

I.T.I. 88



INFORME TECNICO INTERNO

Nº. 88

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA
INMABB (UNS - CONICET)



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina



INFORME TÉCNICO INTERNO

UNS-CONICET
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
BIBLIOTECA "DR. ANTONIO MONTEIRO"

LIBRO No
VOL.
EJ.

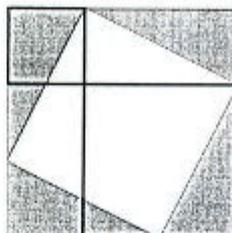
Nº 88

INSTITUTO DE MATEMÁTICA DE BAHÍA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)

UNS-CONICET
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
BIBLIOTECA "DR. ANTONIO MONTEIRO"

LIBRO No *ITI*
VOL. *88*
EJ.



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 2004 -





INFORME TÉCNICO INTERNO N° 88

Condiciones calificadoras en programación no lineal

Marta A. Casamitjana

Universidad Nacional del Sur

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 2004



Estas notas son parte de una charla que desarrollé en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Cuyo, en el marco del Proyecto "Estabilidad en Programación Semi Infinita" del cual soy integrante.

Marta A. Casamitjana



Condiciones calificadoras en programación no lineal

En los problemas de programación no lineal los multiplicadores de Lagrange no sólo son útiles para caracterizar las soluciones del problema, sino que también brindan información para analizar la sensibilidad de la solución frente a pequeñas variaciones de los datos. También pueden ser usados para deducir métodos computacionales para hallar la solución local del problema.

Se considera el siguiente problema de programación no lineal (PNL)

$$\begin{cases} \min \mathcal{J}(x) \\ \text{s.a. } x \in X \end{cases}$$

donde

$X = \{x \in X^0 : g(x) \leq 0\}$, es el conjunto factible,
 E^n es un espacio vectorial lineal finito-dimensional,
 \mathcal{J} es la función objetivo, diferenciable sobre X , $\mathcal{J} : X^0 \subset E^n \rightarrow E^1$,
la función vectorial $g = (g_i)$, $g : X^0 \rightarrow E^m$ es la función cuyas componentes, restricciones del problema, son funciones diferenciables en X^0 .

$$x^* \in X \quad \text{es una solución del PNL si } \mathcal{J}(x^*) = \min_{x \in X} \mathcal{J}(x) > -\infty.$$

Para analizar y resolver este tipo de problemas se usan teoremas de tipo Karush-Tucker (K-T). Usualmente las condiciones necesarias de K-T se establecen como en el siguiente teorema.

Teorema 1.- Si x^* es una solución del PNL y si el gradiente de \mathcal{J} y g son finitos en x^* , y una condición calificadora (CC) se verifica entonces existe $\mu \in E^m$ tal que

(i) $\nabla \mathcal{J}(x^*) + \mu \nabla g(x^*) = 0$

(ii) $\mu g(x^*) = 0$

(iii) $\mu \geq 0$

En este trabajo se trata de rescatar los resultados más relevantes de David Peterson, expuestos en *A Review of constraint qualifications in finite-dimensional spaces*. (1973), [0].

- Se reúnen de numerosas fuentes CC usadas en conjunción con la condición necesaria de Khun-Tucker.
- Se las relaciona en un diagrama sobre la base de sus mutuas implicaciones.
- Se describen nuevas implicaciones.
- Se identifican nuevas CC.
- Se justifica con ejemplos los casos en que no se verifican relaciones de implicación.

Se omiten las demostraciones varias de las cuales pueden ser consultadas en el trabajo recién mencionado.

Por qué el interés sobre las condiciones calificadoras y las relaciones entre las mismas?

- Los teoremas de condiciones necesarias tipo K-T involucran en su enunciado generalmente una CC.
- Ciertas CC son más fácilmente verificables que otras, dependiendo de las características propias del problema.
- La demostración de un teorema tipo K-T puede facilitarse si se elige adecuadamente la CC. Es de interés conocer hasta que punto un tal teorema depende de la particular elección de la CC.

Un gran número de condiciones calificadoras pueden expresarse fácilmente como equivalencias entre conjuntos. Para definir tales conjuntos se introduce la siguiente notación.

$g_A(x)$ vector que se obtiene de $g(x)$ eliminando aquellas componentes que que no son nulas, es decir, es el subvector de las **restricciones activas**.

$\nabla g_A(x^*)$ matriz gradiente del subvector de las restricciones activas evaluada en x^*

$g_A(x)$ subvector de **restricciones activas no cóncavas**.

$\nabla g_A(x^*)$ matriz gradiente del subvector de las restricciones activas no cóncavas, en x^*

g_A subvector de las **restricciones activas cóncavas**

$\nabla g_A(x^*)$ matriz gradiente del subvector de las restricciones activas cóncavas, en x^*

$g_{AN}(x)$ subvector de las **restricciones activas no lineales**

$\nabla g_{AN}(x^*)$ matriz gradiente del subvector de las restricciones activas no lineales, en x^*

$g_{AL}(x)$ subvector de **restricciones activas lineales**

$\nabla g_{AL}(x^*)$ matriz gradiente del subvector de las restricciones activas lineales, en x^*

$p \leq q$, menor o igual componente a componente

$p < q$, cada componente de p estrictamente menor que la correspondiente de q .

$p = q$, cada componente de p estrictamente igual a la correspondiente de q

$p \leq q$, significa $p < q$ y $p = q$

Se definen los siguientes conjuntos y se indica si son abiertos, cerrados, convexos, conos. Luego se ordenan, a partir de sus respectivas inclusiones en un diagrama.

Nótese que varios de los conjuntos definidos dependen de un elemento

$x^* \in X$, donde

$$X = \{x \in X^0 : g(x) \leq 0\}$$

$$\mathcal{D} = \{y \in E^n : \nabla g_A(x^*)y \leq 0\} \quad (\text{cono cerrado convexo})$$

$$\mathcal{T} = \{y \in E^n : \exists \langle x_k \rangle_1^\infty, \exists \langle \lambda_k \rangle_1^\infty : x_k \in X, \lambda_k \geq 0, x_k \rightarrow x^*, \lambda_k(x_k - x^*) \rightarrow y\} \quad (\text{cono cerrado})$$

$$\mathcal{P} = \overline{\{\mathcal{T}\}} \quad \text{La clausura de la cápsula convexa de } \mathcal{T}, \quad (\text{cono cerrado convexo})$$

$$\mathcal{S} = \{y \in E^n : \exists \langle x_k \rangle_1^\infty, \exists \alpha > 0 : x_k \in X, x_k \neq x^*, x_k \rightarrow x^*, (x_k - x^*)/\alpha \|x_k - x^*\| \rightarrow y\} \cup \{0 \in E^n\},$$

(cono cerrado) (\mathcal{S} es el cono tangente a X en x^* , si X es convexo entonces \mathcal{S} es convexo)

$$\mathcal{E}_H = \{y \in E^n : \exists e : [0,1] \rightarrow X, \exists \lambda > 0 : e(0) = x^*, e' \text{ exists and equals } \lambda y\} \quad (\text{cono cerrado})$$

$$\mathcal{W} = \overline{\{E_H\}} \quad \text{La clausura de la cápsula convexa de } E_H \quad (\text{cono cerrado convexo})$$

$$\mathcal{E} = \{y \in E^n : \exists e : [0,1] \rightarrow X, \exists \lambda > 0 : e(0) = x^*, e' \text{ exists on } [0,1], e'(0) = \lambda y\}, \quad (\text{cono})$$

$$\mathcal{D} = \{y \in E^n : \exists \lambda > 0 : x^* + \lambda \tau y \in X \forall \tau \in [0,1]\}, \quad (\text{conjunto de direcciones factibles}) \quad (\text{cono})$$

$$\overline{\mathcal{D}} \quad \text{La clausura de } \mathcal{D} \quad (\text{cono cerrado})$$

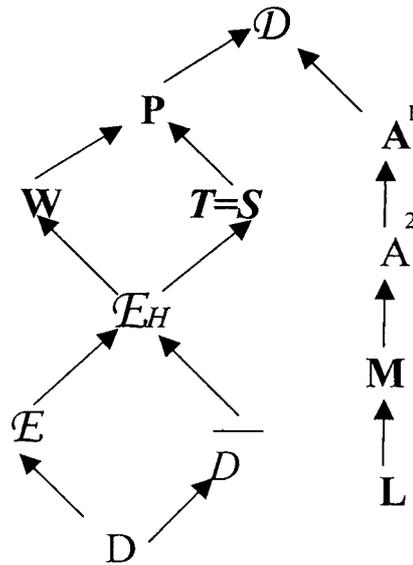
$$A^1 = \{y \in E^n : \nabla g_A(x^*)y < 0, \nabla g_A(x^*)y \leq 0\} \quad (\text{cono convexo})$$

$$\mathcal{L} = \{y \in E^n : \nabla g(x^*)y + g(x^*) < 0\}, \quad (\text{abierto convexo})$$

$$A^2 = \{y \in E^n : \nabla g_{AN}(x^*)y < 0, \nabla g_{AL}(x^*)y \leq 0\}, \quad (\text{cono no convexo})$$

$$\mathcal{M} = \{y \in E^n : \nabla g_A(x^*)y < 0\}, \quad (\text{cono abierto convexo})$$

Relaciones de inclusión. Existen relaciones de inclusión entre los conjuntos recién definidos las que quedan establecidas en el diagrama **D1**



D1. Diagrama de relaciones de inclusión

Condiciones calificadoras. En la tabla que sigue se listan en forma abreviada, numerosas **CC** extraídas de diferentes fuentes con referencias de donde han sido encontradas. I^0 denota un subconjunto de X^0 arbitrariamente pequeño, abierto y convexo.

Tabla 1. Condiciones Calificadoras

Símbolo	Condición Calificadora	Fuente
GCQ	$\mathcal{D} = P$	Guignard. <i>Generalized K-T conditions for math Prog.Probl.In Banach spaces (1969).</i> [6, p238]
ACQ^1	$\mathcal{D} = T$	Abadie. <i>On the K-T theorem (1967)</i> [1, p 32-36]
SCQ	$\mathcal{D} = S$	Hestenes. <i>Calculus of variations and opt. Control (1959)</i> [7, p35].
AHU^2	$\mathcal{D} = W$	Arrow,Hurwicz,Uzawa. <i>CQ in maximization Problems (1961).</i> [2, p178]
$KTCQ$	$\mathcal{D} = E$	Khun-Tucker. <i>Non linear programming (1951).</i> [9, p483]
HCQ	$\mathcal{D} = E_H$	Arrow,Hurwicz,Uzawa (1961). [2, p177]

ZCQ	$\mathcal{D} = D$	Zangwill. (1969). [14, p40]
ACQ^2	$x^* \in I^0, A^2 \neq \emptyset$	Abadie. (1967).
LCQ	$x^* \in I^0, L \neq \emptyset$	Luenberger. <i>Optimization by Vector Space Methods</i> (1969). [10, p48]
$MFCQ$	$x^* \in I^0, M \neq \emptyset$	Mangasarian, Fromowitz. <i>The Fritz John Necessary opt. Cond. In the presence of...</i> (1967) [12, pp 43-44]
AHU^1	$x^* \in I^0, A^1 \neq \emptyset$	Arrow, Hurwicz, Uzawa [2, p.183] (1961).
$LICQ$	$x^* \in I^0$ Grad. de las comp. activas de g en x^* linealmente independientes.	Hestenes. <i>Calculus of variations.</i> (1966). [7, p29]
$RCCQ$	$x^* \in I^0$ Comp. activas de g en x^* son lineales sobre E^n o cóncavas en x^* .	Mangasarian (1969). [11, p. 103]
KCQ	$x^* \in I^0$, g convexa, $\exists no p \geq 0 : pg(x) \geq 0, \forall x \in I^0$	Karlin <i>Mathematical Methods and Theory in games</i> (1959). [8, p201]
$SLCQ$	$x^* \in I^0$ g convexa, $\exists x \in X^0 : g(x) < 0$	Slater <i>Lagrange Multipliers Revisited a contribution to NLP</i> (1950). [13]
$STCQ$	$x^* \in I^0$, g convexa, $\exists x^1, x^2 \in X : x^1 \neq x^2$, g estrictamente convexa en x^1	Mangasarian , [11, p. 79]
$STAB$	$x^* \in I^0$, g convexa y condición A	Geoffrion, <i>Duality in NLP: A Simplified applications-oriented development</i> (1971) [4, pp6-7]

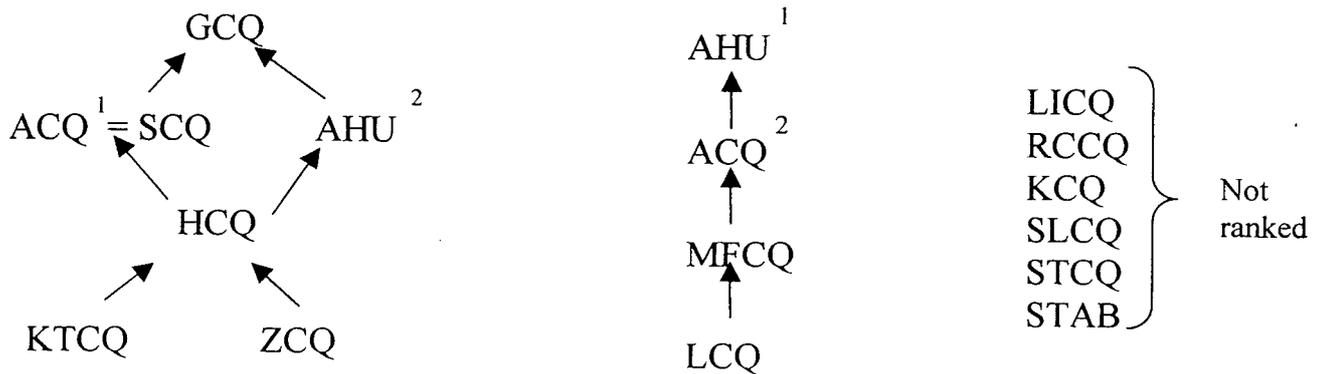
Condición A:

Sea $v(b) = \inf \mathcal{G}(x)$, para $x \in \{x \in I^0 : g(x) \leq b\}$. La condición es : $v(0)$ finita, $\mathcal{G}(x^*) = v(0)$, $\exists \varepsilon > 0$ y $M > 0$: si $b \geq 0$ y $b < \varepsilon$, entonces $v(0) - v(b) \leq M \|b\|$

Comentario. Las CC $RCCQ$, KCQ , $SLCQ$, $STCQ$, $STAB$, tienen su origen en conexión con teoremas de existencia de puntos de ensilladura. En este contexto no se requiere que la función objetivo ϑ y la función vectorial de las restricciones sean diferenciables pero debe ser X^0 convexo.

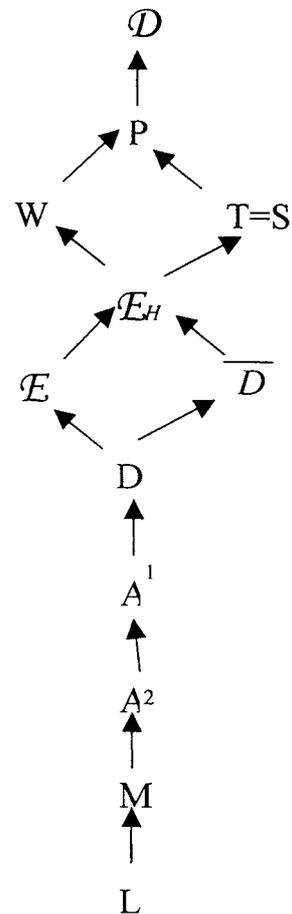
En nuestro contexto, asumiendo que ϑ y g son diferenciables en x^* y que x^* pertenece a I^0 no es necesario que X^0 sea convexo y esta CC puede ser usada en el teorema de condiciones necesarias de **K-T**.

A partir del diagrama de relaciones de inclusión **DI** varias de las CC quedan relacionadas por sus implicaciones según el diagrama **DI**.



DI. Diagrama de implicaciones.

- Observando que si $x^* \in I^0 \Rightarrow A^1 \subset D$ el diagrama de inclusiones luce como el diagrama **D2**.



D2 Diagrama de inclusiones

Las relaciones de inclusión del diagrama D2 y los teoremas que siguen modifican e. diagrama implicaciones de las CC según se ve en el diagrama DII

Teorema 2 Si $A^1 \neq \emptyset$ y $x^* \in I^0 \Rightarrow A^1 = \mathcal{D}$
 Luego $AHU^1 \Rightarrow ZCQ$

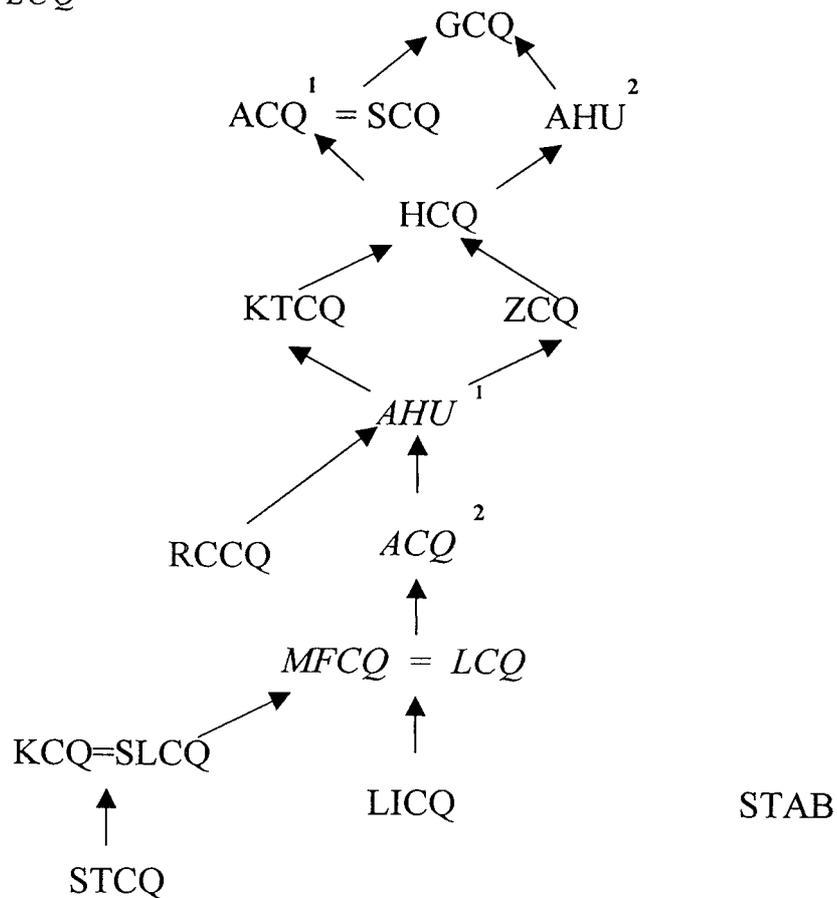
Teorema 3. Si $A^1 \neq \emptyset$ y $x^* \in I^0 \Rightarrow \mathcal{E} = \mathcal{D}$
 Luego $AHU^1 \Rightarrow KTCQ$

Teorema 4. Si $M \neq \emptyset \Rightarrow L \neq \emptyset$
 Luego $MFCQ \Rightarrow LCQ$

Teorema 5. (modificación de un teorema de Mangasarian[11 p.79])
 $STCQ \Rightarrow KCQ$ que es la misma que $SLCQ$

Teorema 6. (modificación de un teorema de Mangasarian [11 p.103])
 $RCCQ \Rightarrow AHU^1$

Teorema 7. $SLCQ \Rightarrow LCQ$



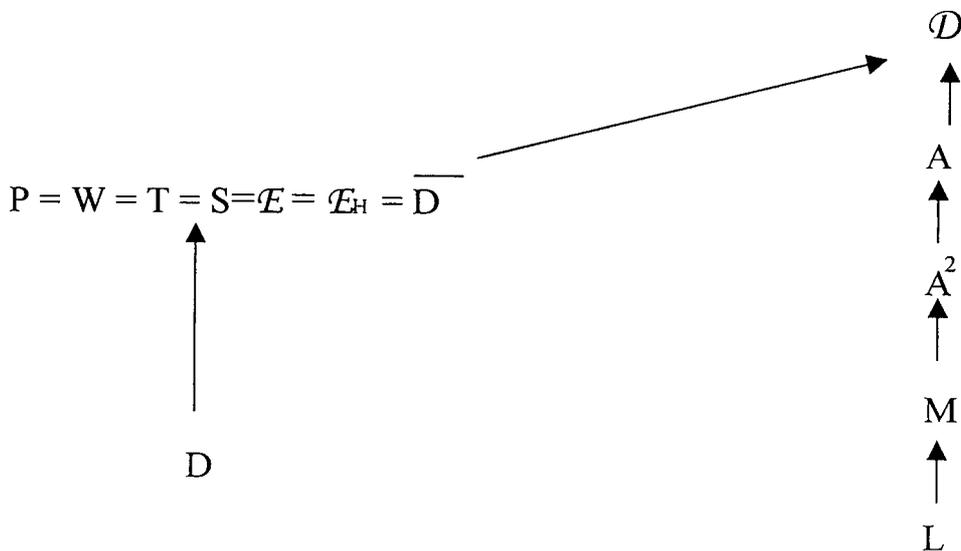
DII. Diagrama general de relaciones de implicación

Comentarios sobre DII.

- (1) Queda indicado que $KTCQ$ implica HCQ , pero no la recíproca. (Ejemplo 9)
- (2) Mediante una compleja demostración se prueba que AHU^1 implica $KTCQ$. Esta relación no aparece en el trabajo de Mangasarian por lo que parece un resultado nuevo de Peterson.
- (3) Las CC $RCCQ$, KCQ , $SLCQ$, $STCQ$, $STAB$, tomadas de la teoría de punto de ensilladura y modificadas para adaptarlas a las condiciones necesarias de $K-T$ muestra un tratamiento no muy ortodoxo de las mismas, pero a juzgar por sus posiciones en el diagrama de implicaciones ellas envuelven comparativamente fuertes hipótesis. Por otra parte, en ciertas circunstancias es más fácil verificar una de estas condiciones que una condición calificadora tradicional.
- (4) $STAB$ difiere de las demás porque involucra la función objetivo g . Esta dependencia es inherente a $STAB$ y no es posible eliminarla en el proceso de conversión de $STAB$ desde sus orígenes en la teoría de punto de ensilladura, al uso en las condiciones necesarias de $K-T$.
- (5) Como $STAB$ no implica en general una CC previamente dada, es necesario probar que ella es efectivamente, una condición calificadora.

Caso en que X es convexo.

En este caso muchos de los conjuntos de los diagramas de inclusión $D1$ y $D2$ resultan iguales, como se ve en el diagrama $D3$, haciendo equivalentes varias de las CC mostradas anteriormente en el diagrama DII .

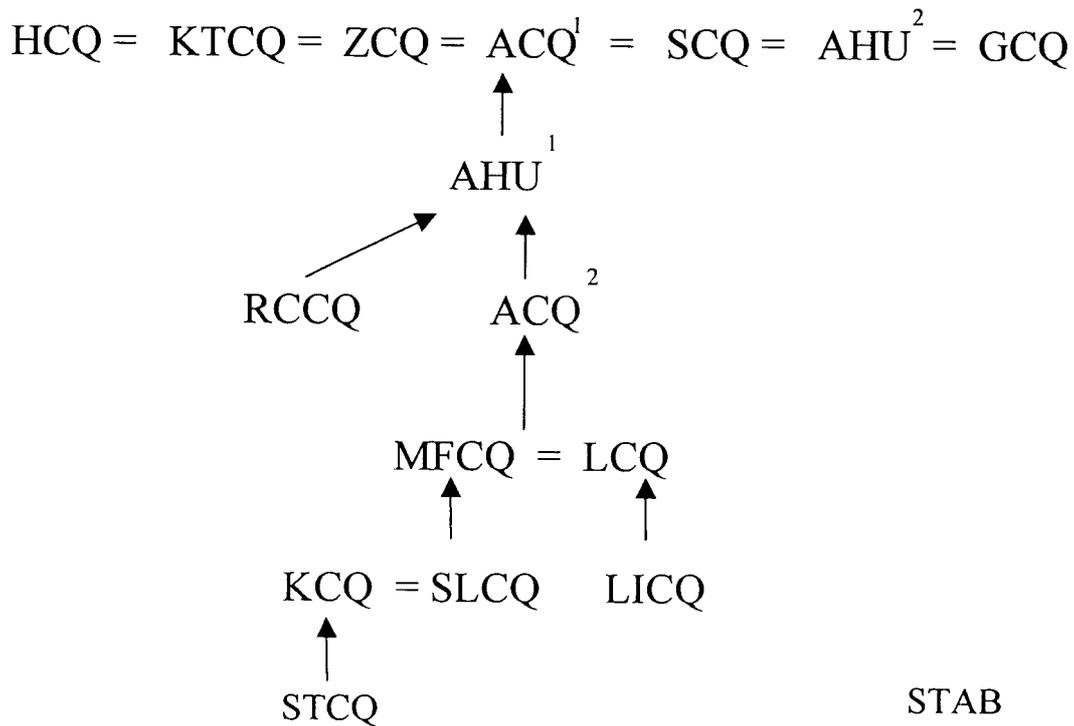


D 3. Diagrama de inclusiones para X convexo

Teorema 8 Si X es convexo entonces

- (i) E es cerrado ($E = E_H = W$)
- (ii) $\bar{D} = P$

A partir del diagrama D3 y teniendo en cuenta los resultados del teorema anterior el nuevo diagrama de implicaciones queda como sigue (diagrama DIII).



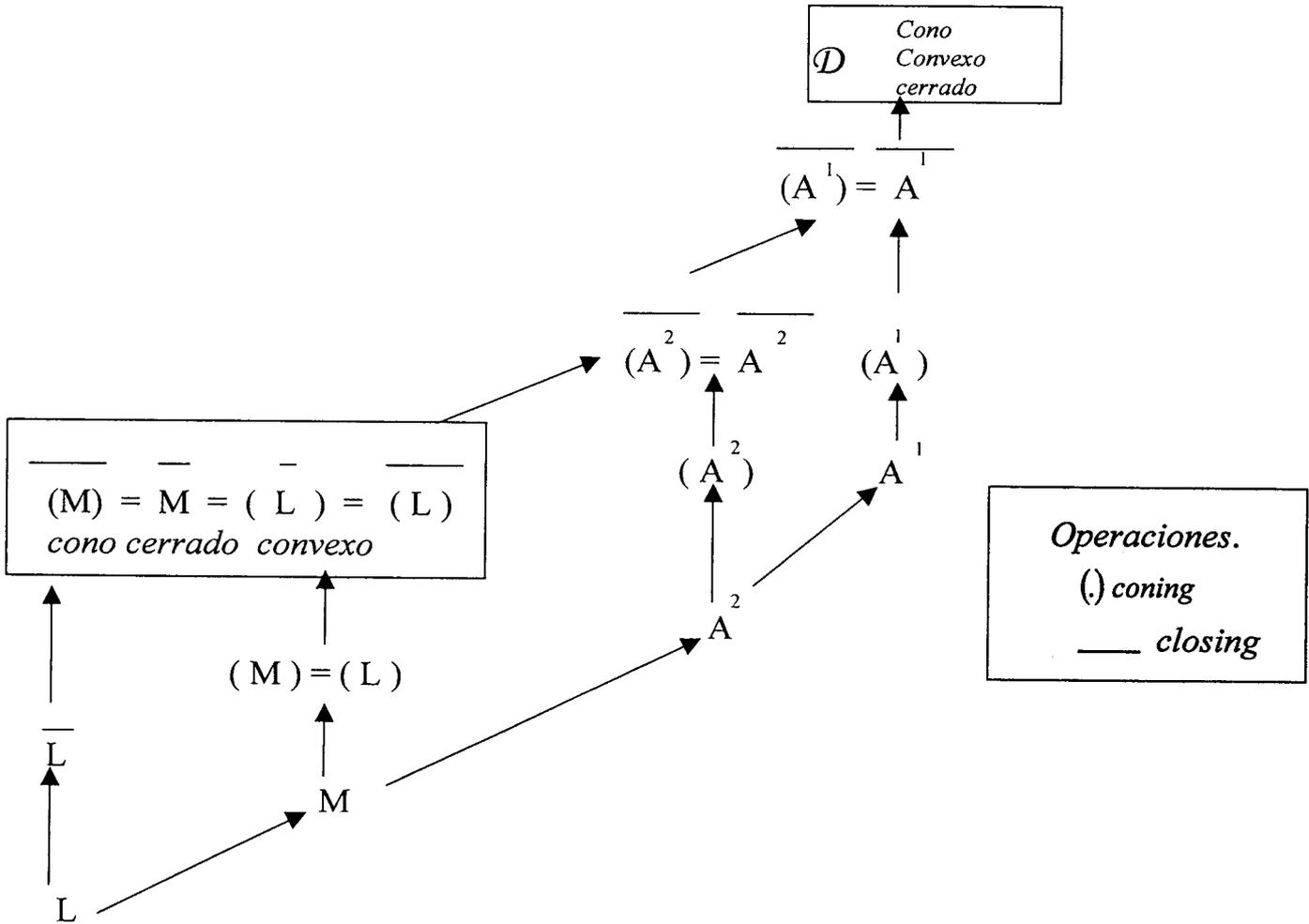
DIII. Diagrama de implicaciones para X convexo.

Nuevas inclusiones y condiciones calificadoras

Muchas más CC pueden ser generadas mecánicamente expandiendo los diagramas de inclusión obtenidos anteriormente, si se consideran la cápsula convexa $\overline{\{\cdot\}}$, el cono generado $\langle \cdot \rangle$, la clausura $\overline{\bullet}$, de algunos de los conjuntos definidos al comienzo y se tienen en cuenta las propiedades siguientes que valen para cualquier subconjunto G de un espacio vectorial lineal.

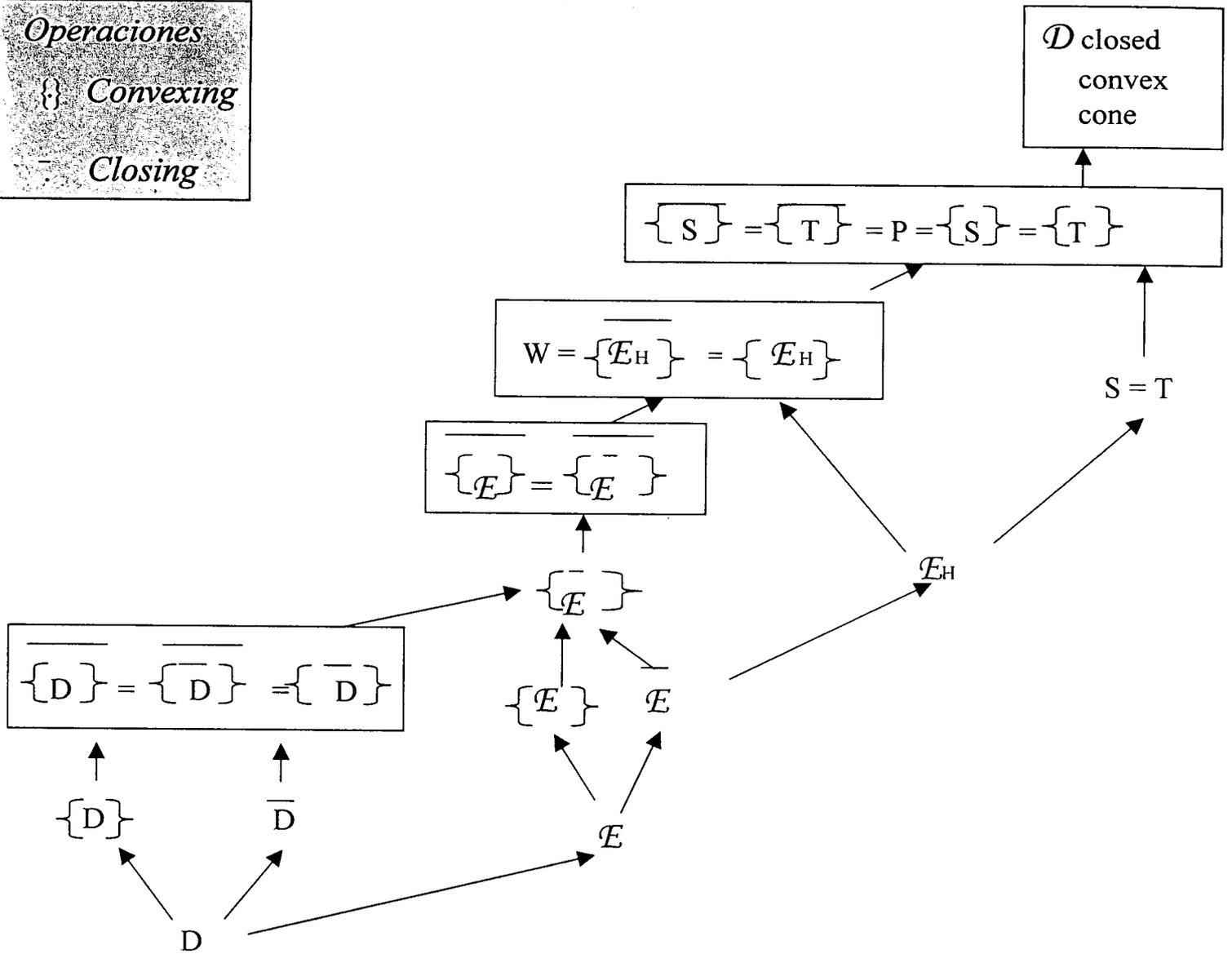
1. $\overline{\{G\}} \subset \overline{G}$
2. $\overline{\{G\}}$ es convexo
3. \overline{G} no es necesariamente cerrado
4. $\overline{\overline{G}} = \overline{G}$
5. $\langle \{G\} \rangle$ es convexo
6. $\langle \{G\} \rangle$ es un cono
7. $\langle \overline{G} \rangle = \langle G \rangle$
8. $\overline{\langle G \rangle} \supset \overline{G}$
9. $\overline{\langle G \rangle}$ es un cono
10. $\overline{\langle G \rangle}$ no es necesariamente cerrado
11. $\overline{\langle G \rangle} = \overline{\overline{\langle G \rangle}}$

A partir del diagrama D1 de inclusiones, y aplicando estas propiedades se obtienen las relaciones de inclusión que se muestran en las figuras D4a y D4b.



D4a. Diagrama de inclusiones expandido

Operaciones
 { Convexing
 - Closing



D4b. Diagrama de inclusiones expandido

A partir del diagrama de inclusiones **D4b** se pueden generar mecánicamente las siguientes nuevas CC:

- $\mathcal{D} = \overline{E}$
- $\mathcal{D} = \{E\}$
- $\mathcal{D} = \overline{\{E\}}$
- $\mathcal{D} = \{E\}$
- $\mathcal{D} = D$
- $\mathcal{D} = \{D\}$
- $\mathcal{D} = \overline{\{D\}}$

Con el diagrama de relaciones de inclusión **D4a** y la observación que la clausura de la conificación de un conjunto vacío es vacía, pueden generarse mecánicamente CC pero cada una es equivalente a alguna CC ya vista. Especialmente se obtienen

$$\left. \begin{array}{l} x^* \in I^0, (A^2) \neq \emptyset \\ x^* \in I^0, A^2 \neq \emptyset \end{array} \right\} \text{Equivalente a } ACQ^2$$

$$\left. \begin{array}{l} x^* \in I^0, (A^1) \neq \emptyset \\ x^* \in I^0, \overline{A^1} \neq \emptyset \end{array} \right\} \text{Equivalente a } AHU^1$$

$$\left. \begin{array}{l} x^* \in I^0, \overline{L} \neq \emptyset \\ x^* \in I^0, (M) \neq \emptyset \\ x^* \in I^0, \overline{M} \neq \emptyset \end{array} \right\} \text{Equivalente a } LCQ \quad \text{y} \quad MFCQ$$

En el caso que X es **convexo** el diagrama expandido **D4b** de relaciones de inclusión colapsa según muestra el diagrama **D5**. De las **CC** nuevas indicadas más arriba en esta situación resultan nuevas sólo las dos que se indican.

Nuevas CC

$$\begin{array}{l} \mathcal{D} = D \\ \mathcal{D} = \{D\} \end{array}$$

$$\mathcal{D} \quad \text{Cono Cerrado convexo}$$

$$\begin{array}{l} = \{ \overline{S} \} = \{ \underline{S} \} = S = \overline{\{T\}} = \{ \overline{T} \} = \underline{T} = \overline{\{E\}} = \{ \overline{E} \} = \{ \underline{E} \} = \underline{E} = \overline{E} = \{ \overline{E_H} \} \\ = \{ \overline{E_H} \} = \{ \underline{E_H} \} = \overline{E_H} = \underline{E_H} = \{ D \} = D \end{array}$$

$$D = \{D\} \quad \text{Cono convexo}$$

D5. Diagrama de inclusión expandido (de D4b) para X convexo

Ejemplos. Los ejemplos incluidos en esta parte muestran que los diagramas **DII** y **DIII**, de implicaciones entre las condiciones calificadoras, son lo más completo posible: No existen otras implicaciones que las mostradas aquí.

En la Tabla A.1 se representa cada posible relación de implicación para el diagrama **DII**. La tabla se interpreta del siguiente modo: Si en el rectángulo de la i -ésima fila y k -ésima columna contiene un +, significa que la CC de la primera columna e i -ésima fila implica la CC de la primera fila, k -ésima columna. Si el rectángulo contiene un número, éste corresponde al ejemplo, indicado más abajo, que muestra que la implicación no es válida.

Para el diagrama **DIII**, cada posible implicación está representada por la Tabla A.2 la cual se interpreta en forma análoga a la anterior.

Table A.1

Implied Implier	GCQ	ACQ	AHU	HCQ	KTCQ	ZCQ	AHU	ACQ	MFCQ	LICQ	RCCQ	SLCQ	STCQ	STAB
GCQ	+	10	11	10	9	3	3	3	3	3	3	3	3	8
SCQ=ACQ	+	+	11	11	9	3	3	3	3	3	3	3	3	8
AHU	+	10	+	10	9	3	3	3	3	3	3	3	3	8
HCQ	+	+	+	+	9	3	3	3	3	3	3	3	3	8
KTCQ	+	+	+	+	+	3	3	3	3	3	3	3	3	8
ZCQ	+	+	+	+	9	+	4	5	6	6	7	4	4	8
AHU	+	+	+	+	+	+	+	5	6	6	7	5	5	8
ACQ	+	+	+	+	+	+	+	+	6	6	7	6	6	8
LCQ=MFCQ	+	+	+	+	+	+	+	+	+	12	7	8	8	8
LICQ	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	7	8	8	8
RCCQ	+	+	+	+	+	+	+	5	6	6	+	5	5	8
KCQ=SLCQ	+	+	+	+	+	+	+	+	+	2	7	+	12	2
STCQ	+	+	+	+	+	+	+	+	+	2	7	+	+	2
STAB	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	+

Ejemplo 1. $X^0 = E^1$, $g(x) = x^2$, $x^* = 0$, $\theta \equiv 0$.

Ejemplo 2. $X^0 = E^1$, $g(x) = (x^2 + x, x^2 + 2x)'$, $x^* = 0$, $\theta = (-\text{sgn } x)|x|^{1/2}$

Ejemplo 3. $X^0 = E^2$, $g(x) = (x^2 - x_1^2, -x_2 + x_1^2)'$, $x^* = 0$.

Ejemplo 4. $X^0 = E^2$, $g(x) = (x_2 + x_1^3, -x_2 + x_1^3, x_1)'$, $x^* = 0$.

REFERENCIAS

- [0] DAVID W. PETERSON. *A Review of constraint qualifications in finite-dimensional spaces*. SIAM Review, Vol. 15, No. 3, July 1973
- [1] J.M.ABADIE. *On the Kuhn-Tucker theorem*. Nonlinear Programming. J.Abadie. ed. John Wiley, New York, 1967. pp.21-36.
- [2] K.J.ARROW., L.HURWICZ AND H.UZAWA. *Constraint qualification in maximization problems*, Naval Res. Logist. Quart. 8 (1961). Pp 175-191.
- [3] M.D.CANON, C.D.CULLUM, JR. AND E. POLAK. *Theory of Optimal Control and Mathematical Programming*. McGraw-Hill, New York, 1970.
- [4] A.M.GEOFFRION, *Duality in nonlinear programming: A simplified applications-oriented development*, this Review, 13 (1971), pp. 1-36.
- [5] F.J.GOULD AND J.W.TOLLE, *A necessary and sufficient qualification for constrained optimization*. SIAM J. Appl.Math, 20 (1971), pp. 164-172.
- [6] M.GUIGNARD, *Generalized Kuhn-Tucker conditions for mathematical programming problems in a Banach space*, SIAM J. Control, 7 (1969), pp. 232-241.
- [7] M.R. HESTENES, *calculus of Variations and Optimal Control*, John Wiley, New York, 1966.
- [8] S.KARLIN, *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics*, vol.I Addison-Wesley, Reading. Mass. 1959.
- [9] H.W.KUHN AND A.W.TUCKER, *Nonlinear programming*. Proc.Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, J.Neyman, ed. University of California Press. Berkeley, 1951. pp. 481-492.
- [10] D.G. LUENBERGER, *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley, New York 1969.
- [11] O.L.MANGASARIAN, *Nonlinear programming*, McGraw-Hill, New York, 1969.
- [12] O.L.MANGASARIAN AND S. FROMOVITZ, *The Fritz John necessary optimality condition in the presence of equality and inequality constraints*, J.Math.Anal.Appl.,17 (1967), pp.37-47.
- [13] M.SLATER, *Lagrange Multipliers Revisited: A Contribution to Nonlinear Programming*, Cowles Commission Discussion Paper, Mathematics 403, 1950.
- [14] W.I.ZANGWILL, *Nonlinear Programming: A Unified Approach*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, H.J. 1969.