem.* Scripta Math. 56, (1965), 346/348.
- McC84 Mc CUAIG, W. *A simple proof of Menger's theorem.* J. Graph Th. 8 (1984), 427/429.
- McKee79 Mc KEE, T.A. *A self-dual language for graph theory.* J. Comb. Th. 27 (1979), M.R. 83c # 05045.
- McKee81 Mc KEE, T.A. *A quantifier for matroid duality.* Discrete Math.34 (1981), 315/318.
- McKee83 Mc KEE, T.A. *Duality principles for binary matroids and graphs.* Discrete Math. 43 (1983), 215/222. Zb. 507 # 05017.
- McKee84a Mc KEE, T.A. *Recharacterizing eulerian. Intimation of new duality.* Discrete Math. 51 (1984), 237/242. M.R.86a # 05083. Zb. 547 # 05043.
- McKee84b Mc KEE, T.A. *Logical aspects of combinatorial duality.* Canad. Math. Bull. 27 (1984), 251/256. Zb. 514 # 05058.
- McKee85 Mc KEE, T.A. *The logic of graph-theoretic duality.* The Amer. Math. Monthly 92 (1985), 457/464. M.R. 86k # 5040.

- McKee87 Mc KEE, T.A. *Dual properties within graphs theory*. Fund. Math.128 (1987), 91/97. M.R. 88k # 05157.
- MelV69 MELNIKOV, I.S.- VIZING, V.G. *New proof of Brook's theorem*. J. Comb. Th. B. 7 (1969), 408/409.
- Melz61 MELZAK, Z.A. *On the problem of Steiner*. Canad. Math. Bull. 4 (1961), 143/148. M.R. 23A # 2767.
- MenD58 MENDELSON, N.S.- DULMAGE, A.L. *Some generalizations of the problem of distinct representatives*. Canad. J. Math.X (1958), 230/241.
- Meng27 Menger, K. *Zur allgemeinen Kurventheorie*. Fund Math. 10 (1927), 96/115.
- Minty60 MINTY, G.J. : *Monotone networks*. Proc. Roy. Soc. London Ser.A 257. (1960), 194/212.
- Minty61 MINTY, G.J. : *Solving steady-state nonlinear networks of monotone elements*. IRE Trans. on Circuit theory. CT 8 (1961), 99/104.
- Minty66 MINTY, G.J. *On the axiomatic foundations of the theories of directed linear graphs, electrical networks and network programming*. J. Math.and Mechanics.Vol.15 (1966), 485/520.
- Minty67 MINTY, G.J. *On the duality-principle of electrical network theory*. en [Ber67a], 249/252.
- Minty75 MINTY, G.J. *On the axiomatic foundations of the theories of directed linear graphs, electrical networks and network programming*. en [Ful75a], 246/300.
- *Mirs71 MIRSKY, L. *Transversal theory*. Acad. Press (1971).
- MirP66 MIRSKY, L.- PERFECT, H. *Systems of representatives*. J. Math. Anal. Appl. 15 (1966), 520/568.
- *MohT97 MOHAR, B.- THOMASSEN, C. *Graphs on surfaces*. J. Hopkins Univ. Press (1997).
- Mong81 MONGE, G. *Déblai et remblai*. Mémoires de l' Acad. Des Sciences. (1781).
- Monj80 MONJARDET, B. : *Théorie des graphes et taxonomie mathématique*. Regards sur la Théorie des Graphes. Actes Rencontre de Cerisy. Presses Polytech.Romandes. Lausanne (1980), 111/125.
- Moon67a MOON, J.W. *Various proofs of Cayley's formula for counting trees*. en [HarB67], 70/78.
- Moon67b MOON, J.W. *Enumerating labelled trees*. en [Har67a], 261/272
- Moon69 MOON, J.W. *The number of labelled k-trees*. J. Comb. Th. 6 (1969), 196/199.

- *Moon70 MOON, J.W. *Counting labelled trees*. Canad. Math. Monog. (1970). M.R. 43 # 98.
- Mun57 MUNKRES, J. *Algorithms for the assignment and transportation problems*. J.Soc. Indus. Appl. Math. 5 (1957), 32/38.
- Myc55 MYCIELSKI, J. *Sur le colorage des graphes*. Colloq. Math.3 (1955), 161/162. Zb.16 pg. 1044

$\mathcal{N}$

- NashW61 NASH-WILLIAMS, C.St.J. A. *Edge-disjoint spanning trees of finite graphs*. J. London Math. Soc. 36 (1961), 445/450.
- NashW64 NASH-WILLIAMS, C.St.J. A. *Decomposition of finite graphs into forests*. J. London Math. Soc. 39 (1964), 12. Zb. 119 pg. 388.
- NashW75 NASH-WILLIAMS, C.St.J.A. *Hamiltonian circuits*. en [Ful75a], 301/360. M.R. 53 # 10649.
- Neb79 NEBESKY, L. *Graph theory and linguistics*. Cap. 12 de [WilsB79], 59/80.
- Nis90 NISHIZEKI, T. *Planar graphs problems*. Computin Supp.7 - Computational Graph theory (Edit. G.Timbofer y otros). Springer-Verlag (1990), 53/68.
- *NisCh88 NISHIZEKI, T.- CHIBA, N. *Planar graphs. Theory and algorithms*. North Holland (1988).
- NorG56 NORDHAUS, E.A.-GADDUM, W. *On complementary graphs*. The Amer. Math. Monthly 63 (1956), 175/177. Zb. 17 pg. 1231.

O

- Opre69 OPRESCU, M. F. *Le calcul du flux optimum dans un réseau par la méthode des compensations successives*. Rev. Franç. Infor. et Rech. Opérat. (3ème.année) V (1969), 39/59.
- Ord71 ORDMAN, E.T. *Algebraic characterization of some classical combinatorial problems*. The Amer. Math. Monthly 78 (1971), 961/970.
- Ore60b ORE, O. *Sex in graphs*. Proc. Amer. Mat. Soc. 11-4 (1960), 533/539.
- *Ore62 ORE, O. *Theory of graphs*. Amer. Math. Soc. Colloquium Public. Vol. XXXVIII. (1962). M.R. 27 # 740 // 39 # 5411. Zb. 105 pg. 354.
- *Ore63a ORE, O. *Graphs and their uses*. Random House (1963). Math. Assoc. of America (1990). M.R. 27 # 739 // 91e # 05002. Zb. 122 pg. 418.
Grafos y sus aplicaciones. (Edición actualizada por R. J. Wilson)
Colección La Tortuga de Aquiles. Nro.6 Ind. Gráfica Lavel - España (1995).

- *Ore67 ORE, O. *The four colour problem*. Acad. Press (1967). M.R. 36 # 74.
- OreS69 ORE, O.- STEMPLE, J.Q. *Numerical methods in the four color problem*. Recent Progress in Combinatorics (Edit. W.T. Tutte). Acad. Press (1969).
- OreS70 ORE, O.- STEMPLE, J.Q. : *Numerical calculations on the four color problem*. J. Comb. Th. 8 (1970), 65/78.
- Orl78 ORLIN, J.B. *Line-digraphs, arborescences and theorems of Tutte and Knuth*. J. Comb. Th. B 25 (1978), 187/198. M.R. 80a # 05105. Zb. 328 # 05113.
- Ott48 OTTER, R. *The number of trees*. Annals of Math. 49 (1948), 583/599.

$\mathcal{P}$

- Pal69b PALMER, E.M. *On the number of labelled k-trees*. J. Comb. Th. 6 (1969), 206/207.
- Pal78 PALMER, E.M. *The enumeration of graphs*. Cap.14 de [BeiW78], 385/415.
- ParkS79 PARKER, D.- STOTT, J. : *Combinatorial merging and Huffman's algorithm*. IEEE Trans. Comput. 28 (1979), 365/367. M.R. 80g # 94111 (erratum) IEEE Trans. Comput. 30 (1981), 454. M.R. 82g # 94032.
- ParkS80 PARKER, D.- STOTT, J. *Conditions for optimality of the Huffman algorithm*. SIAM J. Comput. 9 (1980), 470/489. M.R. 82e # 68064.
- Pars71 PARSONS, T.D. : *On planar graphs*. The Amer. Math. Monthly 78 (1971), 176/178.
- *Pat56 PATTERSON, E.M. *Topology*. Oliver and Boyd (1956).
- Perc75 PERCSY, M. *Sur le nombre de parenthesages d'un produit de n facteurs*. Bull. Soc. Math. Belg. 27 (1975), 167/170. M.R. 56 # 11813.
- Perl63 PERLES, M.A. *A proof of Dilworth's decomposition theorem for partially ordered sets*. Israel J. Math. 1 (1963), 105/107.
- Pic64 PICARD, C. *Graphes complementaires et graphes planaires*. Revue Franç. Recher. Opérat. (RFRO) 8-33 (1964), 329/343.
- PipB69 PIPPERT, R.E.- BEINEKE, L.W. : *Characterizations of 2-dimensional trees*. Lect. Notes in Math. 110. Springer-Verlag (1969), 263/ 270.
- Pólya56 PÓLYA, G. *On picture-writing*. The Amer. Math. Monthly 63 (1956), 689/697.
- Pon69 PONSTEIN, J. *A new proof of Brooks' chromatic number theorem of graphs*. J. Comb. Th. 7 (1969), 255/257.
- Pon72 PONSTEIN, J. *On the maximal flow problem with real arc capacities*. Math. Programming 3 (1972), 254/256. M.R. 47 # 1439.

- Prim57 PRIM, R.C. : *Shortest connection networks and some generalizations*. The Bell System Tech. J. 36 (1957), 1389/1401.
- Prü18 PRÜFER, H. *Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen*. Arch. Der Math. Und Phys. 27 (1918), 742/744.
- Pull66 PULLEYBLANK, W.R. *Matchings and extensions*. Cap.3 de [GraGK66], 179/232.
- Pym69 PYM, J.S. *A proof of Menger's theorem*. Monatshefte Math. 73 (1969), 81/88. M.R. 39 # 1352.

$\mathcal{R}$

- Read68 READ, R.C. *An introduction to chromatic polynomials*. J. Comb. Th. 4 (1968), 52/71. M.R. 37 # 104.
- *Read72a READ, R.C.(Edit) *Graph theory and computing*. Acad. Press (1972).
- Read72b READ, R.C. *The coding of various kinds of unlabeled trees*. en [Read72a], 153/182. M.R. 42 # 8280. Zb. 243 # 00006.
- Read72c READ, R.C. *Some recents results in chemical enumeration*. Lect. Notes in Math. 303, Springer-Verlag, 241/258.
- Read78 READ, R.C. *Some applications of computers in graph theory*. Cap.15 de [BeiW78], 417/444.
- Read79 READ, R.C. *Algorithms in graph theory*. Cap. 13 de [WilB79], 381/417.
- ReadT88 READ, R.C.- TUTTE, W.T. *Chromatic polynomials*. Cap. 2 de [BeiW88], 15/42.
- Rén59 RÉNYI, A. *Some remarks on the theory of trees*. Publ. Math. Hung. Acad. Sci. 4 (1959), 73/85.
- Rin59 RINGEL, G. *Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (1959).
- Rin65 RINGEL, G. *Das Geschlecht des vollständigen paaren Graphen*. Abh. Math. Sem, Univ. Hamburg 38 (1965), 139/150. M.R. 32 # 6439.
- *Rin74 RINGEL, G. *Map color problem*. Springer-Verlag (1974). M.R. 50 # 1955.
- RinY68 RINGEL, G.- YOUNGS, J.W. *Solution of the Heawood map-coloring problem*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 60 (1968), 438/445. M.R. 37 #3959.
- RinY69a RINGEL, G.- YOUNGS, J.W. *Solution of the Heawood map-coloring problem. Case a-b-c*. J. Comb. Th. 7 (1969), 71/93 ; 342/363. M.R. 39 # 1360 ; 41 # 6723 ; 42 #1 28.

- RinY69b RINGEL, G. - YOUNGS, J.W. *Remarks on the Heawood conjecture*. En [Har69a], 133/138.
- RinLS97 RINGEL, G. - LLADÓ, A. - SERRA, O. *On the tree number of regular graphs*. Discrete Math. 165/6 (1997), 587/595. M.R. 97k # 05056.
- *Rio58 RIORDAN, J. *An introduction to combinatorial analysis*. J.Wiley (1958/80). M.R. 20 # 3077; 81e 05002.
- Rio73 RIORDAN, J. *A note on Catalan parentheses*. The Amer. Math. Monthly 80 (1973), 904/906.
- Rio75 RIORDAN, J. *Enumeration of plane trees by branches and endpoints*. J. Comb. Th. A 19 (1975), 214/222.
- Rob56 ROBACKER, J.T. *Concerning multicommodity network*. The Rand Corp. RM 1799 (1956).
- RobST96 ROBERTSON, N. - SANDERS, D. - SEYMOUR, P. - THOMAS R. *A new proof of the four colour theorem*. Elect. Research. Announc. Amer. Math. Soc. 2 (1996), 17/25. M.R. 97f # 05070.
- RobST97 ROBERTSON, N. - SANDERS, D. - SEYMOUR, P. - THOMAS R. *The four-colour theorem*. J. Comb. Th. B 70 (1997), 2/44.
- *Roc84 ROCKAFELLAR, R. T. *Network flows and monotropic optimization*. J. Wiley (1984)
- Rost67 ROSENSTIEHL, P. *L'arbre minimum d'un graphe*. En [Ber67a], 357/368. Zb. 202 pg.559.
- Rost76 ROSENSTIEHL, P. *Characterization des graphes planaires par une diagonale algébrique*. C. R. Acad. Sci. Paris (1976), Ser. A 417/419
- *RouB92 ROUSE BALL, W.W. *Mathematical recreations and essays*. (1892). (Revisado y ampliado por COXETER, H.S.M. (1938). The Mac Millan Co. New York. Xla edición, (1960). Zb. 92 pg.159.
- Roux75 ROUX, M, *Note sur l'arbre de longueur minimal*. Rev. Stat. Appl. (1975), 29/35.
- *Roy62 ROY, B. *Cheminement et connexité dans les graphes. Applications aux problèmes d'ordonnancement*. Metra Nro.1 – Série Speciale (1962).
- *Roy69a ROY, B. *Algèbre moderne et théorie des graphes (Vol. I-II)*. Dunod (1969/70). M.R. 40 # 4159; 41 # 5039. Zb. 238 # 90072/73.
- Roy69b ROY, B. : *Procédures d'exploration par séparation et évaluation (S.E.P/ S.E.S.)*. Revue Franç. Infor. Recher. Opérat. (RIRO) V-I- Juin- (1969), 61/90.

*RoyBN65 ROY, B.- BERTIER, P.- NGHIEM, P.T. *Programmes linéaires en nombres entiers et procédure S.E.P.* METRA Vol. IV No. 3 (1965).

*Ruhe91 RUHE, G. *Algorithmic aspects of flow in networks.* Kluwer Acad. Publ. (1991).

*Rys63 RYSER, H. J. *Combinatorial mathematics.* The Carus Math. Monog.XIV. The Math. Assoc.of America (1963). MR. 27 pg. 51. Zb. 112 pg. 248.

S

*Saa70 SAATY, T.L. *Optimization in Integers. Related Extremal Problems.* McGraw-Hill (1970).

Saa72 SAATY, T.L. *Thirteen colorful variations on Guthrie's four color conjecture.* The Amer. Math. Monthly 79 (1972), 2/43.

*SaaK77 SAATY, T. L. - KAINEN, P. C. *The four color problem* Mc.Graw Hill (1977). Dover (1986). M.R. 58 # 246 // 87k # 05084.

Sach76 SACHS, H. : *On the number of spanning trees.* Congressus Numerantium XV (1976), 529/535. M.R. 55 # 167.

*Sah81 SAHNI, S. *Concepts in discrete mathematics.* The Camelot Publishing Co. (1981). Zb. 284 # 05109.

*Sak84a SAKAROVITCH, M. *Optimisation Combinatoire. Graphes et programmation linéaire.* Hermann (1984).

*Sak84b SAKAROVITCH, M. *Optimisation Combinatoire. Programmation discrete.* Hermann (1984).

Saks86 SAKS, M. : *Some sequences associated with combinatorial structures.* Discrete Math. 59 (1986), 135/166. M.R. 87f # 05017.

Sau71 SAUVÉ, L. *On chromatic graphs.* The Amer. Math. Monthly 68 (1971), 107/111.

Sco51 SCOTT CAIRNS, S. *Peculiarities of polyhedra.* The Amer. Math. Monthly 58 (1951), 684/689.

*Sco61 SCOTT CAIRNS, S. *Introductory topology.* Ronald Press (1961).

Schi83 SCHMITZ, L. *An improved transitive closure algorithm.* Computing 30 (1983), 359/371. M.R. 85d # 68066. Zb. 504 # 68042.

Schn78 SCHNORR, C.P. *An algorithm for transitive closure with linear expected time.* SIAM J. Comput. 7 (1978), 127/133. M.R. 80a # 68073. Lect. Notes in Comput. Sci. 48 (1977), 329/338. Zb. 359 # 68045.

- Sed64 SEDLACEK, J. *Some properties of interchange graphs*. Theory of Graphs and its Applications (Edit.M.Fiedler). Academic Press (1964), 145/150. M.R. 30 # 3468.
- Serre77 SERRE, J. P. *Arbres*. Soc. Math. de France (1977). M.R. 57 #16426.
Trees. Springer-Verlag (1980). M.R. 82c # 20083.
- *SesR61 SESHU, S.- REED, M.B. *Linear graphs and electrical networks*. Addison-Wesley (1961). M.R. 26 # 4638.
- Sey66 SEYMOUR, P.D. *Nowhere-zero flows*. Cap.4 de [GraGL66], 289/300.
- Sha68 SHANK, H. *A note on hamilton circuit in tree graphs*. IEEE Trans. Circuit Th. C.T. 15(1968), 86.
- Shan49 SHANNON, C.E. : *A theorem on coloring the lines of a network*. J. Math. Physics 28 (1949), 148/151. M.R. 10 pg. 728.
- *Sim62 SIMONNARD, M. *Programation linéaire*. Dunod (1962)
Programación Lineal. Paraninfo (1972).
- Sim63 SIMONNARD, M. *Le problème de transport et ses généralisations. Un nouvel algorithme primal-dual de Fulkerson*. Gestion et Recher. Opérat.(Avril 1963), 272/284.
- Sim69 SIMONNARD, M. *Structure des bases dans les problèmes de transport*. Revue Franç. Rech. Opérat. 12 (1969), 130/136.
- Sing75 SINGMASTER, D. *An elementary evaluation of the Catalan numbers*. The Amer. Math. Monthly 85 (1975), 366/368. M.R. 58 # 10475.
- Stal83 STALLINGS, J.R. *Topology of finite graphs*. Invent. Math. 71 (1983), 551/565. M.R. 85m # 05037a
- *Stan41 STANDISCH, Th. A. *Data structure techniques*. Addison-Wesley (1941).
- *Steen78 STEEN, L.A. *Mathematics today*. Springer-Verlag (1978).
- Stein61 STEIN, S.K. *The mathematician as an explorer*. Scientific American 204 (1961), 149/158. M.R.22A # 7945.
- *Stein63a STEIN, S.K. *Mathematics. The Man-made Universe*. W.H. Freeman Co.(1963/69),
Les mathématiques, ce monde que créa l'homme. Dunod, (1967))
- Stein63b STEIN, S.K. *Tiling*. Cap.7 de [Stein63a], 92/106.
- Stein63c STEIN, S.K. *Tiling and electricity*. Cap.8 de [Stein63a], 107/124.
- Stein63d STEIN, S.K. *Map coloring*. Cap.14 de [Stein63a].

- Stro75 STROMQUIST, W. *The four-color theorem for small maps*. J. Comb. Th. B 19 (1975), 256/268.
- SwaW92 SWAMINATHAN, R.- WAGNER, D.K. *Vertex 2-isomorphism*. J. Graph Th. 16 (1992), 335/347. M.R. 93g # 05107.
- *SwaT81 SWAMY, M.N.S.- THULASIRAMAN, K. *Graphs, networks and algorithms*. J. Wiley, (1981/92). M.R. 82j # 94030; 93f # 05002. Zb. 528 # 94034.
- Syl55 SYLVESTER, J.J. *On the change of systems of independent variables*. Quart. J. Pure and Applied Math. 1(1855), 42/56. Idem Collected papers. 2, 65/85.
- Syl82 SYLVESTER, J.J. *On the geometrical forms called trees* Johns Hopkins Univ. Circulars I. (1882), 202/203.
- Szw71 SZWARC, W. *The transportation paradox*. Naval Res. Log. Quarterly 18 (1971), 185/202.

$\mathcal{T}$

- Tait80 TAIT, P.G. *Remarks on the colouring of maps*. Proc. Royal Soc. Edinburgh 10 (1878-80), 501/503 - 729.
- Tait84 TAIT, P.G. *Listings topologie*. Phil. Mag. (Series 5) 17 (1884), 30/36. Scientific Papers Vol. II, 85/98.
- Tar72 TARJAN, R.E. *Depth-first search and linear graph algorithms*. SIAM J. Comp. 1 (1972)146/160. M.R. 46 # 3313. Zb. 251 # 05107.
- *Tar83 TARJAN, R.E. *Data structures and networks algorithms*. Soc. for Indust. Appl. Math. SIAM (1983/91).
- Tar86 TARJAN, R.E. *Algorithms for maximum network flow*. en [GallS86], 1/11.
- Tho80 THOMASSEN, G. : *Planarity and duality of finite and infinite graphs*. J. Comb. Th. B 29 (1980), 244/271. M.R. 81j # 05056.
- Tho81 THOMASSEN, C. *Kuratowski's theorem*. J. Graph Th. 5 (1981), 225/241. M.R. 83d # 05039.
- Tho82 THOMASSEN, C. *Duality of infinite graphs*. J. Comb. Th. B 33 (1982), 137/160. M.R. 84g # 05098. Zb. 501 # 05054.
- Tho84 THOMASSEN, C. *A refinement of Kuratowski's theorem*. J. Comb. Th. B 37 (1984) 245/253.
- Tho88a THOMASSEN, C. *Rectilinear drawings of graphs*. J. Graph Th. 12 (1988), 335/341. M.R. 981 # 05111.

- Tho88b THOMASSEN, C. *Paths, Circuits and Subdivisions*. Cap.5 de [BeiW88], 97/131.
- Toft66 TOFT, B. *Colouring, stable sets and perfect graphs*. en [GraGL66], 233/288.
- *Tor76 TORANZOS, F. A. *Introducción a la teoría de grafos*. Monografías O.E.A. Serie Matemática. Nro. 15 (1976).
- Trent54 TRENT, H. M. *A note on the enumeration and listing of all possible trees in a connected linear graph*. Proc. Nat. Acad. Sci. 40 (1954), 1004/1007. Zb. 55 pg. 422.
- *Tri83 TRINAJSTIC, N. *Chemical graph theory*. (Vol. I-II) C.R.C.Press Inc.(1983/92). M.R. 86g # 92044 // 93g # 92034.
- *Tuc80 TUCKER, A. *Applied Combinatorics*. J. Wiley (1980/85). M.R. 82f # 05001.
- TucB50 TUCKER, A.- BAILEY, H.S. *Topology*. Scientific American -January (1950).
- Tut46 TUTTE, W.T. *On hamiltonian circuits*. J. London Math. Soc. 21 (1946), 98/101. M.R. 8 pg. 397.
- Tut48a TUTTE, W.T. *The dissection of equilateral triangles into equilateral triangles*. Proc. Cambridge Philos.Soc.44 (1948), 463/482. M.R.10 pg.319. Zb.30 pg.409.
- Tut48b TUTTE, W.T. *On the four colour conjecture*. Proc. London Math. Soc. 50 (1948), 137/149.
- Tut50 TUTTE, W.T. *Squaring the square*. Canad. J. Math. 2 (1950), 197/209.
- Tut54 TUTTE, W.T. *A contribution to the theory of chromatic polynomials*. Canad. J. Math. 6 (1954), 80/91. M.R.15 pg 814c.
- Tut56 TUTTE, W.T. *A theorem on planar graphs*. Trans. Amer. Math. Soc 82 (1956), 99/116.M.R. 18 pg. 408. Zb. 70 pg. 184.
- Tut61a TUTTE, W.T. *A theory of 3-connected graphs*. Indag. Math. 23 (1961),441/455.
- Tut61b TUTTE, W.T. *On the problem of decomposing a graph into n connected factors*. J. London Math. Soc. 36 (1961),221/230.
- Tut63a TUTTE, W.T. *How to draw a graph*. Proc. London Math. Soc. 13 (1963), 743/767. M.R. 28 # 1610.
- Tut63b TUTTE, W.T. *On the nonbiplanar character of the complete 9-graph*. Canad. Math.Bull. 6(1963),319/330
- Tut63c TUTTE, W.T. *The thickness of a graph*. Indag. Math. 25 (1963), 567/577.
- Tut65 TUTTE, W.T. *The quest of the perfect square*. The Amer. Math. Monthly 72(1965), 29/35.

- *Tut66 TUTTE, W.T. *Connectivity in graphs*. Oxford and Toronto Univ. Press (1966). M.R. 35 # 1503. Zb. 146 pg. 456.
- Tut70 TUTTE, W.T. *Toward a theory of crossing numbers*. J. Comb. Th. 8 (1970), 45/53.
- Tut72 TUTTE, W.T. *Non hamiltonian planar maps*. Graph Theory and Computing (Edit. R.C.Read). Acad. Press (1972), 295/301.
- Tut75 TUTTE, W.T. *Chromials*. Cap.11 de [Ful75a], 361/377.
- Tut77 TUTTE, W.T. *Bridges and hamiltonian circuits in planar graphs*. Aequations Math. 15 (1977), 1/33.
- Tut78 TUTTE, W.T. : *Colouring problems*. The Mathematical Intelligencer Vol.1-2 (1978), 72/75.
- *Tut84 TUTTE, W.T. *Graph theory*. Addison-Wesley (1984). M.R. 87c 05001.
- TutS41 TUTTE, W.T. - SMITH, C.A.B. *On unicursal paths in a network of degree four..* The Amer. Math. Monthly 48 (1941), 233/237. Zb. 25 pg. 91.
- TutW72 TUTTE, W.T. - WHITNEY, H. *Kempe chains and the four colour problem*. Utilitas Math. 2 (1972), 241/281,
- Tve89 TVERBERG, H. *A proof of Kuratowski's theorem*. (Graph Theory in memory G. A. Dirac). Ann. Discrete Math. 41 (1989), 417/419. M.R. 90d # 05092.

V

- *Vaj58 VAJDA, S. *Readings in linear programming*. Pitman (1958).
- *Vaj60 VAJDA, S. *An introduction to linear programming. Theory of games*. Meuthen (1960).
Introducción a la programación lineal y a la teoría de juegos. EUDEBA (1967).
- Vas76 VASAK, J.M. *The thickness of the complete graph*. Notices Amer. math. Soc.23 (1976),A-479.
- Veb22 VEBLER, O. *Analysis Situs*. Amer. Math. Soc. Colloq. Public. 5 (1922/31), 1/39.
- Viz64 VIZING, V. G. *On an estimate of the chromatic class of a multigraph*. Diskret. Analiz. 3 (1964), 25/30. M.R. 31 # 856. (en ruso)
Traducción : *The chromatic class of a multigraph*. Cybernetics 3 (1965), 32/41. M.R. 32 # 7333.

W

- Wag36 WAGNER, K. *Bemerkungen zum Vierfarbenproblem*. Uber. Deutsch. Math. Verein. 46 (1936), 26/32. Zb. 14 pg. 181.

- Wag37 WAGNER, K. *Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe*. Math. Ann. 114 (1937), 570/590.
- Wag60 WAGNER, K. *Bemerkung zu Hadwigers Vermutung*. Math. Ann. 141 (1960), 433/451.
- Wag64 WAGNER, K. *Beweiss einer Abschwächung der Hadwiger Vermutung*. Math. Ann. 153 (1964), 139/141.
- Wag85 WAGNER, K. *On theorems of Whitney and Tutte*. Discrete Math. 57 (1985), 147/154. M.R. 87c # 05040.
- *Walt84 WALTHER, H. *Anwendungen der Graphentheorie*. VEB Deutscher Verlag (1984)
Ten applications of graph theory. Reidel Publ. Co. (1984)
- WanK74 WANG, D.L.- KLEITMAN, D.J. *A note on n -edge connectivity*. SIAM J. Appl. Math. 26 (1974), 313/314.
- Weiß75 WEINBERG, L. : *Duality in networks*. Networks 5 (1975), 179/201.
- *Wel71 WELSH, D.J.A. (Edit.) *Combinatorial mathematics and its applications*. Acad. Press (1971).
- WeIP67 WELSH, D.J.A.- POWELL, M.B. *An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetabling problems*. The Computer Journal, Vol.10 May (1967), 85/86.
- Wer69 WERRA, de D. *Résolution de problèmes d'horaire par la théorie des graphes*. Thèse Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, (1969), 1/170.
- *Whi73 WHITE, A.T. *Graphs, groups and surfaces*. North Holland (1973/84).
M.R.49 # 4783 / 86d # 05047. Zb 268 # 05102.
- Whi78 WHITE, A.T. *The proof of the Hadwiger conjecture*. Cap. 3 de [BeiW78], 51/81.
- WhiB78 WHITE, A.T.- BEINEKE, L.W. *Topological graph theory*. Cap. 2 de [BeiW78], 15/49
- Whit31 WHITNEY, H. *A theorem on graphs*. Ann. of Math. 32 (1931), 378/390.
- Whit32a WHITNEY, H. *Congruent graphs and the connectivity of graphs*. Amer. J. Math. LIV- (1932), 150/168. Zb 3 pg 228.
- Whit32b WHITNEY, H. *Non separable and planar graphs*. Trans. Amer. Math. Soc. 34 (1932), 339/362.
- Whit32c WHITNEY, H. *On the coloring of graphs*. Ann. of Math. 33 (1932), 688/718.
- Whit32d WHITNEY, H. *A logical expansion in mathematics*. Bull. Amer. Math. Soc. 38 (1932), 572/579.

- Whit33a WHITNEY, H. *2-isomorphic graphs* Amer. J. Math. LV-2 (1933), 245/254. Zb. 6 pg.370.
- Whit33b WHITNEY, H. *A set of topological invariants of graphs.* Amer.J. of Math. LV-2 (1933), 231/235.
- Whit33c WHITNEY, H. *On the classification of graphs.* Amer. J. of Math. LV-2 (1933), 236/244.
- Whit33d WHITNEY, H. *Planar graphs.* Fund. Math. 21 (1933), 73/84.
- Whit35 WHITNEY, H. *On the abstract properties of linear dependence.* Amer. J. of Math. LVII (1935), 509/539.
- WhitT75 WHITNEY, H.- TUTTE, W.T. *Kempe chains and the four colour problem.* en [Ful75a] (1975), 378/413.
- Wie47a WIENER, H. *Structural determination of paraffin boilings points.* J. Amer. Chem. Soc. 69 (1947), 17/20.
- Wie47b WIENER, H. *Correlation of heats of isomerization and differences in heats of vaporization of isomers, among the paraffin hydrocarbons.* J. Amer. Chem. Soc. 69 (1947), 2636/2638.
- Wilf67 WILF, H.S. *The eigenvalues of a graph and its chromatic number.* J. London Math. Soc. 42 (1967), 330/332.
- Wilf69 WILF, H.S. *The Möbius function in combinatorial analysis and chromatic graph theory.* en [Har69a], 179/185. Zb. 205 pg. 284.
- Wilf73 WILF, H.S. *Which polynomials are chromatic ?* Colloq. Internaz. sulle Teorie Combinatoire 1973. (Edit. B. Segre). Atti dei Convegni Lincei Rome (1976), 247/256. M.R. 56 # 11841.
- Will77 WILLIAMSON, J.E. *Panconnected graphs II.* Period. Math. Hungar 8 (1977), 105/116. M.R. 57 # 3001.
- *Wils72 WILSON, R. J. *Introduction to graph theory.* Acad. Press (1972). Longman (1979/85) M.R.50 # 9643/ / 87a # 05051. Zb. 249 # 05101 // 458 # 05024.
- Wils78a WILSON, R.J. *200 years of graph theory. A guided tour.* Lect. Notes in Math. 642. Springer (1978), 1/9. Zb. 374 # 05001.
- Wils78b WILSON, R.J. *Edge colorings of graphs. A survey.* Lect. Notes in Math. 642. Springer(1978), 608/619. M.R. 58 # 10569. Zb. 379 # 05030.
- *WilsB79 WILSON, R.J.- BEINEKE, L .W. (Edit.) *Applications of graph theory.* Acad. Press (1979). M.R. 81h # 05050. Zb. 426 # 00006.



- Woo78a WOODALL, D.R. *Menger and König systems*. Lect. Notes in Math. 642. Springer-Verlag (1978), 620/635. Zb. 391 # 05016.
- Woo78b WOODALL, D.R. *Minimax theorems in graph theory* Cap. 9 de [BeiW78], 237/269.
- WooW78 WOODALL, D.R.- WILSON, R.J. *The Appel-Haken proof of the four-color theorem*. Cap. 4 de [BeiW78], 83/101. Zb. 432 # 05025.

Υ

- Yao75 YAO, A.C.C. *An $O(m \log(\log n))$ algorithm for finding minimum spanning tree*. Inform. Proc. Lett. 4(1975), 21/23.
- You67 YOUNGS, W.T. *The Heawood map colouring conjecture*. Cap. 12 de [Har67a], 313/384. M.R. 38 # 4357.
- You70 YOUNGS, W.T. *The mystery of the Heawood conjecture* en [Harr70], 17/50.

$\mathcal{Z}$

- Zaks71 ZAKS, J. *On the 1- factors of n -connected graphs*. J. Comb. Th. B 11 (1971), 169/180. Zb. 219 # 05074.
- Zam70 ZAMFIRESCU, T. *On the line-connectivity of line-graphs*. Math. Ann. 187 (1970), 305/309. M.R. 44 # 6541.
- Zar54 ZARANKIEWICZ, K. *On a problem of P. Turan concerning graphs*. Fund. Math. 41 (1954), 137/145. M.R. 16 pg. 156.
- Zvi80 ZVI, G. *Finding the vertex connectivity of graphs*. Siam J. Comput. 9 (1980), 197/199.
- Zyk49 ZYKOV, A.A. *On some properties of linear complexes*. Amer. Math. Soc. Translation 79 (1952), 418/449. M.R. 14 pg. 493.
(traducción de Math. Sbornik 24 (1949), 163/188). M.R. 11 pg. 733).