

I.T.I.
93



INFORME TECNICO INTERNO

Nº. 93

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA
INMABB (UNS - CONICET)



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina

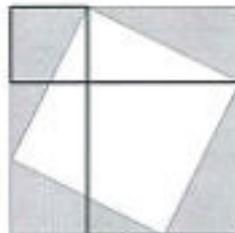


Marc 3958 **INFORME TÉCNICO INTERNO**

N° 93

INSTITUTO DE MATEMÁTICA DE BAHÍA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - B8000CPB - BAHIA BLANCA

- 2006 -



INFORME TÉCNICO INTERNO N° 93

Multi - di - grafos: 1

Raúl Chiappa

Universidad Nacional del Sur

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 2006



CONTENIDO (Volumen 1)

PRÓLOGO

Capítulo 1	CONJUNTOS Y RELACIONES BINARIAS	1
-------------------	--	---

Capítulo 2

MULTIGRAFOS Y MULTIDIGRAFOS

2.1	Nociones generales	
2.1.1	Conceptos básicos.	9
2.1.2	Algunas configuraciones frecuentes	15
2.1.3	Representaciones topológicas	18
2.1.4	Isomorfismos	21
2.1.5	Submulti-di-grafos	26
2.1.6	k-factores y acoplamientos	30
2.1.7	Recuento de multi-di-grafos	34
2.1.8	Grafos, dígrafos y relaciones binarias	35
2.1.9	Nociones locales	39
2.1.10	Algunas operaciones con multi-di-grafos	46
2.2	Distintas formas de representación	58
2.3	Multi-di-grafos etiquetados (valuados)	67
	Ejercicios	75

Capítulo 3

TRANSITABILIDAD

3.1	Caminos y cadenas.	85
3.2	Distancia y distancia orientada	95
3.3	Algunos entretenimientos	98
3.4	Algunos algoritmos	101
3.5	Circuitos y ciclos	107
3.6	Conexidades	
3.6.1	Conexidad simple	114
3.6.2	Conexidad fuerte y conexidad unilateral.	121
3.7	Transitabilidad y matrices	125
3.8	Otros resultados grafo-matriciales	130
3.9	Algoritmo de Roy-Warshall	134
3.10	Caminos elementales	139
3.11	1-difactores, determinantes y permanentes	
3.11.1	1-difactores	145
3.11.2	Determinante y permanente de una matriz	148
	Ejercicios	155

Capítulo 4 PROBLEMA EULERIANO	
4.1 Introducción	165
4.2 Caminos y cadenas de Euler	168
4.3 Problema del cartero chino	177
Ejercicios	179
Capítulo 5 PROBLEMA HAMILTONIANO	
5.1 Introducción	185
5.2 Caminos y cadenas de Hamilton	187
5.3 Algunas configuraciones hamiltonianas	195
5.4 Otros resultados sobre hamiltonianos	197
5.5 Condiciones para la hamiltonicidad	
A) Caso no dirigido.	202
B) Caso dirigido	207
5.6 Problema del viajante de comercio.	209
Ejercicios	215
Capítulo 6 TRANSITIVIDAD VALUADA	
6.1 Introducción	221
6.2 Caminos óptimos	221
6.3 Algunos métodos para hallar caminos óptimos.	225
6.3.1 Algoritmo de Dantzig	227
6.3.2 " de Dijkstra	228
6.3.3 " de Ford	230
6.4 Métodos matriciales	232
6.4.1 Método Mini-Sum	233
6.4.2 " de Floyd	235
6.5 Caminos críticos.-- Aplicación P.E.R.T. (M.P.M.) , ,	239
6.6 Rutas Max-Min (Min- Max)	247
Ejercicios	249
BIBLIOGRAFÍA	255
Índice de Términos	299

Contenido Volumen 2 (estimativo)

Capítulo 7 CONEXIDADES Y CONJUNTOS DESCONECTANTES

h -conexidad y separabilidad. Teoremas "mini-max" (König-Hall-Menger, etc).
1-isomorfismo y 2-isomorfismo. Conexidades dirigidas. Periodicidad en fuertemente conexos. Conjuntos desconectantes – Ciclos.
Lema de Minty - Dualidades \ ciclos-cociclos. \ f -conexos-carencia de circuitos.

Capítulo 8 ARBOLES y ARBORESCENCIAS

Arboles y coárboles. Propiedades duales y caracterizaciones. Recuento de árboles y de árboles etiquetados (idem árboles cubrientes de K_n) Su relación con el "Matriz Tree Theorem".

Arborescencias. Caracterizaciones y su relación con los caminos eulerianos y el "BEST Theorem".

Arborescencias ordenadas (o planas). Formas lineales de recorrer sus vértices (por precedencia, o por descendencia, o por interclusión). Notaciones libres de paréntesis de Lukasiewicz.

Arborescencias binarias y binarias reflejas. Su recuento. Números de Catalán.

Capítulo 9 ARBOLES VALUADOS - ARBORESCENCIAS ETIQUETADAS

Arboles cubrientes óptimos. Su construcción recurriendo a los Algoritmos de Kruskal ; o de Prim-Jarnik, o de Sollin-Borůvka

Arborescencias y codificaciones de Huffman (de longitud promedio mínima).

Capítulo 10 COLORABILIDAD y PLANARIDAD

Algunos "problemas cromáticos". Estabilidad interna y estabilidad externa.
Problema de los cuatro colores y planaridad. Curvas de Jordan y Teorema de Kuratowsky. Parámetros de no planaridad "número de cruzamientos" (crossing-number) y "espesor" (thickness). Representaciones planas y Fórmula de Euler.
Dualidad planar.

Capítulo 11 FLUJOS CANALIZADOS y APLICACIONES

Flujos libres y canalizados. Aplicaciones típicas. Teorema Fundamental de Ford Fulkerson y algoritmo asociado para hallar flujos óptimos en dígrafos canalizados. Flujos en el caso no dirigido.

Teorema de los flujos enteros y su aplicación a problemas combinatorios (König Egerváry, Hall, Dilworth)

Algoritmo húngaro para determinar acoplamientos máximos (soportes mínimos).

Problemas de asignación optimal, y del transporte simple (o de Hitchcock)

Distintos métodos de resolución.



PRÓLOGO

En los cursos de Álgebra y en los de Análisis Matemático estamos acostumbrados a considerar problemas de la vida diaria y a plantear su resolución mediante modelos matemáticos que proponen una simplificación de la problemática a estudiar. Ellos llevan, habitualmente, al análisis de funciones, o de sistemas de ecuaciones en las cuales las magnitudes de las variables involucradas toman como valores números reales, y conducen a “problemas continuos”.

Para otras cuestiones, que se plantean en “conjuntos discretos” y más particularmente en “conjuntos finitos” son muy útiles las nociones y técnicas propias de la Teoría de Grafos.

Los “grafos” proponen un esquema de razonamiento cuya simplicidad permite aplicarlos al estudio de cuestiones muy diversas, provenientes tanto de juegos de entretenimiento, como de cuestiones teóricas, o de la vida cotidiana.

Precisamente, la posibilidad de abordar y sistematizar dentro de esta teoría el estudio de situaciones muy variadas es una de las razones del ímpetu y desarrollo que ella presenta en la actualidad.

La Teoría de Grafos está vinculada con diversos capítulos de la matemática. En particular, con combinatoria, relaciones, álgebra booleana, algoritmos, matrices, y espacios vectoriales (tanto sobre el cuerpo real, como sobre Z_2). Una primera visión de la que tiene con la Teoría de Relaciones puede vislumbrarse a partir de [Ore63a] y [Spi89].

Además de su importancia como rama de la matemática cabe destacarse la que resulta de sus aplicaciones en ingeniería, economía, física, química, biología, ciencias sociales, investigación operativa, informática, etc.

La mayoría de ellas están referidas a problemas para cuyo estudio basta considerar un número finito de “estados”, y por esto es habitual restringirse a los “grafos finitos”. A ellos nos limitaremos, y esto nos permitirá razonamientos, o procedimientos, que no serían válidos sobre conjuntos infinitos.

Para internarse en la teoría en cuestión no serán necesarias disciplinas o técnicas elaboradas. Por el contrario, será suficiente un cierto gusto por lo combinatorio, y un conocimiento básico del razonar matemático, así como del manejo de matrices y algoritmos.

Aún cuando algunos de sus temas fueron estudiados como parte de la “topología combinatoria” por Veblen, en 1922, suele convenirse que la Teoría de Grafos surgió como disciplina autónoma en 1936, con la publicación del libro de König [Kön36], en el que se reunieron y sistematizaron bajo un enfoque común resultados obtenidos al tratar problemas sin aparente conexión entre sí.

Las resoluciones de algunos de ellos llevaron a idear conceptos, o métodos, que ahora se incluyen entre los que estudia la teoría que nos ocupa.

Seguidamente nos referiremos muy brevemente a cuatro de las “motivaciones históricas” que impulsaron el uso de algunas de tales nociones. Posteriormente ellas serán tratadas con más detenimiento.

De ellas la primera en orden cronológico, y posiblemente la más conocida, está asociada al “Problema de los Puentes de Königsberg”. Fue resuelto por la negativa por L.Euler (1707-1783), en 1736, pero dicha solución parece haber sido ignorada hasta 1851 en que se la publicó traducida al francés. El problema en cuestión, que está vinculado con las “figuras unicursales” tiene una solución simple. (ver Cap. 4)

Otro problema que tiene una formulación similar al anterior, pero que es totalmente diferente en cuanto a las dificultades para resolverlo es el “Problema hamiltoniano”, así denominado a partir del juego ideado, en 1859, por W.R. Hamilton (1805 -1865). (ver Cap. 5)

Otras cuestiones llevaron a la noción “árbol” (ver Cap.8–9) que es quizás la más importante de las estructuras no lineales utilizadas en la implementación de algoritmos.

A este concepto recurrió en 1847 G.R.Kirchhoff (1824 -1887) para simplificar la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales que surgen al estudiar “circulaciones” en redes eléctricas. Para ello asoció a dichas redes esquemas representativos, y mostró que para resolver el sistema en cuestión en lugar de considerar todos sus “ciclos” bastaba con elegir un “árbol cubriente” y tomar en cuenta sólo los “ciclos independientes” a él asociados.

Dicha noción fue reencontrada diez años después por el químico inglés A.Cayley (1821-1895) en el trascurso de sus investigaciones para determinar el número de parafínicos isómeros; es decir, para hallar la cantidad de hidrocarburos con enlaces simples (responden a la fórmula $C_n H_{2n+2}$) que teniendo igual número de átomos de cada elemento gozan de propiedades físico-químicas diferentes.

Para cada $n \leq 3$ hay uno solo de tales hidrocarburos, a saber : metano ($n = 1$), etano ($n = 2$), propano ($n = 3$) ; para $n = 4$ hay dos, butano, e isobutano.

Naturalmente, su número crece con n , para $n = 5$ hay tres isómeros, para $n = 10$ ellos son 75, para $n = 15$ hay 4.347, para $n = 20$ hay 366.319 y para $n = 22$ ellos superan los 2.250.000.

Por otra parte, la búsqueda de respuesta a la “Conjetura de los Cuatro Colores”, que llevaba a los cartógrafos del Siglo XIX a suponer que todo mapa podía colorearse con a lo sumo cuatro colores asignando colores diferentes a países fronterizos, impulsó el estudio de los “grafos planares”.(ver Cap.10)

A este respecto puntualizemos que en 1890 Headwood demostró ([Heaw90]) que la supuesta verificación de dicha conjetura dada en 1879 por el abogado y eclesiástico inglés Kempe ([Kemp79/80]) sólo era válida substituyendo cuatro por cinco; y que finalmente, luego de numerosas tentativas, esta conjetura fue resuelta afirmativamente por Appel y Haken recién en 1976.([AppH76/77/78], [WooW78])

Según referencias, siguiendo ideas de Kempe ellos redujeron, tras miles de horas de computación, la infinidad de mapas posibles a una cantidad finita que los representara.

Destaquemos, de paso, que las proyecciones estereográficas permiten asociar a cada mapa dibujado sobre un plano, otro dibujado sobre una esfera, y recíprocamente.

Por esto, en 1976, el problema de referencia fue resuelto simultáneamente para ambas superficies; pero merece destacarse que ya antes se conocía la solución del problema análogo en otras superficies “más complicadas”.

En efecto, ya a partir del citado trabajo de Heawood se sabía que para resolver el problema análogo de colorear los mapas dibujados sobre un “toro” el número en cuestión es siete, mientras que para el caso de los dibujados sobre una “cinta de Möbius” es seis.

Para mayores referencias sobre éstas y otras motivaciones que impulsaron el estudio de la Teoría de Grafos pueden consultarse [BigLW76], [Cox59], [Chi89], [Har69b], [Krai30], [Ore63a], [RouB92], [SaiL26], [Tor76], [Wil78], como así también [Har60b/64a/67c/67d/69c/73b], Además, un sucinto “resumen histórico” se da en [Gri85]-Cap.11.

Numerosas cuestiones teóricas, o de la vida diaria, pueden ser descriptas adecuadamente, al menos en primera aproximación, por medio de esquemas compuestos de “vértices” y de “líneas” que conectan ciertos pares de ellos, y eventualmente alguno consigo mismo.

En ocasiones habrá que tener en cuenta el orden en que se los conecta, y esto impone que en tal caso se recurra a un “esquema dirigido”. En otras circunstancias puede suceder que dicho orden no exista o no interese, pero aún entonces quizás sea útil emplear esquemas dirigidos para analizarlos.

Así por ejemplo, sería necesario recurrir al caso dirigido para analizar la circulación de un fluido en una red cuyos tramos están provistos de válvulas que sólo permiten el deslizamiento en un único sentido. En cambio, si la circulación puede, *a priori*, efectuarse en ambos sentidos, podríamos convenir en asignar a cada tramo una dirección arbitraria, y considerar que el caudal que lo recorre es positivo, o negativo, según que fluya en sentido coincidente, o no, con el que le fue fijado al tramo en cuestión. De tal forma, si el tramo de extremos A, B está orientado desde A hacia B y se desliza 5 unidades desde B hacia A diríamos que al arco (A, B) lo recorren -5 unidades.

Dichas situaciones llevan, respectivamente, al estudio de “noción dirigidas” y al de “noción no dirigidas”. En general, pero no siempre, a cada noción de una de las clases corresponde otra en la restante.

Para representar A es superior jerárquico de B // A es mayor (menor) que B // A es anterior a B // el sistema pasa del estado A al estado B // etc. podremos poner $A \bullet \longrightarrow \bullet B$; y decir: A precede B .

En cambio, para visualizar: A es amigo de B // A es contemporáneo de B // el sistema puede pasar del estado A al estado B y viceversa // etc. podremos poner $A \bullet \text{---} \bullet B$; y decir: A, B , son adyacentes.

Para distinguir tales situaciones se dirá que: el par ordenado (A, B) define un arco de vértice inicial A y vértice final B , mientras que el par no ordenado $[A, B]$ determina una arista de extremos A, B . En ambos casos se admite $A = B$.

Nótese que aún cuando cada “arista $[A, B]$ ” con $A \neq B$ podría substituirse por el “par de arcos $(A, B), (B, A)$ ”, y que haciendo caso omiso del sentido de recorrido cada arco da lugar a una arista con iguales extremos que el arco de partida, razones de comodidad hacen conveniente considerar tanto a las nociones “dirigidas” como a las “no dirigidas”.

Las substituciones indicadas permiten establecer interesantes relaciones entre ambos tipos de nociones, y además evitar el uso de “configuraciones mixtas”; es decir, con “arcos” y con “aristas”, a las cuales podría inducirnos el estudio de ciertos problemas.

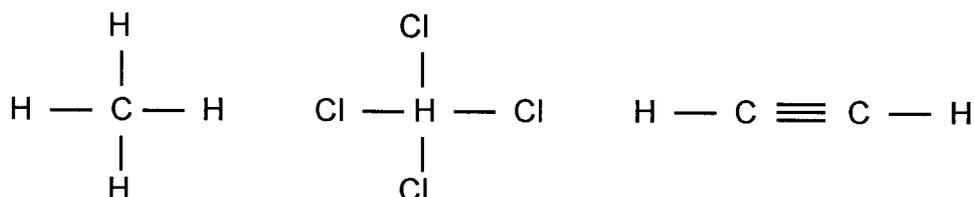
Otra cuestión a tener presente es la siguiente.

Dados un conjunto de elementos y otro de relaciones entre ellos, en algunas ocasiones interesará tomar en cuenta todas las posibles "conexiones" que ellas determinan; pero en otras sólo atender a si los elementos están vinculados con otro, o consigo mismo, por al menos una de tales relaciones.

Así por caso, conocidas las redes viales, férreas, aéreas, y telefónicas, que vinculan entre sí un conjunto de ciudades, para analizar ciertas cuestiones de intercomunicación entre ellas podría ser suficiente conocer los pares de ciudades que están conectadas en forma directa a través de alguna de dichas redes; o bien, ser necesario tener que tomar en cuenta todas las redes que las conectan.

En relación con lo precedente notemos que, en primera aproximación, cada molécula puede ser visualizada por un esquema en el cual los "vértices" corresponden a los átomos y las "líneas" a las ligaduras entre ellos.

En particular, el metano ($C H_4$), el tetracloruro de carbono ($C Cl_4$) y el acetileno ($C_2 H_2$) pueden representarse, respectivamente, por:



Obviamente, hay propiedades de las sustancias que no tienen correspondencia con los esquemas que nos ocupan.

Así por caso, a temperaturas habituales el metano es un gas combustible, mientras que el tetracloruro de carbono es un líquido no combustible.

No obstante, de dichos *grafos moleculares* pueden obtenerse índices que reflejen ciertas propiedades físico-químicas. Por ejemplo, el "Índice de Wiener", que está ligado con el concepto de "*distancia en grafos*" (ver 3.2) fue correlacionado con el "punto de ebullición" y con "el grado de isomerización" de ciertos hidrocarburos.

Su utilidad impulsó, en química, la creación de otros "índices topológicos" Consideraciones sobre algunos de ellos pueden verse en [Ran84].

Otras publicaciones en las que se interrelaciona la teoría de grafos con la química son : [Bal7685a/85b], [GutP86], [PólyaR87], [Rouv85/86], [RouvB79] y [Tri83].

La “*distancia en grafos*” también fue aplicada en sociología y en psicología para estudiar mediante *índices de centralización* (o de *periferismo*) la importancia del rol que puede desempeñar cierto individuo en determinado grupo social.

Por otra parte, haciendo caso omiso de características propias de sus tramos (a saber, existencia, o no, de resistencias, de inductancias, de fuentes de energía, etc.), cada red eléctrica puede esquematizarse por un diagrama que ayudará a deducir relaciones entre las intensidades de las corrientes que recorren sus distintos circuitos, pero no sobre los de índole electromagnética que se crean por efecto de esa circulación.

Algunas de las publicaciones en las que, cotinuando los trabajos de Kirchhoff, se interrelacionan los grafos con las redes eléctricas son [Bry67/79], [Chen71a], [Deo74], [Duf75], [Minty66/75], [SesR61], [SwaT81].

Los diagramas a los que nos hemos referido aparecen en disciplinas dispares, bajo nombres muy diversos, a saber : *redes* (física, ingeniería, economía); *organigramas* (economía, planificación, gestión); *diagramas de flujo* (programación); *diagramas de transición* (física, informática, química, teoría de lenguajes); *estructuras moleculares* (química, biología); etc.

Habitualmente, dichos diagramas permiten aclarar las situaciones planteadas, facilitando la comprensión de los problemas en estudio. Esto nos llevaría a decir que *un buen dibujo puede valer más que un largo discurso*.

Según Wilson [Wils78], parece ser que el primero en designar “*grafos*” a estos esquemas fue Sylvester al publicar, en 1878, sus trabajos sobre investigaciones de invariantes en química. ([Syl78])

Las ideas subyacentes en muchas de las nociones propias de la Teoría de Grafos surgen de esos diagramas y son fácilmente visualizadas en ellos.

La comodidad de manejo que brindan hace que se recurra a ellos muy frecuentemente. Pero destaquemos que sólo son útiles y manejables si el número de elementos a considerar es reducido. Por esto, en ocasiones será necesario hacer uso de representaciones que recurren a matrices, o tablas, o listas, etc.

Por otra parte, la cantidad de datos a tomar en cuenta podría llevar a la necesidad de utilizar computadoras, y a tal efecto ello sería necesario referirse a formas de representación en ellas. Esta cuestión no será considerada.

Habitualmente, todas las *configuraciones* antedichas son incluidas bajo el vocablo "grafo", pero para distinguir el "caso dirigido" del "caso no dirigido", y separar los casos en los que entre cada par de vértices puede existir a lo sumo una "conexión" de aquellos en los que se admiten varias, será preferible convenir en designarlos, respectivamente, *grafos // multigrafos* (caso no dirigido), y *digrafos // multdigrafos* (caso dirigido).

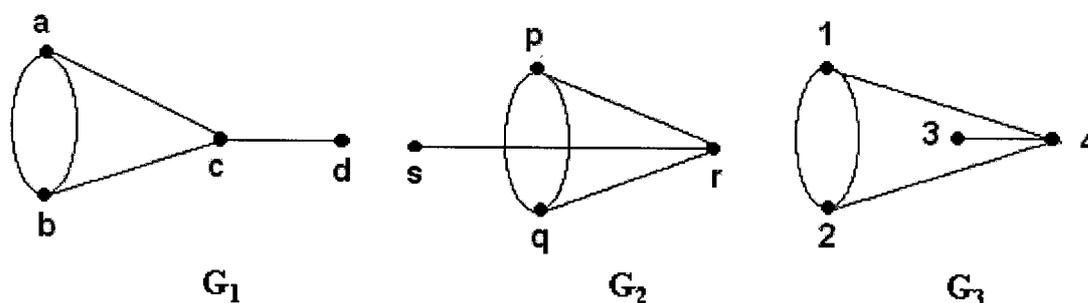
Así entonces, solamente los digrafos (grafos) podrán asociarse a una relación binaria (relación binaria simétrica) entre sus vértices.

Los diagramas de referencia no están unívocamente determinados, y en ellos sólo interesa cuales son los puntos conectados, pero no donde están ubicados, o la forma que se asigna a la línea que los une.

Habitualmente, tampoco interesan sus respectivas designaciones, ni la eventual existencia de intersecciones entre las líneas.

Pero, claro está, los que corresponden a una misma situación deben ser intercambiables, y esto lleva al concepto de *multigrafos isomorfos*.

Tal es el caso de los siguientes G_1, G_2, G_3 .



En G_2 no deben considerarse vértices las intersecciones de las curvas de extremos p, q con la de extremos r, s .

Aún cuando distintas representaciones de una misma configuración deben contener igual información, determinadas propiedades pueden ser fácilmente observables en las de cierto tipo, pero no en las de otra clase.

Así por ejemplo la "planaridad" y la "conexidad" resultan inmediatas en un esquema adecuadamente diagramado, pero son difíciles de reconocer en las representaciones tabulares, o en las matriciales.

En cambio, éstas presentan otras ventajas, ya que permiten operar algebraicamente e inferir propiedades de los grafos usando resultados de la teoría de matrices.

En general, la representación a elegir dependerá del problema a estudiar, así como de los datos y de los elementos operativos disponibles. Ella no siempre es inmediata a partir de los datos conocidos. Habitualmente, para construirla será necesario tener un buen conocimiento del problema a resolver, y esta información, exterior a la teoría de grafos, permitirá una mejor interpretación de los resultados obtenidos.

Creemos oportuno destacar que las consecuencias teóricas y las aplicaciones más interesantes se obtienen al considerar configuraciones a cuyos elementos se han asociado “*etiquetas*” (o “*valores*”) que incorporan información adicional, y se eligen de acuerdo al problema en estudio. (ver 2.3)

Para ejemplificar la necesidad de distinguir entre “grafos” y “grafos etiquetados” notemos que dos tramos de ruta alcanzan para interconectar tres ciudades, pero que habitualmente interesa conocer cual es la “ciudad intermedia”.

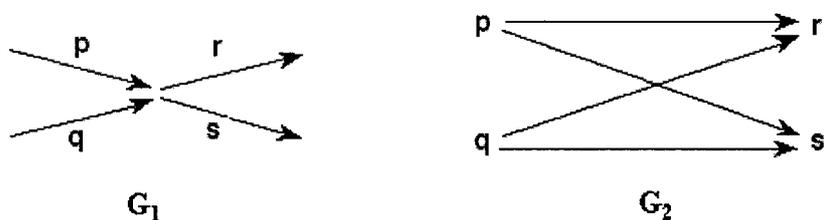
Por otro lado, el uso de “configuraciones valuadas” es útil en relación con los problemas de optimización; es decir, con cuestiones en las que interesa determinar soluciones que “optimicen” el valor de cierta “función objetivo”. Por ejemplo, maximizar ganancias, o minimizar demoras.

Podríamos decir que los “*grafos*” facilitan el estudio de la estructura combinatoria subyacente entre sus vértices; mientras que los “*grafos valuados*” permiten además analizar problemas cuantitativos.

En particular, y con vistas a la problemática a estudiar en Cap.6 supongamos que se debe supervisar la evolución de un proyecto en el ocurren reiteradas situaciones del siguiente tipo

“Las tareas r, s , pueden comenzarse inmediatamente después de terminar las tareas p, q , pero no antes”

Para visualizarlas puede recurrirse a cualesquiera de los siguientes diagramas

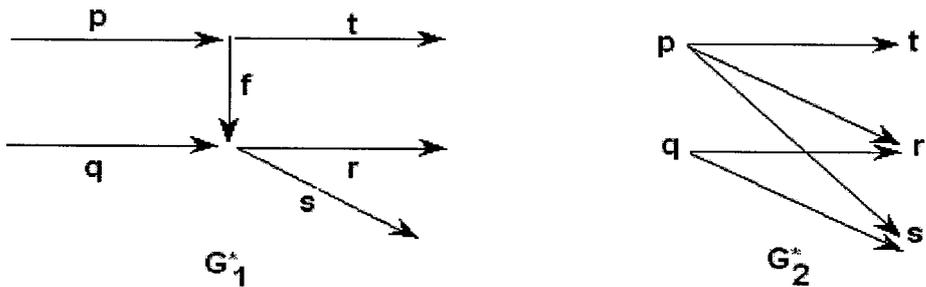


Los vértices de G_1 corresponden a las “etapas” del proyecto; mientras que los de G_2 representan las “tareas” que lo componen.

Con cualesquiera de estos esquemas, a los cuales designaremos respectivamente "digrafos etapas" y "digrafos tareas" se podría, valuando adecuadamente sus arcos, tomar en cuenta los tiempos de ejecución de las distintas tareas y determinar "caminos críticos", que permitieran deducir el tiempo mínimo necesario para completar la ejecución del proyecto en su totalidad.

Si el comienzo de las tareas r, s , exige modificar elementos utilizados para ejecutar p, q , y deben tenerse en cuenta los tiempos que son necesarios a tal efecto, G_2 será preferible a G_1 .
 En otras ocasiones G_1 podría ser preferible a G_2 .

Si en la situación anterior existiera además una tarea t para cuyo comienzo solo fuera necesario finalizar p los esquemas anteriores podrían ser substituidos por los siguientes, en donde f representa una "tarea ficticia" que se supondrá tiene un tiempo de ejecución nulo.



Obviamente la modificación que hemos necesitado efectuar a G_2 es más simple y directa que la exigida para adaptar G_1 .

La transformación que permite pasar de un "digrafo etapas" a un "digrafo tareas" no presenta mayores dificultades.

Para cuando no existen tareas ficticias ella corresponde a la operación que en Teoría de Grafos se denomina "pasar al digrafo adjunto" (ver 2.1.10).

Los análisis de los problemas a resolver conllevan habitualmente la necesidad de operar con grandes cantidades de datos, y para esto será necesario recurrir al uso de *algoritmos*; es decir, a la aplicación reiterada de una cantidad finita de reglas, y esto en forma secuencial tanto como sea posible (o necesario).

Es común que para resolver un cierto problema se hayan propuesto varios algoritmos, y que al aplicarlos a casos concretos, o a grafos con características particulares unos presenten ventajas relativas sobre otros.

Por cual de ellos optar dependerá, en general, de las características propias del problema y de los elementos disponibles.

Si un problema admite varias soluciones, la solución obtenida puede variar según cual sea el algoritmo elegido o el orden en que se han procesado los datos.

Para destacar la importancia y necesidad de contar con algoritmos adecuados observemos que aún cuando en el caso de conjuntos finitos la resolución de cada problema se podría encarar por *exhaustión* (es decir, explorando todas las posibilidades) esto solamente es accesible si el número de datos a manejar es reducido. Caso contrario, la cantidad de “ensayos a prueba y error” puede ser inalcanzable.

Así, por ejemplo, suponiendo que la determinación de cada una de las permutaciones de un conjunto de 16 elementos requiere de un segundo, para conocer las 16! permutaciones factibles serán necesarios más de 660.000 años.

Si el conjunto tuviera 17 elementos, y sin variar el tiempo necesario para fijar cada permutación, no alcanzarían once millones de años.

La carencia de algoritmos para resolver ciertos problemas, como así también la imposibilidad práctica de recurrir, salvo casos particulares, al método exhaustivo hace necesario, en ocasiones, recurrir a *métodos heurísticos*; es decir, a métodos ideados a partir de la experiencia.

Estos, que habitualmente son fáciles de implementar, están inspirados por la habilidad que se logra luego de resolver gran cantidad de problemas similares, y justificados porque habitualmente dan resultados satisfactorios.

Procedimientos de este tipo también podrán usarse cuando el algoritmo que debiera emplearse es complicado y la importancia del problema no justifica usarlo.

La cantidad de datos a considerar y el de operaciones a realizar exigirá, casi indefectiblemente, que los algoritmos sean procesados en computadoras.

Por ello, “sus eficacias” suelen medirse en términos de la cantidad de memoria de almacenamiento, o del tiempo de procesamiento que requieren.

Esto lleva a la necesidad de estudiar “sus respectivas complejidades”; cuestión ésta que no consideraremos, pues escapa a nuestro objetivo.

Las publicaciones que tratan estas cuestiones, así como de las relaciones entre algoritmos y grafos son muy numerosas. Para aspectos generales ver [Knu77a], [LewsP78], [Read70], [Tar78]. Algunas otras se indicarán oportunamente.

Respecto de los algoritmos sólo agregaremos tres observaciones.

- 1) que atendiendo a la forma en que ellos llevan a recorrer los “vértices” de las configuraciones en donde se aplican, son clasificados en :
de tipo BFS \ \ *de tipo DFS*.

Los de tipo BFS (*breadth first search*) son aquellos en los que “en cada etapa, se examinan todas las posibilidades accesibles desde el punto alcanzado”; y los de tipo DFS (*depth first search*), aquellos en los que “desde cada punto alcanzado se pasa a otro en cuanto es posible”, y esto sin necesidad de haber agotado las posibilidades que brinda el ya alcanzado.

Serán ejemplificados en Cap.8.

- 2) que uno de los criterios utilizados para clasificarlos es el que toma en cuenta su “dificultad de procesamiento” en función del número de elementos a considerar al aplicarlo.

Más precisamente, si el “tiempo” (o el “espacio”) necesario para procesar un conjunto de n datos es $k.f(n)$, con k constante, se dice que el algoritmo es de orden $f(n)$. Se lo indica poniendo $O(f(n))$.

Aquellos para los cuales al ser implementados basta, en cualquier circunstancia, un número de reiteraciones acotado superiormente por una expresión polinomial se dicen *buenos* (o *eficientes*). Los problemas para los cuales existen tales algoritmos se dicen “*tratables*” (o “*de clase P*”).

Dentro de los *no tratables* se encuentran los *problemas NP*, y los *indecidibles*.

Los *problemas NP* (*non determinist polinomial*) pueden ser resueltos por algoritmos no determinísticos en tiempos polinomiales y para ellos aún no tiene respuesta la pregunta ¿ puede darse un algoritmo polinomial que lo resuelva ?

Los *indecidibles* son aquellos para los que no cabe la existencia de algoritmos que lo resuelvan.

En [Tar83] Cap.1 se da un interesante breviarío de informaci3n sobre estas dos cuestiones. El Problema NP tambi3n es analizado en [GareJ79], [GonM79], [Hu82] y [Meh84].

- 3) que s3lo algunos de los algoritmos conocidos llevan a determinar los 3ptimos buscados eligiendo sucesivos “3ptimos locales”; es decir, eligiendo sucesivas opciones 3ptimas de entre las accesibles en cada etapa alcanzada.

Los algoritmos que tienen esa característica se dicen, en lengua inglesa *greedy algorithms*, y en lengua espa3ola “*algoritmos ingenuos*” (o *ansiosos*, o *glotones*, o *voraces*), Oportunamente enunciaremos algunos.

Est3n ligados con la noci3n “*matroide*”, pero no siempre permiten llegar al 3ptimo buscado.

As3 por ejemplo, supongamos que dada la matriz $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ debe elegirse un par de valores pertenecientes a filas y a columnas distintas, cuya suma sea m3nima.

Obviamente, la soluci3n buscada es $3 + 3 = 6$, pero operando por “3ptimos locales” la primera elecci3n ser3a 1; y el resultado final $1 + 7 = 8 > 6$.

Para ver que la eficacia de un tal algoritmo puede depender de los datos a manejar basta volver sobre el problema anterior aplicado a la matriz $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

La importancia intr3nseca del ejemplo anterior resulta del hecho que el mismo es caso particular del siguiente problema de optimizaci3n :

Conocido el costo (la confiabilidad) $c_{i,j}$ de asignar “al i -3simo obrero la j -3sima tarea” determinar una asignaci3n “obreros-tareas” que minimice el costo total (maximice la confiabilidad total).

Para confeccionar este trabajo hemos recurrido a la amplia bibliograf3a editada en lengua espa3ola, francesa, o inglesa, y a los comentarios de las Revistas de Referencia : *Mathematical Reviews (M.R.)* y *Zentralblat für Mathematic (Zb.)*.

Para una primera visión general de la temática que nos ocupa podrían tenerse en cuenta, además de las publicaciones de carácter introductorio, a la mayoría de las dedicadas a Matemática Discreta, o Informática, pues en éstas se suelen incluir capítulos sobre grafos.

De entre ellas citaremos a [AlbH88], [Chi91/95/96/97], [GavS80], [Ger82], [Gor88], [Gri85], [HorS76/78], [Johs84], [Kau62/68b], [KemS62], [KolB84], [Law76], [NashW82], [Pea73], [Pra76], [Ribn89], [Sah81], [Sak84a/84b], [Tor76], [Wils72].

También cabe indicar el Capítulo Introducción de las recopilaciones [BeiW78/83/88].

Estas últimas, como así también [Ful75a], [GraGL66], [Walt84] y [WilsB79] contienen muy interesantes monografías sobre diversos tópicos de la teoría, o de sus aplicaciones

De la bibliografía apta para encarar un estudio más profundo, y a la que hemos recurrido frecuentemente para completar este trabajo citaremos :

[Ber58/70/85/87], [Boll78/79], [BonM76], [BucH90], [BusS65], [CapM78], [CharL79], [Chen71a], [Deo74], [Die96], [GonM79], [Har69b], [HarNC65], [Mars71], [Ore62], [Roy69], [SwaT81], y [Tuc80].

En cada uno de ellos puede encontrarse información suplementaria de la que daremos.



CAPITULO 1

CONJUNTOS Y RELACIONES BINARIAS

Supondremos que el lector tiene conocimiento de las nociones y de la simbología propia de la Teoría de Conjuntos.

No obstante creemos conveniente destacar que, en ocasiones, al considerar *conjuntos* es útil admitir reiteraciones de sus elementos, y que en tal caso suelen ser designados *multiconjuntos*.

Recordemos además que los conceptos *conjunto* y *sucesión* deben distinguirse. En particular, a diferencia de lo que ocurre respecto de los *conjuntos*, al considerar *sucesiones* interesa el orden en que se dan sus elementos, y estos pueden reiterarse si están asociados a índices diferentes.

Una *relación (binaria)* en $X \times Y$ es un subconjunto \mathfrak{R} del producto cartesiano $X \times Y$. Si $X = Y$ se dice, más simplemente, que \mathfrak{R} *está definida en* X .

Para indicar que x, y , están relacionados por \mathfrak{R} – en ese orden – pondremos $x \mathfrak{R} y$; ó $(x, y) \in \mathfrak{R}$; ó $y \in \mathfrak{R}(x)$.

En caso contrario indicaremos $(x, y) \notin \mathfrak{R}$; ó $y \notin \mathfrak{R}(x)$.

Dos relaciones particulares en $X \times Y$ son la “*relación universal*”, que incluye todos los pares (x, y) con $x \in X, y \in Y$ y la “*relación vacía*”, carente de pares.

Si además $X = Y$ cabe considerar también la *relación identidad* \mathfrak{I} , cuyos elementos son los de la forma (x, x) cualquiera sea $x \in X$.

Una relación \mathfrak{R} se dirá *maximal respecto de la propiedad* \mathcal{P} si no está contenida propiamente en otra que también satisfaga \mathcal{P} , y *máxima respecto de* \mathcal{P} si entre dichas maximales no hay otra que tenga más elementos que \mathfrak{R} .

Cuando la propiedad \mathcal{P} sea “la de estar incluido” diremos, más simplemente, que \mathfrak{R} es *maximal (máxima)*.

Nociones y resultados similares se tienen substituyendo *maximal* y *máxima*, por *minimal* y *mínima*, respectivamente.

Una relación $\mathfrak{R} \subseteq X \times Y$ se dice :

- *unívoca* : si para cada $x \in X$ existe a lo sumo un $y \in Y$ tal que $x \mathfrak{R} y$.
- *inyectiva* : si no existe y tal que para $x_1 \neq x_2$ se satisfagan $x_1 \mathfrak{R} y$; $x_2 \mathfrak{R} y$.
- *sobreyectiva* : si para todo $y \in Y$ existe al menos un $x \in X$ tal que $x \mathfrak{R} y$.
- *biyectiva* : si es inyectiva y sobreyectiva.

Así como es natural reinterpretar las *relaciones unívocas* como *funciones*, dada una *relación* $\mathfrak{R} \subseteq X \times Y$ y asignando a cada $x \in X$ el conjunto (eventualmente vacío) de elementos que satisfacen $x \mathfrak{R} y$ queda definida una *aplicación multívoca* $X \rightarrow Y$

Esta correspondencia entre las nociones “*relación*” y “*aplicación multívoca*” refleja respectivas connotaciones subjetivas.

A saber, la de *relación*, que es “estática” pues atiende al carácter de estar ligados, o no, ciertos pares de elementos, y la de *aplicación multívoca*, que es “dinámica” pues conlleva la idea de asignar a cada elemento, un conjunto. Consideraciones al respecto pueden verse en [Roy69] - Cap.III.

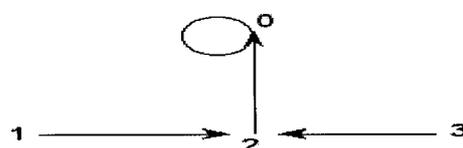
Si ambos conjuntos X, Y , son finitos, toda relación $\mathfrak{R} \subseteq X \times Y$ puede darse por tablas, o por matrices $M = (m_{i,j})$ en las que $m_{i,j} = 1$ si $x_i \mathfrak{R} x_j$ y $m_{i,j} = 0$ en caso contrario ; o por diagramas en los que “se muestran” todos los pares de elementos relacionados.

Estos diagramas pueden pensarse como ejemplificaciones “in extenso” de las relaciones, y suelen permitir operar con ellas más cómodamente que con las habituales notaciones conjuntistas.

En particular, tres formas de visualizar la relación Γ : “*ser doble módulo cuatro*”, o sea “ $(x, y) \in \Gamma$ si y sólo si y difiere de $2.x$ en múltiplo de cuatro”, son

	0	1	2	3
0	1	.	.	.
1	.	.	1	.
2	1	.	.	.
3	.	.	1	.

	x	$\Gamma(x)$
0	0	0
1	1	2
2	2	0
3	3	2



Para las matrices de ceros y unos aplicaremos, en ocasiones las operaciones de adición y multiplicación habituales del cuerpo real \mathcal{R} , pero en otras operaremos en \mathbb{Z}_2 aplicando las operaciones módulo dos dadas por las reglas :

+	0	1
0	0	1
1	1	0

.	0	1
0	0	0
1	0	1

Recordemos que la *suma módulo 2* (*ring sum*) se corresponde con la diferencia simétrica de la Teoría de Conjuntos e introduce una estructura de grupo abeliano en el conjunto en el cual está definida.

También recurriremos a las *operaciones booleanas*, de *adición lógica* (o *supremo*) y de *conjunción lógica* (o *ínfimo*) definidas por

∨	0	1
0	0	1
1	1	1

∧	0	1
0	0	0
1	0	1

Implementar las “operaciones en reales” es más dificultoso que hacerlo con las “operaciones módulo dos”, o con las “operaciones booleanas”, pero éstas no son aptas para efectuar recuentos.

Una relación \mathfrak{R} definida en X se dirá :

- reflexiva** si $x \mathfrak{R} x$ cualquiera que sea $x \in X$.
- arreflexiva** si no es reflexiva.
- antirreflexiva** si para ningún $x \in X$ se satisface $x \mathfrak{R} x$.
- simétrica** si $x \mathfrak{R} y$ implica $y \mathfrak{R} x$.
- asimétrica** si no es simétrica.
- antisimétrica** si $(x, y) \in \mathfrak{R}$ implica $(y, x) \notin \mathfrak{R}$.
- antisimétrica débil** si excepto $x = y$, $(x, y) \in \mathfrak{R}$ implica $(y, x) \notin \mathfrak{R}$.
- transitiva** : si $x \mathfrak{R} y$; $y \mathfrak{R} z$ implican $x \mathfrak{R} z$.
- total (o lineal)** si para todo par x, y , $x \neq y$, $x \mathfrak{R} y$ ó $y \mathfrak{R} x$.

Destaquemos que las relaciones que denominamos antisimétricas (antisimétricas débiles) frecuentemente son designadas asimétricas (antisimétricas).

En [KauP77], donde se incluye una interesante recopilación de resultados se las designa, respectivamente, *antisymétriques au sens large* (*antisymétriques au sens strict*).

Se deja al lector verificar que :

- sólo la relación identidad es simétrica y antisimétrica débil.
- la relación de inclusión es reflexiva, transitiva y antisimétrica débil.
- la relación de inclusión propia es transitiva y antisimétrica.

La relación de inclusión, como así las operaciones de complementación, unión, e intersección de conjuntos, pueden aplicarse también a relaciones. Basta al efecto considerarlas como subconjuntos de un producto cartesiano.

Más precisamente, si \mathfrak{R} , \mathfrak{S} , son relaciones definidas en $X \times Y$ tendremos :

- $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{S}$ si y sólo si $a \mathfrak{R} b$ implica $a \mathfrak{S} b$.
- $(x, y) \in \overline{\mathfrak{R}}$ si y sólo si $(x, y) \in \{(X \times Y) - \mathfrak{R}\}$.
- $T = \mathfrak{R} \cup \mathfrak{S}$ si $a T b$ cuando $a \mathfrak{R} b$ ó $a \mathfrak{S} b$.
- $T = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}$ si $a T b$ cuando $a \mathfrak{R} b$ y $a \mathfrak{S} b$.

Si $R = (r_{i,j})$ y $S = (s_{i,j})$ son las matrices de las relaciones \mathfrak{R} y \mathfrak{S} , las componentes de las matrices asociadas con $\mathfrak{R} \cup \mathfrak{S}$, $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}$ son, respectivamente, $1 - r_{i,j} \vee s_{i,j}$ y $r_{i,j} \wedge s_{i,j}$.

La unión de relaciones reflexivas (simétricas) es reflexiva (simétrica), pero no siempre la unión de relaciones transitivas goza de este carácter.

Basta considerar a este efecto, en $X = \{a, b, c, d\}$, las relaciones $\mathfrak{R} = \{(a, b), (b, c), (a, c), (d, c)\}$; $\mathfrak{S} = \{(a, b), (c, d)\}$.

Las que siguen son dos operaciones que no tienen similares entre las definidas para conjuntos.

I)

Dada una relación binaria $\mathfrak{R} \subseteq X \times Y$, su **inversa** (o **recíproca**, o **traspuesta**, u **opuesta**) es la \mathfrak{R}^{-1} , definida por $(x, y) \in \mathfrak{R}^{-1}$ si y sólo si $(y, x) \in \mathfrak{R}$.

Véase que :

- La operación de inversión es involutiva ; es decir $(\mathfrak{R}^{-1})^{-1} = \mathfrak{R}$.
- Si $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{S}$ entonces $\mathfrak{R}^{-1} \subseteq \mathfrak{S}^{-1}$.
- Las matrices representativas de \mathfrak{R} y \mathfrak{R}^{-1} son traspuestas.
- A cada relación \mathfrak{R} pueden asociarse su simétrica superior $\mathfrak{R}^{\text{sim}} = \mathfrak{R} \cup \mathfrak{R}^{-1}$ y su simétrica inferior $\mathfrak{R}_{\text{sim}} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}^{-1}$.
La $\mathfrak{R}^{\text{sim}}$ es minimal entre las simétricas que contienen \mathfrak{R} , y $\mathfrak{R}_{\text{sim}}$ maximal entre aquellas contenidas en \mathfrak{R} .
- \mathfrak{R} es simétrica si y sólo si $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{-1}$
- \mathfrak{R} es antisimétrica si y sólo si $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}^{-1} = \emptyset$.
- \mathfrak{R} es antisimétrica débil si y sólo si $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}^{-1} \subseteq \mathfrak{I}$.

II)

Dadas, la relación $\mathfrak{R} \subseteq X \times Y$, y la relación $\mathfrak{S} \subseteq Y \times Z$, se dice **composición de \mathfrak{S} con \mathfrak{R}** a la relación $\mathcal{T} \subseteq X \times Z$, con $a \mathcal{T} b$ si y sólo si existe un $w \in Y$ tal que $a \mathfrak{R} w$; $w \mathfrak{S} b$. La notaremos $\mathcal{T} = \mathfrak{S} \circ \mathfrak{R}$.

Así entonces $b \in \mathcal{T}(a)$ si y sólo si $b \in \mathfrak{S}(\mathfrak{R}(a))$.

Es fácil verificar que si las respectivas composiciones son factibles, la composición de relaciones es asociativa, pero no siempre conmutativa.

Si \mathfrak{R} está definida en cierto conjunto X , y se conviene que \mathfrak{R}^0 es la identidad, la composición reiterada de \mathfrak{R} consigo misma lleva a sus *potencias*, definidas recursivamente por $\mathfrak{R}^0 = \mathfrak{I}$; $\mathfrak{R}^h = \mathfrak{R} \circ \mathfrak{R}^{h-1}$, para $h \geq 1$.

En lo que sigue, dadas las matrices $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ de tipos $p \times q$; $q \times r$, respectivamente, consideraremos dos "productos fila-columna".

Uno de ellos, el $C = A \bullet B = (c_{i,j})$ definido por $c_{i,j} = \sum_k a_{i,k} \cdot b_{k,j}$; y el otro, el de "composición booleana" $C = A \circ B = (c_{i,j})$ con $c_{i,j} = \bigvee_k a_{i,k} \wedge b_{k,j}$.

Ambos son asociativos, y aplicados a una matriz M dan lugar a sus potencias.

Para distinguirlas convendremos en notar M^h a las dadas por $M^h = M \bullet M^{h-1}$, y con $M^{[h]}$ a las $M^{[h]} = M \circ M^{[h-1]}$. Además $M^0 = M^{[0]} = \mathfrak{I}$.

Nótese que si bien las potencias de una relación simétrica son simétricas no puede afirmarse lo mismo respecto de la composición de relaciones simétricas.

En efecto, si en $\{a,b,c\}$ se dan $R = \{(a,b), (b,a)\}$; $S = \{(b,c), (c,b)\}$ se tiene $S \circ R = \{(a,c)\}$, que no es simétrica.

Las relaciones binarias más frecuentemente estudiadas son las de :

- **semejanza (o analogía)** : reflexivas y simétricas.
- **preorden** : transitivas y reflexivas.
- **preorden estricto** : transitivas y antirreflexivas.
- **orden (parcial)** : reflexivas, transitivas y antisimétricas débiles.
- **orden estricto (parcial)** : antisimétricas y transitivas.
- **equivalencia (o preorden simétrico)** : reflexivas, transitivas y simétricas.

La única relación de equivalencia y de orden es la relación identidad.

Oportunamente veremos que a cada clase de relaciones binarias corresponde una de "digrafos", que en cada uno de éstos puede introducirse de forma natural una relación de preorden, y que en algunos casos ésta también es de orden.

Las relaciones de equivalencia están estrechamente vinculadas con el siguiente e importante concepto.

Una **partición** de un conjunto X es una familia X_i de subconjuntos de X , tales que

- a) $X_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$.
- b) $X_i \cap X_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
- c) $X = \bigcup_i X_i$.

Cada partición de X define una relación de equivalencia \mathcal{E} , según la cual $x \mathcal{E} y$ si y sólo si ambos x, y , pertenecen a un mismo X_i . Recíprocamente, cada relación de equivalencia en X define una partición de X

Los elementos del *conjunto cociente* X/\mathcal{E} son las *clases de equivalencia*.

El número \mathcal{P}_n de particiones que admite un conjunto de n elementos está dado

$$\text{por la recurrencia : } \mathcal{P}_0 = 1 ; \quad \mathcal{P}_n = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \cdot \mathcal{P}_j = \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{j-1} \cdot \mathcal{P}_{n-j}$$

Para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ los valores de \mathcal{P}_n son, respectivamente, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4.140.

Dado un conjunto \mathcal{P} de propiedades, y una relación \mathfrak{R} , su **clausura- \mathcal{P}** es la intersección de todas las relaciones que contienen \mathfrak{R} y satisfacen las propiedades contenidas en \mathcal{P} .

Si no hay tales relaciones, su clausura- \mathcal{P} es vacía.

De la definición resulta que \mathfrak{R} está contenida en cada una de sus clausuras- \mathcal{P} no vacías, y que coincide con ellas si y sólo si \mathfrak{R} satisface todas las propiedades incluidas en \mathcal{P} .

Así por ejemplo, \mathfrak{R} coincide con su "clausura reflexiva" si y sólo si todo elemento está relacionado consigo mismo por \mathfrak{R} .

Dada en X una relación R las clausuras más frecuentemente estudiadas son :

- 1- la **clausura reflexiva** $R^{re} = R \cup I$ ($I = \text{identidad}$)
- 2- la **clausura simétrica** $R^{sim} = R \cup R^{-1}$
- 3- la **clausura transitiva** $R^{tr} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots = \bigcup_j R^j; j \geq 1.$
- 4- la **clausura reflexivo-transitiva** (o de preorden) $R^{retr} = \bigcup_j R^j; j \geq 0$
- 5- la **clausura de equivalencia** R^{eq}
- 6- la **clausura de orden** R^{or}

La clausura transitiva (reflexivo-transitiva) de Γ también será notada $\Gamma^* (\vec{\Gamma})$.

Habitualmente, las clausuras "reflexivo-transitivas" se designan "transitivas". En [Roy62a] se observa que esta designación no es algebraicamente correcta pero se la adopta por concesión al uso habitual, y se propone designar nuestra "clausura transitiva" con el nombre de "fermeture μ - transitive".

Más detalles sobre estas clausuras y sobre clasificaciones de preordenes pueden verse en [BarM70] y [Roy69] Cap.IV.

Si R está definida en un conjunto de n elementos, para obtener R^{tr} será suficiente considerar sólo sus n primeras potencias, Si además es reflexiva alcanzarían sólo las $(n-1)$ primeras potencias.

Para mostrar que $(R^{sim})^{tr}$ y $(R^{tr})^{sim}$ no siempre coinciden bastaría con tomar en $X = \{ a, b, c \}$ la relación $R = \{ (a, c), (b, c) \}$, que es transitiva, pero cuya clausura simétrica no lo es.

Véase que dada en X una relación R se tienen :

- R es reflexiva si y sólo si $I \subseteq R$ ($I = \text{identidad}$), y en tal caso $R^{tr} = R^{retr}$.
- $R^{retr} = (R^{tr})^{re} = (R^{re})^{tr} = I \cup R^{tr} = (I \cup R)^{tr}$. En 3.1 justificaremos la afirmación : $I \cup R^{tr}$ da más información que $(I \cup R)^{tr}$.

Toda relación definida en X está incluida en la relación universal, que es reflexiva, simétrica y transitiva. Por lo tanto, puesto que las potencias de una relación reflexiva son reflexivas, y que lo mismo cabe afirmar respecto de las simétricas y de las transitivas, resulta que las precedentes clausuras 1 a 5 son no vacías. En cambio, no toda relación admite clausura de orden no vacía.

En particular, la relación universal no es de orden, y si R contiene un “circuito no trivial”, es decir, un conjunto de elementos x_i , $1 \leq i \leq k$, con $1 \neq k$, tales que $x_1 R x_2 R x_3 \dots x_k R x_1$ no hay relación de orden que la contenga.

Para las que carecen de dichos “circuitos” resulta que R^{tr} es transitiva y antisimétrica débil. Por lo tanto, para ellas su clausura de orden es $R^{or} = I \cup R^{tr}$

Más adelante ciertos conceptos, y/o métodos propios de la Teoría de Grafos nos llevarán a volver sobre algunas de estas clausuras y a dar nuevas formas de obtenerlas.

Por otra parte : Si \mathcal{T} es la *clausura- \mathcal{P}* de cierta relación \mathcal{R} es habitual decir que \mathcal{R} es una *especificación \mathcal{P} -incompleta* de \mathcal{T} (o que \mathcal{R} es una *reducción- \mathcal{P}* de \mathcal{T}).

Así por ejemplo, dada la relación $R = \{ (a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d), (c,d) \}$, las relaciones $R' = \{ (a,b), (b,c), (c,d) \}$ y $R'' = \{ (a,b), (b,c), (b,d), (c,d) \}$ son reducciones transitivas de R . De éstas, R' es minimal.

Si \mathcal{T} es una clausura- \mathcal{P} , recurrir a alguna de sus especificaciones \mathcal{P} -incompletas permite economizar el espacio de memoria necesario para su almacenaje, y esto sin afectar los resultados que pueden obtenerse a partir de \mathcal{T} .

A esto se recurre al construir los “*Diagramas de Hasse*” que determinan unívocamente, a menos de isomorfismo, el conjunto ordenado en cuestión. Recordemos que en ellos, si el conjunto está ordenado por \leq se visualizan sólo los pares a, b , con $a \neq b$ y $a \leq b$, pero sólo si “ b cubre a ”; es decir, sólo si no existe c tal que $a \leq c \leq b$.



CAPITULO 2

MULTIGRAFOS Y MULTIDIGRAFOS

2.1. NOCIONES GENERALES

La Teoría de Grafos es una parte de la Matemática en la cual el número de definiciones a considerar puede parecer superior al de resultados interesantes. Además, lamentablemente, la designación de sus nociones varía notoriamente con los autores y no sólo sucede que una misma noción suele recibir nombres distintos sino que, a veces, con un mismo vocablo se designan conceptos diferentes. Esto complica de forma innecesaria el estudio de la teoría que nos ocupa, y nos obliga a dar un listado de definiciones.

Las ideas subyacentes en muchas de las nociones a estudiar surgen de las “representaciones topológicas” (2.1.3) y son fácilmente visualizables en ellas. De algunas, y visto que mucha de la bibliografía que se utiliza en nuestro ambiente está en lengua inglesa, o francesa, daremos también los nombres más frecuentes con los cuales se las designan en ellas.

2.1.1. CONCEPTOS BASICOS

La forma más habitual de introducir las nociones que estudiaremos es :

Un **multidigrafo** G de **vértices** V es un par ordenado $G = (V, U)$ donde U es una familia de pares ordenados (x, y) de vértices, no siempre $x \neq y$. Los elementos de U son los **arcos** de G .

Un **multigrafo** G de **vértices** V es un par ordenado $G = (V, U)$ donde U es una familia de pares no ordenados $[x, y]$ de vértices, no siempre $x \neq y$. Los elementos de U son las **aristas** de G .

Un tal G es **vacío** si $V = U = \emptyset$; **discreto** si $V \neq \emptyset, U = \emptyset$; y **digrafo (grafo)** si cada par ordenado (cada par) de vértices está incluido a lo sumo una vez en U .

Ejemplo : El multidigrafo $G = (V, U)$ de vértices $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y arcos :
 $a = (1, 2)$; $b = (1, 2)$; $c = (4, 2)$; $d = (3, 2)$; $e = (3, 3)$; $f = (3, 5)$; $g = (5, 3)$;
 $h = (5, 6)$; $i = (6, 7)$; $j = (9, 10)$.

En 2.1.3 y en 2.2 se lo introducirá de otras formas.

Para cuando la familia U es no vacía también cabe definir como multidigrafo G a toda terna $G = (V, U, \Psi)$ de vértices V , y de arcos U , con *relación de incidencia* $\Psi : U \rightarrow V \times V$.

Con esta definición G es *digrafo* si y sólo si Ψ es *inyectiva*.

Los *vértices* también suelen designarse *puntos*, o *nodos*. Aquellos en los que no inciden arcos (aristas) son **aislados**.

Cada arista puede identificarse con un conjunto de dos, o de un único vértice. La admisión de *aristas con tres o más vértices* lleva al concepto de *hipergrafo*, que no consideraremos.

Al respecto podrían consultarse [Ber70/73/87/88], [Duch66], [Zyk74].

Otras dos nociones relacionadas con las que nos ocupan, y que tampoco consideraremos, son las de "*grafo aleatorio*" y "*matroide*". Esta última, que generaliza el concepto de independencia lineal, fue introducida por Whitney [Whit35]. Para información sobre ellas : [Aig79], [Ber70], [Boll79/85], [Brut70/74], [BrylK78], [Die96], [GonM79], [Gri83], [HarW69], [Karo66/82], [Law76] [Mars71], [Rad75], [Ray68], [SwaT81], [Tut59/71], [Wel66/76/88], [Wils72/73],

Respecto de las nociones propias de la Teoría de Grafos observemos que, en general, a cada una de las que implica tomar en cuenta el orden en que se dan los vértices puede asociársele, en forma natural, otra para la cual dicho orden es irrelevante. Ambas clases de nociones están estrechamente vinculadas, pero la correspondencia entre ellas no es biunívoca.

A ellas nos referiremos, respectivamente, bajo los nombres genéricos de "*nociones dirigidas*", y de "*nociones no dirigidas*". Estas últimas, que están ligadas al concepto de arista, antes que al de arco, pueden introducirse y ser estudiadas directamente en multigrafos, pero según veremos es factible, y útil, considerarlas también con referencia a multidigrafos.

Por razones de brevedad, al referirnos a cuestiones para las cuales no interese distinguir entre "caso dirigido" y "caso no dirigido", los multidigrafos y los multigrafos serán designados, indistintamente, **multi-di-grafos** o **configuraciones**.

Lo que denominamos "multi-di-grafo", suele ser designado *grafo*, *grafo general*, o *pseudografo* ; y en tales casos nuestro "grafo" recibe el nombre de *grafo puro*, o de *grafo propiamente dicho*.

Algunos autores les agregan el calificativo dirigido, o no dirigido, según sea el caso en estudio.

También se los designa *redes*; pero este término se usa con preferencia para el caso de ciertas "configuraciones valuadas" (ver 2.3).

Un multi-di-grafo $G = (V, U)$ se dirá **finito** si y sólo si ambos conjuntos V, U , son finitos. Se dirá **de orden n** si $|V| = n$, y **trivial** si es discreto de orden uno.

Nótese que aún cuando V sea finito la familia U podría ser infinita, y que sólo si no se admiten vértices aislados la finitud de U implica la de V .

Salvo mención explícita sólo nos referiremos a configuraciones finitas. Información sobre las infinitas puede tenerse en [Kön36], [NashW67] y [Tho82/83a]. El omitirlas nos permitirá razonamientos no aceptables si se admitieran conjuntos infinitos.

Algunos autores explicitan no admitir grafos vacíos, en tanto que otros los admiten, y los designan "*empty graph*", o bien "*null graph*". Estos nombres también se suelen emplear para referirse a los grafos que llamamos discretos.

En Harary-Read [HarR74] se analizan ventajas, e inconvenientes, que conlleva la admisión del grafo vacío, y se observa que distintas definiciones habituales de un cierto concepto pueden no ser intercambiables al aplicárselas.

Si bien puede parecer que el grafo vacío, los discretos, y los vértices aislados carecen de interés, ellos son particularmente útiles al considerar procesos iterativos que mediante el agregado (la supresión) de elementos generan una configuración a partir de otra.

Destaquemos que la eliminación de un vértice implica la de todos los arcos (o de todas las aristas) incidentes en él.

Dada la arista $u = [a, b]$, $a \neq b$, cada uno de los "*vértices de incidencia de u* " se puede identificar con uno de los "*extremos de u* ". Pero si $a = b$ cabe distinguir entre "*los extremos de u* " y "*el vértice de incidencia de u* ".

Por otra parte, dado el arco $u = (a, b)$ se dirá que a (b) es su *extremo inicial (final)* y que u *incide positivamente en a (negativamente en b)*.

Si ambos extremos del arco u , o de la arista u , inciden en un mismo vértice, es decir, si $u = (a, a)$, o si $u = [a, a]$ se dirá que u es **bucle** (de soporte a).

En [Tor76] los bucles son denominados : *lazo, rizo*.

Diremos **vértice de entrada (de salida)** a todo vértice que no sea extremo final (inicial) de algún arco, y **arcos de entrada (de salida)** a aquellos que los tienen por extremo inicial (final).

Todo vértice aislado es de entrada y de salida.

Diremos **vértice pendiente** a todo vértice en el cual incide una única arista y ella es distinta de bucle, y **arista pendiente** a toda arista con al menos uno de sus extremos en un vértice pendiente.

Si existe al menos un arco (a, b) , aún si $a = b$, diremos que **a precede b** (**b sucede a**); o mejor, para mayor precisión, que a (b) es *predecesor (sucesor) inmediato de b* (a).

En tal caso, y también si existe una arista de extremos a, b , diremos que a, b , son **vértices adyacentes** (se admite $a = b$).

Caso contrario a, b , son **vértices independientes**

Dos aristas (arcos) que tienen al menos un vértice extremo en común se dirán **aristas(arcos)adyacentes**. Caso contrario son **aristas(arcos)independientes**.

Erdős y Gallai [ErdG59] determinaron, entre otros resultados de carácter extremal que :

Si un grafo de orden n carece de bucles, y contiene a lo sumo $k \geq 1$ aristas independientes dos a dos, su número de aristas está acotado superiormente por

$$\text{Max} \left\{ \binom{2k+1}{2}, k \cdot (n-k) + \binom{k}{2} \right\}$$

Además dieron condiciones para que valga la igualdad.

Se dicen **aristas paralelas** a todas aquellas que coinciden en sus vértices extremos, y **arcos paralelos** a los que coinciden en sus respectivos vértices iniciales y vértices finales

Si G contiene conjuntos con a lo sumo p arcos paralelos dos a dos (p aristas paralelas dos a dos) diremos, con el fin de enfatizar esta situación, que G es un **p -digrafo** (**p -grafo**).

|| Todo grafo (digrafo) es un 1-grafo (1-digrafo).

Un arco de G queda bien determinado por sus vértices sólo si G es digrafo.

Para el caso de arcos paralelos podríamos convenir en indicarlos agregando señales extras. Por ejemplo : $(a, b, *)$; $(a, b, \#)$, o mejor $(a, b)_t$, $1 \leq t \leq p$. Análogamente para el caso no dirigido.

Visto que mediante la incorporación de un vértice z es posible substituir cada arco (x, y) por el par de arcos $(x, z), (z, y)$, y que esta operación puede reiterarse tanto como sea necesario resulta que :

|| *A cada multidigrafo puede asociársele un digrafo sin bucles.*

Una afirmación similar vale para el caso no dirigido.

Por esto, gran parte de la Teoría de Grafos está dedicada a configuraciones que carecen de bucles, o de elementos paralelos.

No obstante, la consideración de multi-di-grafos propiamente dichos es conveniente, y aún necesaria.

Un conjunto A de vértices de $G = (V, U)$ se dirá **soporte de U'** si cada elemento de $U' \subseteq U$ tiene al menos un extremo en A .

Si $u = (p, q)$; $v = (q, p)$; se admite $p = q$, los arcos u, v , son **arcos opuestos**.

Substituyendo cada arco de G por su opuesto se construye el **multidigrafo opuesto** (o **inverso**) de G . Lo notaremos G^{op} ó G^{-1} .

Obviamente estas nociones carecen de similar para el caso no dirigido, y sólo los bucles son arcos opuestos de si mismo.

Reemplazando cada arco (a, b) por una arista $[a, b]$ se tiene que a cada par de arcos opuestos, o de arcos paralelos, queda asociado un par de aristas paralelas, incidentes en los mismos vértices que los arcos substituidos.

Por ello, los arcos opuestos (paralelos) suelen decirse *parallel arcs* (*strictly parallel arcs*). ([BusS65] , [ChaGM79]).

A los que según nuestra terminología son "digrafos sin pares de arcos opuestos", algunos autores los designan "oriented graphs". Pero esto puede llevar a confusiones pues podría entenderse que esta denominación se refiere a grafos dirigidos.

Un multidigrafo se dirá **simétrico** si contiene tantos arcos de la forma (p, q) como arcos de la forma (q, p) cualesquiera sean los vértices p, q .

En ocasiones, el concepto "grafo simétrico" esta ligado con el de "grupo de automorfismos" (ver pág. 23). Tal ocurre, en particular, en [BucH90] y [Har69b]-Cap.14.

Frecuentemente, la noción "*multigrafo*" se identifica con la de "*multidigrafo simétrico*". Para ver que esto no siempre es lícito bastaría notar que arcos opuestos pueden tener "valuaciones" diferentes.

Seguidamente daremos dos formas de vincular multigrafos con multidigrafos.

Ellas permitirán referirse a "nociones dirigidas en multigrafos", y a "nociones no dirigidas en multidigrafos".

Para verificar que esta correspondencia no es biunívoca basta recordar la ya indicada entre *arcos opuestos* y *arcos paralelos* con *aristas paralelas*.

A) Dado un multidigrafo G llamaremos **multigrafo sostén de G** al que resulta de substituir cada uno de sus arcos (a, b) por una arista $[a, b]$. Lo notaremos \underline{G} .

Cada arco de G se corresponde biyectivamente con una arista de \underline{G} , y aún cuando \underline{G} contiene menos información que G , en \underline{G} se pueden analizar todas las cuestiones relativas a G que no involucren la orientación de sus arcos.

Es decir, las propiedades de las “nociones no dirigidas” también son deducibles en multidigrafos, remitiéndose a sus respectivos sostenes.

Además, razonando sobre configuraciones dirigidas pueden inferirse propiedades que no son expresables dentro del contexto no dirigido.

La correspondencia $G \rightarrow \underline{G}$ no es inyectiva, y como tanto los arcos opuestos, como los paralelos de G devienen aristas paralelas de \underline{G} , se tiene que :

|| \underline{G} es grafo si y sólo si G es digrafo sin pares de arcos opuestos.

B) Conservando los vértices y los bucles de G , pero substituyendo cada arista $u = [a, b]$, con $a \neq b$, por un par de arcos opuestos u, \check{u} , a cada multidigrafo G se le asocia un multidigrafo simétrico, que diremos **simetrizado de G** , y notaremos G^s .

El carácter involutivo de la relación “ser arco opuesto” permite ver que la ambigüedad en la asignación de las notaciones u, \check{u} , no es fuente de problemas.

La correspondencia $G \rightarrow G^s$ es inyectiva, y todo multidigrafo simétrico se puede considerar de la forma G^s .

Véase que :

si G es p -grafo, G^s es p -digrafo.

si G contiene arcos, $G \neq (\underline{G})^s$.

si G contiene aristas, $G \neq (\underline{G}^s)$.

El par de nociones anteriores hace innecesario el estudio de las *configuraciones mixtas*; es decir, el de aquellas con arcos y con aristas.

No obstante, éstas son tenidas en cuenta por algunos autores.

Podemos ahora dar la siguiente reformulación de una observación anterior, a la cual recurriremos frecuentemente sin indicación expresa.

Para aplicar una noción no dirigida a un multidigrafo G se pensará en su sostén \underline{G} , y cada noción dirigida referida a un multigrafo H se supondrá aplicada en su simerizado H^s .

Convendremos que en tales casos, por comodidad, y sobreentendiendo cual es la situación en análisis, cada noción será referida directamente a la configuración de partida, omitiendo mencionar explícitamente a su sostén, o a su simetrizado.

Así por caso, los "arcos de un multidigrafo G " se dirán, "aristas de G ", en lugar de "aristas de \underline{G} ".

Algunos autores, entre otros [Deo74], [Har69b] y [HarNC65] proponen, para cuando se estudian nociones no dirigidas en multidigrafos, designarlas anteponiendo el prefijo "semi" al vocablo de la correspondiente noción dirigida.

Así por ejemplo denominan "semi-path" a la noción no orientada correspondiente a la de "path", del caso dirigido.

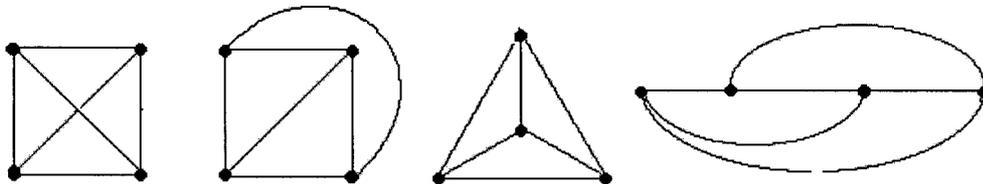
2.1.2. ALGUNAS CONFIGURACIONES FRECUENTES

Si G es un grafo carente de bucles tal que cada uno de sus vértices es adyacente de todos los otros G es un **grafo completo**.

Fijado el número de vértices está unívocamente determinado (a menos de "isomorfismo" (ver 2.1.4)). Al de orden n se lo nota K_n .

El grafo vacío puede considerarse completo, pues satisface vacuamente la definición y ser notado K_0 ; todo vértice aislado (o sea, el grafo trivial) es K_1 ; toda arista distinta de bucle es K_2 ; todo "triángulo" es K_3 , y todo "tetraedro" es K_4

Este último puede visualizarse por cualesquiera de los esquemas.



Es fácil verificar, por inducción o con argumentos combinatorios, que el completo K_n contiene $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ aristas.

Esto también se puede demostrar recurriendo al concepto “grado de un vértice” (ver pág.40), o con el siguiente razonamiento.

Si $n \geq 3$ en K_n existen $\binom{n}{3}$ “triángulos” y cada arista integra $(n-2)$ de éstos.

Luego, si cada una de las m aristas se cuenta tantas veces como “triángulos” integra se tiene que $m \cdot (n-2) = 3 \cdot \binom{n}{3}$, de donde $m = \binom{n}{2}$.

Todo digrafo sin bucles que contenga el par de arcos (x, y) , (y, x) , cualesquiera sean x, y , con $x \neq y$, se dirá **completo simétrico**.

Si en cambio contiene exactamente uno de dichos arcos se dirá **completo antisimétrico**, o más frecuentemente **torneo**.

Así, todo torneo es un digrafo cuyo sostén es un completo, y todo completo simétrico es el simetrizado de un completo.

Obviamente, a todo certamen a una ronda, en la que cada equipo compite con todos los restantes y donde no se admiten empates puede asociarse un torneo.

Por un resultado que se dará en el Cap.5 resulta que :

Los participantes de una tal competencia pueden ordenarse en una sucesión e_1, e_2, \dots, e_n , no siempre unívocamente determinada, y tal que cada e_i , $1 \leq i < n$, haya triunfado sobre e_{i+1} , y eventualmente e_n sobre e_1 .

El número de torneos crece fuertemente con su orden. La expresión que los cuenta fue hallada por Davis, en 1953.

Hay 56 de orden seis, 456 de orden siete, 6.880 de orden ocho, los de orden diez exceden los nueve millones, y los de orden doce son 154.108.311.168.

En [HarP73]-Apend.1 se da una tabla con el número de los de orden $n \leq 30$.

El lector interesado en éstos podría consultar : [CharL79], [HarM66], [HarNC65], [Moon68], [ReiB78].

Se dice **multi-di-grafo bipartido** a todo multi-di-grafo $G = (V, U)$ en el cual $V = V_1 \cup V_2$; $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, y donde U está constituido de arcos (o de aristas) con extremos en V_1 y en V_2 .

Si G es grafo, y cada vértice de V_1 es adyacente de todos los de V_2 se dirá **grafo bipartido completo**. En este caso, supuesto que V_1 (V_2) tiene p (q) vértices, se lo indica $K_{p,q}$.

Es fácil ver que :

- $K_2 = K_{1,1}$
- Si un vértice no es soporte de bucles, y en él inciden p aristas, el conjunto en cuestión determina al bipartido completo $K_{1,p}$.
- Los vértices y las aristas de un cuadrado ejemplifican al bipartido completo $K_{2,2}$, y los de un cubo, a un bipartido no completo con cuatro vértices en cada una de sus clases.

Destaquemos que en ocasiones se denominan “*simples*” a los grafos “carentes de bucles”, pero que en otras se aplica dicha designación a los “bipartidos”

En particular, Berge llama *graphe simple* a los bipartidos en [Ber58], y a los carentes de bucles en [Ber70].

Las nociones anteriores se extienden a las de **k-partido** y **k-partido completo**. (ver Ejerc.2-13).

Por otra parte, suele ser útil recurrir a la siguiente noción, y a su similar para el caso no dirigido.

Dado un multidigrafo $G = (V, U)$ su **multidigrafo bipartido representativo** es el $G_{br} = (V' \cup V'', W)$ con V', V'' , copias disjuntas de V , y con arcos (a', b'') $a' \in V', b'' \in V''$, cuando $(a, b) \in U$, y sólo entonces.

Otro bipartido asociable a cualquier multigrafo $G = (V, U)$ es el que se obtiene por “*subdivisión*” (ver pág. 47) substituyendo cada una de sus aristas $u_i = [a, b]$ por el par de aristas $[a, x_i], [x_i, b]$, con $x_i \notin V$.

Por otro lado, en pág.43-44 veremos como obtener un grafo bipartido a partir de otro sin bucles, y esto eliminando a lo sumo la mitad de sus aristas.

Otros grafos a los cuales recurriremos con frecuencia a partir del Capítulo 3, y que en éste sólo serán utilizados para ejemplificar situaciones son :

las **cadenas elementales** P_h (de longitud $(h - 1)$) compuestas por las aristas $u_i = [x_i, x_{i+1}]$, con $1 \leq i \leq h-1$.

los **ciclos elementales** C_h (de orden h , y de longitud h) compuestas por las cadenas elementales P_{h+1} en las que $x_1 = x_{h+1}$.

las **ruedas** W_h (de orden $h+1$) compuestas de los ciclos elementales C_h de aristas $[x_i, x_{i+1}]$, $1 \leq i \leq h$, y las aristas $[x_0, x_i]$, $x_0 \neq x_i$, $1 \leq i \leq h$.

De las definiciones dadas resulta que : C_1 es un bucle $\parallel C_2$ un par de aristas paralelas $\parallel C_3 = K_3$ $\parallel K_{1,2} = P_2$ $\parallel K_4 = W_3$.

2.1.3. REPRESENTACIONES TOPOLOGICAS

Lo esencial para definir un multi-di-grafo es dar su conjunto de vértices e indicar para cada uno de sus arcos (aristas) cuales son sus vértices extremos.

Esto puede hacerse de diferentes maneras, por ejemplo :

-- mediante "esquemas geométricos" (más precisamente, "topológicos").

-- enunciando un conjunto de relaciones adecuadas.

-- dando listas, o tablas, o matrices, que reflejen ya sea :

la incidencia de vértices y aristas (de vértices y arcos), o bien

la adyacencia (la precedencia) entre vértices, o bien,

la multiplicidad de sus aristas (arcos), etc.

En determinadas circunstancias podrán ser útiles otras formas.

Distintas representaciones de un dado G pueden llevar a mejores visualizaciones de diferentes propiedades, o características del mismo.

La elección de cual emplearíamos depende, en general, del problema a tratar, o de los medios de cálculo disponibles, o de la envergadura de G , o de sus particularidades (por ejemplo : existencia (o carencia) de vértices aislados, de bucles, de arcos paralelos, etc.).

Numerosos conceptos de la teoría se inspiran, o son fácilmente visualizados en las representaciones dadas por los diagramas a que nos hemos referido en el Prólogo. En ellos no interesan cuestiones métricas, y sólo cuentan las que se conservan cuando se las somete a deformaciones elásticas que no conllevan roturas o pegamentos.

Ellos son, en realidad, “*esquemas topológicos*”, es decir, “*diagramas en los que sólo cuentan propiedades invariantes bajo deformaciones propias de una lámina elástica*”.

Creemos oportuno señalar que para una visión general de las cuestiones que aborda la *Topología* (o *Analysis Situs*) así como de las representaciones en cuestión y de sus relaciones con el problema de los cuatro colores pueden verse [BusS65], [CouR41], [FréKF46], [Gard60], [Har64a/67d], [RouB92], [TucB50], y [Tut63a].

Observemos además que los grafos fueron estudiados dentro de la *topología combinatoria* en [GroT87], [Stal83], [Veb22], [WhiB78] y [Zyk49].

En este contexto los *grafos* son denominados “*linear complexes*”, las *aristas* “*1-simplex*”, y los *vértices* “*0-simplex*”.

Puesto que habitualmente la resolución de problemas implica el uso de algoritmos, y estos conllevan el de equipos de computación, frecuentemente dichos esquemas topológicos carecen de utilidad.

En tales casos será necesario recurrir a las representaciones dadas por tablas, o por listas, o por matrices. Estas serán analizadas brevemente en 2.2.

Se dice **representación geométrica** (o **representación topológica**) de un multigrafo $G = (V, U)$ a todo esquema en \mathcal{R}^h , $h \geq 2$ constituido por :

- un conjunto \underline{V} de puntos, en correspondencia biyectiva con V .
- un conjunto \underline{U} de curvas en correspondencia biyectiva con U , pero tales que si \underline{u} es la curva asociada a la arista $u = [a, b]$ - se admite $a = b$ - los extremos de \underline{u} inciden en los puntos de \underline{V} que se corresponden, respectivamente, con los vértices a, b .

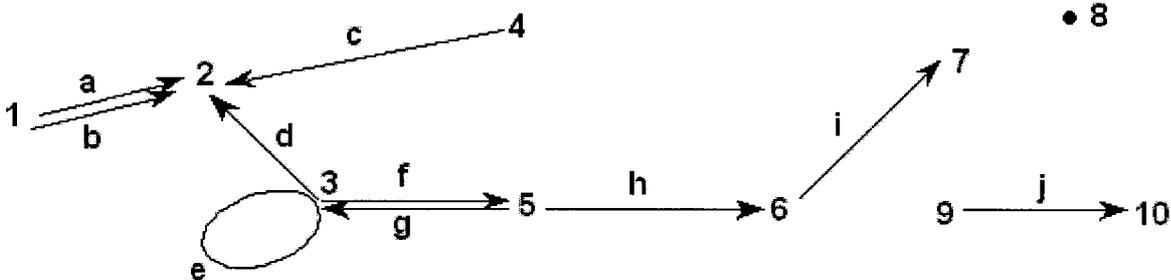
Se sobreentiende que sólo los extremos de \underline{u} inciden en puntos de \underline{V} .

Para el caso dirigido se procede en forma similar, pero conviniendo además en asignar a cada curva el sentido de recorrido coincidente con el inducido por el orden en que se dan los vértices extremos del arco que le está asociada.

Para evitar que eventuales puntos de intersección de las curvas asociadas a las aristas puedan confundirse con vértices, sería conveniente representar a éstos con marcas especiales. Ocasionalmente los indicaremos con \bullet .

Obviamente, los esquemas en cuestión no están unívocamente determinados. Dos de ellos representan una misma configuración si y sólo si son “isomorfos” (ver 2.1.4), es decir, si y sólo si es posible dar adecuadas aplicaciones biyectivas que preserven las incidencias y las orientaciones.

El multidigrafo de vértices $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ y arcos $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ con $a = (1, 2)$; $b = (1, 2)$; $c = (4, 2)$; $d = (3, 2)$; $e = (3, 3)$; $f = (3, 5)$; $g = (5, 3)$; $h = (5, 6)$; $i = (6, 7)$; $j = (9, 10)$ dado en pág.9 se puede representar por



Diremos **representación limpia** a toda representación topológica cuyas curvas no se intersectan ; o sea, a todo esquema en el cual dos curvas tienen en común a lo sumo sus extremos.

Un multi-di-grafo se dice **planar** si admite una *representación limpia* en \mathcal{R}^2 , y una tal representación limpia se dice **multi-di-grafo plano**

En particular, son *multigrafos planos* los G_1 y G_3 dados en pág.VII del Prólogo, pero no el G_2 .

En ocasiones convendrá distinguir entre los multi-di-grafos planares, y sus representaciones topológicas. Esto llevará a agregarles, respectivamente, los calificativos : *abstracto* \parallel *geométrico*.

Un resultado clásico, enunciado por Kuratowski en 1930 (ver pág.48), permitirá caracterizar a las configuraciones planares mediante las nociones de "grafo completo" y "grafo bipartido".

Como en toda carta geográfica las fronteras de los países que la componen determinan un "multigrafo plano" la búsqueda de soluciones al citado "*Problema de los Cuatro Colores*" impulsó el estudio de los multigrafos planares.

Notemos, de paso, que una red eléctrica podrá ser concretada mediante un circuito impreso si y sólo si su esquema es planar.

Para el caso de grafos no planares pueden ser de interés la búsqueda de representaciones con el menor número posible de cruzamientos de sus aristas.

Respecto de la *planaridad*, noción a la cual volveremos en Cap.10, nótese que las “proyecciones estereográficas” permiten establecer correspondencias biyectivas entre las representaciones limpias en el plano, con aquellas en la esfera.

Destaquemos además que si bien *no todo multigrafo es planar*, se tiene que :
Todo multigrafo finito G admite representaciones topológicas limpias en \mathcal{R}^3 .

Para verificar lo antedicho bastará asignar a cada vértice de G un punto de cierta recta A , y a las aristas de G curvas con extremos en puntos de A pero tales que :

- cada una de las curvas está contenida en alguno de los semiplanos del haz de planos con eje A .
- en cada uno de estos semiplanos haya a lo sumo una de tales curvas.
- los puntos de A extremos de la curva representativa de la arista $[a, b]$ son los puntos de A asignados a los vértices a, b .

Otra forma de constatar la validez de la afirmación anterior, haciendo uso de rectas no coplanares, puede verse en [Tor76].

2.1.4. ISOMORFISMOS

Obviamente, si al representar un multi-di-grafo se cambian las designaciones o las ubicaciones de sus elementos, no se altera esencialmente la configuración en estudio.

Las distintas materializaciones así obtenidas pueden pensarse como imágenes diferentes de un mismo objeto matemático y se dirán “*isomorfas*”.

Más precisamente :

Dos multidigrafos $G = (V, U)$; $G' = (V', U')$ son **isomorfos** si existen biyecciones $h^0 : V \rightarrow V'$; $h^1 : U \rightarrow U'$ tales que cualquiera sea el arco $u = (a, b)$ se tiene que $h^1(u) = h^1((a, b)) = (h^0(a), h^0(b))$.

En tal caso, $h = (h^0, h^1)$ define un *isomorfismo* $h : G \rightarrow G' = h(G)$.

Si G carece de arcos paralelos (de vértices aislados), y sólo entonces, h^0 determina h^1 (h^1 determina h^0).

Por lo tanto :

Si G es un digrafo carente de vértices aislados, y (h^0, h^1) establece un isomorfismo, éste puede ser dado tanto a partir de h^0 como de h^1 .

Para el caso no dirigido caben definiciones y propiedades similares.

En particular, dos multigrafos G y G' son isomorfos si y sólo si los vértices adyacentes en G se corresponden biyectivamente con los adyacentes en G' , y además se conservan las multiplicidades de las aristas correspondientes.

Tal el caso de los G_1, G_2, G_3 dados pág.VII del Prólogo.

Notemos que aún cuando dichos G_1, G_2, G_3 son equivalentes desde el punto de vista de los grafos ellos no lo son en sentido topológico ; puesto que G_2 no puede obtenerse a partir de G_1 , ni de G_3 , por una "transformación continua".

La relación de isomorfismo es de equivalencia, pero multi-di-grafos isomorfos pueden corresponder a problemas distintos, y aún contrapuestos.

Véase que | Si G y H son multidigrafos isomorfos también lo son sus respectivos sustitutos. La recíproca es falsa.

Si por alguna razón interesara tomar en cuenta la designación, o marcas, o valores asignadas a los elementos de cierto multi-di-grafo G , diremos que G está "etiquetado" o "valuado" (ver 2.3).

En este caso, aún las isomorfias serán consideradas distintas.

Todo parámetro que toma iguales valores en un multi-di-grafo y en sus isomorfos es un **invariante gráfico**. Salvo contadas excepciones ellos no determinan configuraciones únicas, ni aún a menos de isomorfismo.

Por ejemplo, con el número n de vértices, y m de aristas, $0 \leq m \leq n(n-1) / 2$, los únicos grafos que quedan unívocamente determinados, a menos de isomorfismo, son los sin bucles de orden $n \leq 3$.

Una lista de 36 invariantes, y una recopilación de numerosas relaciones válidas entre pares de ellos, así como una amplia bibliografía puede verse en [BriD85].

De la definición dada resulta que los isomorfismos de multidigrafos (multigrafos) conservan la precedencia y la no precedencia (la adyacencia y la no adyacencia) entre vértices.

La extensión del concepto "isomorfismo" que se obtiene cuando a las aplicaciones correspondientes sólo se les pide conservar la precedencia (la adyacencia) se denomina **homomorfismo**. No será considerado.

Por otro lado, la restricción que implica considerar sólo los isomorfismos de una configuración en si misma lleva al concepto **automorfismo**.

Visto que cualquiera sea $G = (V, U)$ eligiendo como h^0, h^1 , a las correspondientes aplicaciones identidad se define un automorfismo, y que la composición de automorfismos es automorfismo, cabe estudiar, cualquiera sea G , su "*grupo de automorfismos*". Al respecto podrían verse : [Bab66/80/81], [Cam83], [GroM64], [Ore62], [Whi73].

En particular, para los grafos K_n, C_p los respectivos grupos de automorfismos son, el grupo simétrico S_n y el grupo dihedral D_p (ver. [Buch90]-Cap.8, [Har69b]-Cap.14)

Dentro de esta temática merece destacarse el siguiente resultado de Frucht [Fru38],

| Para todo grupo finito H existen grafos cuyo grupo de automorfismos es isomorfo con H .

En [Buch90], [CapM78], [CharL79], [Har69b], y [Ore62] se muestra como construir tales grafos haciendo uso de los "grafos coloreados de Cayley", que se pueden asociar a cada grafo finito.

El precedente resultado de Frucht puede mejorarse. En efecto, en [Dam73], [Fru49] y [Men78] se demostraron afirmaciones similares restringiéndose, respectivamente, a "grafos de Moore", a "grafos cúbicos" y a "grafos fuertemente regulares".

Se prueba que una permutación en V define un automorfismo en $G = (V, U)$ si y sólo si la correspondiente matriz permutación conmuta con la "matriz de adyacencia de G ". (ver pág. 64). Esto permite deducir resultados expresados en términos de los autovalores de dicha matriz. [Big74], [Cam83], [Mow73].

El problema de decidir sobre el isomorfismo entre multi-di-grafos es un importante problema abierto.

Es de resolución difícil, ya que no se conocen criterios generales, ni conjuntos suficientes de invariantes, ni algoritmos de reconocimiento eficaces.

Abordarlo directamente analizando todas las posibles permutaciones de su conjunto de vértices resulta inalcanzable, excepto para los grafos de orden muy reducido.

Véanse al respecto algunas consideraciones que se hacen en pág. 66.

Obviamente, una primera simplificación en este problema resulta de observar que dos vértices pueden corresponderse en un isomorfismo si y sólo si en ambos inciden igual número de aristas y ambos son, o no son, soporte de bucles

Para el caso no dirigido caben definiciones y propiedades similares.

En particular, dos multigrafos G y G' son isomorfos si y sólo si los vértices adyacentes en G se corresponden biyectivamente con los adyacentes en G' , y además se conservan las multiplicidades de las aristas correspondientes.

Tal el caso de los G_1, G_2, G_3 dados pág.VII del Prólogo.

Notemos que aún cuando dichos G_1, G_2, G_3 son equivalentes desde el punto de vista de los grafos ellos no lo son en sentido topológico ; puesto que G_2 no puede obtenerse a partir de G_1 , ni de G_3 , por una "transformación continua".

La relación de isomorfismo es de equivalencia, pero multi-di-grafos isomorfos pueden corresponder a problemas distintos, y aún contrapuestos.

Véase que | Si G y H son multidigrafos isomorfos también lo son sus respectivos sustitutos. La recíproca es falsa.

Si por alguna razón interesara tomar en cuenta la designación, o marcas, o valores asignadas a los elementos de cierto multi-di-grafo G , diremos que G está "etiquetado" o "valuado" (ver 2.3).

En este caso, aún las isomorfas serán consideradas distintas.

Todo parámetro que toma iguales valores en un multi-di-grafo y en sus isomorfos es un **invariante gráfico**. Salvo contadas excepciones ellos no determinan configuraciones únicas, ni aún a menos de isomorfismo.

Por ejemplo, con el número n de vértices, y m de aristas, $0 \leq m \leq n(n-1)/2$, los únicos grafos que quedan unívocamente determinados, a menos de isomorfismo, son los sin bucles de orden $n \leq 3$.

Una lista de 36 invariantes, y una recopilación de numerosas relaciones válidas entre pares de ellos, así como una amplia bibliografía puede verse en [BriD85].

De la definición dada resulta que los isomorfismos de multidigrafos (multigrafos) conservan la precedencia y la no precedencia (la adyacencia y la no adyacencia) entre vértices.

La extensión del concepto "isomorfismo" que se obtiene cuando a las aplicaciones correspondientes sólo se les pide conservar la precedencia (la adyacencia) se denomina **homomorfismo**. No será considerado.

Cuestiones análogas fueron abordadas para el caso de multigrafos infinitos en [Jung66], y para aquellos que admiten bucles en [Hem71]. La demostración de Jung es reproducida en [Har69b] y en [HemB78]. Citaremos además [HalJ67] y [HemJK82].

En [HemK77] y [HemZ73] se estudia el problema similar para el caso dirigido.

Notando $G - \{x\}$ al grafo que resulta de eliminar en G el vértice x , (y por ende a las aristas allí incidentes) podemos citar la siguiente afirmación, conocida como *Conjetura de Ulam* (de la vértice reconstrucción).

Si G y H son grafos finitos sin bucles de orden $n \geq 3$, y para cada vértice x_i se tiene que $G - \{x_i\}$ es isomorfo con un cierto $H - \{y_i\}$, entonces G, H , son isomorfos

Esta conjetura, que es falsa para grafos infinitos, es aún uno de los grandes desafíos de la teoría que nos ocupa.

Carece de interés para $n = 1$, y es falsa para $n = 2$, según se ve eligiendo como G una arista distinta de bucle, y como H un par de vértices aislados.

Ha sido verificada para los grafos sin bucles de orden n , con $3 \leq n \leq 9$, y resuelta por la afirmativa para algunas clases de grafos.

En particular, así lo fue para los "árboles" (ver pág.118) en [Kelly57].

Luego de este primer resultado positivo se dieron mejoramientos del mismo, y otros similares respecto de otras clases de grafos.

La conjetura análoga para el caso dirigido es válida para los "torneos transitivos" de orden $n \geq 5$ pero no para todo torneo. Ver [BeiP70], [HarP67a], [Koc85], [Sto75/76/77].

Dicha conjetura, que fue reformulada en términos matriciales en [Mal77], como así también su "versión arista" y otras que le están vinculadas, tanto en el caso dirigido como en el no dirigido, fueron motivo de numerosos trabajos.

Recopilaciones recientes de éstos fueron dadas en [MacRV97/02].

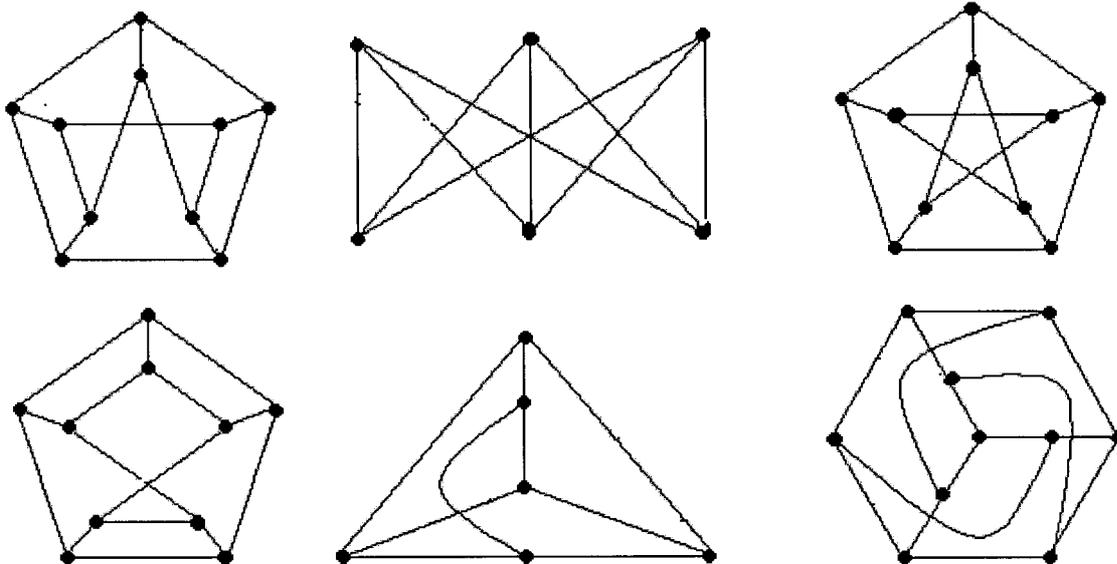
Otras recopilaciones, como así también resultados relativos a esta cuestión se pueden ver en [Bon91], [BonHe77], [CapM78], [GreH69], [Har67e/74b], [Manv69/88], [NashW78], [Tut84]

Respecto de la conjetura sobre la "arista (arco) reconstrucción" se sabe

- que es válida para el caso de los torneos, [HarP67a]
- que sería válida, en general, si y sólo si fuera válida la vértice reconstrucción para los "grafos adjuntos". [Hem69]
- que para el caso de grafos carentes de vértices aislados la "vértice reconstructibilidad" implica la "arista reconstructibilidad" en el caso finito [Gre71], pero no en el infinito [Tho78b].
- que todo grafo de orden n sin bucles con más de $(n^2 - n) / 4$ aristas es arista reconstruible. [Lov72]. Esta cota se redujo, en [Müll77], a $n \cdot \log_2(n)$.

Más referencias relativas al problema del isomorfismo, y una amplia bibliografía sobre esta temática puede verse en [Read78/79/81] y [ReadC77].

La dificultad de decidir sobre el isomorfismo entre dos configuraciones se puede vislumbrar tratando de hallar cuales de los siguientes pares de grafos lo son.



Otras tres nociones ligadas con la de isomorfismo son las de : *arista isomorfismo*, *1-isomorfismo*, y *2-isomorfismo*, introducidas por Whitney. [Whit32/33]

Sobre las dos últimas volveremos en el Cap.7. La restante, que llevó al estudio de los *grafos adjuntos* (ver 2.1.10) responde a la siguiente definición :

Dos grafos G, G' , son **arista isomorfos** si a cada par de aristas u, v , de G , incidentes en x , corresponde en G' un par de aristas u', v' , incidentes en x' ; y recíprocamente.

Nótese que todo isomorfismo induce un arista isomorfismo.

La recíproca es falsa, pues los grafos K_3 y $K_{1,3}$ son arista isomorfos pero no isomorfos.

Más precisamente, a partir de un resultado de [Whit32] se sabe que :

A excepción del par $K_3, K_{1,3}$, y de otros tres pares de grafos isomorfos, sin bucles y de orden cuatro, todo arista isomorfismo de grafos sin bucles y sin vértices aislados es inducido por un isomorfismo.

Más precisiones pueden verse en [CharL79], [Hem72b], [HemB78], [Ore62].

Es fácil ver que cualquiera sea $G = (V, U)$ su submultigrafo inducido por $V' = V$ coincide con G , pero que el inducido por $U' = U$ coincide con G sólo si G carece de vértices aislados.

Un submultigrafo $G' \subseteq G$ es **maximal** si no existe otro G'' tal que $G' \subset G'' \subseteq G$ y **minimal** si no existe G^* , con $G^* \subset G'$ que cumpla los requisitos pedidos a G' .

Véase que cualesquiera sean $V' \subseteq V$; $U' \subseteq U$:

- G / V' es maximal entre los que sólo contienen los vértices de V' .
- G / U' es minimal entre aquellos con las aristas de U' .

Dos operaciones que aplicadas reiteradamente permiten la construcción de todo submultigrafo son “*la eliminación de aristas*” y “*la eliminación de vértices*”. Esta última conlleva la eliminación de todas las aristas incidentes en los vértices eliminados.

Dado un multigrafo $G = (V, U)$ y conjuntos $V' \subseteq V$; $U' \subseteq U$ notaremos :

- $G - U'$ al que se obtiene quitando a G las aristas de U' .
- $G \leftrightarrow U'$ a $G - U'$ excluidos sus eventuales vértices aislados.
- $G - V'$ al que resulta de eliminar en G los vértices de V' (y por ende las aristas con al menos uno de sus extremos en V')

Así entonces, dado $G = (V, U)$

- $G - U$ es discreto y cubriente.
- $G \leftrightarrow U$ es vacío.
- $G - V' = G / (V - V')$.
- $G \leftrightarrow U' = G / U - U'$.

Con frecuencia será necesario restringirse a submultigrafos de G que satisfagan características especiales.

En particular, será frecuente tener que restringirse al caso de subgrafos que son grafos completos; o bien, al de subgrafos discretos.

Ambos tipos de subgrafos, que pueden asociarse tanto a “estados intercambiables” como a “situaciones incompatibles entre sí” se corresponden “*via complementación*” (ver pág.49).

Los subgrafos constituidos por *completos maximales* se dirán **clanes**, frecuentemente son designados *cliques*.

2.1.5. SUBMULTI-DI-GRAFOS

De las definiciones y propiedades que enunciaremos seguidamente caben otras similares para el caso dirigido.

Dado un multigrafo $G = (V, U)$ se dice **submultigrafo de G** a todo multigrafo $G' = (V', U')$, $V' \subseteq V$; $U' \subseteq U$. También diremos que G' está *contenido en G*. Lo notaremos $G' \subseteq G$ y $G' \subset G$ si además $G' \neq G$.

Si adoptáramos la definición $G = (V, U, \Psi)$, resultaría que $G' = (V', U', \Psi')$ está contenido en G si y sólo si Ψ' es la restricción de Ψ a U' .

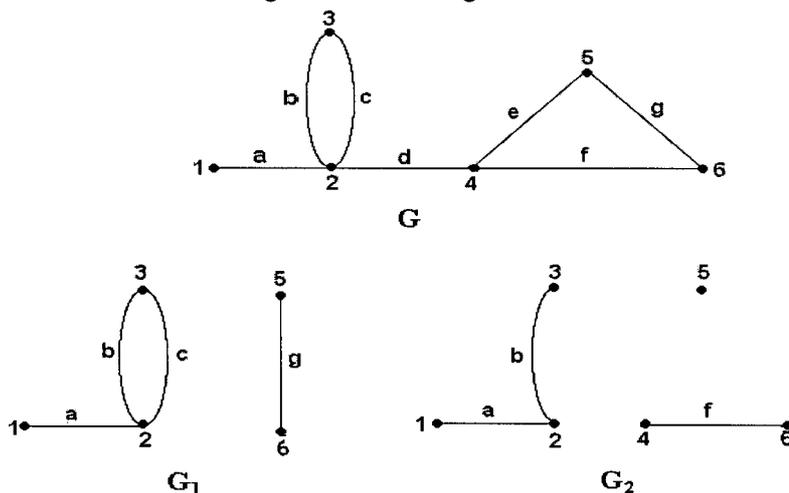
Si $G' \subseteq G$ y $V = V'$ se dirá que G' es **submultigrafo cubriente de G**.

La noción *submultigrafo cubriente* se corresponde con la de *spanning subgraph* (*graphe partiel*) empleada en las publicaciones en lengua inglesa (francesa)

Si para toda arista de G cuyos extremos inciden en V' también $u \in U'$ se dirá que G' es el **submultigrafo inducido por V'** . Será notado $G' = G/V'$

A su vez, el **submultigrafo inducido por U'** es el formado por las aristas de U' y los vértices en los cuales ellas inciden. Será notado $G' = G/U'$

En particular, dados los siguientes multigrafos :



$G_1 = G - \{4\}$ es inducido por $\{1, 2, 3, 5, 6\}$ y también por $\{a, b, c, g\}$.

$G_2 = G - \{c, d, e, g\}$ es cubriente, pero no inducido.

Como pregunta típica de esta temática suele proponerse la siguiente

Dados $p \geq 2$, $q \geq 2$, cuál es el menor entero $R(p,q)$ tal que todo grafo de orden mayor o igual a $R(p,q)$ contiene al menos p vértices adyacentes entre sí, o al menos q independientes dos a dos ?

o equivalentemente :

Cuál es el menor de los valores $R(p,q)$ tal que si cada una de las aristas del completo de orden $R(p,q)$ es coloreada arbitrariamente de rojo o azul, queda determinado un K_p de aristas rojas, o un K_q de aristas azules ?

Se puede constatar que $R(p,q) = R(q,p)$; y que $R(2,n) = R(n,2) = n$.

En Ejerc 2-24) se propone deducir que $R(3,3) = 6$.

Así entonces | en toda reunión de al menos seis personas hay al menos, tres que se conocen dos a dos, o tres que no se conocen entre sí.

En realidad se demostró algo más fuerte ([Goom59], [Schw72]). A saber :

| Toda bicoloración de las aristas de K_6 lleva a tener al menos dos triángulos monocromáticos.

En [Har72] se determinaron todas las coloraciones que llevan a exactamente dos de dichos triángulos.

Si bien el dicho valor $R(p,q)$ existe para todo par p,q , sólo se lo ha determinado para algunos pocos. En [ErdS35] se dedujo la cota $R(p,q) \leq \binom{p+q-2}{q-1}$.

En [GreG55] (ver [BonM76]) se la extendió con $R(p,q) \leq R(p-1,q) + R(p,q-1)$ y se hallaron los valores : $R(3,4) = 9$; $R(3,5) = 14$; $R(4,4) = 18$.

En [GravY68] se calcularon $R(3,6) = 18$; $R(3,7) = 23$; y se acotaron otros.

En [GreG55] y [Walk76] se demostró que si $n \geq 1 + [e.m!]$ (con $e = 2,7182\dots$) es imposible colorear las aristas de K_n con m colores sin crear al menos un triángulo monocromático.

El teorema que nos ocupa ha permitido deducir interesantes consecuencias. Entre ellas la que sigue, dada en [ErdS35]. (ver [Hall67], [LucSK79], [Ore62], [Rys63]).

Cualquiera sea el entero $m \geq 3$ existe un entero N_m tal que cualesquiera N_m puntos del plano, sin de ternas de alineados, contienen m puntos que pueden elegirse como vértices de un poliedro convexo.

Se extienden así los siguientes resultados

Dados $n \geq 5$ ($n \geq 9$) puntos del plano, sin ternas de alineados, es posible elegir 4 (5) de ellos como vértices de un polígono convexo

En [Rosf71] se mostró que el número de grafos sin bucles de orden n con exactamente dos clases es $\lfloor n^2/4 \rfloor$. ($\lfloor x \rfloor$ indica parte entera de x)

Un interesante problema, vinculado con los subgrafos completos de G y que se reconoce como el primero de los de carácter extremal que fue resuelto, es el siguiente

¿Cuál es el mayor número de aristas que puede tener un grafo sin bucles de orden n carente de subgrafos K_k , $3 \leq k \leq n$?

En [Tur41/54] Turán demostró que :

Si t, r , son los enteros unívocamente determinados por $n = t.(k-1) + r$,
 $1 \leq r \leq (k-1)$; $3 \leq k \leq n$, el número buscado es $\binom{r}{2} + \frac{(n^2 - r^2).(k-2)}{2.(k-1)}$.

Además se dedujo que los que satisfacen la igualdad son los $(k-1)$ -partidos completos, con r clases de $(t+1)$ vértices, y $(k-r-1)$ clases de t vértices.

Corolario :

Todo grafo de orden n , carente de bucles y de subgrafos K_3 tiene a lo sumo $\lfloor n^2/4 \rfloor$ aristas. (con $\lfloor x \rfloor$ se indica parte entera de x).
 La cota se alcanza si n es par.

Este caso, que incluye a los grafos bipartidos, ya había sido resuelto en 1907.

Los bipartidos $K_{p,q}$ con $p = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ y $q = \lfloor n/2 \rfloor$ muestran que la cota no es mejorable.

Una demostración alternativa de la dada por Turán es la que propuso Zykov [Zyk49]. Ambas están esbozadas en [Simn83], donde además se consideran otros "problemas extremales". Demostraciones de este resultado también fueron dadas en [BonM76] y en [Ore62].

Otro problema extremal, vinculado inicialmente a los grafos completos y luego extendido de diversas formas, pero aún no resuelto en su totalidad, es el conocido como *Problema de Ramsey*.

Está ligado con un resultado de [Ram30] cuya versión finita puede verse como una ampliación del conocido "Principio del Casillero" (*Pigeon-hole principle*).

Si $p > q$, y p objetos se distribuyen en q clases, al menos una de éstas debe contener más de un objeto.

Demostraciones de dicho resultado se pueden ver en [Hall67], [Ore62], [Rys63] y [LucSK79]. En este último se siguen los lineamientos de la dada en [ErdS35].

Para el caso dirigido, los **k -difactores de G** son sus subgrafos cubrientes que conservan, en cada uno de sus vértices, k de los arcos que lo tienen por extremo final, y k de aquellos que lo tienen por extremo inicial.

Véase que :

- un grafo sin bucles admite *1-factores* sólo si es de orden par.
- los *1-factores* son subgrafos cubrientes compuestos de aristas, eventualmente bucles, independientes entre sí.
- el grafo de aristas $[a, b], [a, c], [a, d], [b, c]$ admite *1-factores*, pero no es *1-factorisable*.
- los *1-difactores* están constituidos de “circuitos” (ver 3.5)
- K_n con n par (n impar) no es *2-factorisable* (carece de *1-factores*).

En [MenR85] se da una extensa bibliografía y recopilación de resultados sobre las *1-factorizaciones* de K_n . En particular :

A) $K_{2,p+1}$ es 2-factorisable en “ciclos hamiltonianos”.

Más precisamente, en Cap.5 veremos que $K_{2,p+1}$ admite $(2.p)! / 2 = p.(2.p-1)!$ subgrafos ciclo hamiltonianos, y que ellos pueden partirse en $(2.p-1)!$ conjuntos, con p de dichos ciclos arista disjuntos dos a dos, en cada uno de ellos.

Así, y según se infiere del Ejer.5-12), K_5 contiene doce de dichos ciclos y éstos pueden agruparse en seis pares de ciclos arista disjuntos entre sí.

B) $K_{2,p}$ es 1-factorisable. Es decir, $K_{2,p}$ admite $(2.p - 1)$ subgrafos que son *1-factores* arista disjuntos (cada uno de ellos está compuesto de p aristas independientes dos a dos).

Esta afirmación es obvia para $p = 1$. Para hallar en el caso general una tal factorización designaremos $\alpha, 0, 1, 2, \dots, (2.p - 2)$ a los vértices de $K_{2,p}$, y elegiremos, para cada $h \in \{ 0, 1, \dots, (2.p - 2) \}$, como *1-factores* a los conjuntos de aristas independientes de la de la forma $[\alpha, h], [(i+h), (j+h)]$ con $i+j = 2.p-1$ y con sumas $(i+h); (j+h)$ tomadas módulo $(2.p - 1)$.

En particular, para el K_4 de vértices $\alpha, 0, 1, 2$, su única 1- factorización es la formada por los tres *1-factores* : $[\alpha, 0], [1, 2] \parallel [\alpha, 1], [2, 0] \parallel [\alpha, 2], [0, 1]$.

Para el K_6 de vértices $\alpha, 0, 1, 2, 3, 4$ obtendríamos así, los cinco *1-factores* :
 $[\alpha, 0], [1, 4], [2, 3] \parallel [\alpha, 1], [2, 0], [3, 4] \parallel [\alpha, 2], [3, 1], [4, 0] \parallel$
 $[\alpha, 3], [4, 2], [0, 1] \parallel [\alpha, 4], [0, 3], [1, 2]$.

Para aspectos generales de esta cuestión ver [Boll79], [Brya93], [CapM78], [CharL79], [Die96], [Gard77], [Gra81], [Lint74], [Pars78], [Stank79].
Para profundizar en ella, o en extensiones, [Adh02], [GraR78], [GraRS80], [Har74a], [Nes66], [NesR90], [PaoTW85].

Finalizaremos esta sección observando que :

Dado un multigrafo G con m aristas u_i , ($1 \leq i \leq m$) se puede establecer una correspondencia biyectiva entre sus submultigrafos G^* sin vértices aislados, y los vectores (x_1, x_2, \dots, x_m) con $x_i = 1$ si la arista $u_i \in G^*$ y $x_i = 0$ en caso contrario.

Con tal correspondencia, dado un multigrafo, la *unión*, (*intersección*, *diferencia simétrica*) (ver pág.55) de sus submultigrafos sin vértices aislados se puede determinar, a menos de eventuales vértices aislados, en términos del *supremo*, (*ínfimo*, *adición módulo dos*) de sus respectivos vectores representativos.

Esto permite, si se admite además el vector nulo de dimensión adecuada, asociar, en Z_2 , a cada multigrafo sin vértices aislados un "espacio vectorial de submultigrafos arista inducidos", y reinterpretar en términos del Álgebra Lineal propiedades de la Teoría de Grafos.

En los Cap.3 y 7 nos referiremos, brevemente, a los subespacios "de ciclos simples" y "de cociclos"; como también a algunas de sus propiedades duales.

Para mayor información a este respecto recurrir a : [BerGH62], [Big74], [BonM76], [Deo74], [Chen71a/71b], [Die96], [Gou58], [Pea73], [Rib79], [SesR61], [SwaT81].

2.1.6. ***k*-FACTORES Y ACOPLAMIENTOS**

Una importante clase de submulti-di-grafos es la de los incluidos bajo el nombre general de "*factores*". Una extensa recopilación de resultados relativos a ellos y a extensiones de este concepto puede verse en Akiyama-Kano [AkiK85].

Dado un multigrafo G se dice que **H es un k -factor de G** , $k \geq 1$, si H es uno de sus submultigrafos cubrientes que conservan exactamente k de las aristas de G incidentes en cada uno de sus vértices.

G se dice **k -factorisable** si su conjunto de aristas puede reencontrarse como unión de k -factores arista disjuntos dos a dos.

Un tal conjunto de k -factores determina una **k -factorización** de G .

En pág.65 se enunciará un resultado de Egerváry [Ege31] que es equivalente del precedente de König y está dado en términos de matrices. En [Mirs71] se hace un detallado análisis del mismo

Ellos son caso particular del Teorema de Menger [Meng27], a dar en Cap. 7, y al igual que algunos otros de carácter combinatorio válidos en bipartidos pueden deducirse siguiendo razonamientos combinatorios, o bien recurriendo a la Teoría de los Flujos Canalizados. [Ber58/70], [ForF62], [FuI75b].

Esta última metodología, que fue seguida también en [Chi93], no puede aplicarse a grafos no bipartidos. Para estos casos podría emplearse el concepto de “*cadena alternada*”, que introduciremos en 3.1.

Una importante clase de subgrafos sin bucles es la de los **acoplamientos**, es decir, la de los subgrafos constituidos por aristas, distintas de bucles, independientes dos a dos. Los que además son cubrientes, y por lo tanto máximos, se dicen **acoplamientos perfectos** (o **completos**).

Los acoplamientos perfectos coinciden con los 1-factores carentes de bucles, y existen sólo en grafos de orden par.

En la cadena P_4 de aristas $a = [1, 2]$, $b = [2, 3]$, $c = [3, 4]$ el par de aristas a, c , constituye un acoplamiento perfecto, mientras que la arista b , define uno que es maximal, pero no máximo.

La necesidad de fijar acoplamientos se presenta muy frecuentemente en relación con cuestiones a estudiar en grafos bipartidos. Por ejemplo :

Dados un conjunto de obreros y otro de tareas, y conocidas cuales son las tareas que puede ejecutar cada obrero, hallar una asignación que respete las restricciones y maximice el número de pares “obrero-tarea” que son factibles simultáneamente.

Se sobrentiende que a cada obrero puede asignársele a lo sumo una de las tareas para las cuales es apto, y a cada tarea uno sólo de los obreros capaces de ejecutarla,

Asignando a cada arista “valores”, que pueden interpretarse como representativos del costo (tiempo, índice de eficiencia, etc.) asociado al correspondiente par de vértices extremos sería factible abordar de problemas “*optimales*”, (de máxima eficiencia total, de mínimo costo total, etc.)

Creemos oportuno indicar que en [SwaT81]-Cap.15 además de analizar la metodología seguida en [HopK73] para hallar acoplamientos máximos en grafos bipartidos, se analiza el algoritmo de Edmonds [Edm65a], apto para casos más generales, y su implementación propuesta por Gabow [Gab76]. Ver también [Agu90], [GonM79], [SwaT81] Cap.8.

Otra 1-factorización del mismo completo es la integrada por los 1-factores :

$[\alpha, 0], [1, 3], [2, 4] \parallel [\alpha, 1], [2, 3], [4, 0] \parallel [\alpha, 2], [0, 1], [3, 4] \parallel$
 $[\alpha, 3], [1, 4], [0, 2] \parallel [\alpha, 4], [1, 2], [0, 3]$

Como en cada vértice de K_6 inciden cinco aristas, y cada una de ellas integra los tres 1-factores arista disjuntos del K_4 obtenido al eliminar los vértices extremos de la arista en cuestión, pueden hallarse quince 1-factores de K_6 .

Ellos dan lugar a sus seis 1-factorizaciones. (ver Ejer.2-37)

En Cap.5 (pág.192) veremos otra forma de descomponer $K_{2,p}$; y en Ejer.2-36) el método para hallar 1-factores de K_n propuesto en [Ore63a] - Cap.4.

De B) resulta que la siguiente pregunta tiene respuesta afirmativa.

Supongamos que $2.p$ amigos salen en un viaje de turismo que durará $(2.p - 1)$ días y que para movilizarse disponen de un transporte con p asientos dobles.

¿ Podrán completar el viaje sin que pares de amigos deban compartir asiento más de una vez ?

Véase que también es positiva la respuesta a la siguiente :

¿ Será factible organizar entre n equipos un torneo a una sola ronda en el cual cada uno compita con todos los restantes ?

En general, decidir sobre la existencia de 1-factores es difícil.

Esta importante problemática, designada en lengua inglesa "*matching*", y en lengua francesa "*couplage*", admite extensiones directas para el caso de configuraciones valuadas, y ocupa capítulos en numerosas publicaciones.

En particular, [Boll66/78], [LovP86], [Simn83], [Woo78b/78c]

Sobre estas cuestiones volveremos en Cap. 7.

Un buen resultado al respecto es el siguiente, debido a Tutte [Tut47/50/52/54].

Un grafo (V, U) sin bucles admite un 1-factor si y sólo si para todo $A \subset V$ el subgrafo inducido por $V - A$ contiene a lo sumo $|A|$ componentes de orden impar.

En [Bru92] se esboza el razonamiento seguido por Tutte y se observa que dicho resultado extiende al siguiente "teorema mini-max" de König. [Kön31]

En cada bipartido (V, U) el máximo número de aristas independientes dos a dos coincide con el mínimo número de vértices de un soporte de U

Demostraciones de ambos se reencuentran en [Die96] y [Lov75].

Sin perjuicio de posteriores referencias a recuentos de configuraciones con características particulares damos la siguiente tabla, donde g_n (d_n) indica el número de grafos (digrafos) sin bucles de orden n , $1 \leq n \leq 8$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
g_n	1	2	4	11	34	156	1.044	12.346
d_n	1	3	16	218	9.608	1.540.944	882.033.440	1.793.359.192.848

En el Apéndice.1 de [HarP73] los valores g_n se extienden hasta $n = 24$. Allí se incluyen además tablas con las cantidades de grafos que satisfacen diferentes restricciones.

Una de ellas, relativa a los grafos de orden n ($1 \leq n \leq 9$) con m aristas, para $0 \leq m \leq 18$, también se da en [Har69b]-Apéndice1 y en [Rio58] Pág.146.

Por otro lado, en [Buch90] se dan diagramas representativos de los 208 grafos sin bucles de orden $n \leq 6$, y en [Har69b] además de ellos se incluyen los que corresponden a los 238 digrafos sin bucles de orden $n \leq 4$.

En [Heap72] y [Read78/81] se incluyen interesantes datos sobre listados de grafos y sobre la generación de éstos utilizando computadoras.

En Discrete Mathematics Vol. 31 (1980) Pág. 224, se informa que en la Universidad de Waterloo, Canadá, pueden conseguirse catálogos con información sobre propiedades de grafos sin bucles, y en particular sobre los 12.005.168 de orden 10.

Referencias a éstos también se dan en [CamCR85] y [Read81].

Para más información sobre ésta temática : [CharL79], [GoulJ83], [Har55/59/64b/67b/67h/69b], [Odl66], [Pal69/73/78], [Tuc80].

2.1.8. GRAFOS, DIGRAFOS Y RELACIONES BINARIAS

Volviendo sobre algo observado en el Capítulo 1 notemos que la correspondencia biyectiva entre los subconjuntos de $V \times V$, y las relaciones binarias definidas en V permite determinar de manera distinta a la seguida en 2.1.1 las nociones allí introducidas.

Más precisamente, conviniendo que $(x, y) \in U$ equivale a $y \in \Gamma(x)$, (se admite $x = y$) los arcos del digrafo $G = (V, U)$ definen en V una relación binaria Γ , que es la **relación de precedencia de G**.

Pondremos, tanto $G = (V, U)$ como $G = (V, \Gamma)$.

2.1.7. RECUESTO DE MULTI - DI - GRAFOS

En relación con este problema deben distinguirse dos casos.

Uno implica identificar las configuraciones isomorfas, y el otro diferenciarlas excepto si coinciden también en las designaciones de sus elementos.

Este último lleva a contar como “grafos etiquetados distintos” (ver 2.3) también a los subgrafos isomorfos. Así por ejemplo, dado el grafo K_3 de vértices a, b, c , y eliminando una de sus aristas se tienen, según cual sea la arista eliminada, el subgrafo $[a, b], [b, c]$; o bien el $[b, c], [c, a]$; o bien el $[c, a], [a, b]$.

Obviamente, éstos tres ejemplifican a la cadena elemental P_3 y son isomorfos, pero en ocasiones convendrá distinguir entre ellos. En tal caso los contaremos como “etiquetados y distintos”.

Recurriendo a la “matriz adyacencia” (pág.64) es fácil deducir que hay $2^{\binom{n+1}{2}}$ grafos etiquetados de orden $n \geq 1$; y que $2^{\binom{n}{2}}$ de ellos carecen de bucles.

De estos últimos hay $\binom{n(n-1)/2}{m}$ con m aristas,

Análogamente, puede verse que hay 2^{n^2} digrafos etiquetados de orden $n \geq 1$, que $2^{n(n-1)}$ de ellos carecen de bucles, y que de éstos $\binom{n(n-1)}{m}$ tienen m arcos.

Remarquemos que en el precedente recuento se consideran distintas aún las configuraciones que de no ser “etiquetadas” serían isomorfas.

Por ejemplo, todas las que tienen un único arco.

Otros resultados sobre esta cuestión son indicados en Ejer.2-42), 2-43) como así también en [GavS80] y en [Ribn89].

Respecto de la búsqueda del número de “configuraciones no etiquetadas, no isomorfas” y la de métodos para generarlas cabe remarcar su dificultad.

Según parece, la evaluación del número en cuestión fue abordado inicialmente por Redfield [Redf27] en un trabajo que permaneció ignorado una treintena de años. (ver [Foul63], [Har67j], [HarP67b], [Lloyd88])

Luego, numerosos investigadores aportaron resultados. De entre ellos merece destacarse el dado en [Pólya37] y extendido por de Bruijn [Brui59/64]. Referidos a ellos pueden citarse [Har67f/67g], [Read67/87] y [RotS77].

[Kön36]

El bipartido $(P \cup Q, U)$ admite un acoplamiento si y sólo si su deficiencia es nula ; o sea, si y sólo si $|A| \leq |\Gamma(A)|$ cualquiera sea $A \subseteq P$.

El acoplamiento será perfecto si y sólo si $|P| = |Q|$.

[Hall35]

La aplicación $\Gamma : P \rightarrow Q$ contiene una función inyectiva f si y sólo si para todo $A \subseteq P$ se tiene que $|A| \leq |\Gamma(A)|$.

Si además $|P| = |Q|$, y sólo entonces, f es biyección.

Corolarios

1) Un digrafo $G = (V, \Gamma)$ admite 1-difactores ("circuitos") si y sólo si para todo $A \subseteq V$ se tiene que $|A| \leq |\Gamma(A)|$.

Para justificarlo basta aplicar el resultado de König-Hall al bipartido representativo de G .

2) Si la aplicación $\Gamma : P \rightarrow Q$ es tal que cualesquiera sean $p \in P$; $q \in Q$ se tiene que $d_1 = \min. |\Gamma(p)| \geq \max. |\Gamma^{-1}(q)| = d_2$ entonces Γ contiene una aplicación inyectiva.

En efecto, en tal caso, si $A \subseteq P$ y B es el conjunto de arcos (a, b) con $a \in A$ se tiene $|A| \cdot d_1 \leq |B| \leq |\Gamma(A)| \cdot d_2$ y como por hipótesis $d_1 \geq d_2$ puede afirmarse que $|A| \leq |\Gamma(A)|$.

Es fácil ver que distintas relaciones pueden generar dígrafos isomorfos, y que todo "*p-dígrafo*" puede darse por un conjunto de "*p relaciones*", no siempre unívocamente determinadas. Idem caso no dirigido.

De una observación hecha en Cap.1 resulta que cada representación topológica de un digrafo (o de un grafo) finito puede interpretarse como una visualización de todos los pares que satisfacen la relación que lo define,

Pero aún cuando toda relación binaria definida en un conjunto finito se puede identificar con un esquema, esto no siempre es recomendable. Recordemos al efecto lo dicho en pág. 8 con referencia a los Diagramas de Hasse y a las relaciones de orden en conjuntos finitos.

Destaquemos que no obstante la estrecha vinculación indicada las nociones de *dígrafo*, o *grafo*, no son redundantes frente a la de *relación binaria*, pues las preocupaciones de ambas teorías son distintas.

Además la introducción de "valores" permite a la Teoría de Grafos abordar problemas que no tienen cabida dentro de la Teoría de Relaciones.

Análogamente, como a cada grafo puede asociarse su simetrizado, cuya relación de precedencia es simétrica y refleja la adyacencia de sus vértices, los grafos están en correspondencia biyectiva con las relaciones binarias simétricas definidas en su conjunto de vértices. Ellas son sus **relaciones de adyacencia**.

Para el caso de los bipartidos $(P \cup Q, U)$ además de la relación de adyacencia R definida en $P \cup Q$ también cabe considerar la $R' \subseteq P \times Q$ tal que R' contiene el par p, q , si y sólo si $[p, q] \in U$.

Elas pueden representarse por matrices de 0 y 1, respectivamente, cuadradas de orden $|P| + |Q|$, o rectangulares de tipo $|P| \times |Q|$.

De las definiciones respectivas resulta que :

- el digrafo opuesto (o inverso) de $G = (V, \Gamma)$ es $G^{-1} = (V, \Gamma^{-1})$.
- dados los digrafos $G_1 = (V_1, \Gamma_1)$; $G_2 = (V_2, \Gamma_2)$, G_1 es subdigrafo de G_2 si y sólo si $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$
- todo soporte minimal de U en el bipartido $(V, U) = (V, \Gamma) = (P \cup Q, \Gamma)$ es de la forma $B \cup \Gamma(P - B)$, con $B \subseteq P$. La recíproca es falsa.

Dado un digrafo bipartido $G = (P \cup Q, \Gamma)$ se dice **deficiencia de G** al valor ,
 $\delta_0(G) = \max_{A \subseteq P} (|A| - |\Gamma(A)|)$

Visto que $|\emptyset| = |\Gamma(\emptyset)|$ puede afirmarse que siempre $\delta_0(G) \geq 0$.

Dado el bipartido $G = (P \cup Q, \Gamma) = (V, U)$ el número mínimo de vértices de un soporte de U es $|P| - \delta_0(G)$.

En efecto, todo soporte mínimo es minimal, y por lo tanto para el bipartido en cuestión es de la forma $B \cup \Gamma(P - B)$ con $B \subseteq P$.

Además, $\min_{B \subseteq P} (|B| + |\Gamma(P - B)|) = \min_{A \subseteq P} (|P| - |A| + |\Gamma(A)|) =$
 $= |P| - \max_{A \subseteq P} (|A| - |\Gamma(A)|) = |P| - \delta_0(G)$.

En pág.32/33 hemos citado una notable propiedad “mini-max” válida para grafos bipartidos debida a König–Egérvary,

Otra importante consecuencia válida en tales grafos, que suele ser citada como *marriage theorem*, y de la cual en [Die96] Cap.2 se dan tres demostraciones, admite las dos siguientes formalizaciones.

2.1.9. NOCIONES LOCALES

Incluiremos en este párrafo un grupo de conceptos que reflejan la incidencia de los arcos (de las aristas) en los vértices de la configuración en estudio.

Dado un multidigrafo G diremos :

- **estrella positiva** (de soporte x) al conjunto de arcos con vértice inicial x .
- **grado positivo** (de x) al número $gr_G^+(x)$ de arcos que ella contiene.

Análogamente, el **grado negativo** $gr_G^-(x)$ es el número de arcos de vértice final x ; o sea, es la cardinalidad de la *estrella negativa de soporte* x .

Habitualmente supondremos conocido el multidigrafo G al cual nos referimos y en lugar de $gr_G^+(x)$ pondremos, simplemente, $gr^+(x)$. Idem grados negativos.

Dado un digrafo $G = (V, U) = (V, \Gamma)$ se tienen :

- el arco $u = (a, b)$ es de entrada (salida) si y sólo si $gr^-(a) = 0$ ($gr^+(b) = 0$).
- $gr^+(x) = |\Gamma(x)|$ y $gr^-(x) = |\Gamma^{-1}(x)|$.

Un multidigrafo se dice **balanceado** si para todo x se tiene $gr^-(x) = gr^+(x)$;

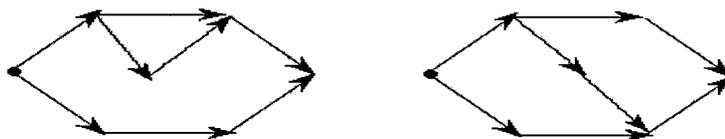
arco balanceado si cualquiera sea su arco (x, y) se tiene $gr^-(x) = gr^+(y)$, y

k -dirregular si cualquiera sea el vértice x se satisface $gr^-(x) = gr^+(x) = k$

Constátese que :

- las nociones “balanceado” y “arco balanceado” no se implican entre sí.
- un digrafo es dirregular si y sólo si es balanceado y arco balanceado.
- todo multidigrafo simétrico es balanceado, pero que la recíproca es falsa.
- dado un multidigrafo, la suma de sus grados positivos (negativos) coincide con el número de sus arcos.
- un 1-difactor es un subdigrafo cubriente respecto del cual todos sus vértices tienen grado positivo (negativo) igual a la unidad.

La colección de los *grados positivos* y *grados negativos* de los vértices de un multidigrafo constituyen un invariante gráfico, pero del siguiente ejemplo resulta que una misma colección puede corresponder a digrafos no isomorfos.



La estrecha conexión entre los grafos, los digrafos y las relaciones que los definen lleva a clasificarlos de acuerdo con las características de éstas.

Así por ejemplo, un digrafo $G = (V, \Gamma)$ se dirá :

- **antisimétrico (antisimétrico débil)** si y sólo si Γ es una relación antisimétrica (antisimétrica débil) ; es decir, si y sólo si carece de pares de arcos opuestos y por ende de bucles (carece de arcos opuestos, excepto bucles).

Dado un digrafo $G = (V, \Gamma)$ la determinación de su **clausura reflexiva** G^{re} es inmediata. Basta para ello conservar sus vértices y sus arcos, e incorporarle un bucle en cada vértice que no sea ya soporte de uno.

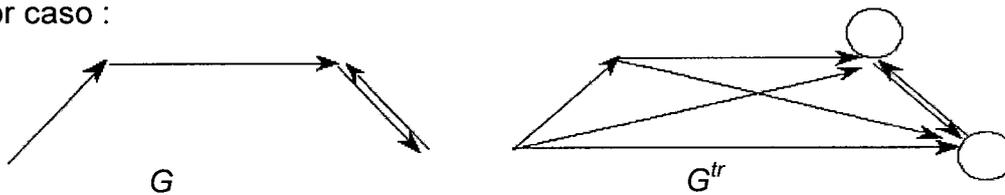
También es fácil hallar su **clausura simétrica** G^{sim} agregándole un arco (j, i) por cada arco (i, j) que carezca de opuesto. $G^{sim} = (V, \Gamma \cup \Gamma^{-1})$

Otras dos de sus clausuras, de uso muy frecuente y estrechamente ligadas con la noción "camino" que se estudiará en el próximo capítulo, son :

- su **clausura transitiva** $G^* = G^{tr} = (V, \Gamma^{tr})$, con $\Gamma^{tr} = \Gamma^* = \bigcup_{i=1}^n \Gamma^i$.
- su **clausura reflexivo- transitiva** $\vec{G} = G^{retr} = (V, \Gamma^{retr})$, $\Gamma^{retr} = \vec{\Gamma} = \Gamma^{tr} \cup \mathcal{I}$

G^{tr} es el *digrafo transitivo* con menor número de arcos que contiene a G como subdigrafo cubriente, y G^{retr} se obtiene a partir de G^{tr} incorporándole un bucle en cada vértice que no sea ya soporte de uno.

Así por caso :



Recordemos que según se puntualizó en el Capítulo.1 nuestra noción "clausura reflexivo-transitiva" frecuentemente es designada "clausura transitiva".

Como $\vec{\Gamma}$ es reflexiva y transitiva, ella permite inducir en G un "preorden de accesibilidad".

Sobre esto volveremos en Cap.3, donde veremos como las representaciones matriciales de G permiten obtener información respecto de G^{tr} y de G^{retr} .

En Ejer. 2-16) se propone demostrar que

En todo grafo sin bucles, de orden $n \geq 2$, hay al menos dos vértices de igual grado, y que ello no es válido si se admiten bucles, o aristas paralelas.

De este resultado y del Lema precedente es inmediato que en toda reunión de personas hay al menos dos que conocen a un mismo número de asistentes a ella, y que la cantidad de asistentes que tienen un número impar de conocidos presentes en la reunión es par, eventualmente nula.

En [BehCh67] se ve que los grafos sin bucles de orden $n \geq 3$ con exactamente dos vértices de igual grado tienen exactamente un vértice de grado $(n - 1)$, o exactamente uno aislado; y que para todo $n \geq 2$ hay exactamente dos de dichos grafos, que son "complementarios" (ver 2.1.10).

Si bien todo *grafo* sin bucles de orden $n \geq 2$ tiene al menos dos vértices de igual grado, existen *digrafos* sin pares de vértices cuyos respectivos grado negativo y grado positivo coincidan. Algunas propiedades de estos digrafos son dadas en [GargKQ89].

Del "lema del apretón de manos" resulta que un multigrafo puede tener todos sus vértices de grado impar sólo si es de orden par.

Esto no impide que, incorporando bucles, puedan construirse multigrafos de orden impar tales que en todos sus vértices incida un número impar de aristas. Tal el caso de un K_3 al que se le incorporó un bucle en cada vértice.

En cambio para la existencia de multigrafos con todos sus vértices de grado par no hay restricciones sobre la paridad de su orden.

Los multigrafos con todos sus vértices de grado par dirán **multigrafos pares**

Algunos autores los denominan "*eulerianos*", pero de acuerdo con lo que es más habitual reservaremos esta designación para los que además son "conexos".(ver 3.6)

Un multigrafo con todos sus vértices de igual grado se dice **multigrafo regular**. Si interesa destacar que todos ellos tienen grado k diremos que es **k-regular**.

Así entonces, de lo observado poco más arriba puede afirmarse que :

Todo multigrafo k -regular, con k impar, es de orden par.

Los grafos 3-regulares sin bucles se dicen **cúbicos**. Todos son de orden par.

Los multigrafos balanceados se dicen "pseudo-symétriques" en [Ber58/70], "balanced digraphs" en [Deo74], "isographs" en [HarNC65] y "closed graphs" en [Kast63/67].

Para el caso no dirigido se introducen nociones análogas a las precedentes.

En particular, se dice **estrella** (de soporte x) al grafo inducido por las aristas con al menos uno de sus extremos en x ; y **grado** (de x) al número $gr(x)$ de aristas incidentes en x , pero conviniendo en contar doble cada bucle incidente en x .

Por la convención adoptada $gr_{\underline{G}}(x) = gr_G^-(x) + gr_G^+(x)$

Véase que :

- los vértices pendientes son los de grado uno.
- si x no es soporte de bucle, y $gr(x) = h$ la estrella de soporte x es $K_{1,h}$.
- como los bucles cuentan doble, en todo multigrafo la suma de los grados de sus vértices es el duplo del número de sus aristas.

Obviamente, y en forma similar a lo visto para el caso dirigido, la colección de grados de un multigrafo determina una partición en su conjunto de vértices, y ésta constituye un invariante útil para abordar el problema del isomorfismo.

Para algunas consideraciones al respecto ver [Read81].

El siguiente resultado suele ser citado como "*Lema del apretón de manos*:"

Todo multigrafo finito (V, U) tiene un número par (eventualmente nulo) de vértices de grado impar.

En efecto, de $\sum_{x \in V} gr(x) = 2|U|$, y notando V_p (V_i) al conjunto de vértices gra-

do par (impar) se tiene $2|U| = \sum_{x \in V_p} gr(x) + \sum_{x \in V_i} gr(x)$, pero esto ocurre si y sólo

si $\sum_{x \in V_i} gr(x)$ es par, o sea, si y sólo si V_i tiene número par de vértices.

También se puede llegar al resultado anterior, razonando por inducción, a partir del discreto de orden n , y atendiendo a que la incorporación de una arista conserva la paridad del número de vértices de grado impar,

En [BonM76]-1.9, [Tuc80]-7.3, y [Stein63b] se muestra como el lema precedente puede vincularse con el "Lema de Sperner" y con el "Teorema del Punto Fijo", de Brouwer, según el cual toda función continua f de un "disco cerrado" en si mismo tiene al menos un punto fijo; o sea, al menos un x tal que $f(x) = x$.

En [Fle83b/90] se destaca la equivalencia entre el resultado **A)** debido a König [Kön16/36], y el siguiente **B)** dado por Petersen [Pet91].

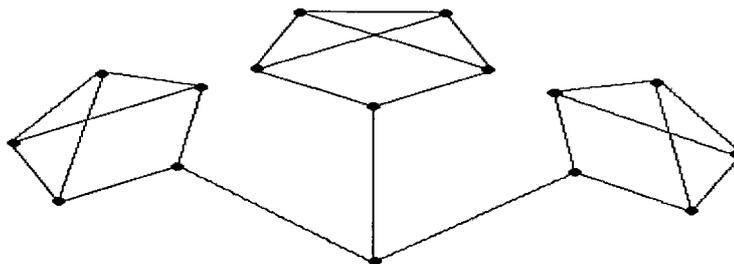
B) Todo multigrafo regular de grado par es 2-factorisable, y recíprocamente.

Los ciclos elementales de longitud impar muestran que en la afirmación precedente no es lícito substituir 2-factorisable por 1-factorisable.

Notemos que el primero, cronológicamente, de los resultados relativos a factorizaciones parece ser el siguiente, dado en [Pet91],

C) Todo grafo cúbico sin "aristas puente" (ver 3.5) puede expresarse como unión de un 1-factor y de un 2-factor.

El siguiente grafo no contiene 1-factores y muestra que para la validez de **A)** y **C)** son esenciales, respectivamente, "ser bipartido" y "carecer de aristas puente".



Por otro lado, y visto que el Grafo de Petersen no es 1-factorisable se deduce que no todo 2-factor puede descomponerse en dos 1-factores.

Demostraciones de **A)**, **B)**, **C)**, pueden reencontrarse en [CharL79] y [Fle90].

Una clase particular de regulares sin bucles, a la cual pertenece el Grafo de Petersen, es la de los "grafos fuertemente regulares".

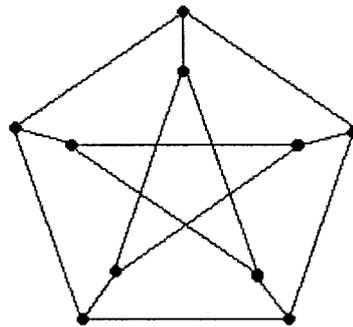
Fueron introducidos en Bose63] y [Bruck63], y están estrechamente ligados con los "diseños en bloques incompletos parcialmente balanceados" (PBIBD), los "diseños en bloques incompletos balanceados" (BIBD), los "cuadrados latinos", las "codificaciones en bloques binarios", las "partial geometries" y otras varias estructuras combinatorias. Para información sobre ellos consultar [BruR91], [Cam78], [CamL75/80/91], [Hub75], [Part71], [Rag71], [Rys63],[Ton88].

Destaquemos la siguiente observación de Erdős.

Cualquier multigrafo sin bucles G contiene un subgrafo H , cubriente y bipartido, tal que para todo vértice x se tiene $gr_H(x) \geq \frac{1}{2} gr_G(x)$.
Luego, $|U(H)| \geq \frac{1}{2} |U(G)|$.

En [Read78] se observa que los cúbicos son comparativamente pocos, pero difícil de construir. Los “conexos” de orden $4 \leq n \leq 18$ son, respectivamente, $1 \setminus 2 \setminus 5 \setminus 19 \setminus 85 \setminus 509 \setminus 4.060 \setminus 41.301$.

De entre los cúbicos merece destacarse el siguiente *Grafo de Petersen*, que es el cúbico de menor orden no 1-factorisable.



En [CharW85] se dan datos sobre su origen, propiedades y aplicaciones.

Del Teorema de König-Hall, Corol.2 dado en pág.37, puede inferirse que

Si $G = (P \cup Q, U)$ es un bipartido, tal que cualesquiera sean $x \in P$;
 $y \in Q$ se cumple $gr(x) \geq h \geq gr(y)$, G admite un acoplamiento.
 La recíproca es falsa.

Esto resuelve por la afirmativa la siguiente pregunta

Si en una reunión cada asistente conoce a exactamente h personas del otro sexo podrán todos bailar, simultáneamente, con alguno de sus conocidos ?

Del mismo Corolario, y recurriendo al bipartido representativo de G se tiene que

Si G es k -dirregular, $k \geq 1$, admite 1-difactores arco disjuntos dos a dos

De lo puntualizado poco más arriba se tiene :

A) Todo bipartido k -regular, $k > 0$, es 1-factorisable. Recíprocamente, todo bipartido 1-factorisable es k -regular.

Si bien todo multigrafo sin bucles 1-factorisable es regular, el grafo K_3 muestra que la afirmación recíproca es falsa.

Un resultado positivo, de fácil verificación, es el siguiente

Una sucesión d_1, d_2, \dots, d_n de enteros no negativos es realizable como sucesión gráfica de multigrafos de orden n si y sólo si contiene una cantidad par de impares, o sea si y sólo si $\sum d_i$ es par.

Para el caso de restringirse a multigrafos sin bucles esta condición sólo es necesaria.

En [Hak62/63] se demuestra que

Una sucesión de enteros $0 < d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ es realizable como sucesión de grados de un multigrafo sin bucles si y sólo si $\sum_{i=1}^n d_i$ es par, y $\sum_{i=1}^{n-1} d_i \geq d_n$.

De entre los numerosos resultados referentes a esta cuestión obtenidos, citemos además el siguiente, debido a Erdős y Gallai [ErdG60].

Una sucesión de naturales $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ es estrictamente gráfica si y sólo si $\sum_{i=1}^n d_i$ es par y $\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{j=k+1}^n \min\{k, d_j\}$, para todo $1 \leq k \leq n$.

Del mismo se han dado varias demostraciones. Una de ellas, por inducción, puede verse en [Chou86]. Otras en [Ber70] y [Luc79].

Una caracterización constructiva de las sucesiones que nos ocupan, dada por Havel [Hav55], y reencontrada por Hakimi [Hak62/63] es la siguiente.

Una sucesión de naturales $d_1 \geq \dots \geq d_n$ es estrictamente gráfica si y sólo si $d_1 \leq n-1$ y también es estrictamente gráfica la sucesión d'_1, \dots, d'_{n-1} con $d'_i = d_{i+1} - 1$ para todo $1 \leq i \leq d_1$, y $d'_i = d_{i+1}$ si $d_1 < i \leq n-1$.

Demostraciones de ella se dan en [Buch90], [CharL79], [Chen 71a] y [Luc79].

En los dos primeros se enuncia, además, un algoritmo que permite, dada una sucesión de enteros, construir un grafo cuyos grados la satisfagan, o ver que tal grafo no existe.

Visto que todo digrafo transitivo sin bucles tiene entradas y salidas, todo torneo transitivo contiene un único vértice de entrada (de salida), y cabe afirmar

Si T es un torneo transitivo de orden n los grados positivos (negativos) de sus vértices son $0, 1, 2, \dots, (n-1)$.
Recíprocamente, dada una tal sucesión es posible construir un torneo.

Para constatarla elijamos de entre los subgrafos bipartidos cubrientes de G uno de los que tiene mayor número de aristas. Sea $H = (P \cup Q, U)$ el elegido.

Si para algún $x \in P$ se tiene $gr_H(x) < gr_G(x) / 2$, al construir H fueron eliminadas más de la mitad de las aristas de G incidentes en x .

Todas ellas serían de la forma $[x, x_i]$ con $x_i \in P$. Las restantes de las incidentes en x serían de la forma $[x, y_i]$ con $y_i \in Q$.

Reubicando el x en Q , incorporando las aristas $[x, x_i]$, y eliminando las $[x, y_i]$ obtendríamos un nuevo grafo bipartido cubriente H' contenido en G y con mayor número de aristas que H , en contradicción con lo supuesto.

Corolario.

Para obtener a partir de un grafo sin bucles G un bipartido cubriente, basta eliminar a lo sumo la mitad de las aristas de G adecuadamente elegidas.

Una sucesión de enteros no negativos d_1, d_2, \dots, d_n se dice **sucesión gráfica** si existe algún multigrafo G cuyos vértices x_i tienen grado d_i ; y **sucesión estrictamente gráfica** si es posible elegir como tal G a un grafo sin bucles.

Véase que :

- si una sucesión es gráfica también lo es la que resulta de eliminar sus eventuales $d_i = 0$
- toda sucesión gráfica determina la cantidad de vértices y aristas de los multigrafos que la satisfacen, pero no necesariamente a éstos en forma unívoca.
- hay al menos dos grafos sin bucles con grados $3, 2, 2, 2, 1$.
- hay al menos dos multigrafos con grados $2, 2$ y otros dos con grados $3, 1, 1, 1$.
- las sucesiones $1, 3$ y $1, 2, 3$ sólo son gráficas si se admiten bucles, o aristas paralelas.

Aún cuando las sucesiones gráficas no determinan siempre un único multigrafo, del resultado de [BehCh67] citado en pág. 41 se deduce que toda sucesión gráfica con exactamente dos valores iguales determina un único grafo sin bucles.

Para el caso dirigido el problema similar al de caracterizar las “sucesiones gráficas”, es el de hallar condiciones bajo las cuales sucesiones de pares $a_i \parallel b_i$ de enteros no negativos se puedan realizar como “sucesiones de grados positivos \parallel negativos de multigrafos”.

A ésta temática están dedicados los extensos Cap.VI de [Ber70] y [Chen71a]. También puede consultarse [HakS78].

Esto lleva a introducir los siguientes conceptos

Diremos **subdivisión del multigrafo G** al grafo $S_1(G)$ que se obtiene reemplazando cada arista $u_i = [a, b]$ de G (eventualmente $a = b$) por un vértice $v_i \notin G$, y el par de aristas $[a, v_i], [v_i, b]$.

Aplicando reiteradamente, a partir de $G = S_0(G)$, h veces dicha operación se obtiene el grafo $S_h(G)$ que diremos **h -ésima subdivisión** de G .

Así entonces :

- Cualquiera sea el multigrafo G , cada $S_h(G)$, $h \geq 1$, es un grafo sin bucles.
- Si G es de orden n y tiene m aristas, $S_1(G)$ es bipartido de orden $(n + m)$ con $2.m$ aristas.

Si en vez de suponer que la *subdivisión de aristas* se aplica a todas ellas, se admite su realización en sólo "algunas" (eventualmente todas o ninguna) tras reiteradas sub-divisiones se obtendrán, a partir de G , multigrafos **homeomorfos de G** . Dos multigrafos se dicen **homeomorfos** si son homeomorfos de cierto G .

Así, los siguientes G_1 y G_2 son homeomorfos, pues ambos lo son de G , pero no puede afirmarse que G_1 es homeomorfo de G_2 , ni que G_2 lo es de G_1 .



De manera informal, podría decirse que dos multigrafos sin bucles son homeomorfos si y sólo si son isomorfos a menos de sus vértices de grado dos.

Nuestro concepto de "homeomorfo" coincide con el dado en [Har69b] pero es designado "subdivisión" en [BonM76].

Véase que

- todo $S_h(G)$, $h \geq 0$, es homeomorfo de G .
 - cualesquiera sean p, q , los ciclos elementales C_p, C_q son homeomorfos.
 - si H es homeomorfo de G , entonces G y H son homeomorfos.
- La recíproca es falsa.

Por otro lado, diremos que H está **sumergido** (o **inmerso**) en G si $H \subseteq G$, o es obtenido a partir de G aplicando reiteradamente la operación :

eliminar un vértice v en el cual inciden exactamente dos aristas, $[a, v], [v, b]$,
 $a \neq v \neq b$, y sustituirlas por una arista $[a, b]$.

Así entonces

- a) Una sucesión de naturales $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ es la de los grados positivos (negativos) de un torneo transitivo de orden n si y sólo si $d_i = n-i$.
- b) los torneos transitivos de orden n están unívocamente determinados (a menos de isomorfismo).

Por otra parte en [Lan53] (ver [Ber70], [Brya93], [CharL79]) se mostró que :

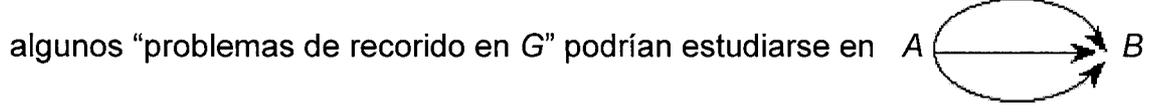
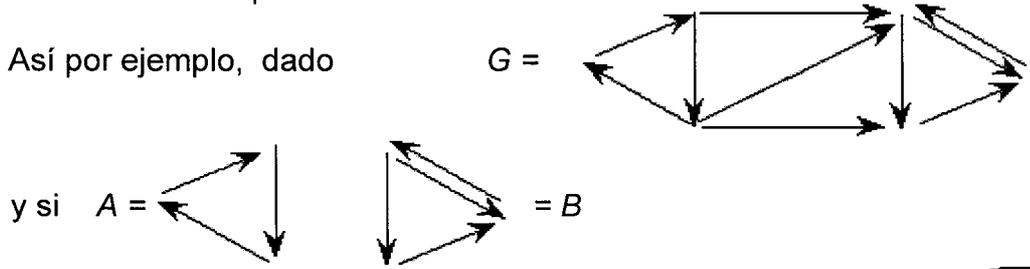
Una sucesión de naturales $d_1 \leq \dots \leq d_n$ es la de grados positivos de un torneo si y sólo si para todo k ($1 \leq k \leq n$) $\sum_{i=1}^k d_i \geq \binom{k}{2}$ y para $k = n$ vale la igualdad.

2.1.10. ALGUNAS OPERACIONES CON MULTI-DI-GRAFOS

A las operaciones ya citadas agregaremos algunas otras.

Si R es una relación de equivalencia definida sobre el conjunto de vértices del multidigrafo G , su **multidigrafo cociente** G/R tiene por vértices las clases de equivalencia que determina R , y tantos arcos (A, B) como arcos (a, b) con $a \in A, b \in B$, hay en G . Análogamente para el caso no dirigido.

Para el caso en que R es la relación de "conexidad" (o de "fuerte conexidad") (ver Cap.3) la "operación cociente" lleva a descomposiciones de la configuración inicial en otras más simples, y a una disminución de la capacidad de memoria necesaria para almacenarla.



Por otro lado, para varias de las cuestiones que estudia la Teoría de Grafos la eliminación, o la incorporación, de vértices en los que inciden exactamente dos aristas y ambas distintas de bucles no es esencial, aunque si útil, para formular, o implementar algoritmos

Por lo tanto :

- G es subgrafo cubriente de G^2 .
- los bucles de G^2 coinciden con los de G .
- si P_3 es la cadena de aristas $[a, x], [x, y], [y, b]$; $(P_3)^2 = K_4 - [a, b]$.
- $K_4 = (C_4)^2$ y $K_5 = (C_5)^2$.

Aplicando $(h - 1)$ veces el proceso anterior se obtendrá el **multigrafo h -ésima potencia de G** , que notaremos G^h .

En particular $K_6 = (C_6)^3$.

En el caso dirigido, pero admitiendo ahora el caso $a = b$, indicaremos con G^2 al multidigrafo que se obtiene incorporando a G , si no existe, un arco (a, b) por cada par de vértices a, b , tales que existen arcos $(a, x), (x, b)$.

La aplicación reiterada de tal operación daría lugar a los multidigrafos G^h .

Así : $\left\{ \begin{array}{l} - G^2 \text{ contiene bucles si y sólo si } G \text{ tiene bucles, o arcos opuestos} \\ - \text{ Si } G \text{ es digrafo de orden } n, G^n = G^* \end{array} \right.$

Esta nociones también puede ser introducidas recurriendo a las de "cadena (camino) de longitud h ", que se introducirán en Cap.3

Restringiremos el uso de la siguiente operación al caso de los grafos sin bucles. Modificaciones adecuadas en su definición permitirían extenderla y aplicarla en p -multi-di-grafos.

Dado un grafo sin bucles $G = (V, U)$ su **complementario** es el $\overline{G} = (V, \overline{U})$ con \overline{U} complemento de U , excluidos los $[v, v], v \in V$, que determinarían *bucles*.

En particular, los siguientes grafos son complementarios



En la clase de los grafos (sin bucles) se satisfacen :

- la complementación es una operación involutiva.
- el completo K_n y el discreto de orden n son complementarios.
- dos grafos son isomorfos si y sólo si también lo son sus complementarios.

Además, si G es de orden $n \geq 2$ para todo vértice v , $\overline{G-v} = \overline{G} - v$.

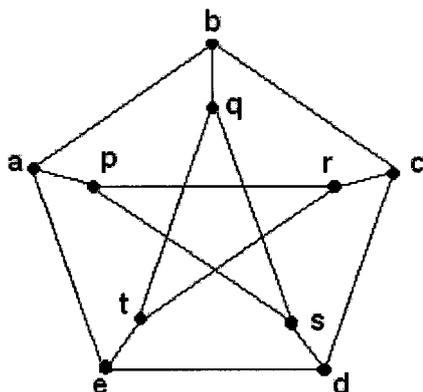
De las definiciones resulta que

- G está sumergido en todos sus homeomorfos, y por lo tanto en cada $S_h(G)$.
- Si $p < q$, C_p está sumergido en C_q .
- G contiene subgrafos homeomorfos de H si y sólo si H está sumergido en G .

Podemos ahora enunciar el célebre resultado de Kuratowski [Kur30] al cual nos hemos referido en pág. 20 y sobre el cual volveremos en Capítulo 10.

Un multigrafo G es planar si y sólo si ni K_5 , ni $K_{3,3}$, están sumergidos en G o equivalentemente
 Un multigrafo es planar si y sólo si no contiene subgrafos homeomorfos con K_5 , o con $K_{3,3}$

Para ilustrar lo dicho consideremos el siguiente Grafo de Petersen.



El subgrafo obtenido por eliminación de las aristas $[p, r]$, $[d, e]$ es homeomorfo del $K_{3,3}$ con vértices en las clases $\{a, q, c\}$, $\{b, s, t\}$.

Así entonces, $K_{3,3}$ está inmerso (o sumergido) en el grafo en consideración

En [Aig69a] se destaca que el resultado precedente es el primero de aquellos en los que se caracterizan configuraciones a través de "subgrafos prohibidos", y se estudian otras clases de grafos que también admiten caracterizaciones basadas en esta idea.

Entre éstas se cuentan los "adjuntos" (pág. 51) y los "árboles" (pág. 118).

Veamos ahora una operación en cierto sentido opuesta de la subdivisión.

Dado un multigrafo G notaremos G^2 al que se obtiene incorporando a G una arista $[a, b]$ por cada par de vértices no adyacentes a, b , $a \neq b$, que tengan al menos un adyacente común.

Los “*adjuntos*” permiten describir relaciones de adyacencia entre aristas (o de consecutividad entre arcos) de la configuración de partida, en términos de la adyacencia (o la precedencia) de vértices, y “traducir” conceptos, o problemas, relacionados con aristas (con arcos) a otros relativos a vértices.

Son particularmente útiles frente a problemas en los cuales se deben tener en cuenta restricciones que dependen del par de aristas (de arcos) considerados, y no sólo del hecho de ser ambos incidentes en un mismo vértice.

Tal sucede, por ejemplo, cuando en una red la posibilidad de (o el costo por) pasar de un tramo a otro depende del par de tramos involucrados, y no sólo del hecho de pertenecer, ambos, a un mismo “centro de distribución” .

Recordemos además lo observado en el Prólogo respecto de los “digrafos etapas” y de los “digrafos tareas”.

En [HemB78] se hace una amplia revisión de resultados relativos a estas operaciones, y en [Chi79] se las vincula algebraicamente. Luego, en [ChiZ87] se dió un extenso listado de publicaciones en las que ellas aparecen.

Dos nociones ligadas con las de adjunción son las de “multigrafo total” y “multidigrafo total”. En [ChiM91] y [ChiZ87] se recopilan numerosos trabajos que las involucran.

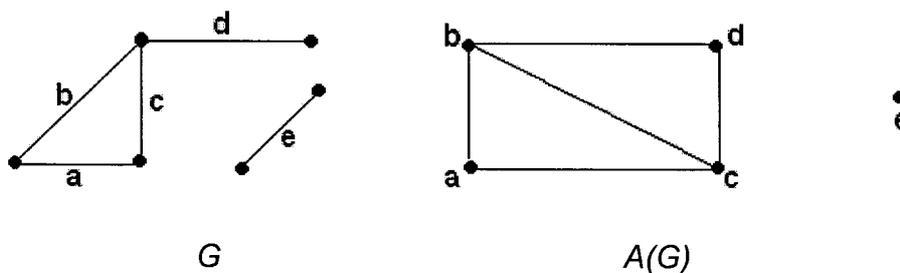
En [CapM78] y [Hob78] se vinculan las nociones grafo adjunto, grafo total y potencia de grafos.

En [CharPS73] y [Sum74a/74b] se demostró que si G es conexo, su adjunto, su cuadrado, y su total, admiten 1-factores si y sólo si son de orden par.

Para el caso de grafos sin bucles esta operación responde a lo siguiente.

Si G es un grafo sin bucles, su **grafo adjunto** $A(G)$ es aquel cuyos vértices se corresponden biyectivamente con las aristas de G , y tal que dos de sus vértices son adyacentes si y sólo si también lo son en G las aristas que representan.

Ejemplo

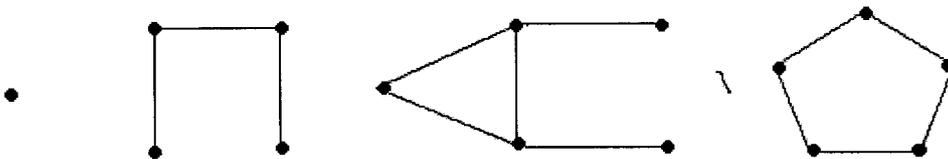


G es **autocomplementario** si es isomorfo a su complementario.

Visto que si G es de orden n , la cantidad de sus aristas más las de \overline{G} (ambos sin bucles) es $\binom{n}{2}$, los autocomplementarios de orden n tienen $\frac{n \cdot (n-1)}{4}$ aristas,

Por ello son de orden $4 \cdot k$ ó $(4 \cdot k + 1)$, $k \geq 0$.

Los cuatro autocomplementarios sin bucles de orden n , para $1 \leq n \leq 5$ son :



En [Read63] (ver [HarP73]-Cap.6) además de determinar la cantidad de grafos, y de digrafos autocomplementarios (carentes de bucles) se observa que :

El número de grafos autocomplementarios de orden $4 \cdot n$ coincide con el de dígrafos autocomplementarios de orden $2 \cdot n$

Algunos de los correspondientes valores se dan en siguiente tabla, donde con g_n (d_n) se indica el número de grafos (digrafos) sin bucles, autocomplementarios de orden n .

n	2	3	4	5	6	7	8	9	12	13	16	17
g_n			1	2			10	36	720	5.600	703.760	11.220.000
d_n	1	4	10	136	720	44.224	703.760					

Otras operaciones unarias, que se muestran útiles y entre cuyas numerosas designaciones recibidas se cuentan las de *line-graph* y *arc-digraph* serán dichas "de adjunción".

Ellas, según [HemB78] "son probablemente las más interesantes de las transformaciones definidas entre grafos, y seguramente las más estudiadas".

Para el caso de grafos sin bucles fue introducida por Krausz [Krau43] con el fin de dar una nueva demostración del resultado de Whitney citado en pág. 24. Posteriormente fue adaptada para cuando se admiten bucles, o aristas paralelas, y reformulada para el caso dirigido.

Es fácil ver que :

- el adjunto del opuesto de G coincide con el opuesto de su adjunto.
- G es multidigrafo arco balanceado si y sólo si su adjunto es balanceado.

Volviendo a esquemas dados en el Prólogo observemos que el “digrafo tareas G_2 ” es adjunto del “digrafo etapas G_1 ”, pero que no cabe la misma afirmación para G_2^* respecto de G_1^* .

De esta noción se conocen varias caracterizaciones. Algunas se indican en el Ejerc.2-41).

La equivalencia de ellas con la siguiente, dada en [Chi71], como así también un detallado estudio de la operación en cuestión puede verse en [Chi82].

| (V, Γ) es digrafo adjunto de algún multidigrafo si y sólo si $\Gamma = \Gamma \circ \Gamma^{-1} \circ \Gamma$.

Así entonces, si $H = (U, \Gamma)$ es adjunto de $G = (V, U)$, cualquiera sea el arco $u = (p, q)$ se tiene que $gr_G^+(q) = |\Gamma(u)|$ y $gr_G^-(q) = |\Gamma^{-1} \circ \Gamma(u)|$.

Un interesante resultado a destacar es el que sigue.

| Todo digrafo G “puede reencontrarse” sumergido en (o como subdigrafo de) algún digrafo adjunto.

Más precisamente :

I)

Para sumergir un digrafo en otro que sea adjunto bastan “adecuadas subdivisiones de arcos” El método que a tal efecto fue propuesto en [Rich67] puede verse también en [Chi82]. Otro similar fue dado en [Sys74].

II)

Visto que poniendo $\Gamma = \Gamma_1$ y $\Gamma_{j+1} = \Gamma_j \circ \Gamma_j^{-1} \circ \Gamma_j$ ($j \geq 1$) se genera una sucesión $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \dots \subseteq \Gamma_j \subseteq \dots$ y que la relación universal es de adjunción puede afirmarse que existe cierto h tal que $\Gamma_h = \Gamma_{h+1}$. (Γ_h cápsula adjunta de Γ_1)

Por ello (ver [Chi82]) :

| Todo digrafo (V, Γ_1) es subdigrafo cubriente de su cápsula adjunta (V, Γ_h) , que es minimal en el sentido del número de arcos agregados.

Ambos procesos se pueden ejemplificar a partir del G_2^* dado en pág. IX

Es claro que los eventuales vértices aislados de G no interesan para calcular su adjunto, y que tanto K_3 como $K_{1,3}$ tienen por adjunto a K_3 .

En [Krau43] (ver [CharL79], [Ber70] pg.388) se demostró que un grafo es adjunto de un grafo sin bucles si y sólo si se lo puede pensar como unión de completos sin aristas comunes y tales que cada vértice pertenece a exactamente dos de los completos en cuestión, o bien es vértice aislado.

En particular, en el ejemplo anterior los correspondientes subgrafos completos del $A(G)$ son los inducidos por los vértices $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c, d\}$, $\{d\}$, $\{e\}$.

Obviamente, cada arista de $A(G)$ está en uno solo de dichos completos, y conviniendo en contar dos veces el $K_1 = \{e\}$ podría decirse que cada uno de sus vértices pertenece a exactamente dos de los completos.

Posteriormente fueron propuestas otras caracterizaciones.

En [Ber70], [Har69b], [HemB78] se muestra la equivalencia de varias de ellas con la de Krausz, y se reproducen los nueve subgrafos que en [Bei68/70] se demostró no son admisibles en la clase de los adjuntos. A éstos también se los da en [CapM78], [CharL79], [GonM79] y [Buch90].

El concepto que nos ocupa permite enunciar la siguiente reformulación del resultado de Whitney citado en pág. 24.

Si G y H son "grafos conexos" (ver 3.6) sin bucles y sin vértices aislados, y sus respectivos adjuntos son isomorfos también lo son G y H , excepto que ellos sean K_3 y $K_{1,3}$.

Destaquemos que los adjuntos de multigrafos se definen en forma similar, tomando en cuenta el número de vértices en común que tienen los pares de aristas, y que de acuerdo con lo observado en [Chi79/82] un resultado análogo al de Whitney sólo se puede extender al caso de las configuraciones que tienen aristas paralelas si también tienen bucles.

En [MarcS74] se introdujeron cinco nociones similares a la de adjunción, y se las caracterizó en términos de descomposiciones tipo Krausz, y de subgrafos no permitidos. Otras extensiones fueron estudiadas en [CveDS81] y en [Hem71].

En [Aig69b] se mostró que los únicos grafos cuyos respectivos complementario y adjunto son isomorfos son el ciclo C_5 , y el grafo de aristas $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, a]$, $[a, d]$, $[b, e]$, $[c, f]$.

Para el caso dirigido cabe la siguiente definición.

Dado un multidigrafo $G = (V, U)$ su **digrafo adjunto** es el digrafo (U, Γ) con $q \in \Gamma(p)$ si y sólo si en G el extremo final del arco p coincide con el inicial del arco q .

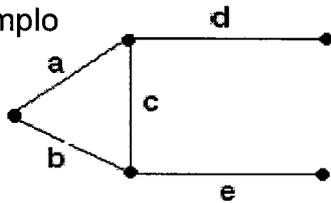
Dados los multigrafos $G_1 = (V_1, U_1)$, $G_2 = (V_2, U_2)$ y supuesto que toda arista $u \in U_1 \cap U_2$ (si una tal arista existe) tiene en G_1 y en G_2 los mismos vértices extremos se dice :

intersección de G_1 y G_2 al multigrafo $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, U_1 \cap U_2)$

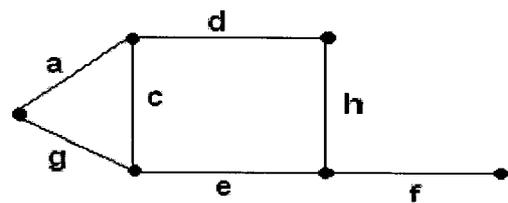
unión de G_1 y G_2 al multigrafo $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, U_1 \cup U_2)$

diferencia simétrica de G_1 y G_2 al multigrafo $G_1 \Delta G_2$ inducido por $U_1 \Delta U_2$.

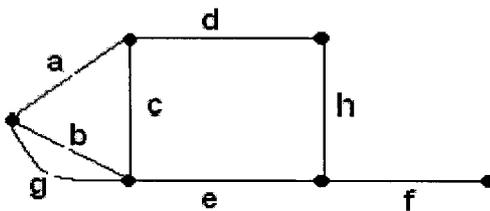
Ejemplo



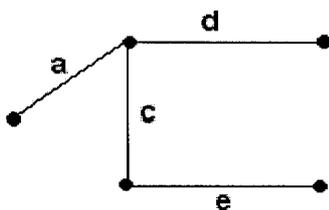
G



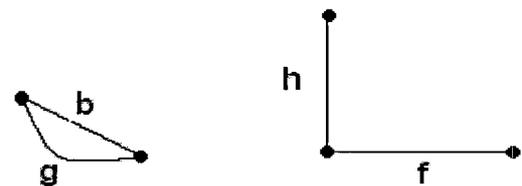
H



$G \cup H$



$G \cap H$



$G \Delta H$

En [Deo74] se define $G_1 \Delta G_2 = (V_1 \cup V_2, U_1 \Delta U_2)$, y de tal manera $G_1 \Delta G_2$ puede tener vértices aislados.

En particular, con nuestra definición $G \Delta G$ es el grafo vacío, pero con la dada en [Deo74] es un grafo discreto.

De las definiciones se tiene que :

- Las operaciones \cup y \cap son conmutativas, asociativas e idempotentes ; en tanto que Δ es conmutativa y asociativa.
- Si G_1 y G_2 son vértice (arista) disjuntos, $G_1 \cap G_2$ es vacío (discreto).
- Si G y H carecen de aristas comunes y vértices aislados $G \cup H = G \Delta H$.

En tal caso, aplicando II) se agregaría el arco (q, t) , mientras que el método I) llevaría a incorporar un vértice f y a substituir los arcos (p, r) , (p, s) por (p, f) , (f, r) , (f, s) .

En [Hem72a], [HemK77], [HemZ73] y [Sys74] se estudiaron extensiones de la operación que nos ocupa, y en [Chi92] se caracterizaron los "*k-adjuntos*" de los multidgrafos carentes de entradas y de salidas.

Aún cuando en [Chi79] se explicitó una relación algebraica que vincula las operaciones de adjunción en los casos dirigido y no dirigido, caben entre ellas diferencias importantes.

Por ejemplo :

- En el caso no dirigido, si G es conexo también lo es su adjunto, pero en el caso dirigido su adjunto puede, o no, ser conexo.
- En cambio, en ambos casos, si el adjunto de G es conexo también lo es G , a menos de eventuales vértices aislados.

Además, restringiéndose a configuraciones conexas carentes de vértices aislados la clase de los grafos (dígrafos) de los cuales H es adjunto es unitaria, a menos de isomorfismo, si y sólo si $H \neq K_3$ (si y sólo si a sus elementos se les impone la restricción de tener a lo sumo una entrada y una salida).

En [Aig69a] y [Grü69] los grafos adjuntos son vistos como **grafos de intersección**, Estos últimos responden a la siguiente idea

Dada una colección $S_i, 1 \leq i \leq h$, de conjuntos (de subgrafos de cierto tipo), eligiéndolos como vértices, y admitiendo aristas $[S_i, S_j]$ si y sólo si ambos S_i, S_j , satisfacen ciertas restricciones prefijadas, se obtiene el correspondiente grafo intersección.

Nótese que : Todo grafo sin bucles G puede reencontrarse como grafo de intersección.

Para comprobar lo afirmado basta tomar como S_i al conjunto de aristas de G incidentes en el vértice x_i , y admitir aristas $[S_i, S_j]$ si y sólo si ambos S_i, S_j , tienen en G una arista común.

Por otra parte, en [LinMW79] se mostró que todo grafo sin bucles es realizable como de intersección de "cuadrados latinos ortogonales".

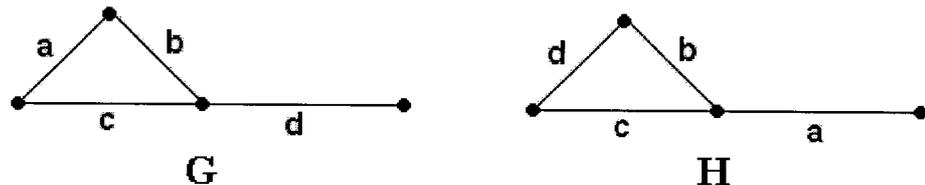
Hipótesis particulares sobre los S_i llevarían a grafos de intersección particulares. Entre éstos se cuentan los "**grafos de intervalo**"; es decir, de aquellos cuyos vértices representan intervalos de la recta real y cuyas aristas corresponden a pares de intervalos que se intersectan.

Introduciremos seguidamente algunas operaciones binarias de uso muy frecuente. Ellas permiten descomponer multigrafos en otros más simples, y derivar algunas propiedades a partir de las de éstos.

Similares caben para el caso dirigido.

Por ello sería conveniente distinguir entre “operaciones etiquetadas” y “operaciones no etiquetadas”.

Notemos, al respecto, que aún cuando los siguientes esquemas representan grafos isomorfos, con las designaciones adoptadas se podría calcular $G \cap^* H$ pero no $G \cap H$.



Por lo tanto, aún cuando H y H' sean isomorfos, no puede afirmarse que $G \cap H$ es isomorfo con $G \cap H'$.

Observemos además que si las aristas son designadas adecuadamente las operaciones “no etiquetadas” se pueden reencontrar como “etiquetadas”. La recíproca es falsa.

De lo que sigue puede inferirse la eventual utilidad de ambos tipos de operaciones.

Supuesto que V es un conjunto de ciudades, que $G = (V, U)$ es el multigrafo determinado por las redes viales y ferroviarias, y $H = (V, W)$ el constituido por las redes viales y telefónicas que las unen, cabe preguntarse :

- a) – ¿ cuales son los pares de ciudades que están conectadas directamente por alguna de las tres redes ?
- b) – ¿ cuántas de las redes las conectan directamente ?

Para resolver a) basta $G \cup^* H$; en cambio, para contestar b) se necesitaría $G \cup H$

Destaquemos, finalmente, que en numerosas ocasiones se presenta la necesidad de estudiar “el cubrimiento de G ” (o “la descomposición de G ”) recurriendo a conjuntos de subgrafos arista disjuntos y de tipo prefijado, que permitan reencontrarlo como unión de ellos.

Al respecto recordemos que un grafo carente de vértices aislados sólo puede ser 1-factorisable; es decir, quedar cubierto por 1-factores arista disjuntos dos a dos, si tiene un número par de vértices que no sean soporte de bucles.

Si V_1 y V_2 son disjuntos, la *unión* de G_1 y G_2 también se dice **suma**, y en tal caso pondremos $G_1 + G_2$.

La suma de k multigrafos isomorfos con G , pero disjuntos dos a dos, da lugar al multigrafo constituido por " k copias de G ". Lo notaremos $k.G$.

Veamos que :

- Si G_1 y G_2 se suponen definidos, respectivamente, por (V_1, U_1, Ψ_1) y (V_2, U_2, Ψ_2) , la hipótesis hecha respecto de las aristas comunes a U_1 y U_2 al definir nuestras operaciones binarias se corresponde con la de suponer que si $u \in U_1 \cap U_2$ entonces $\Psi_1(u) = \Psi_2(u)$.
- La unión, y la diferencia simétrica de dos grafos (o de dos subgrafos de un multigrafo propiamente dicho), puede dar lugar a un 2-grafo.
- la complementación fue definida para la clase de los grafos sin bucles, y restringiéndose a ellos se tienen:
 - si G es de orden n , $G \cup \overline{G} = K_n$.
 - $G \cap \overline{G}$ es un grafo discreto.
 - Si K_p y K_q son disjuntos, $K_p + K_q = \overline{K_{p,q}}$.

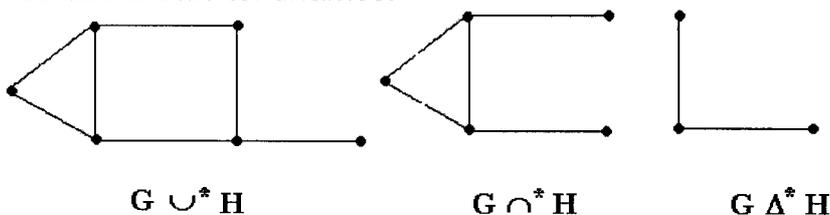
Habitualmente, al dar un multigrafo por su "matriz de adyacencia" (ver pág. 64), o al remitirse a sus representaciones topológicas, se hace caso omiso de las designaciones de sus aristas, y sólo se atiende a la de sus vértices extremos.

En estos casos no es posible distinguir entre eventuales aristas paralelas, y es frecuente definir también con los nombres *unión*, *intersección*, *diferencia simétrica*, a operaciones definidas en forma similar a las recién introducidas.

Para distinguir las operaciones precedentes de estas últimas podríamos convenir en notar a éstas, respectivamente, \cup^* ; \cap^* ; Δ^* .

Ahora, y a diferencia de lo señalado en b), resulta que si G y H son grafos, también lo serán $G \cup^* H$ y $G \Delta^* H$.

Aplicándolas a los multigrafos dados más arriba, y haciendo caso omiso de la designación de sus aristas tendríamos:



La interrelación entre la Teoría de Grafos y la Teoría de Matrices se muestra sumamente fructífera pues permite reinterpretar resultados de cada una en la restante, y esto lleva a un enriquecimiento mutuo de ambas.

No todas las matrices asociadas a cierto G proveen una misma información, ni permiten reconstruirlo. En particular, no son válidas para todas ellas afirmaciones similares a las A, B, C, D que enunciaremos poco más adelante

En particular, las matrices *ciclo elemental* y *cociclo elemental*, que introduciremos en Cap.3 y Cap.7, respectivamente, definen “la” configuración de partida sólo a menos de “2-isomorfismo”.

Obviamente, las matrices llevan implícito un ordenamiento en la designación de los elementos que componen los conjuntos utilizados para definir las, y puesto que modificar las designaciones implica permutar filas y/o columnas, ellas están referidas, más precisamente, a “configuraciones etiquetadas” (ver pág. 70).

Las propiedades más interesantes son las invariantes bajo tales permutaciones. Entre ellas se incluyen las ligadas con sus “polinomios característicos”.

Destaquemos al respecto que en [CveDS79] y en [CveDG88] se da una amplia información sobre de la teoría espectral de matrices, y su relación con la teoría de grafos.

En particular, se demuestra que

Los multigrafos quedan unívocamente determinados por los autovalores de su “matriz de adyacencia” (ver pág. 64) y un conjunto de los correspondientes autovectores linealmente independientes. [CveDS79] -Th.1.8.

Pero, excepto casos especiales, con sólo los autovalores no pueden determinarse configuraciones en forma unívoca.

Más precisamente, se puede constatar que los grafos sin bucles, no isomorfos, coespectrales, tienen por lo menos cinco vértices.

Un par de ellos lo componen el grafo $K_1 + C_4$, y el grafo bipartido $K_{1,4}$.

Otros de los numerosos resultados obtenidos en relación con esta cuestión son :

- G es *regular* si y sólo si su matriz de adyacencia admite un autovector con todas sus componentes unidad.
- G es *bipartido* si y sólo si el espectro de su matriz de adyacencia, considerado como conjunto de puntos de la recta real, es simétrico respecto del origen.
- el número de “componentes conexas” (ver 3.6) de un grafo regular coincide con la multiplicidad del mayor de los autovalores de su matriz de adyacencia.

Algunos resultados sobre descomposiciones (o cubrimientos) de K_n , se dieron en pág.31.

Otros, referidos a cubrimientos por "cadenas" (o "ciclos", o "árboles", o "planares") serán citados oportunamente en los Cap. 3, 4, 8, 10.

Frecuentemente interesa hallar los cubrimientos con el menor número posible de los subgrafos en cuestión.

Para analizar estos problemas suele ser cómodo suponer que los vértices (las aristas) se han "*coloreado*", conviniendo al efecto que sólo se admitirán "*colores*" que asignan colores distintos a vértices (aristas) adyacentes.

2.2. DISTINTAS FORMAS DE REPRESENTACION

Para definir un multi-di-grafo pueden adoptarse distintas formas.

La elegida dependerá, en general, del problema a estudiar, de los datos a manejar, y de los elementos de cálculo disponibles.

En 2.1.3 hemos considerado las representaciones topológicas.

En lo que sigue nos referiremos a las dadas mediante listas, tablas, o matrices.

Por sus respectivas particularidades y propiedades, podrá suceder que las preferibles para encarar un determinado problema no lo sean en ocasión de otros.

Las representaciones matriciales permiten, en general, un análisis más sistemático y algebraico que el factible con las habituales representaciones topológicas. Además facilitan las evaluaciones numéricas, y la aplicación de algoritmos.

Una problemática importante y estrechamente ligada con lo dicho, pero que no consideraremos pues escapa a nuestro objetivo, es la vinculada con el almacenamiento de datos y su posterior procesamiento en equipos de computación.

En este contexto, y para decidir sobre cual representación elegir, será importante tener en cuenta el espacio de memoria que requieren, así como la facilidad que brindan para operar con los datos, y la velocidad de manejo de éstos.

También sería útil tener en cuenta cuales son los algoritmos aptos para abordar el problema a resolver.

La bibliografía sobre Informática provee abundante información al respecto.

Tablas de precedencia

T_3	vértice	vértice	T_4	arco	arco
	1	2 (doble)		a	-
	2	-		b	-
	3	2,3,5		c	-
	4	2		d	-
	5	3,6		e	d,e,f
	6	7		f	g,h
	7	-		g	d,e,f
	8	-		h	i
	9	10		i	-
	10	-		j	-

En T_3 (T_4) quedan bien definidos los vértices (arcos) de salida. Para los de entrada es necesario recorrer toda la tabla y almacenar información. La existencia de arcos paralelos queda bien explicitada en T_3 pero es irrecuperable en T_4 .

La **matriz precedencia** (del multidigrafo G) es la matriz (vértice/vértice) $P(G) = (p_{i,j})$, con $p_{i,j}$ igual al número de arcos de la forma (i, j) .

En nuestro caso, y poniendo . en lugar de 0, ella es:

$$P(G) = \begin{pmatrix} \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que

- G es torneo si y sólo si $p_{i,j} \in \{0,1\}$; $p_{i,i} = 0$, y para $i \neq j$, $p_{i,j} + p_{j,i} = 1$.
- G es simétrico si y sólo si $P(G) = (P(G))^t$ (con t traspuesta)
- G es antisimétrico si y sólo si el ínfimo de $(P; P^t)$ es la matriz nula.

- de los "árboles" (pág.118) sólo los de orden $n \leq 7$ quedan unívocamente determinados por los autovalores de su matriz de adyacencia.
- si G es grafo sin bucles los autovalores de la matriz adyacencia de su adjunto están acotados inferiormente por -2 .

Las publicaciones en las que se toman en cuenta las representaciones matriciales son numerosas. Algunas son : [Ber58], [Bru82/91/92], [BruR91], [BusS65], [Chen71a], [ChiS99], [Deo74], [DulM67/69], [GonM79], [Har67i], [HarNC65], [Hof75], [Pea73], [SchW78], [SesR61], [SwaT81], [Tor76].

Seguidamente daremos, a título de ejemplo y sin entrar en detalles de las respectivas definiciones, varias tablas y matrices asociadas al multidigrafo que fue representado topológicamente en pág. 20.

Recordemos que dicho multidigrafo tiene vértices $V = \{ 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 \}$ y arcos $U = \{ a = (1, 2), b = (1, 2), c = (4, 2), d = (3, 2), e = (3, 3), f = (3, 5), g = (5, 3), h = (5, 6), i = (6, 7), j = (9, 10) \}$

Tablas de incidencia

T_1	arco	vértices	T_2	vértice x	U_x^-	U_x^+
	a	$(1, 2)$		1	\emptyset	a,b
	b	$(1, 2)$		2	a,b,c,d	\emptyset
	c	$(4, 2)$		3	e,g	d,e,f
	d	$(3, 2)$		4	\emptyset	c
	e	$(3, 3)$		5	f	g,h
	f	$(3, 5)$		6	h	l
	g	$(5, 3)$		7	i	\emptyset
	h	$(5, 6)$		8	\emptyset	\emptyset
	i	$(6, 7)$		9	\emptyset	j
	j	$(9,10)$		10	j	\emptyset

En T_2 es fácil reconocer cuales son los vértices de entrada, o de salida, y en particular que 8 es aislado.

En cambio, si no se ha especificado que hay diez vértices no será posible reconocer en T_1 que hay uno aislado. Además, para detectar en T_1 a los vértices entrada (salida) se la deberá recorrer completamente.

Por otro lado, determinar cuales son los arcos paralelos y cuales los opuestos es más fácil en T_1 que en T_2 . En ambas es rápido ver que e es bucle.

En ocasiones será útil considerar la **matriz arco precedencia**, de componentes :
 $m_{i,j} = 1$ si el arco j es consecutivo del i , y $m_{i,j} = 0$ en otro caso.

Para el caso no dirigido se introducen tablas y matrices similares a las precedentes. Aplicándolas al multigrafo sostén del que nos ocupa tendríamos .

Tablas de incidencia

T_1'	arista	vértices	T_2'	vértice	aristas
	a	[1,2]		1	a,b
	b	[1,2]		2	a,b,c,d
	c	[2,4]		3	d,e,f,g
	d	[2,3]		4	c
	e	[3,3]		5	f,g,h
	f	[3,5]		6	h,i
	g	[3,5]		7	i
	h	[5,6]		8	—
	i	[6,7]		9	j
	j	[9,10]		10	j

En T_1' es claro que tanto a, b , como f, g , son aristas paralelas, y que e es un bucle. Esto es más difícil de detectar usando T_2' .

Con esta última, y atendiendo a que e es bucle, es fácil evaluar el grado de cada vértice y en particular que el 8 es vértice aislado. Esta circunstancia no es deducible de T_1' sin previa aclaración del número de vértices existentes.

Tablas de adyacencia

T_3'	vértice	vértice	T_4'	arista	arista
	1	2 (doble)		a	b,c,d (doble con b)
	2	1,3,4 (doble con 1)		b	a,c,d (doble con a)
	3	2,3,5, (doble con 5)		c	a,b,d
	4	2		d	a,b,c,e,f,g
	5	3,6 (doble con 3)		e	d,e,f,g
	6	5,7		f	d,e,g,h (doble con g)
	7	6		g	d,e,f,h (doble con f)
	8	—		h	f,g,i
	9	10		i	h
	10	9		j	—

En T_3' quedan claramente indicados los vértices de grado 1, pero en T_4' no se reflejan las aristas pendientes.

Como para construir las matrices precedencia no interesa la designación de los arcos, resulta que sólo si G y H están definidos sobre un mismo conjunto de vértices y carecen de arcos comunes vale $P(G \cup H) = P(G) + P(H)$.

Se deja al lector constatar el siguiente e importante resultado

A | Toda matriz cuadrada P de enteros no negativos puede pensarse como matriz de precedencia de algún multidigrafo G , que está unívocamente determinado a menos de isomorfismo.
 | G será digrafo si y sólo si P tiene solamente componentes $0, 1$.

Es decir

| Toda matriz cuadrada de enteros no negativos es *realizable* como matriz precedencia de algún multidigrafo, único a menos de isomorfismo.

Creemos oportuno destacar que el resultado de pág.37 según el cual:

| Un digrafo (V, Γ) carece de *1-difactores* si y sólo si existe al menos un conjunto $A \subseteq V$ tal que $|A| > |\Gamma(A)|$

admite la siguiente reformulación:

| Un digrafo de orden n carece de *1-difactores* si y sólo si su matriz precedencia admite una *submatriz nula de tipo* $(p \times q)$ tal que $p + q > n$.

En efecto, si $|A| = p$; $|\Gamma(A)| = k$, y la cardinalidad del complemento de $\Gamma(A)$ es q , de $k + q = n$ resulta que $p > k = n - q$ equivale a $p + q > n$.

De este resultado se dará, en pág.152, una consecuencia directa relativa a la eventual nulidad de todos los monomios que llevan al cálculo de determinantes.

Para el caso en que G es multidigrafo no discreto, carente de bucles, también cabe considerar la **matriz de incidencia** $B(G)$.

Ella tiene componentes $b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es vértice inicial de } j \\ -1 & \text{si } i \text{ es vértice final de } j \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$

En $B(G)$ a los arcos paralelos (opuestos) corresponden vectores columna idénticos (opuestos). Además, $\sum_i b_{i,j} = 0$; $\sum_j b_{i,j} = gr^+(i) - gr^-(i)$.

Como la suma de los vectores fila de una matriz incidencia da un vector nulo, la eliminación de una cualesquiera de sus filas da lugar a otra, que tiene su misma información y se dice **matriz incidencia reducida**.

Más precisamente, y volviendo sobre lo afirmado en pág.36 respecto de cómo representar matricialmente a los bipartidos cabe afirmar :

C | Toda matriz $M = (m_{i,j})$ de enteros no negativos, y tipo $p \times q$ define un multigrafo bipartido de vértices $P \cup Q$, único a menos de isomorfismo con $p = |P|$, $q = |Q|$ y tantas aristas $[i, j]$ como indica el entero $m_{i,j}$.

De donde, cada matriz $p \times q$ de $0, 1$, puede asociarse a un grafo bipartido, y en ella visualizarse el siguiente resultado de Egerváry [Ege31], equivalente al de König citado en pág. 32.

| En una matriz de componentes $0, 1$, el número máximo de componentes 1 pertenecientes a líneas distintas (ya sean filas o columnas) coincide con el número mínimo de líneas que contienen a todos los 1 .

Para multigrafos G no discretos, carentes de bucles, también cabe definir la **matriz de incidencia** $B(G)$, con componentes $b_{i,j} = 1$ si la arista j tiene uno de sus extremos en el vértice i , y $b_{i,j} = 0$ en otros casos.

Si G admite matriz de incidencia, la matriz $\underline{B}(G)$ coincide con la que se obtiene a partir de $B(G)$ substituyendo los -1 por 1 , y conservando los restantes.

En ocasiones será útil recurrir a la **matriz arista adyacencia**, de componentes $m_{i,j}$ tales que $m_{i,j}$ es igual al número de extremos comunes que tienen las aristas $[i, j]$, $i \neq j$, y $m_{i,i} = 1$ (0) si i es bucle (no es bucle).

Cada matriz de $0,1$ (de $0,1,2$) que es arco precedencia (arista adyacencia) de cierto G puede reinterpretarse como matriz precedencia (adyacencia) del adjunto de G .

La siguiente afirmación D, es del mismo carácter que las A, B, C.

D | Toda matriz $n \times m$, con $n \geq 2$, $m \geq 1$, tal que cada una de sus columnas tiene $(n - 2)$ componentes nulas, y las restantes son un 1 y un -1 (ambas son 1) es *realizable* como matriz de incidencia de un multidigrafo (multigrafo) sin bucles de orden n , con m arcos (aristas), unívocamente determinado a menos de isomorfismo.

De lo afirmado en A, B, C, D resulta que :

| Dos configuraciones son isomorfas si y sólo si los elementos tomados en cuenta para construir sus matrices de precedencia (o de adyacencia, o de incidencia) se pueden permutar de forma que las matrices resultantes sean iguales.

La **matriz adyacencia** de un multigrafo G es

$A(G) = (a_{i,j})$ con componentes $a_{i,j}$ igual al número de aristas $[i, j]$.

En nuestro caso y poniendo . en lugar de 0 tendremos

$$A(\underline{G}) = \begin{pmatrix} . & 2 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 2 & . & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & 1 & . & 2 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 2 & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \end{pmatrix}$$

Para cada multigrafo G , se tiene que $A(G) = P(G^s)$

Si $D_b(G)$ es la matriz : $d_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ \forall $d_{i,i} =$ número de bucles incidentes en i para cualquier multidigrafo G se tiene que : $A(\underline{G}) = P(G) + (P(G))^t - D_b(G)$

Se deja al lector verificar que :

B Toda matriz simétrica A de enteros no negativos puede pensarse como matriz de adyacencia de algún multigrafo G , que está unívocamente determinado a menos de isomorfismo.
 G es grafo si y sólo si A sólo tiene componentes $0,1$.

Así entonces

Toda matriz simétrica de enteros no negativos es *realizable* como matriz de adyacencia de algún multigrafo, único a menos de isomorfismo.

Véase además que :

Si $G = (V, U)$ es un bipartido con $V = P \cup Q$, $|P| = p$, $|Q| = q$, y los vértices se numeran adecuadamente su matriz adyacencia toma la forma $\begin{pmatrix} O_1 & M \\ M' & O_2 \end{pmatrix}$

con matrices cuadradas nulas O_1 y O_2 de órdenes p, q .

La submatriz M también da una descripción completa del G .

Estas matrices, que en [SesR61] se designan *E-matrix*, desempeñan un papel muy importante en Programación Lineal y en Teoría de Grafos, pues implican que los problemas cuyas restricciones dependen de números enteros admiten soluciones óptimas enteras. ([GonM79]-Anexo 2, [Sim62]-pág.343).

El siguiente es un conocido criterio de caracterización de [HellTG56] y [HofK56], cuya demostración puede reencontrarse en [Ber58], [BruR91], [Mars71].

Una matriz cuadrada de componentes $0, 1, -1$ con a lo sumo dos no nulas en cada columna es totalmente unimodular si y sólo si sus filas pueden partitionarse en dos conjuntos disjuntos F_1 y F_2 tales que :

- si dos componentes no nulas de una misma columna tienen igual signo una de ellas está en F_1 y la otra en F_2 .
- si dos componentes no nulas de una misma columna tienen distinto signo, ambas están en F_1 ; o bien, ambas están en F_2 .

Para más información [Ber70], [Cami65/68], [GhoH62b], [Hof76], [SesR61], [SwaT81].

Para el caso de configuraciones que admiten matriz de incidencia; es decir, para el de aquellas no discretas sin bucles, se deducen :

- i) La matriz incidencia de cada multidigrafo es totalmente unimodular.
- ii) La matriz incidencia de un multigrafo G es totalmente unimodular si y sólo si G es bipartido.

La validez de i) puede inferirse a partir de la caracterización precedente tomando $F_2 = \emptyset$; y la de ii) incluyendo en F_1 los vértices de una de las clases del bipartido, y en F_2 los restantes.

En ([Deo74], [GonM79], [SwaT81]) se las demuestra por inducción.

Por otro lado, se sabe que también son totalmente unimodulares las matrices "ciclo fundamental " y las "cociclo fundamental", que introduciremos en los Cap.3 y 7. ([ChiS99], [SesR61], [SwaT81])

2.3. MULTI-DI-GRAFOS ETIQUETADOS (VALUADOS)

Habitualmente, los elementos de las configuraciones se individualizan mediante letras (o números), no siendo estas designaciones significativas en el desarrollo de la teoría. Pero, en ocasiones, la incorporación de "etiquetas" (o "valores") puede ser esencial.

En particular :

Dos multidigrafos G y G' cuyas respectivas matrices de precedencia son P, P' son isomorfos si y sólo si existe una permutación cuya matriz asociada Π satisface $P' = \Pi^{-1} \bullet P \bullet \Pi$

Esto nos lleva, volviendo sobre lo dicho respecto de la dificultad inherente al problema del isomorfismo, a observar que el número de operaciones necesarias para decidir sobre la validez de $P' = \Pi^{-1} \bullet P \bullet \Pi$ hace prohibitivo este método, excepto para órdenes muy pequeños.

En efecto, supuesto que los digrafos a comparar son de orden $n = 12$ y que la determinación de cada permutación de su conjunto de vértices requiere de $1/10$ de segundo, para calcular las $12!$ permutaciones factibles sería necesario más de un año. Habría que tomar en cuenta, además, n^2 comparaciones y $2 \cdot n^2$ productos filas \ columnas.

Concluiremos esta sección con un par de observaciones que vinculan grafos y matrices.

I) | Para muchos problemas, en lugar de considerar las *matrices de precedencia* (o de *adyacencia*) suelen emplearse las **matrices de precedencia** (o de *adyacencia*) **booleanas**.

Tienen componentes $0, 1$, y a ellas, además de las operaciones de adición y multiplicación habituales en el cuerpo real \mathcal{R} también se les pueden aplicar las correspondientes operaciones en \mathcal{Z}_2 , o las booleanas (supremo, ífimo).

Estas últimas presentan notables ventajas de manejo respecto de las operaciones en \mathcal{R} pero no son aplicables para cuestiones de recuento.

II) | Se dice **matriz totalmente unimodular** a toda matriz en la que todas sus submatrices cuadradas tienen determinante $0, 1, -1$.

De la definición resulta, obviamente, que en tal caso, todas sus componentes pertenecen al conjunto $\{ 0, 1, -1 \}$.

La siguiente muestra que la recíproca es falsa. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

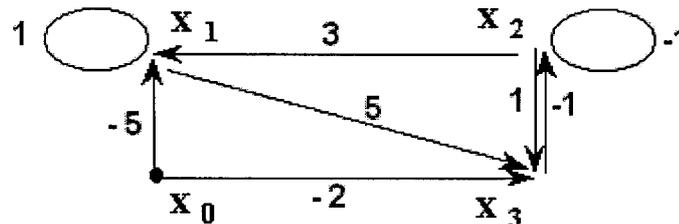
III)

Antes de ejemplificar el uso de los “digrafos valuados” para resolver “sistemas lineales” observemos que dicha técnica suele ser más complicada que la rutina algebraica habitual, pero que presenta, respecto de ésta, entre otras ventajas la de ser aplicable aún cuando los coeficientes de las ecuaciones no sean valores numéricos, y la de permitir operar sin perder de vista la interpretación física de los sucesivos resultados.

Dado el sistema lineal

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ -x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

si $x_0 = 1$ y el valor asignado a cada arco (x_i, x_j) es w_{ij} la i -ésima ecuación ($1 \leq i \leq 3$) satisface $\sum_{j=0}^3 w_{i,j} \cdot x_j = 0$ y queda representada, en el siguiente esquema por el conjunto de arcos con vértice final x_i .



Dentro de este contexto los diagramas en cuestión suelen ser designados “*flow graphs*”, o “*signal flow graphs*”.

Los distintos ordenamientos de las ecuaciones del sistema llevan a construir digrafos no siempre isomorfos entre sí. No obstante, todos ellos son equivalentes en cuanto a lo buscado.

Estos esquemas permiten, recurriendo a conceptos de la teoría de grafos y siguiendo los lineamientos de [Coa59], [Des60] y [Mas53/56], resolver “sistemas lineales” con metodologías distintas de la tradicional.

Al respecto pueden consultarse [BraL63], [BusS65], [Chen71a], [ChiS99], [Deo74], [HenW73], [Nie79], [SesR61], [SwaT81], [Walt84].

Sus respectivos significados, que dependerán del problema a resolver, permitirán tomar en cuenta información adicional y reflejar más precisamente la situación bajo estudio.

Esto llevaría a obtener resultados más ajustados a la realidad y enriquecer tanto a la teoría como a las soluciones obtenidas.

A las aplicaciones de los *digrafos etiquetados* mencionadas en el Prólogo agregaremos otras tres, relacionadas respectivamente con los "grupos finitos", los "autómatas finitos", y los "sistemas lineales".

I)

A cada "autómata finito" puede asociársele un "digrafo etiquetado",

Basta al efecto aplicar la regla

Si al "leer" el símbolo de entrada S , el autómata pasa del estado p al q y da como salida el símbolo T , el arco (p, q) se "etiquetará" S, T .

II)

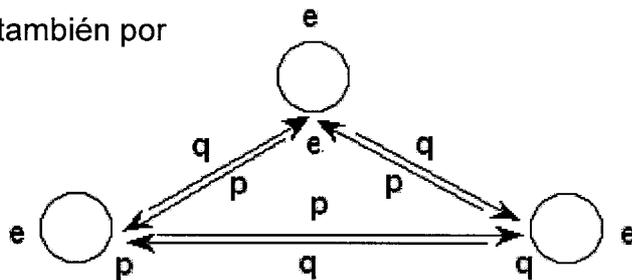
A cada grupo finito de permutaciones puede asociársele, siguiendo la idea de Cayley, un digrafo completo simétrico con bucles. Sus arcos podrían *colorearse* (o *etiquetarse*) de forma que se refleje a cual de los generadores del grupo representa.

Por caso, el grupo de las permutaciones $e = \begin{pmatrix} abc \\ abc \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} abc \\ bca \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} abc \\ cab \end{pmatrix}$

puede darse por

	e	p	q
e	e	p	q
p	p	q	e
q	q	e	p

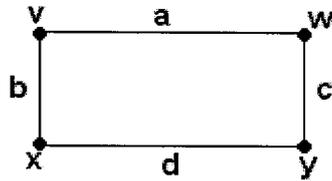
y también por



En este esquema cada arco (x, y) está "coloreado r " si y sólo si $y = x \circ r$.

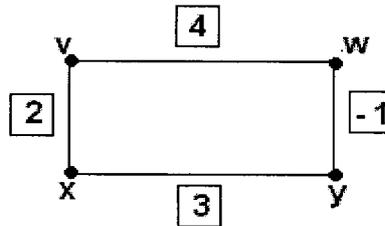
Para más información consultar la bibliografía indicada en pág.23, en relación con los grupos de automorfismos.

Así entonces, dados



u	a	b	c	d
w(u)	4	2	-1	3

pondríamos



Naturalmente, supuesto que H fuera una configuración definida a partir del multi-grafo valuado G_E diremos **valor aditivo (multiplicativo)** de H a la suma (al producto) de los valores asignados a sus elementos, tomando en cuenta las eventuales ocurrencias reiteradas.

Obviamente, el valor aditivo del subgrafo que determinan en el esquema anterior las aristas a, b, d , es 9, mientras que su valor multiplicativo es 24.

Observaciones :

\mathcal{A})

De las definiciones dadas resulta que, excepto si $V = V'$ y $U = U'$, los pares de multi-di-grafos isomorfos (V, U) , (V', U') están dados por multi-di-grafos etiquetados distintos.

Habitualmente, al contar submulti-di-grafos de cierto G es natural atender a la designación de sus elementos, y por ello considerarlos como etiquetados.

Por lo tanto, y tal como se hizo en 2.1.7, aún cuando ellos sean isomorfos habitualmente se los cuenta como diferentes.

\mathcal{B})

En ocasiones, al desarrollarse reuniones, la presencia simultánea de ciertos pares de individuos puede ser positiva para el desarrollo de la misma, mientras que la de otros pares puede ser negativa, o carecer de relevancia.

Para analizar tales casos podría ser útil recurrir al uso de grafos signados.

A ellos se recurre en [Dor70], [Fla63/65], [HarNC65] Cap.13 y [Robe76/78/79].

Además, y de acuerdo con lo indicado en [Tri83]-Vol.1, los grafos signados se muestran eficaces también en química.

Diremos **multi-di-grafo etiquetado** G_E a toda configuración que resulta de asignar a ciertos elementos del multi-di-grafo G secuencias de “etiquetas”; es decir, de elementos de un conjunto E (de letras, valores, marcas, símbolos, operadores, etc).

Para mayor precisión diremos que G_E es **signado** si $E = \{ +, - \}$, y **valuado** cuando E está integrado por valores numéricos (determinados, o no).

Volviendo sobre afirmaciones anteriores recordemos que distinguir entre configuraciones “etiquetadas” y “no etiquetadas” es fundamental en problemas de recuento, y que las “valuadas” son útiles frente a problemas cuantitativos, y en especial para los de optimización.

Para justificar que todo multigrafo puede incluirse en la clase de los *signados* (*valuados*) basta suponer que todas sus aristas tienen igual signo (valor).

Los vértices de un grafo sin bucles de orden n se pueden *etiquetar*, sin afectar su esencia, de $n! / g$ formas, siendo g la cardinalidad de su grupo de automorfismos. ([HarP73], [Pal78]).

También merece destacarse que

| Existe correspondencia biyectiva entre los multigrafos (V, U) y los grafos (V, U_E) con aristas valuadas con enteros positivos.

En efecto, todo multigrafo G puede darse por el grafo valuado G_E que resulta de reemplazar cada conjunto de h aristas paralelas de G , de la forma $[x, y]$, por una única $[x, y]$ valuada con el número h .

Recíprocamente, un grafo G_E con sus aristas u_i valuadas con un entero positivo h_i se puede identificar con el multigrafo que sólo tiene aristas donde las tiene G_E y con tantas paralelas como indica el valor h_i .

Afirmaciones similares caben para el caso dirigido.

Reservaremos la designación *multi-di-grafo etiquetado* (*signado*, *valuado*) para cuando sea esencial tomar en cuenta *la etiqueta* (o *el signo*, o *el valor*) de sus elementos.

Para evitar confusiones sería conveniente convenir que cuando los símbolos asignados a los arcos, o aristas, o vértices, deben considerarse como valores numéricos, y no como etiquetas identificatorias, se los indicará de forma especial.

Por ejemplo, ubicándolos dentro de un cuadrado.

Pero esto, en ciertas ocasiones puede reducirse al caso anterior incorporando bucles y valuándolos adecuadamente.

Habitualmente los valores en consideración son no negativos, pero nada impide que lo sean. Tal el caso en que $w(u)$ es la diferencia de nivel (o de potencial eléctrico) entre el vértice inicial y el final del arco u .

De entre los "problemas de optimización" merecen distinguirse los de "circulación" y los de "asignación", que son caso particular de los que estudia la Programación Lineal, y serán tratados en Cap. 11.

Al analizarlos se han obtenido interesantes resultados de "tipo mini-max" y en particular el Teorema Fundamental de los Flujos Canalizados que da lugar, si los arcos se han canalizado $[0, 1]$, a interesantes resultados combinatorios.

E)

Conviniendo hipótesis adecuadas, muchas de las nociones definidas para multi-di-grafos pueden extenderse a configuraciones etiquetadas, o valuadas.

Así por ejemplo

Dado un multi-di-grafo etiquetado (valuado) G_E diremos que :

- G_E es *simétrico*, si G es simétrico y las etiquetas (los valores) asignados a pares de arcos opuestos son iguales.
- $(G_E)^s$ es el *simetrizado* de G_E si cada par de arcos $(a, b), (b, a)$ de $(G_E)^s$ tiene igual etiqueta (valor) que la correspondiente arista $[a, b]$ en G_E .

F)

También las configuraciones *arco (arista) valuadas* se pueden asociar con matrices de precedencia (de adyacencia).

Por ejemplo :

Al digrafo arco valuado G_E asociaríamos la matriz $P = (p_{i,j})$ tal que :

- si en G_E existe arco (i, j) con valor $w_{i,j}$, entonces $p_{i,j} = w_{i,j}$.
- si en G_E no existe arco (i, j) $p_{i,j}$ se elige, de acuerdo con lo señalado poco más arriba, en C , según convenga al problema en estudio.

Así entonces, las afirmaciones **A**, **B** dadas en 2.2 pueden extenderse a matrices cuadradas con componentes no necesariamente enteros no negativos.



C)

Frecuentemente los símbolos $0, 1, 2, \dots$ son “*etiquetas identificatorias*”, sin relación alguna con sus significados como magnitudes numéricas.

De la siguiente convención surge otra interpretación no numérica de los símbolos $0, 1$.

- | Si en G existe la arista $[i, j]$, el par i, j , será valuado 1 .
- | Si tal arista no existe, dicho par será valuado 0 .

Así entonces se tiene que valuando adecuadamente con $0, 1$, las aristas de K_n :

- | Todo grafo sin bucles de orden n puede reencontrarse como subgrafo cubriente del completo de orden n . (el que conforman las aristas valuadas 1).

Extendiendo lo antedicho también podrá ser útil representar :

la “no adyacencia de los vértices p, q ” mediante “la existencia de una arista auxiliar $[p, q]$ valuada de acuerdo al problema que se estudia”.

En particular, y para asegurarse que éstas *aristas auxiliares* no quedarán incluidas en las soluciones que se hallarán será conveniente, en algunos casos valuarlas cero, y en otras suponerlas con un valor suficientemente grande (pequeño) que simbolizaremos $+\infty$ ($-\infty$).

La utilidad de recurrir a estas “valuaciones ad-hoc” cuando el arco (a, b) (la arista $[a, b]$) no exista será ejemplificada en los Cap. 3 y 6 al considerar, respectivamente, la *evaluación topológica de los determinantes*, y ciertos *problemas de transitabilidad valuada*.

D)

Muchos *problemas de optimización* pueden estudiarse en multi-di-grafos valuados; es decir en configuraciones a cuyos elementos se les han asignado valores indicativos de los que puede tomar cierto parámetro (capacidad, peso, longitud, costo, índice de confiabilidad, etc.) propio del problema en estudio.

En particular, si al arco $u = (a, b)$ se le asignó un valor $w(u) = 5$ esto podría significar que el costo (o el tiempo) para ir desde a hasta b es de 5 unidades ; o bien, que dicho arco puede ser recorrido, desde a hacia b , y en cada unidad de tiempo por a lo sumo 5 vehículos.

También cabe valuar vértices. Por ejemplo, para indicar máxima capacidad de producción, o mínima demanda a satisfacer, por unidad de tiempo.

EJERCICIOS

2-1)

De una representación geométrica del digrafo $(V, U) = (V, \Gamma)$ definido por :

v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
$\Gamma(v)$	a,b,c	c,d	b,d,e	k	f	e	h	-	-	a,f	h

- ¿ Tiene vértices entrada ?, salida ?, aislados ?, arcos opuestos ?, paralelos ?
- ¿ Su sostén es grafo, o multigrafo propiamente dicho ?

2-2)

a) ¿ Cuántas aulas serían necesarias, al menos, para poder cumplir en un mismo día el siguiente horario de clases ? ¿ De cuántas formas podría lograrse ?

Materia	A	B	C	D	E	F	G
Horario	8-9	9-10	10-11	11-12	11-12	8-10	10-11

b) Idem a) pero si en las aulas pueden dictarse a lo sumo tres materias por día.

2-3)

Juan y Pablo compiten en un juego que no admite empates y convienen en repetir las partidas hasta que alguno haya ganado dos veces consecutivas o tres alternadas. ¿ De cuántas formas podrá completarse la competencia ?

2-4)

Horacio está organizando una cena con sus amigos Diego, Fernando, Gaspar, Julio, Pablo, y Nicolás. Se sabe que Horacio está en buenas relaciones con los seis, pero que Pablo y Fernando están enemistados, que Gaspar, Pablo, y Diego suelen discutir entre ellos, que Julio le debe dinero a Nicolás, que Gaspar le quitó la novia a Fernando que es socialista, en tanto que Julio es conservador, y que Nicolás y Gaspar se han peleado.

¿ Podrá Horacio sentar a sus amigos alrededor de una mesa circular de forma que cada comensal tenga a ambos lados personas con las cuales está en buenas relaciones ? ¿ De cuántas maneras podría lograrlo ?

2-5)

Vea que en toda fiesta en que cada persona tiene exactamente $k \geq 1$ amigos del otro sexo hay tantos hombres como mujeres.

2-6)

Supongamos que entre los equipos A, B, C, D, E, se está realizando un torneo a una sola ronda, todos contra todos, y que en el mismo se asignan dos puntos por triunfo y uno por empate. Se preguntan :

- a) ¿ Puede decirse que A será el ganador del torneo, aún cuando éste no haya finalizado, sabiendo que : A venció a B, C, E ; que B venció a C y empató con E ; que C venció a D, E ; y que D empató con E ?
- b) ¿Cuál es el puntaje mínimo que debe alcanzar uno de los equipos para poder estar entre los ganadores del torneo ?
- c) Idem b) pero para ser, con seguridad, su único ganador ?
- d) ¿ Podrá haber ganador único con cualesquiera de los valores comprendidos entre las cotas dadas en b) y c) ?

Idem b), c), d), pero para el caso de k equipos

2-7)

Sean los elementos de V los subconjuntos de un conjunto de dos elementos. De una representación geométrica de los digrafos $G = (V, U)$ tales que :

- a) $(a, b) \in U$ si a es subconjunto de b .
- b) $(a, b) \in U$ si a es subconjunto propio de b .
- c) $(a, b) \in U$ si a es subconjunto propio maximal de b .

2-8)

Supuesto que los elementos de V son los enteros positivos divisores de 6 represente los digrafos (V, U) tales que :

- a) $(a, b) \in U$ si b es múltiplo propio de a .
- b) $(a, b) \in U$ si existe un primo p tal que $b = a.p$.

2-9)

Represente el digrafo $G = (V, U)$ cuyos vértices son los pares $x = (x_1, x_2)$ con $x_i \in \{0, 1\}$ y tales que $(x, y) \in U$ si y sólo si los pares x, y , difieren en una única componente, y en ella $x_i < y_i$.

2-10)

Represente :

- a) los 8 grafos (no vacíos) de orden $n \leq 2$, y los 20 de orden 3.
- b) los 11 grafos (digrafos simétricos) sin bucles de orden 4.
- c) los 6 multigrafos que pueden construirse con 3 vértices y 2 aristas.
- d) los 10 multidigrafos de orden 3 con 2 arcos.
- e) los 7 digrafos de orden tres cuya relación de precedencia es antisimétrica.

2-11)

Reitere | 2-7 c) para el caso de un conjunto de tres elementos.
| 2-8 b) para los naturales divisores de 30.
| 2-9) para el caso de ternas (x_1, x_2, x_3) con $x_i \in \{0, 1\}$

2-12)

Constate que existen

- 8 grafos regulares sin bucles de orden 6.
- 34 grafos sin bucles de orden 5.
- 7 torneos de orden n , con $2 \leq n \leq 4$, y 12 de orden 5.

2-13)

Un multigrafo $G = (V, U)$ se dice **k-partido** si existe una partición de V en k clases V_1, \dots, V_k , y todas las aristas tienen extremos en $V_i; V_j$, $i \neq j$.

Si además G es grafo y cada vértice de V_i es adyacente de todos los de V_j ; cualesquiera sean $i \neq j$, G se dice **k-partido completo**.

En este caso, si $|V_i| = n_i$ el mismo será notado K_{n_1, n_2, \dots, n_k} .

Muestre que :

- todo grafo sin bucles de orden n puede verse como un n -partido.
- el k -partido completo con clases de dos elementos es complementario del $k.K_2$ (se lo designa “ k -coctail party graph”).

2-14)

Sea V un conjunto de equipos que intervienen en un torneo a una sola ronda, sin empates, todos contra todos, y t uno de los equipos que finalizó el torneo con mayor número de triunfos. Vea que :

- cualquiera sea $A \subset V$ tal que $t \in A$ se puede afirmar que al menos uno de los equipos de A triunfó sobre alguno de los incluidos en $V - A$.
- todo equipo que venció a t (si los hay) fue a su vez vencido por al menos uno de los derrotados por t .

2-15)

Demuestre que :

- todo grafo sin bucles de orden n tiene a lo sumo $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ aristas.
- cualquier grafo bipartido de orden n tiene a lo sumo $\lfloor n^2/4 \rfloor$ aristas, y que esta cota no es mejorable. ($\lfloor x \rfloor$ denota parte entera de x)
- existen grafos k -regulares de orden n si y sólo si $k \cdot n$ es par.
- toda matriz simétrica de $0, 1$, con 0 en su diagonal y número impar de 1 en cada línea (fila o columna), es de orden par.

2-16)

Vea que todo grafo sin bucles de orden $n \geq 2$ tiene al menos dos vértices de igual grado, y que esto es falso si se admiten bucles, o aristas paralelas.

2-17)

Sea G un grafo sin bucles de orden n , con exactamente $(n - 3)$ vértices de grado impar. ¿ Cuántos vértices de grado impar tiene su complemento ?

2-18)

Suponga un exágono, incluidas sus diagonales, inscripto en una circunferencia. ¿ Será posible ubicar los números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ en sus vértices y en su centro, de forma que valuando sus aristas con la suma de los números dados a sus extremos no haya pares de aristas con igual valor ?

2-19)

Muestre que

- los subgrafos inducidos por vértices de un completo son completos.
- el submultigrafo de (V, U) inducido por $V' \subseteq V$ (por $U' \subseteq U$) es maximal (minimal) en el conjunto de los que sólo contienen los vértices de V' (las aristas de U')
- si el grado máximo del multigrafo G es el número par \underline{p} , existe al menos un multigrafo \underline{p} -regular, del cual G es submultigrafo cubriente
¿ Puede afirmarse lo mismo si \underline{p} es impar?

2-20)

Demuestre que

- a) la relación de isomorfismo de multigrafos es de equivalencia.
- b) todo grafo sin bucles de orden n es isomorfo a un subgrafo de K_n
- c) la composición de los automorfismos de un grafo define un grupo.
- d) dos grafos son isomorfos si y sólo si lo son sus complementarios.

2-21)

Demuestre que los multigrafos G_1 y G_2 son isomorfos si y sólo si sus respectivas matrices de adyacencia A_1 y A_2 son tales que $A_2 = \Pi \circ A_1 \circ \Pi^{-1}$, para cierta matriz permutación Π .

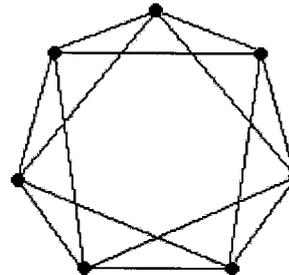
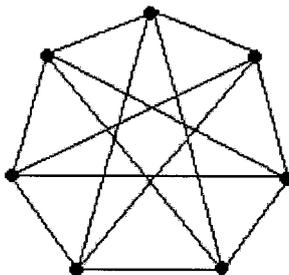
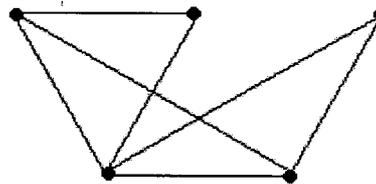
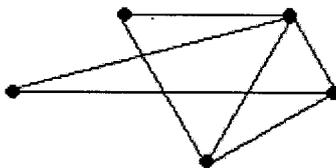
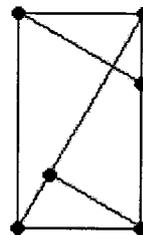
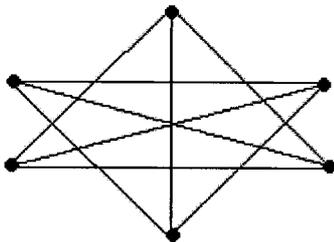
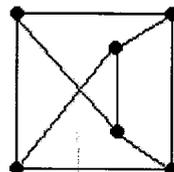
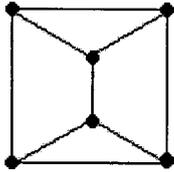
2-22)

Demuestre que los digrafos del Ejerc.2-11) son isomorfos.

¿ Existen además otros pares de isomorfos entre los grafos de los Ejerc. 2-7), 2-8) y 2-9) ?

2-23)

Determine cuales de los siguientes esquemas definen pares de grafos isomorfos, y en tal caso evalúe el número de isomorfismos posibles.



2-24)

Demuestre :

- a) que si cada arista de K_6 se pinta, arbitrariamente, de rojo o de azul, queda determinado un triángulo monocromático o equivalentemente,
- b) que todo grafo G de orden seis es tal que G , o su complementario, contiene a K_3 como subgrafo.

Constataste que si $n < 6$ no es factible un resultado similar al anterior.

2-25)

Represente un hexágono regular con sus diagonales. ¿Cuál es el menor número de aristas que es necesario quitarle para eliminar todos los triángulos ?

2-26)

Demuestre que si se admiten bucles, cualquier sucesión de enteros no negativos con número par de impares puede pensarse como sucesión de grados de algún multigrafo.

Vea que si no se admiten bucles lo antedicho es falso.

2-27)

Que puede decir respecto del orden de un grafo tal que :

- tiene 18 aristas, tres vértices de grado 4 y los restantes son de grado 3.
- carece de bucles y tiene al menos (a lo sumo) 55 aristas.
- tiene 55 aristas, y su complemento tiene 81 aristas.

2-28)

Vea que en la clase de los grafos sin bucles

- los grafos de pág.50 son los únicos autocomplementarios de orden $n \leq 5$.
- el único autocomplementario regular de grado dos es C_5 .
- para todo n de la forma $4.k$, o $4.k + 1$, existen grafos autocomplementarios de orden n .

2-29)

Supongamos que Juan, Pablo y Andrés son amigos, que uno de ellos es porteño, otro rosarino, y el restante cordobés.

Dadas las siguientes restricciones diga para cada uno de ellos su procedencia, el instrumento que toca y donde lo ensaya.

- el cordobés es violinista
- la flauta se toca en la calle
- ni Andrés, ni el rosarino, tocan flauta
- ni Juan, ni el pianista, utilizan el parque.

2-30)

En un torneo de ajedrez, donde se da un punto por victoria y medio punto por tablas, cada participante obtuvo a lo sumo k puntos.

Vea que :

- hay un participante que jugó a lo sumo $2.k$ partidas.
- para alojar a los participantes de modo que no ocupen una misma habitación pares que hayan competido entre sí son suficientes $2.k + 1$ habitaciones.

2-31)

Suponga una reunión de tres matrimonios en la que cada uno de los asistentes saluda a algunos de los otros, eventualmente a ninguno, pero no a su cónyuge.

a) ¿ puede afirmarse que al menos dos han saludado a una misma cantidad de personas ?

Supuesto además que Juan, uno de los integrantes de la reunión, sabe que todos los restantes han saludado a distinto número de personas

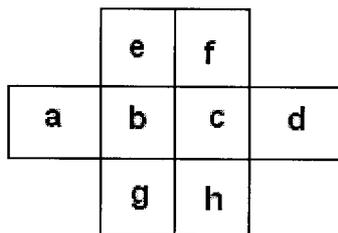
b) ¿ puede afirmarse que entre los presentes hay uno que no ha saludado, y que su pareja saludó a cuatro ?

c) ¿ puede determinar cuántos saludos efectuó Juan, y cuántos su pareja ?

2-32)

Construya un grafo auxiliar que le facilite la resolución del siguiente problema ;

Ubique en cada uno de los cuadros a,b,c,d,e,f,g,h, del siguiente esquema un entero del 1 al 8 de forma tal que no haya naturales consecutivos en cuadros con lados, o con vértices comunes. ¿ Cuántas soluciones hay?



2-33)

¿ Podría caracterizar la matriz adyacencia del completo K_n , la de los bipartidos, y la del bipartido completo $K_{p,q}$?

2-34)

Verifique las afirmaciones A, B, C, D dadas en 2.2.

2-35)

Constataste que si G es un multigrafo no discreto sin bucles ; $B(G)$ su matriz de incidencia ; $A(G)$ su matriz adyacencia y $D(G)$ su matriz "grado" (es decir, la matriz con $d_{i,j} = 0 \parallel d_{i,j} = \text{número de aristas incidentes en } i, i \neq j$), entonces

$$B(G) \circ (B(G))^t = A(G) + D(G).$$

Vea que en cambio, para el caso dirigido, y siendo \underline{G} el sostén de G se tiene

$$B(\underline{G}) \circ (B(\underline{G}))^t = D(\underline{G}) - A(\underline{G}).$$

2-36)

Véase que si n es par, el siguiente método propuesto en [Ore63a] lleva a construir una matriz $F = (f_{i,j})$ que permite determinar 1-factores de K_n .

Reglas para construir F .

- 1) Poner como primera fila, y como primera columna, la sucesión $1, 2, 3, \dots, n$
- 2) Hacer que, "momentáneamente", la segunda columna contenga, a partir de la segunda fila y respetando el orden natural, los pares $2, 4, 6, \dots, n$ en las primeras $i \leq (n+2)/2$ filas, y los impares $3, 5, \dots, n-1$ en las otras.
- 3) Completar cada i -ésima fila, $i \geq 2$, con los valores $2, 3, \dots, n$ ordenados en forma circular decreciente a partir del valor asignado a $f_{i,2}$.
- 4) Substituir por 1 las "componentes diagonales momentáneas" $f_{i,i}$.

Los 1-factores de una de las 1-factorizaciones buscadas quedan determinados por los pares, de igual columna, $f_{1,j}; f_{i,j}$, con $i \geq 2$.

Así por ejemplo, para $n = 6$ se tendría :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Queda así determinada la 1-factorización $[1,2], [3,6], [4,5] \setminus [1,3], [2,4], [5,6] \setminus [1,4], [2,6], [3,5] \setminus [1,5], [2,3], [4,6] \setminus [1,6], [2,5], [3,4]$.

Puede verse que sustituyendo $1, 2, 3, 4, 5, 6$, por $1, 2, 4, 3, 0, \alpha$, se reencuentra la primera de las 1-factorizaciones de K_6 indicadas en pág.31.

2-37)

Determine los quince 1-factores del completo de vértices $1, 2, 3, 4, 5, 6$, y con ellos las seis 1-factorizaciones que admite dicho completo.

Vea que cada dos de ellas coinciden en un único 1-factor, y que cada arista integra tres de las 1-factorizaciones halladas.

2-38)

- Determine :
- a) cuántos subgrafos no vacíos, no isomorfos, tiene K_3 .
 - b) idem a) pero cubrientes.
 - c) idem a) pero etiquetados.
 - d) idem b) pero etiquetados.

2-39)

Determine el número de grafos etiquetados que corresponden a cada uno de los once grafos sin bucles de orden cuatro ; y encuentre así que el número total de los etiquetados sin bucles de orden cuatro es $2^6 = 64$

2- 40)

Sea $u = [x, y]$ una arista del grafo sin bucles G ; y H el grafo adjunto de G .

Vea que $\left| \begin{array}{l} gr_H(u) = gr_G(x) + gr_G(y) - 2 \\ \text{el vértice } u, \text{ en } H, \text{ pertenece a dos clanes cuyos respectivos órdenes son } gr_G(x) , gr_G(y). \end{array} \right.$

2- 41)

Dado $G = (V, \Gamma)$. constate la equivalencia de las siguientes afirmaciones

- 1) $\Gamma = \Gamma \circ \Gamma^{-1} \circ \Gamma$ (es decir Γ es relación de adjunción)
- 2) Si Γ contiene tres elementos del conjunto $\{x, y\} \times \{z, w\}$ – no necesariamente $\{x, y\} \cap \{z, w\} = \emptyset$ – también contiene al cuarto par ordenado.
- 3) Si $\Gamma(x) \cap \Gamma(y) \neq \emptyset$ entonces $\Gamma(x) = \Gamma(y)$.
- 4) Si $y \in \Gamma^{-1} \circ \Gamma(x)$ entonces $\Gamma(x) = \Gamma(y)$.

2-42)

Constatae :

- a) los resultados indicados en pág.34 respecto del número de grafos (digrafos) etiquetados de orden n .
- b) que todo multigrafo con $m \geq 0$ aristas admite 2^m submultigrafos etiquetados cubrientes, uno de ellos discreto.
- c) que todo multigrafo de orden $n \geq 1$ admite 2^n submultigrafos etiquetados inducidos por vértices, uno de ellos vacío.

d) que hay $\binom{\binom{n}{2}}{m}$ grafos etiquetados sin bucles de orden n con m aristas

e) que K_n tiene $\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \cdot 2^{\binom{j}{2}}$ subgrafos etiquetados no vacíos.

2- 43)

Vea que el número de grafos sin bucles de orden n

– con k vértices prefijados y todos ellos aislados, es $2^{\binom{n-k}{2}}$

– carentes de vértices aislados es $\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot 2^{\binom{n-k}{2}}$

CAPITULO 3

TRANSITABILIDAD

En este capítulo consideraremos cuestiones que están ligadas con la idea de “recorrer” (o “transitar”) un multi-di-grafo, y permiten encarar el análisis de situaciones muy diversas. Varias de ellas ya fueron tratadas en [Chi95/96].

Habitualmente se plantean en configuraciones valuadas y sus soluciones están ligadas con la determinación de caminos (cadenas) óptimas respecto de algún criterio. Como todo multi-di-grafo puede incluirse en la clase de los valuados las cuestiones a ver en Cap.6 extienden a las que analizaremos seguidamente.

Antes de abordar el estudio en cuestión creemos oportuno recordar lo dicho respecto de la diversidad con que suelen designarse los distintos conceptos propios de la Teoría de Grafos, y destacar que en [Roy69]-Cap.3 se observa que las nociones que en lengua francesa suelen denominarse *circuit* \\\ *cycle* se corresponden, respectivamente, con las que en lengua inglesa es habitual designar *cycle* \\\ *circuit*.

3.1. CAMINOS Y CADENAS

Dado un multidigrafo $G = (V, U)$ diremos **camino** de longitud L , $L \geq 1$, (o más brevemente **L-camino**) a toda sucesión de vértices y de arcos, del tipo :

$x_1, u_1, x_2, u_2, x_3, \dots, x_L, u_L, x_{L+1}$, con $u_i = (x_i, x_{i+1})$; $1 \leq i \leq L$.

No necesariamente $u_i \neq u_j$, ni $x_i \neq x_{i+1}$.

Admitiremos que cada vértice define un **camino nulo** (de longitud cero).

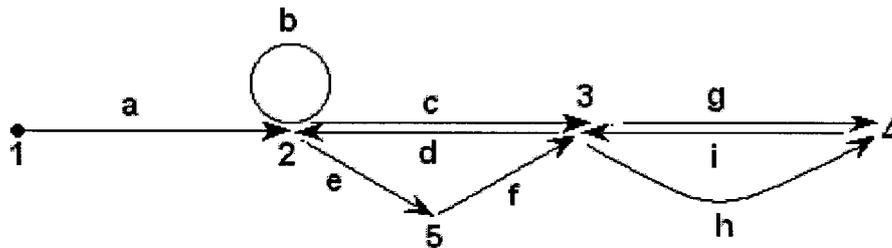
Un camino no nulo $C : x_1, u_1, x_2, u_2, x_3, \dots, x_L, u_L, x_{L+1}$ se dirá **simple** si $u_i \neq u_j$ supuesto $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, \dots, L\}$; y **elemental** si $x_i \neq x_j$, cualesquiera sean $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, \dots, L+1\}$ excepto el caso en que x_1 y x_{L+1} correspondieran a un mismo vértice.

De otra forma, un camino no nulo es *simple* si cada uno de los arcos que lo componen ocurre una única vez en la sucesión que lo define, y *elemental* si sus vértices son distintos dos a dos excepto, quizás, el inicial de su primer arco y el final del último.

Si $x_1 = a$; $x_{L+1} = b$ se dirá que el camino (no nulo) $C : x_1, u_1, x_2, u_2, \dots, x_L, u_L, x_{L+1}$, $L \geq 1$, lleva desde a hasta b . Lo indicaremos con $C : a \rightarrow b$.

Un tal camino $C : a \rightarrow b$ se dirá **abierto** si $a \neq b$, y **cerrado** (en a) si $a = b$.

Ejemplo



$1, a, 2, b, 2, c, 3, d, 2, c, 3, g, 4$	camino	no simple, abierto, de longitud $L = 6$.
$1, a, 2, c, 3, d, 2, e, 5$	"	simple, no elemental, abierto.
$1, a, 2, c, 3, g, 4$	"	elemental, abierto.
$3, d, 2, e, 5, f, 3$	"	elemental, cerrado (en 3).
$2, e, 5, f, 3, d, 2$	"	elemental, cerrado (en 2).

Convendremos que todo camino nulo es elemental y simple; pero que a ellos no se apliquen los conceptos : abierto, cerrado.

Véase que

- todo camino elemental es simple, pero que la recíproca es falsa.
- un camino es elemental si y sólo si cada uno de sus vértices es extremo inicial (final) de a lo sumo uno de sus arcos.
- pueden darse caminos elementales con iguales extremos pero de longitudes distintas,

Si $C : a \rightarrow b$, eventualmente $a = b$, extendiendo la terminología introducida en pág.12 diremos que " a precede b ", o que " b es sucesor de a "; o que " a es ascendiente de b "; o que " b es accesible desde a ".

Admitiendo que todo vértice es accesible desde si mismo, aún cuando no sea soporte de bucles, resulta claro que "*los vértices accesibles desde \underline{a}* " son aquellos que quedan marcados por aplicación del siguiente proceso :

| Marcar \underline{a} y reiterar tanto como posible la regla : si p está marcado, existe arco (p, q) y q no está marcado, entonces marcar q .

Se deja al lector mostrar que :

- Todo multidgrafo finito G que carece de caminos cerrados tiene vértices de entrada y vértices de salida. La recíproca es falsa.

- $G = (V, U)$ carece de caminos cerrados si y sólo si :
 - i) para todo $V' \subseteq V$ el submultidigrafo inducido por V' tiene entradas y salidas.
 - ii) todos sus caminos son elementales.
- Si todo camino cerrado tiene longitud $L \geq h$, todo L -camino con $L \leq h$ es elemental.
- Un camino $x_1, u_1, x_2, \dots, x_L, u_L, x_{L+1}$, $L \geq 2$, es elemental, eventualmente cerrado, si y sólo si sus subcaminos $x_1, u_1, x_2, \dots, u_{L-1}, x_L \parallel x_2, u_2, x_3, \dots, x_L, u_L, x_{L+1} \parallel$ son elementales y abiertos. Ellos carecen de bucles.

De las respectivas definiciones resulta que determinar la clausura reflexiva, o la clausura simétrica, de cierta relación Γ es inmediata; pero no vale igual afirmación con referencia a su clausura transitiva, ni a su clausura reflexivo-transitiva, clausuras éstas que están ligadas a los caminos del digrafo (V, Γ) .

Más precisamente, y volviendo sobre algo puntualizado en pág.38 :

Dado un digrafo $G = (V, \Gamma)$ su *clausura reflexiva* se obtiene agregándole un bucle en cada vértice que no sea ya soporte de alguno ; su *clausura simétrica* es $G^{\text{sim}} = (V, \Gamma \cup \Gamma^{-1})$; su *clausura transitiva* $G^* = (V, \Gamma^*)$ contiene un arco (p, q) , quizás $p = q$, si y sólo si en G existe al menos un camino no nulo $p \rightarrow q$; y su *clausura reflexivo-transitiva* es $\vec{G} = (V, \vec{\Gamma})$ con $\vec{\Gamma} = \Gamma^* \cup \mathfrak{S} = (\Gamma \cup \mathfrak{S})^*$.

Para hallar $\vec{\Gamma}$ puede calcularse Γ^* y luego, si cabe, incorporar bucles, o bien determinar directamente la clausura transitiva de $(\Gamma \cup \mathfrak{S})$

De estas dos formas de hallar $\vec{\Gamma}$ la primera parece ser más conveniente, pues si bien determinarla a partir de $\Gamma \cup \mathfrak{S}$ puede presentar ventajas de cálculo ya que lleva a considerar matrices con diagonal unidad, esto implica suponer que todo vértice es soporte de bucle. Se justifica así lo adelantado en pág. 7

Un vértice r de un multidigrafo G se dirá **raíz (antirraíz)** de G si y sólo si cualquiera sea en G el vértice x , $x \neq r$, existen caminos $r \rightarrow x$ ($x \rightarrow r$).

- Las raíces (antirraíces) no siempre existen, ni son únicas.
- Todo vértice raíz que no es entrada pertenece a un camino cerrado.
- Si G carece de caminos cerrados y tiene vértice raíz, ésta es única.
- En cada torneo los vértices de mayor grado positivo son raíces.(Ejer.2.14)

Se deja como ejercicio constatar que un multidigrafo admite al menos un vértice raíz r si y sólo si cualesquiera sean los vértices a, b , existe al menos un vértice c , no necesariamente $a \neq c \neq b$; $r \neq c$, desde el cual ambos a, b , son accesibles. Estos multidigrafos suelen ser designados “*casi unilateralmente conexos hacia atrás*”.

En la definición de *camino* se hace uso explícito de la orientación de sus arcos, los cuales sólo pueden ser “recorridos” respetándola.

Antes de introducir, para el caso no dirigido, una noción similar a la de *camino* recordemos lo dicho en 2.1.1 sobre de la utilidad de considerar las nociones no dirigidas también con referencia a multidigrafos, y notemos que a diferencia de los arcos, las aristas distintas de bucles pueden ser “recorridas” en dos sentidos opuestos.

Dado un multigrafo (multidigrafo) G diremos **cadena** de longitud L , $L \geq 1$, (o **L-cadena**) a toda sucesión $C = x_1, u_1, x_2, u_2, \dots, x_L, u_L, x_{L+1}$, de vértices y aristas (de vértices y arcos) no necesariamente $u_i \neq u_j$, y tal que u_i tiene por extremos los vértices x_i, x_{i+1} , eventualmente $x_i = x_{i+1}$. Cada vértice será admitido como **cadena nula** (o de longitud cero).

Si para el caso en que u_i y u_j representan a una misma arista se exige además que también correspondan a un mismo vértice ambos x_i, x_j (x_{i+1}, x_{j+1}) diremos que C es una **cadena orientable**.

Los conceptos **cadena simple** y **cadena elemental**, se supondrán definidas en forma similar a las análogas del caso dirigido.

Una cadena no nula de extremos $a = x_1, b = x_2$, se dice **abierta** si $a \neq b$, y caso contrario **cerrada** (en a).

Convendremos que toda cadena nula es elemental y simple; pero que a ellas no se apliquen los conceptos : abierta, cerrada.

Véase que en el multigrafo sostén del digrafo anterior :

$1, a, 2, c, 3, c, 2, e, 5, f, 3$	es cadena no orientable, abierta, de longitud 5.
$1, a, 2, d, 3, c, 2, e, 5, f, 3$	" orientable, simple, no elemental, abierta.
$2, c, 3, d, 2, c, 3,$	" orientable, no simple, abierta.
$5, f, 3, c, 2, e, 5$	" simple, elemental, cerrada (en 5).
$2, c, 3, c, 2,$	" elemental, no orientable, cerrada (en 2).

Observaciones

1)

Si G carece de arcos paralelos (aristas paralelas) y sólo entonces, cada camino (cadena) puede determinarse también por la sucesión de vértices en los que incide. En particular, en el ejemplo anterior a los caminos a,c,g \ a,c,h corresponde la misma sucesión de vértices $1,2,3,4$.

2)

Cada arista $u = [a, b]$, $a \neq b$, da lugar a las dos cadenas elementales abiertas a,u,b \ b,u,a ; y a las dos elementales cerradas no orientables, de longitud dos a,u,b,u,a \ b,u,a,u,b . Sólo son distinguibles si explicitamos sus vértices.

3)

Si u, v , son aristas paralelas de extremos a, b ; $a \neq b$, se pueden construir las cadenas elementales cerradas. a,u,b,v,a \ a,v,b,u,a \ b,u,a,v,b \ b,v,a,u,b \ que sólo quedan bien distinguidas si se puntualizan sus vértices.

No obstante, habitualmente, al explicitar caminos (cadenas) se omitirá indicar sus vértices. Tampoco se indicará su longitud.

Nuestros conceptos "cadena" y "cadena orientable" se corresponden, respectivamente, con los de "pseudochaîne" y "chaîne" de [Roy69], pero no suelen ser distinguidas por otros autores.

Por otra parte, destaquemos que en [Tor76] nuestras "cadenas simples" son designadas "cadenas" si son abiertas, pero "ciclos" si son cerradas; y que además nuestro calificativo de "elemental" se substituye por el de "simple".

Algo similar ocurre para el caso dirigido, y también con ciertos autores de lengua inglesa.

Dada la cadena $C : a = x_1, u_1, \dots, x_L, u_L, x_{L+1} = b$, y haciendo referencia implícita a la sucesión que la define diremos : C está recorrida desde a hacia b

Invirtiendo el sentido de dicha sucesión se determina la **opuesta** de C .

Nótese que C coincide con su opuesta sólo si es cerrada, y que como los pares de cadenas opuestas contienen los mismos elementos ambos determinan un mismo subgrafo.

Si G es un multidigrafo, y $C = x_1, u_1, x_2, \dots, x_L, u_L, x_{L+1}$ es una de sus *cadenas orientables*, sus aristas distintas de bucle pueden partirse en dos clases, a saber, la integrada por los arcos de la forma (x_i, x_{i+1}) que diremos **arcos adelante** y la que contiene a los de la forma (x_{i+1}, x_i) , que diremos **arcos atrás**.

Cada bucle de C podrá incluirse en una cualesquiera de ellas.

La clase de los arcos adelante (atrás) será notada C^+ (C^-)

Cuando sea necesario especificar esta clasificación indicaremos : a los "arcos adelante" con u y a los "arcos atrás" con \bar{u} .

Obviamente, la precedente clasificación carece de sentido para cadenas definidas sobre multigrafos; y si alguna de dichas clases es vacía, la cadena en cuestión es un camino.

Las nociones camino y cadena permiten dar de los conceptos "digrafo (grafo) h -ésima potencia" \(\ "grafo de h -ésima subdivisión" introducidos en 2.1.10 otra definición. Ver Ejer.3-22.

Las nociones *sostén* y *simetrizado* permiten vincular de forma natural caminos y cadenas, conservando longitudes y vértices extremos.

Así por caso :

a) de la correspondencia biyetiva entre arcos de G y aristas de \underline{G} resulta que todo camino de G determina en \underline{G} una cadena orientable, y recíprocamente. Si además el camino es simple (elemental) también lo es su cadena asociada.

Un par de arcos con igual vértice inicial muestra que no siempre una cadena de \underline{G} corresponde a un camino de G .

b) de la correspondencia biyectiva entre cada arista de G distinta de bucle, y el correspondiente par de arcos opuestos en G^s se tiene que a cada cadena de G puede asociársele en G^s un camino, con pares de arcos opuestos si y sólo si la cadena es no orientable.

Si la cadena es simple (elemental) también lo es el camino asociado.

Obviamente, si G contiene caminos cerrados con reiteraciones de ellos es posible determinar caminos de longitud arbitrariamente grande.

En tales casos para indicar que la longitud de sus caminos no está acotada superiormente diremos que G admite caminos de *longitud infinita*.

Al construir dichos caminos empleamos implícitamente la siguiente operación, que admite una similar para el caso de cadenas.

Dados los caminos $C_1 : x_1, u_1, x_2, \dots, x_h, u_h, x_{h+1}$ (eventualmente $x_1 = x_{h+1}$) y $C_2 : x'_1, v_1, x'_2, \dots, x'_k, v_k, x'_{k+1}$ (se admite $x'_1 = x'_{k+1}$) con $x_{h+1} = x'_1$ el camino $C_1 \circ C_2 : x_1, u_1, x_2, \dots, x_h, u_h, x'_1, v_1, x'_2, \dots, x'_k, v_k, x'_{k+1}$ se dirá obtenido por **concatenación de C_1 con C_2** .

Proposición 3.1.1.a)

i) Todo camino no nulo $C : a \rightarrow b$ (eventualmente $a = b$) contiene subcaminos elementales, sin arcos comunes entre sí, tales que por concatenación de ellos es posible construir un camino elemental $C^* : a \rightarrow b$.

ii) Toda cadena no nula de extremos a, b (eventualmente $a = b$) contiene subcadenas elementales, arista disjuntas dos a dos tales que, concatenándolas, dan lugar a una cadena elemental de extremos a, b .

Demostración

Consideraremos la afirmación i). Para la restante cabe un razonamiento similar.

Si C es elemental, la validez de lo afirmado es inmediata.

Si $C : a = x_1, u_1, x_2, \dots, u_L, x_{L+1} = b$ es no elemental, en la sucesión que lo define existen al menos dos ocurrencias de un mismo vértice.

Supongamos que x_i es la primera de las que tienen característica, y que x_h es la última de las ocurrencias de dicho vértice ($1 \leq i < h \leq L+1$)

En tal caso $x_i, u_i, \dots, u_{h-1}, x_h$ es un camino no nulo, cerrado en $x_i = x_h$.

Eliminándolo y modificando un par de secuencias de arcos se obtendría el

$C' : u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_h, \dots, u_L$ que también lleva desde a hasta b

Si $x_i = b$ su subcamino inicial u_1, \dots, u_{i-1} , satisface los requerimientos de la tesis a demostrar.

Si $x_i = a$ pasaríamos a considerar su subcamino final $C'' : u_h, u_{h+1}, \dots, u_L$.

Si C' , ó C'' , es elemental la proposición esta demostrada.

Caso contrario bastará reiterar el razonamiento anterior al camino que corresponda, y esto tanto como sea necesario hasta determinar un camino C^* obtenido por concatenación de subcaminos de C , elementales, y arco disjuntos dos a dos.

En nuestro ejemplo, y operando de acuerdo con el método indicado, del camino a, c, d, e, f se obtiene el elemental a, e, f . Nótese que otro, también elemental con arcos del mismo camino es el a, c . Los tres llevan desde 1 hasta 3.

Del razonamiento seguido al demostrar 3.1.1.a) es obvio que todos los arcos de C^* pertenecen a C . Por ello, y priorizando el concepto de conjunto sobre el de sucesión es habitual reformular la proposición anterior en la forma :

Proposición 3.1.1.b)

- i) Todo camino $C : a \rightarrow b$ (eventualmente $a = b$) contiene al menos un camino elemental $C^* : a \rightarrow b$.
- ii) Toda cadena de extremos a, b , (eventualmente $a = b$) contiene al menos una cadena elemental de extremos a, b .

Lo antedicho lleva a justificar la

Proposición 3.1.2

- a) Todo camino $C : a \rightarrow b$, no necesariamente $a \neq b$, puede descomponerse en un camino elemental $C' : a \rightarrow b$, y en un conjunto de caminos cerrados.
- b) Si C es simple esos caminos cerrados son arco disjuntos con C' , y entre sí.

Por aplicación reiterada del resultado anterior se deduce que

Todo camino cerrado simple puede obtenerse concatenando caminos cerrados elementales, arco disjuntos dos a dos.

Afirmaciones similares caben para el caso no dirigido.

La descomposición implícita en la proposición anterior no está siempre unívocamente determinada.

Así por caso, el camino a,c,d,e,f,g de nuestro ejemplo puede suponerse obtenido por concatenación del camino abierto a,c con el cerrado d,e,f y el abierto g ; o bien, a partir del abierto a , del cerrado c,d , y del abierto e,f,g .

Aún cuando el concepto camino (cadena) lleva implícito el de sucesión, y por lo tanto admite ocurrencias reiteradas de un mismo elemento, un abuso de lenguaje similar al indicado poco más arriba lleva a identificar cada camino (cadena) simple con el conjunto de sus elementos.

Más precisamente, con el subdigrafo (subgrafo) que inducen sus arcos (aristas).

Esto se presenta, en particular, al asociar a cada cadena simple de una configuración G un vector de tantas componentes $c_i \in \{0, 1\}$ como aristas tiene G , y tal que $c_i = 1$ si y sólo si la arista u_i pertenece a dicha cadena.

La asociación de referencia lleva a que cadenas con las mismas aristas pero con distinto orden de sucesión tengan un mismo vector representativo; a considerar a las cadenas elementales como minimales en sentido conjuntista, y a identificar cadenas opuestas.

En forma análoga, a cada cadena simple de un multidigrafo puede asociarse, previa elección de su sentido de recorrido, un vector de componentes $\{0, 1, -1\}$ tales que : $c_i = 1$ si u_i es arco adelante $\setminus -1$ si u_i es arco atrás $\setminus 0$ si u_i no integra la cadena en cuestión.

Para enfatizar situaciones en las cuales interesa considerar el conjunto de arcos (aristas) de un camino (cadena) simple, y no la sucesión que lo determina, podríamos convenir en designar a tal conjunto **s-camino (s-cadena)** como apócope de subdigrafo camino (subgrafo cadena).

Pero esto nos llevaría a una terminología innecesariamente pesada, puesto que en general del contexto se podrá deducir cual es la interpretación adecuada.

Por ello, y de acuerdo con lo que es usual, habitualmente diremos *cadena* tanto para referirnos a la sucesión que la define, como al subgrafo que determina el conjunto de sus elementos. Análogamente para el caso dirigido.

Para el caso de caminos (cadenas) no simples caben observaciones similares, pero recurriendo al concepto "multiconjunto"

Creemos interesante citar el siguiente resultado

Si G es un grafo sin bucles de orden n , $n \geq 4$, tal que cada par de vértices está conectado por una única cadena de longitud dos, en G existe un único vértice adyacente a todos los otros.

Habitualmente, el mismo es citado como *Teorema de la Amistad*, pues admite la siguiente reformulación :

Si en una reunión de al menos cuatro personas cada par de asistentes tienen exactamente un amigo común, en la reunión hay un único asistente que es amigo de todos los presentes.

Lo antedicho equivale a la siguiente afirmación :

Si G es un grafo sin bucles y cada par de vértices tiene un único adyacente común, entonces : $G = K_3$, o bien G tiene $n = 2.m+1$ vértices, y está formado por m "triángulos", todos con un mismo vértice en común.

De ella se dieron demostraciones en [ErdRS66], [Hig69], [LonP72], [Luc79], [Wilf71].

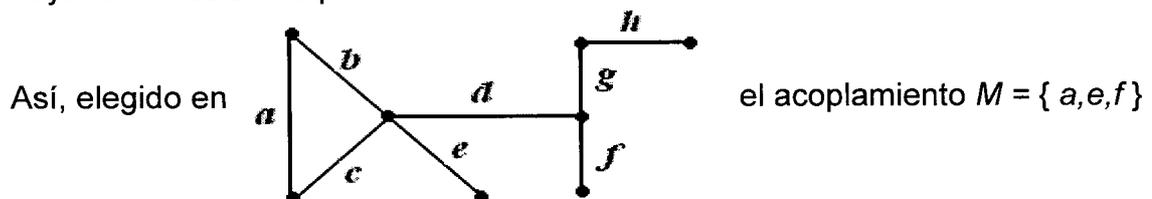
Otra es la que, supuesto G satisface las hipótesis, responde al siguiente esbozo

- 1) Sus aristas pertenecen a triángulos que tienen a lo sumo vértices comunes.
- 2) Si $n = 3$, $G = K_3$. Caso contrario G contiene al menos un triángulo, de vértices $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$, y un vértice \underline{d} adyacente a sólo uno de dichos vértices.
- 3) Si \underline{a} y \underline{d} son los adyacentes, poniendo $\underline{b} = x_1$, $\underline{c} = y_1$, $\underline{d} = x_2$ todos los vértices de G adyacentes de \underline{a} definen aristas que pertenecen a triángulos t_i de vértices \underline{a}, x_i, y_i ($1 \geq i \leq m$) con sólo \underline{a} en común.
- 4) Si en G hubiera además algún vértice \underline{v} no adyacente de \underline{a} , él debiera ser adyacente de uno de los vértices x_i, y_i de cada t_i , pero entonces en cada conjunto $\{x_i, y_i, x_j, y_j\}$, $i \neq j$, existirían al menos dos vértices con $\underline{a}, \underline{v}$, como adyacentes comunes, en contradicción con lo supuesto.

El grafo de aristas $[a,b], [a,c], [a,d], [b,c], [c,d]$ muestra que lo precedente no puede extenderse al caso en que cada par de vértices tiene al menos un adyacente común.

Volviendo sobre algo adelantado en pág.33 digamos que :

Si $M \subseteq U$ es un acoplamiento de $G = (V, U)$ se dice **vértice M -saturado** a todo vértice que es extremo de alguna de las aristas que integran el acoplamiento y **cadena M -alternada** a toda cadena simple en la que de cada par de aristas adyacentes sólo una pertenece a M .



los extremos de h son los únicos vértices que no son M -saturados, y sus cadenas $h \parallel a, c \parallel a, c, e \parallel e, d, f$ son M -alternadas.

De un conocido resultado de Berge (ver [Agui90], [Ber/72], [Die96], [GonM79], [Ore62], [SwaT81], [Tar83]) se tiene que :

Un acoplamiento M es máximo si y sólo si no existen cadenas M -alternadas cuyos dos extremos sean vértices no saturados respecto de M .

En efecto, si existiera una cadena M -alternada C , de extremos p, q , y éstos fueran no saturados respecto M , substituyendo las aristas de $C \cap M$ por las de $C \cap \bar{M}$ y conservando las restantes se generaría un nuevo acoplamiento M' con más aristas que M .

Para justificar la recíproca recurriremos a las nociones "componente conexa" (ver poco más adelante) y "ciclo par" (ver pág.108).

Si M no es acoplamiento máximo existe otro, M' , con mayor cantidad de aristas, y como cualquier vértice de $M \Delta M'$ tiene grado 1 ó 2, cada componente conexa de $M \Delta M'$ es ciclo par, o cadena con arcos en $M - M'$ y en $M' - M$ alternadamente.

Por hipótesis M' contiene más aristas que M y por lo tanto alguna de estas componentes debe tener más aristas de M' que de M , y en consecuencia ser una cadena M -alternada con extremos en vértices no saturados respecto M .

3.2. DISTANCIA Y DISTANCIA ORIENTADA

Antes de referirnos a las nociones que nos ocuparán en esta sección recordemos que según se indicó en el Prólogo los índices "de Wiener" y los "de centralismo" que mostraron su utilidad en química y en sociología, respectivamente, están ligados al concepto "distancia" en grafos.

Para introducirla convengamos que dado un multigrafo G :

- dos de sus vértices se dirán **conectados** si existe al menos una cadena que los tiene por extremos.
- el submultigrafo inducido por \underline{a} y los vértices conectados con \underline{a} determinan la **componente conexa** $G_{\underline{a}}$
- G se dirá **conexo** si contiene una única componente conexa.

Sobre éstas cuestiones volveremos en 3.6.

Si a, b , son vértices de un multigrafo G y están conectados la **distancia** $d(a,b)$ que los separa es la menor de las longitudes de las cadenas que los tiene por extremos.

Si no están conectados se conviene que la distancia entre ellos es ∞ .

En procesos de cálculo el símbolo ∞ debe reemplazarse en forma adecuada.

Es fácil verificar que si todos los pares de vértices de G están conectados entre sí ; o sea, que si G es conexo , se tienen :

- i) $d(x,y) \geq 0$; $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
- ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (propiedad de simetría)
- iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (propiedad triangular)

Toda cadena de extremos a, b , cuya longitud coincida con $d(a,b)$ es una **geodésica** (de extremos a,b).

Toda geodésica es cadena elemental, y todas sus subcadenas son también geodésicas.

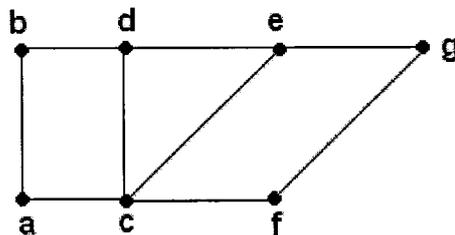
En 3.7 y 3.8 veremos como la matriz precedencia (adyacencia) de G permite, mediante productos de matrices obtener información respecto de sus caminos (cadenas) y determinar distancias entre sus pares de vértices. Esto, en general, es poco conveniente pues implica gran cantidad de operaciones.

Otra forma, más ágil, y además fácilmente expresable en términos matriciales, es la dada por el siguiente

Algoritmo para determinar las distancias a cierto vértice \underline{a} prefijado, arbitrario.

- 1) Se marca con 0 el vértice \underline{a} , se pone $S_0 = \{\underline{a}\}$ y se pasa a 2), con $m = 0$.
- 2) Si S_m es el conjunto de los vértices ya marcados y quedan vértices adyacentes a los de S_m sin marcar, se los marca $(m+1)$ y se reitera 2) aplicándola en S_{m+1} . Caso contrario se han marcado todos los vértices conectados con \underline{a} , y a los que aún no se marcaron (si existen) se los marca ∞ .

Apliquemos el método indicado al siguiente ejemplo.



$$\begin{aligned}
 S_0 &= \{ a \} \\
 S_1 &= \{ a, b, c \} \\
 S_2 &= S_1 \cup \{ d, e, f \} \\
 S_3 &= S_2 \cup \{ g \}
 \end{aligned}$$

Con leves modificaciones en las marcas a introducir, podrían identificarse los vértices de S_m que dan lugar a las marcas $(m+1)$, y así tener la información necesaria para poder determinar geodésicas con un extremo en a .

En particular, si en el ejemplo anterior marcáramos : b con $1, a // c$ con $1, a // d$ con $2, b // e$ con $2, c // f$ con $2, c // g$ con $3, f$; quedaría determinada, a partir de g , la geodésica a, c, f, g .

Si g se hubiera marcado $3, e$ obtendríamos la geodésica a, c, e, g .

Visto que todo multigrafo puede incluirse en de la clase de los valuados, la noción "distancia generalizada" (ver Cap. 6) lleva a extender, de forma natural, muchas de las afirmaciones propias de esta sección.

En particular, si a toda arista se asigna un valor positivo la distancia generalizada asociada satisfará las precedentes i) , ii) , iii).

Para el caso en que todas las distancias a considerar son finitas se dice :

- **excentricidad de x** a la mayor de las longitudes de las cadenas elementales con un extremo en x
- **vértices centrales (periféricos)** a los de menor (mayor) excentricidad.
- **centro** al conjunto de sus vértices centrales.
- **radio de G ($r(G)$)** a la excentricidad de sus vértices centrales
- **diámetro de G ($d(G)$)** a la excentricidad de sus vértices periféricos, o sea, a la mayor de las longitudes de sus geodésicas.

Así entonces :

- En C_n y en K_n todos sus vértices tienen igual excentricidad . Por lo tanto sus respectivos radio y diámetro coinciden.
- $r(G) \leq d(G) \leq 2.r(G)$.

En la clase de los grafos sin bucles cada cadena de longitud tres, y su grafo complementario, son isomorfos y ambos tienen diámetro tres.

Se deja como ejercicio constatar que si G tiene diámetro mayor que tres, el de su complementario es menor que tres.

En todo multidigrafo G se define como **distancia orientada** $d_o(a, b)$ a la menor de las longitudes de los caminos que llevan desde a hasta b ; o bien, si tales caminos no existen, se conviene que es infinita.

De las precedentes propiedades i) , ii) , iii) sólo son válidas, para el caso de distancias orientadas las similares de i) y iii).

La distancia orientada entre cualquier par de vértices de G es mayor o igual que la distancia entre ellos en \underline{G} , y sólo si G es simétrico puede afirmarse que ambas coinciden.

De lo afirmado en el Ejer.2-14) resulta que :

Si G es un torneo, y t es uno de sus vértices de mayor grado positivo, $d_o(t,x) \leq 2$ cualquiera sea x . Por lo tanto t es vértice raíz.

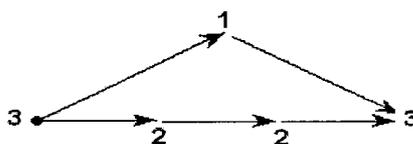
El resultado precedente, dado en [Vau52] fue extendido en [Lan53] y luego en [ChvL74] donde se dedujo, por inducción sobre el orden, que :

En todo digrafo existe un conjunto S de vértices independientes dos a dos tal que para todo $v \notin S$ existe un $u \in S$ que satisface $d_o(u,v) \leq 2$.

Substituyendo *distancia* por *distancia orientada*, y *cadena* por *camino* pueden introducirse conceptos similares a los de excentricidad, radio, etc.

En particular, el citado resultado de [Vau52] puede reformularse poniendo --- Todo torneo tiene radio orientado menor o igual que dos.

Del siguiente ejemplo, cuyos vértices están etiquetados con sus respectivas excentricidades orientadas resulta que, a diferencia de lo que acontece en el caso no dirigido, puede suceder que el radio orientado sea menor que la mitad del diámetro orientado.



3.3. ALGUNOS ENTRETENIMIENTOS

A continuación ejemplificaremos algunas aplicaciones de los conceptos dados a juegos de entretenimiento. Otras, más interesantes, relativas a recorridos óptimos en configuraciones valuadas serán vistas oportunamente.

Todo juego reducible a un proceso por etapas puede analizarse, excepto el número de éstas lo haga inaplicable, sobre un digrafo cuyos vértices representan las posiciones permitidas, y con arcos (p, q) cuando sea posible, mediante una única jugada, pasar de la situación representada por p , a la simbolizada por q . Si toda jugada es reversible, el juego podría darse por un grafo.

En tales casos cada partida quedará representada por un "recorrido" con extremos en los vértices "posición inicial" y "posición final".

Uno de los juegos que permite ejemplificar lo dicho es el conocido “salir del laberinto”, practicado ya en la Mitología Griega por Teseo, luego de matar al Minotauro, en el Palacio de Knossos.

Referencias sobre el mismo, que fue estudiado en [Rost71/73] desde el punto de vista de las gramáticas formales, pueden verse en [Lucas82], [RouB92] y [Tre93].

Es bien sabido que un laberinto está constituido por pasillos que interconectan encrucijadas o llevan a puntos de retorno obligado, y en el cual hay dos puntos distinguidos, a saber : entrada y salida. Pueden representarse por grafos cuyas aristas corresponden a los pasillos.

Recorrer exitosamente un laberinto equivale a determinar, en el grafo asociado, una cadena con extremos en los vértices que indican la entrada, y la salida. Por ello, para resolver el problema que nos ocupa puede recurrirse a cualquier algoritmo que asegure recorrer todas las aristas de un grafo.

Según [Ore62] el primer procedimiento sistemático para lograr esto parece haber sido el de Wiener [Wien73] al reformular el “método del hilo de Ariadna” Este método hace recorrer cada arista al menos dos veces.

Otros, que llevan a recorrerlas a lo sumo una vez en cada sentido se basan en los Algoritmos de Tarry, y Trémaux, que daremos en 3.4. Ver también [Fle83b], [Frae70] y [Tra63]

Los métodos precedentes llevan a emplear gran cantidad de las aristas del grafo, pero esto no parece ser apropiado. Por ello, en [Ore59/62] se propone un método de cubrimiento progresivo, que podría aplicarse también en grafos infinitos.

Nótese que para salir de un laberinto bastará con aplicar reiteradamente la regla \mathcal{R} que daremos en pág.104, y que ello lleva al siguiente proceso :

- utilizar cada corredor a lo sumo una vez en cada sentido, y tomarlo por segunda vez sólo si no hay otra opción.
- al llegar a un punto de retorno obligado, desandar camino.
- al llegar a una encrucijada por primera vez, marcar el corredor que llevó a ella y tomar cualesquiera de los restantes corredores incidentes en ella.
- si se llega a una encrucijada ya visitada salir de ella tomando, de los corredores disponibles, el que llevó a esa encrucijada por primera vez sólo si no hay otra opción.

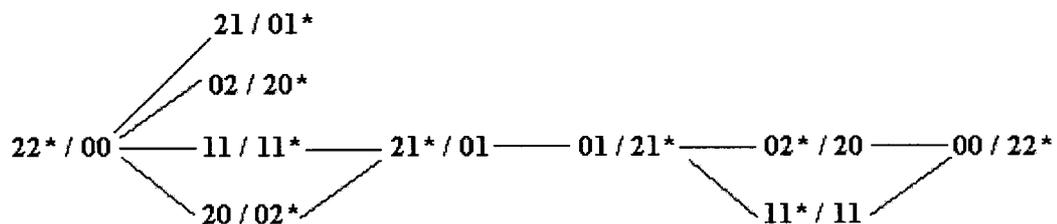
Seguidamente resolveremos, aplicando conceptos de grafos, un par de conocidos juegos de entretenimiento. Ellos podrían encararse directamente, sin mayores dificultades pues el número de situaciones que involucran es pequeño.

De los mismos caben modificaciones no esenciales. Algunas pueden verse en [BellCL70], [BusS65], [FralCD66], [Krai30], [Lucas82], [Pea73].

- A) Dos misioneros y dos caníbales deben atravesar un río en un bote que sólo admite dos personas por vez. ¿ Será posible efectuar el cruce si los cuatro pueden remar pero el número de caníbales no puede superar al de misioneros presentes en el mismo lugar, excepto si no los hay ?
 En tal caso, ¿ de cuántas maneras ? ¿ cuántos cruces serían necesarios al menos ?

Conviniendo que cada par $\underline{a}, \underline{b}$, indica la presencia conjunta de \underline{a} misioneros y de \underline{b} caníbales, por las restricciones del problema no será aceptable el par $1, 2$, y por ende tampoco el $1, 0$.

Por lo tanto la resolución del problema puede visualizarse en el siguiente esquema, con dos vértices de retorno obligado.



De su análisis resulta que el problema admite cuatro soluciones sin cruces innecesarios, y que todas ellas implican cinco cruces del río.

Con la restricción suplementaria : "nunca pueden estar solos ambos caníbales", hay una única solución.

Véase que el problema similar para el caso de tres misioneros y tres caníbales con un bote que admite dos personas implica cuatro soluciones con al menos once cruces del río, y que si nunca pueden estar juntos tres caníbales, excepto estén los tres misioneros, no hay solución.

Tampoco la hay para el caso de cuatro caníbales y cuatro misioneros, si el bote es de capacidad dos.

En cambio, si la capacidad del bote supera tres el traslado en cuestión será posible para cualquier número de caníbales y de misioneros.

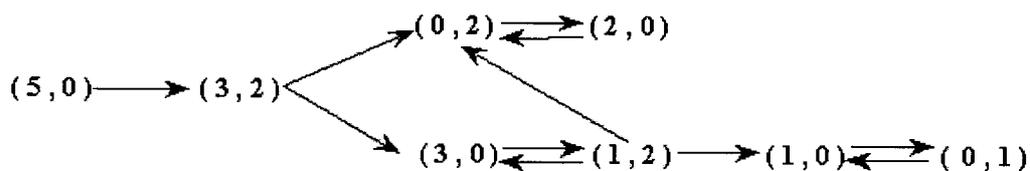


- B) Suponga tener una jarra de 5 litros llena de agua y otra de 2 litros vacía.
 ¿ Será posible, mediante trasvasamientos y vaciados totales, quedar con dos litros en una de ellas y ninguno en la restante ? Ídem, con un único litro en alguna de ellas ?
 En tales casos, ¿ cuántas soluciones hay, y cuántas operaciones serán necesarias ?

Para construir un digrafo asociado al problema indicaremos con (a, b) que hay a litros en el recipiente de capacidad cinco, y b en el restante.

Obviamente a, b , serán enteros tales que : $0 \leq a \leq 5$; $0 \leq b \leq 2$; $0 \leq a+b \leq 5$
 Las operaciones admitidas permiten pasar de una distribución (a, b) a cualesquiera de las siguientes : $(a, 0) \parallel (0, b) \parallel (a+b, 0) \parallel (0, a+b)$ si $a+b \leq 2$ y $(a-(2-b), 2)$ si $a+b > 2$.

Excluido el estado $(0, 0)$ el digrafo a considerar es



Analizándolo resulta que, evitando trasvasamientos innecesarios, hay una única forma de alcanzar los estados $(1, 0)$; $(0, 1)$ y dos de llegar al $(0, 2)$.

Otros problemas similares a los anteriores se plantean en el Ejer. 3-47.

Consideraciones sobre ellos, y otros juegos (nim, tac, go, ta-te-ti, etc) así como su análisis mediante grafos puede verse en [Ber58], [BusS65], [Guy66/83], [Krai30], [Tuc80].

3.4. ALGUNOS ALGORITMOS

Las cuestiones que llevan a la determinación de caminos suelen presentar profundas variantes. En particular, puede interesar la determinación de todos, o de sólo los simples, o de los elementales, o de los que tienen extremos prefijados, etc. Ídem para el caso de cadenas.

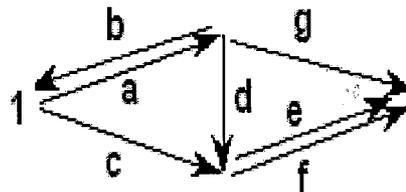
Esta diversidad es motivo de la gran cantidad de algoritmos propuestos

Digamos, de paso, que en un extenso trabajo monográfico Derniame y Pair [DerP71] recurren a una descripción algebraica de estas cuestiones, y que el esquema adoptado les permite considerar también problemas atinentes a "longitudes generalizadas".

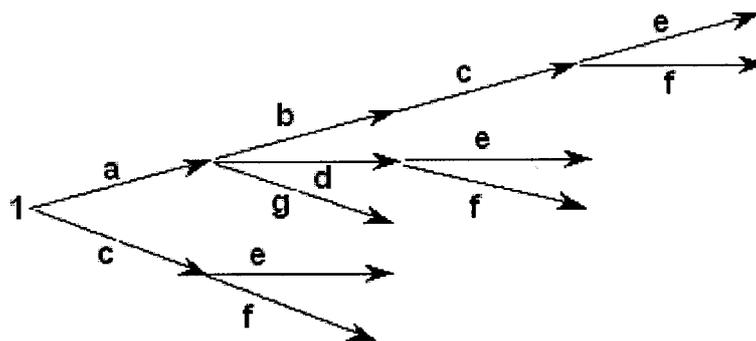
La correspondencia entre las cadenas (cadenas elementales) de un multigrafo y los caminos (caminos elementales) de su simetrizado permite afirmar que para hallar las cadenas (cadenas elementales) de cierto multigrafo, podrían aplicarse métodos propuestos para el caso dirigido, aplicándolos a su simetrizado.

Seguidamente esbozaremos un método que permite, mediante “copias de estrellas positivas”, determinar los caminos simples (elementales) de vértice inicial prefijado, arbitrario.

Dado el multidigrafo



sus caminos simples de vértice inicial **1** están indicados en la “arborescencia”



Una simple modificación del mismo permitiría determinar los caminos elementales de vértice inicial **1** maximales en cuanto a su longitud. Ellos son $a,b \parallel a,g \parallel a,d,e \parallel a,d,f \parallel c,e \parallel c,f$.

Segùn veremos, para decidir sobre la existencia, o sobre el número de caminos (cadenas) de determinada longitud y extremos a, b , pueden emplearse “métodos matriciales”.

En [KauP77].-Vol.II.se hace un interesante análisis de varios de ellos.

En éste, así como en [DerP71], y [Kau68b] se recurre frecuentemente a la noción “pila”, que responde a la idea *el primero (último) en llegar es el último (primero) en partir*.

Ella, que no será considerada, permite enunciar algoritmos muy eficaces.

Formalizando la idea de “avanzar tanto como se pueda y retroceder lo mínimo que sea necesario” puede darse el siguiente

Algoritmo de Trémaux (citado en [Lucas82]),

Para verificar si existen caminos $C : a \rightarrow b$, y en tal caso determinar uno de ellos, que sea simple.

- 1) Fijar, para algún vértice v_1 un camino simple $C_1 : a \rightarrow v_1$ y pasar a 2)
- 2) Si $b \in C_i : a \rightarrow v_i$ ($i \geq 1$) el camino hallado es uno de los que llevan desde a hacia b , y el objetivo está logrado. Caso contrario :
 - si existen arcos de vértice inicial v_i aún no tomados en cuenta, se extiende C_i con alguno de ellos. Se nota C_{i+1} al camino simple $a \rightarrow v_{i+1}$ así construido, y se reitera 2) aplicándolo a $i = i+1$.
 - si no hay tales arcos pasar a 3)
- 3) Eliminar (por superfluo) el arco final de C_i , designar C_{i+1} al camino así obtenido y volver a 2) aplicándola al nuevo camino, excepto si C_{i+1} es el camino nulo que determina el vértice a y se han utilizado todos los arcos de extremo inicial a . En este caso no hay caminos. $a \rightarrow b$.

La finitud del número de arcos en G permite afirmar, que si en la etapa 2) se omite –“analizar si $b \in C$ ”– y las reglas se reiteran tanto como es posible, todos los arcos de los caminos de vértice inicial a serán superfluos en alguna etapa.

Por lo tanto, si b es accesible desde a , aplicando este algoritmo se podrá determinar, efectivamente, un camino simple $a \rightarrow b$.

Por otra parte, cualquier camino $a \rightarrow b$. puede reencontrarse mediante elecciones adecuadas, al aplicar el método en cuestión.

Si además, en cada vértice se indica cual es el arco que permitió alcanzarlo por primera vez, podrán determinarse caminos elementales de vértice inicial a .

El Algoritmo de Trémaux, puede adaptarse para hallar cadenas simples de G , recurriendo a su simetrizado, y conviniendo en anular el arco opuesto de cada uno de los elegidos.

La siguiente regla, a la que hemos hecho referencia en relación con los laberintos, permite alcanzar todo vértice adyacente de uno ya alcanzado, es fácil de implementar, y permitirá enunciar el algoritmo de Tarry.

Regla \mathcal{R} No recorrer una misma arista dos veces en un mismo sentido, y si se está en un vértice x tomar cualquier arista incidente en x distinta de la que nos ha conducido a x por primera vez, excepto no haya otra posibilidad.

Algoritmo de Tarry [Tarry95]

Para constatar si existen cadenas de extremos \underline{a} , \underline{b} , y en tal caso determinar una de ellas, elemental.

Comenzando en \underline{a} , y en tanto no se incida en \underline{b} , aplicar reiteradamente la regla \mathcal{R} e indicar, para cada vértice distinto de \underline{a} cual es la arista que permitió alcanzarlo por primera vez.

Si \underline{b} no es alcanzado, no es accesible desde \underline{a} . Caso contrario las marcas permitirán determinar, a partir de \underline{b} , una cadena elemental de extremos \underline{a} , \underline{b} .

Su justificación es consecuencia de lo que sigue.

Si todos los pares de vértices de G están conectados, la aplicación de \mathcal{R} tantas veces como sea posible a partir de un vértice arbitrario \underline{a} termina cuando se está en \underline{a} y todas las aristas de G se han recorrido una vez en cada sentido.

En efecto, al “llegar por k -ésima vez al vértice $x \neq \underline{a}$ ” las aristas de U_x han sido recorridas k veces “hacia x ” y $(k-1)$ veces “desde x ”. Por lo tanto es posible aplicar \mathcal{R} otra vez. También, si al llegar a $x = \underline{a}$ alguna de las aristas incidentes en \underline{a} fue recorrida en a lo sumo un sentido, la regla \mathcal{R} puede aplicarse otra vez.

En consecuencia, la posibilidad de reiterar \mathcal{R} sólo queda agotada cuando se está en \underline{a} , y todas las aristas allí incidentes fueron recorridas una vez en cada sentido.

Para ver que luego de reiterar la aplicación de \mathcal{R} tanto como posible toda arista será recorrida una vez en cada sentido supongamos que $\underline{a} = a_0, a_1, \dots, a_k, \dots$ es la sucesión de “vértices alcanzados por primera vez” obtenida luego de agotar las aplicaciones de \mathcal{R} .

En tal caso, todas las aristas incidentes en a_0 fueron recorridas una vez en cada sentido.

Veamos, por inducción, que lo mismo vale para cada uno de los restantes a_k .

Si $u = [a_i, a_k]$ es la arista que permitió alcanzar a_k por primera vez, se tiene que $i < k$ y por hipótesis inductiva la arista u fue recorrida en ambos sentidos. Pero esto implica que también lo fueron todas las aristas incidentes en a_k , pues de lo contrario se habría operado sin respetar la regla, y esto completa la demostración.

Así entonces, dado un multigrafo conexo y reiterando la aplicación de \mathcal{R} tanto como sea posible, es factible recorrer todas sus aristas en exactamente dos ocasiones, una vez en cada sentido, y volver al punto inicial.

Obviamente, esto nos provee de un método para salir de un laberinto, o para recorrer cualquier exposición transitando cada pasillo una vez en cada sentido.

Parece oportuno notar la existencia de ciertas semejanzas entre el Algoritmo de Tarry (para cadenas elementales) y el de Trémaux (para caminos simples).

Ambos son algoritmos “de información local”, puesto que para aplicarlos basta conocer, en cada una de sus etapas, el “entorno” del vértice en cuestión. Además, ambos permiten constatar la existencia de las configuraciones que se buscan, y determinarlas empleando cada arista (arco) en ninguna, una, o dos oportunidades, y en este último caso una vez en cada sentido.

El algoritmo de Tarry, y el de Trémaux, permiten recorrer una configuración y volver al punto de partida empleando cada arista exactamente dos veces. Otro algoritmo con igual característica es el incluido en [Tra63]-Cap.3.

En [Frae70] se da, además del algoritmo de Tarry, otro basado en él, que lo mejora pues permite volver al punto inicial luego de emplear todas las aristas, pero no necesariamente todas en ambos sentidos.

Otras formalizaciones y observaciones sobre los algoritmos de Tarry y Trémaux pueden verse en [Ber70], [BerGH62], [Fle83b].

Algoritmo para determinar cadenas abiertas elementales con uno de sus extremos en un vértice \underline{a} prefijado, arbitrario.

- 1) Marcar el vértice \underline{a} con 0, sus adyacentes con $(1, \underline{a})$, y pasar a 2).
- 2) Para cada $i \geq 1$, si x está marcado (i, p) marcar $(i+1, x)$ a los adyacentes de x aún no marcados, y reiterar 2) tanto como sea posible.

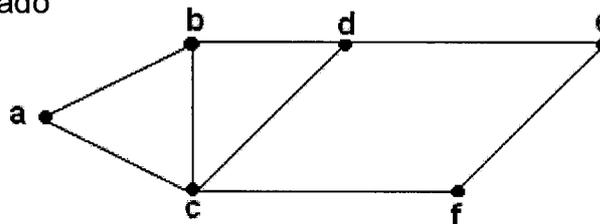
Las aristas que conectan \underline{a} con sus adyacentes y aquellas $[x, y]$ con extremos x, y , marcados $(j, p), (i+1, x)$, determinan cadenas abiertas elementales con un extremo en \underline{a} .

Las aristas que las componen quedan fijadas, "en forma regresiva" atendiendo a las segundas componentes de las marcas.

Más precisamente, si w está marcado (j, s) se ha determinado una cadena elemental de extremos \underline{a}, w , y de longitud j cuya última arista es $[s, w]$.

Las marcas que se ponen por aplicación de la regla 2) no están, en general, unívocamente determinadas. Variándolas pueden obtenerse diferentes cadenas elementales.

Así por ejemplo, dado



algunas de las marcas que pueden asignarse a los vértices aplicando las reglas precedentes son indicadas en las columnas M_1, M_2, M_3 de la tabla que sigue.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
a	0	0	0	0	0
b	(1,a)	(1,a)	(1,a)	(1,a)	(1,a)
c	(1,a)	(1,a)	(1,a)	(2,b)	(2,b)
d	(2,b)	(2,c)	(2,b)	(2,b)	(3,c)
e	(3,d)	(3,f)	(3,d)	(3,d)	(4,f)
f	(2,c)	(2,c)	(2,c)	(4,e)	(3,c)

Las cadenas elementales de mayor longitud dadas por M_1 son a,b,d,e y a,c,f .

En tanto que, las determinadas por M_2 son $a,b \parallel a,c,d \parallel a,c,f,e$; y las debidas a M_3 son $a,c,f \parallel a,b,d,e$

Si modificamos el algoritmo y permitimos marcar sólo algunos de los vértices adyacentes de los ya marcados pueden obtenerse, entre otras, las columnas M_4 y M_5

M_4 genera las cadenas $a,b,c \parallel a,b,d,e,f$; y M_5 las $a,b,c,f,e \parallel a,b,c,d$

3.5. CIRCUITOS Y CICLOS

Dado un camino cerrado $C : u_1, u_2, \dots, u_L, L \geq 1$, diremos **circuito** (*generado por C*) a la clase de todos los caminos que se obtienen a partir de C por permutación circular de sus elementos.

Un *circuito* se dirá **de longitud L** si el camino que lo genera tiene longitud L y es minimal en el sentido de no ser obtenido por concatenación de algún subcamino propio consigo mismo.

De las definiciones resulta que cada camino no nulo cerrado, define un circuito, y que a cada circuito de longitud L pueden asociársele L -caminos generadores.

En particular, los tres caminos cerrados $d,e,f // e,f,d // f,d,e //$ del ejemplo de pág.86 determinan un mismo circuito de longitud tres.

Análogamente, si C es una cadena no nula orientable cerrada, diremos **ciclo** (*generado por C*) a la clase de equivalencia obtenida a partir de C por permutación circular de sus elementos.

Si C es de longitud $L \geq 1$, y no puede ser obtenida por concatenación de alguna subcadena propia consigo misma, el ciclo tiene **longitud L** .

Los circuitos (ciclos) se dirán *simples, elementales, opuestos, etc.* cuando gozen de esas características los caminos (las cadenas) que los generan.

A excepción de las cadenas elementales cerradas no orientables de longitud dos que pueden asociarse a cada arista distinta de bucle (Obs.2 de pág.89) las restantes cadenas elementales cerradas son orientables.

Por ello :

Toda L -cadena cerrada elemental con $L > 2$ genera un ciclo elemental.

Ocasionalmente, para enfatizar la diferencia entre el circuito (el ciclo) y los caminos (las cadenas) que lo generan, los circuitos (ciclos) de longitud L serán notados $(C) = u_1, u_2, \dots, u_L, (u_1)$

Diremos **acíclicos** a los multi-di-grafos carentes de ciclos, y **puentes** a las arista no contenidas en ciclos.

Toda arista pendiente es puente, y cualquiera sea G reiteradas eliminaciones de sus aristas permitirán hallar subgrafos cubrientes acíclicos.

Con la terminología inglesa habitual los *acyclic graphs* son nuestros "digrafos sin circuitos".

Si se admitiera que las cadenas nulas son cerradas, todo vértice constituiría un ciclo, y sólo el grafo vacío sea acíclico.

Si a las cadenas que generan ciclos no se les pidiera ser orientables, las que resultan de recorrer una arista en ambos sentidos definirían ciclos, y en este caso solamente los grafos discretos serían acíclicos.

Los siguientes resultados se deben, respectivamente, a [ErdG59] y [Dir52].

- Si c es un entero mayor que 1, y G es un grafo de orden n con más de $c \cdot (n-1) / 2$ aristas distintas de bucles, G contiene al menos un ciclo elemental de longitud $L > c$.
- Si G es grafo sin bucles “2-conexo” (ver 3.6.1) de orden $n \geq 2 \cdot k$, y sus vértices tienen grado al menos k , G tiene al menos un ciclo de longitud $L \geq 2k$.

La lista de trabajos referidos a ciclos, o a circuitos, es muy amplia. Entre ellos : [Bon66/71c], [Voss91], [Woo72] y [BermTh81]. Este último con amplia bibliografía y numerosos resultados, muchos de ellos referidos al problema que estudiaremos en Cap.5

Diremos **ciclo par (impar)** a todo ciclo con longitud par (impar)

La paridad de los ciclos permite caracterizar, según veremos seguidamente, a los multigrafos bipartidos y está presente en muchos resultados.

En particular :

- todo ciclo impar “contiene” ciclos elementales impares, pero no cabe una afirmación similar substituyendo impar por par.
- si todo vértice de G tiene grado par (impar), G tiene un número par de cadenas si y sólo si es de orden par (si y sólo si su orden es múltiplo de cuatro). [BonHa86]

Proposición 3.5.1

Un multigrafo G es bipartido si y sólo si carece de ciclos impares.

Demostración

Es claro que si G es bipartido todos sus ciclos (si los tiene) son de longitud par.

Para verificar la recíproca colorearemos “rojo” un vértice arbitrario r , y aplicaremos a partir de él, tanto como sea posible la siguiente regla :

- | Si cierto vértice está coloreado rojo (azul), colorearemos azul (rojo) a todos sus adyacentes no coloreados previamente.

Así entonces, y cualquiera sea la sucesión elegida al colorear vértices, r y cada uno de los pintados con rojo//azul son extremos de una cadena elemental de longitud par//impar.

Como por hipótesis no existen ciclos impares, el color así asignado a los vértices es independiente del orden en que se los haya coloreado, y por lo tanto el conjunto de vértices quedará finalmente particionado dos clases bien definidas, la de los rojos, y la de los azules.

Como además, no existen aristas con extremos de igual color, dichos vértices inducen un multigrafo bipartido.

Mientras restan vértices de G sin colorear puede reiterarse el proceso anterior. Finalmente, cuando todos los vértices de G son coloreados, resulta claro que G es bipartido.

Otra conocida caracterización de los bipartidos, citada en pág. 59, es la que hace referencia al espectro de la correspondiente matriz adyacencia.

Si bien cada cadena orientable cerrada debe distinguirse de las obtenidas por permutación circular, y de sus respectivas opuestas, todas ellas contienen los mismos elementos, componen un mismo grafo, y determinan un mismo par de ciclos opuestos.

Por ello, y según se indicó en pág.93, sobrentendiendo que del contexto se deducirá el significado correcto es habitual referirse a ellas de forma indistinta.

Razones similares llevan a designar circuitos tanto a los caminos cerrados como a los dígrafos que constituyen.

Por lo tanto, aún cuando los pares de conceptos : *circuito–camino cerrado // ciclo–cadena orientable cerrada*, deben distinguirse, por comodidad nos referiremos a ellos utilizando cualesquiera de dichas locuciones.

De estas convenciones resulta que :

- un ciclo elemental es un grafo regular de grado dos
- un circuito (ciclo) es elemental si y sólo si es minimal en sentido conjuntista.
- un 1-difactor es un subdigrafo cubriente, unión de circuitos elementales disjuntos dos a dos.

Por otro lado, visto que cadenas opuestas generan ciclos opuestos, todo multigrafo contiene un número par (eventualmente nulo) de ciclos.

Sólo la identificación anterior permite afirmar que hay grafos unicíclicos.

Para destacar la importancia de la existencia de *circuitos* basta notar que :

- G carece de circuitos si y sólo si todos sus caminos son elementales.
- G carece de circuitos si y sólo si todo $G' \subseteq G$ contiene entradas y salidas.
- Si G representa una situación que involucra relaciones de precedencia estricta, la existencia en G de caminos cerrados implica la de errores en los datos que llevaron a su construcción ; es decir, revela la inconsistencia de los datos utilizados a tal efecto.
- Si G es un multidigrafo carente de circuitos, y sólo entonces, es posible enumerar sus vértices de manera que cada arco sea de la forma (p, q) , con $p < q$, y por lo tanto, de manera que G tenga “matriz de precedencia triangular”.

Además merece destacarse que

Dado un digrafo $G = (V, \Gamma)$ la relación de precedencia de su clausura reflexivo-transitiva define, en V , un *preorden (de accesibilidad)* \mathcal{P} tal que $r \mathcal{P} s$ si y sólo si $r = s$; ó existe camino $r \rightarrow s$.
Si además G carece de circuitos distintos de bucles, y sólo entonces, ella es también antisimétrica débil, y por lo tanto *relación de orden*

Así entonces $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } G = (V, \Gamma) \text{ carece de circuitos distintos de bucles, y sólo} \\ \text{entonces, } \vec{\Gamma} \text{ induce en } V \text{ una relación de orden.} \end{array} \right.$

Por otro lado

A cada relación de orden \leq definida en V puede asociarse el digrafo, sin circuitos distintos de bucle, de vértices V y arcos (u, v) si y sólo si $u \leq v$.

Así entonces $\left\{ \begin{array}{l} \text{a cada relación de orden } \Gamma \text{ corresponde un digrafo } (V, \Gamma) \\ \text{que carece de circuitos distintos de bucles, y recíprocamente.} \end{array} \right.$

Surge así una estrecha relación entre la teoría de los *conjuntos ordenados*, y la de los *digrafos sin circuitos distintos de bucles*.

En particular, el uso del “*digrafo cociente* G_{fc} ” que definiremos en pág.123 da una forma directa de asociar a cada digrafo un conjunto ordenado.

La diversidad de trabajos en los que se analizan relaciones entre “digrafos” y “conjuntos ordenados” se puede vislumbrar a partir de [Ber67a], [LalH90], [Riv82b/85b/85c/89b], [Roy69], [Tro66/83], [TroM76a/76b], [WagB89] y las Actas de Congresos relativos a esta cuestión, editados por Rival ([Riv82a/85a/86/89a]).

El abuso de lenguaje a que hemos hecho referencia en pág. 93 y 109 identifica a los ciclos simples, con las pares de cadenas opuestas que los generan, y con los grafos que componen. Esto lleva a considerar “*vectores ciclos*”.

Dichos “*vectores ciclos*”, incrementados con el vector nulo de dimensión adecuada constituyen, en el cuerpo \mathbb{Z}_2 , un “*espacio vectorial de ciclos simples*” que es subespacio del de los submultigrafos arista inducidos, a que nos hemos referido en pág.30.

En este contexto, los ciclos cuyos vectores son linealmente independientes se dicen ***ciclos independientes***.

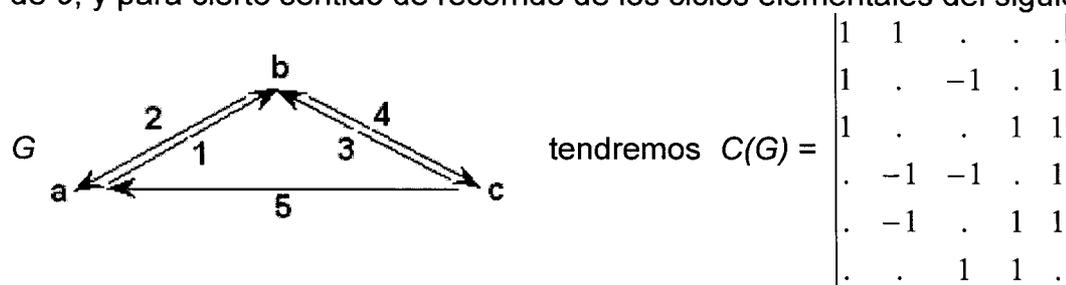
En pág.120 veremos que si G es multigrafo de orden n , con m aristas y con p componentes conexas, G admite $m - (n - p)$ ciclos independientes.

Para el caso de ciclos definidos en configuraciones dirigidas los *vectores ciclos* tendrán, previa elección del sentido de recorrido del ciclo, componentes $0, 1, -1$. Ahora la i -ésima componente será 1 (-1) si y sólo si corresponde a un arco adelante (atrás)

La identificación, entre la sucesión de arcos (aristas) que determina un ciclo y el conjunto de elementos que lo componen está implícita también en la siguiente noción.

Dado un multi-di-grafo G , fijado un orden entre sus ciclos y un sentido de recorrido de éstos, la **matriz ciclo elemental** $C(G)$ es aquella cuya i -ésima fila es el vector representativo de su i -ésimo ciclo elemental, teniendo en cuenta el sentido de recorrido prefijado.

En particular, respetando “el orden natural” de sus aristas, poniendo $.$ en lugar de 0 , y para cierto sentido de recorrido de los ciclos elementales del siguiente



Para determinar $C(G)$ basta substituir los -1 de $C(G)$ por 1 .

En Ejer.3-37) se propone demostrar la

Proposición 3.5.2

Si G es un multigrafo (multidigrafo) sin bucles, y se supone que las columnas de su matriz de incidencia $B(G)$ y las de su matriz ciclo elemental $C(G)$ respetan un mismo orden, cada fila de $B(G)$ es ortogonal en \mathbb{Z}_2 (en \mathbb{R}) a cada fila de $C(G)$. Así entonces, bajo tales restricciones $B(G) \cdot C^t(G) = 0$ en \mathbb{Z}_2 (en \mathbb{R}).

Creemos oportuno destacar que en Cap.7 se introducirán las nociones "cociclo" y "matriz cociclo elemental" que satisfacen "propiedades duales" de las que gozan las similares referidas a "ciclos".

Los "cociclos" de $G = (V, U)$ son conjuntos U_A de aristas que tienen uno sólo de sus extremos en A , y cuya eliminación aumenta el número de componentes conexas de G .

Constatar la existencia de caminos cerrados a partir de la definición, o de los resultados que daremos al considerar operaciones matriciales presupone un proceso tedioso y poco práctico. En cambio, visto que todo digrafo carente de caminos cerrados tiene vértices de entrada y de salida, el problema que nos ocupa puede resolverse fácilmente, con el siguiente

Algoritmo para verificar si un multidigrafo finito G carece de caminos cerrados.

- 1) Marcar todos sus vértices de salida y pasar a 2)
- 2) Marcar todos los vértices restantes que tengan ahora todos sus sucesores marcados, y reiterar 2) tanto como sea posible.

G carecerá de circuitos si y sólo si todos sus vértices quedan marcados

Otra forma de enunciar el algoritmo anterior es la siguiente:

- Eliminar de G todas sus salidas, notar G' al multidigrafo resultante y reiterar en G' la operación anterior, en tanto que sea posible.
- G carecerá de circuitos si y sólo si se eliminan todos sus vértices.

Utilizando la matriz precedencia el algoritmo anterior admite la siguiente formalización, que es fácil de implementar.

- 1) Marcar en $P(G)$ las filas que tienen todas sus componentes nulas.
Eliminar dichas filas f_i así como las columnas asociadas c_i , y pasar a 2).
- 2) Reiterar 1) en la matriz recién construida.

Es fácil ver el multidigrafo en estudio carece de caminos cerrados si y sólo si el algoritmo lleva a eliminar todas las filas y columnas de la matriz en cuestión.

También podría operarse considerando entradas (columnas) en vez de salidas (filas). Idem, analizando simultáneamente filas y columnas.

Lo precedente lleva a la siguiente

Proposición 3.5.3

Una matriz es de precedencia de un multidigrafo sin caminos cerrados si y sólo si cualquier submatriz principal tiene al menos una fila (columna) con todos sus elementos nulos. [Mari59/60].

En pág.128 veremos que este resultado permite dar un método cómodo para determinar si una dada matriz M es nilpotente ; es decir, si existe k_0 tal que para todo $k \geq k_0$, M^k es una matriz nula.

Por otra parte, es fácil verificar que :

G carece de caminos cerrados si y sólo si es posible dar una partición de su conjunto de vértices en niveles N_i , $i \geq 1$ tales que si $x \in N_j$, todos sus sucesores están en niveles N_r , con $r > j$.

En particular, si G carece de caminos cerrados aplicando las siguientes reglas es posible dar un "ordenamiento de sus vértices por niveles ascendentes"

- 1) Con las entradas de G se compone N_1 , y se pasa a 2), aplicándola a $G_1 = G - N_1$.
- 2) Cualquiera sea $i \geq 1$, si G_i es vacío el ordenamiento ha terminado, caso contrario las entradas de G_i conforman N_{i+1} y se pasa a 3).
- 2) Se nota $G_{i+1} = G_i - N_{i+1}$ y se vuelve a 2) ,aplicándola a $(i+1)$ en lugar de i .

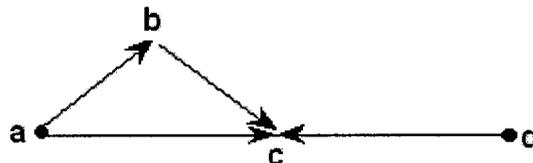
En ocasiones, a partir del ordenamiento generado por las reglas precedentes es factible hallar otros, también por niveles ascendentes.

Basta para ello aplicar la operación :

| Si $x \in N_h$ y todos sus sucesores están en niveles N_k con $k \geq m > h$
 | trasladar x hasta algún N_r con $m > r > h$.

En forma similar, pero considerando salidas en vez de entradas pueden darse ordenamientos por niveles descendentes.

Así, dado



sus niveles ascendentes de vértices son $N_1 = \{ a, d \}$, $N_2 = \{ b \}$, $N_3 = \{ c \}$ y sus niveles descendentes $N'_1 = \{ c \}$, $N'_2 = \{ b, d \}$, $N'_3 = \{ a \}$.

Los métodos de ordenamientos por niveles están implícitos en los dados para constatar la existencia de caminos cerrados, y sin modificaciones esenciales pueden adaptarse para lograr “ordenamientos por niveles de arcos”,

Son fácilmente adaptables para el empleo de la matriz precedencia, y para el caso de multidgrafos sin circuitos ayudan a elegir representaciones topológicas manejables. Según veremos éstas pueden ser aplicadas, parcialmente, también en multidgrafos que admiten caminos cerrados.

Finalizaremos esta sección con una muy breve referencia a un concepto sobre el cual volveremos en el Cap.5. Allí nos referiremos a una conjetura debida a Bondy [Bon71a/71b/75] que lo vincula con los “hamiltonianos”.

Un grafo de orden n se dice **completamente cíclico** (*pancyclic*) si y sólo si contiene ciclos elementales de longitud L , cualquiera sea L . ($3 \leq L \leq n$)

De las respectivas definiciones surge que todo completamente cíclico es “hamiltoniano” (Cap.5). C_4 permite inferir que la recíproca es falsa.

Se demuestra que :

- El cubo de todo conexo es completamente cíclico. [Bon176]
- El cuadrado de todo “2-conexo” (ver pág.121) es completamente cíclico [Hob76]

A partir de la Prop.3.5.1 es claro que ningún bipartido es completamente cíclico. Por ello, y tomando en cuenta sólo los ciclos de longitud par, se introdujo la noción *bipancyclic*.

Para resultados referidos a estas nociones, o a sus similares para el caso dirigido, pueden consultarse [BauS88/90], [EntS88], [MitS85], [ScheM82], [Tho77].

3.6. CONEXIDADES

En Teoría de Grafos se estudian distintos tipos de “conexidades”. Seguidamente consideraremos algunas de ellas.

3.6.1. CONEXIDAD SIMPLE

En pág.95 hemos convenido que dado un multigrafo G , dos de sus vértices se dirán *conectados* si existe al menos una cadena que los tiene por extremos.

Esto permite inferir que

Cualquiera sea el multigrafo $G = (V, U)$ la relación \mathcal{R} tal que $x \in \mathcal{R}(\underline{a})$ si y sólo si $x = \underline{a}$; ó x está conectado con \underline{a} ; es una relación de equivalencia.

El submultigrafo de G inducido por a y los vértices con él conectados constituye una de sus clases de equivalencia. Se le dice **componente conexa** G_a , ó más brevemente **componente** G_a .

Visto que la descomposición de G en componentes conexas G_i está unívocamente determinada, y como todo elemento de G pertenece a una única de ellas se tiene que :

Cualquiera sea el multigrafo G puede ponerse $G = \cup_i G_i$, donde la unión se supone extendida al conjunto de todas las componentes conexas.

Se dice que :

G es **conexo** (o **simplemente conexo**, o **débilmente conexo**) si está constituido por una única componente conexa. Caso contrario G es **disconexo**

Luego, un multigrafo es conexo si y sólo si

- cada uno de sus vértices está conectado con todos los restantes
- todos sus pares de vértices están a distancia finita.

Una afirmación similar substituyendo *distancia*, por *distancia orientada*, no sería válida. En efecto, en el conexo de arcos (a, c) , (b, c) la distancia orientada entre a, b , es infinita.

En muchos casos, para analizar si un multigrafo tiene cierta propiedad bastará considerar si la tiene cada una de sus componentes conexas.

Para decidir sobre la conexidad de cierto multigrafo G basta razonar sobre el G' que se obtiene eliminando sus eventuales bucles y dejando de cada conjunto de aristas paralelas sólo una de ellas.

Por ello, para abordar cuestiones de conexidad podríamos suponer, sin pérdida de generalidad, que G es grafo sin bucles.

Se deja al lector verificar que :

- G y $G - \{u\}$ tienen un mismo número de componentes conexas si y sólo si la arista u pertenece a un ciclo de G .
- si el grafo G es desconexo, su complementario es conexo.
- un grafo G , sin bucles, de orden n , es conexo si y sólo si $G^{n-1} = K_n$.
- un multigrafo es conexo si y sólo si cualquiera sea la partición de su conjunto de vértices en dos clases no vacías, existe al menos una arista con un extremo en cada una de ellas.

Las matrices de incidencia se definen para configuraciones no discretas carentes de bucles (ver pág .62 y 65) y con referencia a ellas cabe la siguiente

Proposición 3.6.1

Si G es un multigrafo sin bucles de orden $n \geq 2$, con $m \geq 1$ aristas y B es su matriz de incidencia entonces, G es conexo si y sólo si los únicos vectores que satisfacen, en Z_2 , el sistema de ecuaciones $X \cdot B = 0$ son $X = 0_n$ (con n componentes nulas) y $X = E_n$ (con n componentes unidad)

Demostración

Es claro que los vectores 0_n y E_n satisfacen, en Z_2 , el sistema planteado.

I)) Veamos que si G es conexo, ellos son los únicos.

Caso contrario existiría un vector X , $0_n \neq X \neq E_n$, que lo satisfaría, pero en tal caso como cada componente de X debe ser 0 , ó 1 , podemos asumir que los vértices de G son numerados de forma tal que $X = [E_s, 0]$, $1 \leq s < n$, y B toma la forma $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$, donde B_1 tiene s filas, y B_2 las restantes $n - s$.

En tal caso, cada columna de B_1 contiene dos 1 , o ningún 1 . Además, como G carece de vértices aislados las filas de B_2 contienen 1 , y la cantidad de las columnas de B_1 que contienen dos unos debe ser menor que m .

Ordenando las aristas de G de forma tal que las columnas de B_1 que contienen estos dos 1 sean las primeras p , podríamos poner $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ con B_{12}

y B_{21} matrices nulas y $B_{2,2} \neq 0$.

Pero esto estaría en contradicción con hipótesis sobre la conexidad de G , y por lo tanto 0_n y E_n son los únicos admisibles.

II)) Veamos ahora que si G no es conexo los vectores $0_n, E_n$, no son las únicas soluciones del sistema

a) Si G tiene $k < n$ vértices aislados es factible ordenar las filas de B de forma que $X = [E_k, 0]$ satisfaga el sistema $X \cdot B = 0$. aún cuando $0_n \neq X \neq E_n$

b) Si G carece de vértices aislados B puede llevarse a forma bloque diagonal

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & B_k \end{pmatrix} \text{ con } B_i \text{ matriz de incidencia de la } i\text{-ésima componente.}$$

Si G_1 tiene n_1 vértices resulta que $X = [E_{n_1}, 0]$ satisface, en Z_2 , el sistema $X.B = 0$, aún cuando $0_n \neq X \neq E_n$.

Corolario

Si G es un multigrafo sin bucles, conexo, no trivial, de orden n , el rango en Z_2 de su matriz de incidencia es $(n-1)$.

Caso contrario existiría un vector $X \neq 0$ con a lo sumo $(n-1)$ componentes no nulas tales que $X.B = 0$.

Visto que dos vértices están en una misma componente conexa si y sólo si son extremos de al menos una cadena, para determinar la componente conexa que contiene un cierto vértice a pueden aplicarse cualesquiera de los métodos aptos para hallar cadenas con extremo en a .

También pueden utilizarse métodos matriciales; y en particular, según veremos, los que se indicarán en 3.9 y 3.10.

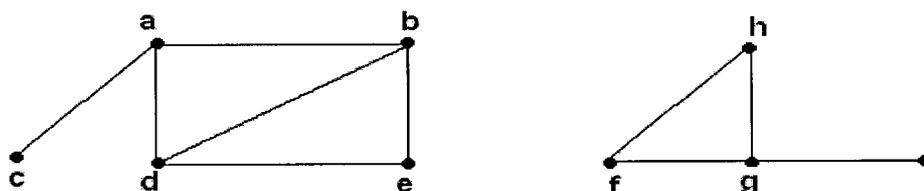
Más eficaz que recurrir a dichos procesos es reiterar a partir de a , y tanto como sea posible, la regla \mathcal{R} dada en pág.104, o bien aplicar el siguiente cuya metodología es similar al indicado en 3.2 para hallar distancias.

Algoritmo para la determinación de componentes conexas

En cada etapa del proceso los vértices se clasifican en “no marcados”; “marcados no explorados”; “marcados y explorados”, y se supone que al comienzo no hay vértices marcados.

- 1) Si existen vértices no marcados se elige uno de ellos, se lo marca, y se lo considera no explorado. Si existen marcados no explorados se pasa a 2)
- Si todos los vértices se han explorado fueron halladas todas las componentes conexas.
- 2) Se elige un vértice x marcado no explorado y se marcan todos sus adyacentes aún no marcados. Ahora x se considera explorado y se pasa a 3)
- 3) Si es factible se reitera 2). Caso contrario, se ha determinado la componente conexa que contiene al vértice marcado inicialmente al aplicar 1) y se vuelve al paso 1).

Ejemplo



Si en el paso 1) se marca el vértice a , al aplicar 2) deben marcarse b, c, d . Ahora a es explorado y debe volverse a 2). Si se elige c no hay nuevos vértices a marcar; c queda explorado y debe volverse a 2). Si ahora se elige d debe marcarse e y considerar d como explorado. Nuevas aplicaciones de los casos 2) y 3) permiten afirmar que se ha determinado la componente conexa que se genera desde a . Para hallar otra componente debe volver a aplicarse 1) a partir de alguno de los vértices f, g, h, i .

Un concepto sumamente importante, estrechamente ligado con el de conexidad, y a cuya utilización recurrieron, en el siglo XIX, Cayley [Cay57/75] y Kirchhoff [Kir47] es el de **árbol**. Será considerado con más detalle en Cap.8.

Habitualmente se lo define como *grafo conexo sin ciclos*, y entre ellos se incluyen, el grafo trivial, y las cadenas elementales abiertas. Algunos autores, limitan esta noción a grafos de orden $n \geq 2$.

La siguiente tabla da el número de árboles de orden n , $1 \leq n \leq 10$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	1	1	2	3	6	11	23	47	106

Como es natural, conjuntos de árboles sin vértices comunes se dirán **forests**.

Se propone al lector demostrar la siguiente

Proposición 3.6.2

Cada una de las siguientes afirmaciones equivale a : T es árbol (de orden n).

- 1) T es conexo sin ciclos.
- 2) Cada par de vértices de T está conectado por una única cadena.
- 3) T es conexo de orden n y tiene exactamente $(n-1)$ aristas.
- 4) T es acíclico de orden n y tiene exactamente $(n-1)$ aristas.
- 5) T es conexo y quitándole una arista, pero no un vértice, deja de serlo.
- 6) T es acíclico y agregándole una arista, pero no un vértice, se crea un ciclo.

Corolarios

- 1) Un grafo (V, U) es árbol si y sólo si es minimal (maximal) entre los conexos (los acíclicos) con vértices V .

2) Cualesquiera dos de las tres siguientes afirmaciones permiten afirmar que G es árbol de orden n : G es conexo de orden $n \iff G$ es acíclico de orden $n \iff G$ tiene exactamente $(n-1)$ aristas.

En [HarR74] se puntualiza que si bien parece natural convenir que el grafo vacío es conexo y acíclico (y por lo tanto árbol) esto contradice el hecho de que los árboles tienen exactamente un vértice más que aristas.

Creemos útil remarcar que para asegurar la conexidad de un grafo de orden n son necesarias

al menos $(n-1)$ aristas que no incluyan ciclos,
al menos $1 + \binom{n-1}{2}$ aristas distintas de bucle.

En Cap.7 veremos que en todo grafo de orden n , con k componentes conexas, el número m de aristas distintas de bucles satisface $n - k \leq m \leq \binom{n-k+1}{2}$

Como es natural se denomina **árbol cubriente** (de G) a todo subgrafo cubriente de G que además sea árbol, y **foresta cubriente** a toda foresta compuesta de árboles cubrientes..

Si T es árbol cubriente de G , las aristas de G incluidas en T se dicen **ramas** (de T), y las restantes **cuerdas** (de T).

Es fácil ver que :

|| Un multigrafo G contiene árboles cubrientes si y sólo si es conexo.

En efecto.

Si G contiene árboles cubrientes es conexo. Para demostrar la recíproca puede recurrirse a cualesquiera de los dos siguientes modos constructivos :

A₁

Si G es conexo y no es árbol, contiene ciclos. Eliminando una de las aristas de alguno de éstos ciclos se obtiene un conexo G_1 , subgrafo cubriente de G .

Si G_1 no es árbol se puede reiterar el proceso anterior, y esto hasta obtener un árbol cubriente de G .

A₂

Se designa G_0 al grafo discreto constituido por los vértices del conexo G y se reitera tanto como posible la siguiente operación :

a partir de G_i , $i \geq 0$, se construye G_{i+1} incorporándole alguna de las aristas de G que no forme ciclo con las de G_i .

Constatare que :

– un conexo contiene un único árbol cubriente si y sólo si es árbol.

- una arista es puente si y sólo si está contenida en todo árbol cubriente.
- toda arista de G , distinta de bucle, integra al menos uno de sus árboles cubrientes.

Sabemos que en cada conexo de orden n sus árboles cubrientes tienen exactamente $(n-1)$ aristas.

Por lo tanto

Si G es multigrafo de orden n , con p componentes conexas y m aristas entonces :

Las forestas cubrientes de G contienen $(n-p)$ ramas, y $m-(n-p)$ cuerdas.

Si T es una de las forestas cubrientes, y u una de sus cuerdas, $T \cup \{u\}$ contiene un único ciclo,

Si $u \neq v$ son cuerdas de una misma foresta cubriente T , los ciclos contenidos en $T \cup \{u\}$ y en $T \cup \{v\}$ son independientes.

En consecuencia, un tal G admite $\mu(G) = m - (n - p)$ ciclos independientes.

El valor $\mu(G)$ es dicho "número ciclomático (o nulidad) de G ".

En Cap.7 se mostrará porqué el valor $\nu(G) = n - p$ es denominado "número cociclomático de G ". También se le dice "rango de G ".

Así, de ambos resultados "duales" resulta que

$$\| \text{Cualquiera sea el multigrafo } G \text{ de orden } n : \mu(G) + \nu(G) = n.$$

Un vértice v de un multigrafo G se dice **vértice de corte** (o **de articulación**, o **de enlace**) si y sólo si el multigrafo $G - \{v\}$ tiene más componentes que G .

Véase que :

- ni los vértices aislados, ni los vértices pendientes, son de corte.
- si u es arista puente, cada uno de sus extremos, excepto sea vértice pendiente, es vértice de corte.
- en cada árbol, sus vértices no pendientes son de corte.
- si x es vértice de corte de G , no lo es de su complementario.
- x es vértice de corte de G si y sólo si en $G - \{x\}$ existen al menos otros dos tales que toda cadena que los conecta incide en x .
- un vértice de corte de G puede, o no, serlo también de un subgrafo de G .

Además, puesto que los extremos de las cadenas elementales maximales en cuanto a su longitud no son vértices de corte, se tiene que :

Todo conexo con al menos tres vértices tiene al menos dos que no son de corte.

Así como los “árboles” (*conexos, sin ciclos*) constituyen una muy importante clase de grafos; otra que merece mencionarse es la de aquellos que son “*conexos de orden $n \geq 3$ sin vértices de corte*”. Se los denomina **2-conexos**.

Se muestra que G es grafo 2-conexo si y sólo si para cada par de vértices

- existe al menos un ciclo elemental que los contiene, o equivalentemente
- existen dos cadenas sin vértices interiores comunes que los conectan.

Otras caracterizaciones serán indicadas en Ejer.3-29), y en Cap.7.

3.6.2. CONEXIDAD FUERTE Y CONEXIDAD UNILATERAL

También para el caso dirigido se han estudiado diferentes clases de conexidades. Seguidamente consideraremos algunas de ellas.

Un multidigrafo se dice **fuertemente conexo** (*f-conexo*) si es trivial, o existen caminos $a \rightarrow b$, $b \rightarrow a$, cualesquiera sean $a \neq b$; y **unilateralmente conexo** (*u-conexo*) si es trivial, o para cada par de vértices $a \neq b$ existe al menos uno de los caminos. $a \rightarrow b$, $b \rightarrow a$.

Además, un multidigrafo es **conexo (disconexo)** si y sólo si lo es su sostén.

En [Roy62a/69] los *unilateralmente conexos* se dicen *semi-fortement connexes*

Los f-conexos son u-conexos y éstos son conexos. Las respectivas recíprocas son falsas.

En cambio, es fácil constatar que son fuertemente conexos los conexos balanceados (ver Prop.4.2.1)

De las definiciones respectivas resulta que :

- Los fuertemente conexos, distintos de K_1 carecen de entradas y salidas. El digrafo de arcos (a, b) , (b, a) , (b, c) , (c, d) , (d, c) muestra que la recíproca es falsa, aún entre los conexos.
- Un digrafo es conexo si y sólo si su clausura simétrica es f-conexo.
- Todo unilateralmente conexo contiene vértices raíces. La recíproca es falsa.
- G es fuertemente conexo, no trivial, si y sólo si su clausura transitiva contiene

arcos (x, y) , (y, x) cualesquiera sean los vértices $x \neq y$.

- Un multigrafo es f-conexo si y sólo si cualquiera sea la partición de su conjunto de vértices en clases no vacías A, B , existe al menos un arco con extremo inicial en A y final en B , y otro con extremo inicial en B y final en A .

De la Prop.5.3.1-Corol.4 se infiere que agregando a un multidigrafo u-conexo un arco adecuadamente elegido, puede obtenerse otro fuertemente conexo.

En Cap.7 veremos que puede afirmarse la fuerte conexidad de todo :

- digrafo de orden n carente de bucles, con al menos $1 + (n-1)^2$ arcos.
- digrafo de orden n , carente de entradas, de salidas y de bucles, con al menos $(n-1)^2$ arcos.

De lo que sigue resulta otra forma de introducir el concepto *fuerte conexidad*.

Cualquiera sea el multidigrafo $G = (V, U)$, la relación R' definida por :

$x \in R'(a)$ si y sólo si $x = a$, o existen caminos $x \rightarrow a$; $a \rightarrow x$
es una relación de equivalencia en V

Los submultidigrafos de G que inducen los vértices de las correspondientes clases de equivalencia son sus **componentes fuertemente conexas** (o más brevemente, **componentes fuertes**).

Para hallarlas se han propuesto numerosos métodos. Referencia a varios que recurren a operaciones con matrices, y que en consecuencia conllevan una elevada cantidad de operaciones, se darán en 3.7, 3.8 y 3.9.

Un método preferible a ellos, pues es fácil de implementar es el que sigue.

Está fundado en que los vértices de la componente fuerte de $G = (V, \Gamma)$ que contiene a cierto vértice a son los de $\vec{\Gamma}(a) \cap \vec{\Gamma}^{-1}(a)$.

Algoritmo para determinar las componentes fuertes de un multidigrafo finito.

- 0) Inicialmente ningún vértice está marcado.
- 1) Se elige un vértice no marcado, y se lo marca $+\backslash-$.
- 2) Si p está marcado $+$, se marca $+$ todo vértice q tal que exista arco (p, q) ; y se reitera 2) tanto como sea posible.
- 3) Si p está marcado $-$, se marca $-$ todo vértice q tal que exista arco (q, p) , y se reitera 3) tanto como sea posible.
- 4) Los vértices marcados con ambos signos pertenecen a la componente fuerte que contiene al marcado en ocasión de aplicar 1).

5) Se los excluye del multidigrafo en estudio, se borran las marcas y se vuelve a aplicar 1), excepto si todos los vértices fueron marcados.

El multidigrafo es fuerte si y sólo si todos sus vértices quedan marcados con ambos signos a partir de la primera aplicación de la etapa 1)

Dado un multidigrafo G su **multidigrafo cociente por fuerte conexidad** G_{fc} tiene por vértices a las componentes fuertes de G , y tantos arcos de la forma (X, Y) como arcos (x, y) con $x \in X, y \in Y$ hay en G

De la definición resulta que G_{fc} carece de bucles, coincide con G si y sólo si éste carece de circuitos, y con K_1 si y sólo si G es fuertemente conexo.

Puesto que G_{fc} carece de caminos cerrados, su construcción provee una forma directa y natural de asociar a cada digrafo un conjunto ordenado.

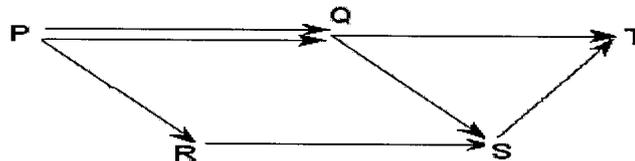
Además, la determinación de las componentes fuertes de G permiten concretar "ordenamientos por niveles" en G_{fc} y con ellos obtener "representaciones topológicas manejables" de G .

Así, en $G = (V, \Gamma)$, con

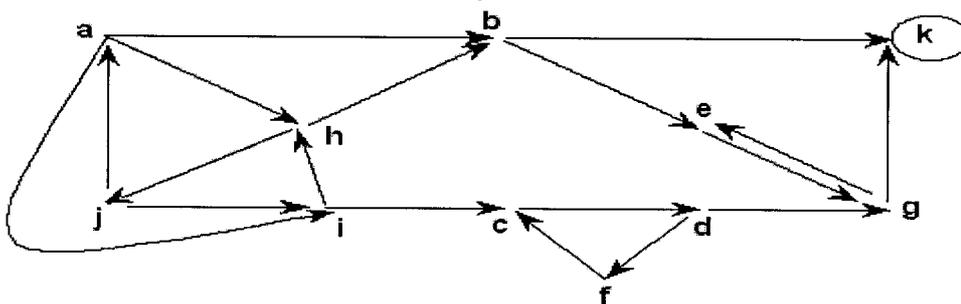
x	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
$\Gamma(x)$	b, h, i	e, k	d	f, g	g	c	e, k	b, j	c, h	a, i	k

sus componentes fuertes son las inducidas por los conjuntos de vértices $P = \{a, h, i, j\}$; $Q = \{b\}$; $R = \{c, d, f\}$; $S = \{e, g\}$; $T = \{k\}$.

El multidigrafo G_{fc} ordenado por niveles ascendentes es



de donde puede llegarse a la siguiente representación de G .



El conocimiento de G_{fc} permite, además, descomponer el análisis de ciertos problemas sobre G en el de otros, a considerar ya sea en digrafos sin circuitos, o bien en digrafos fuertemente conexos.

Lleva también a disminuir la capacidad de memoria necesaria para almacenar la información que permite operar en G .

Para obtener a partir de cierto G un digrafo sin circuitos en lugar de construir su G_{fc} podría apelarse a una adecuada eliminación de arcos, o de vértices. Los algoritmos propuestos a este efecto en [LemC66] y [You63] se pueden consultar en [Walt84]-Cap.9.

También podría recurrirse a cambios en las direcciones de algunos arcos.

Por otro lado, “como cuestión casi opuesta” de la precedente cabe preguntarse
 ¿ Cuándo es posible orientar las aristas de un grafo de forma que resulte un digrafo fuertemente conexo ?

Esta posibilidad responde, en particular, a la siguiente pregunta :

¿ Cuando pueden asignarse a las cuerdas de una ciudad sentido único de circulación de forma tal que respetando las reglas de circulación, desde cada punto de la ciudad puede llegarse a cualquier otro ?

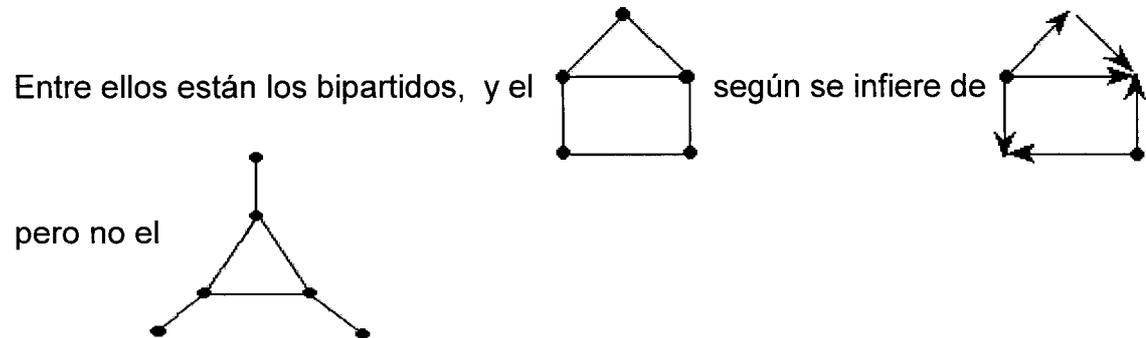
Se deja al lector verificar la siguiente afirmación, dada en [Robb39]

Las aristas de un grafo finito G pueden orientarse de manera que resulte un digrafo fuertemente conexo si y sólo si G es 2-conexo; o sea, si y sólo si es conexo y carece de aristas puente

Otras dos preguntas de interés son :

- 1) ¿ Cuando es posible dar a las aristas de un grafo orientaciones compatibles con una relación de orden ?
- 2) ¿ Cuando es factible orientar las aristas de un grafo de forma que se obtenga el Diagrama de Hasse de un conjunto ordenado ?

Los grafos que permiten resolver afirmativamente la primera de las preguntas se dicen “*grafos de comparabilidad*”.



Se muestra que los grafos de comparabilidad son complementarios de los de intervalo.

Sus caracterizaciones dadas en [GhoH62a] y [GilH64] pueden reformularse en:

Un grafo sin bucles es de comparabilidad si y sólo si toda cadena cerrada $v_1, v_2, \dots, v_k, (v_1)$ (no necesariamente orientable) de longitud k impar contiene al menos una arista $[v_i, v_j]$ con $j = i + 2 \pmod{k}$

Luego, en [Gall67] se los caracterizó en términos de subgrafos prohibidos.

Para mayor información : [Aig69a], [Ber67a/70], [Kelly85], [Möh85], [PnuLE71], [TroM76a/76b].

Los esquemas que responden afirmativamente a la segunda de las preguntas (*covering graphs*) no deben contener a K_3 como subgrafo.

En [NesR87] se muestra que ésta restricción también es suficiente para el caso de los grafos planares, pero no para el caso general.

Consideraciones sobre ellos pueden verse en [Pre85/86/91] y [Riv85b/89b]

3.7. TRANSITABILIDAD Y MATRICES

Hasta aquí hemos puesto énfasis en las representaciones topológicas de los multi-di-grafos, y hecho algunas breves referencias a las dadas por tablas, o por matrices.

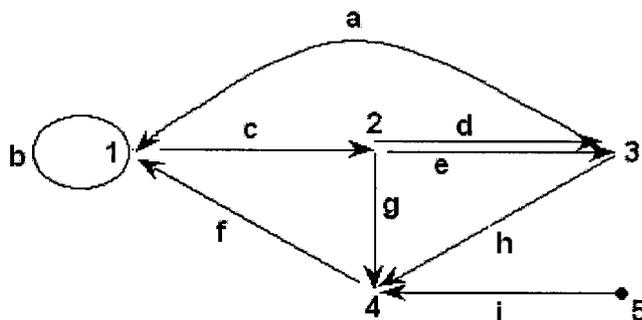
A continuación veremos algunas de las consecuencias que resultan del uso de las matrices de precedencia, o de adyacencia.

Sobrentendiendo el uso de la conocida relación entre cada multidigrafo y su sostén recordemos que dado un multidigrafo $G = (V, U)$ de vértices etiquetados $1, 2, 3, \dots, n$; su matriz de precedencia $P(G) = (p_{i,j})$ y su matriz de adyacencia $A(G) = (a_{i,j})$ son definidas por :

$p_{i,j}$ igual al número de arcos de la forma (i, j) ; eventualmente $i = j$.

$a_{i,j}$ igual al número de aristas de la forma $[i, j]$, eventualmente $i = j$.

Ejemplo



Poniendo . en lugar de 0

$$P(G) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . \\ . & . & 2 & 1 & . \\ 1 & . & . & 1 & . \\ 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . \end{vmatrix} \quad A(G) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . \\ 1 & . & 2 & 1 & . \\ 1 & 2 & . & 1 & . \\ 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ . & . & . & 1 & . \end{vmatrix}$$

Algunas propiedades de estas matrices, inmediatas a partir de la definición, se indicaron en 2.2. Otras son las que siguen.

– G tiene p componentes conexas si y sólo si etiquetando adecuadamente sus vértices su matriz adyacencia toma forma bloque diagonal con p bloques. Cada uno de éstos corresponde a una de las componentes conexas de G , y todos los valores fuera de ellos son nulos.

Así por caso la matriz adyacencia del grafo $K_1 + K_2$ sería

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

– G tiene p componentes fuertemente conexas si y sólo si etiquetando adecuadamente sus vértices su matriz precedencia contiene p bloques, representantes de las p componentes fuertes de G .

Pero, a diferencia del caso anterior no serán necesariamente nulos los valores que no pertenecen a dichos bloques.

Así, para el digrafo de arcos $(1, 2), (2, 3), (3, 2)$ se tendría

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Proposición 3.7.1

- Si P es la matriz de precedencia del multidigrafo G , la componente $p_{i,j}^{(r)}$ de P^r es el número de caminos $i \rightarrow j$ de longitud r .
- Si A es la matriz de adyacencia del multigrafo G , la componente $a_{i,j}^{(r)}$ de A^r es, supuesto que se identifican los pares de cadenas opuestas, el número de aquellas de longitud r , con extremos i, j .

Demostraremos la afirmación a) por inducción.
En forma análoga podríamos justificar b).

La validez de lo afirmado es inmediata para $r = 1$ (idem para $r = 0$ identificando vértices con caminos de longitud nula y P^0 con matriz identidad),
 Además, por hipótesis inductiva $p_{i,k} \cdot p_{k,j}^{(r-1)}$ da el número de los r -caminos $i \rightarrow j$ incidentes en k .

De esto, y visto que todo r -camino $i \rightarrow j$ se obtiene concatenando un arco (i, x) con un camino $x \rightarrow j$ de longitud $(r - 1)$, y que dos r -caminos son distintos si y sólo si se diferencian en sus respectivos arcos iniciales, o en sus respectivos subcaminos finales de longitud $(r - 1)$, se infiere la validez de a)

En particular, con referencia al ejemplo anterior, y poniendo . en lugar de 0

$$(P(G))^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & . \\ 3 & . & . & 2 & . \\ 2 & 1 & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . \end{pmatrix} \quad (A(G))^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & . \\ 1 & 1 & 1 & . & 1 \end{pmatrix}$$

Puede verificarse que $p_{1,2}^{(2)} = 1$ corresponde al camino $1, b, 1, c, 2$; y que $p_{2,1}^{(2)} = 3$ cuenta los tres caminos de longitud dos que llevan desde el vértice 2 al 1, a saber $2, d, 3, a, 1 \parallel 2, e, 3, a, 1 \parallel 2, g, 4, f, 1$.

A su vez, mientras $a_{1,2}^{(2)} = 4$ corresponde a las cadenas $1, b, 1, c, 2 \parallel 1, a, 3, d, 2 \parallel 1, a, 3, e, 2 \parallel 1, f, 4, g, 2 \parallel$, las cuatro cadenas cerradas en 1 que indica $a_{1,1}^{(2)} = 4$ son las resultantes de recorrer dos veces las aristas incidentes en 1.

Si P es una matriz estocástica; es decir si sus componentes satisfacen $p_{ij} \geq 0$ y $\sum_j p_{i,j} = 1$

cada p_{ij} puede pensarse como la probabilidad de pasar directamente del estado i al j .
 En tal caso P es la "matriz de transición" que estudia la Teoría de las Cadenas de Markov, y lo afirmado en Prop. 3.7.1 a) se corresponde con el resultado de dicha teoría según el cual: la probabilidad de pasar del estado i al estado j utilizando exactamente r transiciones (no necesariamente entre estados diferentes) es $p_{i,j}^{(r)}$. (ver [Deo74], [Pea73])

De la Proposición anterior caben los siguientes corolarios:

- 1) j es accesible desde i (j está conectado con i) si y sólo si existe algún $r \geq 0$ para el cual $p_{i,j}^{(r)} \neq 0$ ($a_{i,j}^{(r)} \neq 0$).
- 2) si la distancia (distancia orientada) entre i, j , es finita, ella coincide con el me-

nor entero r para el cual $a_{i,j}^{(r)} \neq 0$ ($p_{i,j}^{(r)} \neq 0$).

- 3) el vértice i pertenece a un camino cerrado de longitud r si y sólo si $p_{i,i}^{(r)} \neq 0$;
y a una r -cadena cerrada si y sólo si $a_{i,i}^{(r)} \neq 0$
- 4) el vértice i es aislado si y sólo si para todo $k \geq 1$, $a_{i,i}^{(k)} = 0$.
- 5) G es bipartido si y sólo si para todo h impar la traza de A^h es nula.
- 6) si G tiene al menos una arista, cualquiera sea $r \geq 0$, $A^r \neq 0$.
- 7) G carece de caminos cerrados si y sólo si existe un r tal que cualquiera sea $s \geq r$, $P^s = 0$,
- 8) G carece de caminos cerrados si y sólo si $p_{i,i}^{(r)} = 0$ para todo $r > 0$, y para todo $1 \leq i \leq n$.

Del Corol. 2 resulta un método alternativo del dado en 3.2 para calcular distancias entre pares de vértices.

Los Corol. 7 y 8 dan formas de decidir sobre la existencia de caminos cerrados. Otras, que no presuponen multiplicaciones de matrices fueron dadas en 3.5.

A partir de los corolarios anteriores, y de las afirmaciones **A)**, **B)** dadas en 2.2 se pueden inferir algunos resultados propios de la teoría de matrices.

En particular :

- 1) Si M es una matriz simétrica de componentes enteras no negativas, sin líneas nulas, la diagonal principal de M^p carece de componentes nulas, cualquiera sea p par.

Además, recordando que una matriz M se dice **nilpotente** si a partir de cierto $k \geq 1$ todas sus potencias M^k son la matriz nula, caben las siguientes :

- 2) Una matriz cuadrada de enteros no negativos es nilpotente si y sólo si es la de precedencia de un multidigrafo sin circuitos ; o equivalentemente, si y sólo si todas sus potencias tienen diagonal principal nula.
- 3) Excepto la matriz nula, ninguna matriz simétrica de componentes enteras no negativas es nilpotente.

Por otra parte, como un digrafo carece de circuitos si y sólo si todos sus subdigrafos tienen entrada y salida, cabe la siguiente afirmación, que extiende a la Prop. 3.5.3, enunciada en [Mari59/60] para el caso de matrices de $0, 1$.

Una matriz cuadrada de enteros no negativos es nilpotente si y sólo si toda submatriz principal tiene al menos una línea (fila o columna) de ceros.
De ella se infiere el siguiente

Método para evaluar si una dada matriz de enteros no negativos es nilpotente.

Si la i -ésima fila, o la i -ésima columna es nula, eliminar ambas, y reiterar esta operación con la submatriz así obtenida.

La matriz de partida es nilpotente si y sólo si luego de reiterar tanto como sea posible las eliminaciones indicadas se llega a una matriz vacía.

Considerando matrices representativas de digrafos (o de grafos) valuados, razonamientos similares a los efectuados permiten eliminar en algunas de las propiedades precedentes la restricción "ser matrices de enteros".

Respecto de los *camino elementales* notemos que si bien cada $p_{i,j} \in P$ da el número de ellos desde i hasta j de longitud uno, no es válido afirmar lo mismo respecto de las componentes de las P^h , con $h \geq 2$

Más precisamente, se tiene que :

$p_{i,j}^{(h)}$ da el número de caminos elementales $i \rightarrow j$ de longitud h , $1 \leq h \leq r$,
si y sólo si G carece de caminos cerrados de longitud $L < r$

El digrafo de arcos $(1, 2)$, $(2, 1)$ muestra que esta cota no puede mejorarse.

En 3.10. se darán algunos métodos referidos a caminos elementales.

Para muchos problemas, y en particular cuando sólo interesa conocer sobre la existencia de caminos (cadenas) de extremos i, j , pero no sobre su cantidad, en lugar de operar en "modo real" puede recurrirse al "modo booleano".

Para ello, a cada multidigrafo G de vértices $1, 2, 3, \dots, n$, se asocian su *matriz precedencia booleana* $\underline{P} = (\underline{p}_{i,j})$ y su *matriz adyacencia booleana* $\underline{A} = (\underline{a}_{i,j})$ definidas por :

$$\underline{p}_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si existen arcos } (i, j) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \underline{a}_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si hay aristas } [i, j] \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Volviendo al ejemplo anterior y aplicando dichas "operaciones booleanas" resultará que en \underline{P} , $\underline{P}^{[2]}$, \underline{A} , $\underline{A}^{[2]}$ se tendrán "1" en "los mismos lugares" que antes había valores no nulos.

Más precisamente, aplicando *operaciones booleanas*, y razonando en forma similar a la que permitió demostrar la Prop.3.7.1 se deduce la

Proposición 3.7.2

- a) Si \underline{P} es la matriz precedencia booleana de G , en $\underline{P}^{[r]}$ se tiene $p_{ij}^{[r]} = 1$ si y sólo si en G existe al menos un camino $i \rightarrow j$ de longitud r .
- b) Si \underline{A} es la matriz adyacencia booleana de G , en G existe al menos una r -cadena de extremos i, j , si y sólo si $a_{ij}^{[r]} = 1$.

La Prop.3.7.2 admite corolarios análogos a los de la 3.7.1 que no implican recuento y además los que siguen :

- Si \underline{P} es la matriz de precedencia booleana de G y $\underline{P}^{[r]} = \underline{P}^{[r+1]}$ el digrafo asociado a $\underline{P}^{[r]}$ es el clausura reflexivo transitiva de G .
Sus filas (columnas) idénticas determinan las componentes fuertes de G .
- Si G es de orden n , las filas (las columnas) idénticas de $A^\# = \bigvee_i (A(G))^{[i]}$, $0 \leq i \leq n-1$ dan sus componentes conexas.
Así, G es conexo si y sólo si todas las componentes de $A^\#$ son 1.

3.8. OTROS RESULTADOS GRAFOS-MATRICIALES

La siguiente operación, que es asociativa y conmutativa, provee una forma de determinar, a partir de la clausura transitiva, las componentes fuertes.

Se dice **producto punto a punto** (o producto Hadamard) de las matrices A, B , a la matriz $C = A \times B$ tal que $c_{i,j} = a_{i,j} \cdot b_{i,j}$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$

En efecto :

Si \underline{P}^* es la matriz clausura transitiva del digrafo G , $(\underline{P}^*)^t$ su traspuesta, y $C = \underline{P}^* \times (\underline{P}^*)^t$ existe circuito que contiene los vértices i, j , si y sólo si $c_{ij} = 1$.

De donde :

- 1) G carece de circuitos si y sólo si C es una matriz nula.
- 2) Dado un vértice x_i , los restantes vértices de la componente fuerte que lo

contiene son aquellos x_j tales que $c_{i,j} = 1$.

Por otro lado, una matriz de enteros no negativos se dice **primitiva** si a partir de cierto $k \geq 1$ todas las componentes de M^k son positivas, y el menor k para el cual todas las componentes de M^k son positivas es su **índice de primitividad**.

Por lo tanto, la Prop. 3.7.1 permite afirmar :

Si la matriz adyacencia (precedencia) de G es primitiva, G es conexo (fuertemente conexo)

La matriz adyacencia del grafo de aristas $[1, 2]$, $[2, 3]$, y la de precedencia de su simetrizado muestran que las respectivas recíprocas son falsas.

Es claro que :

- Si k es el índice de primitividad de la matriz precedencia de G , desde cada uno de sus vértices se puede acceder a todos, incluido el de partida, con caminos de longitud k' , cualquiera sea $k' \geq k$.
- Si se supone que para "recorrer un arco" es necesario una unidad de tiempo la longitud de cada camino coincide con el tiempo que lleva recorrerlo.

En consecuencia, supuesto los vértices son "centros de emisión de mensajes", y que éstos se propagan indefinidamente tendremos que

Si el índice de primitividad de $P(G)$ es k , todo mensaje emitido en el instante $t = 0$ en alguno de los vértices de G será recibido, simultáneamente en todos sus vértices, incluido el de partida, en cada instante $k' \geq k$.

En particular, para el digrafo de arcos (a, b) , (b, a) , (b, c) , (c, d) , (d, b) , su matriz precedencia tiene índice de primitividad seis, y en la siguiente tabla se ejemplifica lo antedicho.

En efecto, en la primera fila de ella se indican los vértices alcanzados en el tiempo t , $t \geq 1$, por un mensaje emitido en $t = 0$ en el vértice a .

Las restantes filas corresponden a los otros posibles centros de emisión.

t	1	2	3	4	5	≥ 6
a	b	$a-c$	$b-d$	$a-b-c$	$a-b-c-d$	$a-b-c-d$
b	$a-c$	$b-d$	$a-b-c$	$a-b-c-d$	$a-b-c-d$	"
c	d	b	$a-c$	$b-d$	$a-b-c$	"
d	b	$a-c$	$b-d$	$a-b-c$	$a-b-c-d$	"

Esta temática de "periodicidad en fuertemente conexos" también es considerada en [BruR91], [BusS65], [DulM67/69] y [KemS60]

Hemos visto que si la matriz de precedencia $P(G)$ es primitiva G es f-conexo, y que la recíproca es falsa.
Veamos ahora que, en cambio, ellos pueden ser caracterizados en términos de matrices irreducibles.

Recordemos al efecto que una matriz cuadrada de componentes no negativas M se dice **reducible** si existe una matriz de permutación Π tal que

$$\Pi^{-1} \circ M \circ \Pi = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \\ M_{2,1} & M_{2,2} \end{pmatrix} \text{ con } M_{1,1}, M_{2,2} \text{ cuadradas, y nula al menos una de las dos restantes. Caso contrario es irreducible.}$$

Proposición 3.8.1

G es fuertemente conexo si y sólo si su matriz de precedencia P es irreducible.

Demostración

Si P es reducible, para una adecuada numeración de los vértices ella toma la

forma $P = \begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} \\ 0 & P_{2,2} \end{pmatrix}$ con 0 matriz nula, y $P_{1,1}; P_{2,2}$ cuadradas.

Las potencias de P tendrán igual forma, y por lo tanto si A es el conjunto de vértices correspondientes a las filas de $P_{2,2}$, y B el de las columnas de $P_{1,1}$, se puede afirmar que G no contiene caminos de la forma $a \rightarrow b$ con $a \in A, b \in B$. Luego G no es fuertemente conexo.

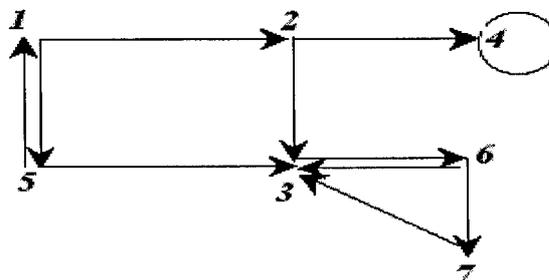
Recíprocamente, si G no es fuertemente conexo existe al menos un vértice x_0 desde el cual no es posible llegar a todos los otros.

Sea R el conjunto de los vértices accesibles desde x_0 (se incluye x_0), y S el de los restantes. Si $R = \{1, 2, \dots, h\}$, $h < n$, y $S = \{h+1, \dots, n\}$ cualesquiera sean $1 \leq i \leq h, h+1 \leq j \leq n$ se tiene $p_{i,j} = 0$, y por lo tanto P es reducible.

Corolario :

Dos vértices de G pertenecen a una misma componente fuerte si y sólo si para cierta matriz de permutación Π sus correspondientes filas y columnas están en un mismo bloque diagonal de $\Pi^{-1} \circ M \circ \Pi$.

Así por ejemplo, dado



sus componentes fuertes son las inducidas por los vértices $\{1, 5\}, \{2\}, \{4\}, \{3, 6, 7\}$

Para la permutación $\Pi : 1 \rightarrow 1 \parallel 2 \rightarrow 3 \parallel 3 \rightarrow 5 \parallel 4 \rightarrow 4 \parallel 5 \rightarrow 2 \parallel 6 \rightarrow 6 \parallel 7 \rightarrow 7$ su nueva matriz precedencia es

$$P' = \Pi^{-1} \circ P \circ \Pi = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

con cuatro bloques diagonales, los de filas y columnas $\{1,2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5,6,7\}$.

Los dígrafos fuertemente conexos también son caracterizados por tener una matriz de precedencia que es doblemente estocástica con ciertas restricciones. [HatS72]

Por otro lado, de lo visto poco más arriba resulta que :

Toda matriz primitiva es irreducible.

La recíproca sólo es válida en casos especiales. Más precisamente, se deduce (ver [BruR91]-Cap.3.4 ; [BusS65] -Th.5-7) que :

Si G es fuertemente conexo de orden $n \geq 2$ su matriz precedencia es primitiva si y sólo si el máximo común divisor de las longitudes de los circuitos de G (su índice de imprimitividad) es la unidad.

Se dice **matriz de accesibilidad** (reachability) de G a la matriz. $R(G) = (r_{i,j})$ tal que : $r_{i,j} = 1$ si $i = j$ o existe camino $i \rightarrow j$
 $r_{i,j} = 0$ en caso contrario

Obviamente, todos los dígrafos con igual clausura reflexivo-transitiva tienen una misma matriz de accesibilidad. Así, ella no permite reconstruir G .

En cambio, permite detectar fácilmente la eventual existencia de puntos inalcanzables desde alguno prefijado.

Dos vértices de G pertenecen a una misma componente fuerte si y sólo si son idénticas las filas y las columnas que las representan en $R(G) \wedge (R(G))^t$.

Mejor aún, como en $R(G)$ las componentes de su diagonal principal son 1, cabe afirmar :

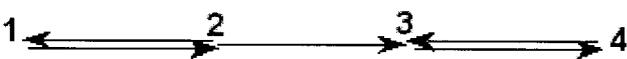
Dos vértices son interaccesibles; o sea, pertenecen a una misma componente fuerte si y sólo si sus respectivas filas (columnas) en $R(G)$ son idénticas.

En efecto, si $r_{i,j} = 1$, de $r_{i,i} = r_{j,j} = 1$ y la supuesta identidad entre la i -ésima fila (columna) y la j -ésima fila (columna) resulta que $r_{j,i} = 1$ y por lo tanto, que ambos vértices i, j , pertenecen a una misma componente fuerte.

Recíprocamente, si ambos vértices están en una de esas componentes las respectivas filas (columnas) son iguales.

Por lo tanto :

- Dos filas (columnas) son idénticas en $R(G)$ si y sólo si también lo son en $R(G) \wedge (R(G))^t$.
- G es fuertemente conexo si y sólo si $R(G)$ carece de componentes nulas.
- Las componentes fuertes de G son inducidas por los vértices cuyas filas (columnas) en $R(G)$ coinciden.

Así por ejemplo, dado G 

$$R(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ . & . & 1 & 1 \\ . & . & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad R(G) \wedge (R(G))^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & . & . \\ 1 & 1 & . & . \\ . & . & 1 & 1 \\ . & . & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si en lugar de $R(G) \wedge (R(G))^t$ se considera $R(G) \vee (R(G))^t$ cabe la siguiente afirmación :

- | Los vértices correspondientes a sus filas (columnas) idénticas son los de una misma componente conexa.

El digrafo de arcos (a, c) , (b, c) muestra que la recíproca es falsa.

3.9. ALGORITMO DE ROY-WARSHALL

Habitualmente, los métodos matriciales para contar caminos en dígrafos llevan a evaluar simultáneamente a todos los de cierta longitud, y esto para las sucesivas longitudes crecientes.

El que nos ocupará en esta sección en lugar de tomar en cuenta dichas longitudes atiende al orden inducido por la designación de los vértices del digrafo.

Aplicado a matrices de orden n la cantidad de operaciones que requiere es de orden n^3 , similar al que implica efectuar un único producto de tales matrices.

La correspondencia biyectiva entre las cadenas elementales de un multigrafo y los caminos elementales de su simetrizado permite aplicarlo también en el caso no dirigido.

El algoritmo en cuestión es fácil de implementar y permite, sin necesidad de recurrir a productos de matrices, decidir sobre la existencia de caminos entre los distintos pares de vértices. Fue propuesto en forma independiente por Roy [Roy59/62a], y por Warshall [War62].

En [SwaT81]-Cap.14-1 se analizan las modificaciones propuestas en [War75].

La idea básica del mismo es :

Dado un digrafo de vértices $1, 2, 3, \dots, n$; y procediendo recursivamente sobre k indicar la existencia de caminos $i \rightarrow j$ con todos sus vértices interiores etiquetados a lo sumo k .

A tal efecto bastará incorporar, para los sucesivos valores crecientes de k , arcos (i, j) cuando existan arcos (i, k) , (k, j) y conservar los restantes.

Esto se reflejará en matrices construidas a partir de la matriz de precedencia, aplicando tanto como sea posible, y para valores crecientes de k la operación

$$\text{si } m_{ij}^k = 0 \text{ y } m_{i,k}^{k-1} = m_{k,j}^{k-1} = 1 \text{ substituir } m_{ij}^k = 0 \text{ por } m_{ij}^k = 1.$$

Algoritmo de Roy-Warshall (para determinar clausuras transitivas de digrafos)

Dado el digrafo G de vértices $1, 2, \dots, n$, y su matriz de precedencia $P(G)$ sean

$$\left\{ \begin{array}{l} C^{(0)} = P(G) = (c_{i,j}^0) \quad \text{con } c_{i,j}^0 \in \{0, 1\} \\ C^{(k)} = (c_{i,j}^k) \quad \text{con } c_{i,j}^k = c_{i,j}^{k-1} \vee (c_{i,k}^{k-1} \wedge c_{k,j}^{k-1}) ; \quad 1 \leq k \leq n. \end{array} \right.$$

De la regla dada resulta que fijado k : $c_{i,k}^k = c_{i,k}^{k-1}$ y $c_{k,j}^k = c_{k,j}^{k-1}$

Por lo tanto, la k -ésima fila (columna) de C^k coincide con la k -ésima fila (columna) de C^{k-1} .

Por recurrencia resulta que las sucesivas matrices $C^k = (c^k_{i,j})$ son tales que :

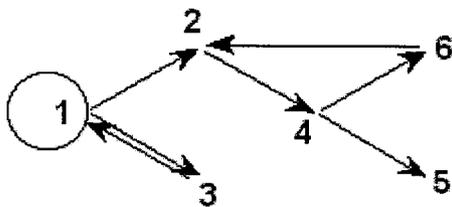
$$c^k_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si hay arco } (i, j), \text{ o existe camino } i \rightarrow j \text{ (eventualmente } i = j) \\ & \text{con todos sus v\u00e9rtices interiores numerados a lo sumo } k. \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En efecto, por aplicaci\u00f3n del algoritmo "los arcos se conservan", y "se crean caminos $i \rightarrow j$ " (posiblemente $i = j$) con todos sus v\u00e9rtices interiores numerados a lo sumo k si ya existen caminos $i \rightarrow j$ con todos sus v\u00e9rtices interiores numerados a lo sumo $(k-1)$, o si hay caminos $i \rightarrow k$, $k \rightarrow j$ con sus respectivos v\u00e9rtices interiores numerados a lo sumo $(k-1)$.

As\u00ed entonces, si G es de orden n , aplicando el m\u00e9todo a partir de su matriz precedencia se tiene que C^n da su clausura transitiva.

Para hallar su clausura reflexivo-transitiva bastar\u00eda aplicarlo a partir de $(\Gamma \cup \mathfrak{F})$ o mejor ; recordar que $\vec{\Gamma} = \Gamma^* \cup \mathfrak{F}$, pues esto permite identificar los v\u00e9rtices que no pertenecen a caminos cerrados .

Poniendo . en lugar de 0 apliquemos el m\u00e9todo para hallar la clausura transitiva del siguiente digrafo



$$C^{(0)} = P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$C^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ 1 & 1 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$C^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ 1 & 1 & 1 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 1 & . & . \end{pmatrix}$$

$$C^{(3)} = C^{(2)}$$

$$C^{(4)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ . & . & . & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ . & . & . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad C^{(5)} = C^{(4)} \quad C^{(6)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ . & 1 & . & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ . & 1 & . & 1 & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Como todas las componentes de valor 1 en cierta $C^{(h)}$ se mantienen en las siguientes $C^{(h')}$, $h' > h$, una forma práctica de construirlas es aplicar la siguiente

Operación L

A partir de $C^{(0)} = P \vee I$, y conocida $C^{(k-1)}$ verificar, para cada $c^{k-1}_{i,j} = 0$ si hay alguna "L" de componentes $c^{k-1}_{k,k} = c^{k-1}_{i,k} = c^{k-1}_{k,j} = 1$.
Si una tal L existe pondremos $c^k_{i,j} = 1$; caso contrario $c^k_{i,j} = 0$.

La modificación a introducir si elegimos $C^{(0)} = P$ es evidente.

Si al aplicar el algoritmo sustituimos por * los 1 de $C^{(0)}$, y por i los 1 que se incorporan al calcular $C^{(i)}$ se puede obtener información adicional.

Más precisamente,

Si con esta convención a la componente de $C^{(n)}$ de coordenadas i, j , le corresponde valor k , resulta que existe al menos un camino desde i hasta j con subcaminos $i \rightarrow k, k \rightarrow j$.

En particular, aplicando esta convención al ejemplo anterior tendríamos, en lugar de la precedente matriz clausura transitiva $C^{(6)}$ la siguiente :

$$C^* = \begin{vmatrix} * & * & * & 2 & 4 & 4 \\ . & 6 & . & * & 4 & 4 \\ * & 1 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ . & 6 & . & 6 & * & * \\ . & . & . & . & . & . \\ . & * & . & 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

De esta matriz se infiere que el vértice 2 está en un camino cerrado compuesto de los subcaminos $2 \rightarrow 6, 6 \rightarrow 2$; y que el $2 \rightarrow 6$ está formado de los caminos $2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 6$. Como éstos, y también el $6 \rightarrow 2$ son arcos del digrafo, el camino cerrado en cuestión es el de vértices 2, 4, 6, (2)

Análogamente, partiendo de $P \vee I$ tendríamos $C'' =$

$$\begin{vmatrix} * & * & * & 2 & 4 & 4 \\ . & * & . & * & 4 & 4 \\ * & 1 & * & 2 & 4 & 4 \\ . & 6 & . & * & * & * \\ . & . & . & . & * & . \\ . & * & . & 2 & 4 & * \end{vmatrix}$$

Como $C^{(n)} \vee I$ es la matriz precedencia de \vec{G} caben respecto de ella las mismas observaciones que las hechas respecto de la matriz accesibilidad, y el método que nos ocupa permite determinar las componentes fuertes de G .

Más precisamente,

Los conjuntos maximales de filas (o de columnas) iguales en $I \vee C^{(n)}$ dan la partición de vértices cuyas clases inducen las componentes fuertes de G .

Por lo tanto :

Los bloques maximales de $C^{(n)} \vee I$ determinan las componentes fuertes de G

En el ejemplo anterior están dadas por los vértices $1,3 \parallel 5 \parallel 2,4,6$.

Es fácil verificar que el Algoritmo de Roy-Warshall aplicado a una matriz simétrica da otra de igual carácter.

Por ello, y por la correspondencia biyectiva entre las componentes conexas de un multigrafo G y las fuertemente conexas de su simetrizado G^s se tiene que el algoritmo que nos ocupa también es útil para hallar componentes conexas.

A tal efecto, dado un grafo G aplicaríamos el algoritmo a $C^{(0)} = A(G) \vee I$.

En particular, si G es el grafo formado por las aristas $[1,2], [2,6], [3,4], [3,5], [3,7]$ tendremos

$$C^{(0)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ . & . & 1 & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & . & 1 & . & . \\ . & 1 & . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & . & . & . & 1 \end{vmatrix} \quad C^{(0)} = C^{(1)} \quad C^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 & . \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ . & . & 1 & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & . & 1 & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & . & . & . & 1 \end{vmatrix}$$

$$C^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 & . \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ . & . & 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ . & . & 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & 1 & 1 & . & 1 \end{pmatrix} \quad C^{(3)} = C^{(4)} = C^{(5)} = C^{(7)}$$

Las componentes conexas son las inducidas por los vértices $1,2,6 \parallel 3,4,5,7$.

El algoritmo que nos ocupa fue adaptado a otras estructuras algebraicas. Citaremos al efecto [RobeF68] y [Tom66/67/68].

3.10. CAMINOS ELEMENTALES

Según vimos, las potencias de la matriz precedencia de un multidigrafo permiten contar los caminos de determinada longitud que llevan desde un vértice arbitrario a otros, y a si mismo.

Por ello, muchos de los métodos para estudiar la transitabilidad recurren al uso de matrices definidas "ad hoc" aún cuando esto sea poco eficaz desde un punto de vista computacional pues esto presupone la ejecución de un elevado número de operaciones. Habitualmente no llevan a distinguir entre los caminos elementales y los restantes.

Posiblemente, el más conocido de los procedimientos inspirados en el habitual producto de matrices es el denominado "*multiplicación latina*".

Refleja la concatenación de caminos y permite, modificando levemente las reglas operatorias del álgebra matricial, enumerar todos los caminos de determinada longitud que satisfacen ciertas restricciones prefijadas. Por caso, la de ser simples, o la de incidir hasta h veces en un mismo vértice, etc.

Al aplicarlo para hallar *camino elementales*, el citado método lleva a aceptar, sólo sucesiones de vértices sin elementos repetidos excepto que éstos sean el primero y el último.

Más precisamente, dado un digrafo se construye la matriz $M = (m_{i,j})$ poniendo $m_{i,j} = 1$ si hay arco (i,j) ; y $m_{i,j} = \emptyset$ en caso contrario

En $M^{[2]}$ cada componente $m^{[2]}_{i,j}$ contiene todas las ternas i, k, j de elementos $i \neq k \neq j$ (eventualmente $i = j$) tales que $m_{i,k} \neq \emptyset, m_{k,j} \neq \emptyset$; o bien $m_{i,j} = \emptyset$ si no hay tales ternas.

En general:

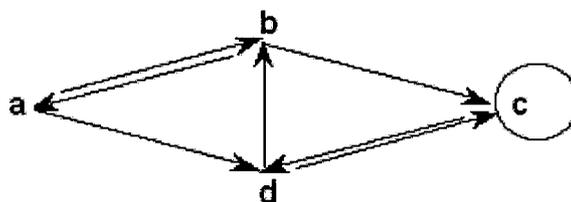
En $M^{[h]}$ cada una de sus componentes $m^{[h]}_{i,j}$ contiene las $(h + 1)$ -uplas i, \dots, k, j , sin elementos repetidos, excepto eventualmente $i = j$, que son posibles de construir con las h -uplas $i, \dots, k \in m^{[h-1]}_{i,k}$ y con los pares $k, j \in m_{k,j}$; o bien, poniendo $m^{[h]}_{i,j} = \emptyset$ si tales sucesiones no existen.

Si además se pidiera $i \neq j$ se determinarían sólo caminos elementales abiertos.

En [HamR68], [Kau62/68b] y [KauM63] se da una formulación ligeramente distinta de este método.

A tal efecto, además de la matriz M se introduce la M' , de componentes tales que $m'_{i,j} = \begin{cases} j & \text{si } m_{i,j} = i,j \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$

Poniendo $.$ en lugar de \emptyset ilustraremos este método aplicándolo al siguiente ejemplo.



$$M = \begin{vmatrix} . & ab & . & ad \\ ba & . & bc & . \\ . & . & cc & cd \\ . & db & dc & . \end{vmatrix}$$

$$M' = \begin{vmatrix} . & b & . & d \\ a & . & c & . \\ . & . & c & d \\ . & b & c & . \end{vmatrix}$$

$$M^{[2]} = \begin{vmatrix} aba & adb & abc / ade & . \\ . & bab & . & bad / bcd \\ . & cdb & cdc & . \\ dba & . & dbc & dcd \end{vmatrix}$$

$$M^{[3]} = \begin{vmatrix} adba & . & adbc & abcd \\ . & badb / bcdb & bade & . \\ cdba & . & cdbc & . \\ . & . & . & dbad / dbcd \end{vmatrix}$$

La validez de los resultados obtenidos es fácilmente verificable.

Como modificar este método para aplicarlo al caso de multidigrafos propiamente dichos es inmediato.

Basta observar al efecto que la substitución de cada conjunto de arcos paralelos por uno de ellos da lugar a un digrafo cuyos caminos elementales permiten, tras adecuadas substituciones de arcos, determinar todos los elementales de G

En [Chi94] se hizo una revisión de numerosos procedimientos propuestos para determinar solamente a los caminos elementales, y se propusieron, además, un par de métodos para hallar tales caminos.

Uno de ellos, aplicable directamente en multidigrafos, recurre a operaciones matriciales inspiradas en las tradicionales.

El mismo permite contar, cualesquiera sean los vértices i, j , los caminos elementales $i \rightarrow j$ de longitud L que tienen un mismo arco inicial, y sirve de base a otro para decidir sobre la existencia de tales caminos.

La información manejada en dichas matrices hace factible construirlos.

El método restante, que fue dado también en [Kaup77] Cap.25, es más eficaz que el anterior pues presupone menor número de operaciones, pero a diferencia de éste no da simultáneamente todos los caminos de igual longitud.

Está basado en el Algoritmo de Roy-Warshall, y en su formulación esta implícita la *Operación L*, introducida en 3.9.

El mismo lleva a que los caminos elementales se determinen en un orden que es consecuencia del orden lineal inducido por la designación de sus vértices.

Consideraciones similares a las hechas poco más arriba permiten adaptar este procedimiento al caso de multidigrafos propiamente dichos.

Algoritmo L (para determinar todos los caminos elementales de un digrafo)

Sea G un digrafo de vértices $1, 2, 3, \dots, n$; y $P(G) = (p_{i,j})$ la matriz tal que

$$p_{i,j} = \begin{cases} i, j & \text{si existe arco } (i, j) \\ \emptyset & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

A partir de $P(G)$ se construye la matriz $Q^1 = (q^1_{i,j})$ con :

$$q^1_{i,j} = \begin{cases} p_{i,j} & \text{si } i=1; \text{ ó si } j=1; \text{ ó si } p_{i,1} = \emptyset; \text{ ó si } p_{1,j} = \emptyset \\ \text{caso contrario} \\ p_{i,j} & / \text{ el conjunto de sucesiones de la forma } i,1,j, \text{ con } i \neq 1 \neq j \\ & \text{(eventualmente } i=j) \end{cases}$$

En general, para las sucesivas $h, 2 \leq h \leq n$, las componentes de Q^h son :

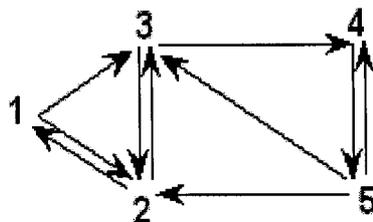
$$q^h_{i,j} = \begin{cases} q^{h-1}_{i,j} & \text{si } i=h; \text{ ó } j=h; \text{ ó si al menos uno de los } q^{h-1}_{i,h}; q^{h-1}_{h,j} \text{ es vacío} \\ \text{caso contrario} \\ q^{h-1}_{i,j} & / \text{ el conjunto de sucesiones que resultan de concatenar cada} \\ & \text{sucesión } i, \dots, h \text{ contenida en } q^{h-1}_{i,h}, \text{ con cada sucesión} \\ & \text{h, } \dots, j \text{ de } q^{h-1}_{h,j}; \text{ supuesto que la sucesión } i, \dots, h, \dots, j \\ & \text{resultante carezca de elementos repetidos, excepto posible-} \\ & \text{mente } i=j. \end{cases}$$

La recurrencia que lleva a la construcción de Q^h permite afirmar

- que los caminos elementales explicitados en Q^h se conservan en Q^{h+1} ;
- que en $q^h_{i,j}$, eventualmente $i=j$, quedan explicitados los arcos (i, j) y los caminos elementales $i \rightarrow j$ con vértices interiores a lo sumo h .

Por lo tanto, al construir Q^n quedan determinados todos los caminos buscados.

Así, dado el siguiente digrafo, y poniendo \cdot en lugar de \emptyset tendremos



$$P(G) = \begin{vmatrix} \cdot & 1,2 & 1,3 & \cdot & \cdot \\ 2,1 & \cdot & 2,3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 3,2 & \cdot & 3,4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4,5 \\ \cdot & 5,2 & 5,3 & 5,4 & \cdot \end{vmatrix} \quad Q^1 = \begin{vmatrix} \cdot & 1,2 & 1,3 & \cdot & \cdot \\ 2,1 & 2,1,2 & 2,3/2,1,3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 3,2 & \cdot & 3,4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4,5 \\ \cdot & 5,2 & 5,3 & 5,4 & \cdot \end{vmatrix}$$

$$Q^2 = \begin{vmatrix} 1,2,1 & 1,2 & 1,3/1,2,3 & \cdot & \cdot \\ 2,1 & 2,1,2 & 2,3/2,1,3 & \cdot & \cdot \\ 3,2,1 & 3,2 & 3,2,3/3,2,1,3 & 3,4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4,5 \\ 5,2,1 & 5,2 & 5,3/5,2,3/5,2,1,3 & 5,4 & \cdot \end{vmatrix}$$

$$Q^3 = \begin{vmatrix} 1,2,1/1,3,2,1 & 1,2/1,3,2 & 1,3/1,2,3 & 1,3,4/1,2,3,4 & \cdot \\ \cdot & 2,1 & 2,1,2/2,3,2/2,1,3,2 & 2,3/2,1,3 & 2,3,4/2,1,3,4 \\ 3,2,1 & \cdot & 3,2 & 3,2,3/3,2,1,3 & 3,4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4,5 \\ 5,2,1/5,3,2,1 & 5,2/5,3,2 & 5,3/5,2,3 & 5,3,4/5,2,3,4 \\ & & 5,2,1,3 & 5,4/5,2,1,3,4 \end{vmatrix}$$

Q^4 difiere de Q^3 sólo en su quinta columna, de elementos $1,3,4,5 / 1,2,3,4,5 \parallel 2,3,4,5 / 2,1,3,4,5 \parallel 3,4,5 \parallel 4,5 \parallel 5,4,5 / 5,3,4,5 / 5,2,3,4,5 / 5,2,1,3,5$

Finalmente Q^5 es

121/1321 134521	12/132/ 13452	13/123	134/1234	1345/12345
21	212/232/2132 23452/213452	23/213	234/2134	2345/21345
321/34521	32/3452	323/3213/3453 34523/345213	34	345
4521/45321	452/4532	453/4523 45213	454/452134 4534/45234	45
521/5321	52/532	53/523/5213	534/5234 54/52134	545/521345 5345/52345

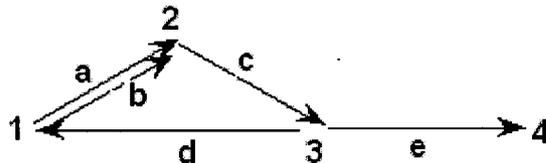
Observemos que $q^2_{1,1} = 1,2,1$ es una permutación circular del camino cerrado $2,1,2$ explicitado previamente en $q^1_{2,2}$; y que en Q^3 se encuentran, simultáneamente, permutaciones del $3,2,3$ y del $3,2,1,3$ ya determinadas en Q^2 .

En la siguiente sección veremos como podríamos operar para explicitar de cada circuito sólo una de las permutaciones circulares que lo determinan.

Por otra parte, parece oportuno destacar que el algoritmo que nos ocupa permite también determinar *caminos simples* en multidigrafos, pero no necesariamente a todos ellos.

Bastaría al efecto tomar en cuenta no la designación de los vértices sino la de los arcos, y prohibir sucesiones con reiteraciones, aún en los extremos.

Así por ejemplo, dado



tendremos

$$P(G) = \begin{vmatrix} \cdot & a/b & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & c & \cdot \\ d & \cdot & \cdot & e \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad Q^1 = \begin{vmatrix} \cdot & a/b & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & c & \cdot \\ d & da/db & \cdot & e \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$Q^2 = \begin{vmatrix} \cdot & a/b & ac/bc & \cdot \\ \cdot & \cdot & c & \cdot \\ d & da/db & dac/dbc & e \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$Q^3 = Q^4 = \begin{vmatrix} acd/bcd & a/b/acdb/bcda & ac/bc & ace/bce \\ cd & cda/cdb & c & ce \\ d & da/db & dac/dbc & e \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Ella enumera los caminos simples del digrafo, a menos de : $d,a,c,e \parallel d,b,c,e$.

3.11. 1-DIFACTORES, DETERMINANTES Y PERMANENTES

En esta sección nos proponemos ver como puede simplificarse el *Algoritmo L* para el caso en que sólo interese determinar circuitos elementales, y en particular para hallar los 1-difactores del digrafo en consideración.

Luego veremos como utilizar la descomposición en cuestión para evaluar el determinante (el permanente) de las matrices cuadradas.

3.11.1. 1-DIFACTORES

Del proceso constructivo que implica el *Algoritmo L* es inmediato que dado un digrafo de orden n , sus bucles están presentes en todas las Q^h , $1 \leq h \leq n$. En Q^n están explicitadas, además, todos sus caminos elementales y en particular todos las sucesiones que definen a sus circuitos elementales.

Obviamente, para determinar a tales circuitos (y por ende a los 1-difactores) es innecesario explicitarlas a todas. Basta con determinar sólo una de las sucesiones que definen a cada circuito, las restantes se obtendrían luego por permutaciones circulares.

Por esto, y para cuando sólo interese determinar circuitos, introduciremos una modificación simplificadora del *Algoritmo L*.

Ella fue comunicada en la XLVª Reunión de la Unión Matemática Argentina, desarrollada en Río Cuarto, en 1995, y según veremos permite hallar todos los circuitos elementales disminuyendo en mucho el número de operaciones que implica el *Algoritmo L*.

Se basa en explicitar, de las distintas sucesiones que determinan caminos elementales cerrados, sólo aquellas $x_j, \dots, x_L, x_1, \dots, x_{j-1}, (x_j)$ con $x_j = \text{máx. } x_i$, $1 \leq i \leq L$, eliminando la enumeración de sus permutaciones circulares.

Para formalizarla convendremos en notar :

- Q^{*h} a la matriz que se obtiene a partir de $Q^{\#h}$ conservando de su h -ésima fila y de su h -ésima columna sólo la información incluida en el elemento que tienen en común.

A tal efecto substituiremos por \emptyset los $q^{\#h}_{h,j}$, y los $q^{\#h}_{i,h}$, $i \neq h \neq j$.
El resto de $Q^{\#h}$ no se modificará.

Es claro que al pasar de $Q^{\#h}$ a Q^{*h} se eliminan, si los hay, las sucesiones representativas de los caminos elementales abiertos con uno de sus extremos en h , pero no las de los posibles caminos elementales cerrados en h .

Algoritmo L*

Para determinar todos los circuitos elementales de un digrafo G de orden n

- 1) Aplicando el *Algoritmo L* a la matriz $P(G)$ determinar la $Q^1 = Q^{\#1}$.
Hallar luego la Q^{*1} , y pasar a 2), para $h = 2$.
- 2) Aplicando el *Algoritmo L* a la matriz $Q^{*(h-1)}$ hallar $Q^{\#h}$.
Construir luego la Q^{*h} , y si $h < n-1$ reiterar 2).

Caso contrario, en Q^{*h} se ha explicitado una de las sucesiones que definen a cada uno de sus circuitos elementales.

Para visualizar la diferencia de comportamiento entre los *Algoritmos L* y *L**, su-
pongamos que G es el circuito elemental de vértices 1,2, 3.

Aplicando el *Algoritmo L* tendremos que :

- en Q^1 se explicitan los caminos $1,2 \parallel 2,3 \parallel 3,1 \parallel 3,1,2$;
- en Q^2 además de ellos se incluyen $1,2,3 \parallel 3,1,2,3$.
- en Q^3 se les agregan $1,2,3,1 \parallel 2,3,1,2 \parallel 2,3,1$.

En cambio, aplicando el *Algoritmo L** tendremos :

$$Q^1 = Q^{\#1} = \begin{vmatrix} \cdot & 1,2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2,3 \\ 3,1 & 3,1,2 & \cdot \end{vmatrix} \quad Q^{*1} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2,3 \\ \cdot & 3,1,2 & \cdot \end{vmatrix} \quad Q^{\#2} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2,3 \\ \cdot & 3,1,2 & 3,1,2,3 \end{vmatrix}$$

La única componente no vacía de Q^{*2} es $3,1,2,3$ y ella corresponde al circuito $1,2,3,(1)$.

Seguidamente esbozaremos un razonamiento que lleva, al aplicarlo reiterada-
mente y para valores crecientes de h , a justificar la validez del *Algoritmo L**.

- 1) Sólo se eliminan caminos abiertos
- 2) Los bucles están presentes en todas las Q^{*h} .
- 3) Para cada uno de los restantes circuitos elementales $C_{u,v} = x_1, x_2, \dots, x_L, (x_1)$
con $mín. x_i = u$; $máx. x_i = v$; $u < v$, $1 \leq i \leq L$ caben las siguientes tres
afirmaciones.

- i) Si $h = u$ los distintos 2-caminos de arcos $(\alpha_u, u); (u, \beta_u)$, y los otros arcos de $C_{u,v}$ quedan indicados en Q^{*h} , en entradas $q_{r,s}$ con $u < r \leq v; u < s \leq v$.
- ii) Imaginando un "reemplazo" de cada camino de arcos $(\alpha_u, u); (u, \beta_u)$, por el "arco auxiliar" (α_u, β_u) el circuito $C_{u,v}$ se transforma en otro $C_{u',v}$, $u' \geq u+1$, tal que : si $u' < v$ puede reiterarse i), y si $u' = v$ el circuito $C_{v,v}$ en cuestión queda explicitado en Q^{*v} y sucesivas.
- iii) Substituyendo los distintos "arcos auxiliares" que llevaron a $C_{v,v}$ por sus respectivos caminos se obtienen una sucesión $x_i, \dots, x_L, \dots, x_{i-1}$, con $x_i = v$, que identifica al circuito en cuestión.

En particular, aplicando el *Algoritmo L** al ejemplo de pág.142 tendremos :

$$Q^1 = Q^{\#1} = \begin{vmatrix} \cdot & 12 & 13 & \cdot & \cdot \\ 21 & 212 & 23/213 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 32 & \cdot & 34 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 45 \\ \cdot & 52 & 53 & 54 & \cdot \end{vmatrix} \quad Q^{*1} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 212 & 23/213 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 32 & \cdot & 34 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 45 \\ \cdot & 52 & 53 & 54 & \cdot \end{vmatrix}$$

$$Q^{\#2} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 212 & 23/213 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 32 & 323/3213 & 34 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 45 \\ \cdot & 52 & \boxed{53/523} & 54 & \cdot \\ & & \boxed{5213} & & \end{vmatrix} \quad Q^{*2} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 212 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 323/3213 & 34 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 45 \\ \cdot & \cdot & \boxed{53/523} & 54 & \cdot \\ & & \boxed{5213} & & \end{vmatrix}$$

$$Q^{\#3} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 212 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 323/3213 & 34 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 45 \\ \cdot & \cdot & \boxed{53/523} & \boxed{54/52134} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \boxed{5213} & \boxed{534/5234} & \cdot \end{vmatrix}$$

Este método de evaluación, que parece remontarse a Cauchy, suele denominarse “*evaluación topológica*”.

Para mayores precisiones ver [Chen71a], [ChiS99], [Har62/69d].

La posibilidad de expresar cualquier permutación como producto de permutaciones circulares unívocamente determinadas y disjuntas dos a dos permite afirmar, interpretando A como matriz precedencia de cierto digrafo valuado, que para calcular $\det. A$ (*per. A*) bastará conocer las permutaciones que definen sus 1-difactores.

Si tales permutaciones no existen $\det. A = 0$.

Caso contrario, si cierto 1-difactor tiene h circuitos, de longitudes l_1, l_2, \dots, l_h , el número de inversiones entre los índices de filas y los de columnas de cada $a_{1,j_1}, \dots, a_{n,j_n}$ es $\sum_i (l_i - 1) = n - h$. De donde, $(1)^{\sigma(\pi)} = (-1)^{n-h} = (-1)^{n+h}$.

Luego, si f es un 1-difactor de G_A , y notamos H_f al conjunto de las permutaciones que él define, V_f al producto de los valores de los arcos que lo componen, y c_f al número de sus circuitos, se tiene que :

$$\det. A = \sum_{\pi \in H_f} (-1)^{\sigma(\pi)} a_{1,j_1}, \dots, a_{n,j_n} = \sum_f (-1)^{n+c_f} \cdot V_f$$

Por otra parte, y ya que las longitudes de los circuitos en consideración coinciden con el número de vértices en los cuales inciden, puede verse que el número p_f de los circuitos pares del 1-difactor f es par si ambos n, c_f son pares, o bien, si ambos son impares, y sólo entonces.

Luego, $(-1)^{n+c_f} = (-1)^{p_f}$, y por lo tanto $\det. A = \sum_f (-1)^{p_f} \cdot V_f$.

Para hallar *permanentes* caben argumentos similares.

Por ello, y supuesto existen 1-difactores, $\text{per. } A = \sum_{\pi \in \Pi} a_{1,j_1} \dots a_{n,j_n} = \sum_f V_f$

Resumiendo :

Si $A = (a_{i,j})$ es la *matriz precedencia* del digrafo G_A se tiene que :

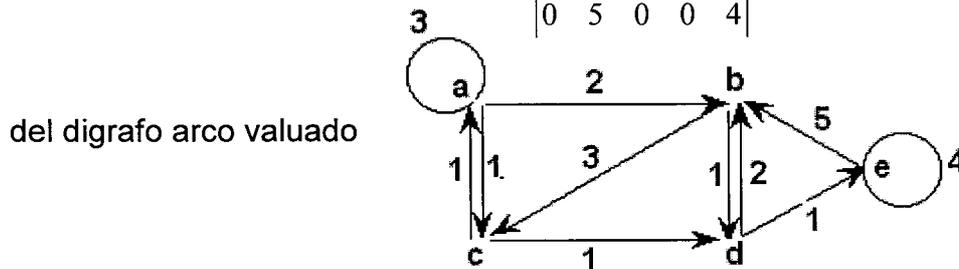
i) Si G carece de 1-difactores, $\det. A = \text{per. } A = 0$.

ii) Caso contrario, si para cada 1-difactor f de G , su valor es V_f , el número de sus circuitos es c_f , y el de sus circuitos de longitud par es p_f

$$\det. A = \sum_f (-1)^{n+c_f} \cdot V_f = \sum_f (-1)^{p_f} \cdot V_f$$

$$\text{per. } A = \sum_f V_f$$

Apliquemos lo dicho a la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ que es la de precedencia



Los circuitos de sus 1-difactores son los de vértices : $a / b,c,d,e \ \parallel\! \parallel \ a,c / b,d,e$
 $\parallel\! \parallel \ ac / bd / e \ \parallel\! \parallel \ a / b,c,d / e$. Sus respectivos valores son : 45 , 5 , 8 , 7.

De donde $det. A = (-1)^7 \cdot 45 + (-1)^7 \cdot 5 + (-1)^8 \cdot 8 + (-1)^8 \cdot 72 = 30$
 $= (-1)^1 \cdot 45 + (-1)^1 \cdot 5 + (-1)^2 \cdot 8 + (-1)^0 \cdot 72 = 30$
 $per. A = 130$

En particular:

Si A es la matriz de precedencia de un digrafo todo $a_{ij} \in \{0,1\}$ y en tal caso :

$per. A =$ número de 1-difactores de G .

$$det. A = \sum_f (-1)^{p_f} = |F_p| - |F_i|;$$

donde $|F_p|$, $(|F_i|)$ es el número de sus 1-difactores con número par (impar) de circuitos pares. y la suma se extiende a todos los 1-difactores.

Por lo tanto :

Si A es una matriz de 0, 1, y todos los 1-difactores de su digrafo asociado tienen número par de circuitos de longitud par, $det. A = per. A$.

El problema de caracterizar las matrices cuyo determinante y permanente coinciden es, según nuestro conocimiento, un problema abierto. Una solución parcial fue dada en [BeiH66], al demostrarse que :

- Si A es la matriz precedencia de un digrafo G : $det. A = per. A$ si y sólo si
 - en cada una de las componentes fuertes de G todos sus 1-difactores tienen número par ; o bien todos tienen número impar, de circuitos de longitud par.
 - el número de componentes fuertes cuyos 1-difactores tienen número impar de circuitos, es par.

En [BeiH66] también se consideró el caso de las matrices cuadradas de componentes $0, +1, -1$, representativas de digrafos signados.

Para el caso de matrices simétricas cabe la siguiente observación :

Si A es una matriz simétrica, ella puede ser vista como la de adyacencia de un grafo arista valuado, y razonar en forma análoga a la anterior sobre el G_A en cuestión, o recurrir a una estrecha relación entre los 1-difactores del simetrizado de G_A y ciertos subgrafos de G_A .

Éstos subgrafos estarán constituidos de bucles, y/o de ciclos elementales de longitud mayor o igual que tres, y/o de aristas libres (o aisladas).

Más precisamente, los circuitos elementales de longitud uno (dos) en G_A^s pueden identificarse con bucles (con aristas distintas de bucles) en G_A , mientras que cada circuito elemental de longitud $L \geq 3$ de G_A^s , y su opuesto, corresponden a un mismo ciclo de G_A , también elemental de longitud L .

Así entonces, cada 1-difactor de G_A^s determina un subgrafo cubriente de G_A , formado con ciclos elementales de longitud $L \geq 3$, o bucles, o aristas libres (es decir, no pertenecientes a ciclos del subgrafo en cuestión).

A estos subgrafos les diremos “*simples*”. (frecuentemente, y en particular en [ChiS99] se denominan “1-factores”).

Para la correspondencia entre aristas de G_A y circuitos de longitud dos en G_A^s es esencial la carencia de aristas paralelas.

De lo precedente y limitándonos al caso de matrices simétricas de $0,1$, se demuestra que :

:

Si A es la matriz de adyacencia de un grafo G de orden n , y F es el conjunto de sus “subgrafos simples” entonces :

i) Si F es vacío, $\det. A = \text{per. } A = 0$.

ii) Caso contrario, si para cada $f \in F$ el número de sus aristas libres más el de ciclos pares es p_f ; el número de sus ciclos de longitud mayor o igual que tres es c_f y el número de componentes conexas de f es h_f ; entonces

$$\det. A = \sum_f (-1)^{p_f} \cdot 2^{c_f} = \sum_f (-1)^{n+h_f} \cdot 2^{c_f} \quad \text{III} \quad \text{per. } A = \sum_f 2^{c_f}$$

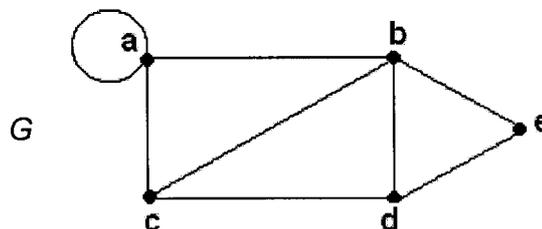
Corolarios :

- Si G es grafo acíclico de orden n que admite 1-difactores, $\det.A(G) = (-1)^{n/2}$
- Si M es una matriz simétrica, de orden impar, de componentes 0, 1 y de diagonal nula, su determinante es un número par.

Para el caso en que las componentes de A no son necesariamente 0,1, nos remitiríamos a la bibliografía indicada poco más arriba.

Apliquemos lo dicho al caso

$$A(G) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$



Las aristas que integran los subgrafos a considerar y sus correspondientes p_f , c_f , h_f están indicados en siguiente cuadro.

	p_f	c_f	h_f
$[a,a], [b,c], [d,e]$	2	0	3
$[a,a], [b,e], [c,d]$	2	0	3
$[a,a], [b,c], [c,d], [d,e], b,e]$	1	1	2
$[a,b], [a,c], [b,c], [d,e]$	1	1	2
$[a,b], [a,c], [c,d], [d,e], [b,e]$	0	1	1

$$\begin{aligned} \text{De donde } \det. A &= (-1)^2 \cdot 2^0 + (-1)^2 \cdot 2^0 + (-1)^1 \cdot 2^1 + (-1)^1 \cdot 2^1 + (-1)^0 \cdot 2^1 = \\ &= (-1)^8 \cdot 2^0 + (-1)^8 \cdot 2^0 + (-1)^7 \cdot 2^1 + (-1)^7 \cdot 2^1 + (-1)^6 \cdot 2^1 = -2. \end{aligned}$$

Concluyamos esta capítulo observando que si bien es habitual indicar que una matriz tiene determinante nulo si y sólo si sus filas (columnas) son linealmente dependientes, es menos frecuente recordar que :

Dada una matriz M de orden n , todos los monomios del desarrollo de su determinante son nulos si y sólo si M contiene alguna submatriz nula de tipo $p \times q$ tal que $p + q > n$.

Esta afirmación es consecuencia directa del hecho que toda matriz cuadrada puede reinterpretarse como matriz precedencia, y de lo visto en pág. 62, relativo a como la carencia de 1-difactores de G se refleja en su matriz precedencia.

De lo precedente y para el caso de las matrices doblemente estocásticas, es decir de aquellas $(m_{i,j})$ con $m_{i,j} \geq 0$, $\sum_i m_{i,j} = \sum_j m_{i,j} = 1$ cabe lo siguiente :

Si M es una matriz doblemente estocástica al menos uno de los monomios del desarrollo de su determinante es no nulo.

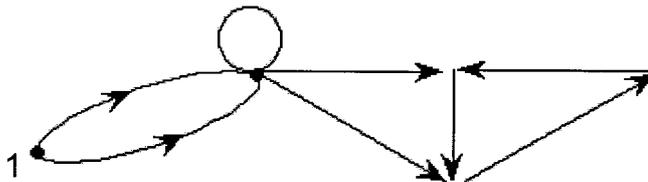
En efecto, caso contrario, y supuesto que M es de orden n , M admitiría una partición en cuatro submatrices, a saber : una matriz nula O de dimensión $p \times q$ con $p + q > n$, y las matrices P , Q , R de dimensiones $p \times (n-q)$; $(n-p) \times q$ y $(n-p) \times (n-q)$.

En tal caso, la suma del total de elementos de Q sería q , y como $q \geq n - p + 1$ la suma del total de elementos de R sería $n - p - q \leq n - p - (n - p + 1) = -1$. Absurdo, pues cada $m_{i,j}$ es no negativo.

EJERCICIOS

3-1)

Dado el multidigrafo



- a) determine sus caminos de longitud dos (tres) con vértice inicial 1.
- b) ¿ cuáles de ellos son simples ? elementales ? cerrados ?
- c) determine sus circuitos de longitud dos (tres).
- d) determine en su sostén algunas cadenas de longitud dos (tres).
- e) ¿ cuáles son orientables ? simples ? elementales ?

3-2)

Demuestre que :

- a) todo camino elemental es simple.
- b) toda cadena elemental abierta es simple, y por ende es orientable.
- c) toda cadena elemental cerrada distinta de la de longitud dos que deviene de recorrer una misma arista en ambos sentidos es simple.
- d) todo vértice no aislado pertenece a infinitas cadenas de longitud par.
- e) todo camino de un multidigrafo G define una cadena de su sostén \underline{G} , y que la recíproca es falsa excepto si para todos los vértices de G se tienen $gr^+(x) \leq 1$ y $gr^-(x) \leq 1$.

3-3)

Suponga que existen caminos simples (elementales) $a \rightarrow b$ y $b \rightarrow a$.

¿ Se puede afirmar que existe un camino cerrado simple (elemental) que contiene ambos vértices ?

3-4)

Suponga que en un tablero de ajedrez los escaques esquineros de una misma diagonal se designan A, B. ¿ Podrán conectarse A y B con un recorrido que incida exactamente una vez en cada uno de los escaques, si sólo puede pasarse de uno de ellos a sus adyacentes de igual fila, o de igual columna ?

3-5)

Demuestre que en todo multigrafo conexo cada par de cadenas elementales de longitud máxima tienen al menos un vértice común. ¿ Podría afirmarse que también tienen una arista común ?

3-6)

Dos viajeros de comercio salen de la ciudad A, uno de ellos con destino a la ciudad B y el otro hacia C. Ambos eligen el recorrido más corto, y ambos deben pasar por las ciudades P y Q. ¿ Se puede afirmar que los dos viajeros deben arribar a P, y a Q, en un mismo orden ?

3-7)

Muestre que si G es un grafo sin bucles, y todos sus vértices tienen grado mayor o igual que h , $h \geq 1$, entonces G contiene :

– al menos una cadena elemental abierta de longitud $L \geq h$.

– " " " " cerrada de longitud $L \geq h + 1$.

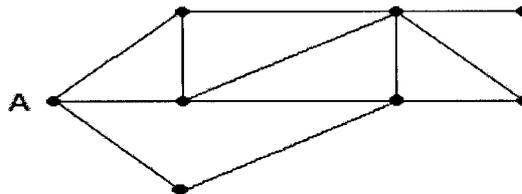
Vea que las cotas dadas no son mejorables, y que la afirmación anterior no es válida si G admite bucles o es multigrafo propiamente dicho.

3-8)

Vea que todo camino cerrado de longitud impar, contiene al menos un camino cerrado elemental de longitud impar. ¿ Vale una afirmación similar substituyendo impar por par ? Idem, ¿ camino por cadena ?

3-9)

Determine en el siguiente grafo las distancias entre el vértice A y los restantes.



Verifique resultados empleando la matriz de adyacencia.

3-10)

Vea que un vértice x pertenece a una geodésica de extremos a, b , si y sólo si $d(a, x) + d(x, b) = d(a, b)$.

3-11)

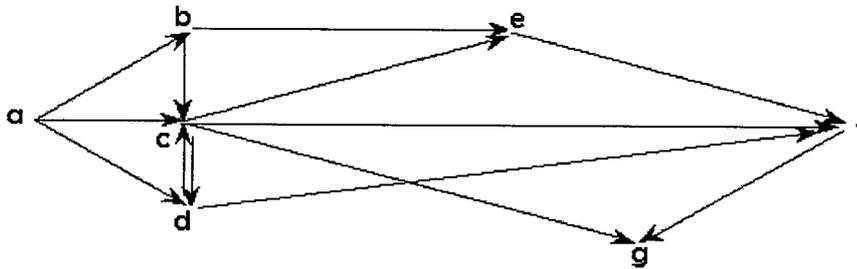
Restringiéndose a los grafos sin bucles muestre que si un grafo tiene diámetro mayor que tres, el diámetro de su complementario es menor que tres.

3-12)

Supuesto que z es accesible desde a justifique la validez del siguiente algoritmo para determinar caminos $a \rightarrow z$ con el menor número de arcos.

- 1) Poner $A_0 = \{ a \}$, valorar a con 0 y pasar a 2).
- 2) Sea A_i , $i \geq 0$, el conjunto de vértices valuados i . Si $z \in A_i$ pasar a 3), Caso contrario valorar $(i+1)$ a todo vértice no valuado, extremo final de algún arco (p, q) con $p \in A_i$, y reiterar 2) aplicándolo a A_{i+1} .
- 3) Determinar, a partir de $z = x_h$ un camino $a = x_0, x_1, \dots, x_h = z$ de arcos (x_j, x_{j+1}) con vértices x_r valuados r .

Aplíquelo al siguiente digrafo.



3-13)

Modifique el algoritmo anterior con vistas a determinar, supuesto que no hay caminos cerrados, los caminos de vértice inicial a con mayor número de arcos. Aplíquelo al digrafo del ejercicio anterior previa eliminación del arco (d, c) .

3-14)

Vea que :

- G carece de bucles y de aristas paralelas si y sólo si todo ciclo tiene al menos tres aristas.
- si dos ciclos de G incluyen a una misma arista e , entonces G contiene un ciclo que no contiene e .
- todo ciclo simple es unión de ciclos elementales arista disjuntos.
- la diferencia simétrica de dos ciclos simples genera un conjunto, quizás unitario, de ciclos simples arista disjuntos dos a dos.

3-15)

Demuestre la equivalencia de las siguientes afirmaciones.

- el digrafo G carece de circuitos.
- todo camino de G es elemental.
- los vértices de G pueden numerarse de manera tal que todos sus arcos sean de la forma (a, b) con $a < b$; o sea, de manera tal que su matriz de precedencia tome forma triangular.

3-16)

Vea que G admite raíz (antirraíz) r si y sólo si cualesquiera sean sus vértices a, b , existe al menos un c , no necesariamente. $a \neq c \neq b$; $c \neq r$, desde el cual ambos son accesibles (que es accesible desde ambos a, b).

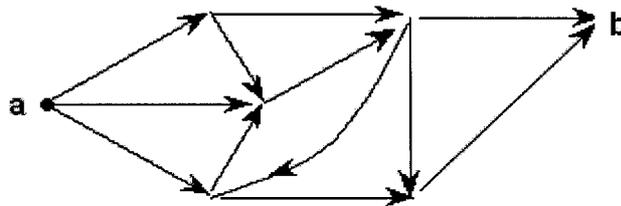
3-17)

Vea si el digrafo dado por la siguiente tabla carece de circuitos, y en tal caso represéntelo por niveles ascendentes y por niveles descendientes

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$\Gamma(x)$	b, d	c, g	f, h	c, e	g	h	f	$-$

3-18)

Dado el digrafo



determine aplicando el Algoritmo de Trémaux sus caminos simples $a \rightarrow b$; y en su sostén, aplicando el de Tarry, las cadenas elementales de extremos a, b .

3-19)

Demuestre que si el multidigrafo G carece de entradas (salidas) sus componentes conexas contienen caminos cerrados, y que la recíproca es falsa.

3-20)

Vea que :

- si un multigrafo contiene exactamente dos vértices de grado impar, ambos están en una misma componente conexas.
- si G es no conexo, su complementario es conexo de diámetro dos.
- los grafos autocomplementarios son conexas.

3-21)

Demuestre que G es un multigrafo par (multidigrafo balanceado) si y sólo si su conjunto de aristas (de arcos) puede cubrirse con una familia de ciclos (circuitos) simples arista (arco) disjuntos dos a dos.

3-22)

Vea que de las operaciones "h-ésima potencia" y "h-ésima subdivisión" (introducidas en 2.1.10) caben las siguientes definiciones alternativas.

El *grafo h-ésima subdivisión* de G es el que resulta de reemplazar en G , cada arista $[p, q]$, eventualmente $p = q$, por una cadena elemental de extremos p, q , y de longitud 2^h .

El *grafo h-ésima potencia* de G es el G^h que se obtiene incorporándole, si es necesario, una arista $[p, q]$, $p \neq q$, por cada par de vértices p, q , no adyacentes que sean extremos de al menos una cadena de longitud $L \leq h$.

El *dígrafo h-ésima potencia* de G es el G^h obtenido al incorporar a G , si no existe, un arco (a, b) , eventualmente $a = b$, por cada par de vértices a, b , que sea extremos de un camino $a \rightarrow b$ de longitud $1 \leq L \leq h$.

3-23)

Constata que las siguientes afirmaciones son equivalentes :

- $u = [a, b]$ es arista puente en $G = (V, U)$
- u es la única cadena de G que conecta a con b .
- $G - \{u\}$ tiene más componentes conexas que G .
- existe una partición de V en subconjuntos V_1, V_2 tal que cualesquiera sean $p \in V_1, q \in V_2$ toda cadena de extremos p, q , contiene u .

3-24)

Demuestre que :

- si G es grafo sin bucles de orden n , y para todo x se cumple $gr(x) \geq (n-1) / 2$ G es conexo
- si G es digrafo sin bucles de orden n , y para todo vértice x se tiene que $\min_x (\min_x gr^-(x), \min_x gr^+(x)) \geq (n-1) / 2$, G es fuertemente conexo.

3-25)

Represente todos los árboles (o sea, todos conexos acíclicos) de orden $n \leq 7$.

3-26)

Demuestre la Prop.3.6.2 siguiendo los órdenes 1,2,3,4,5,6 y 1,4,3,6,5,2.

3-27)

Demuestre que :

- todo árbol es grafo bipartido (o bicolorable).
- todo árbol de orden n tiene $((n-1).(n-2)) / 2$ pares de vértices no adyacentes.
- toda arista pendiente de un conexo pertenece a todos sus árboles cubrientes.
- si Δ es el mayor de los grados de los vértices de un árbol T , entonces T tiene

al menos Δ vértices pendientes.

3-28)

Suponga que d_1, d_2, \dots, d_n es la sucesión de grados de un grafo sin bucles G . Si G es árbol $\sum_i d_i = 2.n - 2$ ¿ Se puede afirmar también la recíproca ?

3-29)

Pruebe que si es grafo conexo sin bucles de orden n las siguientes propiedades son equivalentes.

- G es 2-conexo.
- cada par de vértices está incluido en un ciclo elemental.
- para cada vértice y cada arista hay un ciclo elemental que los contiene.
- cada par de aristas está contenido en un ciclo elemental.
- dados dos vértices y una arista hay al menos una cadena que los conecta y contiene a la arista.
- para cada terna de vértices hay una cadena que conecta dos de ellos y contiene al tercero (pero no contiene al tercero).

3-30)

Sea G un grafo de orden n con m aristas distintas de bucle. Determine la verdad, o falsedad, de las siguientes afirmaciones :

- si $m \leq n-2$ es desconexo (es acíclico).
- si es desconexo $m \leq n-2$.
- si $m > n-2$ es conexo.
- si $m \geq n$ es conexo (contiene ciclos)
- si $m = n + 1$ tiene al menos dos ciclos.

¿ Cuáles de las afirmaciones precedentes pueden extenderse a multigrafos ?

3-31)

a) Escriba la matriz precedencia del multidigrafo del Ejercicio 3-1 y calcule su segunda, y su tercera potencia.

Reencuentre así, resultados obtenidos en 3.1).

b) Idem a) pero considerando cadenas y la matriz adyacencia del sostén de G .

3-32)

Muestre :

- a) que el opuesto de un digrafo unilateralmente conexo también lo es.
- b) que todo fuertemente conexo no trivial de orden n tiene al menos n arcos distintos de bucles, y que para todo $n \geq 2$ existen fuertemente conexos de orden n con exactamente n arcos distintos de bucle.
- c) que G es f -conexo si y sólo si existe un camino cerrado cubriente.
- d) que G es f -conexo si y sólo si todos sus vértices son raíz y antirraíz

3-33)

Demuestre las Proposiciones 3.7.1.b) y 3.7.2

3-34)

Dado el digrafo $G = (V, \Gamma)$ vea que :

a) Si G es antisimétrico, su matriz precedencia $P = (p_{i,j})$ y $P^2 = (p^2_{i,j})$ tienen sus componentes diagonales nulas.

b) Si G es antisimétrico débil entonces $p_{i,i} \neq 0$ si y sólo si $p^2_{i,i} \neq 0$.

¿ Valen también las respectivas recíprocas ?

3-35)

Sea G un grafo sin bucles y A su matriz de adyacencia.

Vea que :

- $(A^2)_{i,j}$, $i \neq j$, es el número de vértices adyacentes al par de vértices i, j .
- $(A^2)_{i,i}$ es el número de aristas incidentes en i
- $(A^3)_{i,i}$ es el duplo de los K_3 incidentes en i .
- La traza de A da el número de bucles de G , y la de A^3 seis veces el número de subgrafos K_3 en G .

3-36)

Sea G un digrafo y P su matriz de precedencia.

Vea que :

- $(P.P^t)_{i,j}$, $i \neq j$, es el número de sucesores inmediatos del par i, j .
- $(P.P^t)_{i,i}$ es el grado positivo de i .
- $(P^t.P)_{i,j}$ es el número de predecesores inmediatos del par i, j .
- $(P.P^t)_{i,i} + (P^t.P)_{i,i} = \text{grado en } \underline{G} \text{ del vértice } i$.

3-37)

Dado un multigrafo sin bucles sea B su matriz de incidencia, y C su matriz ciclo elemental.

Vea que si en ambas matrices las aristas se disponen en un mismo orden, entonces, en \mathbb{Z}_2 , se tiene $B.C^t = C.B^t = O$, con O matriz nula.

Vea que lo mismo cabe para el caso dirigido si se opera en el cuerpo real \mathcal{R} .

3-38)

Sea A la matriz adyacencia del multigrafo G no discreto de orden n , y $B = \sum_{i=1}^{n-1} A^i$

Que puede decir de G si alguno de los elementos no diagonales de B es nulo ?
Podría ser nula alguna de las componentes diagonales de B ?

3-39)

Vea que si G es fuertemente conexo, y sólo entonces, $R(G) = J$ (J matriz con todas sus componentes 1)

3-40)

Sea G el digrafo definido por la siguiente matriz de precedencia, donde con . se indica la carencia de arcos. Determine, utilizando distintos métodos su clausura transitiva, sus componentes fuertemente conexas y su matriz accesibilidad.

Utilice el digrafo cociente G_{fc} para dar, de G , una representación topológica manejable.

$$P = \begin{pmatrix} . & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & 1 \\ . & 1 & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & 1 & . & 1 & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & 1 & . \\ 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

3-41)

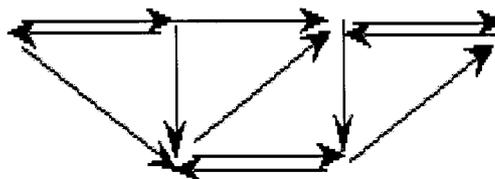
Vea que :

- a) si G es grafo conexo también lo es su adjunto.
- b) si G es digrafo conexo su adjunto puede, o no, ser conexo.
- c) si G es digrafo fuertemente conexo también lo es su adjunto.

¿ Que puede decir de las respectivas recíprocas ?

3-42)

Determine, aplicando distintos métodos, los caminos elementales del digrafo



¿ Cuáles son sus 1-difactores ?

Evalue el determinante y el permanente de su matriz precedencia.

3-43)

Recurriendo a la evaluación topológica de los determinantes

b) calcule el determinante y el permanente de las matrices de adyacencia de K_n , $n \in \{ 2, 3, 4, 5 \}$, $K_{2,2} = C_4$, C_5 , $K_{2,3}$

b) idem respecto del exaedro, del octaedro, de los ciclos C_n y de los circuitos de orden n .

3-44)

Explique, recurriendo a la teoría de grafos, porqué se puede afirmar :

Si $M = (m_{i,j})$ es una matriz simétrica con $m_{i,i} = 0$ y $m_{i,j} = 1$, si $i \neq j$, todas las componentes de la diagonal principal de M^h coinciden entre sí, y también coinciden entre sí todas sus restantes componentes.

3-45)

Constate que para el caso en que A es la matriz adyacencia de K_5 las componentes diagonales d_h y las no diagonales c_h de A^h satisfacen:

$$- d_1 = 0 ; c_1 = 1 ; d_2 = 4 ; c_2 = 3.$$

y que en general, para cada $h \geq 1$

$$- d_{h+1} = 4.c_h ; c_{h+1} = 3.c_h + d_h = 3.c_h + 4.c_{h-1}$$

3-46)

Muestre que extendiendo 3-45) cabe la siguiente afirmación ;

Si A, I, J , son matrices de orden n tales que, A es la matriz adyacencia de K_n , I matriz identidad, y J la que tiene todas sus componentes igual a la unidad se

$$\text{tienen : } J^k = n^{k-1}.J ; A^k = (J - I)^k = \frac{(n-1)^k - (-1)^k}{n}.J + (-1)^k.I ; k \geq 1.$$

Así entonces, el número de sus cadenas de longitud k con extremos i, j , es :

$$c_k = \frac{(n-1)^k - (-1)^k}{n} \quad \text{si } i \neq j$$

$$d_k = c_k + (-1)^k = (n-1).c_{k-1} , \quad \text{si } i = j. \quad \text{de donde } c_k = (n-1).c_{k-1} - (-1)^k$$

Además, y puesto que $A^k = A.A^{k-1}$

$$c_k = d_{k-1} + (n-2).c_{k-1} = (n-1).c_{k-2} + (n-2).c_{k-1}.$$

Así, para $n = 5$ a las expresiones del ejercicio anterior pueden agregarse

$$c_k = \frac{4^k - (-1)^k}{5} ; d_k = 4 \cdot c_{k-1} = \frac{4^k + (-1)^k 4}{5} .$$

3-47)

Resuelva, con conceptos de la teoría de grafos, los siguientes entretenimientos

A)) A la orilla de un río se encuentran un lobo, un repollo, y una oveja, al cuidado de un pastor que debe trasladarlos a la otra ribera. ¿ Será posible cruzarlos si solamente se dispone de un bote en el cual el pastor puede transportar, por vez, a lo sumo uno de los objetos en cuestión ? En tal caso, de cuántas formas, y cual será el menor número de cruces necesarios ?

B)) Se tiene una jarra de 8 litros repleta, y dos vacías de capacidades 5 y 3 litros. ¿ Será posible, empleando sólo trasvasamientos y vaciados totales, quedar con exactamente cuatro litros en dos de ellas ?

Idem ¿ con un único litro en alguna de ellas ?

En tales casos, ¿ cuántas soluciones hay ? ¿ cuántas operaciones son necesarias al menos ?

C)) Dos maridos celosos y sus respectivas esposas deben atravesar un río, y para ello disponen de un bote que sólo admite dos personas, y todos pueden remar. ¿ Será posible el traslado de manera que nunca queden solas parejas que no sean matrimonio ?

En tal caso ¿ de cuántas formas se lo podría lograr ?

D)) Vea que también tiene solución el problema similar para el caso de tres parejas, pero no para el de cuatro excepto si se dispone de un bote de mayor capacidad.

E)) Usando su carro un granjero tiene que llevar a la ciudad dos toros y tres ovejas. El camino hacia la ciudad es barranca abajo y en ese sentido el granjero puede transportar hasta dos animales por vez; pero en el sentido contrario sólo uno. Se supone que si el granjero no está presente el número d ovejas debe ser nulo, o bien, superior al de toros. Vea que es posible el traslado a la ciudad, pero que no sería factible volver con los animales a la granja



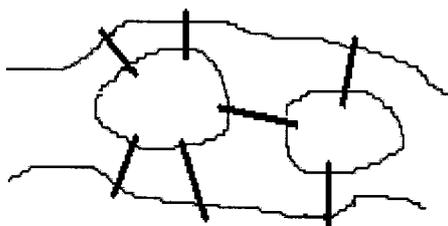
CAPITULO 4

PROBLEMA EULERIANO

4.1. INTRODUCCION

Volviendo sobre algo ya indicado en el Prólogo consideremos el siguiente problema, que preocupaba a los habitantes de Königsberg, Prusia.

Dicha ciudad estaba atravesada por el Río Pregel, y en él había dos islas vinculadas entre sí y con las márgenes del río según se indica en el esquema que sigue.



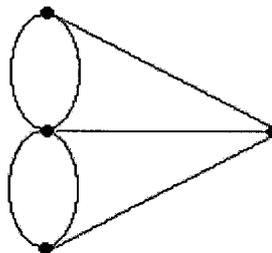
¿ Sería posible efectuar una caminata, tal que luego de utilizar exactamente una vez cada uno de los puentes se volviera al punto de partida ?

La respuesta podría obtenerse por exhaustión, tomando en cuenta todas las caminatas posibles, pero esto sería un proceso tedioso carente de generalidad.

En reemplazo de dicho método el prestigioso matemático suizo Euler ideó una metodología general, y en un trabajo que según parece permaneció desconocido por largo tiempo, y hoy se admite como el más antiguo de aquellos en los se recurre a métodos propios de la Teoría de Grafos, lo resolvió por la negativa. [Eul36/53]

Siguiendo su razonamiento representaremos cada isla, y cada margen del río por un vértice, y cada puente por una arista que los conecte.

Tendremos así el siguiente multigrafo.



Del análisis correspondiente resulta que será factible concretar un tal paseo si y sólo si es posible recorrer el esquema precedente sin levantar el lápiz, sin pasar dos veces por una misma arista, y volviendo al vértice inicial.

Puede constatarse que la existencia de cuatro vértices de grado impar hace que ello no sea posible, ni aún omitiendo la restricción de volver al punto inicial. Véase que para recorrerlo serían necesarias al menos dos “caminatas”.

El citado trabajo de Euler, cuya primera demostración completa parece deberse a Hierholzer [Hie73] está incluido tanto en la reedición del libro de König [Kön36] realizada por Teubner-Verlag en 1986, como en el libro de Fleischner [Fle90].

En éste último se agregan, además del trabajo de Hierholzer y una traducción del mismo, observaciones sobre el de Veblen [Veb22] ; todos ellos fundamentales para la temática que nos ocupa. Otras consideraciones pueden verse en [BigLW76] y [Wils86].

En el problema anterior el sentido de recorrido no está predeterminado; en cambio sí lo está para el siguiente, que se presenta en relación con situaciones muy diversas.

Dado un conjunto (o alfabeto) \mathcal{A} es habitual denominar *k-upla* (o *k-palabra*) a toda sucesión a_1, a_2, \dots, a_k de elementos de \mathcal{A} .

Si se las supone escritas en rededor de un círculo, o equivalentemente, si se les introduce el *orden circular* : $a_i < a_{i+1}$, para $1 \leq i \leq k-1$, y además $a_k < a_1$, se les dice *k-palabras circulares*.

Para ellas cabe la siguiente pregunta.

Dado un alfabeto $\mathcal{A} = \{ a_i \}$, $1 \leq i \leq h$ ¿ puede asegurarse la existencia de *k-palabras circulares* que contengan exactamente una vez cada una de las *m-palabras* posibles de construir con los elementos de \mathcal{A} ?

Existen sólo si $k = h^m$. Serán dichas *h-m-palabras circulares equilibradas*.

Notemos que el orden circular implica tomar en cuenta también a las *m-uplas* $a_k, a_1, a_2, \dots, a_{m-1} // a_{k-1}, a_k, a_1, \dots, a_{m-2} // \dots // a_{k-(m-2)}, \dots, a_{k-1}, a_k, a_1$

En ocasiones, y con el fin de enfatizar el orden circular, estas *h-m-palabras circulares equilibradas* serán indicadas $a_1, a_2, \dots, a_k, (a_1, \dots, a_{m-1})$.

Según parece, este “*teleprinter's problem*” aparece ligado a reglas mnemotécnicas de la música de la Antigua India, y fue planteado formalmente en 1894.

Una reseña histórica del mismo y de sus aplicaciones se puede ver en [Chi82]. Allí se extienden referencias dadas en [Bar66], [Hall67], [Lint74], [Stein61/63c].

A los métodos dados para hallar soluciones caben agregarse los propuestos en [ChiO68] y en [Chi82].

Una elegante demostración de que las *palabras h-m-circulares equilibradas* existen cualesquiera sean los enteros h, m , fue dada por Good [Good46] mediante la noción "circuito euleriano".

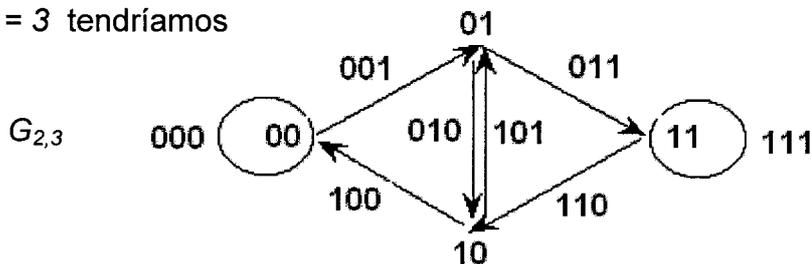
Para ello consideró los *digrafos* $G_{h,m}$, cuyos vértices son las $(m-1)$ -uplas posibles de construir con los h elementos de \mathcal{A} y cuyos arcos (x, y) representan a las m -uplas resultantes de yuxtaponer $x = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) \parallel y = (y_1, y_2, \dots, y_{m-1})$ supuesto que $y_i = x_{i+1}$, cualquiera sea $1 \leq i \leq (m-2)$.

En particular, si $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ para $m = 2$ tendremos



Véase que la única solución, a menos de permutación circular, es $0,0,1,1,(0)$.

Para $m = 3$ tendríamos



Sus soluciones son, a menos de permutación circular, $0,0,0,1,1,1,0,1,(0,0)$ y $0,0,0,1,0,1,1,1,(0,0)$.

Para $h = 2$ el número de éstas "*de Bruijn sequences*" fue determinado en 1894 en [Flye94] y reencontrado en 1946 por de Bruijn [Brui46/75].

A título informativo, y para dar una idea de como crece el número de soluciones al variar m puntualicemos que para $m = 4$ dicho número es 16 ; para $m = 5$ es 2.048 ; para $m = 6$ es $67.108.864$; y que para $m = 7$ supera $14 \cdot 10^{16}$.

Para el caso general el número de las h - m -palabras fue hallado en [AarEB51].

El mismo es $(h!)^w \cdot h^{-m}$, con $w = h^{m-1}$.

Los problemas anteriores se inscriben dentro de los que pueden visualizarse en diagramas *unicursales*, es decir, en esquemas que se pueden recorrer de un sólo trazo sin reiterar líneas, y en los cuales puede, o no, ser de interés volver al punto inicial.

Para referencias históricas sobre ellos, y sobre otros “*problemas unicursales*” puede consultarse el Cap.IX de [RouB92].

Más información sobre resultados relativos a la problemática euleriana, o a extensiones de la misma, pueden hallarse en la muy completa recopilación de Fleischner [Fle83b], y en sus libros [Fle90/91].

Otro trabajo de recopilación a citar es [LesO86].

El “*problema del cartero chino*”, al cual nos referiremos en 4.3, se refiere a cuestiones relacionadas con las precedentes, pero para el caso de configuraciones valuadas.

4.2. CAMINOS Y CADENAS DE EULER

Se dice **camino euleriano** del multidigrafo G a todo camino simple que contiene todos los arcos de G .

Diremos que G es **euleriano** (es **débilmente euleriano**) si es trivial o contiene caminos eulerianos cerrados (si contiene caminos eulerianos abiertos)

Nociones similares caben para el caso no dirigido.

Nótese que según veremos poco más adelante, de las respectivas caracterizaciones resultará que la clase de los eulerianos y la de los débilmente eulerianos son disjuntas.

Recordemos que según puntualizamos en pág. 41 algunos autores denominan “eulerianos” a los multigrafos pares, aún cuando éstos no sean conexos.

Tal ocurre por ejemplo en [BusS65], [Fle83b/90], [Kön36], [Read62] y [Robi69].

Proposición 4.2.1

Un multidigrafo G , no trivial, es euleriano si y sólo si

- a) excluidos sus eventuales vértices aislados es conexo y balanceado.
o equivalentemente
- b) excluidos sus eventuales vértices aislados es conexo y unión de circuitos simples arco disjuntos dos a dos.

Demostración

Si G es euleriano la validez de la afirmación a) es directa.

Para demostrar la recíproca supondremos que G es balanceado y que excluidos sus eventuales vértices aislados es conexo.

Por ser balanceado, cualquiera sea su arco $u_1 = (x_1, x_2)$ podrá elegirse una sucesión $u_2 = (x_2, x_3)$, $u_3 = (x_3, x_4)$, ..., $u_h = (x_h, x_1)$ que determine un camino C_1 , simple y cerrado en x_1 .

Si $G - C_1$ carece de arcos, se ha hallado un circuito euleriano de G .

Caso contrario, como $G - C_1$ es balanceado, aunque no necesariamente conexo, la hipótesis de conexidad sobre G permite afirmar que se puede construir otro camino cerrado C_2 , simple y arco disjunto con C_1 , con al menos un vértice en común con C_1 . Tales C_1 y C_2 se pueden concatenar dando lugar a otro circuito simple y cerrado C_3 .

Si $G - C_3$ carece de arcos se ha hallado un circuito euleriano de G . Caso contrario, como $G - C_3$ es balanceado puede reiterarse el proceso anterior; y esto hasta obtener un circuito euleriano de G .

A partir de la demostración de a), la validez de b) es inmediata.

Corolarios :

1) Todo multidigrafo conexo y balanceado es fuertemente conexo.

2) Un multidigrafo G es débilmente euleriano si y sólo si eliminados su eventuales vértices aislados es conexo y balanceado excepción hecha de dos vértices a, b , en los que $gr^+(a) = gr^-(a) + 1$; $gr^+(b) = gr^-(b) - 1$.

En efecto :

La existencia de un camino euleriano abierto desde a hasta b ($a \neq b$) implica las restricciones indicadas.

Para demostrar la validez de la recíproca basta ver que bajo las hipótesis hechas, el multigrafo G^* obtenido a partir de G agregándole un arco (b, a) es euleriano, y que por lo tanto G admite un camino euleriano $a \rightarrow b$.

Para el caso de configuraciones no dirigidas, y reiterando los razonamientos seguidos en las demostraciones anteriores se tiene la

Proposición 4.2.2

Un multigrafo no trivial es euleriano (es débilmente euleriano) si y sólo si excluidos sus eventuales vértices aislados es conexo con todos sus vértices de grado par (es conexo con exactamente dos vértices de grado impar).

Corolarios

- 1) El completo K_n es euleriano si y sólo si n es impar.
De los K_n con n par sólo el de orden dos es débilmente euleriano.
- 2) Un conexo no trivial $G = (V, U)$ es euleriano si y sólo si puede descomponerse en un conjunto de ciclos elementales arista disjuntos.
- 3) Si G tiene exactamente k vértices de grado impar (k debe ser par) el número mínimo de cadenas necesarias para cubrirlo es $k/2$, y cada una de ellas tiene sus extremos en vértices de grado impar.
- 4) El bipartido completo $K_{p,q}$ es euleriano si y sólo si ambos p, q , son pares y débilmente euleriano si y sólo $p = q = 1$, o bien $p = 2$ y q impar.

De las caracterizaciones dadas resulta que :

- i) Si un multidigrafo admite caminos eulerianos cerrados, todos sus recorridos eulerianos son cerrados. Una afirmación similar cabe para el caso no dirigido.
- ii) Un multigrafo conexo es *unicursal* si y sólo si contiene a lo sumo dos vértices de grado impar.
- iii) Un multidigrafo conexo es *unicursal* si y sólo si es balanceado, excepto en dos vértices a, b , en los cuales $gr^+(a) = gr^-(a) + 1$; $gr^+(b) = gr^-(b) - 1$.

Otras caracterizaciones son :

Un multigrafo conexo (V, U) no trivial es euleriano si y sólo si :

- a) todos sus "cociclos" (ver Cap.7) tienen número par de aristas.
- b) el número de subconjuntos de U (incluido el vacío) contenidos en un árbol cubriente es impar.
- c) cada una de sus aristas pertenece a un número impar de ciclos.
- d) cualesquiera sean sus vértices a, b , hay número par de cadenas arista disjuntas con extremos en ellos.

Para estos resultados consultar [BonHa86], [CharL79], [Fle89/90], [McKee84], [Sha79], [Toi73], [Woo90].

Para una caracterización de las "configuraciones eulerianas mixtas" que recurre al concepto *flujo* pueden consultarse [BatP79], [Fle83b/90] y [FordF62].

Las caracterizaciones precedentes son conocidas, pero sólo válidas para configuraciones finitas. Para el caso de las infinitas mencionemos las dadas en [ErdGV38], [NashW66/68], [Ore62], [Sab64], [Tho83a].

Las respectivas caracterizaciones y la relación natural entre cada multigrafo y su simetrizado permiten afirmar que :

- toda exposición en la cual en cada uno de sus vestíbulos desemboca un número par de pasillos podrá señalizarse de forma tal que pueda ser recorrida transitando una única vez cada uno de sus pasillos.
- toda exposición podrá ser recorrida transitando cada uno de sus pasillos exactamente una vez en cada dirección.
- de todo laberinto puede salirse, transitando a lo sumo un par de veces cada pasillo.

Por otro lado :

- i) El conexo H es adjunto de un grafo euleriano sin bucles si y sólo si todos los completos de su descomposición tipo Krausz son de orden par.
- ii) Si G es grafo conexo sin bucles, no trivial, su adjunto es euleriano si y sólo si todos los vértices de G tienen grados de igual paridad.

Por lo tanto, si G es euleriano también lo es su adjunto.
El grafo $K_{1,3}$ muestra que la recíproca es falsa.

- iii) El adjunto de un multidigrafo no trivial G es euleriano si y sólo si G es fuertemente conexo y arco balanceado.

De iii) y puesto que

Si Γ es la relación de precedencia del digrafo adjunto de G cualesquiera sean en G el arco $u = (x, y)$ y los arcos $p (q)$ de vértice final x (inicial y) se tienen $gr^-(x) = |\Gamma^{-1} \circ \Gamma(p)|$; $gr^+(y) = |\Gamma \circ \Gamma^{-1}(q)| = |\Gamma(u)|$.

se puede inferir la siguiente caracterización intrínseca :

Un digrafo adjunto (V, Γ) es euleriano si y sólo si es fuertemente conexo y supuesto $\Gamma(p) \cap \Gamma^{-1}(q) \neq \emptyset$ se tiene $|\Gamma^{-1} \circ \Gamma(p)| = |\Gamma \circ \Gamma^{-1}(q)| \neq \emptyset$.

Respecto del recuento de recorridos eulerianos y puesto que la opuesta de una cadena euleriana también lo es, resulta que todo multigrafo admite un número par (eventualmente nulo) de ciclos eulerianos.

No obstante, y puesto que de acuerdo con lo puntualizado en pág.109 frecuentemente los pares de cadenas opuestas se identifican con el subgrafo que integran sus elementos es habitual identificar a los ciclos opuestos.

Distinguiendo entre opuestos; es decir, tomando en cuenta el sentido de recorrido, el completo K_5 admite 264 ciclos eulerianos (ver Ejer.4-18).

Los de K_7 son $E_7 = 2^{11} \times 3 \times 5 \times 4.231 = 129.976.320$, mientras que los de K_9 son $2^{17} \times 3^{11} \times 5^2 \times 711 \times 40.787$. (ver [RouB92]-pág. 253/254),

Para dar una idea de la magnitud de estos números observemos que :

I)

Si n es impar, $n \geq 3$, y los vértices de K_n se etiquetan $0, 1, 2, \dots, n-1$, sus aristas pueden identificarse con las fichas—distintas de las fichas dobles— de un “juego de dominó”, y los ciclos eulerianos de K_n asociarse a los posibles “desarrollos circulares” del juego sin fichas dobles.

II)

Admitiendo además las fichas dobles (o equivalentemente incorporando un bucle en cada vértice del K_n) y ya que ellos pueden ocupar $(n-1)/2$ posiciones, de cada uno de dichos “desarrollos circulares” pueden obtenerse $((n-1)/2)^n$ con fichas dobles.

III)

Como los “desarrollos circulares” del juego de dominó habitual se corresponden con los “ciclos eulerianos del completo K_7 con bucles” supuesto que se toma en cuenta el sentido de recorrido y que completar cada uno de ellos insume un segundo para poder concretar los $3^7 \cdot E_7 = 284.258.211.840$ juegos circulares factibles serían necesarios más de nueve mil años.

IV)

Además, y visto que cada uno de los “juegos circulares” da lugar a 28 “juegos lineales” para completar éstos serían necesarios casi ocho billones de años.

Los recuentos de recorridos eulerianos en los casos dirigidos, y no dirigidos, presenta dificultades diferentes.

En particular, cabe destacar que el denominado “Best Theorem”, que enunciaremos en el Cap.8 ([AarEB51], [Ber70], [Deo74], [Fle83b], [JacG79], [Kas63/67], [SwaT81]) permite, haciendo uso de las nociones “arborescencia (antiarborescencia) cubriente” y de ciertas matrices ligadas con la de precedencia, determinar el número de circuitos eulerianos en multidigrafos.

En cambio y de acuerdo con lo puntualizado en [Pal78], una evaluación similar se desconocía aún en 1978, para el caso de los completos K_{2n+1}

Posteriormente, el recuento en cuestión fue resuelto para el caso no dirigido (ver [Fle83a/83b]) recurriendo a "orientaciones eulerianas", y a resultados e ideas que esbozamos seguidamente.

- 1) Cada uno de los ciclos eulerianos de un multigrafo G permite orientar sus aristas de forma que resulte un multidigrafo balanceado cuyo número de circuitos eulerianos se puede calcular matricialmente.
- 2) El conocimiento de todas las posibles orientaciones eulerianas permitiría calcular el número buscado. Pero distintas orientaciones pueden llevar a multidigrafos con distintas cantidades de circuitos eulerianos, y esto complica la situación.

En cuanto a "orientar aristas" con vistas a la cuestión euleriana digamos que :

-- en [OellS84] se demuestra que toda "orientación fuerte" de un multigrafo euleriano G lleva a un multidigrafo euleriano si y sólo si cada par de ciclos de G tiene a lo sumo un vértice común.

-- en [Schr83] se deduce que el número $e(G)$ de orientaciones que admite el conjunto de aristas de un grafo G sin bucles, $2.k$ -regular, de orden n , para generar un digrafo euleriano satisface

$$\left(2^{-k} \cdot \binom{2k}{k} \right)^n \leq e(G) \leq \sqrt{\binom{2k}{k}^n} \quad \text{Estas cotas no son mejorables.}$$

El citado "Best Theorem" permitiría :

i) dar la siguiente extensión del Ejer.4-20.

El simetrizado de K_n contiene $n^{n-2} \cdot ((n-2)!)^n$ circuitos eulerianos.

ii) ver que en digrafos de orden n con m arcos, $m > 2.n$, el número de circuitos eulerianos es par.

En [Ber58] y en [Ber/70]-pág.231/232 se destaca que un importante resultado del álgebra, debido a Amitsur-Levitzki (1950) y reformulado, en 1958, en términos combinatorios por Schützenberger da el siguiente mejoramiento de la afirmación anterior.

Interpretando cada circuito euleriano $\mu = (1, u_2, \dots, u_m)$ como permutación Π del conjunto $\{1, 2, \dots, m\}$ y conviniendo que μ es Π -par, ó Π -impar, según lo sea la correspondiente permutación Π , entonces : Si G es de orden n y tiene $m > 2.n$ arcos, el número de sus circuitos eulerianos Π -pares, coincide con el de los Π -impares.

Por otra parte en [AarEB51]-Th.4 se demostró que :

Si G es h -dirregular de orden p y tiene $E(G)$ circuitos eulerianos, el número de circuitos eulerianos de su adjunto es $E(G^0) = h^{-1} \cdot (h!)^{p \cdot (h-1)} \cdot E(G)$.

Volviendo al *teleprinter's problem* citado en 4.1, y puesto que cada $G_{h,m}$ es el adjunto de $G_{h,m-1}$, aplicando reiteradamente el resultado anterior a partir del multidigrafo $G_{h,1}$ – constituido por h bucles con un mismo vértice soporte – permite reencontrar el número de las posibles palabras $h-m$ -equilibradas.

En [Read62] (ver también [HarP73], [Pal78]) se da una fórmula para evaluar el número de los grafos etiquetados, pares, sin bucles, de orden n con m aristas, y en particular el de los conexos. Algunos resultados se extienden a configuraciones más generales.

Se deduce además que :

El número de grafos sin bucles, etiquetados, pares, de orden n , coincide con el de los etiquetados sin bucles, de orden $n - 1$.

Es decir, son 2^k , con $k = \binom{n-1}{2}$.

A su vez en [Robi69] (ver [HarP73], [Pal78]) se halla el número de grafos pares sin bucles de orden n así como el de éstos que son autocomplementarios (y por ende conexos).

En la siguiente tabla p_n es la cantidad de grafos pares sin bucles de orden n ; e_n la de ellos pero eulerianos ; y t_n la de los éstos pero etiquetados.

n	1	2	3	4	5	6
p_n	1	1	2	3	7	16
e_n	1	0	1	1	4	8
t_n	1	0	1	3	38	680

Respecto de la construcción de ciclos eulerianos cabe notar que si bien los criterios de caracterización dados no son constructivos del proceso de demostración adoptado puede inferirse un método para hallarlos.

Uno que reviste tal carácter se da en [GonM79] Cap.8

Otros podrían deducirse a partir de métodos dados para resolver el problema del laberinto, y en particular del Algoritmo de Tarry. También cabe citar el siguiente, que según se indica en [Lucas82] fue ideado por Fleury. Parece ser el más antiguo de los propuestos al efecto, y es fácil de implementar.

Su idea directriz es :

Dada una cadena simple C_i del euleriano G , extenderla con aristas que no sean aristas puente de $G - C_i$.

Algoritmo de Fleury para determinar ciclos eulerianos.

Dado un multigrafo euleriano G construir, a partir de un vértice arbitrario \underline{a} y de una arista u_1 incidente en él, cadenas simples $C_i = u_1, u_2, \dots, u_i, i \geq 1$, de extremos \underline{a}, x , (eventualmente $\underline{a} = x$) respetando la regla :

Si $G_i = G \leftrightarrow C_i$ contiene aristas, elegir de entre ellas, como u_{i+1} una de las incidentes en x pero tal que $G_i \leftrightarrow u_{i+1}$ sea vacío, o un conexo que contiene al vértice \underline{a} .

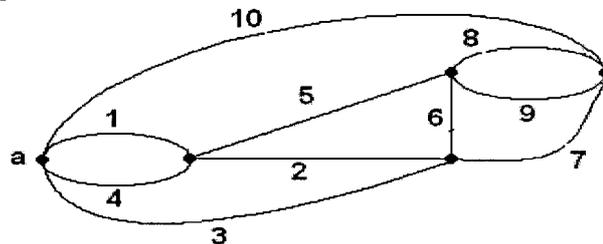
Poner $C_{i+1} = C_i \cup \{u_{i+1}\}$ y reiterar el proceso aplicándolo a G_{i+1} .

La eficacia del algoritmo resulta de lo que sigue :

Las distintas C_i a construir son cadenas simples, y si luego de m iteraciones no quedan aristas por incluir, C_m es cerrada en \underline{a} , y se tiene un ciclo euleriano.

Caso contrario, como en G_i los vértices \underline{a}, x , son los únicos de grado impar ambos deben pertenecer a una misma componente conexas. Luego, mientras G_i contenga aristas al menos una de ellas incide en x , y puede ser elegida aplicando la regla.

Así por ejemplo, dado



una tal sucesión podría ser la que se obtiene eligiendo $u_1 = i, 1 \leq i \leq 10$, y otra la que se obtiene substituyendo u_8, u_9 por u_9, u_8 .

La sucesión $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7$ no podría extenderse con u_{10} pues en tal caso las aristas u_8, u_9 quedarían desconectadas del vértice a . Tampoco sería factible extender con u_{10} la sucesión u_1, u_4, u_3, u_7 .

Nótese que el orden en que se eligen sucesivamente las aristas se *conserva* en el ciclo final, y que todos los ciclos eulerianos pueden obtenerse aplicando este algoritmo.

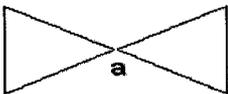
En [Fle83b] se dan, además del de Fleury, otros métodos para hallar recorridos eulerianos.

Habitualmente, al aplicar estos métodos las sucesivas aristas deben ser elegidas respetando restricciones; o sea, “no pueden ser elegidas al azar”

Un multigrafo G se dice **aleatoriamente euleriano desde el vértice p** si toda cadena simple C de extremos p, q , puede extenderse a una cadena euleriana eligiendo una cualesquiera de las aristas incidentes en q que no integra –aún– la cadena C en cuestión.

G es **aleatoriamente euleriano** si lo es desde cualesquiera de sus vértices.

Estas nociones, introducidas en [Ore51], fueron estudiadas en [Dir72a] también para el caso infinito, y en [Eri75] también para el caso dirigido.

Obviamente, el grafo  es aleatoriamente euleriano sóloamente desde a .

Dos resultados de Ore [Ore51/62] relativos a este concepto son :

- Un grafo euleriano G es aleatoriamente euleriano desde \underline{a} si y sólo si todo ciclo de G incide en \underline{a} .
- Si G es aleatoriamente euleriano desde \underline{a} , y H es un subgrafo euleriano que contiene al vértice \underline{a} , también H y su complemento son aleatoriamente eulerianos desde \underline{a} .

También se demuestran (ver [CapM78], [CharWh70], [Fle83b], [Har57])

- Si G es aleatoriamente euleriano desde \underline{a} , entonces \underline{a} es de grado máximo.
- Si G es aleatoriamente euleriano desde \underline{a} , también lo es desde cualquier otro vértice con igual grado que \underline{a} .
- G es aleatoriamente euleriano desde $0, 1, 2$, ó desde todos sus vértices.
- Si G es aleatoriamente euleriano pero no es ciclo, es aleatoriamente euleriano desde a lo sumo dos vértices. En este caso G consta de un número par de cadenas con extremos en ellos, sin vértices interiores comunes.

En [CharLi71] se caracterizan digrafos aleatoriamente eulerianos, y en [Fle83b] se puntualiza la equivalencia entre las siguientes afirmaciones.

- G es digrafo aleatoriamente euleriano desde algún vértice.
- alguno de los vértices de G pertenece a todos sus circuitos.
- cualesquiera tres circuitos de G tienen un vértice común.

4.3. PROBLEMA DEL CARTERO CHINO

Supongamos que en cierta ciudad hay un único cartero para repartir la correspondencia enviada a sus habitantes, que para cumplir con su trabajo debe volver a su oficina de partida luego recorrer todas las cuadras de la ciudad y que, como es natural, pretende elegir un recorrido que sea lo más corto posible.

¿ Como determinarlo, conocidas las longitudes de las diferentes cuadras ?

Obviamente, si el grafo representativo de las cuadras de la ciudad es euleriano, todos sus recorridos eulerianos dan una solución del problema.

Pero si la ciudad no admitiera tales ciclos para transitarla en su totalidad sería necesario recorrer más de una vez algunas de sus cuadras, y en este caso habría que tener en cuenta sus longitudes.

Esto lleva a la siguiente formalización en configuraciones valuadas.

Determinar, en un multigrafo $G = (V, U)$ a cada una de cuyas aristas se asignó un valor $w(u_i) \geq 0$, una cadena u_1, u_2, \dots, u_k que contenga al menos una vez cada arista de G y tal que tomando en cuenta todas las cadenas C_j que satisfacen la restricción, haga mínimo el valor $\sum_{u_i \in C_j} w(u_i)$

El problema precedente es frecuentemente denominado "Problema del Cartero Chino", pues el primero en estudiar la versión simplificada que resulta de suponer todas las aristas con un mismo valor fue el matemático chino Kwan Mei-Ko [Kwan60], quien además de caracterizar las soluciones que lo resuelven propuso un método para hallarlas.

Esta versión simplificada también fue estudiada en [BellC69] utilizando Programación Dinámica para minimizar el número total de aristas a reiterar.

En [Edm65b] y [EdmJ73] se consideró el caso general, y se enunció un algoritmo para resolverlo.

Al respecto consultar [BonM76], [ChaGM79], [GonM79].

La metodología de [Kwan60] se expresa en términos de duplicación de aristas y está esbozada en [Fle83b], donde también se dan referencias de otros algoritmos propuestos para resolver este problema en el caso general, así como para sus similares del caso dirigido, o el de configuraciones mixtas

El análisis de un problema análogo, el de optimizar el uso de equipos de barrido de una ciudad, llevó a Tucker ([Tuc76] y [Tuc80]-Cap.8) a idear, además, otra demostración del conocido criterio de caracterización de Euler.

Admitiendo que los valores asignados a las aristas pueden variar según sea el sentido en que se las recorra se está frente a un problema similar al que nos ocupa, y que podríamos decir "*problema del cartero serrano*".

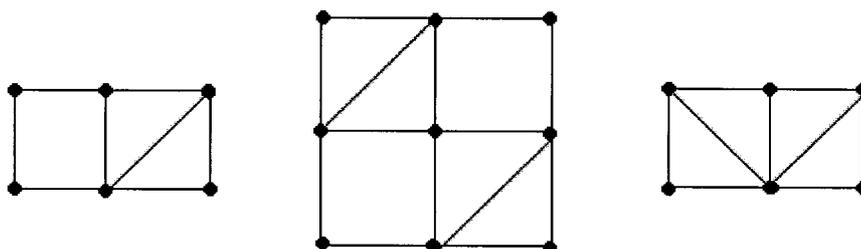
En [Guan84] se estudian las dificultades computacionales de este problema y se proponen algoritmos aptos para resolverlo en casos particulares.



EJERCICIOS

4-1)

¿ Cuáles de los siguientes esquemas son eulerianos (débilmente eulerianos) ?



4-2)

¿ Cuál es el menor número de aristas que deben eliminarse en el multigrafo que corresponde al problema de los Puentes de Königsberg para obtener un euleriano ? Idem, un débilmente euleriano ?

4-3)

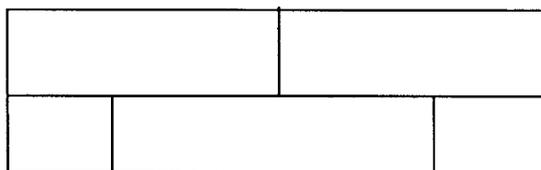
¿ Cuales de los “grafos poliedrales platónicos” (tetraedro, exaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro) son eulerianos ? En los que no lo son, ¿ cuál es el menor número de cadenas simples necesarias para cubrir sus aristas ?

4-4)

Limitándose a los grafos sin bucles represente los eulerianos de orden $n \leq 6$, los eulerianos etiquetados de orden $n \leq 4$, y los pares con $n \leq 5$.

4-5)

Recurra a la construcción de un multigrafo adecuado y a la caracterización de los eulerianos para demostrar que no es posible trazar una curva continua que corte exactamente una vez cada uno de los 16 segmentos de la figura.



¿ Podría cubrir el esquema anterior con sólo tres trazos ?

4-6)

Suponga que G es un multigrafo conexo no euleriano. ¿ Podría determinar cuál el menor número de aristas que sería necesario agregarle para transformarlo en uno euleriano ? ¿ Habría una única forma de lograrlo ?

4-7)

Vea que cualquiera sea el multigrafo G , con el agregado de a lo sumo un vértice y de aristas adecuadamente elegidas puede obtenerse un multigrafo euleriano que contiene a G .

4-8)

El juego de dominó habitual consta de 28 fichas, cada una de las cuales tiene sus mitades valuadas con n puntos, $0 \leq n \leq 6$.

Muestre que dichas fichas pueden disponerse en forma "circular" una tras otra respetando las reglas del juego.

¿ Podría afirmarse lo mismo si se retira la ficha con dos seis ?

Idem , ¿ si se retira la ficha con un cinco y un seis ?

Idem, ¿ si las fichas estuvieran valuadas $0,1,2,3,4,5$?

4-9)

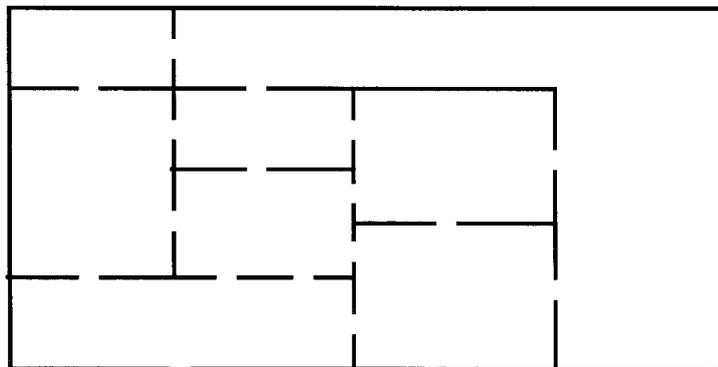
Suponga tener las piezas de dominó $[1,2]$, $[1,3]$, $[1,4]$, $[1,5]$, $[2,3]$, $[2,4]$, $[2,5]$, $[3,4]$, $[3,5]$. ¿ Puede ordenarlas respetando las reglas del juego ?

En tal caso, ¿ de cuántas formas ?

4-10)

Sea dado el siguiente plano de una casa.

¿ Será posible recorrer todas sus habitaciones y su jardín, volviendo al punto inicial, y utilizando exactamente una vez cada una de sus puertas ?



4-11)

Vea que si G es multigrafo conexo cuyos únicos vértices de grado impar son p, q , el número de cadenas simples, arista disjuntas, de extremos p, q , es impar.

4-12)

Muestre que todo multidigrafo euleriano con al menos un vértice cuyo grado positivo supera dos, tiene al menos dos circuitos eulerianos.

4-13)

Muestre que si G es un multigrafo conexo no unicursal existen al menos dos multigrafos eulerianos que lo contienen.

4-14)

Vea que el número mínimo de cadenas simples arista disjuntas necesarias para cubrir un grafo cúbico de orden n es $n/2$, mientras que para K_n es 1, ó $n/2$

4-15)

Constataste que el resultado de Good relativo a la existencia de palabras circulares equilibradas citado en 4.1 puede obtenerse a partir de la Prop. 4.2.1 y de las características propias de los dígrafos $G_{n,m}$.

4-16)

Halle algunas de las *3-2-palabras circulares equilibradas* que contienen exactamente una vez cada una de las nueve palabras de longitud dos que son posibles de construir con el alfabeto $A = \{ a, b, c \}$

4-17)

Demuestre que C_n contiene dos ciclos eulerianos, respectivamente opuestos entre sí, mientras que su simetrizado C_n^s admite n circuitos eulerianos.

4-18)

Vea que el completo de vértices a, b, c, d, e contiene 132 cadenas eulerianas cerradas en a , con la arista $[a, b]$ recorrida desde a hacia b .

4-19)

Recurriendo al resultado anterior vea que las 15 fichas de un dominó con mitades valuadas $0, 1, 2, 3, 4$, permiten armar, atendiendo al sentido de recorrido, $2^5 \times 264 = 8.448$ desarrollos "circulares" y $15 \times 2^5 \times 264 = 126.720$ "lineales"

4-20)

Vea que el simetrizado de K_4 admite 256 circuitos eulerianos.

4-21)

Supongamos que Juan y Pedro están jugando al dominó, y que Pedro oculta una ficha. ¿ Se podrán, no obstante, disponer las restantes respetando las reglas del juego ? ¿ Se podrá construir un “juego circular“ ?

4-22)

¿ Es posible determinar un multigrafo euleriano con número par de vértices e impar de aristas ? Idem ¿ débilmente euleriano ?

4-23)

Dado un multigrafo $G = (V, U)$ sus “*cubrimientos por cadenas*” son particiones de U en cadenas simples. El cubrimiento es mínimo si no hay otro con menor número de cadenas, y *unicursal* si contiene una única cadena.

Pruebe :

- a) que todo multigrafo finito admite cubrimientos por cadenas.
- b) que un conexo es unicursal si y sólo si tiene a lo sumo dos vértices de grado impar.
- c) que si G es grafo conexo no trivial, entonces :
 - si tiene a lo sumo tres vértices, es unicursal.
 - si es de orden cuatro y no unicursal, agregándole una arista se obtiene uno unicursal. ¿ Puede afirmarse lo mismo si es de orden cinco ?

4-24)

¿ Podría construir un grafo G conexo sin bucles que admitiera cubrimientos mínimos con $k = 3$ cadenas tal que eliminando una de sus aristas, y según cual fuera, se obtuvieran subgrafos de G cuyos cubrimientos mínimos tuvieran, ya sea $(k-1)$, ó bien k , ó bien $(k + 1)$ cadenas ?

4-25)

Vea que :

- a) si G es balanceado y conexo, G es fuertemente conexo.
- b) si G es conexo, su simetrizado es euleriano.
- c) si G tiene arista puente, no es euleriano. ¿ Puede ser débilmente euleriano ?
- d) si G carece de bucles, y es euleriano, el número de componentes conexas de $G - \{v\}$ es a lo sumo $gr(v) / 2$. ¿ Puede mejorarse la cota ?

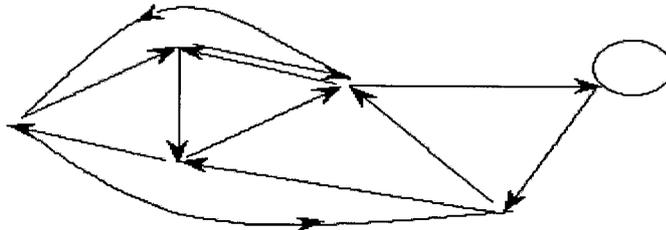
4-26)

¿ Puede afirmar que un grafo conexo sin bucles es euleriano si y sólo si la suma módulo dos de las filas de su matriz adyacencia es el vector nulo ?

¿ Vale algo similar para el caso dirigido ? Idem para débilmente eulerianos ?

4-27)

Encuentre recorridos eulerianos en el siguiente digrafo, y en su sostén.



4 -28)

Vea que en el caso dirigido las nociones "euleriano" y "adjunto" son independientes entre sí. A tal efecto represente un par de digrafos eulerianos, y un par de dígrafos no eulerianos, de los cuales sólo uno tenga adjunto euleriano.

4-29)

Sea G un grafo conexo sin bucles, no trivial. Vea que su adjunto H es euleriano

- si y sólo si todos los vértices de G tienen grados de igual paridad ;
- o equivalentemente,
- si y sólo si los clanes de la descomposición tipo Krausz de H son todos de orden par, o todos de orden impar.

4-30)

Sea G un multidigrafo no trivial, y H su digrafo adjunto.

Vea que :

– H es euleriano si y sólo si G es f -conexo y arco balanceado .

– G es f -conexo, k -dirregular, $k \geq 1$, si y sólo si también lo es H .

Ambos G y H son eulerianos si y sólo si G (idem H) es f -conexo, k - dirregular

4-31)

Muestre que :

— un grafo euleriano G , es aleatoriamente euleriano desde a , si y sólo si todo ciclo de G incide en a .

— si G es aleatoriamente euleriano desde cualquier vértice, G es un ciclo.

CAPITULO 5

PROBLEMA HAMILTONIANO

5.1. INTRODUCCION

El problema euleriano es el de recorrer todos los arcos (todas las aristas) de cierto G utilizando exactamente una vez cada uno de ellos (cada una de ellas) ; mientras que el problema hamiltoniano es el de incidir sucesivamente en todos sus vértices exactamente una vez en cada uno de ellos.

Destaquemos que pese a la aparente similitud entre ambos problemas, las dificultades intrínsecas son muy dispares.

En particular, hay criterios simples que permiten decidir sobre si un dado G es euleriano; pero esta situación es completamente distinta de la que se presenta sobre si es hamiltoniano. Para este caso, excepto configuraciones particulares, sólo se han dado condiciones suficientes, o bien necesarias.

La temática de este capítulo es una de las más ampliamente estudiada en la Teoría de Grafos, y luego de los resultados obtenidos respecto de la célebre "Conjetura de los Cuatro Colores", el "Problema Hamiltoniano" está, conjuntamente con el "Problema del Isomorfismo" y los que plantean la "Conjetura de Ulam" y la evaluación del "Número de Ramsey", entre los más importantes desafíos aún pendientes.

Esta situación es tanto más lamentable cuanto que hay numerosas cuestiones ligadas a la existencia de recorridos hamiltonianos.

Algunas de las numerosas cuestiones que llevan a estudiarlos tienen su origen en meros pasatiempos ; y otros, en importantes problemas teóricos, o prácticos.

Entre los primeros podemos citar el del "Caballo de Ajedrez".

En el mismo se pregunta si es factible, respetando las reglas de desplazamiento de dicho trebejo, recorrer el tablero incidiendo una sola vez en cada una de sus 64 casillas. Se puede pedir, o no, volver al punto inicial.

Problemas similares caben respecto de otros tableros, pero ninguno con número impar de escaques admite recorridos que vuelvan al inicial.

El problema en cuestión, conocido ya en la India Antigua, interesó entre otros a Euler, De Moivre y Vandermonde, quienes propusieron diferentes métodos para resolverlo. Detalles al respecto en [Ber58/70], [BigLW76], [CharKK73a/73b], [Krai30]-Cap.11, [Mars71]-Cap.4, [RouB92]-Cap.VI

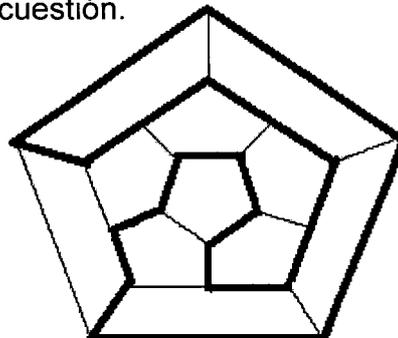
Una de las numerosas soluciones volviendo al punto inicial está indicada en

1	4	29	18	31	14	39	36
6	19	2	15	28	37	32	13
3	64	5	30	17	40	35	38
20	7	16	27	46	33	12	41
63	26	21	56	11	42	47	34
8	59	62	25	22	45	50	53
61	24	57	10	55	52	43	48
58	9	60	23	44	49	54	51

En [Krai30] y [RouB92] se incluyen consideraciones sobre la cantidad de recorridos y se observa que ella está acotada superiormente por $\binom{168}{63}$ e inferiormente por 122.802.512, entre los cuales hay 7.763.536 que vuelven al punto inicial.

Otro juego ligado con la noción que nos ocupa, y que es origen del nombre con que se la designa, es el ideado por el matemático irlandés Hamilton. [Ham57] El juego, ideado en ocasión de sus estudios sobre *cuatemiones*, consistía en esencia de un dodecaedro a cuyos vértices se habían asignado nombres de ciudades y en elegir, en él, sucesiones de aristas que permitieran “recorrer el mundo”, y sin repetir “ciudades” volver a la inicial.

Por deformación elástica los dodecaedros pueden equipararse a un esquema plano, y esto lleva a la siguiente ejemplificación de uno de los posibles recorridos que satisfacen el desafío en cuestión.



Además de la solución indicada existe otra, simétrica con ella.
Con vértices etiquetados hay 30 soluciones, y sus respectivas simétricas.

Para información sobre el método de resolución empleado por Hamilton ver [Ber58/70], [CharKK73a] o [RouB92]-Cap.IX.

La problemática que nos ocupa aparece también al organizar una reunión alrededor de una mesa, supuesto que se deben respetar relaciones de amistad entre pares de comensales contiguos, y también en los conocidos juegos de “Las Torres de Hanoi”, y de “Los Anillos Chinos”.([Cro56], [Gard62]-Cap.6, [Krai30]-Cap.3, y [RouB92]-Cap.XI)

Además, muchos de los problemas que estudia la Investigación Operativa pueden reducirse al de ordenar (o recorrer) linealmente un determinado conjunto de situaciones, sin reiterarlas, y sin omitir ninguna.

Dentro de éstos, pero considerando configuraciones valuadas, se incluye el “Problema del Viajante de Comercio”, que trataremos en 5.6.

Por otro lado, observemos que la determinación de las *palabras h-m-circulares equilibradas* a las que nos hemos referido en relación con el problema euleriano también se puede encarar como problema hamiltoniano considerando digrafos $G_{h,m}$ en los cuales, ahora, sus vértices corresponden a *m-uplas*, y sus arcos a $(m+1)$ -uplas.

Esto, y la diferencia fundamental entre las dificultades de caracterizar los digrafos eulerianos y los hamiltonianos muestra la importancia que puede tener la elección de la configuración en la cual se analizará un cierto problema.

Para más información sobre la temática que nos ocupa : [Berm78], [BermTh81], [CapM78], [Chv73b], [Gou91], [Les77] y [NashW69b/75]

5.2. CAMINOS Y CADENAS DE HAMILTON

Diremos **camino hamiltoniano** del multidigrafo G a cada uno de sus caminos elementales cubrientes; es decir, a aquellos que inciden exactamente una vez en cada uno de los vértices de G .

Un multidigrafo se dirá **hamiltoniano** si es trivial, o contiene caminos hamiltonianos cerrados, y **débilmente hamiltoniano** si, en cambio, los contiene abiertos y estos no pueden extenderse a hamiltonianos cerrados.

Nociones similares caben para el caso no dirigido.

Del grafo de aristas $u_1 = [a, b]$, $u_2 = [b, c]$, $u_3 = [c, d]$, $u_4 = [d, a]$, $u_5 = [b, d]$, que admite la cadena hamiltoniana cerrada u_1, u_2, u_3, u_4 , y la hamiltoniana abierta no extendible u_1, u_5, u_3 resulta que a diferencia de lo que ocurre con las configuraciones eulerianas (ver 4.2) las hamiltonianas y las débilmente hamiltonianas no constituyen clases disjuntas.

Las problemáticas relativas a las configuraciones hamiltonianas y a las débilmente hamiltonianas no son esencialmente distintas.

En efecto, si G es un grafo de orden $n \geq 2$ y H es el que se obtiene agregando un vértice adyacente a todos los de G , se tiene que G admite cadenas hamiltonianas abiertas si y sólo si H las contiene cerradas.

De las respectivas definiciones es inmediato que todo circuito (ciclo) hamiltoniano es un 1-difactor (2-factor) y que todo digrafo (grafo) hamiltoniano es fuertemente conexo (conexo).

También es fácil ver que los grafos $C_n, K_n, n \geq 3$, son hamiltonianos, y que de los bipartidos sólo pueden serlo aquellos $(P \cup Q, U)$ con $|P| = |Q|$.

Obviamente, para el estudio del concepto "configuración hamiltoniana" basta restringirse a las conexas sin bucles.

Además, carecen de interés tanto el caso $G = K_1$ como el admitir arcos paralelos (o aristas paralelas) excepto haya sólo dos vértices.

Por ello para el resto de este capítulo supondremos, sin pérdida de generalidad, que G es conexo con al menos tres vértices, sin bucles y sin arcos paralelos (o aristas paralelas).

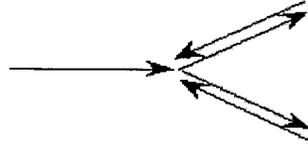
Nótese que | Si un digrafo carece de caminos cerrados y admite camino hamiltoniano, éste es único.

En efecto, si hubiera varios de tales caminos podríamos elegir dos ; α y β .

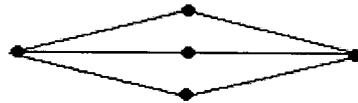
Las sucesiones de vértices que los determinarían tendrían por lo menos un par de vértices a, b , en distinto orden, pero entonces la concatenación de los subcaminos $a \rightarrow b \in \alpha$ y $b \rightarrow a \in \beta$ daría lugar a un camino cerrado, absurdo.

En particular, como todo unilateralmente conexo tiene vértice raíz cabe afirmar :
|| Todo u-conexo sin circuitos, contiene un único camino hamiltoniano.

Del siguiente esquema resulta que no todo u-conexo admite tales caminos.



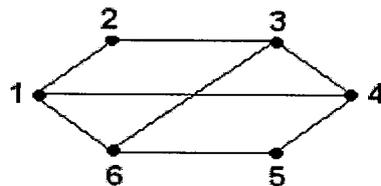
Por otro lado, todo hamiltoniano es 2-conexo, pero el siguiente $K_{2,3}$, habitualmente denominado θ -grafo, muestra que la recíproca es falsa.



Aún más, se prueba (ver [Har69b], [HoeV78]) que :

- Todo 2-conexo no hamiltoniano de orden $n \geq 5$ contiene inmerso un θ -grafo.

En el siguiente grafo los vértices 1,2,3,4,6 inducen un θ -grafo y por lo tanto la afirmación recíproca es falsa.



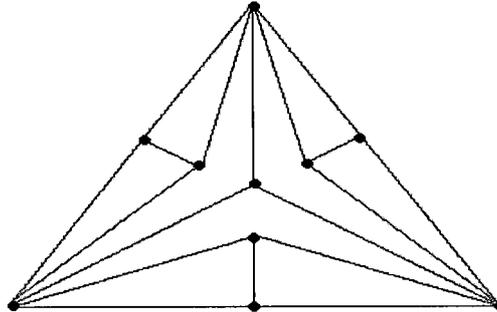
Decidir sobre si cierta configuración contiene recorridos hamiltonianos es, en general, muy arduo y parece ser inaccesible desde un punto de vista computacional.

A diferencia del problema euleriano, para el cual se conocen criterios eficientes, para el caso del problema hamiltoniano no los hay.

Más aún, el problema de analizar la existencia de recorridos hamiltonianos pertenece al de los "NP-completos" y esto aún en cierto caso particular [GareJT76]. Para más referencias consultar [AhoHU74], [GareJ79], [LucSK79]).

A continuación ejemplificaremos un procedimiento que, en grafos con vértices de grado mayor que dos no adyacentes entre sí, puede llevar a confirmar la no existencia de ciclos hamiltonianos.

Su implementación es fácil. Lo aplicaremos al siguiente grafo de orden diez, con tres vértices no adyacentes de grado cinco.



Como para construir ciclos hamiltonianos deben emplearse exactamente dos de las aristas que inciden en cada vértice, al menos nueve de las que inciden en los vértices de grado cinco no son utilizables.

Por ello, de sus 18 aristas sólo restan a lo sumo nueve aptas para nuestro propósito, y con tal cantidad no es posible construir los ciclos buscados.

Así como, en general, es complicado determinar si cierta configuración admite recorridos hamiltonianos, también hay dificultades, salvo casos muy especiales, para determinar el número de éstos.

En particular, puede constatarse (ver Ejer.5-11)) que contando como distintas a las cadenas opuestas, las cerradas de K_n ($n \geq 3$) son $n!$; y las de $K_{p,p}$ ($p \geq 2$) son $p!.p!$.

Recordando lo dicho en pág.109 respecto del abuso de lenguaje que lleva a identificar cada ciclo con su opuesto, y con el conjunto de cadenas que lo generan, y con el subgrafo que determinan sus elementos, resulta que

No tomando en cuenta el sentido de recorrido (es decir, identificando cadenas opuestas) K_n y $K_{p,p}$ admiten $\frac{(n-1)!}{2}$ y $\frac{p!(p-1)!}{2}$ subgrafos que son ciclos hamiltonianos ($n \geq 3, p \geq 2$).
--

Así por ejemplo, K_4, K_5, K_6 contienen, respectivamente, 3, 12, 60 subgrafos ciclo hamiltonianos.

Véase que cada arista de K_n pertenece a $(n-2)!$ de dichos ciclos hamiltonianos arista disjuntos.

Proposición 5.2.1

Identificando cadenas opuestas en K_n ($n \geq 3$) pueden determinarse :

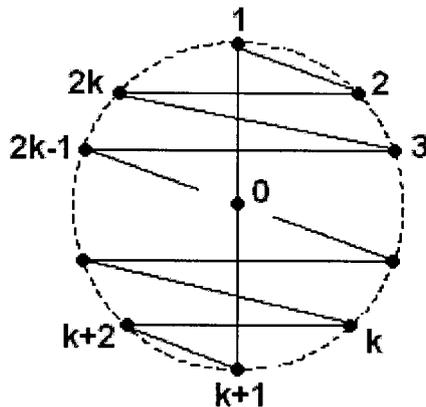
- A) hasta $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ subgrafos ciclos hamiltonianos arista disjuntos.
- B) hasta $\lfloor n/2 \rfloor$ subgrafos cadenas hamiltonianas abiertas aristas disjuntas, ($\lfloor x \rfloor$ significa parte entera de x).

Demostración

Para justificar que los valores indicados son cota superior basta atender al número de aristas que tienen K_n , y cada uno de los subgrafos en consideración.

Veamos ahora que la cota indicada en A) no es mejorable.

i) En el caso *n impar*, supuesto $n = 2.k + 1$ e identificando los vértices de K_n con $0, 1, 2, \dots, 2.k$ la sucesión $0, 1, 2, 2.k, 3, 2.k-1, 4, \dots, k, k+2, k+1, (0)$ determina un ciclo hamiltoniano (ver esquema siguiente)



Operando módulo $2.k$, y sumando uno a las cifras distintas de 0 (Rotando en una unidad el esquema) se halla el hamiltoniano $0, 2, 3, 1, 4, 2.k, \dots, k+3, k+2, (0)$ que es arista disjunto del anterior.

Reiterando esta operatoria se determinan hasta $k = (n-1) / 2 = \lfloor (n-1) / 2 \rfloor$ subgrafos que satisfacen las restricciones pedidas.

ii) En el caso *n par*, eliminando un vértice x se obtiene el completo $K' = K_n - \{x\}$ de orden impar $(n-1)$, y en él, según vimos, puede elegirse un conjunto de $(n-2) / 2$ subgrafos ciclo hamiltoniano, arista disjuntos.

Supuesto que a es uno de los vértices de K' y que $[a, i]$ es arista de uno de estos ciclos, substituyéndola por el par de aristas $[a, x], [x, i]$ (diríamos, *intercalando x en [a, i]*) se obtiene un ciclo hamiltoniano de K_n .

Conservando a , y reiterando el proceso para los otros ciclos hamiltonianos de K' se obtienen, finalmente, $(n-2) / 2 = \lfloor (n-1) / 2 \rfloor$ de los subgrafos indicados.

Para verificar la validez de B) notemos que :

– si $n = 2.k + 1$, quitando a cada uno de los $k = \lfloor (n - 1) / 2 \rfloor$ ciclos hamiltonianos arista disjuntos de K_n una de sus aristas se tienen $k = \lfloor n / 2 \rfloor$ cadenas hamiltonianas arista disjuntas.

– si $n = 2.k$ agregando a K_n un vértice \underline{x} se obtiene un completo de orden impar que admite $k = \lfloor n / 2 \rfloor$ ciclos hamiltonianos arista disjuntos, y eliminando de ellos las aristas incidentes en \underline{x} se tienen las k cadenas buscadas.

Corolarios

1) Los $p.(2.p - 1)!$ subgrafos ciclo-hamiltonianos de $K_{2.p+1}$ puede partirse en $(2.p - 1)!$ conjuntos, cada uno de los cuales constituye un cubrimiento con p de dichos ciclos arista disjuntos entre si.

En efecto, $K_{2.p+1}$ admite $p.(2.p - 1)!$ subgrafos ciclo hamiltonianos y contiene conjuntos de $\lfloor (n - 1) / 2 \rfloor = p$ de ellos que son arista disjuntos dos a dos.

Como cada uno de dichos ciclos contiene $n = 2.p + 1$ aristas y $n.p$ coincide con el número de aristas de $K_{2.p+1}$ cada uno de estos conjuntos de p ciclos da un cubrimiento de $K_{2.p+1}$, Por lo tanto éste admite $(2.p - 1)!$ cubrimientos.

En particular, y volviendo sobre algo señalado en pág.31, se tiene que K_5 admite doce subgrafos ciclo hamiltonianos, y que éstos pueden agruparse en seis pares de ciclos sin aristas comunes.

2) $K_{2.p}$ puede descomponerse :
 a) en conjuntos de p subgrafos que son cadenas hamiltonianas abiertas arista disjuntas ; o bien
 b) en $(2.p - 1).(2.p - 3)!$ conjuntos de $(p - 1)$ subgrafos ciclos hamiltonianos y un 1-factor, todos ellos sin aristas comunes dos a dos.

En efecto :

a) $K_{2.p}$ admite conjuntos de $\lfloor n/2 \rfloor = p$ cadenas hamiltonianas arista disjuntas, y cada una de éstas tiene $2.p - 1 = n - 1$ aristas. En consecuencia, de $n.(n - 1) / 2 = (n - 1).p$ cada conjunto de ellas da un cubrimiento de $K_{2.p}$.

b) Los $(2.p - 1) / 2$ subgrafos ciclo hamiltonianos de $K_{2.p}$ pueden agruparse en $(2.p - 1)(2.p - 3)!$ conjuntos, cada uno de ellos con $\lfloor (n - 1) / 2 \rfloor = p - 1$ de tales ciclos, arista disjuntos entre sí.

Eliminando todos los de alguno de esos conjunto queda un grafo k -regular, con $k = (n - 1) - 2.(p - 1) = 1$, que es un 1-factor.

En particular, el K_4 de vértices a, b, c, d puede cubrirse con un par de cadenas abiertas arista disjuntas, por caso $a, b, c, d \parallel c, a, d, b$.
También puede serlo con el ciclo $a, b, c, d, (a)$ y el 1-factor determinado por el par de aristas $[a, c], [b, d]$.

Análogamente, el K_6 de vértices a, b, c, d, e, f se puede reencontrar como unión de las tres cadenas abiertas $a, b, c, d, e, f \parallel c, a, e, b, f, d \parallel b, d, a, f, c, e$, sin aristas comunes; o como unión de los ciclos $a, b, c, d, e, f, (a) \parallel a, c, f, d, b, e, (a)$ y el 1-factor formado por las aristas $[a, d], [b, f], [c, e]$.

3) K_n puede descomponerse en ciclos hamiltonianos (cadenas hamiltonianas) si y sólo si n es impar (par).

De lo visto resulta que identificando “rotaciones a derecha” con “rotaciones a izquierda” la respuesta a la pregunta :

¿De cuántas formas pueden sentarse, a menos de permutación circular, alrededor de una mesa n comensales, sin repetir pares de contiguos ?
es $[(n-1) / 2]$.

Así, en particular, cinco amigos podrían sentarse en rededor de una mesa, sin repetir vecinos sólo de dos formas “esencialmente” distintas : $1, 2, 3, 4, 5, (1)$ y $1, 3, 5, 2, 4, (1)$.

También son dos las formas en que, identificando opuestas, seis amigos pueden formar rondas que respeten la restricción en cuestión.

Otras deducciones de 5.2.1, o resultados vinculados con ella pueden verse en [Ber70]-Cap.11, [Berm78], [CharL79]-Cap.8, [Fle90]-Cap.III.

De los Corolarios 1), 2), y del hecho que cada subgrafo ciclo hamiltoniano de K_n da lugar, si n es par a dos 1-factores arista disjuntos, se reencuentran los siguientes resultados, ya indicados en pág.31.

- K_{2p+1} es 2-factorisable, y esto en p subgrafos ciclos hamiltonianos arista disjuntos dos a dos.
- K_{2p} es 1-factorisable; o sea, es expresable como unión de $2p-1$ subgrafos que son 1-factores, arista disjuntos.

Dentro de la temática anterior, y con referencia a grafos bipartidos completos en [Dir72b] se mostró que :

$K_{2p, 2p}$ puede descomponerse en p ciclos hamiltonianos, y $K_{2p+1, 2p+1}$ en p ciclos hamiltonianos y un 1-factor, todos ellos arista disjuntos dos a dos.

Respecto de la descomposición de los simetrizados de los K_n se tiene que :

- 1) Si n es impar, la posibilidad de descomponer K_n en $(n - 1) / 2$ ciclos hamiltonianos arista disjuntos implica la de cubrir su simetrizado con $(n - 1)$ circuitos hamiltonianos arco disjuntos.
- 2) Si n es par, $4 \neq n \neq 6$, K_n^s se puede descomponer en $(n - 1)$ circuitos hamiltonianos arco disjuntos. Además, si $n \in \{4, 6\}$, K_n^s admite $(n - 2)$ de tales circuitos. [Till80], [Fle90]-Cap.III.

En cuanto al número de circuitos hamiltonianos en dígrafos adjuntos destaquemos que el mismo puede determinarse a partir de la biyección existente entre los circuitos eulerianos de cada multidigrafo G y los circuitos hamiltonianos de su adjunto (ver Ejer.5-29)), y el "Best Theorem" al cual nos hemos referido en pág. 172.

Las siguientes son tres importantes extensiones del concepto que es motivo de este capítulo.

1))

Los grafos no hamiltonianos de orden n pero tales que todos sus subgrafos inducidos de orden $(n - 1)$ son hamiltonianos se dicen **1-hamiltonianos** (o **hipohamiltonianos**).

Se sabe, ([HerDV67], [HerGR64]) que no hay grafos 1-hamiltonianos de orden $n \leq 9$, ni de orden 11 ó 12, y que el único de orden 10 es el grafo de Petersen.

Otros resultados y referencias pueden verse en [BusS65], [Berm78] y [Tho74a/78a].

2))

La noción de grafo **aleatoriamente hamiltoniano** se introduce en forma similar a la análoga para los eulerianos dada en Cap. 4.

En [CharKr68] y en [Tho74b] se demostró que : Un grafo sin bucles de orden $n \geq 3$ es aleatoriamente hamiltoniano si y sólo si es C_n , ó K_n , ó $K_{p,p}$ con $p = n / 2$, n par.

Lo precedente puede reencontrarse como corolario de la caracterización de los digrafos aleatoriamente hamiltonianos dada en [ChaKL69].

3))

A partir de [Ore63b] un grafo es **completamente hamiltoniano** (o **hamiltonianamente conexo**) si para todo par de vértices existe una cadena hamiltoniana que los tiene por extremos.

Puede constatarse que :

- cada ciclo elemental C_n , $n \geq 4$, es hamiltoniano, pero no completamente hamiltoniano.
- si G es completamente hamiltoniano de orden $n \geq 3$ cada una de sus aristas pertenece a por lo menos un ciclo hamiltoniano.

En consecuencia, tanto los grafos completamente cíclicos, como los completamente hamiltonianos de orden $n \geq 3$ son hamiltonianos.

5.3. ALGUNAS CONFIGURACIONES HAMILTONIANAS

Entre los primeros resultados propios de este capítulo están los dos siguientes, debidos a Rédei [Réd34] y König [Kön36].

Esta temática también fue estudiada en [Cami60/73].

Proposición 5.3.1

- a) Los torneos de orden $n \geq 3$ son hamiltonianos, o débilmente hamiltonianos.
- b) Los completos de orden $n \geq 3$ son hamiltonianos.

Para demostrar a) veamos que cualquier camino elemental C que no incida en todos los vértices de un torneo se puede extender a otro C' , también elemental.

En efecto, dado $C : x_1, x_2, \dots, x_h$ y cualquiera sea $x \notin C$ se tiene :

- si hay arco (x, x_1) se construye $C' = x, x_1, \dots, x_h$;
- caso contrario, de los vértices $x_i \in C$ para los cuales hay arco (x_i, x) sea x_j el de mayor índice. Si $j = h$ puede obtenerse $C' = x_1, x_2, \dots, x_h, x$; si en cambio $1 \leq j < h$ puede construirse el camino $C' = x_1, \dots, x_j, x, x_{j+1}, \dots, x_h$.

En todos los casos, renumerando los vértices puede reiniciarse el proceso hasta obtener un camino elemental cubriente $p \rightarrow q$

Si hay arco (q, p) ó si $p = q$ el torneo es hamiltoniano, caso contrario es débilmente hamiltoniano.

La validez de b) puede obtenerse a partir a), de la relación entre caminos de G y cadenas de su sostén, y del hecho que todo completo es sostén de algún torneo. También podría ser deducida en forma constructiva.

Corolarios :

- 1) Cualquier orientación dada a las aristas del completo K_n , $n > 2$, genera un digrafo que admite al menos un camino hamiltoniano, no siempre cerrado.

Por ejemplo, del completo de vértices a, b, c , pueden obtenerse : el torneo de arcos (a, b) , (b, c) , (c, a) que es hamiltoniano, y el de arcos (a, b) , (b, c) , (a, c) que es débilmente hamiltoniano.

- 2) Los vértices de todo torneo se pueden ordenar linealmente, respetando sus respectivas relaciones de precedencia.

Así, todo torneo es al menos unilateralmente conexo, y en toda competencia sin empates de todos contra todos, los equipos se pueden ordenar de forma que cada uno haya triunfado sobre el siguiente inmediato.

Esto no implica que algún equipo haya triunfado sobre todos los otros, ni que el equipo inicial de dicho ordenamiento pueda ser elegido arbitrariamente.

Por ejemplo, si a triunfó sobre el par b,d \parallel b triunfó sobre el par c,d , y c triunfó sobre ambos a,d , sólo se podrían elegir los ordenamientos lineales cubrientes a,b,c,d \parallel b,c,a,d \parallel c,a,b,d .

3) Los torneos son digrafos transitivos, o bien fuertemente conexos.

Más precisamente :

- los torneos transitivos son u-conexos carentes de circuitos, y su único camino hamiltoniano es abierto.
- los torneos f-conexos son hamiltonianos.

En efecto, por a) los torneos son al menos u-conexos, pero los transitivos carecen de circuitos y por lo tanto, por propiedad ya demostrada, resulta que su camino hamiltoniano es único y abierto.

La validez de la afirmación restante es inmediata.

4) Todo digrafo u-conexo admite un camino, no necesariamente elemental, que pasa por todos sus vértices.

En efecto, supuesto que G es un digrafo u-conexo, sea G' el que resulta de incorporarle, por cada par de vértices no adyacentes, un arco que represente a uno de los caminos que en G llevan de uno de ellos al otro.

En el torneo G' así construido se determina un camino hamiltoniano, y substituyendo cada uno de sus arcos por el camino de G que el arco representa se tiene un camino con las restricciones indicadas.

En consecuencia $\left\{ \begin{array}{l} \text{con el agregado de a lo sumo un arco es posible transformar} \\ \text{en fuertemente conexo a todo unilateralmente conexo.} \end{array} \right.$

Entre las extensiones de lo resultados anteriores podemos citar :

— los torneos transitivos tienen un número impar de caminos hamiltonianos. [Réd34].

— los torneos f-conexos son completamente cíclicos. [HarM66], [Moon66/68]

Del Corolario 2 y puesto que en todo torneo sus vértices de mayor grado positivo son raíces (ver Ejer.2-14)) se infiere la validez del siguiente

Algoritmo para hallar, en torneos, caminos hamiltonianos a_1, a_2, \dots, a_n

- 1) Se elige como a_1 uno de los vértices con mayor grado positivo en G .
- 2) Se elige como a_2 uno de los vértices de mayor grado positivo en G_1
 $G_1 = G - \{a_1\}$.
- 3) Se elige como a_3 uno de los vértices de mayor grado positivo en G_2 .
 $G_2 = G - \{a_1, a_2\}$ y así sucesivamente.

5.4. OTROS RESULTADOS SOBRE HAMILTONIANOS

Algunos otros resultados relativos a la hamiltonicidad, cuya demostración puede reencontrarse en [Ber70] Cap.10, son :

– Las paridades del número de ciclos hamiltonianos en un grafo y en su complementario coinciden

– Cada arista de un grafo cúbico integra un número par, eventualmente nulo, de ciclos hamiltonianos. (Smith, 1946)

De donde : todo grafo cúbico que admite ciclos hamiltonianos, tiene al menos tres de dichos ciclos. [Tut46]

si un grafo admite dos ciclos hamiltonianos arista disjuntos, admite al menos tres de tales ciclos. (Sloane, 1969)

– Todo bipartido 3-regular tiene un número par de ciclos de hamilton. [Kot62].

En [Bos67] se reencuentra el resultado anterior, se caracterizan los cúbicos que admiten un número par de ciclos hamiltonianos, y se extienden resultados

– Todos los autocomplementarios admiten cadenas hamiltonianas. [Cla74]

En un interesante trabajo de recopilación y puesta al día Hobbs [Hob78] observó que uno de los mayores avances en el estudio de las cuestiones hamiltonianas comenzó, cerca de 1960, al relacionarlo con las nociones “grafo adjunto”, “grafo total”, “potencia de grafos”.

En particular, de la relación existente entre los grados positivos (negativos) de los vértices de G con los de su adjunto, puntualizada en pág.53, y puesto que :

i) el digrafo adjunto de un multidigrafo G es hamiltoniano, si y sólo si G es euleriano no trivial. (Ejer.5-29)

cabe inferir la siguiente caracterización intrínseca [Chi75/82]

ii) un digrafo adjunto $G = (V, \Gamma)$ es hamiltoniano si y sólo si es conexo, y para todo $u \in V$, $|\Gamma(u)| = |\Gamma^{-1} \circ \Gamma(u)|$. (idem substituyendo Γ por Γ^{-1} .)

Además, lo visto en Ejerc.4-30) permite inferir

:

iii) Dado un multidigrafo G , su adjunto H es euleriano y hamiltoniano si y sólo si G (idem H) es f -conexo y k -dirregular, $k \geq 1$.

Si bien para el caso no dirigido no cabe una afirmación similar a la precedente *i)* restringiéndose a los grafos conexos sin bucles se tienen :

- si G es grafo no planar, su adjunto es no planar. [Sed64]
- si G es hamiltoniano su adjunto es hamiltoniano. [Sed64]
- el adjunto de un euleriano es euleriano y hamiltoniano.[Char64], [GoomH74].

Por otra parte, la relación algebraica entre "las nociones de adjunción" en los casos dirigido \ \ no dirigido estudiada en [Chi79] permitió dar una caracterización de los multigrafos adjuntos hamiltonianos.

Dicha caracterización se expresa en términos de propiedades de la descomposición en clanes que admiten los adjuntos.(ver [Chi82]-CapVIII).

Otras caracterizaciones de los adjuntos hamiltonianos, pero que atienden explícitamente a propiedades del grafo de partida, fueron dadas en [Char64/65/68] y en [HarNW65]. (ver [CharL79])

Otros resultados válidos para grafos conexos sin bucles y sus adjuntos, son :

- Si G es de orden n y cualquiera sea su arista $[x, y]$ se tiene $gr(x) + gr(y) \geq n$ su adjunto es hamiltoniano. [BruS81]
- Si G es de orden $n \geq 5$ su adjunto, o el adjunto de su complemento, es hamiltoniano. [Neb73a]
- Si G es de orden $n \geq 3$ y no es una cadena elemental, sus adjuntos iterados $A^k(G)$ con $k \geq (n - 3)$ son hamiltonianos. [Char64/65/68]
- Si en cada uno de los vértices de G inciden al menos tres aristas, el adjunto del adjunto de G es hamiltoniano. [CharW73], [CharL79]-Cap.9.

Algunos de los resultados que vinculan a los “grafos potencia”, con los “grafos hamiltonianos” son :

1) Si G es de orden $n > 3$ el adjunto de su cuadrado, y el cuadrado de su adjunto son, ambos, hamiltonianos. [Neb73b]

2) Si G es conexo de orden $n > 2$ para cada par de vértices de G^3 existe una cadena de hamilton que los tiene por extremo (es decir, G^3 es completamente hamiltoniano). [Sek60/63], [Kar68]

En [Berm78] se da de este resultado una demostración de carácter algoritmica, mientras que en [Ber70] se lo obtiene por inducción.

3) Si G es conexo de orden $n > 2$ su cubo es hamiltoniano, pero si $n > 3$ también lo es $G^3 - \{v\}$ cualquiera sea v (o sea, G^3 es 1-hamiltoniano). [CharKa69]

4) Si G es conexo su cubo es completamente ciclico, y por lo tanto hamiltoniano. [Bonl76]

5) Si bien el cubo de todo conexo es completamente hamiltoniano no se puede afirmar lo mismo respecto de sus cuadrados. Más precisamente :

Si T es árbol de orden $n > 2$, T^2 es hamiltoniano si y sólo si T no contiene subdivisiones de $K_{1,3}$ como subgrafo ; o sea, si y sólo si eliminando de T sus vértices pendientes se obtiene una cadena. [HarS71]

6) La conjetura, conocida como “de Plummer y Nash Williams”, según la cual “el cuadrado de todo grafo 2-conexo es hamiltoniano”,([Kro69]) fue resuelta afirmativamente por Fleischner [Fle71b/74a/74b].

En [Die96]-Cap.10 se dió, siguiendo los lineamientos de [Riha91], una detallada deducción de estos resultados.

En [Hob78] se puntualizan detalles de la demostración de Fleischner y se observa que una confirmación parcial de la citada conjetura había sido dada en [Fle71a] y [Walt69] al ver que :

– Todo grafo 2--conexo cúbico tiene cuadrado hamiltoniano.

Luego de los resultados de Fleischner la problemática hamiltoniana en grafos de la forma G^2 fue motivo de trabajos en los que aparecen vinculados los conceptos “completamente ciclico”, “completamente hamiltoniano”, y “completamente conexo”.

En particular, en [Fle76] se mostró que en la clase de los grafos de la forma G^2 las nociones *hamiltoniano* y *completamente cíclico*, así como las nociones *completamente hamiltoniano* y *completamente conexo*, son equivalentes.

Otros trabajos a citar son [CharHJ74] y [FleH75].

Para el caso dirigido no caben afirmaciones similares a todas las anteriores.

En particular, y a diferencia de lo indicado en 2) y 3) a partir de lo cual el cubo de todo grafo conexo es hamiltoniano, en [Fouq78] se demostró que : Para todo par p, q , hay un digrafo G que es " q -conexo" (ver Cap.7) pero tal que G^p es no hamiltoniano.

A partir del citado resultado de Fleischner podría parecer más fácil caracterizar los grafos con cuadrado hamiltoniano, que aquellos que son hamiltonianos. Pero Underground [Und78] señaló que ambas tienen dificultades equivalentes.

Para ello, a partir de un grafo G construye un H tal que G es hamiltoniano si y sólo si lo es H^2 .

El H en cuestión tiene por cada vértice x_i de G , tres vértices u_i, v_i, w_i ; aristas $[v_i, u_i], [v_i, w_i]$ y además $[u_i, u_i]$ si y sólo si x_i y x_j son adyacentes en G .

Entre las clases de grafos estudiadas en relación con la cuestión hamiltoniana merece destacarse la de los *grafos cúbicos*.

Todos ellos son de orden par, pero que no siempre admiten ciclos hamiltonianos. Basta a este último efecto analizar el Grafo de Petersen.

Algunos resultados relativos a éstos fueron citados en pág.197.

Una importante subclase de los grafos cúbicos es la integrada por los "*grafos cúbicos poliedrales*" (o *grafos 3-poliedrales*).

Ejemplos de ellos son los constituidos por los vértices y las aristas del cubo, o del tetraedro, o del dodecaedro.

Diremos, de manera informal, que es la subclase de aquellos que se corresponden con los "esqueletos" de los poliedros convexos en cada uno de cuyos vértices inciden tres aristas.

Son representables limpiamente sobre una esfera y por ende son planares.

Con referencia a ellos cabe el siguiente resultado de Steinitz [Stez22].

Un grafo sin bucles es 3-poliedral si y sólo si es planar y 3-conexo.

La demostración del mismo es engorrosa y escapa a nuestro objetivo.

Para más información consultar [BarnG69], [Grü67/70/75], [Malk88].



De acuerdo con lo indicado en [Tor76], en el Cap.17 de [Grü67], escrito por Klee, se hace una descripción detallada de la problemática hamiltoniana en relación con los 3-poliedrales, y se observa que ésta es de interés frente a ciertos problemas de programación lineal. Se indica además que Lederber [Led65] estudió una interesante aplicación de los ciclos hamiltonianos en los 3-poliedrales a la química orgánica, y dió una representación numérica de ellos.

En [Tait80/84] se conjeturó que todo cúbico 3-poliedral admite ciclos hamiltonianos.

Dicha conjetura, cuya validez hubiera permitido demostrar la de los cuatro colores, fue refutada por Tutte [Tut46] al dar un grafo débilmente hamiltoniano de orden 46 que la invalida.

Luego fueron dados otros grafos que también la invalidan. Uno de ellos, hallado independientemente por Barnette, Bosak, y Lederber consta de 38 vértices.

Notemos al respecto que en [Led67] se demostró que todos los grafos cúbicos planares 3-conexos de orden $n \leq 18$ son hamiltonianos, y que en [HolMc88] la misma afirmación se extendió a los de orden $n \leq 36$ (ver también [Gooe72])

En [Bos67], [CapM78], [CharL79], [Grü67/70] y [Mars71] se representan los grafos de referencia y otros vinculados a la cuestión.

El interés en los planares hamiltonianos se remonta al trabajo de Whitney [Whit31] en donde se demostró :

- que para comprobar la conjetura de los cuatro colores basta limitarse a considerar planares hamiltonianos.
- que todo grafo plano con "caras" triangulares y sin ciclos de longitud tres distintos de los que limitan sus caras, es hamiltoniano.

Destaquemos además el siguiente resultado, dado en [Tut56].

Todo grafo planar 4-conexo es hamiltoniano

Para su demostración, que es complicada, pueden consultarse [Fle90], [Ore67], [Tut77]. Para otras referencias ver [Berm78].

Por otro lado, Grinberg [Grin68] enunció una elegante condición necesaria para que un grafo planar sea hamiltoniano, y describió un método para generar los poliedrales que no lo son.

En [Berm78], [CharL79] y [NashW75] se dan demostraciones de ella, y más información sobre planares hamiltonianos.

5.5. CONDICIONES PARA LA HAMILTONICIDAD

El problema de dar “caracterizaciones manejables” de las configuraciones hamiltonianas sólo fue resuelto satisfactoriamente para algunas pocas clases. Se han dado en cambio numerosas condiciones suficientes (necesarias). En lo que sigue citaremos algunas.

Observemos previamente que muchas de las condiciones suficientes para la existencia de ciclos hamiltonianos en G admiten modificaciones que llevan a condiciones suficientes para que G sea completamente hamiltoniano.

Antes de enunciar algunas condiciones suficientes (necesarias) para la existencia de recorridos hamiltonianos notemos que :

- si bien las siguientes Prop.5.5.3 // 5.5.4 dan, para el caso no dirigido, condiciones necesarias y suficientes, ellas no son intrínsecas.
- según referencias, y con el fin de estudiar el “problema del viajante de comercio”, en [Pollt74] se dió una caracterización de los digrafos hamiltonianos en términos de una matriz de incidencia doblemente estocástica.
- en [HoeV78] se demostró :
Un grafo 2-conexo es hamiltoniano si y sólo si para todo par de ciclos C_1, C_2 , y de vértices P_1, P_2 , tales que $P_1 \in C_1 - C_2$; $P_2 \in C_2 - C_1$ existe al menos un ciclo que contiene a los vértices P_1, P_2 , y a los comunes de C_1 y C_2 .
- en [HoeS90] se dedujo una afirmación similar para el caso dirigido.

A) CASO NO DIRIGIDO

Una simple condición necesaria es la siguiente.

| Si $G = (V, U)$ admite ciclo hamiltoniano, el número de componentes conexas de $G - A$ es menor o igual que $|A|$, cualquiera sea $\emptyset \subset A \subset V$.

En efecto, si H es un ciclo hamiltoniano de G , y $\emptyset \subset A \subset V$ el número de componentes del grafo $H - A$ es menor o igual que $|A|$. Además, $H - A$ es subgrafo cubriente de $G - A$, y por lo tanto el número de componentes conexas de este último no supera $|A|$

El siguiente resultado, que es trivial y puede pensarse como Corolario de la proposición anterior muestra que ella no puede ser extendida a los débilmente hamiltonianos.

Si G contiene ciclos hamiltonianos, $G - \{v\}$ es conexo, cualquiera sea su vértice v .

Respecto de condiciones suficientes dadas en términos del número de aristas se mostró que :

Todo grafo sin bucles de orden $n \geq 3$ con al menos $2 + \binom{n-1}{2}$ aristas es hamiltoniano [Ore61] y con al menos $3 + \binom{n-1}{2}$ lo es completamente [Ore63b].

De los grafos C_n , $n \geq 4$, resulta que la recíproca del resultado dado en [Ore61] es falsa, y de los K_{n-1} incrementados con una arista pendiente que la cota en cuestión no es mejorable

En [Pósa76] se demuestra que si c es suficientemente grande, "casi todos" los grafos de orden n con al menos $c \cdot n \cdot \log(n)$ aristas, son hamiltonianos.

La idea intuitiva "si G tiene muchas aristas es probable que sea hamiltoniano" llevó a formular numerosas condiciones de suficiencia en términos de los grados de sus vértices.

Entre ellas las de Dirac, Ore, Pósa, y Bondy, que citaremos a continuación.

Cada una de ellas implica a la anterior, y todas se reencuentran como corolario del siguiente Teorema de Chvátal [Chv72].

Proposición 5.5.1

Sea G un grafo sin bucles, de orden $n \geq 3$, con sucesión de grados $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$.

Si no hay valores k , $k < n/2$, tales que $d_k \leq k$; $d_{n-k} < n - k$ o equivalentemente,

Si cualquiera sea k , $d_k \leq k < n/2$ implica $d_{n-k} \geq n - k$ ##
entonces, G admite ciclo hamiltoniano.

Una demostración de esta proposición, como así también de que cada una de las diferentes restricciones incluidas en el siguiente Corolario implican ##, y que por lo tanto son aptas como criterios de suficiencia para la existencia de ciclos hamiltonianos, puede verse en [SwaT81].

También se la demuestra en [BonM76], [Buch90], [Die96], [Luc79] y [NasW75].

Corolarios :

Un grafo sin bucles de orden $n \geq 3$ es hamiltoniano si se satisface :

– para todo vértice v , $gr(v) \geq n/2$. [Dir52]

ó

– para todo par p, q , de vértices no adyacentes, $gr(p) + gr(q) \geq n$. [Ore60/61]

ó

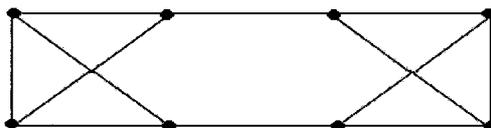
– si para todo entero k , $1 \leq k < n/2$, $d_k > k$ (o sea, si hay a lo sumo $(k-1)$ vértices de grado a lo sumo k) [Pósa62]

ó

– si supuestos $j \neq k$, $d_j \leq j$, $d_k \leq k$, $d_j + d_k \geq n$. [Bon69]

El ciclo C_6 permite ver que las recíprocas de estos corolarios son falsas, y en [CapM78] se ejemplifica que cada uno de ellos incluye propiamente al anterior.

El siguiente grafo cúbico es hamiltoniano, pero su sucesión de grados no satisface **##**. Por lo tanto las antedichas condiciones suficientes no son necesarias.



En consonancia con lo observado en pág.202 notemos que substituyendo n por $n+1$, tanto en la condición de suficiencia de Dirac como en la de Ore del Corolario anterior, podrá afirmarse que G es completamente hamiltoniano. [CapM78]

A igual conclusión permiten llegar substituciones similares en la condición de Bondy. [Lick70]

Si $n = 2.p+1$ el grafo constituido por dos copias de K_{p+1} con un único vértice común muestra que en la condición de Dirac no es factible substituir n por $(n-1)$. Lo mismo permite respecto de la condición de Ore el grafo dado en Ejer.5-23).

Deducciones directas del resultado de Dirac pueden verse en [AlbH88], [BonM76], [Die96], o [NashW75]; del de Ore en [CharL79] o [Grim85]; y del de Pósa en [Buch90], [CharL79], [Har69b] o [Mars71].

En [Ber70] Cap10–4 se da una leve generalización de la Prop.5.5.1; y se puntualiza, al igual que en [Har69b] y [SwaT81], que ella es inmejorable en el siguiente sentido :

Si una sucesión de grados no satisface **##** es mayorada por otra, que es la sucesión de grados de un grafo no hamiltoniano.

De la Prop.5.5.1 caben la extensión dada en [BonCh76], que reproducimos en Prop.5.5.4, y la siguiente, debida a [LasV70/72] (ver [Berm78], [Les77])

Proposición 5.5.2

Si $G = (V, U)$ es un grafo cuyos vértices pueden etiquetarse v_1, \dots, v_n de forma tal que si $j < k$; $k + j \geq n$; $[v_j, v_k] \notin U$; $gr(v_j) \leq j$; $gr(v_k) \leq k - 1$ entonces $gr(v_j) + gr(v_k) \geq n$, resulta que G es hamiltoniano

A partir del conocido resultado de Dirac, en [BonCh76] se dedujo la

Proposición 5.5.3

Sea $G = (V, U)$ un grafo de orden n sin bucles, y a, b , un par de vértices no adyacentes tales que $gr_G(a) + gr_G(b) \geq n$.

Si H se obtiene agregando a G la arista $[a, b]$ entonces G es hamiltoniano si y sólo si H es hamiltoniano.

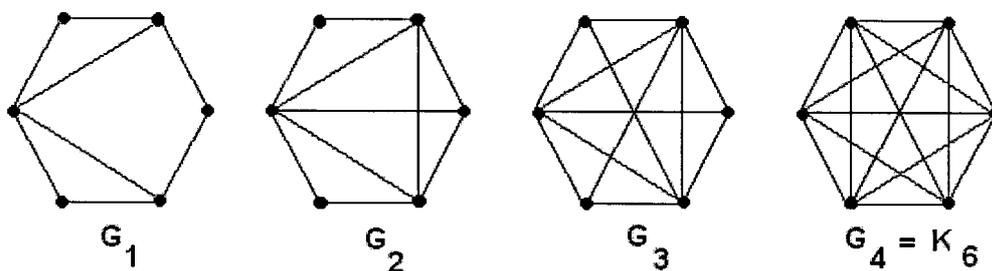
Demostración de ella también se dan en [BonM76], [GonM79] y [Luc79].

En [BonCh76] se indica que el resultado anterior y la conocida condición de suficiencia para la existencia de ciclos hamiltonianos dada por Ore llevaron a introducir la siguiente noción.

Se dice **k -clausura de G** al grafo G_k obtenido a partir de $G = G_1$ aplicando en los sucesivos G_i , $1 \leq i \leq k - 1$, y tanto como sea posible la siguiente operación.

- | Si en G_i los vértices p, q , son no adyacentes, y $gr_{G_i}(p) + gr_{G_i}(q) \geq k$ agregar la arista $[p, q]$.

Los esquemas que siguen ilustran este proceso, para $k = 5$, a partir de G_1



Razonando por el absurdo, o por inducción, puede verse que G_k está bien definido; es decir, que no depende del orden elegido al agregar aristas.

Esta operación permite unificar el estudio de diversos problemas, y se muestra muy útil. Para varias propiedades P se encontraron valores k tales que si G_k tiene la propiedad P , también la tiene G .

Esto se da, en particular, para el caso en que P es la propiedad "ser hamiltoniano". En efecto, de la Prop. 5.5.3 resulta la :

Proposición 5.5.4

Un grafo de orden n es hamiltoniano si y sólo si lo es su n -clausura.

Corolarios

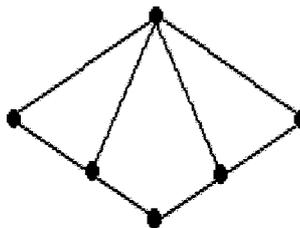
Supuesto que G es grafo sin bucles de orden $n \geq 3$

- 1) si su n -clausura es K_n , G es hamiltoniano.
- 2) si en cada vértice inciden al menos $n/2$ aristas, G es hamiltoniano (se reencuentra así la condición de suficiencia dada por Dirac).

En [GonM79] se observa que la mayoría de las condiciones suficientes para la hamiltonicidad que toman en cuenta los grados de los vértices, implican que la n -clausura es K_n y aparecen así como consecuencias del precedente Corolario 1).

Según se destaca en [Les77] y [CapM78] la Prop.5.5.4 extiende, efectivamente, a las Prop.5.5.1 y 5.5.2, pues de las restricciones sobre los grados de G incluidas en las hipótesis de éstas puede inferirse que las correspondientes n -clausuras son K_n .

Pero para el siguiente grafo cuya 6-clausura es K_6 no es factible etiquetar sus vértices de forma que se satisfagan las hipótesis de 5.5.2.



Nótese que substituir k por $(k+1)$ al definir la precedente operación de clausura permite deducir :

Si G es conexo sin bucles de orden n , y su $(n+1)$ -clausura es K_n , entonces G es completamente hamiltoniano. (ver [BonCh76], [CharL79])

Esto nos retrotrae a lo observado en pág. 202.

En [Fan84] se da la siguiente condición de suficiencia que si bien generaliza la de Ore no implica que la correspondiente n -clausura sea un completo.

Si G es 2-conexo y para todo par de vértices x, y , distantes dos unidades se satisface $\max (gr(x), gr(y)) \geq n/2$ entonces G es hamiltoniano.

B) CASO DIRIGIDO

Recordando lo dicho en 2.1.7 respecto del teorema de König-Hall, visto que todo circuito hamiltoniano es un 1-difactor, y que su recíproca es falsa se tiene la siguiente condición necesaria :

El digrafo conexo (V, Γ) es hamiltoniano sólo si cualquiera sea $A \subset V$,
 $|A| \leq |\Gamma(A)|$.

La noción **deficiencia de G** ($\delta_0(G)$), introducida en pág 36, permite reformular el resultado anterior y obtener otros ligados a él.

Más precisamente, en [Ber58/70], y a partir de ciertos resultados sobre cubrimientos de grafos se deducen :

- Si G es hamiltoniano $\delta_0(G) = 0$ y si es débilmente hamiltoniano $\delta_0(G) \leq 1$
- Un grafo sin circuitos admite camino hamiltoniano si y sólo si $\delta_0(G) = 1$.

Por otro lado, la caracterización de los digrafos adjuntos hamiltonianos, (ver pág.198), y la posibilidad de hallar para todo digrafo (V, Γ_1) su capsula adjunta (V, Γ_h) (ver pág.53) permitió enunciar, en [Chi82]-Cap.VII, la siguiente condición necesaria.

Un digrafo conexo (V, Γ_1) es hamiltoniano sólo si definiendo $\Gamma_{j+1} = \Gamma_j \circ \Gamma_j^{-1} \circ \Gamma_j$ para los $j \geq 1$, y supuesto que para h se tiene $\Gamma_{h+1} = \Gamma_h$ – un tal h existe – se tiene $|\Gamma_h(x)| = |\Gamma_h^{-1} \circ \Gamma_h(x)| \neq \emptyset$, cualquiera sea $x \in V$.

De la definición precedente resulta, por recurrencia, que $\Gamma_j = \Gamma_1 \circ (\Gamma_1^{-1} \circ \Gamma_1)^{\alpha_j}$ con $\alpha_2 = 1$; $\alpha_j = 1 + 3 \cdot \alpha_{j-1}$. En consecuencia $\alpha_j = (3^{j-1} - 1) / 2$ y $\Gamma_h = \Gamma_1 \circ (\Gamma_1^{-1} \circ \Gamma_1)^{\alpha_h}$

Como $\Gamma_{h+1} = \Gamma_h$ equivale a $(\Gamma_1^{-1} \circ \Gamma_1)^{\alpha_k} = (\Gamma_1^{-1} \circ \Gamma_1)^{1+\alpha_k}$ para todo $k \geq h$, y quizás para menores, podemos mejorar el resultado anterior poniendo :

Un digrafo conexo (V, Γ_1) es hamiltoniano sólo si, supuesto
 $A = ((\Gamma_1^{-1} \circ \Gamma_1)^{\alpha_k})(x) = ((\Gamma_1^{-1} \circ \Gamma_1)^{1+\alpha_k})(x)$ (un tal α_k existe)
se tiene que $|\Gamma_1(A)| = |A|$.

La siguiente es una interesante condición de *suficiencia* para la existencia de caminos de hamilton debida a Meyniel [Mey73]. Su demostración fue simplificada en [OveL76] y en [BonTh77]. (ver [Berm78] y [GonM79].)

Proposición 5.5.5.

Sea G un digrafo sin bucles, fuertemente conexo, de orden $n > 2$. Se muestra que G es hamiltoniano, si para cada par x, y , de vértices no adyacentes se satisface $gr^+(x) + gr^+(y) + gr^-(x) + gr^-(y) \geq 2n - 1$ @

Corolarios

- a) Todo torneo f-conexo es hamiltoniano (pues @ se cumple vacuamente)
- b) [GhoH60] Si G es digrafo de orden n , f-conexo sin bucles. y para cada x se tiene $gr^+(x) + gr^-(x) \geq n$, G es hamiltoniano (pues para todo par de vértices, sean adyacentes, o no adyacentes, se cumple @)
- c) [Woo72] Si G es digrafo de orden n sin bucles, y para todo par de vértices x, y , tales que no hay arco (x, y) se tiene $gr^+(x) + gr^-(y) \geq n$, entonces G es hamiltoniano.(pues las hipótesis implican, que G es fuertemente conexo, y que se satisface @)

Como consecuencia inmediata del Corolario b) resulta que :

| Si G es un digrafo sin bucles de orden n , tal que cualquiera sea su vértice x se tiene $gr^+(x) + gr^-(x) \geq (n - 1)$ entonces G es débilmente hamiltoniano.

En efecto, basta aplicar el corolario b) al digrafo G^* , f-conexo de orden $(n + 1)$ que se obtiene incrementando G con un vértice x_0 , y arcos (x, x_0) , (x_0, x) , cualquiera sea el vértice x de G .

Por otro lado, visto que cualquiera sea el grafo sin bucles G , supuesto $H = G^s$ se cumplen $gr_G(x) = gr_H^+(x) = gr_H^-(x)$ a partir del Corolario b) se reencuentra la conocida condición de suficiencia Dirac para el caso no dirigido.

Análogamente, a partir de @ puede reencontrarse la de Ore.

Por otra parte, así como del resultado de Erdős–Gallai citado en pág.108, se deduce que Todo grafo de orden n con más de $(n-1)^2/2$ aristas distintas de bucles es hamiltoniano

del resultado similar para el caso dirigido demostrado en [Lew75] se deducen :

- a) Todo digrafo sin bucles de orden $n > 2$ con más de $(n-1)^2$ arcos, es hamiltoniano.
- b) Todo f-conexo sin bucles con al menos $(n-1).(n-2) + 3$ arcos, es hamiltoniano.

El simetrizado de K_{n-1} , $n \geq 3$ incrementado con un vértice entrada (o salida) conectado a todos sus vértices demuestra que la cota a) no es mejorable. A su vez, el digrafo de arcos (a, b) , (b, c) , (c, b) , (b, a) muestra que tampoco es mejorable la cota b).

Otras condiciones de suficiencia para la hamiltonicidad se pueden consultar en [Ber70], [Berm78], [BermTh81].

Finalizaremos esta sección refiriéndonos a la *Conjetura de Bondy*, mencionada en 3.5.

Ella, que podría verse como "casi recíproca" de la afirmación: "todo grafo completamente ciclico es hamiltoniano", suele enunciarse diciendo :

 "Casi toda" condición que asegura la hamiltonicidad de G , implica que G es completamente ciclico, o que pertenece a una cierta clase particular.

La conjetura en cuestión, así como su similar para el caso dirigido, fueron motivo de numerosos trabajos y tuvieron varias confirmaciones parciales.

En particular, en [Bon71a/71b] (ver CharL79) se muestra que :

 Si G es grafo hamiltoniano de orden n con al menos $\lfloor n^2 / 4 \rfloor$ aristas distintas de bucles, entonces G es completamente ciclico, o bien n es par y G es el bipartido completo $K_{p,p}$, $p = n/2$.

De ello, y visto que la condición de suficiencia de Ore implica la existencia de al menos $\lfloor n^2 / 4 \rfloor$ aristas cabe la siguiente confirmación parcial de la citada conjetura.

 Si el grafo G , es de orden n , $n \geq 3$, carece de bucles, y para cada par p, q , de vértices no adyacentes $gr(p) + gr(q) \geq n$, entonces G es completamente ciclico, o es el bipartido completo $K_{p,p}$ con $p = n/2$.

Por otra parte, en [ScheH74] se mostró que las hipótesis de la Prop. 5.5.1 permiten deducir, no sólo que G es hamiltoniano, sino que G es completamente ciclico, o bipartido. Un esbozo de la demostración puede verse en [Berm78].

Otras confirmaciones parciales de la conjetura que nos ocupa fueron dadas en [BauS88/90], [Ben86], [BenW87], [Bon75], [OveL77], [ScheH88] y [Tho77].

5.6. PROBLEMA DEL VIAJANTE DE COMERCIO

Numerosos problemas que suelen presentarse en configuraciones valuadas pueden reducirse al de "hallar recorridos hamiltonianos óptimos".

Un ejemplo de ellos es el siguiente, conocido como "Problema del Viajante de Comercio":

Dado un conjunto de ciudades, conocidas sus interconexiones y los “valores” que les están asociados (costo, tiempo, distancia, etc.) programar un recorrido que permita acceder a todas y volver a la inicial, de forma que el “valor” insumido en el recorrido sea mínimo.

El problema planteado admite la siguiente formalización :

Dado un digrafo sin bucles a cada uno de cuyos arcos $u_{i,j} = (x_i, x_j)$ se asignó un valor $c_{i,j} = w(x_i, x_j) \geq 0$ hallar de entre todos sus circuitos hamiltonianos H_s un \underline{H} tal que $w(\underline{H})$ sea mínimo entre todos los valores $w(H_s) = \sum_{u_{i,j} \in H_s} c_{i,j}$.

Si tales recorridos existen, el valor buscado estará acotado inferiormente por $\sum_i \min c_{i,j}$, y superiormente por $\sum_i \max c_{i,j}$.

En otras motivaciones podrá ser de interés la búsqueda de caminos hamiltonianos que maximicen el valor en cuestión.

Si para todo par de vértices $c_{i,j} = c_{j,i}$ el problema se dice *simétrico* y puede estudiarse en un grafo arista valuado.

Visto que la eliminación de una arista en cualquier ciclo hamiltoniano H da lugar a una cadena hamiltoniana abierta P , y puesto que ésta es árbol cubriente, la noción “árbol mínimo” (ver Cap.9) permite, en el caso simétrico y para valuaciones no negativas, acotar inferiormente los costos de los ciclos buscados.

Más precisamente, en tal caso caben la siguientes cotas :

Si T es árbol de valor mínimo, H un ciclo hamiltoniano cualquiera, y $P = H - \{u\}$, entonces $w(T) \leq w(P) \leq w(H)$. #

Las dificultades en resolver el problema hamiltoniano permiten inferir las inherentes al del recién planteado.

Recordando lo observado en el Prólogo está claro que una determinación exhaustiva de todos los recorridos factibles y la posterior elección de aquellos que son óptimos, sólo sería admisible en casos muy particulares.

Por ello, y por la carencia de algoritmos adecuados, es habitual recurrir a métodos heurísticos. Posteriores ajustes permitirían mejorar las soluciones halladas.

Destaquemos que, por otro lado, la cuestión planteada puede resolverse como problema de Programación Lineal Entera, y que un esbozo de esta metodología puede verse en [Mars71].

Las primeras aproximaciones en este sentido parecen ser las dadas en [DantFJ54/59].

Además, según referencias, en [Pollt74] se lo enfoca como el de minimizar una función no lineal sujeta a restricciones lineales.

También puede ser encarado a través de la Programación Dinámica [Bell61].

Para más información sobre la historia de este problema, o algunos de los métodos propuestos al efecto : [BellCL70], [BellN68], [Bert65/66], [ChaGM79], [Flo56], [Gup68], [Lam60], [LawLR87], [Pie75], [Walt84].

Respecto de métodos heurísticos para resolverlo notemos que lo siguiente da lugar a uno aplicable en el caso simétrico.

Si $v_1, v_2, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n, (v_1)$ es un ciclo hamiltoniano H y existen aristas $[v_i, v_j], [v_{i+1}, v_{j+1}]$ tales que $w(v_i, v_j) + w(v_{i+1}, v_{j+1}) < w(v_i, v_{i+1}) + w(v_j, v_{j+1})$ el ciclo $H' = v_1, v_2, \dots, v_i, v_j, v_{j-1}, v_{j-2}, \dots, v_{i+1}, v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_n, (v_1)$ satisface $w(H') < w(H)$.

La idea del proceso anterior fue aplicada en [Lin 65] y [LinK73] dando un método que permite buenas aproximaciones en tiempos razonables.

El mismo consiste, en esencia, en elegir un ciclo hamiltoniano H , eliminar dos de sus aristas, conectar las cadenas restantes de forma que se construya otro ciclo hamiltoniano H' , y en comparar los valores correspondiente al ciclo de partida y al así obtenido.

Si el valor fue mejorado se reinicia el proceso a partir de H' , caso contrario se elige en H otro par y se recomienza, si cabe.

En [BonM76] se señala que Lint observó que el proceso es más eficiente si en lugar de dos aristas, se eligen tres.

Otros dos métodos heurísticos son propuestos en [Tuc80]-Cap.9.

Uno de ellos, dado también en [CharL79], es aplicable sólo en el caso simétrico si los valores de las aristas respetan la propiedad triangular $w_{i,j} \leq w_{i,k} + w_{k,j}$.

Se basa en reiteradas extensiones de ciclos, mediante la incorporación de vértices "más próximos" a los que integran el ciclo a extender, y se demuestra que *el valor del circuito final así construido está acotado superiormente por el doble del valor de las soluciones óptimas buscadas.*

Otro procedimiento, apto para el caso de grafos completos con aristas cuyos valores respetan la precedente propiedad triangular, y que lleva a soluciones que respetan la cota recién indicada, será ejemplificado a continuación aplicándolo al completo de vértices a, b, c, d .

Sea T de aristas $[a, b]$, $[b, c]$, $[b, d]$ un “árbol mínimo” (Cap.9) del K_4 dado, y T^s su simetrizado, que puede identificarse con el euleriano $E = a, b, c, b, d, b, (a)$.

A partir de E , evitando “segundas incidencias” y agregando si es necesario arcos del complemento de T^s , se construye el circuito $C = a, b, c, d, (a)$.

La citada propiedad triangular permite afirmar $w(C) \leq w(E) = 2.w(T)$ y la desigualdad # de pág.210 permiten afirmar que $w(C) \leq 2.w(T) \leq 2.w(H)$.

Por otro lado, y siempre con referencia a métodos de resolución del problema que nos ocupa, digamos que en [BusS65]-págs.49/52 se presenta un procedimiento ideado por Ryan para el caso no dirigido ; que en [Lam60] se ejemplifica el uso de un método propuesto en [FordF57], y que tanto en [FauRT76], como en [AckS68] y [Kau68b] se estudia otro, de Little y colaboradores ([LitMS63]) basado en procesos de separación y evaluación progresiva.

Citémos también el método dado en [HelK70/71] que fue mejorado en [Hank74]. Este último, así como el de [LitMS63] son tratados en [Walt84]-Cap.6. Breves referencias a sus respectivas performances pueden verse en [GonM79]-pág 310.

Veamos finalmente como se podría encarar la resolución del siguiente problema

Se deben fabricar n productos, y para ello se dispone de una instalación que luego de completar la fabricación de cada producto p_i y antes de abordar la del p_j exige modificaciones, y que estas implican un “costo de adaptación” $c_{ij} \geq 0$.

Se quiere determinar un orden de fabricación de los n productos tal que haga mínimo el costo debido al total de las modificaciones involucradas, incluyendo una que “nos devuelva al estado inicial”, para poder así reiterar el proceso.

Si convenimos en poner, $c_{ij} = \infty$ y también $c_{ij} = \infty$ cuando no es posible adaptar la instalación para fabricar p_j inmediatamente después de p_i , el problema puede verse como el de hallar un circuito hamiltoniano de costo mínimo en el simetrizado del completo K_n , con arcos (i, j) valuados c_{ij} .

Supuesto que hay soluciones finitas una manera de hallarlas es la que sigue :

- 1) Elegir en cada estrella positiva del simetrizado de K_n uno cualesquiera de los arcos de menor valor.
- 2) Si el 1-difactor así construido no es hamiltoniano, modificar la elección de algunos arcos con vistas a reducir el número de sus circuitos, y reiterar esto tanto como sea necesario.

Otra forma de abordar el problema sería razonar sobre el digrafo que resulta de eliminar en K_n^s los arcos (i, j) tales que $c_{i,j} > c_{j,i}$.
 Con tal simplificación el digrafo resultante contendría un torneo y por lo tanto sería, al menos, débilmente hamiltoniano.

Para simplificar el análisis también podríamos reemplazar cada par de valores $c_{i,j}$, $c_{j,i}$ por un único costo de transición $\underline{c}_{i,j} = \underline{c}_{j,i}$.
 Ahora, el problema se estudiaría en un grafo completo, que sabemos admite recorridos hamiltonianos.

La elección $\underline{c}_{i,j} = \min.\{c_{i,j}, c_{j,i}\}$ llevaría a soluciones “optimistas”, mientras que con $\underline{c}_{i,j} = \max.\{c_{i,j}, c_{j,i}\}$ se obtendrían soluciones “pesimistas”.

Estas simplificaciones reducirían el número de recorridos a comparar, pero no asegurarían que la solución a obtener sea óptima.
 Posteriores ajustes podrían mejorarla.

Para la ejemplificación que nos ocupa supongamos $n = 5$, y la matriz “costo por adaptaciones”

$$C = \begin{vmatrix} \infty & 2 & \infty & \infty & 3 \\ 4 & \infty & 7 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & \infty & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & \infty & 4 \\ 5 & 3 & 3 & 7 & \infty \end{vmatrix}$$

En nuestro caso, si conservamos de cada par de arcos opuestos sólo el de menor valor tendremos que razonar sobre el torneo fuertemente conexo con matriz de precedencia

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Sus circuitos hamiltonianos son : $1,2,4,5,3,(1) \parallel 1,2,5,3,4,(1) \parallel 1,5,3,2,4,(1)$ y sus respectivos costos $16 \parallel 13 \parallel 14$.

El de valor 13 sólo incluye arcos de menor valor en cada una de las estrellas positivas, y esto permite, casualmente, afirmar que se tiene así una solución óptima del problema inicial.

Habitualmente, decidir sobre la optimalidad de una cierta solución exige un análisis más complicado.

Si en el ejemplo dado aplicamos el método Lin a partir del ciclo $1,2,3,4,5,(1)$ que es de valor 22, eliminando sus aristas $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(5,1)$ y recomponiendo los caminos resultantes puede obtenerse el circuito $1,2,4,5,3,(1)$, de costo 16.

Eliminado en éste los arcos $(2, 4)$, $(4, 5)$, $(3, 1)$ y previa recomposición se reencontra el circuito óptimo $1,2,5,3,4,(1)$.

Para ejemplificar el uso del método dado en [CharL79] Cap.6 y en [Tuc80] consideremos la matriz simétrica que resulta de substituir en la C del ejercicio anterior cada valor c_{ij} por $\min. \{ c_{ij}, c_{ji} \}$.

Esto nos llevaría a considerar la matriz :

$$C' = \begin{vmatrix} \infty & 2 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & \infty & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & \infty & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & \infty & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & \infty \end{vmatrix}$$

Elegido como "ciclo inicial" el $1,2,(1)$, de los vértices restantes el "más próximo" al conjunto $\{1,2\}$ es el 4. Agregándolo se obtiene el ciclo $1,2,4,(1)$, de valor 6.

Ahora, el "más próximo al conjunto $\{1,2,4\}$ " es el vértice 5, y agregándolo se determina el ciclo $1,5,2,4,(1)$.

Este se extiende, finalmente, al $1,5,3,2,4,(1)$, de valor 14.

EJERCICIOS

5-1)

Vea si los cinco poliedros platónicos (tetraedro, exaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro) son hamiltonianos.

5-2)

Constata que el Grafo de Petersen (pág.48) no es hamiltoniano, pero si débilmente hamiltoniano y 1-hamiltoniano.

5-3)

Demuestre que :

- ningún grafo acíclico con vértices de grado mayor que dos admite cadenas hamiltonianas.
- ningún bipartido de orden impar es hamiltoniano
- no todo bipartido de orden par es hamiltoniano.
- el bipartido completo $K_{p,q}$ es hamiltoniano si y sólo si $p = q \geq 2$; y débilmente hamiltoniano si y sólo si $p = q = 1$, o bien $p = q + 1$.
- un multigrafo G admite un ciclo cubriente que es, simultáneamente, euleriano y hamiltoniano, si y sólo si G es un ciclo elemental.

5-4)

Muestre que :

- si G contiene algún subgrafo cubriente que es hamiltoniano, también lo es G .
 - todo grafo hamiltoniano carece de aristas puente.
- ¿ Que puede decir de la validez de las afirmaciones que resultan de substituir en las anteriores "hamiltoniano" por "euleriano" ?

5-5)

Vea que si G no es un grafo completo es posible orientar sus aristas de forma tal que el digrafo obtenido no admita caminos hamiltonianos.

¿ Que puede afirmar si G es un grafo completo ?

5-6)

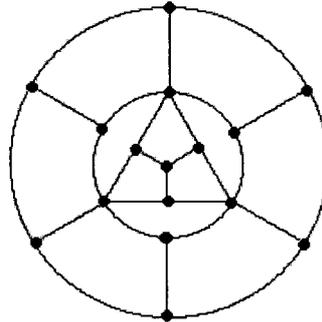
Vea que las propiedades "ser euleriano" y "ser hamiltoniano" son independientes. Para ello represente grafos (dígrafos) que sean, respectivamente, euleriano y hamiltoniano \\ euleriano pero no hamiltoniano \\ hamiltoniano pero no euleriano \\ conexo, no euleriano y no hamiltoniano.

5-7)

Verifique que el número de recorridos del “caballo de ajedrez” (no necesariamente cerrados) está acotado superiormente por $\binom{168}{63}$.

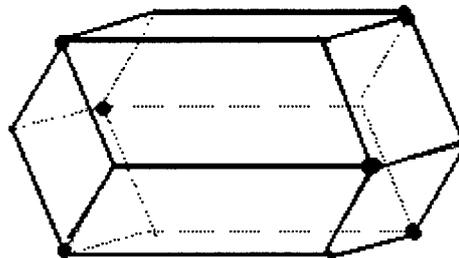
5-8)

Aplique el método indicado en pág.190 para mostrar que el siguiente grafo no es hamiltoniano.



5-9)

Vea que tampoco contiene recorridos hamiltonianos el dodecaedro rómbico.



5-10)

¿ Podría, con la metodología aplicada en los ejercicios anteriores reencontrar la respuesta que mereció el Ejer.3-4) ?

5-11)

Constata :

a) que el K_n de vértices $1, 2, 3, \dots, n$, ($n \geq 3$) contiene $(n-1)!$ cadenas hamiltonianas abiertas de vértice inicial j , cualquiera sea $1 \leq j \leq n$, y que cada una de ellas se puede extender a una cadena hamiltoniana cerrada (en j)

b) que por lo tanto, y tomando en cuenta el sentido de recorrido, en K_n hay $n!$ cadenas hamiltonianas cerradas.

c) que distinguiendo entre opuestas, las cerradas de $K_{p,p}$, $p > 1$, son $p!.p!$

5-12)

Demuestre que identificando ciclos opuestos :

- K_n ($n \geq 3$) admite $(n-1)!/2$ subgrafos que son ciclos hamiltonianos, y que cada arista de K_n integra $(n-2)!$ de ellos.
- $K_{p,p}$ contiene $p!(p-1)!/2$ subgrafos ciclo hamiltonianos.

5-13)

Vea que los Corolarios 1 y 2 de pág.192 admiten la siguiente reformulación.

Los $(n-1)!/2$ subgrafos ciclo hamiltonianos de K_n pueden agruparse :

si n es impar en $(n-2)!$, y si n es par en $(n-1).(n-3)!$ conjuntos; cada uno de los cuales tiene $[(n-1)/2]$ ciclos arista disjuntos entre sí.

5-14)

Represente topológicamente los seis subgrafos ciclo hamiltonianos de $K_{3,3}$, así como los doce de K_4 y los de K_5 agrupándolos en conjuntos de ciclos sin aristas comunes

5-15)

a) Halle una descomposición de K_7 en ciclos hamiltonianos y a partir de ella un conjunto maximal de ciclos hamiltonianos arista disjuntos dos a dos en K_8 .

b) Constate que K_8 puede expresarse como unión de tres ciclos hamiltonianos y un 1-factor.

5-16)

Vea que todo grafo cúbico que además es hamiltoniano contiene tres 1-factores (acoplamientos completos) sin aristas comunes entre ellos.

5-17)

Vea que si n es impar, y en K_n se eliminan a lo sumo $(n-3)/3$ aristas, se obtiene un grafo hamiltoniano, pero que la recíproca es falsa.

5-18)

Constate la equivalencia entre el par de condiciones suficientes para la existencia de ciclos de hamilton incluidas en la Prop. 5.51.

5-19)

Vea que si la sucesión d_1, d_2, \dots, d_n satisface las hipótesis de la Prop.5.5.1 también las satisface cualquier sucesión gráfica d'_1, d'_2, \dots, d'_n que la mayor; es decir, tal que $d'_i \geq d_i$.

5-20)

Demuestre que los Corolarios de la Prop.5.5.1 se implican sucesivamente.

5-21)

Vea que las condiciones suficientes de Dirac y de Ore (Corol.1-2 de Prop.5.5.1) no son válidas si el conexo G puede tener bucles o aristas paralelas, o sólo dos vértices.

5-22)

Suponga que en una reunión de n personas cada una conoce a por lo menos la mitad de ellas. ¿ Podrán sentarse alrededor de una mesa circular de forma que cada uno tenga sentado a derecha y a izquierda uno de sus conocidos ?.

5-23)

Imagine el grafo constituido por dos copias disjuntas del completo K_n , uno de ellos con un vértice distinguido \underline{x} , y ambos conectados por aristas $[\underline{x}, \underline{x}']$ cualquiera sea x perteneciente al completo que no contiene \underline{x} .

Utilice este grafo para mostrar que la restricción que implica la hipótesis de la condición de suficiencia de Ore (ver Prop 5.5.1 Corolario) no puede mejorarse substituyendo n por $(n - 1)$.

5-24)

Demuestre que la k -clausura C_k introducida en pág.201 está bien definida (es decir, que no depende del orden en que se consideren los pares de vértices).

5-25)

Suponga tener una mesa circular rodeada de diez butacas numeradas.

Se preguntan :

- ¿ de cuántas formas podrán sentarse alrededor de ella diez comensales ?
- idem a) pero si cinco de los comensales son cordobeses y deben alternarse con los no cordobeses ?
- idem a) pero sin tener en cuenta la numeración de las butacas
- idem c) pero sin distinguir entre "a derecha" y "a izquierda"
- idem d) pero sin repetir pares de contiguos.

5-26)

Vea que si un grafo G carente de bucles es de orden n , y para todo par de vértices u, v , se tiene $gr(u) + gr(v) \geq n - 1$, entonces G admite cadena hamiltoniana. (Se sugiere ver que G es conexo y razonar por inducción)

5-27)

Supongamos tener el "grafo reticular" de vértices (i, j) con i, j , enteros, $0 \leq i \leq p$, $0 \leq j \leq q$; $p \geq 2$, $q \geq 2$, y aristas que conectan los pares de vértices contiguos de una misma horizontal (vertical).

¿ Que condiciones sobre la paridad de p , q , permiten asegurar la posibilidad (imposibilidad) de construir en ellos ciclos hamiltonianos ?

En [Mars71] se da el resultado de Kötzig que extiende al anterior al caso de los "grafos reticulares n -dimensionales"

5-28)

Admitiendo que cada arista de un grafo cúbico está incluida en un número par (eventualmente nulo) de ciclos hamiltonianos deduzca los siguientes resultados, ya indicados en pág.197.

a) todo grafo cúbico hamiltoniano tiene al menos tres de dichos ciclos.

b) si un grafo admite dos ciclos hamiltonianos arista disjuntos, admite al menos tres de estos ciclos.

5-29)

Demuestre

a) que los caminos eulerianos cerrados (abiertos) de un multidigrafo no trivial G , se corresponden biyectivamente con los caminosos hamiltonianos cerrados (abiertos) de su digrafo adjunto.

b) que si H es digrafo adjunto hamiltoniano todos sus caminos hamiltonianos pueden extenderse a uno que es cerrado.

5-30)

Halle un par de dígrafos hamiltonianos sólo uno de los cuales tenga adjunto hamiltoniano. Muestre así que si G es un multidigrafo hamiltoniano su adjunto puede, o no, ser hamiltoniano.

5-31)

Vea que si G es un grafo euleriano sin bucles, su adjunto es euleriano y hamiltoniano, y que las respectivas recíprocas son falsas.

5-32)

Vea que si G carece de bucles y es grafo hamiltoniano, entonces su adjunto es hamiltoniano y puede, o no, ser euleriano.

5-33)

Muestre que en la clase de los grafos sin bucles :

- a) H es adjunto de un euleriano si y sólo si todos los clanes de su "descomposición de Krausz" son de orden par.
- b) H es adjunto de un hamiltoniano si y sólo si contiene un ciclo cubriente con exactamente una arista en cada uno de los clanes de su "descomposición de Krausz".

5-34)

Compruebe, a partir de lo afirmado en los ejercicios anteriores que en la siguiente tabla se resumen todas las posibles formas en que pueden presentarse las propiedades "ser (no ser) euleriano" y "ser (no ser) hamiltoniano" en relación con grafos sin bucles, y sus respectivos adjuntos.

G		A(G)		G		A(G)	
eul.	ham.	eul.	ham.	no eul.	no ham.	eul.	ham.
"	no ham.	"	"	"	"	"	no ham.
no eul.	ham.	"	"	"	"	no eul.	ham.
"	"	no eul.	"	"	"	"	no ham.

Constata que todas ellas son efectivamente realizables.

5-35)

Constata que —en el caso dirigido— las únicas formas en que se pueden presentar las características "ser (no ser) euleriano" y "ser (no ser) hamiltoniano" en relación con los multidigrafos y sus adjuntos, están resumidas en la tabla

G		A(G)		G		A(G)	
eul.	ham.	ham	eul.	no eul.	ham	no ham	eul.
"	"	"	no eul.	"	"	"	no eul.
"	no ham.	"	eul.	"	no ham.	"	eul.
"	"	"	no eul.	"	"	"	no eul.

Muestre que todas ellas son efectivamente realizables.

5-36)

Vea que la regla : "conectar cada ciudad con una de las más próximas", no es apta para resolver el problema del viajante de comercio.

CAPITULO 6

TRANSITABILIDAD VALUADA

6.1. INTRODUCCION

En el Prólogo y en 2.3 hemos observado que el uso de *configuraciones valuadas* permite obtener resultados teóricos más interesantes y ajustados a la realidad que los alcanzables a partir de solamente los aspectos combinatorios de la Teoría de Grafos.

En lo que sigue las estudiaremos en relación con problemas de *caminos óptimos* que presentan características diferentes de las que tienen los problemas del cartero chino, o del viajante de comercio, vistos en los Cap.4 y 5.

La cuestión similar de cadenas óptimas no será considerada.

Para ella podríamos recurrir a la correspondencia entre las cadenas de G y los caminos de su simetrizado, o aplicar métodos análogos a los que veremos.

Tampoco consideraremos en este capítulo los problemas de optimización que se presentan al estudiar como concretar, en cierta "red de aprovisionamiento y demanda" una "distribución a costo mínimo".

Estos problemas, que pueden ser abordados con la noción *flujo en dígrafos canalizados* se tratarán en el Cap.11.

Notemos, de paso, que el análisis de los problemas de transitabilidad en términos de operaciones formales, o de estructuras algebraicas definidas "ad hoc" han sido motivo de numerosos trabajos.

Al respecto podrían consultarse [Gon75] y [Roy74] que incluyen amplias bibliografías. Estas "álgebras de caminos" también fueron estudiadas en [DerP71], [KauP77], [Mino76], [Pair67] y en el Cap.3 de [GonM79].

6.2. CAMINOS OPTIMOS

El *problema de los caminos óptimos* en configuraciones arco valuadas es el de hallar, de entre todos los caminos que resuelven el problema planteado, los que maximizan (minimizan) su "valor".

Noción ésta, que frente a problemas distintos podrá referirse a magnitudes diferentes. Por caso, tiempo, costo, longitud, ganancia, capacidad, eficiencia, etc.

La bibliografía dedicada a esta temática es muy amplia. Al respecto citaremos : [AhuMO90], [DenF79], [Deo74], [GallP82/86], [GolMN77], [GonM79], [Hu67], [JauMA71], [KauP77], [Mur67], [Pie75], [Roy69], [Walt84], y [Yen75]. En [Dre69] se hace una buena revisión de los primeros trabajos relativos a la misma.

Algunas de las aplicaciones típicas abordadas dentro de ella son :

1)

Determinar los caminos simples $a \rightarrow b$ con mayor (menor) número de arcos.

2)

Si V es un conjunto de ciudades, U el de los tramos de rutas que conectan pares de ellas y se conocen sus respectivas longitudes (o el costo para recorrerlos) determinar recorridos de “menor valor” entre ciertos pares de ciudades.

3)

Idem 2) pero buscando recorridos de “mayor valor”.

4)

Conocidas las etapas de cierto proceso y el tiempo necesario para pasar de una a otra determinar el tiempo mínimo que debe transcurrir entre la etapa inicial y la final.

Es fácil ver los problemas anteriores se inscriben dentro de un *planteo aditivo*.

En estos casos se convendrá que el valor de los caminos nulos es cero.

En cambio, el siguiente nos llevaría a la búsqueda de caminos óptimos, pero referidos a *magnitudes multiplicativas*, y en este caso a los caminos nulos se los valoraría uno.

Dado un conjunto de “estados” y la probabilidad de pasar directamente de uno a otro, ¿ Cuál sería, supuesto que los cambios de estado son independientes, la probabilidad de pasar en h etapas desde un “estado i ” a otro “estado j ” ?

En el caso de magnitudes aditivas, único al cual nos referiremos, para determinar caminos máximos (mínimos) bastará retener de cada conjunto de arcos paralelos, si los hay, uno de los de mayor (menor) valor.

Esto no afectaría los valores óptimos, y posteriores substitutiones de arcos por paralelos de igual valor permitiría explicitarlos a todos.

Por lo tanto, en lo que sigue, nos limitaremos al caso de digrafos conexos, arco valuados.

Por otra parte, es claro que la índole del tema a tratar nos lleva a restringirnos a configuraciones conexas.

Consideraremos en ellos la siguiente problemática :

Dado un digrafo y supuesto que a cada uno de sus arcos u_i se le ha asignado un valor $w(u_i)$ determinar, de entre todos los caminos $C_h : a \rightarrow b$ aquellos para los cuales el valor $W(C) = \sum_{u_i \in C_h} w(u_i)$ es máximo (mínimo).

Si todo $w(u_i)=1$ el "valor $W(C)$ " coincide con "la longitud de C " en el sentido de la definición dada en Cap.3.

Por ello al considerar configuraciones valuadas, y aún cuando los dos conceptos deben distinguirse, es frecuente referirse al valor $W(C)$ bajo la designación *longitud generalizada de C* , o más brevemente, como *longitud de C* .

También nosotros haremos uso de dicho abuso de lenguaje, supuesto que del contexto resulte claro en que sentido se utiliza dicha expresión.

A los *camino de valor óptimo* también se les dice **camino críticos**, y a sus arcos, **arcos críticos**.

Los de valor máximo (mínimo) también se dirán **camino máximos (mínimos)**.

Habitualmente los valores a considerar son no negativos, pero nada impide que lo sean. Tal el caso en que el valor del arco (x, y) mide la diferencia de nivel (o de potencial eléctrico) desde el extremo x al extremo y .

Por otra parte, y volviendo sobre algo observado en pág.72, notemos que para determinar caminos mínimos (máximos) la carencia de un cierto arco (x, y) se puede reinterpretar suponiéndolo existente pero valuado de forma apropiada. Más precisamente, valuándolo con un valor suficientemente grande (pequeño) que asegure no será elegido para integrar los caminos mínimos (máximos)

En particular, en las formalizaciones teóricas los valuremos $+\infty$ ($-\infty$), símbolos éstos que en ocasión de efectuarse cálculos deberán reemplazarse adecuadamente.

Observaciones

- 1- Si se dan dos valuaciones W y W' tales que para todo arco u se tiene $w(u) = -w'(u)$, todo camino máximo (mínimo) para la valuación W es mínimo (máximo) para la W' .
- 2- Cambiando el sentido de cada arco y el signo de su valor, cada camino mínimo (máximo) $a \rightarrow b$ se transforma en otro máximo (mínimo) $b \rightarrow a$.
- 3- Si todos los arcos tienen valor positivo, los caminos de menor valor son elementales.

4– No siempre distintos caminos óptimos $a \rightarrow b$ tienen igual cantidad de arcos. Es claro que si un camino $a \rightarrow b$ contiene un camino cerrado C de valor positivo (negativo) reiterando C indefinidamente se pueden obtener caminos de valor arbitrariamente grande (pequeño).

Si en cambio, el valor de dicho C es nulo su reiteración no afectará el valor de los caminos óptimos, pero daría lugar a una indeterminación respecto de los caminos buscados.

Por lo tanto, *para determinar caminos $a \rightarrow b$ óptimos*, será necesario conocer si el subdigrafo inducido por los descendientes de a y los precedentes de b contiene circuitos, y el valor de éstos.

Cuando se consideren problemas de camino máximo (mínimo) los caminos cerrados de valor positivo (negativo) se dirán **circuitos absorbentes**.

Si no son excluidos, el problema de los caminos óptimos carece de solución finita. Ninguno de ellos estará contenido en los caminos buscados.

En situaciones reales la existencia de caminos cerrados es frecuente, y en tales casos el problema de los caminos óptimos podría plantearse en términos de caminos elementales, pero esto complicaría el análisis a efectuar.

Además, frente a problemas concretos, es frecuente tener que atender a “segundos criterios”. Por ejemplo, para planificar distribuciones de cierto producto “a tiempo mínimo”, sería necesario tomar en cuenta eventuales demoras motivadas por detenciones en el recorrido.

En otras ocasiones podría ser de interés tratar de establecer un cierto equilibrio entre las mayores y las menores “longitudes” de los tramos del camino a elegir.

Frente a tales circunstancias nuestros “caminos óptimos” sólo podrían ser tomados como soluciones aproximadas.

También el problema de determinar los “ k -caminos más cortos” entre un determinado par de vértices fue motivo de diversos trabajos.

Para algunas referencias bibliográficas ver [Sak68], donde se propone un método válido para valuaciones sin signo prefijado y sin circuitos absorbentes. Allí se observa, además, que modificaciones adecuadas permiten adaptarlo para considerar “problemas de circulación”, y que eligiendo k suficientemente grande el método permite determinar todos los caminos con extremos prefijados.

Al respecto podrían consultarse : [BellK60], [FranF71], [GonM79], [HofP59], [Law76], [Poll61], [PollW60].

6.3. ALGUNOS METODOS PARA HALLAR CAMINOS OPTIMOS

La búsqueda de caminos óptimos puede presentar aspectos esencialmente diferentes según sea la situación a resolver.

En particular, puede suceder que la búsqueda se encare en digrafos que pueden (o que no pueden) contener circuitos, y que interese determinarlos para todos los pares de vértices, o sólo para aquellos con determinado vértice inicial. También cabe tener presente si todos los arcos están valuados positivamente, o si se admiten arcos con valores positivos, y otros con valores negativos.

Notemos, además, que a veces no interesa conocer los caminos óptimos, sino sólo su valor.

La variedad indicada se refleja en la de los algoritmos propuestos para hallarlos. Un método eficaz en cierta circunstancia puede no serlo en otra. Para algunos se pedirá que todos los valores $w(u)$ sean de un mismo signo, pero otros podrán aplicarse aún cuando los haya positivos y negativos.

Para decidir sobre cual algoritmo elegir también habría que tomar en cuenta las respectivas "eficacias", cuestión ésta que escapa a nuestro objetivo.

Antes de enunciar algunos algoritmos creemos conveniente recordar que como G se supone finito también lo es el número de sus caminos sin circuitos, y que por lo tanto la determinación de los que además son óptimos se podría hacer, teóricamente, por exhaustión.

No obstante, en virtud de la cantidad de comparaciones que serían necesarias, este método sólo es aplicable en casos excepcionales.

De la Obs.1 de pág.223 se infiere que los algoritmos para los cuales no se exige que los valores de los arcos tengan signo determinado pueden emplearse, sin modificaciones esenciales, tanto para determinar caminos máximos como caminos mínimos.

La mayoría de los algoritmos propuestos para determinar caminos óptimos constan de dos partes, y sólo se diferencian en la primera de ellas.

En sus respectivas *primeras partes* se determina el valor de los caminos buscados, y con sus *segundas partes* se los determina.

Si sólo interesa conocer el valor de los caminos buscados, y no su determinación efectiva, bastará limitarse a considerar sólo sus primeras partes
 En general, los algoritmos para hallar caminos óptimos $a \rightarrow b$ responden al siguiente esquema :

Primera parte

Asignar a cada vértice x un valor t_x que indique cual es el de los caminos óptimos $a \rightarrow x$.

En algunos de los algoritmos el valor correspondiente a cada vértice se fija de una vez para siempre, pero en otros se alcanza luego de reiteradas valuaciones provisionarias. Serán dichos, respectivamente, de "*valuaciones definitivas*", o de "*valuaciones sucesivas*".

Estas "valuaciones sucesivas" pueden variar según cual sea la implementación elegida, y modificarse varias veces antes de alcanzar el valor definitivo.

Los "*arcos críticos*"; es decir, aquellos de los caminos buscados, serán los arcos (x, y) tales que $t_y - t_x$ coincide con el valor del arco en cuestión.

Segunda parte

Una vez valuado b cada camino óptimo $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k = b$ queda fijado eligiendo arcos críticos, regresivamente, a partir de $b = x_k$

La eventual existencia de varios arcos críticos con un mismo vértice final permite que diferentes aplicaciones de la segunda etapa, lleven a distintos caminos óptimos.

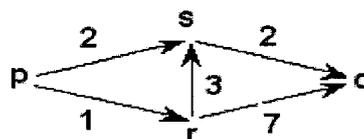
En su segunda parte los algoritmos hacen uso explícito del siguiente

Principio de Optimalidad | Si C es un camino $p \rightarrow q$ óptimo, y $r \in C$ sus subcaminos $C' : p \rightarrow r, C'' : r \rightarrow q$ son óptimos.

Este principio es fundamental en Programación Dinámica, y suele enunciárselo
Una política óptima sólo puede estar formada de subpolíticas óptimas.

Destaquemos que este principio, cuya validez es inmediata, no implica que todo camino óptimo pueda ser extendido a otro, también óptimo.

Basta considerar al efecto en el siguiente digrafo el camino que define el arco (p, r)



6.3.1 ALGORITMO DE DANTZIG

Para determinar los caminos $a \rightarrow b$ mínimos, supuesto que todo arco $u = (x, y)$ tiene valor no negativo, y b es accesible desde a .

Es un algoritmo de valuaciones definitivas, y no será necesario verificar la no existencia de caminos cerrados, pues no cabe la de circuitos absorbentes.

Etapa 1) Se pone $a = x_0$; se lo valua $t_0 = 0$; se nota $A_0 = \{x_0\}$ y se pasa a la etapa 2.

Etapa 2) Dado A_m , $m \geq 0$, y para cada $x_i \in A_m$, (valuado t_i), se elige de entre los arcos de vértice inicial x_i y vértice final fuera de A_m uno de los de menor valor. Se nota \underline{x}_j su vértice final y se pasa a la etapa 3.

Etapa 3) Sea $x_m \in A_m$ tal que $t_m + w(x_m, \underline{x}_m) = \min_j \{t_j + w(x_j, \underline{x}_j)\}$; $x_j \in A_m$.

Etapa 4) El vértice \underline{x}_m se valua con $t_m + w(x_m, \underline{x}_m)$.

Si $\underline{x}_m = b$ se pasa a la Etapa 5, caso contrario se reitera la Etapa 2, aplicándola al conjunto $A_{m+1} = A_m \cup \{\underline{x}_m\}$

Etapa 5) Una vez valuado b los caminos mínimos $a \rightarrow b$ se obtienen eligiendo, a partir de $b = x_k$, como arcos críticos aquellos (x_i, x_j) tales que $w(x_i, x_j) = t_j - t_i$.

La eficacia del método puede demostrarse por recurrencia.

En efecto, vale para A_0 , y supuesto que se cumple para todo vértice de A_m , $m \geq 1$, como todo camino $C = x_0, x_1, \dots, \underline{x}_m$ tiene vértices en A_m (al menos $x_0 = a$) por el modo de elección de los vértices x_m resulta que el valor de \underline{x}_m es menor o igual que el valor de cualesquiera de los caminos $a \rightarrow \underline{x}_m$.

Además, la etapa 5) es aplicable, pues b será valuado, y para cada vértice x_j valuado t_j hay al menos un x_h tal que $t_h - t_j = w(x_h, x_j)$.

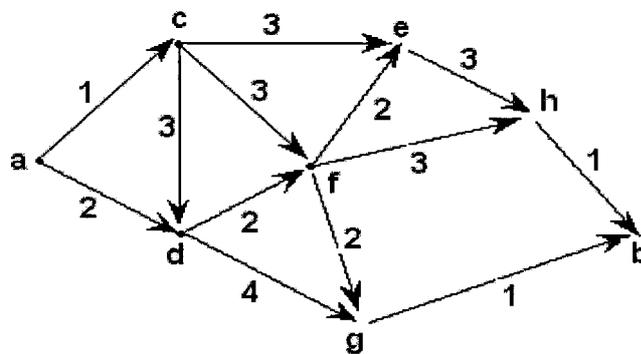
Para más información ver [BerGH62], [Dan60/75], [Roy69], [Sak84b], [Sim62]

Nótese que aún cuando al aplicar la Etapa 3, cada vértice es valuado desde cierto x_m pueden existir varios arcos críticos con igual extremo final.

Así ocurre, respecto de los vértices f, g, h , en el ejemplo que sigue.

Además, si al aplicar la Etapa 2 hay varios vértices en condiciones de ser considerados x_m todos ellos pueden ser elegidos simultáneamente, con sus respectivos \underline{x}_m , pues más adelante no podría disminuirse el valor que ahora les sería asignado

Atendiendo a la última de estas observaciones lo aplicaremos al digrafo.



Los sucesivos conjuntos A_m , arcos (x_m, \underline{x}_m) y valores t_m son :

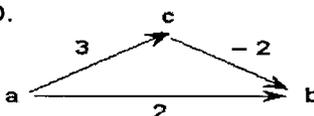
A_0	a	(a, c)	$t_c = 1$
A_1	a, c	(a, d)	$t_d = 2$
A_2	a, c, d	$(c, e), (c, f), (d, f)$	$t_e = t_f = 4$
A_3	a, c, d, e, f	$(f, g), (d, g)$	$t_g = 6$
A_4	a, c, d, e, f, g	$(e, h), (f, h), (g, b)$	$t_b = t_h = 7$

Los caminos mínimos $a \rightarrow b$ tienen valor 7.

Ellos son $a, c, f, g, b \parallel a, d, f, g, b \parallel a, d, g, b$.

Igual valor tienen los mínimos $a \rightarrow h$, a saber $a, c, e, h \parallel a, c, f, h \parallel a, d, f, h$.

Del siguiente ejemplo resulta que este algoritmo no es aplicable si hay arcos con valor negativo.

En efecto, dado  y siguiendo el proceso indicado se

tendría $A_0 = \{ a \}$; $A_1 = \{ a, b \}$ y $t_b = 2$; pero el camino a, c, b es de valor 1.

6.3.2. ALGORITMO DE DIJKSTRA

Es un eficaz algoritmo de valuaciones sucesivas para hallar caminos óptimos en digrafos con arcos de valuación $w(u)$ no negativa.

Fue propuesto en [Dij59], y reformulado, con leves variantes, en [AhuMO90], [Agui90], [Deo74], [GonM79], [Gri85], [Hu82], [Law76], [Petf71], [Sak84b], [Tar83], [SwaT81].

Lo enunciaremos para el caso de hallar caminos mínimos de vértice inicial a .

A tal efecto convendremos que :

$$L_{x_i, x_j} = \begin{cases} w(x_i, x_j) \geq 0 & \text{si existe arco } (x_i, x_j) \\ +\infty & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

T denotará el conjunto de vértices con valuación provisoria.

Etapa 1 : Poner $t_a = 0$; $T = \{x_i / x_i \neq a\}$; $t_i = L_{a, x_i}$ para todo $x_i \neq a$.

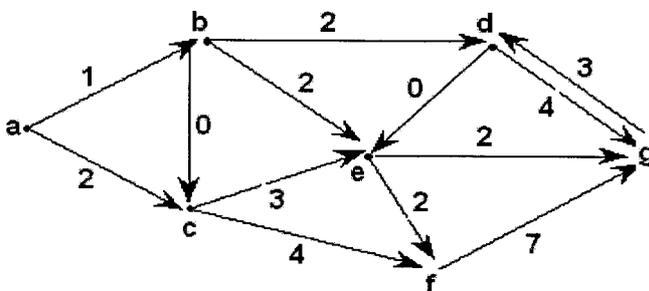
Etapa 2 : Elegir en T un vértice x_i tal que $t_i = \min \{t_h / x_h \in T\}$.

Etapa 3 : Si $T - \{x_i\} = \emptyset$ pasar a la Etapa 4. Caso contrario, y para $T' = T - \{x_i\}$, reevaluar sus vértices con $t'_j = \min \{t_j ; t_i + L_{x_i, x_j}\}$ y reiterar la Etapa 2 aplicándola a $T = T'$.

Etapa 4 : Los caminos mínimos se hallan eligiendo, a partir de b , como arcos críticos aquellos tales que $w(x_i, x_j) = t_j - t_i$.

Al aplicar la Etapa 2 puede haber varios vértices en condiciones de ser elegidos y el método podría ser modificado de forma de elegirlos simultáneamente a todos ellos; puesto que en etapas posteriores sus respectivas valuaciones no serían disminuidas.

Las columnas de la siguiente tabla dan las sucesivas valuaciones que resultan de aplicarlo al digrafo



a	0	0	0
b	1	1	1
c	2	1	1
d	$+\infty$	3	3
e	$+\infty$	3	3
f	$+\infty$	$+\infty$	5
g	$+\infty$	$+\infty$	5

La primera columna resulta de aplicar la Etapa 1, y la segunda, de aplicar una vez las Etapas 2 y 3. Luego podría optarse por d ; o bien por e . Eligiendo e obtenemos la última de las columnas precedentes. Si, en cambio, se hubiera elegido d , para el vértice g habría habido además una valuación provisoria 7.

Así entonces, el numero de valuaciones provisionarias que puede tener un vértice dependerá, en general, del orden en que se elijan los arcos.

Este algoritmo fue extendido por Knuth [Knu77b] desde un punto de vista algebraico, y en [EdmK72] al caso de valuaciones sin restricciones, excepto la carencia de circuitos absorbentes. Consideraciones sobre esta modificación se pueden ver en [Joh73].

6.3.3. ALGORITMO DE FORD

Es un método de valuaciones sucesivas que no presupone signo determinado en los valores de los arcos. Ver [Ford56], [GonM79], [Kau68b], [Sim62], [Tar83])

Lo enunciaremos para el caso en que se buscan caminos mínimos con vértice inicial a .

Etapa 1 : Asignar al vértice a el valor $t_a = 0$, y a los restantes x_i un valor t_i que sea mayor, con seguridad, al de todo camino $a \rightarrow x_i$ (por ejemplo $t_i = +\infty$)

Etapa 2 : Reiterar tanto como sea posible la operación :
Elegir un arco (x_i, x_j) tal que $t_j - t_i > w(x_i, x_j)$, revaluar x_j con $t_j = t_i + w(x_i, x_j)$ y conservar las marcas restantes.

Etapa 3 : Cuando no quepa aplicar la etapa anterior, los arcos críticos (o sea, aquellos en los que $w(x_i, x_j) = t_j - t_i$) que componen los caminos mínimos $a \rightarrow \underline{x}$ se hallan, en forma regresiva, a partir de \underline{x} .

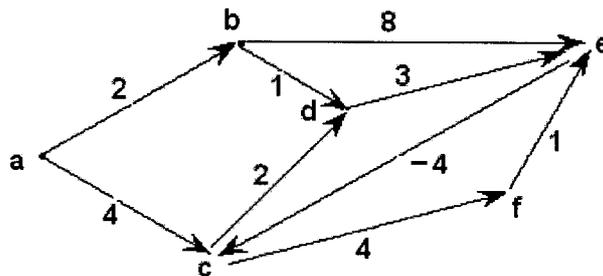
Del procedimiento indicado resulta que los sucesivos valores asignados a cada vértice determinan una sucesión no creciente.

Dicha sucesión es finita, pues cada revaluación de x_j es consecuencia de otra, en alguno de sus precedentes, y por la carencia de circuitos absorbentes no caben revaluaciones de si mismo.

Por ello y la finitud de G la etapa 2) se aplica un número finito de veces.

Además, cuando deba aplicarse la etapa 3) cada valor t_j es el de los caminos $a \rightarrow x_j$ mínimos, pues de lo contrario habría al menos un arco al cual podría aún aplicarse a etapa 2).

Apliquemos el algoritmo en cuestión al siguiente digrafo.



Eligiendo los arcos (a,b) , (a,c) ; (c,d) , (b,d) ; (b,e) ; (c,f) ; (f,e) ; (d,e) , (e,c) y nuevamente el (c, f) se tendrá que las sucesivas valuaciones de los vértices son las dadas en las columnas de la siguiente tabla

a	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	$+\infty$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
c	$+\infty$	$+\infty$	4	4	4	4	4	4	4	2	2
d	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	6	3	3	3	3	3	3	3
e	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	10	10	9	6	6	6
f	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	8	8	8	8	6

La valuación anterior no puede mejorarse y en este caso, cualquiera sea el vértice x hay un único camino mínimo $a \rightarrow x$.

El camino $a \rightarrow f$ de valor 6 es el de arcos (a, b) , (b, d) , (d, e) , (e, c) , (c, f) .

Un refinamiento del algoritmo que nos ocupa podría ser :

- Al aplicar la etapa 2 elegir de entre los arcos (x_i, x_j) con $w_{i,j} < t_j - t_i$ uno de aquellos con menor valor en su vértice inicial.

El mismo nos hubiera llevado a elegir el arco (b, d) antes que el (c, d) y el vértice d hubiera sido valuado directamente con 3.

Poniendo $-\infty$ en lugar de $+\infty$, y cambiando el sentido de la desigualdad en Etapa 2, se hallarían caminos máximos.

La noción "arborescencia cubriente de raíz r ", a introducir en Cap. 9, permite modificar levemente el algoritmo precedente dando lugar al de Ford-Berge (ver [BerGH62] Cap.9 , [Roy69]-Cap.VII)

También en [DanBR67] ([GonM79]-Cap.2) se recurre a "arborescencias cubrientes" para enunciar un método que permite hallar, en digrafos con arcos valuados arbitrariamente, los distintos caminos óptimos de vértice inicial prefijado.

Además, para el caso de digrafos sin circuitos Bellman-Kallaba propusieron (ver [GonM79], [Kau62/ 68b], [KauCr65], [KauD64]) una variante del método de Ford , recurriendo a la Programación Dinámica y a la evidencia : *todo camino óptimo con a lo sumo r arcos está formado de subcaminos óptimos con a lo sumo k arcos , $k \leq r$.*

6.4. METODOS MATRICIALES

En 6.3 hemos considerado varios algoritmos para determinar caminos óptimos con un determinado vértice inicial.

A continuación daremos otros, que recurren a operaciones con matrices y permiten tomar en cuenta, simultáneamente, a todos los caminos existentes entre los distintos pares de vértices.

Para algunos se emplean "operaciones formales".

Por ejemplo, dadas las matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, de tipos $p \times q \parallel q \times r$, respectivamente, y supuesto que $\#$ y $\&$ son dos operaciones binarias que satisfacen las propiedades necesarias (asociatividad, conmutatividad, etc.) diremos :

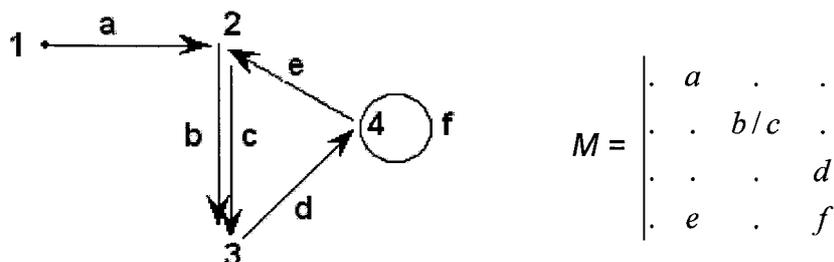
Producto de A con B relativo a $\#$, $\&$, a la matriz C, de tipo $p \times r$ tal que :

$$A * B = C = (c_{ij}) \quad \text{con} \quad c_{ij} = \#_k (a_{i,k} \& b_{k,j}).$$

Interpretando $\#$ y $\&$ como adición y multiplicación de reales, el "producto relativo" que nos ocupa coincide con el habitual "producto de composición".

En cambio, interpretándolas como supremo e ínfimo de ceros y unos reencontraríamos el "producto de composición booleano".

Del ejemplo que sigue es fácil deducir como se podría utilizar una tal operación para hallar todos los caminos con cierta cantidad de arcos.



$$M * M = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & ab/ac & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & bd/cd \\ \cdot & de & \cdot & df \\ \cdot & fe & eb/ec & ff \end{vmatrix}$$

Algo similar ocurrió en 3.10 en ocasión de introducir la "multiplicación latina".

6.4.1. MÉTODO MINI-SUM

Seguidamente veremos un método para determinar caminos mínimos, que no presupone tener sólo valores positivos. El mismo puede interpretarse como "producto relativo a # y &", supuesto que # y & denotan, respectivamente, *ínfimo* \parallel *suma de reales extendida con* $(+\infty) + a = +\infty$.

Más precisamente, dadas las matrices de igual tipo $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ se dirá *mini-sum de A con B* a la matriz $C = (c_{ij})$, con $c_{ij} = \inf_k (a_{i,k} + b_{k,j})$.

$$\text{Así entonces, si en } M = (m_{ij}) : m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ w_{ij} & \text{si hay arco } (x_i, x_j), i \neq j \\ +\infty & \text{si no existe tal arco.} \end{cases}$$

los elementos de ${}^2M = M * M$ dan para cada par de vértices x_i, x_j (se admite $x_i = x_j$) los valores de los caminos mínimos que los conectan con a lo sumo dos arcos, o indican que ellos no existen.

En efecto si hay un camino $(x_i, x_k), (x_k, x_j)$ su valor está dado por $m_{i,k} + m_{k,j}$; y como los elementos $m_{i,j}$ son nulos ${}^2m_{ij} = \inf_k (m_{i,k} + m_{k,j}) \leq m_{ij}$. Caso contrario, la carencia de ese camino queda indicada por $+\infty$.

Reiterando el razonamiento anterior, y puesto que todo camino $x_i \rightarrow x_j$ con L arcos se obtiene concatenando un arco (x_i, x_k) con un $(L-1)$ -camino $x_k \rightarrow x_j$ resulta que si hay caminos $x_i \rightarrow x_j$, el valor de los buscados, con longitud L , es ${}^Lm_{ij} = \inf_k ({}^{L-1}m_{i,k} + m_{k,j})$.

Si ${}^Lm_{ij} < {}^{L-1}m_{ij}$ los valores k que implican la modificación corresponden a vértices que deben integrar los caminos mínimos $x_i \rightarrow x_j$.

El proceso termina cuando ${}^hM = {}^{h+1}M$.

La eventual existencia de circuitos absorbentes se detectaría por la aparición de algún valor ${}^k m_{i,i} < 0$.

Apliquemos este algoritmo al digrafo utilizado para ejemplificar el de Ford. Identificaremos a, b, c, d, e, f con $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$; y pondremos \cdot en lugar de $+\infty$

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & 1 & 8 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 2 & \cdot & 4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -4 & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad {}^2M = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 & 10 & 8 \\ \cdot & 0 & 4 & 1 & 4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 2 & 5 & 4 \\ \cdot & \cdot & -1 & 0 & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -4 & -2 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & -3 & \cdot & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$${}^3M = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 & 6 & 8 \\ \cdot & 0 & 0 & 1 & 4 & 8 \\ \cdot & \cdot & 0 & 2 & 5 & 4 \\ \cdot & \cdot & -1 & 0 & 3 & 3 \\ \cdot & \cdot & -4 & -2 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & -3 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad {}^4M = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 6 & 8 \\ \cdot & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ \cdot & \cdot & 0 & 2 & 5 & 4 \\ \cdot & \cdot & -1 & 0 & 3 & 3 \\ \cdot & \cdot & -4 & -2 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & -3 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$${}^5M = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 6 & 6 \\ \cdot & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ \cdot & \cdot & 0 & 2 & 5 & 4 \\ \cdot & \cdot & -1 & 0 & 3 & 3 \\ \cdot & \cdot & -4 & -2 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & -3 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad {}^5M = {}^6M$$

En la primera fila de la última matriz hallada se dan los valores de los caminos mínimos de vértice inicial a . Obviamente, coinciden con los hallados aplicando el método Ford.

Para hallar los que llevan desde $a = x_1$ hasta $f = x_6$ basta operar como sigue.

Como ${}^6 m_{1,6} = {}^5 m_{1,6} < {}^4 m_{1,6}$ y ${}^6 m_{1,6} = 6 = {}^4 m_{1,3} + m_{3,6} = 2 + 4$ resulta que el último de sus arcos es el de extremos $x_3 = c$, $x_6 = f$.

De ${}^4 m_{1,3} < {}^3 m_{1,3}$, y visto que ${}^4 m_{1,3} = 2 = 6 - 4$, a partir de ${}^3 m_{1,5} + m_{5,3}$ se tiene que el penúltimo de los arcos del camino buscado es $(x_5, x_3) = (e, c)$.

Análogamente, podríamos determinar que el camino mínimo $a \rightarrow e$ es el de arcos (a, b) , (b, d) , (d, e) .

Considerando la segunda fila de 6M hallaríamos los caminos mínimos de vértice inicial b .

Con vistas al problema que nos ocupa cabe citar además el "método cascada" dado en [FarLM67], y adaptado en [BilK69] para digrafos con valuaciones arbitrarias. ([Mars71]-Cap.8, [KauP77]-Cap.24, [Wal84]-Cap.3)

Digamos además que el método matricial propuesto en [Dan67], apto para valuaciones positivas o negativas, fue mejorado en [GraM73] y [Tab73].

6.4.2. METODO DE FLOYD

Este método, propuesto en [Floyd62] ([Agui90], [Deo74], [GonM79], [KauP77], [Law76] [SwaT81]) se inspira en el de Roy-Warshall, y es más eficaz que el "mini-sum" pues implica menos operaciones.

Una modificación estudiada en [CarsL77] y en [Spira73] permite disminuir el tiempo promedio de procesamiento.

Su idea fundamental es la de calcular para cada par de vértices i, j , y para valores crecientes de k , a partir de $k = 1$, el valor $m^{(k)}_{ij}$ de los caminos $i \rightarrow j$ óptimos, cuyos vértices interiores están numerados a lo sumo k .

Para su aplicación no interesan los signos de los valores en los arcos, y la eventual existencia de circuitos absorbentes implicaría la aparición de un valor negativo (positivo) en la diagonal de alguna de las matrices a obtener.

También ahora frente a problemas de caminos mínimos (máximos) la carencia de un arco se indicará con $+\infty$ ($-\infty$).

Lo enunciaremos para el caso de caminos mínimos.

Para aplicarlo a un digrafo valuado de orden n consideraremos como matriz inicial la $M^{(0)}$ de componentes $m^{(0)}_{ij} = \begin{cases} w(x_i, x_j) & \text{si hay arco } (x_i, x_j); i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \\ +\infty & \text{en otros casos.} \end{cases}$

Para hallar las restantes $M^{(k)} = (m^{(k)}_{ij})$, $1 \leq k \leq n$, aplicaremos la operación

$$m_{ij}^{(k)} = \min \{ m_{ij}^{(k-1)} ; m_{ik}^{(k-1)} + m_{kj}^{(k-1)} \} .$$

Si $m_{ij}^{(k)} < m_{ij}^{(k-1)}$ cada uno de los pares de caminos $i \rightarrow k$, $k \rightarrow j$ indicados en $m_{ij}^{(k-1)}$ permite construir un camino $i \rightarrow j$ de menor valor que los que utilizan sólo vértices que están numerados a lo sumo $k-1$.

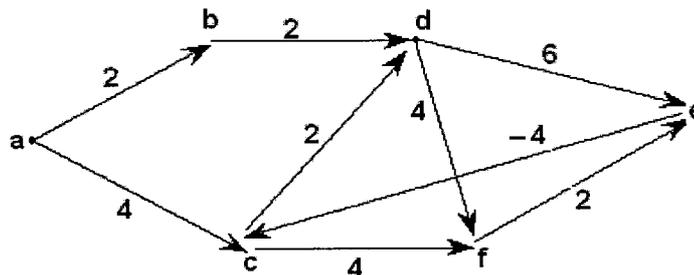
Reiterando esta operación, y si no hay circuitos absorbentes, hallaremos finalmente la matriz cuyas componentes son los valores de los caminos mínimos.

Nótese que :

– Si $m_{k,k}^{(k-1)} \geq 0$ la k -ésima fila (columna) de $M^{(k)}$ coincide con la k -ésima fila (columna) de $M^{(k-1)}$.

– Si $m_{jj}^{(k)} < 0$ el vértice x_j pertenece a un circuito absorbente todos cuyos vértices están numerados a lo sumo k .

Reetiquetando ordenadamente los vértices a,b,c,d,e,f con x_i , $1 \leq i \leq 6$, y poniendo . en lugar de $+\infty$, apliquemos este método al siguiente caso.



$$M^{(0)} = M^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & . & . & . \\ . & 0 & . & 2 & . & . \\ . & . & 0 & 2 & . & 4 \\ . & . & . & 0 & 6 & 4 \\ . & . & -4 & . & 0 & . \\ . & . & . & . & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad M^{(2)} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 & . & . \\ . & 0 & . & 2 & . & . \\ . & . & 0 & 2 & . & 4 \\ . & . & . & 0 & 6 & 4 \\ . & . & -4 & . & 0 & . \\ . & . & . & . & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

En nuestro caso no hay caminos con x_1 vértice interior, y por ello $M^{(0)} = M^{(1)}$.

Además, al calcular $M^{(2)}$ sólo se revaluó $m_{1,4}^{(1)}$ y esto se corresponde con la admisión del camino $a, b, d = x_1, x_2, x_4$ cuyo valor es 4.

$$M^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 & . & 8 \\ . & 0 & . & 2 & . & . \\ . & . & 0 & 2 & . & 4 \\ . & . & . & 0 & 6 & 4 \\ . & . & -4 & -2 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad M^{(4)} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 & 10 & 8 \\ . & 0 & . & 2 & 8 & 6 \\ . & . & 0 & 2 & 8 & 4 \\ . & . & . & 0 & 6 & 4 \\ . & . & -4 & -2 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M^{(5)} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 & 10 & 8 \\ . & 0 & 4 & 2 & 8 & 6 \\ . & . & 0 & 2 & 8 & 4 \\ . & . & 2 & 0 & 6 & 4 \\ . & . & -4 & -2 & 0 & 0 \\ . & . & -2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad M^{(6)} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 & 10 & 8 \\ . & 0 & 4 & 2 & 8 & 6 \\ . & . & 0 & 2 & 6 & 4 \\ . & . & 2 & 0 & 6 & 4 \\ . & . & -4 & -2 & 0 & 0 \\ . & . & -2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Los valores de $M^{(6)}$ son los de los caminos mínimos entre los distintos pares de vértices. En particular, los que llevan desde a hasta e tienen valor 10.

Para determinar tales caminos recurriremos a la matriz T^n construida, a partir de T^0 , aplicando las siguientes reglas :

$$T^0 = (t^0_{ij}) \text{ con } t^0_{ij} = \begin{cases} i & \text{si existe arco } (i, j) \\ . & \text{en caso contrario.} \end{cases} .$$

$$T^k = (t^k_{ij}) \text{ con } t^k_{ij} = \begin{cases} k & \text{si } m^{(k)}_{ij} \neq m^{(k-1)}_{ij} \\ t^{k-1}_{ij}, k & \text{si } m^{(k)}_{ij} = m^{(k-1)}_{ij} \text{ pero incidiendo en } k \text{ se} \\ & \text{obtiene otro camino } i \rightarrow j \text{ mínimo.} \\ t^{k-1}_{ij} & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

La eventual incorporación de k en t^k_{ij} no implica la existencia de arcos (i, k) o (k, j) , sino que el vértice k pertenece a alguno de los caminos mínimos $i \rightarrow j$.

Más precisamente, si $p \in t^n_{ij}$ y existe un arco (p, j) – o un arco (i, p) – dicho arco integrará alguno de los caminos buscados, y el análisis continuará a partir de $t^n_{i,p}$; o de $t^n_{p,j}$.

Pero, si ni (p, j) , ni (i, p) , existen, para continuar el análisis se deberán considerar ambos $t^n_{i,p}$ y $t^n_{p,j}$.

Substituyendo la sucesión 1,2,3, ... por la a,b,c, ... nuestras matrices T^k son

$$T^0 = T^a = \begin{vmatrix} \cdot & a & a & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & b & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c & \cdot & c \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d & d \\ \cdot & \cdot & e & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f & \cdot \end{vmatrix} \quad T^b = \begin{vmatrix} \cdot & a & a & b & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & b & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c & \cdot & c \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d & d \\ \cdot & \cdot & e & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f & \cdot \end{vmatrix}$$

$$T^c = \begin{vmatrix} \cdot & a & a & b & \cdot & c \\ \cdot & \cdot & \cdot & b & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c & \cdot & c \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d & d \\ \cdot & \cdot & e & c & \cdot & c \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f & \cdot \end{vmatrix} \quad T^d = \begin{vmatrix} \cdot & a & a & b & d & c,d \\ \cdot & \cdot & \cdot & b & d & d \\ \cdot & \cdot & \cdot & c & d & c \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d & d \\ \cdot & \cdot & e & c & \cdot & c \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f & \cdot \end{vmatrix}$$

$$T^e = \begin{vmatrix} \cdot & a & a & b & d & c,d \\ \cdot & \cdot & e & b & d & d \\ \cdot & \cdot & \cdot & c & d & c \\ \cdot & \cdot & e & \cdot & d & d \\ \cdot & \cdot & e & c & \cdot & c \\ \cdot & \cdot & e & e & f & \cdot \end{vmatrix} \quad T^f = \begin{vmatrix} \cdot & a & a & b & d,f & c,d \\ \cdot & \cdot & e,f & b & d,f & d \\ \cdot & \cdot & \cdot & c & f & c \\ \cdot & \cdot & e,f & \cdot & d,f & d \\ \cdot & \cdot & e & c & \cdot & c \\ \cdot & \cdot & e & e & f & \cdot \end{vmatrix}$$

Vimos que los caminos mínimos $a \rightarrow e$ tienen valor 10.

Que ellos son : $a,b,d,e \parallel a,b,d,f,e \parallel a,c,f,e$ resulta de lo siguiente :

De $t_{a,e}^f = \{d, f\}$ se tiene que ambos d, f pertenecen a dichos caminos. Además, como existen arcos (d, e) , (f, e) , resulta que cada uno de ellos es último en los caminos $a \rightarrow e$ buscados.

Ahora deben determinarse los caminos mínimos $a \rightarrow d$; $a \rightarrow f$.

De $t_{a,d}^f = \{b\}$; $t_{a,b}^f = \{a\}$ y la existencia de arcos (a, b) , (b, d) se tiene el camino a,b,d , a partir del cual uno de los buscados es a,b,d,e .

Por otro lado, de $t_{a,f}^f = t_{a,f}^e = t_{a,f}^d = \{c, d\}$ surge la existencia de caminos mínimos $a \rightarrow f$ que inciden en c , o en d , y por lo tanto también son críticos los arcos (c, f) , (d, f) .

Como $t_{a,c}^f = \{a\}$ y existe el arco (a, c) otro de los caminos buscados es a, c, f, e .

Análogamente, de $t_{a,d}^f = \{b\}$; $t_{a,b}^f = \{a\}$, y los arcos involucrados se obtiene el camino a, b, d, f, e .

Procediendo en forma similar, o viéndolos como subcaminos de vértice inicial b de los caminos $a \rightarrow e$ se tendrá que los $b \rightarrow e$ mínimos son $b, d, e \parallel b, d, f, e$.

Hallemos ahora los caminos mínimos $b \rightarrow c$.

De $t_{b,c}^f = \{e, f\}$; $t_{b,e}^f = \{d, f\}$; $t_{b,d}^f = \{b\}$ resulta que uno de ellos es b, d, e, c .

Resta otro incidente en f , pero la carencia de arcos (f, c) , (b, f) hace necesario que para hallarlo deban construirse los caminos mínimos $b \rightarrow f$; $f \rightarrow c$.

Como $t_{b,f}^f = \{d\}$ y hay arcos (b, d) , (d, f) uno de ellos es b, d, f .

De $t_{f,c}^f = \{e\}$ y $t_{f,e}^f = \{f\}$ el otro es f, e, c .

De ambos se obtiene, por composición, el camino b, d, f, e, c .

Los caminos mínimos con otros vértices iniciales pueden hallarse considerando las restantes filas de T^f

El camino e, c, f es de valor nulo, y hace que los caminos mínimos $f \rightarrow e$ no estén unívocamente determinados.

En [RobeF68] se propone un método similar al anterior, desarrollado en términos de "operaciones generalizadas" dentro de la Programación Dinámica.

6.5. CAMINOS CRITICOS - APLICACION P.E.R.T. (M.P.M.)

Los problemas de "planificación" (*ordonnancement*; *scheduling*) en los cuales es necesario respetar numerosas restricciones y mantener control permanente sobre su evolución, son frecuentes y variados.

Se presentan, en particular, al encarar la construcción de grandes edificios, o la dirección de equipos de trabajo, o el gerenciamiento de plantas industriales, etc.

Tales cuestiones implican la realización del total de “*tareas*”, (o de “*etapas*”) en las que, a efectos de su estudio, se lo descompone.

La subdivisión involucrada suele no ser inmediata, y en general no está unívocamente determinada.

Depende, en esencia, de la precisión con que se lo quiera analizar, o de las distintas formas en que es factible llevarlo a cabo.

La finalización de cada “*tarea*” (“*etapa*”) requiere haber concluido todas las precedentes, y obviamente ninguna de ellas puede precederse a si misma.

Así por ejemplo, el pulido de una pieza no puede efectuarse antes de haberla torneado, tampoco puede comenzarse a revocar una pared después de ser pintada, o antes de terminarla, al menos en cierta proporción,

Por lo tanto, salvo que restricciones especiales lo impliquen, los esquemas en los cuales se analizarán las situaciones serán digrafos sin caminos cerrados.

Para elegir las “*tareas*”, como así también para decidir sobre sus respectivos tiempos de ejecución, será necesario recurrir a la experiencia obtenida en casos similares, evaluando entre las estimaciones optimistas, las pesimistas, y las más probables.

Las cuestiones más frecuentes a considerar son :

- evaluar el *tiempo mínimo* f_n necesario para completar el proyecto
- fijar para cada “*tarea*” (“*etapa*”) el período de tiempo en que se la puede comenzar sin afectar el valor f_n
- visualizar las implicancias de eventuales atrasos en la marcha del proyecto y comparar entre sí distintas opciones para solucionarlas.
- elegir de entre los ordenamientos que permitan satisfacer f_n los que optimizan eventuales “segundos criterios” (por ejemplo, minimizar el número de *tareas* en ejecución simultánea).

A veces habrá que atender además a restricciones de otras clases.

Por ejemplo, podrían presentarse *restricciones disjuntivas*, que hagan imposible la realización simultánea de ciertos pares de *tareas*; o *restricciones acumulativas*, que acoten la cantidad disponible de cierto recurso (dinero, obreros, etc.); o *restricciones temporales*, que exijan para algunas *tareas* su realización en un determinado período de tiempo.

También podrían presentarse *situaciones aleatorias*; o *decisorias*, en las que habría que optar entre distintas posibilidades, etc.

Volviendo sobre algo indicado en el Prólogo recordemos que hay dos maneras directas de construir los esquemas en cuestión.

En uno de ellos, el "*digrafo tareas*", sus vértices representan "tareas" y sus arcos a las restricciones de precedencia que éstas deben satisfacer.

En el otro, el "*digrafo etapas*", sus vértices identifican "etapas" y sus arcos a las tareas que deben realizarse para completar el proyecto.

En ambos casos, previa una adecuada valuación de los arcos, la determinación de caminos críticos permitirá tener, en cada instante, un buen conocimiento de la situación y una visión precisa de la marcha del proyecto.

Estos esquemas podrían poner en evidencia la imposibilidad de satisfacer algunas de las hipótesis hechas, y en consecuencia la necesidad de introducir modificaciones al programa inicial.

También permitirían decidir, durante la ejecución del proyecto, sobre eventuales modificaciones necesarias para hacer frente a situaciones imprevistas.

La idea de utilizarlos viene de mediados del siglo XX, cuando fueron utilizados por la N.A.S.A. al desarrollar el Proyecto Misil Polaris.

Se estima que ello permitió reducir a tres años y medio, la duración del proyecto pensado inicialmente en seis años.

Dos de las herramientas propuestas para controlar la marcha de los problemas que nos ocupan son : el Método P.E.R.T. (Program Evaluation and Review Technique), y el Método M.P.M. (Méthode des Potentiels – METRA).

Ambos se basan en la determinación de caminos críticos.

Para observaciones sobre ellos, o sobre sus usos y aplicaciones consultar : [AckS68], [Batt67], [BusS65], [Cop64], [Dibon70], [FauRT76], [GonM79], [JauMA71], [KauD64], [Mars71], [MuiW63], [Roy62a/62b/64/66/69], [Sak84a/84b].

Los *digrafos etapas* tienen su origen en los Diagramas de Gantt (o de Barras).

En éstos, las barras tienen longitudes proporcionales a los tiempos de ejecución de las tareas que representan y son ubicadas dentro del período en que deben completarse para no afectar el plazo de ejecución del proyecto.

Permiten visualizar y controlar diariamente la marcha del plan previsto.

Llevan, en general, a esquematizar el proyecto con digrafos que requieren menor cantidad de elementos que el correspondiente digrafo tareas, pero que no siempre son construibles en forma directa.

Además, eventuales alteraciones del proyecto pueden implicar modificaciones más profundas en los *digrafos etapas* que en los *digrafos tareas*.

Por ejemplo, y según observamos en el Prólogo, modificar ciertas relaciones de precedencia puede requerir la aparición de *tareas ficticias* en *digrafos etapas*, pero no en *digrafos tareas*.

En lo que sigue razonaremos casi exclusivamente sobre *digrafos tareas*, y prestaremos atención, fundamentalmente, a la determinación del *tiempo* f_n , mínimo para la ejecución del proyecto, y a la de los períodos de tiempo en los que sus tareas puedan ejecutarse sin afectar f_n .

Para ello asociaremos a cada una de sus tareas T_i un vértice x_i ($1 \leq i \leq n-1$), representaremos con x_0 a la "tarea virtual T_0 " de "puesta a punto del proyecto", y con x_n a la "tarea virtual T_n " de "finalización del proyecto".

Además, cada arco (x_i, x_j) ; $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ se valorará con t_{ij} , valor éste que indicará cual es el menor tiempo que deberá transcurrir entre el comienzo de la tarea T_i y el de la tarea T_j .

Esto no implica que para comenzar T_j se haya concluido T_i .

Así entonces, las tareas T_h que pueden comenzarse en el primer día de ejecución del proyecto estarán asociadas con arcos (x_0, x_h) valuados $t_{0,h} = 0$.

Visto que para poder comenzar una tarea T_i es necesario haber satisfecho las restricciones que pesan sobre todas aquellas que la preceden, el tiempo mínimo que debe pasar desde el comienzo de ejecución del proyecto hasta que sea posible comenzar T_i está acotado inferiormente por el mayor de los valores de los caminos $x_0 \rightarrow x_i$. Lo notaremos f_i .

Así entonces, si los $t_{i,j}$ indican días :

1 – Aquellas tareas T_i con $f_i = k$ pueden iniciarse a partir del $(k+1)$ -ésimo día de haberse comenzado a ejecutar el proyecto.

2 – Como el comienzo de T_n equivale a la finalización de todas las tareas se tiene que | El menor tiempo necesario para completar el proyecto es el valor f_n de los caminos máximos $x_0 \rightarrow x_n$.

Esto hace que para la búsqueda de "tiempos mínimos" deban determinarse "caminos máximos".

Las tareas correspondientes a los vértices de dichos *caminos máximos* (o *críticos*) son las *tareas críticas*, y cualquier demora en el comienzo de una de éstas implicará una igual para la finalización del proyecto.

Por otro lado, el comienzo de cada tarea no crítica T_i se puede demorar, dentro de cierto margen, sin afectar la fecha de finalización del proyecto.

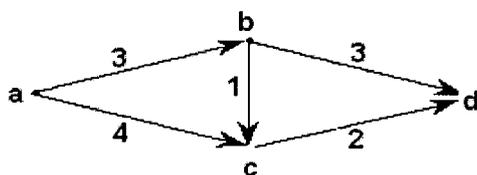
Dicha "*fecha máxima*" será notada \bar{f}_i

Para hallarla bastará calcular $\bar{f}_i = f_n - w_{i,n}$. siendo $w_{i,n}$ el valor máximo de los caminos $x_i \rightarrow x_n$. Es claro que para las tareas críticas $f_i = \bar{f}_i$

Comenzar alguna tarea luego de su "*fecha máxima*" implicaría un aumento del valor f_n y la aparición de nuevos caminos críticos.

Pero un eventual comienzo de T_i antes de f_i , aún cuando sea crítica, no permite asegurar se disminuirá el tiempo f_n de ejecución.

En efecto, en el siguiente ejemplo todas las tareas son críticas, y aún cuando el valor del arco (a, b) se redujera, los valores f_c y f_d se mantendrían.



El "*intervalo de flotamiento*" $[f_i, \bar{f}_i]$ indica el período de tiempo en el cual es posible comenzar la tarea T_i sin afectar la duración de ejecución del proyecto.

El valor $\bar{f}_i - f_i$ se denomina *margen total de T_i* .

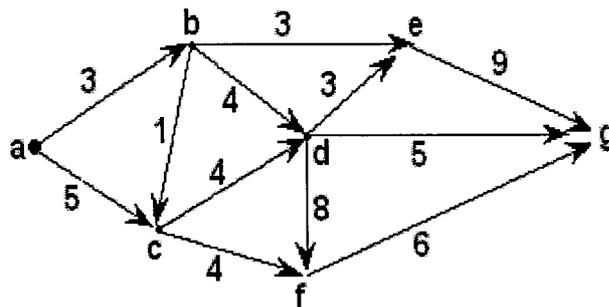
También presenta interés conocer la fecha de iniciación más tardía que admite una tarea T_i sin afectar la fecha f_h de iniciación de sus consecutivas inmediatas, y por ende sin afectar f_n .

Será notada $\underline{\underline{f}}_i$, y el valor $\underline{\underline{f}}_i - f_i$ dicho *margen libre de la tarea T_i* .

Si T_i es tarea crítica, o existe arco (x_i, x_j) con x_j vértice crítico, $\underline{\underline{f}}_i = \bar{f}_i$

Los “márgenes libres” y los “márgenes totales” de las distintas tareas son fáciles de calcular, y permiten estimar la “elasticidad” del programa en ejecución. Cuanto más reducidos sean, mayores serán los riesgos de no poder cumplir satisfactoriamente el plan programado

En particular, para el siguiente digrafo tareas, con $x_0 = a$, $x_n = g$



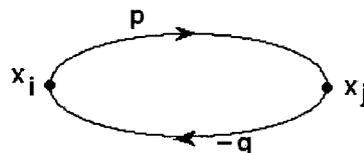
su único camino crítico es el de arcos $(a, c), (c, d), (d, f), (f, g)$; y $f_n = 23$.

Sus únicas tarea no críticas son b, e , cuyos respectivos intervalos de flotamiento son $[3, 6], [12, 14]$

En ciertas ocasiones las restricciones a considerar pueden implicar la aparición de circuitos no absorbentes.

Por ejemplo

Si T_j debe comenzar entre p y q unidades después de comenzada T_i ($p \leq q$) la situación puede representarse por el siguiente esquema



En efecto, el mismo lleva a $f_i + p \leq f_j \leq f_i + q$.

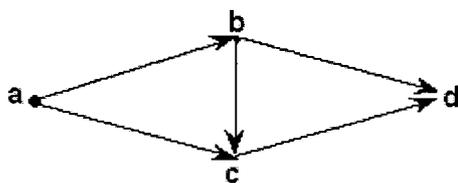
Si T_j tuviera que comenzar inmediatamente después de finalizada T_i pondríamos $p = q$, igual al tiempo que demanda concretar la ejecución de T_i .

Para disminuir f_n , o para evitar el incremento que le provocaría el eventual comienzo de cierta T_h después de \bar{f}_i deberían disminuirse algunos t_{ij} .

Las disminuciones de estos $t_{i,j}$, que podrían llevar a la aparición de nuevos caminos críticos, pueden lograrse asignando a la ejecución de ciertas tareas equipos más eficientes que los previstos inicialmente, o mayor número de obreros encargados de su ejecución, etc.

El conocimiento del costo de cada una estas modificaciones permitiría decidir sobre cuales implementar.

En particular, para



(i, j)	(a, b)	(a, c)	(b, c)	(b, d)	(c, d)
$t_{i,j}$	3	4	1	2	4
$c_{i,j}$	3	3	4	1	2

Supuesto que $t_{i,j}$ es el tiempo mínimo a transcurrir entre el comienzo de las tareas T_i, T_j , es claro que $f_d = 8$.

Si $c_{i,j}$ es el costo por reducir en una unidad de tiempo el valor $t_{i,j}$, para reducir f_d en dos unidades, y a menor costo, debe reducirse en dos el valor $t_{c,d}$.

Si se quisiera reducir f_n en tres unidades lo más conveniente sería bajar en dos el valor de $t_{c,d}$ y en uno los de $t_{a,b}$ y $t_{a,c}$.

Esto aumentaría el costo en $10 = 4 + 3 + 3$ unidades.

Por otro lado, aumentos de ciertos valores $t_{i,j}$ en arcos no críticos pueden ser el reflejo de la disminución de costo en el completamiento de tareas no críticas.

Por ejemplo, asignando menos personal a su ejecución.

Esto podría llevar, eligiendo adecuadamente estas tareas, a una disminución del costo del proyecto, sin afectar f_n .

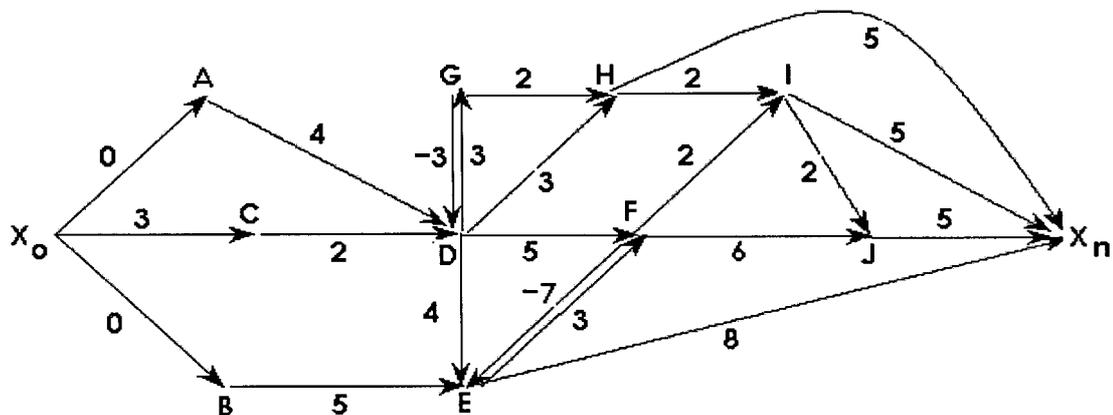
En [KauD64] se dan ejemplos de aplicaciones de éstas técnicas y se muestra como extenderlas para incluir tareas de duración aleatoria o para reducir los tiempos de ejecución minimizando costos adicionales.

En [JauMA71]-Cap.11 se desarrolla un análisis similar, pero referido a un "grafo etapas"

Para ejemplificar lo dicho supongamos que :

- A, B, C, son tres tareas cuyas respectivas ejecuciones demandan dos días y tales que : A, B se pueden comenzar conjuntamente con el proyecto, mientras que para comenzar C deben transcurrir al menos tres días de ello.
- La tarea D puede comenzar inmediatamente después de terminada C pero no antes de dos días después de finalizada A.
- La tarea E para cuyo completamiento son necesarios ocho días, se puede iniciar tres días después de terminada B y cuatro después de comenzada D.
- La ejecución de F lleva tres días. Puede comenzársela cinco días después de comenzada D y entre tres y siete días después de comenzada E.
- G debe comenzarse inmediatamente después de terminar D, cuya terminación exige tres días. Para completar G se necesitan dos días.
- Para comenzar H deben haber transcurrido al menos tres días del comienzo de D y haber finalizado G. Para completar H se necesitan cinco días.
- I cuya ejecución demanda cinco días puede comenzarse dos días después de comenzadas H y F.
- J puede comenzarse luego de dos días de comenzada I y de tres de terminada F. Para completarla se necesitan cinco días.
- El proyecto concluye con la finalización de todas las tareas.

Las restricciones dadas se resumen en el siguiente esquema



Puede verse que para completar la ejecución del proyecto son necesarios al menos 23 días, y que las únicas tareas no críticas son A, B, H, I.

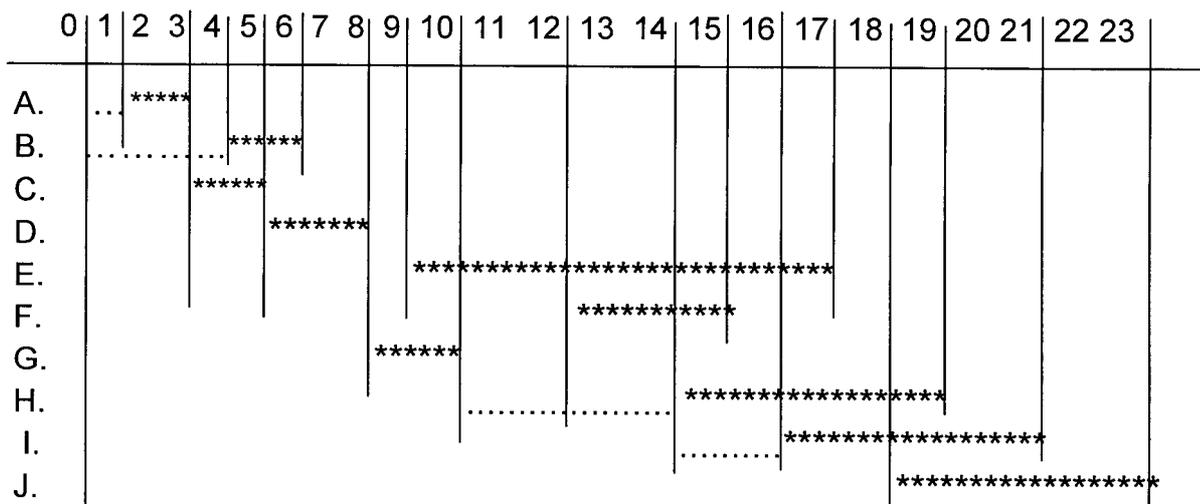
En la siguiente tabla se dan los valores $f_i, \bar{f}_i, \underline{f}_i$ de las distintas tareas y los tiempos d_i necesarios para sus respectivos completamientos.

x_i	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	x_n
f_i	0	0	3	5	9	12	8	10	14	18	23
\bar{f}_i	1	4	3	5	9	12	8	14	16	18	23
f_i	1	4	3	5	9	12	8	12	16	18	23
\bar{d}_i	2	2	2	3	8	3	2	5	5	5	-----

Los resultados obtenidos llevan al siguiente Diagrama de Gantt.

Sus "barras de asteriscos", ubicadas a partir de cada \bar{f}_i representan los tiempos necesarios para completar las respectivas tareas, y sus "barras de puntos" los respectivos intervalos de flotamiento $[f_i, \bar{f}_i]$

Las que carecen de éstos son las tareas críticas.



Del esquema resulta que si las restricciones se respetan, en el noveno día sólo estará en ejecución la tarea G, y en los días séptimo y octavo sólo la tarea D.

Esta observación podría, con vistas a una mejor utilización de los equipos disponibles, inducir cambios en el proyecto.

6.6. RUTAS MAX-MIN (MIN-MAX)

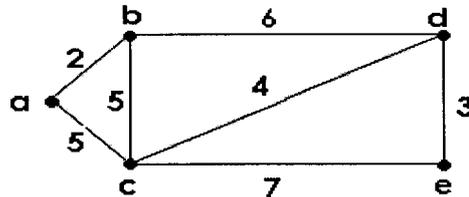
En lo que sigue nos referiremos muy brevemente a cuestiones vinculadas con caminos óptimos (o cadenas óptimas), totalmente diferentes de los hasta aquí considerados.

Apuntan a resolver los siguientes problemas :

- a) Dada una red vial, conocida la longitud de cada uno de sus tramos, y elegidos un par de puntos determinar un recorrido que lleve del uno al otro y “minimice la mayor” de las longitudes de los tramos a recorrer.
- b) Idem a) substituyendo “longitud del tramo” por “máxima cota alcanzada”
- c) Dada una red telefónica y conocidas las confiabilidades de los distintos tramos, cuál será la mayor confiabilidad en las comunicaciones entabladas entre pares de usuarios ?
- d) Dada una red de distribución, conocida la resistencia (la capacidad) de cada uno de los tramos y elegidos un par de puntos, determinar una trayectoria que los conecte y que haga máximo el mínimo de las resistencias (las capacidades) de los tramos a emplear.

Las cadenas (camino) que resuelvan problemas similares a los indicados en a) y b) se dirán de clase MIN-MAX. Las ligadas a problemas de tipo c), d) se dirán de clase MAX-MIN.

Así, para el siguiente grafo valuado



sus cadenas MIN-MAX de extremos a, e , son la de aristas $[a, c], [c, d], [d, e]$ y la de aristas $[a, b], [b, c], [c, d], [d, e]$ pues todas las otras que los conectan tienen al menos un tramo con “longitud” mayor que cinco.

Su única cadena MAX-MIN de extremos a, e , es la de aristas $[a, c] ; [c, e]$.

En el caso no dirigido esta problemática puede resolverse simultáneamente para todos los pares de puntos, recurriendo al concepto de árbol cubriente óptimo. Su justificación es directa y se dará en Cap.9.

De ella resultará que

- | Cada árbol cubriente mínimo (máximo) determina una cadena MIN-MAX
- | (MAX-MIN) de extremos p, q , cualesquiera sean los vértces p, q



EJERCICIOS

6-1)

Enuncie un problema en el cual sea de interés hallar un camino máximo (mínimo) entre un determinado par de puntos.

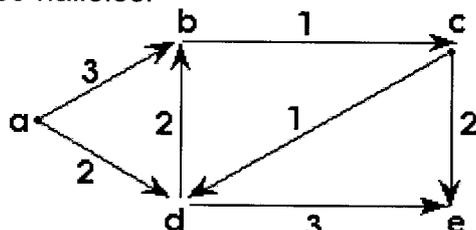
6-2)

Para graduarse, un estudiante debe cursar las siguientes materias respetando las correlatividades indicadas. Si las materias son cuatrimestrales, cuánto tiempo le sería necesario, al menos, para recibirse ?

Materias	A	B	C	D	E	F	G	H
Correlativas	--	A	A-B	B-C	C-D	C	D-E-F	F-G

6-3)

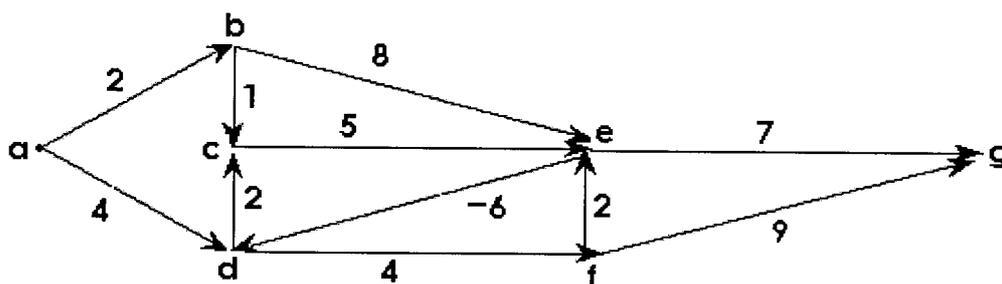
Vea si en el siguiente digrafo valuado es posible hallar caminos $a \rightarrow e$ máximos (mínimos) y en tal caso hállelos.



6-4)

Halle en la siguiente red los caminos $a \rightarrow g$ mínimos.

¿ Podría hallar caminos $a \rightarrow g$ máximos ? ¿ Cómo lo modificaría a tal efecto ?



6-5)

Suponga tener dos caminos óptimos $C_1 : a \rightarrow b$; $C_2 : b \rightarrow c$. ¿ Se puede afirmar que el C_1 o $C_2 : a \rightarrow c$ obtenido por concatenación de ellos también es óptimo ? Justifique su respuesta.

6-6)

Vea si el algoritmo dado en Ejerc.3-12 puede considerarse como caso particular del de Dantzig.

6-7)

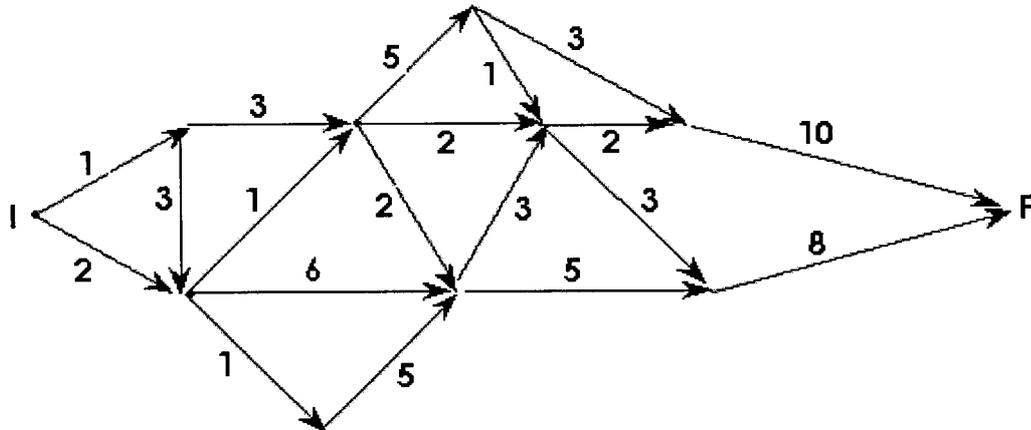
Vea que en dígrafos carentes de circuitos y con arco-valuaciones no negativas aplicando reiteradamente, a partir de $A_0 = \{ a \}$, $t_a = 0$ la siguiente operatoria será posible determinar el valor t_b de los caminos $a \rightarrow b$ de valor máximo.

Conocido A_m , $m \geq 0$, y para cada $q \notin A_m$ tal que todo arco (p_i, q) satisface $p_i \in A_m$ valuar q con $t_q = (\text{máx.}_i (t_{p_i} + w(p_i, q)))$ e incorporarlo al conjunto A_m para constituir el A_{m+1} .

¿ Podría así resolver el Ejer.3-13) ?

6-8

Halle en el siguiente digrafo, aplicando distintos algoritmos, los caminos $I \rightarrow F$ mínimos. Idem máximos.



6-9)

Dése un digrafo G que admita dos arcos valuaciones no negativas $w(u_i) \geq 0$ y $w'(u_i) = k - w(u_i) \geq 0$ tales que :

- los caminos mínimos (máximos) de G_w coinciden con los de $G_{w'}$.
- los caminos mínimos (máximos) de G_w devienen caminos máximos (mínimos) en $G_{w'}$.

6-10)

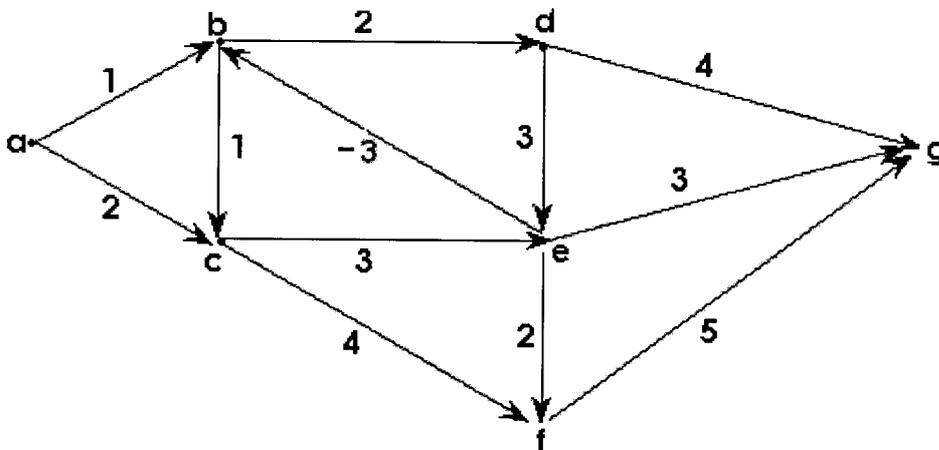
Vea que la operación que da lugar al *mini-sum* es asociativo, pero no conmutativo.

6-11)

Vea que el *digrafo etapas* que corresponde a un proyecto P carece de *tareas ficticias* si y sólo si el *digrafo tareas* representativo de P es un digrafo adjunto.

6-12)

Determine, mediante el método Mini-Sum, y el de Floyd, los valores de los caminos mínimos entre los distintos pares de vértices del siguiente grafo. Halle al menos uno de tales caminos $a \rightarrow g$.



6-13)

Idem 6-12) pero respecto del digrafo valuado dado por la siguiente matriz precedencia, en la cual * debe entenderse como $+\infty$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 & * & * & * \\ * & 0 & 2 & 4 & 9 & * \\ * & 1 & 0 & 1 & * & * \\ * & * & 2 & 0 & 5 & 9 \\ * & * & * & * & 0 & 1 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}$$

6-14)

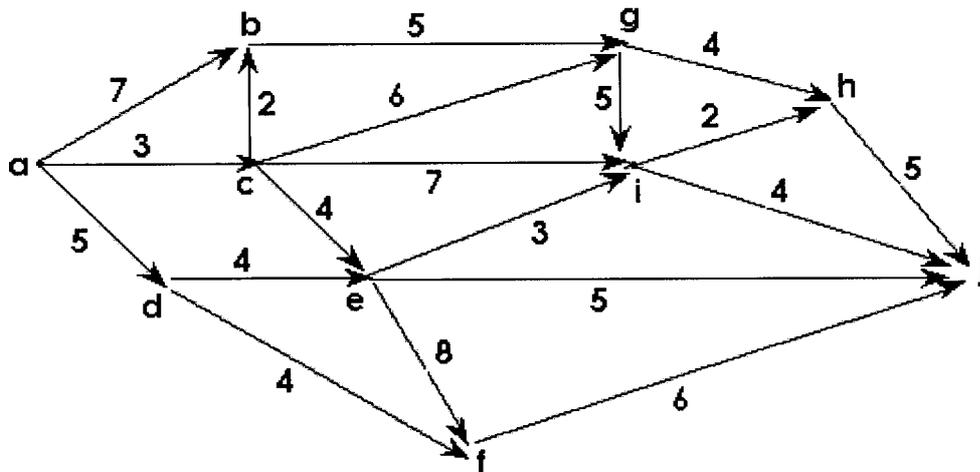
Diga si el siguiente algoritmo permite, o no, en un digrafo conexo con arcos valuados positivamente, determinar la longitud de los caminos mínimos $a \rightarrow z$.

- 1) Poner $L(x) = 0$ en cada vértice x ; convenir $T = \{a\}$ y pasar a 2)
- 2) Si $z \in T$ fin del proceso. Caso contrario elegir de entre los arcos (p, q) con $p \in T$, y con $q \notin T$ uno de valor mínimo. Si dicho valor es $w_{p,q}$ poner $L(q) = L(p) + w_{p,q}$, hacer $T = T \cup \{y\}$, y aplicar nuevamente 2).

6-15)

Con referencia al siguiente esquema suponga que el valor t_{ij} asignado al arco (x_i, x_j) indica el tiempo mínimo que debe transcurrir entre el comienzo de la tarea x_i y la tarea x_j .

¿Cuál es el tiempo mínimo que debe transcurrir para completarse el proyecto ?
 ¿Cuáles son los márgenes libres (los márgenes totales) de las distintas tareas ?



¿ Como se modificarían los valores hallados si el tiempo de ejecución $t_{a,b}$ se disminuyera en una unidad ? Idem, si $t_{a,b}$ se disminuye en dos unidades ?

6-16)

Suponga la existencia de cierto proyecto respecto del cual se indican, para cada una de sus tareas el tiempo que requiere su ejecución, y el que debe transcurrir, como mínimo, entre su comienzo y el de las siguientes inmediatas.

x_0 firma del contrato.

A - replanteo en obra : 2 días, puede comenzarse un día después de la firma del contrato.

B - ejecución de cimientos : 4 días, puede comenzarse una vez terminado el replanteo en obra.

C - construcción de muros : 9 días, deben haber transcurridos al menos 3 días de la finalización de los cimientos.

D - revoques gruesos : 7 días, para comenzarlos deben haberse completado los 5/9 de la construcción de muros.

E - revoques finos : 5 días, para comenzarlos deben estar terminados los revoques gruesos, la plomería, la instalación eléctrica y la cubierta asfáltica

F - montaje carpintería : 2 días, luego de construidos los muros, pero antes de comenzar los revoques finos.

G - cubierta asfáltica : 3 días, luego de terminado el montaje de la carpintería .

H - instalación eléctrica : 4 días, a comenzar no antes de 12 días de la firma del contrato, ni antes de 7 días de haberse comenzado los muros.

I - instalación plomería : 5 días, luego de transcurridos al menos 3 del comienzo de la construcción de muros.

J - pintura : 2 días, luego de terminados los revoques finos y el montaje de la carpintería..

K - completar detalles : 3 días, una vez terminados los trabajos de pintura.

L - inspección final y recepción de la obra : 1 día, luego de completar detalles.

Determine el tiempo mínimo de ejecución del proyecto, y los márgenes totales de las distintas tareas. Construya además su Diagrama de Barras Temporales.

6-17)

Supongamos que para cierto proyecto P en la siguiente tabla se indica con t_{ij} el tiempo mínimo que debe pasar entre el comienzo de la tarea x_i y el de la tarea x_j (x_i predecesora inmediata de x_j) y que c_{ij} es el costo que conlleva disminuir en una unidad el valor t_{ij} .

Determine el costo mínimo que implicaría disminuir en dos unidades el tiempo mínimo de ejecución de P . Idem si f_n debiera disminuirse en cinco unidades.

(i, j)	(a, b)	(a, c)	(b, c)	(b, d)	(c, d)	(e, e)	(d, e)
t_{ij}	6	3	2	3	4	10	4
c_{ij}	2	1	3	2	3	1	3

BIBLIOGRAFIA

A

- AarEB51 AARDENNE-EHRENFEST van, T.- BRUIJN de, N.G. *Circuits and trees in oriented linear graphs*. Simon Stevin, 28 (1951), 203/217. M.R.13 pág. 857. Zb. 44 pág. 382.
- *AckS68 ACKOFF, R.L.- SASIENI, M.W. *Fundamental of operations resarch*. J.Wiley (1968). *Fundamentos de Investigación de Operaciones*. Limusa-Wiley (1971). M.R. 50 # 6445.
- *Adh02 ADHIKARI, S. D. *Aspects of combinatorics and combinatorial number theory*. CRC Press (2002).
- *Agui90 AGUILERA, N. *Algoritmos para grafos y flujos en redes*. INTEC-PEMA Univ. Nac. del Litoral (1990).
- *AhoHU74 AHO, A.V.- HOPCROFT, J.E.- ULLMAN, J.D. *The designs and analysis of computer algorithms*. Addison-Wesley (1974/75). M.R. 54 # 1706
Estructuras de datos y algoritmos. Addison-Wesley-Iberoamericana (1988).
- AhuMO90 AHUJA, R.K.- MEHLHORN, K.- ORLIN, J.B.-TARJAN, R.E. *Faster algorithms for shortest path problem*. J. Assoc. Comput. Mach. (JACM) 37 (1990), 213/223. M.R. 92e # 68063.
- Aig69a AIGNER, M. *Graphs and binary relations*. Lect. Notes in Math.110. Springer-Verlag (1969), 1/21. M.R. 42 # 1686. Zb.186 pg. 275.
- Aig69b AIGNER, M. *Graphs whose complement and linegraph are isomorphic*. J. Comb. Th. 7 (1969), 273/275.
- *Aig79 AIGNER, M. *Combinatorial Theory*. Springer-Verlag (1979).
- AkiK85 AKIYAMA, J.- KANO, M. *Factors and factorizations of graphs. A survey*. J. Graph Theory 9 (1985), 1/42. M.R. 86e # 05070.
- *AlbH88 ALBERTSON, M. O.- HUTCHINSON, J. P. *Discrete Mathematics with algorithms*. J. Wiley (1988). M.R. 89i # 05001.
- AppH76 APPEL, K.- HAKEN, W. *Every planar map is four colorable*. Bull. Amer. Math. Soc. 82-5 (1976), 711/712. M.R. 54 # 12561.
- AppH77 APPEL, K.- HAKEN, W. *The solution of the four-color-map problem*. Scientific American 237 (1977) - October, 108/121.

AppH78 APPEL, K.- HAKEN, W. *The four color problem*. Cap. 2 de Mathematics Today (Edit. L.A. Steen) Springer-Verlag (1978), 153/180.

B

Bab66 BABAI, L. *Automorphism groups. Isomorphism. Reconstruccion*. Cap. 27 de [GraGL66], 1447/1540.

Bab80 BABAI, L. *Finite digraphs with given regular automorphism groups*. Period. Math. Hungar. 11 (1980), 257/270. M.R. 82e # 05076.

Bab81 BABAI, L. *On the abstract group of automorphisms*. Combinatorics (Edit. H. Temperley) London Math. Soc. Lect. Notes 52. Cambridge Univ. Press (1981), 1/40. M.R. 83a # 05064.

*Bal76 BALABAN, A.T. (Edit) *Chemical Applications of Graph Theory*. Acad. Press (1976). M.R. 58 # 21870.

Bal85a BALABAN, A.T. *Applications of graph theory in chemistry*. J. Chem. Inf. Comput. Sci. 25 (1985), 334/343.

Bal85b BALABAN, A.T. *Graph theory and theoretical chemistry*. J. of Molecular Structure 120 (1985), 117/142.

Bar66 BARBUT, M. *Mots circulaires et équilibrés. Histoire du problème vue à travers la bibliographie*. Math. et Sci. Hum. 17 (1966), 59/61.

*BarM70 BARBUT, M.- MONJARDET, B. *Ordre et classification. Algèbre et Combinatoire. (1-2)*. Hachette Université (1970).

BarnG69 BARNETTE, D.- GRÜNBAUM, B. *On Steinitz's theorem concerning convex 3-polytopes and on some properties of planar graphs*. Lect. Notes in Math. 110. Springer-Verlag (1969), 27/40. M.R. 40 # 4148.

BatP79 BATAGELJ, V.- PISANSKI, T. *On partially directed eulerian multigraphs*. Publ. Inst. Math. Nouvelle Série 25 Nro. 39 (1979), 16/24. M.R. 81a # 05054.

*Batt67 BATTERSBY, A. *Méthodes modernes d'ordonnancement*. Dunod (1967).

BauS88 BAUER, D.- SCHMEICHEL, E. *Sufficient conditions for a graph to be pancyclic*. Congr. Numer. 64 (1988), 211/214. M.R. 90b # 05080. Zb. 675 # 05043.

BauS90 BAUER, D.- SCHMEICHEL, E. *Hamiltonian degree conditions wich imply a graph is pancyclic*. J. Comb. Th. B 48 (1990), 111/116. M.R. 91m # 05126. Zb. 698 # 05047.

*Beck64 BECKENBACH, E. (Edit.) *Applied Combinatorial Mathematics*. J. Wiley (1964/81). M.R. 30 # 4687.

- BehCh67 BEHZAD, M.- CHARTRAND, G. *No graph is perfect*. The Amer. Math. Monthly 74 (1967), 962/963. M.R. 36 # 3679.
- Bei68 BEINEKE, L.W. *On derived graphs and digraphs*. Beiträge zur Graphentheorie 1967 (Edit. H.Sachs, H.Walther). Teubner (1968), 17/23. Zb. 179 pg. 292.
- Bei70 BEINEKE, L.W. *Characterizations of derived graphs*. J. Comb. Th 9 (1970), 129/135. M.R. 41 # 6707. Zb. 202 pg.557.
- BeiH66 BEINEKE, L.W.- HARARY, F. *Binary matrices with equal determinant and permanent*. Studia Scient. Math. Hung. 1 (1966), 179/183. M.R. 34 # 7397. Zb.145 pag.15.
- BeiP70 BEINEKE, L.W.- PARKER, E.T. *On non reconstructable tournaments*. J. Comb.Th. 9, (1970), 324/326. M.R. 43 # 6135. Zb. 205 pg. 285.
- *BeiW78 BEINEKE, L.W.- WILSON, R.J. (Edit.) *Selected topics in graph theory*. 1 Acad. Press (1978). M.R. 81e # 05059. Zb. 423 # 00003.
- *BeiW83 BEINEKE, L.W.- WILSON, R.J. (Edit.) *Selected topics in graph theory*. 2. Acad. Press (1983). M.R. 86e # 05002.
- *BeiW88 BEINEKE, L.W.- WILSON, R.J. (Edit.) *Selected topics in graph theory*. 3. Acad. Press (1988). M.R. 93h # 05003.
- Bell61 BELLMAN, R. *Dynamic programming treatment of the travelling salesman problem*. J. Assoc. Comput. Mach. (JACM)-16 (1961), 61/63.
- BellC69 BELLMAN, R.- COOKE, R.L. *The Königsberg bridges problem generalized*. J. Math. Analysis Appl. 25 (1969), 1/7. M.R. 38 # 4205. Zb. 187 pg. 215.
- *BellICL70 BELLMAN, R.- COOKE, K.L.- LOCKETT, J.A. *Algorithms, graphs and computers*. Acad. Press (1970).
- BellK60 BELLMAN, R.- KALABA, R. *On the k-th. best policies*. SIAM Journal 8 (1960), 582/588
- BellN68 BELLMORE, M.- NEMHAUSER, G.L. *The travelling salesman problem. A survey*. Operation Res. 16 (1968), 538/558. M.R. 38 # 3027.
- Ben86 BENHOCINE, A. *Pancyclism and Meyniel's conditions*. Discrete Math. 58 (1986), 113/120. M.R. 87g # 05136. Zb. 585 # 05008.
- BenW87 BENHOCINE, A.- WOJDA, A.P. *The Geng-Hua Fan conditions for pancyclic or Hamilton-connected graphs*. J. Comb.Th. B 42 (1987), 167/180. Zb. 613 # 05038.
- *Ber58 BERGE, C. *Théorie des graphes et ses applications*. Dunod (1958-63-67). M.R. 21 # 1608. Zb. 88 pg. 154.
The theory of graphs and its applications. Meuthen (1962). M.R. 24A # 2381.
Teoría de las redes y sus aplicaciones. C.E.C.S.A. (1967).

- *Ber67a BERGE, C. *Contributions de la théorie des graphes à l'étude des relations d'ordre*. Intern. Comput. Centre (ICC) Research Report 67/11 (1967), 1/57.
- Ber67b BERGE, C. (Edit.) *Théorie des Graphes*. Journées Internationales d'Étude - Rome 1966. Dunod-Gordon Breach, (1967).
- *Ber70 BERGE, C. *Graphes et hypergraphes*. Dunod (1970-73). M.R. 50 # 9639 / 41. Zb. 213 pg. 257.
Graphs and hypergraphs. North Holland (1973). M.R. 50 # 9640. Zb. 254 # 05101.
- Ber72 BERGE, C. *Alternating chain methods. A survey*. en [Read72], 1/13. M.R. 50 # 9685.
- *Ber73 BERGE, C. *Introduction à la théorie des hypergraphes*. Presses Univ. Montreal (1973). M. R. 50 # 1888.
- *Ber85 BERGE, C. *Graphs* (1ra. parte de Ber70). North Holland (1985). M.R. 87e # 05050.
- *Ber87 BERGE, C. *Hypergraphes*. (2da. parte de Ber70). Dunod (1987). M.R. 88i # 05139.
Hypergraphs. (2da. parte de Ber70). North Holland (1989). M.R. 90h # 05090.
- Ber88 BERGE, C. *Hypergraphs*. Cap. 9 de [BeiW88], 189/206.
- *BerGH62 BERGE, C.- GHOUILA-HOURI, A. *Programmes, jeux et réseaux de transport*. Dunod (1962). M.R. 33 # 1137.
Programming, games and transportations networks. Methuen J.Wiley (1965). M.R. 33 # 7114.
Programas, juegos y sistemas de transporte. C.E.C.S.A. (1965).
- Berm78 BERMOND, J.C. *Hamiltonian graphs*. Cap. 6 de [BeiW78], 127/167.
- BermTh81 BERMOND, J.C.-THOMASSEN, C. *Cycles in digraphs. A survey*. J. Graph Theory 5 (1981), 1/43. M.R. 82k # 05053. Zb. 458 # 05035.
- *Bert65 BERTIER, P. *Les problèmes de distribution et de collecte*. SEMA-Rap. Rech. 11 (1965).
- *Bert66 BERTIER, P. *Procédures pour élaborer des tournées de distribution*. METRA- 8 (1966).
- *Big74 BIGGS, N. L. *Algebraic Graph Theory*. Cambridge Univ.Press (1974). M.R. 50 # 151.
- *BigLW76 BIGGS, N. L.- LLOYD, E. K.- WILSON, R. J. *Graph theory 1736-1936*. Oxford Univ. Press (1976/86). M.R. 88e # 01035. Zb. 595 # 05003.
- BilK69 BILDE, O.- KRARUP, J. *A modified cascade algorithm for shortest paths*. METRA Vol VIII-2 (1969), 231/241.

- Boll66 BOLLOBÁS, R. *Extremal graph theory*. Cap. 23 de [GraGL66], 1231/1293.
- *Boll78 BOLLOBÁS, B. *Extremal graph theory*. Acad.Press (1978). M.R. 80a # 05120. Zb. 419 # 05031.
- *Boll79 BOLLOBÁS, B. *Graph theory. An introductory course*. Springer-Verlag (1979/90). M.R. 80j # 05053. Zb. 411 # 05032.
- *Boll85 BOLLOBÁS, B. *Random graphs*. Acad. Press (1985). M.R. 87f # 05152.
- Bon66 BONDY, J.A. *Basic graph theory. Paths and circuits*. Cap. 1 de [GraGL66], 3/110.
- Bon69 BONDY, J.A. *Properties of graphs with constraints on degrees*. Studia Sci. Math. Hungar. 4 (1969), 473/475. M.R. 43 # 7354.
- Bon71a BONDY, J.A. *Pancyclic graphs*. Proc.Second Louisiana Conf. 1971 (Edit. R. Mullin y otros). Congressus Numerantium III (1971), 80/84. M.R. 48 # 3805.
- Bon71b BONDY, J.A. *Pancyclic graphs I*. J. Comb. Th. B 11 (1971), 80/84. M.R. 44 # 2642. Zb. 183 pg. 523.
- Bon71c BONDY, J.A. *Large cycles in graphs*. Discrete Math. 1 (1971), 121/132. M.R. 44 # 3903. Zb. 224 # 05120.
- Bon75 BONDY, J.A. *Pancyclic graphs, recent results*. Infinite and finite sets. Vol.1- (Edit. Hajnal) North Holland. (1975), 181/188. M.R. 51 # 10157. Zb. 324 # 05115.
- Bon91 BONDY, J.A. *A graph reconstructor's manual*. Surveys in Combinatorics (1991), 221/252 (Edit. A. Keedwell) London Math. Soc. Lect. Notes 166. M.R. 93e # 05071 Zb. 741 # 05052.
- BonCh76 BONDY, J.A.- CHVÁTAL, V. *A method in graph theory*. Discrete Math. 15 (1976), 111/135. M.R. 54 # 2531. Zb. 331 # 5138.
- BonHa86 BONDY, J.A.- HALBERSTAM, F.Y. *Parity theorems for paths and cycles in graphs*. J. Graph Theory 10 (1986), 107/115. M.R. 87f # 05097. Zb. 594 # 05041.
- BonHe77 BONDY, J.A.- HEMMINGER, R.L. *Graph reconstruction. A survey*. J. Graph Theory 1 (1977), 227/268. M.R. 58 # 372. Zb. 375 # 05040.
- BonI76 BONDY, J.A.- INGLETON, A.V. *Pancyclic graphs, II*. J. Comb. Th. B-20 (1976), 41/46. M.R. 53 # 5366. Zb. 294 # 05121.
- *BonM76 BONDY, J.A.- MURTY, U.S.R. *Graph theory with applications*. Amer. Elsevier Publ. (1976/77). M.R. 54 # 117.
- BonTh77 BONDY, J.A.- THOMASSEN, C. *A short proof of Meyniel's theorem*. Discrete Math. 19 (1977), 195/197. Zb. 368 # 05029.

- Bos67 BOSÁK, J. *Hamiltonian lines in cubic graphs.* en [Ber67b], 35/46. M.R. 36 # 5022.
- Bose63 BOSE, R. C. *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs.* Pacific J. Math. 13-2 (1963), 389/419. M.R. 28 # 1137.
- BraL63 BRAUN, L. (Jr.) - LYNCH, W.A. *The art of formulating signal flow graphs.* Adaptive Control Systems. Proc. Symp. Garden City 1960. (Edit. F.P. Caruthers-H. , H. Levenstein). The Mac Millan Co. (1963), 35/68.
- BriD85 BRIGHAM, R.C.- DUTTON, R.D. *A compilation of relations between graph invariants.* Networks 15 (1985), 73/107. M.R. 86d # 05105.
- Bru82 BRUALDI, R. A. *Matrices, eigenvalues and directed graphs.* Linear and Multilinear Algebra. 11-2 (1982), 143/165. M.R. 84h #05086.
- Bru91 BRUALDI, R.A. *Graphs and matrices.* Cong. Numer 83 (1991), 129/145 M.R. 93a # 05088.
- Bru92 BRUALDI, R.A. *The symbiotic relationship of combinatorics and matrix theory.* Linear Algebra and its Applications (1992), 65/105. M.R. 93a # 01035.
- *BruR91 BRUALDI, R.A.- RYSER, H.J. *Combinatorial matrix theory.* Cambridge Univ. Press (1991). M.R. 93a # 05087.
- BruS81 BRUALDI, R.A.- SHANNY, R.F. *Hamiltonian line graphs.* J. Graph Th. 5 (1981), 307/314. M.R. 83b # 05088.
- Bruc63 BRUCK, R. H. *Finite nets II. Uniqueness and imbedding.* Pacific J. Math. 13-2 (1963), 421/457. M.R.27 # 4768.
- BruI46 BRUIJN de, N.G. *A combinatorial problem.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 49 (1946), 758/764.
Idem Indagat. Math. 8 (1946), 461/467. M.R. 8 pg 247. Zb. 60 pg. 27.
- BruI59 BRUIJN de, N.G. *Generalization of Pólya's fundamental theorem on enumerative combinatorial analysis.* Nederl. Akad. Wet. Proc. Ser. A 62 (1959), 59/69.
Idem Indagat. Math. 21 (1959), 59/69. M.R. 21 # 4112. Zb. 85 pg. 9.
- BruI64 BRUIJN de, N.G. *Pólya's theory of counting.* en [Beck64], 144/184.
- BruI75 BRUIJN de, N.G. *Acknowledgement of priority to C. Flye Sainte-Marie on the counting of circular arrangements of 2^n zeros and ones that show each n -letter word exactly once.* Technological Univ. Eindhoven, Netherland. Report WSK 06 (1975). Zb.323 # 05119
- *Brut70 BRUTER, C. P. *Les matroïdes. Nouvel outil mathématique.* Dunod (1970).
- *Brut74 BRUTER, C.P. *Éléments de la théorie des matroïdes.* Lect. Notes in Math. 387. Springer-Verlag (1974).

- Bry67 BRYANT, P.R. *Graph theory applied to electrical networks*. Cap.3 de [Har67a], 111/137.
- Bry79 BRYANT, P.R. *Graph theory and electrical networks*. Cap.4 de [WilB79], 81/119.
- *Brya93 BRYANT, V. *Aspects of combinatorics*. Cambridge Univ. Press (1993).
- *BryIK78 BRYLAWNSKY, T.- KELLEY, D.G. *Matroids and combinatorics geometry*. en [Rota78], 179/217.
- *Buch90 BUCKLEY, F. HARARY, F. *Distance in graphs*. Addison-Wesley (1990). Zb.688 # 05017.
- *BusS65 BUSACKER, R. G.- SAATY, T. L. *Finite graphs and networks. An introduction with applications*. Mc.Graw Hill Co.(1965). M.R. 35 # 79. Zb. 146 pg. 201.

C

- Cam78 CAMERON, P.J. *Strongly regular graphs*. Cap. 12 de [BeiW78], 337/360.
- Cam83 CAMERON, P.J. *Automorphism groups of graphs*. Cap. 4 de [BeiW83], 89/127. M.R. 86i # 05079.
- *CamL75 CAMERON, P.J.- LINT van, J.H. *Graph theory, coding theory and block designs*. Notes 19 London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1975/80). M.R. 53 # 10608
- *CamL80 CAMERON, P.J.- LINT van, J.H. *Graph, codes and designs*. Notes 43 London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1980). M.R. 82d # 05002.
- *CamL91 CAMERON, P.J.- LINT van, J.H. *Designs, graphs, codes and their links*. London Math.Soc.-Student Texts 22. Cambridge Univ. Press (1991). M.R. 93c # 05001.
- CamCR85 CAMERON, P.J.- COLBOURN, C.J.- READ, R.C.- WORMALD, N.C. *Cataloguing the graphs on 10 vertices*. J. Graph Theory 9 (1985), 551/562. M.R. 88e # 5055.
- Cami60 CAMION, P. *Quelques propriétés des chemins et circuits hamiltoniens dans la théorie des graphes*. Cahiers Centre d'Études Rech. Opérat. (CERO) 2 (1960), 5/36. M.R. 22 # 4645.
- Cami65 CAMION, P. *Characterization of totally unimodular matrices*. Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 1068/1073.
- Cami68 CAMION, P. *Modules unimodulaires*. J. Comb. Th. 4 (1968), 301/362.
- Cami73 CAMION, P. *Une propriété des circuits hamiltoniens des graphes complets anti-symétriques*. Cahiers Centre d'Études Rech. Opérat. (CERO) 15 (1973), 225/228. M.R. 50 # 170.

- *CapM78 CAPOBIANCO, M.- MOLLUZZO, J. C. *Examples and counterexamples in graph theory*. North Holland (1978). M.R. 58 # 10536
- CarsL77 CARSON, J.S.- LAW, A.M. *A note on Spira's algorithm for all pairs shortest paths problem*. SIAM J. Computing 6-4 (1977), 696/699.
- Cay57 CAYLEY, A. *On the theory of the analytical forms called trees*. Philos. Magaz. 13 (1857), 172/176.
Idem Collected Math. Papers Cambridge Vol.3 (1890), 242/246.
- Cay75 CAYLEY, A. *On the analytical forms called trees, with applications to the theory of chemical combinations*. Report. British Assoc. for Adv. of Science (1875), 257/305.
Idem Collected Math. Papers Cambridge Vol.9 (1895), 427/460.
- Cla74 CLAPHAM, C.R.J. *Hamiltonian arcs in selfcomplementary graphs*. Discrete Math. 8 (1974), 251/255. M.R. 49 # 133.
- Coa59 COATES, C. *Flow graphs solutions of linear algebraic equations*. I.R.E.Trans.Circuit Theory CT-6 (1959), 170/187.
- Cop64 COPPERMAN, E.N. *Les programmes PERT*. Revue Franç. Rech. Opérat. (RFRO) 8ème année- 30. (1964), 69/78.
- *CouR41 COURANT, R. ROBBINS, H. *What is mathematics ?* Oxford Univ. Press (1941/43)
. *¿ Qué es la Matemática ?* Edit. Aguilar - ALDA (4a edición 1964).
- Cox59 COXETER, H.S.M. *The four colour map problem 1890-1940*. The Math.Teacher 52 (1959), 283/289.
- Cro56 CROWE, D.W. *The n-dimensional cube and the tower of Hanoi*. The Amer.Math. Monthly 63 (1956), 29/30.
- CveDS79 CVETKOVIC, D.M.- DOOB, M.- SACHS, H. *Spectra of Graphs.Theory and Applications*. Acad. Press (1979) / VEB Deutscher (1982). M.R. 84a # 05046.
Zb.458 # 05042.
- CveDS81 CVETKOVIC, D.M.- DOOB, M.- SIMIC, S. *Generalized line graphs*. J.Graph Th. 5 (1981), 385/399. M.R. 82k # 05091. Zb, 475 # 05061.
- *CveDG88 CVETKOVIC, D.M.- DOOB, M.- GUTMAN, I.-TORGASEV, A. *Recent results in the theory of graphs spectra*. North Holland (1988). M.R. 89d # 05130.

Ch

- *ChaGM79 CHACHRA, V.- GHARE, P.M.- MOORE, P. *Applications of Graph Theory and Algorithms*. North Holland (1979).
- *Char64 CHARTRAND, G. *Graphs and their associated line-graphs*. Michigan State Univ. Thesis Ph. D. (1964)

- Char65 CHARTRAND, G. *The existence of complete cycles in repeated line-graphs*. Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965), 668/670. M.R. 31 # 82.
- Char68 CHARTRAND, G. *On hamiltonian line-graphs*. Trans. Amer. Math. Soc. 134.(1968), 559/566. M.R. 38 # 68. Zb. 169 pg.554.
- CharKa69 CHARTRAND, G.- KAPOOR, S. F. *The cube of every connected graph is 1-hamiltonian*. J. Res. Nat. B Stan. 73B (1969), 47/48.
- CharKr68 CHARTRAND, G.- KRONK, H.V. *Randomly traceable graphs*. SIAM J. Appl. Math. 16 (1968), 696/700. M.R. 38 # 3166.
- *CharL79 CHARTRAND, G.- LESNIAK, L. *Graphs and digraphs*. Wadsworth Brooks (1979)
- CharLi71 CHARTRAND, G.- LICK, D.R. *Randomly eulerian digraphs*. Czechosl. Math. J. 21 (1971), 424/430. M.R. 44 # 5250. Zb. 221 # 05066.
- CharW73 CHARTRAND, G.- WALL, C. E. *On the hamiltonian index of a graph*. Studia Sci. Math. Hungar. 8 (1973), 43/48. M.R. 49 # 131. Zb. 279 # 05121.
- CharW70 CHARTRAND, G.- WHITE, A.T. *Randomly traversable graphs*. Elem. Math. 25 (1970), 101/107. M.R. 44 # 2644. Zb. 199 pg. 274.
- CharW85 CHARTRAND, G.- WILSON, R.J. *The Petersen graph*. Graph theory and applications (Edit. F.Harary- J.S.Maybee) J. Wiley, (1985), 69/100. M.R. # 86d 05106. Zb 554 # 05058.
- CharKK73a CHARTRAND, G.- KAPOOR, S.F.- KRONK, H.V. *The hamiltonian hierarchy*. Western Michigan Univ. Math. Report 32 (1973).
- CharKK73b CHARTRAND, G.- KAPOOR, S.F.- KRONK, H.V. *The many facets of hamiltonian graphs*. (1ra parte de CharKK73a) The Mathematics Student XLI 3 (1973), 327/336 M.R. 53 # 536.
- CharKL69 CHARTRAND, G.- KRONK, H.V.- LICK, D.R. *Randomly hamiltonian digraphs*. Fund. Math. LXV-2 (1969), 223/226. M.R. 40 # 57.
- CharPS73 CHARTRAND, G.- POLIMENI, A.D.- STEWART, M.J. *The existence of 1-factors in line-graphs, squares and total graphs*. Nederl Akad. Wetensch. Proc. Ser A 76. Idem Indag. Math. 35 (1973), 228/232. M.R. 48 # 176.
- CharHJ74 CHARTRAND, G.- HOBBS, A.- JUNG, H.- KAPOOR, S.- NASH WILLIAMS, C. St. *The square of a block is hamiltonian connected*. J. Comb. Th.B 16(1974),290/292. M.R. 49 # 10595. Zb. 277 # 05129.
- *Chen71a CHEN, W. K. *Applied graph theory. Graphs and electrical networks*. North Holland (1971/76). M.R. 48 # 3620 / 57 # 11940.

- Chen71b CHEN, W.K. *On vector spaces associated with a graph*. SIAM J. Appl. Mat. 20 (1971), 526/529. M.R. 44 # 3905
- Chi71 CHIAPPA, R.A. *Sur les graphes adjoints*. Rev Unión Mat. Arg. 25 (1971), 299/302. M.R. 51 # 239. Zb. 293 # 05124.
- Chi75 CHIAPPA, R.A. *Caractérisation des graphes adjoints hamiltoniens*. Math. Japon. 20 (1975), 53/56. M.R. 53 # 196. Zb. 315 # 05122.
- Chi79 CHIAPPA, R.A. *Sur la notion d'adjoint aux graphes orientés et aux graphes non orientés*. Rend. Mat. 12 (1979), 85/104. M.R. 80m # 05091. Zb. 425 # 05048.
- *Chi82 CHIAPPA, R.A. *Palabras circulares equilibradas. Grafos adjuntos*. Notas de Matemática Discreta Nro.1, INMABB - Univ.Nac.del Sur (1982), 1/128. M.R. 84d # 05109. Zb. 502 # 05053.
- Chi89 CHIAPPA, R. A. *Algunas motivaciones históricas en la Teoría de Grafos*. Rev. de Educación Matemática. (REM) Vol 4 - Nro 1 (1989), 37/54.
- *Chi91 CHIAPPA, R.A. *Temas de la Teoría de Grafos – I – Nociones básicas*. Informe Técnico Interno Nro. 29. INMABB - Univ.Nac. del Sur (1991), 1/53.
- Chi92 CHIAPPA, R.A. *Una caracterización de los digrafos k-adjuntos carentes de entradas y de salidas*. Actas 1er.Congreso Dr. A. Monteiro – Agosto, 1991. Univ. Nac. del Sur (1992), 85/101. Zb.794 # 05110.
- *Chi93 CHIAPPA, R.A. *Teoría de flujos canalizados*. Publicación Nro. 153 Fac. de Filosofía, Humanidades y Arte. Univ. Nac. de San Juan (1993), 1/116.
- *Chi94 CHIAPPA, R.A. *Recuento y enumeración de caminos y de cadenas elementales*. Notas de Matemática Discreta Nro. 2, INMABB - Univ. Nac. del Sur (1994), 1/43. M.R. 95h # 05094.
- *Chi95 CHIAPPA, R.A. *Temas de la Teoría de Grafos – II – Transitabilidad – I.-* Informe Técnico Interno Nro. 48. INMABB - Univ. Nac. del Sur, (1995), 1/65.
- *Chi96 CHIAPPA, R.A. *Temas de la Teoría de Grafos – II – Transitabilidad – II.-* Informe Técnico Interno Nro. 55. INMABB - Univ. Nac. del Sur (1996), 1/56.
- *Chi97 CHIAPPA, R.A. *Grafos*. "XVIII Jornadas de Resolución de Problemas OMA "- Olimpiada Matemática Argentina (1997), 1/58.
- ChiO68 CHIAPPA, R.A.- OKLANDER, E.T. *Une solution d'un problème sur les mots circulaires et équilibrés*. Math.et Sci. Hum. 21 (1968), 53/55.

- *ChiM91 CHIAPPA, R.A.- MACCARI, A.L. *Recopilación bibliográfica comentada de trabajos sobre grafos totales*. Informe Técnico Interno Nro. 28. INMABB - Univ. Nac. del Sur. (1991), 1/45.
- *ChiS99 CHIAPPA, R.A.- SANZA, C.A. *Una introducción a grafos y matrices*. EDIUNS- Editorial Univ.Nac. del Sur (1999). Idem en Red Olímpica Argentina (2004).
- *ChiZ87 CHIAPPA, R.A.- ZILIANI, A.N. *Recopilación bibliográfica de trabajos sobre grafos adjuntos y totales*. Informe Técnico Interno Nro.10. INMABB - Univ. Nac. del Sur. (1987), 1/52.
- Chou86 CHOUDUM, S.A. *A simple proof of the Erdős-Gallai theorem on graphs sequences*. Bull. Austral Math. Soc. 33 (1986), 67/70. M.R. 87c # 05100.
- Chv72 CHVÁTAL, V. *On Hamilton's ideals*. J. Comb. Th. B 12 (1972), 163/168. M.R. 45 # 3228.
- Chv73b CHVÁTAL, V. *New directions in hamiltonian graph theory*. en [Har73a], 65/95. M.R. 50 # 9689. Zb. 271 # 05120.
- ChvL74 CHVÁTAL, V.- LOVASZ, L. *Every directed graph has a semi-kernel*. Lect. Notes in Math 411. Springer-Verlag (1974), 175. M.R. 54 # 2514.

D

- Dam73 DAMERELL, R. *On Moore graphs*. Proc. Cambridge Philosop. Soc. 74(1973), 227/236.
- Dan60 DANTZIG, G.B. *On the shortest route through a network*. Management Science 6 (1960), 187/189.
- Dan67 DANTZIG, G.B. *All shortest routes in a graph*. en [Ber67b], 91/92. M.R. 36 # 5033. Zb. 189 pg. 241.
- Dan75 DANTZIG, G.B. *On the shortest route through a network*. en [Ful75a], 89/93.
- DanBR67 DANTZIG, G.B.- BLATTNER, W.O.- RAO, M.R. *All shortest routes from a fixed origin in a graph*. en [Ber67b], 85/90. M.R. 36 # 5032. Zb. 189 pg. 241.
- DanFJ54 DANTZIG, G. B.- FULKERSON, D.- JOHNSON, S. *Solution of a large-scale traveling salesman problem*. J. Oper. Res. Soc. Amer 2 (1954), 393/410. M.R. 17 pg. 58.
- DanFJ59 DANTZIG, G. B.- FULKERSON, D.- JOHNSON, S. *On a linear programming combinatorial approach to the traveling salesman problem*. JORSA 7 (1959), 58/66.
- DenF79 DENARDO, E.V.- FOX, B.L. *Shortest route methods Reaching, Pruning, and Buckets*. Operat. Research 27 (1979), 161/186.

- *Deo74 DEO, N. *Graph theory with applications to engineering and computer science*. Prentice Hall (1974). M.R. 50 # 12772. Zb. 285 # 05102.
- *DerP71 DERNIAME, J.C.- PAIR, C. *Problèmes de cheminement dans les graphes*. Monographies d' Informatique, AFCET-DUNOD (1971). Zb. 243 # 05117.
- Des60 DESOER, C. *The optimum formula for the gain of a flow graph or a simple derivation of Coates's formula*. Proc. IRE 48 (1960), 883/889.
- *Dib70 DIBON, M.L. *Ordonnement et potentiels. Méthode M.P.M.* Herman (1970).
- *Die96 DIESTEL, R. *Graphentheorie*. Springer-Verlag (1996).
Graph Theory. Springer-Verlag (1997).
- Dij59 DIJKSTRA, E.W. *A note on two problems in connexion with graphs*. Numer. Math.1 (1959), 269/271. M.R. 21 # 6334.
- Dir52 DIRAC, G.A. *Some theorems on abstract graphs*. Proc. London Math. Soc. Third Series Vol.II-(5)-(1952), 69/81. M.R. 13 pg 856.
- Dir72a DIRAC, G.A. *On arbitrarily traceable graphs*. Math. Scand. 31 (1972), 319/378. M.R. 49 # 135.
- Dir72b DIRAC, G.A. *On hamilton circuits and hamilton paths*. Math. Ann. 197 (1972), 57/70. M.R. 46 # 1644. Zb. 222 # 05114.
- *Dor70 DOREIAN, P. *Mathematics and study of social relations*. Weidenfeld Nich.(1970).
Las matemáticas y el estudio de las relaciones sociales. Vicens-Vives (1973).
- Dre69 DREYFUS, S.E. *An appraisal of some shortest-path algorithms*. Oper. Res. 17 (1969), 395/412.
- Duf75 DUFFIN, R.J. *Electrical network models*. en [Ful75a], 94/138.
- Duch66 DUCHET, P. *Hypergraphs*. Cap. 7 de [GraGL66], 381/432.
- DulM67 DULMAGE, A.L.- MENDELSON, N.S. *Graphs and Matrices*. Cap. 6 de [Har67a], 167/227. M.R. 40 # 5468. Zb. 204 pg. 244.
- DulM69 DULMAGE, A.L.- MENDELSON, N.S. *Some graphical properties of matrices with non-negative entries*. Aequations Math. 2 (1969), 150/162. Zb. 174 pg. 267.

E

- Edm65a EDMONDS, J. *Paths, trees and flowers*. Canad. J. Math. 17 (1965), 449/467.
- Edm65b EDMONDS, J. *The chinese postman's problem*. Operat. Research, Bulletin Supp. 1 Vol.13 (1965), Abstract C-47, pg. B-73

- EdmJ73 EDMONDS, J.- JOHNSON, E.L. *Matching. Euler tours and the chinese postman.* Math. Programming, 5 (1973), 88/124. M.R. 48 # 168.
- EdmK72 EDMONDS, J.- KARP, R.M. *Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problem.* J. Assoc. Comp. Mach. (JACM) 2 (1972), 248/264.
- Eger31 EGERVÁRY, E. *Matrix kombinatorius tulajdonságairol.* Mat Fis. Lapok 38 (1931), 16/28. (traducción en : *On combinatorial properties of matrices.* Off. Naval Research Logistics Project. Princeton Univ. (1953).
- EntS88 ENTRINGER, R.C.- SCHMEICHEL, E.F. *Edge conditions and cycle structure in bipartite graphs.* Ars Combin. 26 (1988), 229/232. M.R. 89m # 05069. Zb. 676 # 05052.
- ErdG59 ERDÖS, P.- GALLAI, T. *On maximal paths and circuits of graphs.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar X (1959), 337/356. M.R. 22 # 5591. Zb. 90 pg. 394.
- ErdG60 ERDÖS, P.- GALLAI, T. *Graphs with prescribed degrees of vertices.* Mat. Lapok 11 (1960), 264/274. (en húngaro).
- ErdR60 ERDÖS, P.- RÉNYI, A. *On the evolution of random graphs.* Publ. Math. Inst. Hung.CAD. Sci. 5 (1960), 17/61.
- ErdS35 ERDÖS, P.- SZEKERES, A. *On a combinatorial problem in geometry.* Compositio Math. 2 (1935), 463/470. Reimpreso en *The art of Counting. Selected Writings* (Edit. J.Spencer). MIT Press, Cambridge, 1973.
- ErdGV38 ERDÖS, P.- GRÜNWARD, T.- VÁZSONYI. *Über Euler-Linien unendlicher Graphen.* (M.I.T.) J. Math. Physics 17 (1938), 59/75. Zb 19 pg. 236.
- ErdRS66 ERDÖS, P.- RÉNYI, A.- SÓS, V.T. *On a problem of graph theory.* Studia Sci.Math. Hungar. 1 (1966), 215/235. M.R. 36 # 6310. Zb. 144 pg. 233.
- Eri75 ERICKSON, D,B. *Arbitrarily traceable graphs and digraphs.* J. Comb. Th. B 19 (1975), 5/23. M.R. 53 # 2749.
- Eul36 EULER, L. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis.* Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, Petrograd. Vol. VIII (1736), 128/140. Idem Opera Omnia Vol. 7, 1766, 1/10. Reproducido en [Kön36]-Edic.1986, y en [Fle90].
- Eul53 *Leonhard Euler and the Königsberg bridges.* Scientific American 189, July (1953), 66/70

F

- Fan84 FAN, G.H. *New sufficient conditions for cycles in graphs.* J.Comb. Th. B 37 (1984), 221/227. M.R. 86c # 05083. Zb. 551 # 05048.

- FarLM67 FARBEY, B.A.- LAND, H.- MURCHLAND, J.D. *The cascade algorithm for finding all shortest distances in a directed graph.* Manag. Science 14 (1967), 19/28.
- *FauRt76 FAURE, R.- ROUCAIROL, C.- TOLLA, P. *Chemins et flots. Ordonnements.* Gauthiers-Villars (1976). M.R. 56 # 7765.
- *Fla63 FLAMENT, C. *Applications of graph theory to group structure .* Prentice Hall (1963). *Teoría de grafos y estructuras de grupo.* Edit. Tecnos (1972). M.R. 28 # 1014.
- *Fla65 FLAMENT, C. *Théorie des graphes et structure sociales.* Gauthiers-Villars (1965), M.R. 36 # 5018.
- Fle71a FLEISCHNER, H.J. *Über Hamiltonsche Linien in Quadrat kubischer und pseudo-kubischer Graphen.* Math. Nachrichten 49 (1971),163/171. Zb. 192 pg.607.
- Fle71b FLEISCHNER, H.J. *The square of every nonseparable graph is hamiltonian.* Bull. Amer. Math. Soc. 77-6- (1971), 1052/1054. M.R. 44 # 1592. Zb. 223 # 5124.
- Fle74a FLEISCHNER, H.J. *On spanning subgraphs of a connected bridgeless graph and their application to DT-graphs.* J. Comb. Th. B 16 (1974), 17/28. M.R. 48 # 10899a. Zb. 256 # 05120.
- Fle74b FLEISCHNER H.J. *The square of every two-connected graph is hamiltonian..* J. Comb. Th. B 16 (1974), 29/34. M.R. 48 # 10899b. Zb. 256 # 05121.
- Fle76 FLEISCHNER, H.J. *In the square of graphs, Hamiltonicity and pancyclicity, Hamiltonian connectedness and panconnectedness are equivalent concepts.* Monatsh Math 82 (1976), 125/149. M.R. 55 # 171.
- Fle83a FLEISCHNER, H.J. *A way of enumerating Eulerian trails in a connected Eulerian graph.* Ars Comb. 16 (1983) B, 177/196. M.R. 85d # 5134. Zb. 536 # 05039.
- Fle83b FLEISCHNER, H.J. *Eulerian graphs.* Cap. 2 de [BeiW83], 17/53. M.R. 86k # 05079. Zb. 522 # 05041.
- Fle89 FLEISCHNER, H.J. *Elementary proofs of relatively recent characterizations of Eulerian graphs.* Discrete Appl. Math. 24 (1989), 115/119. M.R. 90f # 05089, Zb. 679 # 05050.
- *Fle90 FLEISCHNER, H.J. *Eulerian graphs and related topics (Part 1 Vol.1)* North Holland (1990). M.R. 91g # 05086.
- *Fle91 FLEISCHNER, H.J. *Eulerian graphs and related topics (Part 1 Vol.2)* North Holland (1991). M.R. 92 f # 05066.
- FleH75 FLEISCHNER, H.J.- HOBBS, A. *A necessary condition for the square of a graph to be hamiltonian.* J. Comb.Th. B 19 (1975), 97/118. M.R. 54 # 2535. Zb. 315 # 05120.
- Flo56 FLOOD, M.M. *On the travelling salesman problem.* Operat. Res. 4 (1956), 61/75.

- Floyd62 FLOYD, R.W: *Algorithm 97. Shortest path.* Comm. J. Assoc.Comp. Mach. (JACM) 5 (1962), 345.
- Flye94 FLYE SAINTE-MARIE, C. *Solution to question N° 48.* L'Intermédiaire des Mathématiciens 1 (1894), 107/110.
- For56 FORD, L.R. *Network flow theory.* RAND Corp. Paper 923 (1956).
- ForF57 FORD, L.R.- FULKERSON, D.R. *Solving the transportation problem.* Mannag. Science Vol.3 Nro.1 (1957). Zb. 397 # 90093.
- *ForF62 FORD, L.R.- FULKERSON, D.R. *Flots in networks.* Princenton Univ. Press (1962). M.R. 28 # 2917.
Flots dans les graphes. Gauthier Villars (1967).
- Foul63 FOULKES, H.O. *On Redfield's group reduction functions.* Canad. J. Math. 15 (1963), 272/284. M.R. 26 # 6239.
- Fouq78 FOUQUET, J.L. *Problèmes hamiltoniens dans les puissances des graphes.* Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes. Proc. Coll. Orsay CNRS Publ. (1978), 145/147.
- Frae70 FRAENKEL, A.S. *Economic traversal of labyrinths.* Math. Magazine 43 (1970), 125/130. [Correction Math. Mag. 44 (1971, 12)]. M.R. 42 pg.106 // 45 # 3230. Zb. 204 pg. 246.
- FraICD66 FRALEY, R.- COOKE, K.- DETRICK, P. *Graphical solution of difficult crossing puzzles.* Math. Mag. 39 (1966), 151/157.
- *FranF71 FRANK, H. - FRISCH, L.T. *Communication, transmission and transportation networks.* Addison-Wesley (1971). M.R. 49 # 12063.
- *FréKF46 FRÉCHET, M.- KY FAN, A. *Introduction à Topologie Combinatoire.* Vuibert (1946) *Initiation to combinatorial topology.* Prindle, Weber, Schmit (1967). *Introducción a la Topología Combinatoria.* EUDEBA (1959).
- Fru38 FRUCHT, R. *Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe.* Compositio Math. 6 (1938), 239/250. Zbl. 20 pg. 78.
- Fru49 FRUCHT, R. *Graphs of degree three with a given abstract group.* Canad. J. Math.1 (1949), 365/378. M.R. 11 pg. 377.
- Ful75a FULKERSON, D.R. (Edit.) *Studies in graph theory (Part I –II)* Vol.11--12 de MAA Studies in Mathematics. The Math. Assoc. of America, (1975).
- Ful75b FULKERSON, D.R. *Flow networks and combinatorial operations research.* en [Ful75a], 139/171.

G

- Gab76 GABOW, H.N. *An efficient implementation of Edmond's algorithm for maximum matchings on graphs.* J. Assoc. Comput. Mach. (JACM) 23 (1976), 221/234.
- Gall67 GALLAI, T. *Transitiv orientierbare Graphen.* Acta Math. Acad. Scient. Hung. 18 (1967), 25/66. M.R. 36 # 5026. Zb.153 pg. 260.
- GallP82 GALLO, G.- PALLOTINO, S. *A new algorithm to find the shortest path between all pair o nodes.* Discrete Appl. Math. 4 (1982), 23/35. M.R. 83k # 90043.
- GallP86 GALLO, G.- PALLOTINO, S. *Shortest path methods. A unifying approach.* en [GallS86], 38/64.
- *GallS86 GALLO, G.- SANDI, C. (Edit.) *Network at Pisa.* North Holland (1986). M.R. 87a # 90057.
- Gard60 GARDNER, M. *The celebrated four-color map problem of topology.* Scientific American 203, Mars (1960), 218/226. M.R. 22 # 5040.
- *Gard62 GARDNER, M. *Mathematical puzzles and diversions.* Simon and Schuster (1962) *Problèmes et divertissements mathématiques.* Dunod (1964).
- Gard77 GARDNER, M. *In which joining sets of points by lines leads into diverse (and diver-ting) paths.* Scientific American 237, November (1977), 18/28.
- *GareJ79 GAREY, M.R.- JOHNSON, D.S. *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness.* Freeman (1979). M.R. 80 g # 68056. Zb. 411 # 68039.
- GareJT76 GAREY, M. R.- JOHNSON, D. S.- TARJAN, R.E. *The planar hamiltonian circuit problem is NP-complete.* SIAM J. Comput. 5 (1976), 704/714.
- GarKQ89 GARGANO, M.- KENNEDY, J.W.- QUINTAS, L.V. *Irregular digraphs.* Congr. Number. 72 (1990), 223/231. M.R. 92 c # 05069.
- *GavS80 GAVRILOV, G.P.- SAPOZHENKO, A. *Problemas matemática discreta.* MIR (1980)
- *Ger82 GERSTING, J.L. *Mathematical structures for computer science.* W. H. Freeman and Co. (1982/87).
- GhoH60 GHOUILA HOURI, A. *Une condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien.* C. R. Acad. Sci. Paris 251 (1960), 495/497. M.R. 22A # 5590.
- GhoH62a GHOUILA HOURI, A. *Caractérisation des graphes non orientés dont on peut ori- enter les arêtes de manière à obtenir le graphe d'une relation d'ordre.* C. R. Ac. Sc. Paris 254 (1962), 1370/71. M.R.30 # 2495. Zb.105 pg.355.
- GhoH62b GHOUILA HOURI, A. *Caractérisation des matrices totalement unimodulaires.* C. R. Acad. Sc. Paris 254 (1962), 1192.

- GilmH64 GILMORE, P.C.- HOFFMAN, A. J. *A characterization of comparability graphs and interval graph.* *Canad. J. Math.* 16 (1964), 539/548. M.R. 31 # 87. Zb. 121 pg. 260.
- GoIMN77 GOLDEN, B.- MAGNANTI, T.- NGUYEN, H. *Implementing vehicle routings algorithm.* *Networks* 7 (1977), 113/148.
- Gon75 GONDRAN, M. *Algèbre linéaire et cheminement dans un graphe.* *Rev. Franç. d'Aut Inf. et Rech. Opért. RAIRO- V-1* (1975), 77/99. M.R. 51 # 7941. Zb. 311 # 90071.
- *GonM79 GONDRAN, M.- MINOUX, M. *Graphs and algorithms.* J. Wiley (1979/84). *Graphes et algorithmes.* (2da. Edic. revisada y aumentada). Eyrolles (1985). M.R. 82g # 68059 // 85d # 90037. Zb. 497 # 05023 // 611 # 90096.
- Good46 GOOD, I.J. *Normal recurring decimals.* *J. London Math. Soc.* 21 (1946), 167/169. M.R.8 pg.430. Zb. 60 pg 27.
- Gooe72 GOODEY, P.R. *Hamiltons circuits on simple 3-polytopes.* *J. London Math. Soc.* 2 (1972), 504/510. M.R. 47 # 4850.
- Goom59 GOODMAN, A. W. *On sets of acquaintances and strangers at any party.* *The Amer. Math. Monthly* 66 (1959), 778/783.
- GoomH74 GOODMAN, S.E.- HEDETNIEMI, S.T. *Sufficient conditions for a graph to be hamiltonian.* *J. Comb. Th. B* 16 (1974), 175/180. M.R. 50 # 9690.
- *Gor88 GORBÁTOV, V. A. *Fundamentos de la matemática discreta.* MIR (1988). M.R. 89i # 00002.
- Gou58 GOULD, R.J. *Graphs and vector spaces.* *J. Math. and Phys.* 37 (1958), 193/214.
- Gou91 GOULD, R.J. *Updating the hamiltonian problem. A survey.* *J. Graph Th.* 15 (1991), 121/157.
- *GoulJ83 GOULDEN, I.P.- JACKSON, D.M. *Combinatorial enumeration.* J.Wiley (1983). M.R.84m # 05002.
- *Gra81 GRAHAM, R.L. *Rudiments of Ramsey Theory.* The Amer. Math. Soc.(1981). M.R. 82j # 05018.
- *GraR78 GRAHAM, R.L.- ROTHSCHLD, B.L. *Ramsey theory.* en [Rota78], 80/99.
- *GraGL66 GRAHAM, R.L.- GRÖTSCHEL, M.- LOVÁSZ, L. (Edit.) *Handbook of combinatorics (I - II).* MIT Press and North Holland (1966 / 95).
- *GraRS80 GRAHAM, R.L.- ROTHSCHILD, B L.- SPENCER, J.H. *Ramsey theory.* J. Wiley (1980/89). M.R. 82b # 05001.

- GraM73 GRASSIN, J.- MINOUX, M. *Variations sur un algorithme de Dantzig. Applications à la recherche des plus courts chemins dans les grands réseaux.* Rev. Franç Aut. Inf. Rech. Opérat. (RAIRO) 7. Sér V.I (1973), 53/61. M.R. 48 # 5911.
- GravY68 GRAVER, J. E.- YACKEL, J. *Some graphs theoretic results associated with Ramsey's theorem.* J. Comb. Th. 4 (1968), 125/175.
- Gre71 GREENWELL, D.L. *Reconstructing graphs.* Proc. Amer. Math. Soc. 30 (1971), 431/433. M.R. 44 # 3908. Zb. 205 pg. 285.
- GreH69 GREENWELL, D.L.- HEMMINGER, R.L. *Reconstructing graphs.* Lect.Notes in Math.110. Springer-Verlag (1969), 91/114. M.R. 40 # 5479. Zb.187 pg. 456.
- GreG55 GREENWOOD, R. E.- GLEASON, A. M. *Combinatorial relations and chromatic graphs.* Canad. J. Math. VII (1955), 1/7. M.R. 16 pg 733.
- *Gri85 GRIMALDI, R.P. *Discrete and combinatorial mathematics. An applied introduction.* Addison Wesley (1985/89).
Matemáticas discreta y combinatoria. Introducción y aplicaciones. Limusa (1989/97)
- Grimt83 GRIMMETT, G. *Random graphs.* Cap. 7 de [BeiW83], 201/235.
- Grin68 GRINBERG, E.J. *Plane homogeneous graphs of degree three without hamiltonian circuits.* Latvian Math.Yearbook 4 (1968), 51/58. (en ruso)
- *GroT87 GROSS, J.L.- TUCKER, T.W. *Topological graph theory.* J. Wiley-Interscience (1987). M.R. 88h # 05034.
- *GroM64 GROSSMAN, I.- MAGNUS, W. *Groups and their graphs.* Vol.14 de MAA Studies in Mathematics. The Math. Assoc. of America. (1964).
- *Grü67 GRÜNBAUM, B. *Convex polytopes* J. Wiley-Interscience(1967). M.R. 37 # 2085.
- Grü69 GRÜNBAUM, B. *Incidence patterns of graphs and complexes.* Lect. Notes in Math. 110. Springer-Verlag (1969), 115/128. M.R. 40 # 4152.
- Grü70 GRÜNBAUM, B. *Polytopes, graphs and complexes.* Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 1131/1201. M.R. 42 # 959.
- *Grü75 GRÜNBAUM, B. *Polytopal graphs.* en [Ful75], 201/224. M.R. 53 # 10654.
- Guan84 GUAN, M.G. *On the windy postman problem.* Discrete Appl. Math. 9 (1984), 41/46. M.R. 86c # 90042. Zb. 551 # 90092.
- Gup68 GUPTA, J.N.D. *Travelling salesman problem. A survey of theoretical developments and applications.* Opsearch 5 (1968), 181/192. M.R. 43 # 8347.
- *GutP86 GUTMAN, I.- POLANSKY, O.E. *Mathematical concepts in organic chemistry.* Springer-Verlag (1986). M.R. 87m # 92102.

Guy66 GUY, R.K. *Combinatorial games*. Cap. 43 de [GraGL66], 2117/2163.

Guy83 GUY, R.K. *Graphs and games*. Cap. 9 de [BeiW83], 269/295.

H

Hak62 HAKIMI, S.L. *On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graph (I)*. J. Soc. Indust. Appl. Math. 10 (1962), 496/506. M.R. 26 # 5558. Zb. 109 pg.165.

Hak63 HAKIMI, S.L. *On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graph (II). Uniqueness*. J. Soc. Indust. Appl. Math. Vol.11 (1963), 135/147. M.R. 27 # 2972.

HakS78 HAKIMI, S.L.- SCHMEICHEL, E.F. *Graphs and their degree sequences. A survey*. Lect. Notes in Math. 642, Springer- Verlag (1978), 225/235. M.R. 58 # 21847.

HalJ67 HALIN, R.- JUNG, H.A. *Note on isomorphisms of graphs*. J. London Math. Soc. 42 (1967), 254/256. M.R. 34 # 7402.

*Hall67 HALL, M. (Jr) *Combinatorial theory*. Blaisdell Publ. Co. (1967) (2nd. edit. J. Wiley (1986)). M.R. 37# 80 // 87j 05001. Zb. 196 pg. 24.

Ham57 HAMILTON, W.R. *Account of the icosian calculus*. Proc. Roy. Irish. Acad. 6 (1853-57), 415/416.

*HamR68 HAMMER, P.L.- RUDEANU, S. *Boolean methods in operations research and related areas*. Springer-Verlag (1968). M.R. 38 # 4132. Zb.155 pg. 280.
Méthodes booléennes en recherche opérationelle Dunod (1970). M.R. 41 # 5035. Zb. 214 pg.186.

HansK74 HANSEN, K.H.- KRARUP, J. *Improvements of Held-Karp algorithm for the symmetric travelling salesman problem*. Math. Prog. 7 (1974), 87/96.

Har55 HARARY, F. *The number of linear, directed, rooted, and connected graphs*. Trans Amer. Math. Soc. 78 (1955), 445/463. M.R. 16 # 844.

Har57 HARARY, F. *On arbitrarily traceable graphs and directed graphs*. Scripta Math. 23 (1957), 37/41. M.R. 20 # 5486.

Har59 HARARY, F. *The number of functional digraphs*. Math. Ann. 138 (1959), 203/210. M.R. 22A # 18.

Har60b HARARY, F. *Some historical and intuitive aspects of graph theory*. SIAM Review 2 (1960), 123/131. M.R. 22A # 2560.

Har62 HARARY, F. *The determinant of the adjacency matrix of a graph*. SIAM Review 4 (1962) 202/210. M.R. 26 # 1876. Zb.113 pg. 174.

- Har64a HARARY, F. *Recent results in topological graph theory*. Acta Math. Acad. Sci. Hung. XV (1964), 405/412.
- Har64b HARARY, F. *Combinatorial problems in graphical enumeration*. en [Beck64], 185/220.
- *Har67a HARARY, F.(Edit.) *Graph theory and theoretical physics*. Academic Press (1967). M.R. 37 # 6208. Zb. 202 pg. 556.
- Har67b HARARY, F. *Graphical enumeration problems*. Cap.1 de [Har67a], 1/41. M.R. 38 # 1033. Zb. 204 pg.572.
- Har67c HARARY, F. *Some theorems and concepts of graph theory*. en [HarB67], 1/12.
- Har67d HARARY, F. *Topological concepts in graph theory*. en [HarB67], 13/17.
- Har67e HARARY, F. *Graphical reconstruction* en [HarB67], 18/20.
- Har67f HARARY, F. *A proof of Pólya's theorem*. en [HarB67], 21/24.
- Har67g HARARY, F. *Applications of Pólya's theorem to permutation groups*. en [HarB67], 25/33.
- Har67h HARARY, F. *Enumeration of graphs and digraphs*. en [HarB67], 34/41.
- Har67i HARARY, F. *Graphs and matrices*. SIAM Revue 9 (1967), 83/90. M.R. 35 # 1501. Zb.146 pg. 458.
- Har67j HARARY, F. *The enumeration methods of Redfield*. Amer.J. Math. 89 (1967), 373/384. Zb. 178 pg. 9.
- *Har69a HARARY, F. (Edit.) *Proof techniques in graph theory*. Acad. Press (1969). Zb. 193, pg. 281.
- *Har69b HARARY, F. *Graph Theory*. Addison Wesley (1969-72). M.R. 41 # 1566. Zb. 182 pg 577.
- Har69c HARARY, F. *The four color conjecture and other graphical diseases*. en [Har69a], 1/9. M.R. 40 # 7150.
- Har69d HARARY, F. *Determinants, permanents and bipartite graphs*. Math. Mag. 42 (1969), 146/148. M.R. 39 # 4035.
- Har72 HARARY, F. *The two-triangle case of the acquaintance graph*. Math. Mag. 45 (1972), 130/135.
- *Har73a HARARY, F (Edit.) *New directions in the theory of graphs*. Acad. Press (1973).

- Har73b HARARY, F. *On the history of the theory of graphs.* en [Har73a], 1/17. M.R. 50 # 09704.
- Har74a HARARY, F. *A survey of generalized Ramsey theory.* Lect. Notes in Math. 406. Springer-Verlag (1974), 10/17.
- Har74b HARARY, F. *A survey of reconstruction conjecture.* Lect. Notes in Math. 406. Springer-Verlag. (1974), 18/28. M.R. 50 # 12818. Zb. 293 # 05152.
- HarB67 HARARY, F.- BEINEKE, L. (Edit.) *A Seminar on Graph Theory.* Holt-Rinehart-Winston (1967), Zb.159 pg.541.
- HarM66 HARARY, F.- MOSER, L. *The theory of round robin tournaments.* The Amer. Math. Monthly 73 (1966), 231/246. M.R. 33 # 5512.
- HarNW65 HARARY, F.- NASH WILLIAMS, C. St.J.A. *On eulerian and hamiltonian graphs and line-graphs.* Canad. Math. Bull. 8 (1965),701/709. M.R.33 # 66. Zb.136 pg 447.
- HarP67a HARARY, F.- PALMER, E.M. *On the problem of reconstructing a tournament from subtournaments.* Monatsh. für Math. (1967), 14/23. M.R. 35 # 86. Zb. 148 pg. 436.
- HarP67b HARARY, F.- PALMER, E.M. *The enumeration methods of Redfield.* Amer. J. Math. 89 (1967), 373/384. Zb.178 pg. 9.
- *HarP73 HARARY, F.- PALMER, E.M. *Graphical enumeration.* Acad. Press (1973). M.R. 50 # 9682. Zb. 276 pg. 284.
- HarR74 HARARY, F.- READ, R. *Is the null graph a pointless concept ?* Lect. Notes in Math. 406, Springer-Verlag (1974), 37/44. M.R. 50 # 12819.
- HarS71 HARARY, F.- SCHWENK, A. *Trees with hamiltonian square.* Mathematika 18 (1971), 138/140.
- HarW69 HARARY, F.- WELSH, D. *Matroids versus graphs.* Lect. Notes in Math. 110. Springer -Verlag (1969), 155/170. M.R. 41 # 8267. Zb. 205 pg. 284.
- *HarNC65 HARARY, F.- NORMAN, R.- CARTWRIGHT, D. *Structural models. An introduction to the theory of directed graphs.* J.Wiley (1965). M.R. 32 # 2345. Zb. 139 pg. 415. *Modèles structuraux. Introduction à la théorie des graphes orientés.* Dunod (1968). Zb. 176 pg. 225.
- HatS72 HARTFIEL,D.J. - SPELLMANN, J.W. *A role for doubly stochastic matrices in graph theory.* Proc. Amer. Math. Soc. 36 (1972), 389/394. M.R. 47 # 4844.
- Hav55 HAVEL, V. *A remark on the existence of finite graphs.* Casop. Pést. Mat. 80 (1955), 477/480. (en húngaro).
- Heap72 HEAP, B. R. *The production of graphs by computer.* en [Read72], 47/62.

- Heaw90 HEAWOOD, P.J. *Map colour theorem*. Quart. J. Math. Pure Appl. 24 (1890), 332/338.
- HelK70 HELD, M.- KARP, R.M. *The traveling salesman problem and minimum spanning trees*. Operations Res. 18 (1970), 1138/1162.
- HelK71 HELD, M.- KARP, R.M. *The traveling salesman problem and minimum spanning trees. Part II*. Math. Programming 1 (1971), 6/25.
- HellTG56 HELLER, I.- TOMPKINS, C.B.- GALE, D. *An extension of a theorem of Dantzig's*. en [KuhT56], 247/254.
- Hem69 HEMMINGER, R.L. *On reconstructing a graph*. Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), 185/187. M.R. 38 # 1019. Zb. 164 pg. 541.
- Hem71 HEMMINGER, R.L. *Isomorphism-induced line isomorphisms on pseudographs* Czech. Math. J. 21 (1971), 672/679. M.R. 45 # 3233.
- Hem72a HEMMINGER, R.L. *Line digraphs*. Lect. Notes in Math. 303. Springer-Verlag. (1972), 149/163. M.R. 51 # 243. Zb. 247 # 05129.
- Hem72b HEMMINGER, R.L. *On Whitney's line graph theorem*. The Amer. Math. Monthly 79 (1972), 374/378. M.R. 45 # 8562. Zb. 239 # 05135.
- HemB78 HEMMINGER, R.L.- BEINEKE, L.W. *Line graphs, and line digraphs*. Cap. 10 de [BeiW78], 271/305. Zb. 434 # 05056.
- HemK77 HEMMINGER, R.L.- KLERLEIN, J.B. *Line pseudo-digraphs*. J. Graph Th. 1 (1977), 365/377. M.R. 57 # 5812.
- HemZ73 HEMMINGER, R.L.- ZELINKA, B. *Line isomorphisms on dipseudographs*. J. Comb. Th. B 14 (1973), 105/121.
- HemJK82 HEMMINGER, R.L.- JUNG, H.A.- KELMANS, A.K. *On 3-skein isomorphisms of graphs*. Combinatorica 2 (1982), 373/376. M.R. 85b # 05119.
- *HenW73 HENLEY, E.J.- WILLIAMS, R.A. *Graph theory in modern engineering*. Acad. Press (1973). M.R. 50 # 12465.
- HerDV67 HERZ, J.C.- DUBY, J.J.- VIGUÉ, F. *Recherche systématique des graphes hypo-hamiltoniens*. en [Ber67b], 153/159. Zb. 196 pg. 561
- HerGR64 HERZ, J.C.- GAUDIN, T.- ROSSI, P. *Solution du problème 29*. Rev. Franç. Rech. Opérat. (RFRO) 8 (1964), 214/218.
- Hie73 HIERHOLZER, C. *Über die Möglichkeit einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren*. Math. Annalen VI (1873), 30/32.
- Hig69 HIGMAN, G. *Simple groups and combinatorial theory*. (Charla en Conf. on Combinatorial Mathematics). Math. Inst. Oxford Univ. July (1969).

- Hob76 HOBBS, A.M. *The square of a block is vertex pancyclic*. J. Comb. Th. B 20 (1976), 1/4. M.R. 54 # 5042.
- Hob78 HOBBS, A.M. *Powers of graphs, line graphs, and total graphs*. Lect. Notes in Math.642. Springer-Verlag, (1978), 271/285. M.R. 81f # 05117.
- HoeS90 HOEDE, C.- SMITH, H.J. *On the coupling condition and hamiltonicity*. Topics in combinatorics and graph theory. (Edit. R. Bodendiek-R. Henn) Physica-Verlag (1990), 373/380. M.R. 91m # 05127.
- HoeV78 HOEDE, C.- VELDMAN, H.J. *On characterization of hamiltonian graphs*. J. Comb. Th. B 25 (1978), 47/53. M.R. 58 # 379. Zb. 325 # 05111.
- Hof75 HOFFMAN, A.J. *Eigenvalues of graphs*. en [Ful75], 225/245. M.R. 53 # 10656.
- Hof76 HOFFMAN, A.J. *Total unimodularity and combinatorial theorems*. Linear Algebra and its applications. 13 (1976), 103/108.
- HofK56 HOFFMAN, A.J.- KRUSKAL, J.B. *Integral boundary points of convex polyhedra*. en [KuhnT56], 223/246.
- HofP59 HOFFMAN, W.- PAULEY, R. *A method for the solution of the Nth. best path problem*. J. Assoc. Comput. Mach. (JACM) 6 (1959), 506/514.
- HolMc88 HOLTON, D.A. - Mc KAY, B.D. *The smallest non-hamiltonian 3-connected cubic planar graphe have 38 vertices*. J. Comb Th. B 45 (1988), 305/319. M.R. 90f # 05090. Zb. 607 # 05051. Erratum J.Comb.Th. B 47 (1989), 248. M.R. 91a # 05067)
- HopK73 HOPCROFT, J.- KARP, R.M. *An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matching in bipartite graphs*. SIAM J. Comput. 2 (1973), 225/231.
- *HorS76 HOROWITS, E.- SAHNI, S. *Fundamentals of data structures*. Comp.Sci. Press (1976/83).
- *HorS78 HOROWITS, E.- SAHNI, S. *Fundamentals of computer algorithms*. Comp. Sci. Press (1978).
- Hu67 HU, T.C. *Revised matrix algorithms for shortest paths*. SIAM J. Applied Math. 15 (1967), 207/218. (con corrección en pág. 1517)
- *Hu69 HU, T.C. *Integer Programming and Network Flows*. Addison-Wesley (1969).
- *Hu82 HU, T.C. *Combinatorial algorithms*. Addison-Wesley (1982). M.R. 87j # 90091.
- Hub75 HUBAUT, X. L. *Strongly regular graphs*. Discrete Mathematics 13 (1975), 357/381.

J

- JacG79 JACKSON, D.M.- GOULDEN, I.P. *Sequence enumeration and the de Bruijn-van Aardenne-Ehrenfest-Smith-Tutte theorem*. *Canad. J. Math.* XXXI (1979), 488/495. M.R. 81j # 05013. Zb. 431 # 05004.
- *JauMA71 JAUFFRED, F.- MORENO, A.- ACOSTA, J. *Métodos de optimización. Programación Lineal Gráfica*. Representaciones y Servicios de Ingeniería. México (1971).
- Joh73 JOHNSON, D.B. *A note on Dijkstra's shortest path algorithm*. *J. Assoc. Comp. Mach. (JACM)* 30 (1973), 385/388.
- *Johs84 JOHNSONBAUGH, R. *Discrete Mathematics*. Mac Millan Publ. (1984/86). *Matemáticas Discretas*. Edit. Iberoamerica (1988).
- Jung66 JUNG, H.A. *Zu einem Isomorphiesatz von H. Whitney für Graphen*. *Math. Ann.* 164 (1966), 270/271. M.R.33 # 5518. Zb.141 pg. 411.

K

- Kar68 KARAGANIS, J.J. *On the cube of a graph*. *Canad. Math. Bull.* 11 (1968), 295/296. M.R. 37 # 6205. Zb. 162 pg.277
- Karo66 KARONSKI, M. *Random graphs*. Cap. 6 de [GraGL66], 351/380.
- Karo82 KARONSKI, M. *A review of random graphs*. *J. Graph Theory* 6 (1982), 349/390.
- Kas63 KASTELEYN, P.W. *A soluble self-avoiding walk problem*. *Physica* 29 (1963), 1329/1337.
- Kas67 KASTELEYN, P.W. *Graph theory and crystal physics*. Cap. 2 de [Har67a], 44/110. M.R. 40 # 6903. Zb. 205 pg. 284.
- *Kau62 KAUFMANN, A. *Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle: (I-II-III)*. Dunod (1962-64-72-74). M.R. 34 # 2332 / 57 # 18752. Zb. 128 pg. 395. *Graphs, dynamics programming and finite games* (tomo II). Acad. Press (1967). *Métodos y modelos de la programación dinámica* (tomo II). C.E.C.S.A. (1966).
- *Kau68a KAUFMANN, A. *Des points et des flèches. La théorie des graphes*. Dunod (1968). M.R. 50 # 6862. *Puntos y flechas. Teoría de los grafos*. Edit. Boixareu-Marcombo, España (1976).
- *Kau68b KAUFMANN, A. *Introduction à la combinatoire en vue des applications*. Dunod (1968). M.R. 51 # 10109. Zb. 169 pg. 18. *Graphs, dynamic programming and finite games*. Acad. Press (1967). *Introducción a la combinatoria y sus aplicaciones*. C.E.C.S.A. (1971).

- *KauCr65 KAUFMANN, A. - CRUON, R. *La programmation dynamique*. Dunod (1965).
Dynamic Programming. Acad. Press (1967). M.R. 34 # 2361 // 35 # 7684.
La programación dinámica. C.E.C.S.A. .
- *KauD64 KAUFMANN, A.- DESBAZEILLE, G. *La méthode du chemin critique*. Dunod (1964).
The critical path method. Gordon-Breach (1969). Zb. 127 pg. 370.
Método del camino crítico. Sagitario S.A. (1965).
- KauM63 KAUFMANN, A.- MALGRANGE, Y. *Recherche des chemins et circuits hamiltoniens d'un graphe*. Rev. Franç. Rech. Opérat. 2ème. 7-26 (1963), 61/73.
- *KauP77 KAUFMANN, A.- PICHAT, E. *Méthodes mathématiques non numériques et leurs algorithmes*. (Vol. I-II). Masson (1977). M.R.56 # 17190. Zb. 361 # 05047/48.
- Kelly57 KELLY, P.J. *A congruence theorem for tree*. Pacific J. Math. 7 (1957) 961/968.
M.R.19 pg. 442. Zb. 78 pg.371.
- Kelly85 KELLY, D. *Comparability graphs*. Graphs and Order (Edit. I.Rival). D. Reidel
Publs. Co. (1985), 3/40. M.R. 87g # 5190.
- *KemS60 KEMMENY, J.G.- SNELL, J.L. *Finite Markov Chains*. Van Nostrand (1960).
M.R. 22B # 5998.
- *KemS62 KEMMENY, J.G. - SNELL, J.L. *Mathematical models in the social sciences*.
Blaisdell Publ. (1962).
- Kemp79 KEMPE, A.B. *On the geographical problem of the four colors*. Amer. J. Math. 2
(1879), 193/204.
- Kemp80 KEMPE, A.B. *How to colour a map with four colours*. Nature 21 (1879-80), 399/400.
- Kir47 KIRCHHOFF, G. *Über die Auflösung der Gleichungen auf welche man bei der
Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird*.
Ann. der Phys. und Chemie. 72 (1847), 497/508.
Traducción en I.R.E. Trans. Circuit Theory C.T. 5 (1958), 4/8.
- *Knu69 KNUTH, D. E. *The art of computer programming – Vol.I Fundamental algorithms -
Vol.II Seminumerical algorithms - Vol.III Sorting and Searching*.
Addison-Wesley (1969/73/75/81). M.R. 44 # 3530/31 // 51 # 14624 // 56 # 4281.
Zb. 191 pg. 179/80.
El arte de programar ordenadores. Algoritmos fundamentales. Reverté S.A. (1985)
- Knu77a KNUTH, D. E. *Algorithms*. Scientific American - Avril (1977), 63/80.
- Knu77b KNUTH, D.E. *A generalization of Dijkstra's algorithm*. Inf. Proc. Let. 6 (1977), 1/5.
- Koc85 KOCAJ, W.L. *On Stockmeyer's non reconstructible tournaments*. J. Graph Th. 9
(1985), 473/476. M.R. 88f # 05085. Zb. 664 # 05044.

- *KolB84 KOLMAN, B.- BUSBY, R. C. *Discrete mathematical structures for computer science*. Prentice-Hall (1984).
Estructuras de matemáticas discreta para la computación. Prentice-Hall (1986)
- Kön16 KÖNIG, D. *Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinanten Theorie und Mengenlehre*. Math. Ann. 77 (1916), 453/465.
- Kön31 KÖNIG, D. *Graphen und Matrizen* Mat. Fis. Lapok 38 (1931), 116/119.
- *Kön36 KÖNIG, D. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Akad. Verlag-Leipzig (1936). M.R. 12 pg.195. Zb.13 pg. 228.
Reimpreso por Chelsea (1950) y por Teubner-Verlag (1986) con el trabajo de Euler 1736.. M.R. 88i # 01168.
Theory of finite and infinite graphs. Birkhäuser-Boston (1990). M.R. 91f # 01026.
- Kot62 KOTZIG, A. *The construction of cubic hamiltonian graphs*. Casop. Pěstov. Mat. 87 (1962), 148/168. (en ruso). M.R. 25 # 2004.
- *Kraï30 KRAÏTCHIK, M. *La mathématique des jeux*. Bruxelles (1930/53).
Mathematical recreations. Norton (1942). Dover (1953). M.R. 14 pg. 620.
Matemáticas recreativas. Edit. El Ateneo – Bs.As. (1946).
A matemática dos jogos (Traducción parcial) Public. Europa-América (1958).
- Krau43 KRAUSZ, J. *Démonstration nouvelle d'un théorème de Whitney sur les reseaux*. Mat. Fiz. Lapok 50 (1943), 75/85. M.R.8 pg. 284. (en húngaro)
- Kro69 KRONK, H.V. *Is the square of every nonseparable graph hamiltonian ?* The Amer. Math. Monthly 76 (1969), 1045/1046.
- KuhT56] KUHN, H.W.- TUCKER, A. (Edit) *Linear Inequalities and Related Systems*. Annals of Math. Studies 38 – Princeton Univ. Press (1956).
- Kur30 KURATOWSKI, G. *Sur le problème des courbes gauches en topologie*. Fund. Math. 15 (1930), 271/283.
- Kwan60 KWAN, M. K *Graphic programming using odd or even points*. Chinese Math. 1 (1962) 273/277 (Trad. de Acta Math. Sinica 10 (1960) 263/266. M.R.28 # 05828
- \mathcal{L}
- LalLH90 LALANI, J.- LASKAR, R.- HEDETNIEMI, S.T. *Graphs and posets, somme common parameters*. Proc. Conf. Boca Raton 1989. Congressus Numer. 71 (1990), 205/215. M.R. 91k 06006.
- Lam60 LAMBERT, F. *The travelling-salesman problem*. Cahiers Centre d'Études Rech. Opérat. (CERO) - Vol. 2 Nro. 2 (1960), 180/191.

- Lan53 LANDAU, H.G. *On dominance relations and the structure of animal societies. III. The condition for a score structure.* Bull. Math. Biophysics. 15-2 (1953), 143/148. M.R. 14 # 1000.
- LasV70 LAS VERGNAS, M. *Sur l'existence de cycles hamiltoniens dans un graphe* C.R.Acad. Sci. Paris. 270 (1970), 1361/1364. M.R. 42 # 7554. Zb.193 pg. 244.
- LasV72 LAS VERGNAS, M. : Thesis Univ. Paris VI (1972),
- *Law76 LAWLER, E. *Combinatorial optimization. Networks and matroids.* Holt-Rinehart Winston (1976). M.R. 55 # 12005.
- *LawLR87 LAWLER, E.- LENSTRA, J.- RINNOOY, A.- SHMOYS, D. *The travelling salesman problem. A guided tour of combinatorial optimization.* J. Wiley (1987).
- Led65 LEDERBERG, J. *Topological mapping of organic molecules.* Proc. Nat. Acad. Sci. US. 53 (1965), 134/139.
- Led67 LEDERBERG, J. *Hamilton circuits of convex trivalent polyhedra (up to 18 vertex).* The Amer. Math. Monthly 74 (1967), 522/527. M.R. 35 # 2770.
- LemC66 LEMPEL, A.- CEDERBAUM, I. *Minimum feedback arc an vertex sets of a directed graph* .I.E.E.E. Trans. Circuit Theory CT-13 (1966), 399/403.
- Les77 LESNIAK, L *Some recent results in Hamiltonian graphs.* J. Graph Th. 1 (1977), 27/36. M.R. 56 # 15489.
- LesO86 LESNIAK, L - OELLERMAN, O.R. *An eulerian exposition.* J. Graph. Th. 10 (1986), 277/297. M.R. 88f # 05073,
- Lew75 LEWIN, M. *On maximal circuits in directed graphs.* J. Comb. Th. B 18 (1975), 175/179. M.R. 51 # 5375.
- LewsP78 LEWIS, H.R.- PAPADIMITRIOU, C.H. *The efficiency of algorithms.* Scientific American 238 - 1 (1978), 96/109.
- Lick70 LICK, D.R. *A sufficient condition for hamiltonian connectedness.* J. Comb. Th. B 8 (1970), 444/445. M.R. 42 # 2969.
- Lin65 LIN, S. *Computer solutions of the traveling salesman problem.* Bell Syst. Tech. J. Vol. 44 (1965), 2245/2269.
- LinK73 LIN, S.- KERNIGHAN, B.W. *An effective heuristic algorithm for the travelling salesman problem.* Operat. Res. 21 (1973), 498/516. M.R. 50 # 12194. Zb. 256 # 90038.
- LindMW79 LINDNER, Ch.- MENDELSON, E.- MENDELSON, N.S.- WOLK, B. *Orthogonal latin square graphs.* J. Graph Th. 3 (1979), 325/338. M.R. 80k # 05022.

- *Lint74 LINT van, J. H. *Combinatorial theory. Seminar Eindhoven.* Lect. Notes in Math. 382. Springer-Verlag (1974). M.R. 50 # 4311. Zb. 315 # 05001
- LitMS63 LITTLE, J.- MURTY, K.- SWEENEY, D.- KAREL, C. *An algorithm for the traveling salesman problem.* J.O.R.S.A. 11 (1963), 972/989.
- Lloyd88 LLOYD, E.K. *Redfield enumeration 250 th.* Ann. Conf. Graph Theory. Congr. Numer 64 (1988), 13/24. M.R. 90c # 05111.
- LonP72 LONGYEAR, J.Q.- PARSONS, T.D. *The friendship theorem.* Proc. Nederl. Akad. A 75. (Idem Indag. Math 34 (1972), 257/262). M.R. 46 # 5169. Zb. 243 # 05006.
- Lov72 LOVÁSZ, L. *A note on the line reconstruction problem.* J. Comb. Th. B 13 (1972), 309/31. M.R. 46 # 8913. Zb. 244 # 05112.
- Lov75 LOVÁSZ, L. *Three shorts proofs in graph theory.* J. Comb. Th. 19 B (1975), 269/271. M.R. 53 # 211.
- *LovP86 LOVÁSZ, L.- PLUMMER, M.D. *Matching theory.* North Holland (1986). M.R. 88b #90087.
- *Lucas82 LUCAS, E. *Récréations mathématiques. (4 Vol.)* Gauthier Villars (1882/1921). Blanchart (1960).
El laberinto y otros juegos matemáticos. (Traducción parcial en Colección Juegos de Mente.- Ediciones Zugarto --Juegos & Co. (1991)).
- *Luc79 LUCCHESI, C.L. *Introdução à teoria dos grafos.* Inst. Mat. Pura e Aplicada (IMPA). (1979).
- *LucSK79 LUCCHESI, C. I.- SIMON, I.- SIMON, J.- KOWALTOWSKI, T. *Aspectos teóricos da computação.* Inst. Mat. Pura e Aplicada (IMPA). (1979).

\mathcal{M}

- *MacRV97 MACCARI, A.- RUEDA, O.- VIAZZI, V. *Recopilación comentada sobre reconstrucción de grafos.* Informe Técnico Interno Nro. 57, INMABB - Univ. Nac. del Sur. (1997), 1/38..
- MacRV02 MACCARI, A.- RUEDA, O.- VIAZZI, V. *A survey on edge reconstruction of graphs.* J. Discrete Math. Sciences & Cryptography 5 (2002), 1/11.
- Mal77 MALONEY, J.P. *A non graph theory approach to Ulam's conjecture.* Portugaliae Mathematica 36 (1977), 1/6.
- Malk88 MALKEVITCH, J. *Polytopal graphs.* Cap. 8 de [BeiW88], 169/188.
- Manv69 MANVEL, B. *On reconstruction of graphs.* Lect. Notes in Math. 110. Springer-Verlag (1969), 207/214. M.R. 41 # 3313. Zb. 185 pg. 277.

- Manv88 MANVEL, B. *Reconstruction of graphs, progress and prospects*. Congr. Numer. 63 (1988), 177/187. M.R. 90c # 05154. Zb. 671 # 05053.
- MarM65 MARCUS, M.- MINC, M. *Permanents*. The Amer. Math. Monthly 72 (1965), 577/591
- MarS74 MARCZYK, A.- SKUPIEN, Z. *Characterizing line graphs of general graphs*. Bollet. Acad. Polonaise des Sciences Vol. XXII - 3 (1974), 235/241.
- Mari59 MARIMONT, R.B. *A new method of checking the consistency of precedence matrices*. J. Assoc. Comput. Mach. (JACM) 6-2 (1959), 164/171. M.R. 21 # 1693.
- Mari60 MARIMONT, R.B. *Applications of graphs and boolean matrices to computer programming*. SIAM Review 2 (1960), 259/268. M.R. 22 # 6097.
- *Mars71 MARSHALL, C. W. *Applied graph theory*. J. Wiley (1971). M.R. 48 # 1951. Zb. 226 # 05101.
- Mas53 MASON, J. *Feedback theory, some properties of signal-flow-graphs*. Proc. IRE 41(1953), 1144/1156.
- Mas56 MASON, J. *Feedback theory, further properties of signal-flow-graphs*. Proc. IRE 44(1956), 920/926.
- McKee84 Mc KEE, T.A. *Recharacterizing eulerian. Intimations of new duality*. Discrete Math. 51 (1984), 237/242. M.R. 86a # 05083. Zb. 547 # 05043.
- *Meh84 MEHLHORN, K. *Data structures and algorithms 2. Graph algorithms and NP-completeness*. Springer-Verlag (1984).
- Men78 MENDELSON, E. *Every (finite) group is the group of automorphisms of a (finite) strongly regular graph*. Ars Comb. 6 (1978), 75/86. M.R. 81a # 05065.
- MenR85 MENDELSON, E. - ROSA, A. *One-factorizations of the complete graph. A survey*. J. Graph Theory 9 (1985), 43/65. M.R. 86h # 05089.
- Meng27 MENGER, K. *Zur allgemeinen Kurventheorie*. Fund Math. 10 (1927), 96/115.
- Mey73 MEYNIEL, M. *Une condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien dans un graphe orienté* J.Comb.Th. B 14 (1973), 137/147. M.R. 47 # 6546. Zb. 259 # 05114.
- *Minc78 MINC, H. *Permanents*. Addison Wesley (1978).
- Mino76 MINOUX, M. *Structures algébriques généralisées des problèmes de cheminement dans les graphes. Théorèmes, algorithmes et applications*. Rev. Franç d'Autom. Inf. Rech. Opér. (RAIRO) 10 V-2 (1976), 33/62. M.R.56 # 4788. Zb.337# 05122.
- Minty66 MINTY, G.J. *On the axiomatic foundations of the theories of directed linear graphs, electrical networks and network programming*. J. Math. and Mechanics. Vol. 15 (1966), 485/520.

- Minty75 MINTY, G.J. *On the axiomatic foundations of the theories of directed linear graphs, electrical networks and network programming.* en [Ful75a], 246/300.
- *Mirs71 MIRSKY, L. *Transversal theory.* . Acad. Press (1971).
- MitS85 MITCHEM, J.- SCHMEICHEL, E. *Pancyclic and bipancyclic graphs. A survey.* Graphs and applications (Edit. F. Harary - J. Maybee) J. Wiley (1985), 271/278. M.R. 86c # 05085. Zb. 566 # 05043.
- Möh85 MÖHRING, R.H. *Algorithmic aspects of comparability graphs and interval graphs.* en [Riv85a], 41/101. M.R. 87d # 5142.
- Moon66 MOON, J.W. *On subtournaments of a tournament.* Canad. Math. Bull. 9 (1966), 297/301. M.R. 34 # 95.
- *Moon68 MOON, J.W. *Topics on tournaments.* Holt Rinehart and Winston (1968). M.R. 41 # 1574.
- Mow73 MOWSHOWITZ, A. *The adjacency matrix and the group of a graph.* en [Har73a], 129/148.
- Müll77 MÜLLER, V. *The edge reconstruction hypothesis is true for graphs with more than $n \cdot \log_2(n)$ edges.* J. Comb. Th. B 22 (1977), 281/283. M.R. 58 # 5410. Zb.319 # 05127.
- MuW63 MUIR, A.- WATERMAN, D. *Critical paths methods in practice* METRA Vol.II Nro.4 (1963), 1/18.
- *Mur67 MURCHLAND, J.D. *Bibliography of the shortest route problem.* London School of Economics Technical Report TNT-6-3 (1967).

\mathcal{N}

- NashW66 NASH-WILLIAMS, C. St. J. A. *Euler lines in infinite directed graphs.* Canad. J. Math. 18 (1966), 692/714. M.R. 34 # 96. Zb. 151 pg. 336
- NashW67 NASH-WILLIAMS, C. St. J. A. *Infinite graphs. A survey.* J. Comb. Th. 3 (1967), 286/301. M.R. 35 # 5351.
- NashW68 NASH-WILLIAMS, C. St. J. A. *Euler lines in infinite directed graphs.* Proc. Colloq Tihany 1966 (Edit. P.Erdős - G.Katona). (1968), 243/249. Zb. 182 pg. 581.
- NashW69b NASH-WILLIAMS, C. St. J. A. *Hamilton circuits in graphs and digraphs.* Lect. Notes in Math. 110. Springer-Verlag (1969), 237/243. M.R. 40 # 5484.
- NashW75 NASH-WILLIAMS, C.St.J.A. *Hamiltonian circuits.* en [Ful75a], 301/360. M.R. 53 # 10649.

- NashW78 NASH-WILLIAMS, C. St. J. A. *The reconstruction problem*. Cap. 8 de [BeiW78], 205/236. M.R. 81e # 05059. Zb. 433 # 05045.
- NashW82 NASH-WILLIAMS, C. St. J. A. *A glance at graph theory (I-II)*. Bull. London Math. Soc. 14 (1982), 177/212 - 294/328. M.R. 83h # 05033. Zb. 487 # 05020.
- Neb73a NEBESKY, L. *A theorem on hamiltonian line graphs*. Comment. Math. Univ. Carolinae 14 (1973), 107/111.
- Neb73b NEBESKY, L. *On the line graph of the square and the square of the line graph of a connected graph*. Casopis Pěst. Mat. 98 (1973), 285/287.
- *NemRT89 NEMHAUSER, G.L.- RINNOOY KAN, A.H.- TODD, M.J.(Edit.) *Optimization-Vol. I*. North Holland (1989).
- Nes66 NESETRIL, J. *Ramsey theory*. Cap. 25 de [GraGL66], 1331/1404.
- NesR87 NESETRIL, J.- RÖDL, V. *Complexity of diagrams*. Order 3 (1987), 321/330. M.R. 88h 5080.
- NesR90 NESETRIL, J.- RÖDL, V. (Edit.) *Ramsey theorie old and new*. Math. of Ramsey Th. Coll. Symp. Graph Theory. Prague (1990). Zb. 724 # 05072.
- Nie79 NIELSEN, F. *Flowgraphs*. Cap. 3 de [WilB79], 59/80.

O

- Odl66 ODLYZKO, A.M. *Asymptotic enumeration methods*. Cap.22 de [GraGL66], 1063/1230.
- OellS84 OELLERMAN, O.R.- SWART, H.C. *Graphs for wich all strong orientations are eulerian*. Expo. Math. 2 (1984), 183/184. Zb 533 # 05040.
- OheLR85 O'HEIGEARTAIGH, M.- LENSTRA, J.- RINNOOY KAHN, A.H.G. (Edit.) *Combinatorial optimization. Annotated Bibliographies*. J.Wiley (1985). M.R. 87h # 90124.
- Ore51 ORE, O. *A problem regarding the tracing of graphs*. Rev. Elem. Math. 6 (1951), 49/53. M.R.12 pg. 845.
- Ore59 ORE, C. *An excursion into labyrinths*. Mathematics Teacher 52 (1959), 367/370.
- Ore60 ORE, O. *Note on hamilton circuits*. The Amer. Math. Monthly 67 (1960), 55. M.R. 22 # 9454.
- Ore61 ORE, O. *Arc coverings of graphs*. Ann. Math. Pura Appl. 55 (1961), 315/322. M.R. 28 # 5441.
- *Ore62 ORE, O. *Theory of graphs*. Amer. Math. Soc. Colloquium Public. Vol. XXXVIII. (1962). M.R. 27 # 740 // 39 # 5411. Zb. 105 pg. 354.

- *Ore63a ORE, O. *Graphs and their uses*. Random House (1963). Math. Assoc. of America (1990). M.R. 27 # 739 // 91e # 05002. Zb. 122 pg. 418.
Grafos y sus aplicaciones. (Edición actualizada por R. J. Wilson)
Colección La Tortuga de Aquiles. Nro.6 Ind. Gráfica Lavel - España (1995).
- Ore63b ORE, O. *Hamiltonian connected graphs*. J. Math. Pures Appl. 42 (1963), 21/27. M.R. 26 # 4336.
- *Ore67 ORE, O. *The four colour problem*. Acad. Press (1967). M.R. 36 # 74.
- OveL76 OVERBECK-LARISCH, M. *Hamilton paths in oriented graphs*. J. Comb. Th. B 21(1976), 76/80.
- OveL77 OVERBECK-LARISCH, M. *A theorem on pancyclic oriented graphs*. J. Comb. Th. B 23 (1977), 168/173. M.R. 57 # 2976. Zb. 395 # 05041.

\mathcal{P}

- Pair67 PAIR, C. *Sur des algorithmes pour les problèmes de cheminement dans les graphes finis*. en [Ber67b], 271/300.
- Pal69 PALMER, E.M. *Methods for enumeration of multigraphs*. Lect. Notes in Math. 110 (1969) 251/261.
- Pal73 PALMER, E.M. *Graphical enumeration methods*. en [Har73a], 187/206.
- Pal78 PALMER, E.M. *The enumeration of graphs*. Cap. 14 de [BeiW78], 385/415.
- PaoTW85 PAOLI, M.- TROTTER, W.T.(Jr) - WALKER, J.W. *Graphs and orders in Ramsey theory and in dimension theory*. en [Riv85a], 351/394. M.R. 87e # 05109. Zb 566 # 05045
- Pars78 PARSONS, T.D. *Ramsey graph theory*. Cap. 13 de [BeiW78], 361/384.
- Part71 PARTHASARATHY, K.R. *Combinatorics graph theory and computers. Part I Some applications of graph theory to coding theory*. The Math. Student XXXIX 4 (1971), 425/439.
- *Pea73 PEARL, M. *Matrix theory and finite mathematics*. Mc.Graw Hill (1973). M.R.49 # 311.
- Pet91 PETERSEN, J. *Die Theorie der regulären Graphen*. Acta Math.15 (1891),193/220.
- Petf71 PETITFRÈRE, M. *Sur l'algorithme de Dijkstra pour l'obtention des plus courts chemins dans un graphe*. Cahiers Centre d'Études Rech. Opérat. Vol.13 Nr.3 (1971), 111/123.
- Pie75 PIERCE, A.R. *Bibliography on algorithms for shortest path, shortest spanning tree, and related circuit routing problems (1956-1974)*. Networks 5 (1975), 129/149.

- PnuLE71 PNUELI, A.- LEMPEL, A.- EVEN, S. *Transitive orientations of graphs and identification of permutations graphs.* Canad. J. Math. 23 (1971), 160/175. M.R. 45 # 1800.
- Poll61 POLLACK, M. *Solution of the k-th best route through a network. A review.* J. Math. Analysis Appl. 3 (1961), 547/559.
- PollW60 POLLACK, M.- WIEBENSON, W. *Solutions of the shortest-route problem. A review.* Operations Research 8 (1960), 224/230.
- Pollt74 POLLATSCHEK, M.A. *A necessary and sufficient condition for the existence of hamiltonian paths and circuits and its application to the traveling salesman problem.* Operat. Research Verfahren 19, Hain-Meisenheim am Glan (1974), 88/101. M.R. 55 # 5196. Zb. 367 # 90115.
- Pólya37 PÓLYA, G. *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und Chemische Verbindungen.* Acta Math. 68 (1937), 145/254. Zb. 17 pg. 232.
- *PólyaR87 PÓLYA, G.- READ, R.C. (Edit.) *Combinatorial enumeration of groups, graphs and chemical compounds.* Springer-Verlag (1987). M.R. 89f # 05013
- Pósa62 PÓSA, L. *A theorem concerning hamilton lines.* Magyar Tud. Akad. Kut. Közl 7 (1962), 225/226. M.R. 32 # 2347.
- Pósa76 PÓSA, L. *Hamiltonian circuits in random graphs.* Discrete Math. 14 (1976), 359/364.
- *Pra76 PRATHER, R. E. *Discrete mathematical structures for computer science.* Houghton Mifflin Co. (1976).
- Pre85 PRETZEL, O. *On graphs that can be oriented as diagram of ordered sets.* Order 2 (1985), 25/40. M.R. 87d # 05082. Zb. 571 # 05041.
- Pre86 PRETZEL, O. *Orientations and reorientations of graphs.* Combinatorics and ordered sets (1985), 103/125. M.R. 88e #06007.
- Pre91 PRETZEL, O. *Orientations and edge functions on graphs.* Surveys in Combinatorics (Edit. A.D. Keedwell) -London Math. Soc.Lect. Notes 166. Cambridge Univ. Press (1991), 161/185. M.R. 93e # 05039.

\mathcal{R}

- *Rad75 RADOW von, R. *Introduction to the theory of matroids.* Lect. Notes in Economics 109 Springer-Verlag (1975). M.R. 52 # 10460.
- *Rag71 RAGHAVARAO, D. *Constructions and combinatorial problems in design of experiments.* J. Wiley (1971).
- Ram30 RAMSEY, F.P. *On a problem of formal logic.* Proc. London Math. Soc. 2nd. Ser.30 (1930), 264/286.

- Reimpreso en *The Foundations of mathematics and other logical essays.* (Edit.R.B. Braithwaite) Routledge & Kegan (1931), 82/111.
- Ran84 RANDIC, M. *On molecular identification numbers.* J. Chem. Inf. Comput. Sci. 24 (1984),164/175.
- *Rao78 RAO, S.S. *Optimization theory and applications.* Wiley Eastern (1978). M.R. 82e # 90050.
- Ray68 RAYNAUD, H. *Sur les graphes aleatoires.* Ann. Inst. H. Poincaré Vol.IV (1968), 255/329.
- Read62 READ, R.C. *Euler graphs on labelled nodes.* Canadian J. Math. 14 (1962), 482/486. M.R. 26 # 4338. Zb. 105 pg. 355.
- Read63 READ, R.C. *On the number of self complementary graphs and digraphs.* J. London Math. Soc. 38 (1963), 99/104. M.R. 26 # 4339. Zb. 116 pg. 150.
- Read67 READ, R.C. *Some applications of theorem of de Bruijn.* Cap.9 de [Har67a], 273/280.
- Read70 READ, R.C. *Graph theory algorithms.* Graph Theory and its Applications. (Edit. B. Harris). Acad. Press (1970), 51/78. M.R. 41 # 8281.
- *Read72 READ, R.C. (Edit.) *Graph Theory and Computing.* Acad. Press (1972).
- Read78 READ, R.C. *Some applications of computers in graph theory.* Cap. 15 de [BeIW78], 417/444.
- Read79 READ, R.C. *Algorithms in graph theory .* Cap. 13 de [WilB79], 381/417.
- Read81 READ, R.C. *A survey of graph generation techniques.* Lect. Notes in Math. 884. Springer-Verlag (1981), 77/89
- Read87 READ, R.C. *The legacy of Pólya paper. Fifty years of Pólya theory.* Cap. 5 de [PólyaR87], 96/135.
- ReadC77 READ, R.C.- CORNEIL, D.R. *The graph isomorphism disease.* J. Graph Th. 1 (1977), 339/363. M.R. 58 # 5412.
- Réd34 RÉDEI, L. *Ein Kombinatorischer Satz.* Acta Litt Sci. Szeged 7 (1934), 39/43.
- Redf27 REDFIELD, J.H. *The theory of group-reduced distributions.* Amer. J. Math. 49 (1927), 433/455.
- ReiB78 REID, K.B.- BEINEKE, L.W. *Tournaments.* Cap. 7 de [BeIW78], 169/204.
- Rib79 RIBENBOIM, P. *Vector space graphs.* Nanta Math. 12-2 (1979), 125/132.

- *Rib89 RIBNIKOV, K. *Análisis combinatorio. Problemas y ejercicios.* MIR (1989).
- Rich67 RICHARDS, P.I. *Precedence constraints and arrow diagrams.* S.I.A.M. Review 9 (1967), 548/553. Zb. 149 pg 417.
- Riha91 RIHA, S. *A new proof of the theorem by Fleischner.* J. Comb. Th. B 52 (1991), 117/123. M.R. 92d # 05097. Zb. 759 # 05061
- *Rio58 RIORDAN, J. *An introduction to combinatorial analysis* J.Wiley (1958/80). M.R. 20 # 3077; 81e 05002.
- *Riv82a RIVAL, I. (Edit.) *Ordered sets. Proc. NATO at Banff- Canada-1981.* D. Reidel Publ. Co. (1982). M.R. 83e # 06003. Zb. 484 # 00004
- Riv82b RIVAL, I. *A bibliography.* en [Riv82a], 865/966. Zb. 521 # 06004.
- *Riv85a RIVAL, I. (Edit.) *Graphs and orders. The role of graphs in the theory of ordered sets and its applications. Proc. NATO at Banff- Canada-1984.* D. Reidel Publ. Co. (1985), M.R. 86j # 05006. Zb. 549 # 00002.
- Riv85b RIVAL, I. : *The diagram.* en [Riv85a], 103/133. M.R. 87a # 06007. Zb. 558 # 05059.
- Riv85c RIVAL, I. *A bibliography.* en [Riv85a], 591/778. Zb. 561 # 00026.
- *Riv86 RIVAL, I. (Edit.) *Combinatorics and ordered sets.* Proc.AMS-IMM-SIAM Conf. at Humboldt Stare Univ. 1985. Contemporary Math. Vol. 57 Amer. Math. Soc.(1986) M.R. 87d # 06001. Zb. 588 # 00011.
- *Riv89a RIVAL, I. (Edit.) *Algorithms and order. Proc. NATO at Ottawa- Canada-1987.* Kluwer Publ. (1989). M.R. 90j # 06002.
- Riv89b RIVAL, I. *Graphical data structures for ordered sets.* en [Riv89a], 3/31. M.R. 91k # 06007.
- Robb39 ROBBINS, H.E. *A theorem on graphs with an application to a problem of traffic control.* The Amer. Math. Monthly 46 (1939), 281/283. Zb. 21 pg. 357.
- *Robe76 ROBERTS, F. S. *Discrete mathematical models (with applications to social, biological and environmental problems).* Prentice Hall (1976). M.R. 81h # 05050.
- *Robe78 ROBERTS, F. S. *Graph theory and its applications to problem of society.* S.I.A.M. (1978). M. R. 80g # 90036.
- Robe79 ROBERTS, F. S. *Graph theory and social sciences.* Cap. 9 de [WilB79], 255/291.
- RobeF68 ROBERTS, F. S.- FERLAND, J. *Généralisation de l'algorithme de Warshall.* Rev. Franç. Inform. Rech. Opérat. RIRO (1968), 71/85. M.R.38 # 3086. Zb.172 pg.206.

- Robi69 ROBINSON, R.W. *Enumeration of Euler graphs*. en [Har69a], 147/153. M.R. 40 # 7154.
- Rosf71 ROSENFELD, M. *How many graphs have n vertices and k cliques ?* The Amer. Math. Monthly 78 (1971), 49/50.
- Rost71 ROSENSTIEHL, P. *Labyrinthologie mathématique*. Math.et. Sciences Humaines Nro. 33 (1971), 5/32. M.R. 47 # 4826. Zb. 228 # 05127.
- Rost73 ROSENSTIEHL, P. *Les mots de labyrinthe*. Cahiers Centre d'Études Rech. Opérat. (CERO) 15 (1973), 245/252. M.R. 50 # 4384. Zb 273 # 05128.
- *Rot78 ROTA, G.C. (Edit.) *Studies in combinatorics*. Vol. 17 de MAA Studies in Mathematics. The Math. Association of America. (1978).
- RotS77 ROTA, G.C.- SMITH, D.A. *Enumeration under group action*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 4 (1977), 637/646. M.R. 58 # 16326.
- *RouB92 ROUSE BALL, W.W. *Mathematical recreations and essays*.(1892). (Revisado y ampliado por COXETER, H.S.M. 1938). The Mac Millan Co. New York. XIa edición, (1960). Zb. 92 pg.159.
- Rouv85 ROUVRAY, D.H. : *Topological indices as chemical behavior descriptions*. Congressus Numerantium 49 (1985), 161/179. M.R. 87g # 92059.
- Rouv86 ROUVRAY, D. H. *Predicting chemistry from topology*. Sci. Amer. 255 (1986), 40/47 M.R. 87h # 92102.
- RouvB79 ROUVRAY, D.H.- BALABAN, A.T. *Chemical applications of graph theory*. en [WilB79], 177/221.
- Roy59 ROY, B. *Transitivité et connexité* C. R. Acad. Sci. Paris 249 (1959), 216/218. M.R. 22A pg. 677. Zb. 92 pg.159.
- *Roy62a ROY, B. *Cheminement et connexité dans les graphes . Applications aux problèmes d'ordonnement*. Metra Nro. 1- Série Speciale. (1962).
- Roy62b ROY, B. *Graphes et ordonnancements*. Revue Franç. Recher. Opérat. (RFRO), 25 (1962), 323/333.
- *Roy64 ROY, B. *Contribution des graphes aux problèmes d'ordonnement. Les problèmes d'ordonnement. Applications et méthodes*. Dunod (1964) , 109/125.
- Roy66 ROY, B. (Edit.) *L'ordonnement. (Numéro special)*. Revue Franç. Recher. Opér. (RFRO) 10éme.année 38 (1966).
- *Roy69 ROY, B. *Algèbre moderne et théorie des graphes (Vol. I-II)*. Dunod (1969/70). M.R. 40 # 4159; 41 # 5039. Zb. 238 # 90072/73.

*Roy74 ROY, B. *Chemins et circuits. Enumération et optimisation*. SEMA-METRA-Rapport de Recherche 76 (1974), 1/48.

*Rys63 RYSER, H. J. *Combinatorial mathematics*. The Carus Math. Monog.XIV. The Math. Assoc.of America (1963). MR. 27 pg. 51. Zb. 112 pg. 248.

S

Sab64 SABIDUSSI, G. *Infinite Euler Graphs*. Canad. J. of Math. XVI (1964), 821/838. M.R. 29 # 6489.

*Sah81 SAHNI, S. *Concepts in discrete mathematics*. The Camelot Publishing Co. (1981). Zb. 284 # 05109.

*SaiL26 SAINT LAGÛE, A. *Avec des lignes et des nombres*. Mémorial des Sciences Mathématiques. Fasc. XVIII (1926). 3ra edición Vuibert (1946).

Sak68 SAKAROVITCH, M. *The k shortest chains in a graph*. Transp. Res. 2 (1968), 1/ 11.

*Sak84a SAKAROVITCH, M. *Optimisation Combinatoire. Graphes et programmation linéaire*. Hermann (1984).

*Sak84b SAKAROVITCH, M. *Optimisation Combinatoire. Programmation discrete*. Hermann (1984).

ScheH74 SCHMEICHEL, E.F.- HAKIMI, S. L. *Pancyclic graphs and a conjecture of Bondy and Chvátal*. J. Comb. Th. B 17 (1974), 22/34. M.R. 55 # 10323. Zb. 268 # 05120.

ScheH88 SCHMEICHEL, E.F.HAKIMI, S.L. *A cycle structure theorem for hamiltonian graphs*. J. Comb. Th. B 45 (1988), 99/107. M.R. 89j # 05051. Zb. 607 # 05050.

ScheM82 SCHMEICHEL, E.F.- MITCHEM, J. *Bipartite graphs with cycles of all even lengths*. J. Graph Theory 6 (1982), 429/439. M.R. 84j # 05072. Zb. 502 # 05036.

Schr83 SCHRIJVER, A. *Bounds on the number of Eulerian orientations*. Combinatorica 3 (1983), 375/380. M.R. 85g # 05100. Zb. 529 # 05031.

Schw72 SCHWENK, A. J. *Acquaintance graph party problem*. The Amer. Math. Monthly 79 (1972), 1113/1117.

SchwW78 SCHWENK, A.J.- WILSON, R.J. *On the eigenvalues of a graph*. Cap.11 de [BeiW78], 307/336.

Sed64 SEDLACEK, J. *Some properties of interchange graphs*. Theory of Graphs and its Applications (Edit.M.Fiedler). Academic Press (1964), 145/150. M.R. 30 # 3468.

Sek60 SEKANINA, M. *On an ordering of the set of vertices of a connected graph*. Publ. Fac. Sci. Univ. Brno 412 (1960), 137/142. M.R. 25 # 3518.

- Sek63 SEKANINA, M. *On an ordering of the set of vertices of a graph.* Casopis Pěst. Mat. 88 (1963), 265/282.
- *SesR61 SESHU, S.- REED, M.B. *Linear graphs and electrical networks.* Addison-Wesley (1961). M.R. 26 # 4638.
- Sha79 SHANK, H. *Some parity results on binary vector spaces.* Ars Combin. 8 (1979), 107/108. M.R. 81a # 05073. Zb. 434 # 05026
- *Sim62 SIMONNARD, M. *Programation linéaire.* Dunod (1962)
Programación Lineal. Paraninfo (1972).
- Simn83 SIMONOVITS, M. *Extremal graph theory.* Cap. 6 de [BeiW83], 161/200.
M.R. 86i # 05089.
- Spi89 SPINADEL, V.W. *Las redes y sus aplicaciones.* Rev. de Educación Matemática, (REM), Vol. 4 Nro.1(1989), 55/82.
- Spira73 SPIRA, P.M. *A new algorithm for finding all shortest paths in a graph of positive arcs in average time $O(n^2 \cdot (\log n)^2)$.* SIAM J. Computing 2 (1973), 28/32.
- Stal83 STALLINGS, J.R. *Topology of finite graphs.* Invent. Math. 71 (1983), 551/565.
M.R. 85m # 05073a
- *Stan41 STANDISCH, Th. A. *Data structure techniques.* Addison-Wesley (1941).
- StanK79 STANTON, R.G.- KALBFLEICH, J.G. *Introduction to Ramsey theory.* Lect. Notes in Math. 829. Springer-Verlag (1979/80), 1/28.
- Stein61 STEIN, S.K. *The mathematician as an explorer.* Scientific American 204 (1961), 149/158. M.R.22A # 7945.
- *Stein63a STEIN, S.K. *Mathematics. The Man-made Universe.* W.H. Freeman Co.(1963/69),
Les mathématiques, ce monde que créa l'homme. Dunod, (1967))
- Stein63b STEIN, S.K. *The complete triangle.* Cap.2 de [Stein63a], 16/31.
- Stein63c STEIN, S.K. *Memory wheels. (Les roués à memoire)* Cap.10 de [Stein63a], 140/151.
- Stez22 STEINITZ, E. *Polyeder und Raumeinteilungen.* Enzickl. Math. Wiss. Teubner Vol 3- 3 (1922), 1/139.
- Sto75 STOCKMEYER, P.K. *The reconstruction conjecture for tournaments.* Proc.Sixth Conf. Comb. Graph Th. and Computing (Edit.Hoffmann). Congressus Numerantium XIV (1975), 561/566. M.R. 52 # 13475. Zb. 323 # 05110.
- Sto76 STOCKMEYER, P.K. *New counterexamples to the digraph reconstruction conjecture.* Notices Amer. Math. Soc. 23 A-654.

- Sto77 STOCKMEYER, P.K. *The falsity of the reconstruction conjecture for tournaments* J. Graph Th. 1 (1977), 19/25. M.R. 56 # 11846. Zb. 355 # 05026.
- Sum74a SUMNER, D.P. *Graphs with 1-factors*. Proc. Amer. Math. Soc. 42 (1974), 8/12. M.R. 48 # 2004. Zb. 293 # 05157.
- Sum74b SUMNER, D.P. *On Tutte's factorization theorem*. Lect. Notes in Math.406 Springer-Verlag (1974), 350/355.
- *SwaT81 SWAMY, M.N.S.- THULASIRAMAN, K. *Graphs, networks and algorithms*. J. Wiley, (1981/92). M.R. 82j # 94030; 93f # 05002. Zb. 528 # 94034.
- Syl78 SYLVESTER, J.J. *On an application of the new atomic theory to the graphical representation of the invariants and covariants of binary quantics*. Amer. J. Math. 1 (1878), 64/125. (Idem Collected Papers, Vol 3, 148/206).
- Sys74 SYSLO, M.M. *Remarks on line-digraphs*. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astron. Phys. XXII. (1974), 5/10. M.R. 52 #7957. Zb. 273 # 05114.

\mathcal{T}

- Tab73 TABOURIER, Y. *All shortest distances in a graph. An improvement to Dantzig's inductive algorithm*. Discrete Math. 4 (1973), 83/87. M.R. 47 # 1672.
- Tait80 TAIT, P.G. *Remarks on the colouring of maps*. Proc. Royal Soc. Edinburgh 10 (1878-80), 501/503 - 729.
- Tait84 TAIT, P.G. *Listings topologie*. Phil. Mag. (Series 5) 17 (1884), 30/36. Scientific Papers Vol. II, 85/98.
- Tar78 TARJAN, R.E. *Complexity of combinatorial algorithms*. SIAM Review 20 (1978), 457/491
- *Tar83 TARJAN, R.E. *Data structures and networks algorithms*. SIAM Soc. for Indust. Appl. Math. SIAM (1983/91).
- Tarr95 TARRY, G. *Le problème des labyrinthes*. Nouvelles Annales Mathématiques, XIV (1895),187/190.
- Tho74a THOMASSEN, C. *On hypohamiltonian graphs*. Discrete Math. 10 (1974), 383/390. M.R. 50 # 9694. Zb. 272 # 05115.
- Tho74b THOMASSEN, C. *Graphs in which every path is contained in a Hamiltonian path*. J. Reine Angew. Math. 268/269 (1974), 272/282. M.R. 50 # 1977.
- Tho77 THOMASSEN, C. *An Ore-type condition implying a digraph to be pancyclic*. Discrete Math. 19 (1977), 85/92. M.R. 58 # 21776. Zb. 361 # 05034.

- Tho78a THOMASSEN, C. *Hypohamiltonian graphs and digraphs*. Lect. Notes in Math. 642 Springer-Verlag (1978), 557/571. M.R. 80e # 05079.
- Tho78b THOMASSEN, C. *Reconstructibility versus edge reconstructibility of infinite graphs*. Peprint Series 1977/78. 20 Aarhus Mat. Inst. (1978). Zb. 374 # 05045.
- Tho82 THOMASSEN, C. *Duality of infinite graphs*. J. Comb. Th. B 33 (1982), 137/160. M.R. 84g # 05098. Zb. 501 # 05054.
- Tho83a THOMASSEN, C. *Infinite graphs*. Cap. 5 de [BeiW83], 129/160. Zb. 526 # 05021.
- Tho88 THOMASSEN, C. *Paths, Circuits and Subdivisions*. en [BeiW88], 97/131.
- Till80 TILLSON, T.W. *A hamiltonian decomposition of $K_{2,m}^s$, $2.m \geq 8$* . J. Comb. Th. B 29 (1980), 68/74. M.R. 82e # 05075. Zb. 439 # 05025.
- Toi73 TOIDA, S. *Properties of an Euler graph*. J. Franklin Inst. 295 (1973), 343/345. M.R. 48 # 10906.
- Tom66 TOMESCU, I. *Sur les méthodes matricielles dans la théorie des réseaux*. C. R. Acad. Sci. Paris 263 (1966), 826/829. M.R. 34 # 3113. Zb.152 pg. 147.
- Tom67 TOMESCU, I. *Méthode pour la détermination de la fermeture transitive d'un graphe fini*. Rev. Franc. Informat. Rech. Opérat. 4 (1967), 33/37. M.R. 36 # 5020. Zb. 173 pg. 264.
- Tom68 TOMESCU, I. *Sur l'algorithme matriciel de B. Roy*. Rev. Franç. Inform. Rech. Opérat. 7 (1968), 87/91. M.R. 38 # 1041. Zb. 179 pg. 293.
- *Ton88 TONCHEV, V.D. *Combinatorial configurations, designs, codes, graphs*. (trad. del búlgaro). J. Wiley (1988). M.R. 89f # 05025.
- *Tor76 TORANZOS, F. A. *Introducción a la teoría de grafos*. Monografías O.E.A. Serie Matemática. Nro. 15 (1976).
- Tra63 TRAHTENBROT, B.A. *Algorithmes et machines à calculer*. Monog. Dunod (1963) *Algorithms and automatic computing machines*. Heath (1966). (traducciones de *Algorithmi I Machinnoie*. Rechenie Zadotch).
- Tre93 TREITZ, K. *The jubilee maze*. The Mathematical Intelligencer 15-4 (1993), 54/57.
- *Tri83 TRINAJSTIC, N. *Chemical graph theory*. (Vol. I-II) C.R.C.Press Inc.(1983/92). M.R. 86g # 92044 // 93g # 92034.
- Tro66 TROTTER, W.T. *Partially ordered sets*. Cap 8 de [GraGL66], 433/480.
- Tro83 TROTTER, W.T. *Graphs and partially ordered sets*. Cap. 8 de [BeiW83], 237/268. M.R. 87c 06005. Zb. 522 # 05023.

- TroM76a TROTTER, W.T.- MOORE, J.L. *Some theorems on graphs and posets.* Discrete Math. 15(1976), 79/84.
- TroM76b TROTTER, W.T.- MOORE, J.L. *Characterization problems for graphs, partially ordered sets, lattices and families of sets.* Discrete Math. 16 (1976), 361/381.
- Tuc76 TUCKER, A. *A new applicable proof of the Euler circuit theorem.* The Amer. Math. Monthly 83 (1976), 638/640. M.R. 55 # 177. Zb. 337 # 05125.
- *Tuc80 TUCKER, A. *Applied Combinatorics.* J. Wiley (1980/85). M.R. 82f # 05001.
- TucB50 TUCKER, A.- BAILEY, H.S. *Topology.* Scientific American -January (1950).
- Tur41 TURAN, G. *On an extremal problem in graph theory.* Mat. Fiz. Lapok 48 (1941), 436/452. M.R. 8 pg. 284. (en húngaro).
- Tur54 TURAN, G. *On the theory of graphs.* Colloq. Mathematicum III (1954), 19/30. M.R. 15 pg. 976.
- Tut46 TUTTE, W.T. *On hamiltonian circuits.* J. London Math. Soc. 21 (1946), 98/101. M.R. 8 pg. 397.
- Tut47 TUTTE, W. T. *The factorizations of linear graphs.* J. London Math. Soc. XXII (1947) 107/111. M.R. 9 pg. 297.
- Tut50 TUTTE, W.T. *The factorization of locally finite graphs.* Canad. J. Math. 43 (1950), 44/49. Zb. 11 pg. 377.
- Tut52 TUTTE, W.T. *The factors of graphs.* Canad. J. Math. 4 (1952), 314/328. M.R. 14 # 67.
- Tut54 TUTTE, W.T. *A short proof of the factor theorem for finite graphs.* Canad. J. Math. 6 (1954), 347/352. M.R. 16 # 57.
- Tut56 TUTTE, W.T. *A theorem on planar graphs.* Trans. Amer. Math. Soc 82 (1956), 99/116. M.R. 18 pg. 408. Zb. 70 pg. 184.
- Tut59 TUTTE, W.T. *Matroids and graphs.* Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959), 527/552.
- Tut63a TUTTE, W.T. *How to draw a graph.* Proc. London Math. Soc. 13 (1963), 743/767. M.R. 28 # 1610.
- Tut71 TUTTE, W.T. *Introduction to theory of matroids.* Amer. Elsevier (1971). M.R. 43 # 1865.
- Tut77 TUTTE, W.T. *Bridges and hamiltonian circuits in planar graphs.* Aequations Math. 15 (1977), 1/33.
- *Tut84 TUTTE, W.T. *Graph theory.* Addison-Wesley (1984). M.R. 87c 05001.

\mathcal{U}

Und78 UNDERGROUND P. *On graphs with hamiltonian squares*. Discrete Math. 21 (1978), 323.

\mathcal{V}

Vau52 VAUGHAN, H.E. *On well ordered subsets and maximal elements of ordered sets*. Pacific J. Math. 2 (1952), 407/412.

*Veb22 VEBLER, O. *Analysis Situs*. Amer. Math. Soc. Colloq. Public. 5 (1922/31), 1/39.

*Voss91 VOSS, H.J. *Cycles and bridges in graphs*. Kluwer Acad. Publ. (1991). M.R. 92m # 05118. Zb. 731 # 05031.

\mathcal{W}

*WagB89 WAGNER, K.- BODENDIEK, R. y otros (Edit.) *Graphentheorie. (Band. I-II)*. Bibl. Inst. Mannheim (1989/90). M.R. 93g # 05002–05003

Walk76 WALKER, R.C. *A graph-colouring theorem*. The Mathematical Gazette 60 (1976), 54/57. M.R. 55 # 2637.

Walt69 WALTHER, H. *Über eine Anordnung der Knotenpunkte kubischer Graphen*. Mathematic Casopis 19 (1969), 330/333.

*Walt84 WALTHER, H. *Anwendungen der Graphentheorie*. VEB Deutscher Verlag (1984) *Ten applications of graph theory*. Reidel Publ. Co.(1984)

War75 WARREN, H.S. *A modification of Warshall's algorithm for the transitive closure of binary relations*. Comm. A.C.M. 18 (1975), 218/220.

Wars62 WARSHALL, S. *A theorem on boolean matrices*. J. Assoc. Comput. Mach. (JACM) 9 (1962), 11/13. M.R. 26 # 7173. Zb. 118 pg. 331.

Wel66 WELSH, D.J.A. *Matroids. Fundamental Concepts*. Cap. 9 de [GraGL66], 481/526.

*Wel76 WELSH, D.J.A. *Matroid theory*. London Math. Soc. Monograph 8 (1976). M.R. 55 # 148.

Wel88 WELSH, D.J.A. *Matroids and their applications*. Cap. 3 de [BeiW88], 43/70.

*Whi73 WHITE, A.T. *Graphs, groups and surfaces*. North Holland (1973/84). M.R.49 # 4783 / 86d # 05047. Zb 268 # 05102.

WhiB78 WHITE, A.T.- BEINEKE, L.W. *Topological graph theory*. Cap. 2 de [BeiW78], 15/49

- Whit31 WHITNEY, H. *A theorem on graphs*. Ann. of Math. 32 (1931), 378/390.
- Whit32 WHITNEY, H. *Congruent graphs and the connectivity of graphs*. Amer. J. Math. LIV- (1932), 150/168. Zb 3 pg 228.
- Whit33 WHITNEY, H. *2-isomorphic graphs* Amer. J. Math. LV-2 (1933), 245/254. Zb 6 pg. 370.
- Whit35 WHITNEY, H. *On the abstract properties of linear dependence*. Amer. J. of Math. LVII (1935), 509/539.
- Wien73 WIENER, C. *Über eine Aufgabe aus der Geometria situs*. Math. Ann. 6 (1873), 29/30.
- Wilf71 WILF, H.S. *The friendship theorem*. Combinat. Math. and its Applications. (Edit. D.J Welsh) Acad. Press (1971), 307/309. M.R. 44 # 91. Zb. 226 # 05002.
- *Wil72 WILSON, R. J. *Introduction to graph theory*. Acad. Press (1972). Longman (1979/85) M.R.50 # 9643/ / 87a # 05051. Zb. 249 # 05101 // 458 # 05024.
- Wil73 WILSON, R.J. *An introduction to matroid theory*. The Amer. Math. Monthly 80 - 5 (1973), 500/525. M.R. 80d # 92041.
- Wil78a WILSON, R. J. *200 years of graph theory. A guided tour*. Lect. Notes in Math. 642. Springer (1978), 1/9. Zb. 374 # 05001.
- Wil86 WILSON, R.J. *An eulerian trail through Königsberg*. J. Graph Theory 10 (1986), 265/275. M.R. 88a # 01015. Zb 607 # 05048.
- *WilB79 WILSON, R.J.- BEINEKE, L .W. (Edit.) *Applications of graph theory*. Acad. Press (1979). M.R. 81h # 05050. Zb. 426 # 00006.
- Woo72 WOODALL, D.R. *Sufficient conditions for circuits in graphs*. Proc. London Math. Soc.Third Series Vol. XXIV (1972), 739/755. Zb. 233 # 90004.
- Woo78a WOODALL, D.R. *A sufficient condition for hamiltonian circuits*. J. Comb. Th. B 25 (1978), 184/186. M.R. 80e # 05080.
- Wood78b WOODALL, D.R. *Menger and König systems*. Lect. Notes in Math. 642. Springer-Verlag (1978), 620/635. Zb. 391 # 05016.
- Woo78c WOODALL, D.R. *Minimax theorems in graph theory* Cap. 9 [BeiW78], 237/269.
- Woo90 WOODALL, D.R. *A proof of McKee's eulerian-bipartite characterization*. Discrete Math. 84 (1990), 217/220. M.R. 91f # 05081. Zb. 744 # 05030.
- WooW78 WOODALL, D.R.- WILSON, R.J. *The Appel-Haken proof of the four-color theorem*. Cap. 4 de [BeiW78], 83/101. Zb. 432 # 05025.

Υ

- *Yen75 YEN, J.Y. *Shortest path network problems*. Lect. Math. Syst. in Economics 18 Verlag (1975).
You63 YOUNGER, D.H. *Minimum feedback arc sets for a directed graph*. I.E.E.E. Trans. Circuit Theory CR-19 (1963), 238/245.

Z

- Zyk49 ZYKOV, A.A. *On some properties of linear complexes*. Amer. Math. Soc. Translation 79 (1952), 418/449. M.R. 14 pg. 493. (traducción de Math. Sbornik 24 (1949), 163/188. M.R.11 pg.733).
Zyk74 ZYKOV, A.A. *Hypergraphs*. Russian Math. Surveys 29 (1974), 89/156.
-

INDICE DE TERMINOS

acoplamiento	33	centro de G	97
" perfecto (completo)	33		
árbol	118	ciclos (circuitos)	107
		– absorbentes	224
		– independientes	111
arcos (x, y)	9	clanes	27
– adelante (atrás)	89	clausuras de Γ	
– adyacentes	12	– reflexiva (Γ^{re})	38
– críticos	223	– reflexivo-transitiva (Γ^{retr})	38
– de entrada (salida)	11	– simétrica (Γ^{sim})	38
– opuestos	13	– transitiva ($\Gamma^{tr} = \Gamma^*$)	38
– paralelos	12		
aristas $[x, y]$	9	cociclo	112
– adyacentes	12	componente	
– independientes	12	– fuertemente conexa	121
– paralelas	12	– simplemente conexa	95/115
– pendientes	12	conexidades	
– puentes	107	– débil (simple)	95/115
– ramas (cuerdas)	119	– fuerte	121
– bucles	11	– unilateral	121
cadena		configuración	10
– geodésicas	96	deficiencia de G ($\delta_0(G)$)	36
– M-alternadas	94	diámetro de G	97
– opuestas	89	distancia $(d(a, b))$	95
– orientables	88	– " orientada ($d_0(a, b)$)	97
camino (cadenas)	85/88	– " generalizada	223
– abiertos	86/88	estrella	40
– cerrados	86/88	– positiva (negativa)	39
– críticos	223	excentricidad	97
– elementales	85/88		
– eulerianos	168		
– hamiltonianos	187		
– nulos	85/88		
– óptimos (máx. mín.)	223		
– simples	85/88		

di-factor (k -difactor) de G	31	– nilpotente	128
		– precedencia	61
digrafo (ver multidigrafo)	9	– precedencia booleana	66
– adjunto	52	– primitiva	130
– antisimétrico (antis.débil)	38	– totalmente unimodular	66
– inverso (G^{-1})	13		
– reflexivo (antirreflexivo)	38	multi-di-grafo	10
– simétrico	13	– aleatoriamente euleriano	176
– torneo	16	– “ hamiltoniano	194
– transitivo	38	– automorfo	23
		– bipartido (bicolorable)	17
factor (k -factor) de G	30	– “ representativo	17
		– cociente según R (G/R)	46
grado de v ($gr(v)$)	40	– completamente cíclico	114
– negativo ($gr^{-}(v)$)	39	– “ hamiltoniano	194
– positivo ($gr^{+}(v)$)	39	– conexo (disconexo)	115
		– de orden n	11
grafo (ver multigrafo)	9	– diferencia simétrica	55
– adjunto	51	– discreto	9
– arista isomorfo	24	– 2-conexo	121
– autocomplementario	50	– etiquetado	70
– bipartido completo ($K_{p,q}$)	17	– euleriano (eul.débil)	168
– complementario	49	– hamiltoniano (ham.débil)	187
– completo (K_n)	15	– hipohamiltoniano	194
– cúbico	41	– intersección (unión) de	55
– de comparabilidad	124	– isomorfo (homomorfo)	21/22
– de intersección	54	– planar (plano)	20
– k -clausura	205	– signado (valuado)	70
– k -partido completo	77	– trivial	11
– rueda	18	– vacío	9
– subdivisión	47		
		multidigrafo (multi-di-grafo)	9
matriz		– balanceado (arco)	39
– accesibilidad	133	– cociente (s/f-conexidad)	121
– adyacencia	64	– conexo unilateral	121
– adyacencia booleana	66	– fuertemente conexo	121
– arco precedencia	63	– k -difactor	31
– arista adyacencia	65	– k -dirregular	39
– ciclo elemental	111	– k -partido	77
– cociclo elemental	112	– opuesto (inverso) (G^{op})	13
– incidencia	62	– simétrico	13
– irreducible	132	– simetrizado de G (G^s)	14



multigrafo (multi-di-grafo)	9	sucesión gráfica	44
– acíclico	108	– “ estrictamente gráfica	44
– homeomorfos	47	subgrafo cadena (camino)	93
– k -ésima potencia de G	49	“ simple	151
– k -ésima subdivisión	47	submultidgrafo de $G=(V,U)$	26
– k -factor (factorisable)	30	– “ cubriente de G	26
– par	41	– “ inducido por V' (G/V')	26
– regular (k -regular)	41	– “ “ por U' (G/U')	26
– sostén de G (\underline{G})	14	– maximal (minimal)	27
– sumergido (inmerso)	47	tablas de	
– unicursal	168	– adyacencia	63
número ciclomático	120	– incidencia	60/63
– “ cociclomático	120	– precedencia	61
p -digrafo (p -grafo)	12	vértices	
radio de G	97	– accesibles desde...	86
relaciones		– adyacentes	12
– ver Cap. 1	1–8	– aislados	10
– de adyacencia	36	– de corte (articulación)	120
– de incidencia	10	– de entrada (salida)	11
– de precedencia	35	– independientes	12
representaciones		– M -saturados	94
– matriciales	58	– pendientes	12
– tabulares	58	– precedente (sucesor)	12
– topológicas /geométricas	19	– raíz (antirraíz)	87
– “ limpias	20	– soporte	13