



# INFORME TECNICO INTERNO

Nº. 87

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA  
INMABB (UNS - CONICET)



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina



# INFORME TÉCNICO INTERNO

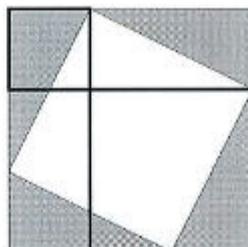
N° 87

INSTITUTO DE MATEMÁTICA DE BAHÍA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)

**UNS-CONICET**  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
BIBLIOTECA "DR. ANTONIO MONTIRO"

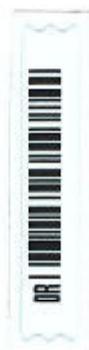
LIBRO No **ITI**.....  
VOL. **87**.....  
EJ. .... **(B-892)**



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 2004 -





# **INFORME TÉCNICO INTERNO N° 87**

## **Problemas de Contorno II**

### **Parte III**

**Agnes Benedek y Rafael Panzone**

**Universidad Nacional del Sur**

**INMABB**

**CONICET - UNS**

**AÑO 2004**

PROBLEMAS DE CONTORNO II  
por Agnes I. Benedek y Rafael Panzone



PARTE III

CAPITULO 15. Sobre un teorema de Å. Pleijel y una conjetura de H. Weyl: comportamiento asintótico de los autovalores del problema de Dirichlet en regiones de Jordan.	228
REFERENCIAS DEL CAPITULO.	251

PROLOGO.

La numeración de las páginas del presente Capítulo 15 de las Notas "PROBLEMAS DE CONTORNO II" parte III continua la de éstas. Véase esta colección I.T.I. n° 79, parte I, (2002), I.T.I. n° 81, parte II, (2003).

ABSTRACT.

We consider Dirichlet's problem in the classical sense for the Laplacian in a plane Jordan region  $D$  with boundary  $J$ . If  $\{\lambda_j\}$  is the set of eigenvalues of that problem, the counting function  $N(\lambda) = \#\{\lambda_j : \lambda_j \leq \lambda\}$  satisfies H. Weyl asymptotic formula:

$$\delta(\lambda) := N(\lambda) - \frac{\text{area}D}{4\pi} \lambda = o(\lambda). \text{ Related to the monotonic function } N(\lambda) \text{ is the spectral}$$

Dirichlet series:  $P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-z} = \int_0^{\infty} x^{-z} dN(x), \text{ Re } z > 1$ . Weyl's conjecture states that if  $J$  is

sufficiently regular then one should have  $\delta(\lambda) = B\sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda})$ . This has been proved, for example, for regions with  $C^\infty$ -boundary. The behaviour of  $P(z)$  follows from that of  $N(\lambda)$  but results about  $P(z)$  can be obtained without *a priori* knowledge of the counting function. A theorem of Å. Pleijel deals with this type of results. He proves that if  $D$  has a  $C^\infty$ -boundary the following formula holds:

$$(*) \sum \frac{1}{\lambda_n^z} = \frac{\text{area}D}{4\pi} \frac{1}{z-1} - \frac{\text{length}J}{8\pi} \frac{1}{z-1/2} + g(z), \text{ } g(z) \text{ holomorphic at least in } \text{Re } z > 0.$$

In fact  $g(z)$  is meromorphic in a wider region and has simple poles at some negative half integers. We show that (\*) holds for a Jordan region with only  $C^2$ -boundary showing so that if  $N(\lambda)$  admits a second term in its asymptotic formula then it is determined by the second term in Pleijel's generalization.

This paper is, in a certain degree, of expository nature. In Section 1 we discuss some points related to the Weyl and Weyl-Berry conjectures and collect some results on eigenvalues, eigenfunctions and Green's kernel that hold for plane membranes.

Section 2 is complementary and there we prove that variational eigenvalues-and eigenfunctions-and classical ones coincide for general Jordan regions proving then that in our framework we can use the powerful results obtained by the variational method.

In section 3 we prove Pleijel's theorem for membranes with  $C^2$ -boundaries. We present a simplified proof for this case.

R.P.  
Marzo 2004

## CAPITULO 15.

### SOBRE UN TEOREMA DE Å. PLEIJEL Y UNA CONJETURA DE H. WEYL:

#### COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LOS AUTOVALORES DEL PROBLEMA DE DIRICHLET EN REGIONES DE JORDAN.

##### §1

**INTRODUCCION. EL TEOREMA DE H. WEYL.** A) El objetivo que perseguimos es estudiar el comportamiento asintótico de los autovalores del problema de Dirichlet en una *región* (conjunto plano, abierto y conexo) *acotada*  $D$  de contorno  $J = \partial D$ . Un problema actual es determinar el segundo sumando de la expresión asintótica del *contador*  $N(\lambda) = \#\{\lambda_j : \lambda_j \leq \lambda\}$  = el número de autovalores del problema de Dirichlet que no superan a  $\lambda$  *contados* según su multiplicidad. O por lo menos estimar la diferencia entre  $N(\lambda)$  y la primera aproximación de su comportamiento asintótico que es suministrada por un famoso teorema debido a Hermann Weyl. Para resolver algunos problemas relacionados con los autovalores del problema de Dirichlet no es necesario conocer el comportamiento asintótico de los mismos sino que basta tener una estimación del comportamiento de algunas funciones asociadas con  $N(\lambda)$ , por ejemplo,

el de  $\int_0^{\infty} e^{-x} dN(t)$  o el de  $\int_0^{\infty} e^{-x} dN(e^t) = \int_1^{\infty} v^{-x} dN(v)$  para  $x \rightarrow \infty$ .

Diremos que una región acotada  $D$  es *semiregular*, o más precisamente,  $\varepsilon$ -*semiregular*,  $\varepsilon \in (0, 1]$ , si para  $A(t) := \{z \in D : \text{dist}(z, J) \leq t\}$  vale  $|A(t)| = O(t^\varepsilon)$ . Aquí  $|B| = m(B)$  = medida plana exterior de Lebesgue de  $B$ . Si  $D$  es  $\varepsilon$ -semiregular,  $m(\partial D) = 0$ .

Se define la *dimensión interior de Minkowski* del contorno  $\partial D$ ,  $k = k(\partial D)$ , como

$k(\partial D) := \dim \partial D = 2 - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log |A(t)|}{\log t}$  si el límite existe. Vale que

$$k(\partial D) = \inf \left\{ \alpha \geq 0 : |A(t)| = O(t^{2-\alpha}), t \rightarrow 0+ \right\} = l(\partial D).$$

Si el límite precedente no existe podemos definir la *dimensión interior superior de Minkowski* como

$$(1) \quad k^* = k^*(\partial D) := \overline{\dim \partial D} = 2 - \underline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{\log |A(t)|}{\log t}, \quad t \rightarrow 0+.$$

En este caso vale también el siguiente resultado (cf. [L]).

**PROPOSICION 1.**  $k^*(\partial D) = l(\partial D) := \inf \left\{ \alpha \geq 0 : |A(t)| = O(t^{2-\alpha}), t \rightarrow 0+ \right\} \in [1, 2]$ . ♦

Notemos que vale  $l(\partial D) = 2 - \sup \left\{ \eta : 0 \leq \eta \leq 2, |A(t)| = O(t^\eta) \right\}$ . Luego, si  $k^* \in [1, 2)$  entonces  $\sup \left\{ \eta : 0 \leq \eta \leq 2, |A(t)| = O(t^\eta) \right\} = 2 - k^* \in (0, 1]$  y vale la

**PROPOSICION 2.** Si  $0 < \varepsilon \in (0, 2 - k^*)$  entonces  $D$  es  $\varepsilon$ -*semiregular*. ♦

Si  $J = \partial D$  es una curva cerrada de Jordan, es decir,  $D$  es una región de Jordan, supondremos a  $J$  definida por funciones  $x(s)$ ,  $y(s)$ , orientada en sentido positivo (contrario a las agujas del reloj) con  $s \in [0, S]$ ,  $S > 0$ . Si  $J$  es rectificable,  $m(J) = 0$  y  $|J|$

denotará a la longitud de  $J$ ,  $lg(J)$ . En este caso supondremos  $S = |J|$ , o sea,  $s$  representará al parámetro longitud de arco. Si  $J$  es rectificable entonces  $A(t) \approx t$  por lo que  $D$  es 1-semiregular (Teorema de Steiner: existe  $c > 0$  tal que  $ct \leq |A(t)| \leq |J|t + \pi t^2$  si  $t$  es bastante pequeño). Nótese que hay regiones de Jordan que no son semiregulares para ningún  $\varepsilon \in (0, 1]$ , (cf. [P]). Si además  $x(s)$ ,  $y(s)$  poseen  $h > 0$  derivadas continuas en la longitud de arco diremos que  $D$  es  $h$ -regular.

Sabemos que para ciertas regiones acotadas  $D$  valen (H. Weyl),

$$(2) \quad \lambda_n \sim \frac{4\pi}{|D|} n, \quad \lambda \sim \frac{4\pi}{|D|} N(\lambda) \quad \text{donde } |D| = \text{área de } D, \quad n \rightarrow \infty, \quad 0 < \lambda \rightarrow \infty.$$

Para fijar ideas **supondremos en los § 1 y 3 que nuestra región  $D$  es de Jordan** aunque prácticamente la totalidad de lo que sigue vale para regiones acotadas más generales. Un objetivo razonable es tratar de determinar  $Q$  y  $\eta$  en la expresión asintótica (cf. [L] y sus referencias),

$$(3) \quad N(\lambda) \sim \frac{|D|}{4\pi} \lambda + Q \lambda^\eta = A \lambda + Q \lambda^\eta,$$

en caso de que existan. Si el contorno  $J$  es suficientemente regular se tiene,

$$(4) \quad N(\lambda) = A \lambda + B \sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda}) \quad \text{con } A = |D|(4\pi)^{-1}, \quad B = -|J|(4\pi)^{-1}.$$

En efecto, algunas regiones de Jordan de contorno  $C^\infty$  (el círculo, la elipse) o simplemente  $C^{0,\alpha}$  (un rectángulo, un sector de un disco o de una elipse) son contempladas por el siguiente teorema.

**TEOREMA A** (Kuznetsov). Si los autovalores del problema de Dirichlet pueden ser hallados por el método de separación de variables entonces la función de distribución de los autovalores verifica  $N(\lambda) = \frac{|D|}{4\pi} \lambda - \frac{|J|}{4\pi} \sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda})$ . ♦

El tercer sumando de esta expresión asintótica puede mejorarse en algunos casos. Por otra parte, para regiones de Jordan de contorno muy regular vale,

**TEOREMA B** (Ivrii). Si  $J = \partial D \in C^\infty$  entonces  $N(\lambda) = \frac{|D|}{4\pi} \lambda - \frac{|J|}{4\pi} \sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda})$ . ♦

Estos teoremas resuelven afirmativamente la **conjetura de Weyl** que dice que puede determinarse un segundo término en la expresión asintótica (2):  $N(\lambda) = \lambda |D|/4\pi + o(\lambda)$ , si  $D$  tiene contorno suficientemente regular. Con las constantes adecuadas el Teorema B se demuestra en [I] para regiones  $D$  de  $R^n$  con contorno  $\in C^\infty$ .

A continuación conviene tener presente el siguiente teorema de carácter *tauberiano* (cf. [T], [W]).

**TEOREMA AUXILIAR.** i) Sea  $\varphi(t) \geq 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $x \rightarrow 0$ ,  $T \rightarrow \infty$ . Entonces,

$$\int_0^\infty e^{-xt} \varphi(t) dt \sim \frac{A}{x^\sigma} \Rightarrow \int_0^T \varphi(t) dt \sim A \frac{T^\sigma}{\Gamma(\sigma+1)}.$$

ii) Sea además  $\varphi(x)$  no decreciente,  $p \geq 1$ :

$$\int_0^T \varphi(y) dy \sim AT^p \Rightarrow \varphi(T) \sim ApT^{p-1}$$

iii) Sea  $0 \leq \varphi(x)$  no decreciente. Entonces,

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} d\varphi(t) \sim A/x \Rightarrow \int_0^T t^\gamma \varphi(t) dt \sim AT^{\gamma+2}/(\gamma+2), \quad \gamma > -2. \spadesuit$$

La función  $N(\lambda)$ ,  $0 \leq \lambda < \infty$ , no negativa, a puro salto, continua a derecha, nula en  $[0, \lambda_1)$ , puede definirse como  $N(\lambda) = \sum_{\lambda_n \leq \lambda} 1$ . Por (2) la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n x}$  converge y define

una función  $f(x)$  en  $(0, \infty)$  que puede escribirse como  $f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} dN(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-xt} dN(t)$ .

Vale entonces

**PROPOSICION 3.**  $N(\lambda) \sim \frac{|D|}{4\pi} \lambda$ ,  $\lambda \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n x} \sim \frac{|D|}{4\pi x}$ ,  $x \rightarrow 0+$ .  $\spadesuit$

En efecto, pongamos  $A = \frac{|D|}{4\pi}$ . Luego de una integración por partes obtenemos

$f(x) = x \int_0^{\infty} e^{-xt} N(t) dt$  con  $N(t) \sim At$ . Un resultado de tipo *abeliano* nos permite ahora

afirmar que  $f(x) \sim x(A/x^2)$ , ([W], Cap. 8).

Por otra parte, si para  $x > 0$  existe  $f(x) := \int_0^{\infty} e^{-xt} dN(t)$  y si además  $f(x) \sim A/x$  entonces

(cf. *iii*) del teorema auxiliar)  $\int_0^T N(t) dt \sim \frac{AT^2}{2}$ . Como  $N(t) \uparrow$  resulta, usando *ii*) del

mismo teorema auxiliar,  $N(t) \sim At$ . Luego, para  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow 0$ , vale la siguiente implicación típicamente tauberiana,

**PROPOSICION 4.**  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n x} = \int_0^{\infty} e^{-xt} dN(t) \sim A/x \Rightarrow N(\lambda) \sim A\lambda$ .  $\spadesuit$

La transformada de Laplace de  $N(\lambda)$ ,  $Z(t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dN(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}$ , también llamada

*función partición*, o la *serie espectral de Dirichlet*  $\sum \lambda_n^{-s}$  definida por la función

$P(s) := \int_{1+}^{\infty} x^{-s} dN(x)$ ,  $\text{Re } s > 1$ , pueden llevar a la expresión asintótica de  $N(\lambda)$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$  y

permiten *conjeturar* la expresión más fina del desarrollo del contador  $N$ . En efecto, supongamos que vale  $N(\lambda) = A\lambda + B\sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda})$  y que

$$Z(t) = \frac{a}{t} + \frac{b}{\sqrt{t}} + o(t^{-1/2}), \quad t \downarrow 0.$$

Se deduce entonces que  $a = A$ ,  $b = \frac{B\sqrt{\pi}}{2}$ . Vale, análogamente, el siguiente resultado,

**LEMA 1.** Si  $N(\lambda) = A\lambda + B\sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda})$  y  $P(s) = \frac{a'}{s-1} + \frac{b'}{s-1/2} + c'(s)$ ,  $s > 1$  con  $c'(s)$  holomórficamente prolongable a  $s \geq 1/2$  entonces  $a' = A$ ,  $b' = B/2$ .

**DEMOSTRACION.** Sea  $F(x) = (B + o(1))\sqrt{x} = (B + f(x))\sqrt{x}$ . Entonces,

$$P(s) = \frac{A}{s-1} + \lim_{K \rightarrow \infty} \int_1^K x^{-s} dF(x). \text{ El límite es igual a } cte. + s \int_1^\infty F(x) x^{-s-1} dx =$$

$$= cte. + Bs/(s-1/2) + s \int_1^\infty f(x) x^{-s-1/2} dx = B/2(s-1/2) + cte. + s \left( \int_1^M + \int_M^\infty \right) f(x) x^{-s-1/2} dx =$$

$$= B/2(s-1/2) + p(s) + q(s) \text{ con } p(s) \text{ holomórficamente prolongable a } \operatorname{Re} s > 0 \text{ y}$$

$$q(s) = s \int_M^\infty f(x) x^{-s-1/2} dx. \text{ Sea } |f(x)| \leq \varepsilon \text{ si } x \geq M > 1. \text{ Entonces } \left| s \int_M^\infty \dots \right| \leq \frac{\varepsilon s}{|s-1/2|} \text{ si}$$

$$s > 1/2. \text{ En } s > 1 \text{ vale, } 0 = \frac{A-a'}{s-1} + \frac{B/2-b'}{s-1/2} + p(s) + q(s) - c'(s). \text{ Resulta}$$

$$\text{inmediatamente que } A = a'. \text{ Luego, } 0 = \frac{B/2-b'}{s-1/2} + p(s) + q(s) - c'(s). \text{ Por tanto, en}$$

$$s > 1/2, b' - B/2 = (p(s) + q(s) - c'(s))(s-1/2). \text{ O sea, para } s \downarrow 1/2, |b' - B/2| \leq \varepsilon/2 \text{ y}$$

$$\text{esto para todo } \varepsilon > 0. \text{ En consecuencia, } B/2 = b', \text{ QED.}$$

En [F] se prueba que si el contorno tiene dimensión interior superior de Minkowski  $s$ ,  $k^* = s$ , entonces la *discrepancia*  $\delta(\lambda) := N(\lambda) - \frac{|D|}{4\pi} \lambda \geq -\lambda^{\sigma/2}$  si  $2 > \sigma > s, \lambda > \lambda_1(\sigma)$ . Pero en ese caso  $D$  es una región  $\varepsilon$ -semiregular para  $\varepsilon \in (0, 2-s)$  y existe un  $\varepsilon$  en ese intervalo tal que  $\lambda^{\sigma/2} > M\lambda^{1-\frac{\varepsilon}{2}}, M = cte.$  si  $\lambda > \lambda_2$  pues podemos hacer que  $1 > \sigma/2 > 1 - \varepsilon/2 > s/2 \geq 1/2$ , (cf. Prop. 1 y 2).

Teniendo en cuenta la siguiente Proposición 5 podemos *conjeturar* que para regiones de Jordan  $\varepsilon$ -semiregulares vale  $\delta(\lambda) = O(1)\lambda^{1-\varepsilon/2}$ , o sea,  $|\delta(\lambda)| \leq M\lambda^{1-\varepsilon/2}$  si  $\lambda > \lambda_0(\varepsilon)$ .

Para probar la conjetura bastará mostrar que vale  $\delta(\lambda) \leq M\lambda^{1-\varepsilon/2}$ .

**PROPOSICION 5.** Si  $D$  es una región (de Jordan)  $\varepsilon$ -semiregular entonces existe una constante  $M$  tal que la discrepancia  $\delta(\lambda) \geq -M\lambda^{1-\varepsilon/2}$  si  $\lambda > \lambda_0(\varepsilon)$ . ♦

**DEMOSTRACION** (cf. [F]). Sea  $W$  la descomposición de Whitney de  $D$  en cuadrados binarios semiabiertos. Designamos con  $S(i)$  a la unión de los cuadrados de  $W$  de lado

$2^{-i}, i = 1, 2, \dots$ , por lo que  $S(k+1) \subset D \setminus \bigcup_1^k S(i)$  y  $D = \bigcup_1^\infty S(k)$ . Para  $k \geq 2, S(k) \subset$

$A(2^{1-k}\sqrt{2})$ . Luego, si  $n(k) = \#$ cuadrados en  $S(k)$ , usando la hipótesis tenemos

$$n(k)2^{-2k} \leq \left| A(2^{1-k}\sqrt{2}) \right| = O(2^{-k\varepsilon}).$$

Sean  $D(k)$  = la unión de los interiores de los cuadrados en  $S(j), j=1, \dots, k$  y  $N(\lambda, k)$  el número de autovalores de  $D(k)$  no mayores que  $\lambda$ . Como  $D(k) \subset D$  vale  $N(\lambda, k) \leq N(\lambda)$ , (cf. §2). Puesto que  $D(k)$  es unión de cuadrados abiertos disjuntos podemos estimar  $N(\lambda, k)$  contando los autovalores de cada cuadrado componente. Si  $D$

es un cuadrado de lado  $a$  vale que  $N(\lambda) = \frac{|D|}{4\pi} - \psi(\lambda)$  con  $0 \leq \psi(\lambda) \leq \frac{|\partial D|}{2\pi} \sqrt{\lambda}$ , (el

Teorema A nos dice que  $\psi(\lambda) = (|J| + o(1))\sqrt{\lambda}/4\pi$ ). En efecto, las autofunciones del problema de Dirichlet son de la forma  $(\sin m\pi x/a)(\sin n\pi y/a)$ , salvo por un factor no nulo, con autovalores  $\lambda_{m,n} = \pi^2(m^2 + n^2)/a^2$  de multiplicidad

$$\#\{(m, n) : 0 < m, n, m^2 + n^2 = a^2 \lambda_{m,n} / \pi^2\}.$$

Entonces,  $N(\lambda) = \#F$ ,  $F := \{(m, n) : 0 < m, n, |(m, n)| \leq a\sqrt{\lambda} / \pi\}$ .

Calculando el área de los cuadrados de lado 1 con vértice superior derecho en  $F$  y contenidos en el cuadrante  $C = \{(x, y) : 0 \leq x, y, |(x, y)| \leq r = a\sqrt{\lambda} / \pi\}$  obtenemos:

$$\text{área de los cuadrados} = N(\lambda) \leq |D| \lambda / 4\pi = \text{área de } C.$$

Por otra parte, si utilizamos los cuadrados unitarios con vértice inferior izquierdo en  $F$  obtenemos:  $\text{área de los cuadrados} = N(\lambda) \geq (\pi r^2 / 4) - 2r = (|D| \lambda / 4\pi) - |\partial D| \sqrt{\lambda} / 2\pi$ , qed. Entonces,

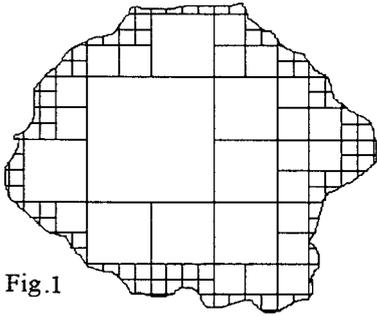


Fig.1

$$\begin{aligned} N(\lambda) &\geq N(\lambda, k) \geq \sum_1^k \frac{2^{-2i}}{4\pi} \lambda n(i) - \sum_1^k \frac{2 \cdot 2^{-i}}{\pi} \sqrt{\lambda} n(i) = \\ &= \frac{|D|}{4\pi} \lambda - \frac{\lambda}{4\pi} \sum_{k+1}^{\infty} 2^{-2i} n(i) - \frac{2}{\pi} \lambda^{1/2} \sum_1^k 2^{-i} n(i) \geq \\ &\geq \frac{|D|}{4\pi} \lambda - \frac{\lambda}{4\pi} \sum_{k+1}^{\infty} O(2^{-i\epsilon}) - \frac{2}{\pi} \lambda^{1/2} \sum_1^k O(2^{i(1-\epsilon)}) \geq \\ &\geq \frac{|D|}{4\pi} \lambda - c\lambda 2^{-k\epsilon} - c' \lambda^{1/2} 2^{k(1-\epsilon)}. \end{aligned}$$

Si elegimos  $2^{k-1} < \lambda^{1/2} \leq 2^k$  obtenemos  $N(\lambda) \geq \frac{|D|}{4\pi} \lambda - M\lambda^{1-\epsilon/2}$ , QED.

**NB.** A continuación entenderemos en el *sentido clásico* a las autofunciones y autovalores del problema de Dirichlet:  $w_n \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ ,  $w_n = 0$  en  $\partial D$ ,  $-\Delta w_n = \lambda_n w_n$  en  $D$ . La Proposición 5 es válida en este sentido, (cf. sección 2).

B) Supongamos que  $\lambda = -\chi^2$ ,  $\chi$  real positivo. Las soluciones radiales de  $\Delta u + \lambda u = 0$ ,  $u(p) = \phi(|p|)$  son las soluciones  $\phi(\rho)$  de

$$(5) \quad \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\phi}{d\rho} \right) - \chi^2 \phi = 0, \quad \rho > 0.$$

Sea  $K(\chi\rho) := \phi(\rho)$ . (5) equivale a

$$(6) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dK}{dr} \right) - K = K'' + \frac{1}{r} K' - K = 0, \quad r = \chi\rho > 0.$$

La *función de Kelvin de orden 0*:  $K_0(r) := \int_1^{\infty} \frac{e^{-rt}}{\sqrt{t^2-1}} dt$ ,  $r > 0$ , es solución de (6). En efecto,

$$(7) \quad K_0''(r) - K_0(r) = \int_1^{\infty} \sqrt{t^2-1} e^{-rt} dt = \frac{1}{r} \int_1^{\infty} \frac{t e^{-rt}}{\sqrt{t^2-1}} dt = \frac{-K_0'(r)}{r}.$$

Otra solución de (6) es la siguiente función de Bessel modificada:

$$(8) \quad I_0(r) := J_0(ir) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(2^n \cdot n!)^2}.$$

Como  $K_0(r) \rightarrow \infty$  cuando  $r \rightarrow 0+$ ,  $K_0$  e  $I_0$  son linealmente independientes. Ambas resuelven la ecuación  $(p\phi)' - q\phi = 0$  con  $p(r) = q(r) = r$ . Luego, el wronskiano

$$W = W(I_0, K_0) = \frac{c}{p(r)} = \frac{c}{r} \neq 0 \text{ y } \frac{d(K_0/I_0)}{dr} = \frac{W}{I_0^2(r)} = \frac{c}{rI_0^2(r)}.$$

Algunas propiedades de la función de Kelvin.  $K_0(r) = \int_1^\infty (e^{-rt} / \sqrt{t^2 - 1}) dt =$   
 $= \int_1^\infty (e^{-rt} / t) dt + \int_1^\infty (e^{-rt} / (t^3 + t^2 \sqrt{t^2 - 1} - t)) dt$ . Llamando  $X(t, r)$  al último integrando,  
 tenemos,  $K_0(r) = \int_r^\infty (e^{-t} / t) dt + \int_1^\infty X(t, r) dt = \int_r^1 (e^{-t} / t) dt + cte. + \int_1^\infty X dt =$   
 $= -\log r + cte. + \int_r^1 (e^{-t} - 1)t^{-1} dt + \int_1^\infty X dt = -\log r + P(r)$  con  $P(r) \in C^1([0, \infty))$ .

Para  $r \rightarrow 0$ ,  $K_0(r) = -\log r + P(0) + O(r)$ . Si  $r > \varepsilon_0 > 0$  entonces  $0 < K_0(r) = O(e^{-r/2})$ .  
 Semejante acotación también vale para  $|K_0'(r)|$  aunque  $0 > K_0'(r) \geq -Me^{-r/2}$  con  
 $M = cte. > 0$ . También tenemos,  $rK_0'(r) = O(1)$  si  $r \rightarrow 0$  y

$$\int_0^\infty K_0(r) dr = \int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} \int_0^\infty e^{-rt} dr = \int_1^\infty \frac{dt}{t(t^2 - 1)^{1/2}} = \int_0^1 \frac{du}{(1 - u^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2}.$$

En el campo complejo vale  $K_0(z) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(e^{\pi i/2} z) \sim e^{-z} \sqrt{\frac{\pi}{2z}}$  si  $|\arg z| < \pi/2$ . Además,  
 si  $x > 0$ ,  $H_0^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^\infty e^{ix \cosh t} dt$ .

Sea  $\Delta u - \chi^2 u = 0$ ,  $-\lambda = \chi^2 > 0$ . Definimos el núcleo de Green  $G(p, q; \lambda)$  como:

$$(9) \quad \begin{cases} G(p, q; \lambda) := \frac{1}{2\pi} K_0(\chi|p - q|) - H(p, q; \lambda), & p, q \in D \\ (\Delta_q + \lambda)H(p, q; \lambda) = 0, & H(p, \cdot; \lambda) \in C(\bar{D}) \\ H(p, q; \lambda) = \frac{1}{2\pi} K_0(\chi|p - q|) & \text{si } q \in \partial D, p \in D \end{cases}$$

Vale el

**TEOREMA 1.** Sea  $D$  una región de Jordan. Entonces,

i) Si  $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ ,  $\phi \in L^\infty(D)$ ,  $(\Delta + \lambda)u = \phi$  en  $D$ ,  $u = 0$  en  $\partial D$ , entonces

$$u(p) = - \int_D G(p, q; \lambda) \phi(q) dq, \text{ para todo } p \in D.$$

ii)  $G(p, q; \lambda) = G(q, p; \lambda)$ , para todo  $p, q \in D$ ,  $p \neq q$ .

iii) Sean  $\phi \in L^\infty(D)$ ,  $p \in \bar{D}$ ,  $u(p) := \int_D G(p, q; \lambda) \phi(q) dq$ . Vale entonces:  $u \in C(\bar{D})$ ,  
 $u = 0$  en  $\partial D$  y

$$\frac{\partial u}{\partial p_i} \in C(D), i=1,2, \quad \frac{\partial u}{\partial p_i} = \int_D \frac{\partial G}{\partial p_i}(p, q; \lambda) \phi(q) dq.$$

iv) Dada  $\phi \in C^1(D) \cap L^\infty(D)$  sea

$$u(p) = - \int_D G(p, q; \lambda) \phi(q) dq$$

Entonces,  $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ ,  $(\Delta + \lambda)u = \phi$  en  $D$ ,  $u = 0$  en  $\partial D$ .

v) Son equivalentes las proposiciones siguientes:

$$a) \phi \in L^2(D), \phi(p) = \mu \int_D G(p, q, \lambda) \phi(q) dq,$$

$$b) \phi \in C^2(D) \cap C(\bar{D}), -(\Delta + \lambda)\phi = \mu\phi \text{ en } D, \phi = 0 \text{ en } \partial D.$$

vi) Si  $l_p$  es la distancia de  $p$  a  $\partial D$  entonces para todo  $q \in \bar{D}$ :

$$0 \leq H(p, q, \lambda) \leq \frac{K_0(\chi l_p)}{2\pi}, \quad 0 \leq G(p, q, \lambda) \leq \frac{K_0(\chi |p-q|)}{2\pi}.$$

vii) Sea  $M = \text{diam } D$ . Entonces

$$\int_{\bar{D}} G^2(p, q, \lambda) dq \leq \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\{|q| \leq M\}} K_0^2(\chi |q|) dq =: C^2(\lambda) < \infty.$$

$$viii) \quad \gamma^2(\lambda) = \iint_{D \times \bar{D}} G^2(p, q, \lambda) dp dq \leq C^2(\lambda) |D| < \infty. \spadesuit$$

En realidad  $H(p, q, \lambda) \in C(D \times \bar{D})$ . Sus derivadas satisfacen, sobre compactos, estimaciones con decrecimiento exponencial respecto de  $l_p$ .

C) Definimos para  $\chi = 0$ , o sea para el operador diferencial  $\Delta$ , a  $G(p, q) := G(p, q; 0)$  como:

$$(10) \quad \begin{cases} G(p, q; 0) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{M}{|p-q|} - H(p, q), & p, q \in D, \quad M = \text{diam } D, \\ \Delta_q(H(p, q)) = 0 & \text{en } D, \quad H(p, \cdot) \in C(\bar{D}), \\ H(p, q) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{M}{|p-q|} & \text{si } q \in \partial D, \quad p \in D. \end{cases}$$

Si  $M$  es el diámetro de  $D$  entonces  $0 \leq G(p, q) \leq \frac{1}{2\pi} \log \frac{M}{|p-q|}$ ,  $(p, q) \in D \times \bar{D}$ .

Vale la siguiente extensión del Teorema 1.

**TEOREMA 2.** Sea  $D$  una región de Jordan. Para  $\Delta - \chi^2$ ,  $\chi \geq 0$ ,  $\lambda = -\chi^2$ , puede definirse un núcleo de Green,  $G(p, q, \lambda)$ , verificando las condiciones enunciadas en (9) ó (10) según sea  $\chi > 0$  ó  $\chi = 0$  tal que  $G(p, q, \lambda)$  tiene las propiedades i)-viii).

Además, sean en  $R^2 \setminus \{0\}$ ,  $E^\chi(x) = -\frac{K_0(\chi|x|)}{2\pi}$  si  $\chi > 0$  y  $E^0(x) = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x|}$ . Vale, en

el sentido de las distribuciones,

$$(11) \quad (\Delta - \chi^2)E^\chi = \delta. \spadesuit$$

D) La equivalencia v) del Teorema 1 muestra que toda autofunción  $\phi$  del operador  $-\Delta$  lo es de una ecuación integral con núcleo simétrico positivo  $G(p, q) \in L^2(D \times D)$ , es decir, de un operador autoadjunto  $G$  completamente continuo de tipo Hilbert-Schmidt:

$$(12) \quad \mu G\phi = \phi.$$

Más precisamente, para  $D$  como en los Teoremas 1 y 2, vale el

**TEOREMA 3.** Los autovalores del problema  $(-\Delta u = \lambda u \text{ en } D, u = 0 \text{ en } \partial D)$  son positivos, de multiplicidad finita y, repetidos según su multiplicidad, pueden ordenarse en forma creciente,

$$(13) \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad \lambda_n \rightarrow \infty.$$

Las autofunciones correspondientes:  $\phi_n(x)$  ( $-\Delta\phi_n = \lambda_n\phi_n$ ,  $\phi_n = 0$  en  $\partial D$ ), pueden elegirse reales y suponerse ortogonales y normalizadas:  $\|\phi_n\|_2 = \left(\int_D \phi_n^2(p) dp\right)^{1/2} = 1$ .

Ellas pertenecen a  $C(\bar{D}) \cap C^\infty(D)$ , forman un sistema ortonormal completo y satisfacen la siguiente igualdad:

$$(14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(p)}{\lambda_n^2} = \int_D G^2(p, q) dq \leq C^2 < \infty.$$

Si  $u = Gf$ ,  $f \in L^2(D)$ , entonces el desarrollo de  $u$  en autofunciones converge absoluta y uniformemente en  $D$ . ♦

**NB.** i) Se deduce que este desarrollo vale, en particular, para las funciones  $u$  en  $C^2(D) \cap C(\bar{D})$ , nulas en el borde y tales que  $\Delta u \in L^\infty(D)$ . Lo mismo puede decirse del operador  $-\Delta + \chi^2$ .

ii) Todas las soluciones de  $(\Delta + \mu)u = 0$ ,  $\mu \in C$ , son analíticas en  $D$  pues el operador es analítico-hipoelíptico.

**TEOREMA 4.**  $D$  como en los teoremas precedentes. Las funciones  $\phi_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , también son autofunciones del operador metarmónico  $-\Delta + \chi^2$  pues  $\lambda_n > 0$  y  $-(\Delta + \lambda)\phi_n = (\lambda_n - \lambda)\phi_n$ ,  $\lambda = -\chi^2$ . En particular tenemos que el espectro del operador metarmónico  $\sigma_{-\Delta + \chi^2}$  es igual a  $\sigma_{-\Delta} + \chi^2$ . Si  $p \in D$ , se tiene,

$$(15) \quad \frac{\phi_n(p)}{\lambda_n - \lambda} = \int_D G(p, q; \lambda) \phi_n(q) dq$$

Si  $\{c_n\}$  son los coeficientes de Fourier de  $G(p, \cdot; \lambda)$  respecto del sistema ortonormal completo  $\{\phi_n\}$  vale, para  $\chi^2 \geq 0$ :

$$(16) \quad c_n(G(p, \cdot; \lambda)) = \frac{\phi_n(p)}{\lambda_n - \lambda}.$$

En consecuencia, de *vii*) sigue que, para todo  $p \in D$ ,

$$(17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(p)}{(\lambda_n - \lambda)^2} \leq C^2(\lambda) < \infty. \spadesuit$$

E) Valen los siguientes resultados sobre series de autofunciones.

**TEOREMA 5.** (Carleman). Sea  $D$  de Jordan. Sea  $\{\phi_n\}$  el sistema normalizado de autofunciones del problema de Dirichlet. Entonces, para todo  $p \in D$ ,  $m \geq 0$ ,

$$(18) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^{m+1}} \sum_{\lambda_n < \lambda} \left( \frac{\partial^m \phi_n(p)}{\partial p_1^{\alpha_1} \partial p_2^{\alpha_2}} \right)^2 = \frac{1}{\pi 2^{2m+2}} \frac{(2\alpha_1)!(2\alpha_2)!}{(m+1)!\alpha_1!\alpha_2!},$$

$$(19) \quad \frac{1}{\lambda} \sum_{\lambda_n < \lambda} (\phi_n(p))^2 \rightarrow \frac{1}{4\pi}, \quad \frac{1}{\lambda^2} \sum_{\lambda_n < \lambda} \left( \frac{\partial \phi_n(p)}{\partial p_1} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{16\pi} \spadesuit$$

**TEOREMA 6.** Sea  $D$  una región de Jordan.

i) Sea  $p \in D$ . La siguiente serie, sobre todo el sistema de autofunciones  $\{\phi_n\}$ ,

$$(20) \quad \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(p)\phi_n(q)}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)} = G(p, q; \lambda) - G(p, q) =: F(p, q; \lambda),$$

converge absoluta y uniformemente en  $q \in \bar{D}$  a la función continua en  $q$ :  $F(p, q; \lambda)$ .

ii) Si  $F(p, \lambda) := F(p, p; \lambda)$ , vale

$$(21) \quad F(p, \lambda) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(p)}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)} = \lim_{q \rightarrow p} (G(p, q; \lambda) - G(p, q)).$$

$F(p, \lambda)$  es continua en  $D \times (C \setminus \sigma_\Delta)$  y para cada  $p$  es meromorfa en  $\lambda$ . Sus únicas singularidades son polos simples en  $\lambda = \lambda_n, n = 1, 2, \dots$ . ♦

F) Al siguiente resultado nos referiremos como el **Teorema de L. Garding y H. Weyl**.

**TEOREMA 7.** Supongamos que  $k \in C^\infty(\bar{D})$  y sea positiva en  $\bar{D} \supset D$ ,  $D$  regiones de Jordan. Sea  $N(\lambda; k) := \#\{\text{autovalores de } -(1/k)\Delta \leq \lambda\}$ . Entonces,

$$(22) \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{N(\lambda; k)}{\lambda} = \frac{1}{4\pi} \int_D k(p) dp. \spadesuit$$

En particular, para  $k \equiv 1$  tenemos  $N(\lambda; 1) \equiv N(\lambda) \sim \frac{|D|}{4\pi} \lambda$ . El teorema 7 debe ubicarse en

el siguiente contexto. Supongamos solamente que  $k(x) \in C(\bar{D}) \cap Lip_{loc}(D)$  y que

$k(x) > 0$  en  $\bar{D}$ . El "operador de Sturm-Liouville"  $-\frac{1}{k(x)}\Delta_x u$  admite un sistema de

autofunciones reales  $\{\phi_n\}$ ,  $\Delta\phi_n + \lambda_n k \phi_n = 0$ ,  $\phi_n|_{\partial D} = 0$ , en correspondencia con una

sucesión de autovalores reales  $\{\lambda_n\}$ ,  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$ ,  $\lambda_n \rightarrow \infty$ . Necesariamente los autovalores son de multiplicidad finita. Las autofunciones pueden normalizarse de manera que  $\int_D \phi_i(x)\phi_j(x)k(x)dx = \delta_{ij}$  y en ese caso forman un sistema ortonormal

completo en  $L^2(D; k)$ , es decir, respecto del peso  $k$  en  $D$ .

Como Corolario obtenemos el siguiente Teorema al que nos referiremos como **teorema de H. Weyl**.

**TEOREMA 8.** Sea  $D$  una región de Jordan. Si  $p \in D$ ,  $n \rightarrow \infty$  entonces

$$(23) \quad \lambda_n \sim \frac{4\pi n}{|D|}, \quad \frac{\sum_{j=1}^n \phi_j^2(p)}{n} \rightarrow \frac{1}{|D|}. \spadesuit$$

En efecto, el primer límite se obtiene de  $\lambda \sim N(\lambda) \frac{4\pi}{|D|}$ . El segundo sigue usando el

primero en la primera fórmula de (19), QED.

Las demostraciones de los teoremas en los párrafos B)-F) pueden verse, por ejemplo, en [BP], parte 1. En esos teoremas no se introdujo ninguna hipótesis de regularidad del contorno salvo por la continuidad propia de las curvas de Jordan. Pero esto no es poca cosa pues hay regiones de Jordan con contorno  $J$  fractal, vg. el dragón de Knuth, donde  $\dim_H J \in (1, 2)$ ,  $\lg J = \infty$  (cf. [Z]) o también con contorno de área positiva, (F. Riesz).

En el párrafo 3 estudiaremos el caso de contorno  $C^2$  siguiendo en parte a Pleijel, [P1], quien supuso en su trabajo que  $\partial D \in C^\infty$ .

§2

**I. DEFINICION 1.** Diremos que  $u$ , definida en la región acotada  $U$ , no necesariamente de Jordan, es una *solución débil* de  $(-\Delta + \lambda)u = f, u = 0$  en  $\partial U$  con  $f \in L^2(U)$ , si  $u \in H_0^1(U)$  y para toda  $v \in H_0^1(U)$  se verifica  $\int_U \nabla u \times \nabla v \, dx + \lambda \int_U uv \, dx = \int_U fv \, dx$ . ♦

Recordemos que  $H_0^1(U)$  es la clausura de  $C_0^\infty(U)$  respecto de la norma de  $H^1(U)$ .

**TEOREMA 1** (de representación de Lax-Milgram). Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $B$  una funcional bilineal  $B: H \times H \rightarrow R$  continua ( $|B(u, v)| \leq \alpha \|u\|_H \|v\|_H$ ), coerciva (esto es  $\exists \beta > 0$  tal que  $\beta \|u\|_H^2 \leq |B(u, u)|$ ). Dada una funcional lineal continua  $F$  sobre  $H$  existe un único  $u \in H$  tal que  $B(u, v) = F(v) \forall v \in H$ . ♦

Usaremos como  $H$  a  $H_0^1(U)$  y como  $B$  a  $B_\gamma(u, v) = I(u, v) + \gamma \langle u, v \rangle$  con  $\gamma \geq 0$ ,  $I(u, v) := \int_U \nabla u \times \nabla v \, dx$ . Esta  $B$  es *continua y coerciva* (cf. [A], p.158):

$$B_\gamma(u, u) = \int_U |\nabla u|^2 \, dx + \gamma \|u\|_2^2 \geq \beta \|u\|_H^2.$$

**TEOREMA 2** (1er teorema de existencia de solución débil). Sea  $\gamma \geq 0$ . Para toda  $f \in L^2(U)$  existe exactamente una solución débil de  $(-\Delta + \gamma)u = f, u = 0$  en  $\partial U$ . ♦

**DEMOSTRACION.** Existe una única  $u_f \in H_0^1(U)$  tal que  $\forall v \in H_0^1(U)$  se tiene (Lax-Milgram)  $B_\gamma(u_f, v) = I(u_f, v) + \gamma \langle u_f, v \rangle = \langle f, v \rangle$ . O sea,

$$\int_U \nabla u_f \times \nabla v \, dx + \gamma \int_U u_f v \, dx = \int_U f v \, dx. \quad \text{QED.}$$

**COROLARIO 1.** 1) La aplicación  $L_\gamma^{-1}: f \in L^2 \rightarrow u_f \in H_0^1$  es acotada.

2)  $L_\gamma^{-1}$  como operador de  $L^2$  en  $L^2$  es completamente continuo. ♦

**DEMOSTRACION.** 1) Si  $f_n \rightarrow f, u_{f_n} \rightarrow u$  entonces  $B_\gamma(u_{f_n}, v) \rightarrow B_\gamma(u, v)$  y  $\langle f_n, v \rangle \rightarrow \langle f, v \rangle$ . O sea,  $L_\gamma^{-1}$  es cerrada de dominio  $L^2$ . En consecuencia,

$$\|u_f\|_{H_0^1} = \|L_\gamma^{-1} f\|_{H_0^1} \leq K \|f\|_2.$$

2) La inmersión de  $H_0^1(U)$  en  $L^2(U)$  es compacta,  $H_0^1 \subset\subset L^2$ , pues  $U$  es una región acotada, (cf. [H], T. 2.2.3). Por tanto el operador  $K = L_\gamma^{-1}$  es completamente continuo de  $L^2(U)$  en  $L^2(U)$ , QED.

Veamos ahora el 2º teorema de existencia de solución débil.

**TEOREMA 3** (alternativa de Fredholm). El problema de contorno:

$$(1) \quad (-\Delta + \lambda)u = f, u = 0 \text{ en } \partial U$$

tiene solución débil (única) para toda  $f \in L^2$  o bien existe una solución no trivial del problema homogéneo:

$$(2) \quad (-\Delta + \lambda)u = 0, u = 0 \text{ en } \partial U.$$

El espacio nulo  $N_\lambda$  correspondiente tiene dimensión finita y el problema no homogéneo

(1) admite solución débil si y sólo si  $f \perp N_\lambda$  en  $L^2$ . ♦

**DEMOSTRACION.** Sea  $\lambda < 0 \leq \gamma$ .  $\forall g \in L^2(U)$  existe  $u = L_\gamma^{-1} g \in H_0^1(U)$  que es la única solución débil de  $(-\Delta + \gamma)u = g, u = 0$  en  $\partial U$ . El problema (1) se escribe como  $(-\Delta + \gamma)u = (\gamma - \lambda)u + f, u = 0$  en  $\partial U$ .  $u$  será solución de este problema si y sólo si

verifica:  $u = L_\gamma^{-1}[(\gamma - \lambda)u + f] = (\gamma - \lambda)L_\gamma^{-1}u + L_\gamma^{-1}f = Ku + h$ , o sea, si  $(I - K)u = h$  donde  $h := L_\gamma^{-1}f \in H_0^1 \subset L^2$ . Para encontrar una solución  $u \in H_0^1$  a esta última ecuación observemos que (corolario al teorema 2) el operador  $K = (\gamma - \lambda)L_\gamma^{-1}$  es completamente continuo de  $L^2(U)$  en  $L^2(U)$ . Por la alternativa de Fredholm o bien existe una solución (única) a  $(I - K)u = h$  para toda  $h$  de cuadrado integrable o bien existe un subespacio  $N \subset L^2$  no trivial de dimensión finita (maximal) tal que  $(I - K)N = 0$ .  $(I - K)u = h$  tendrá solución si y sólo si  $h \perp N$ . Es decir,  $(-\Delta + \lambda)u = f, u = 0$  en  $\partial U$  tendrá solución si y sólo si  $L_\gamma^{-1}f \perp N$  en  $L^2$ .

Observemos que  $N = N_\lambda$ . En efecto,  $v \in N$  si y sólo si  $v = L_\gamma^{-1}(\gamma - \lambda)v$ . O sea, si y sólo si  $(-\Delta + \gamma)\frac{v}{\gamma - \lambda} = v, v = 0$  en  $\partial U$ , que equivale a  $(-\Delta + \lambda)v = 0, v = 0$  en  $\partial U$ , que equivale a  $v \in N_\lambda$ .

Veamos que  $f \perp N_\lambda \Leftrightarrow L_\gamma^{-1}f \perp N$ . Sabemos que si  $v \in N$  entonces  $v \in N_\lambda$ , o sea,  $\int \nabla v \times \nabla k dx + \lambda \int v k dx = 0$  para toda  $k \in H_0^1$ . Luego,  $\int \nabla v \times \nabla L_\gamma^{-1}f dx + \lambda \int v L_\gamma^{-1}f dx = 0$ . Por el Teorema 2,  $\int \nabla v \times \nabla L_\gamma^{-1}f dx + \gamma \int v L_\gamma^{-1}f dx = \int v f dx$ . En consecuencia,  $\forall v \in N_\lambda$ ,  $(\gamma - \lambda) \int v L_\gamma^{-1}f dx = \int v f dx$  por lo que  $L_\gamma^{-1}f \perp N \Leftrightarrow f \perp N_\lambda$ , QED.

**PROPOSICION 1** (regularidad de las soluciones). Si  $u$  es solución débil de  $(-\Delta + \mu)u = f, u = 0$  en  $\partial U$  y  $f \in C^\infty(U)$  entonces  $u \in C^\infty(U)$ . ♦

DEMOSTRACION. Por ser solución débil vale  $\int_U \nabla u \times \nabla v dx + \mu \int_U uv dx = \int_U f v dx$  para toda  $v \in H_0^1(U)$ . Por tanto, en el sentido de las distribuciones,  $\langle (-\Delta + \mu)u - f, \varphi \rangle = 0$  para toda  $\varphi \in C_0^\infty(U)$ . Por la hipoelipticidad del operador se tiene  $u \in C^\infty(U)$ , QED.

**TEOREMA 4** (caracterización de los autovalores). A) El ínfimo, positivo,  $\lambda_1 := \inf \{I(u, u) : u \in H_0^1, \|u\|_2 = 1\}$  se realiza en una función  $w_1 \in H_0^1(U)$  que es solución débil de  $(-\Delta - \lambda_1)w_1 = 0, w_1 = 0$  en  $\partial U$ . Se verifica además:

$$(3) \quad I(w_1, v) = \lambda_1 \langle w_1, v \rangle \quad \text{para toda } v \in H_0^1(U).$$

B) Existen  $w_2, w_3, \dots \in H_0^1$  con  $\|w_n\|_2 = 1$ , tales que, para  $n > 1$ , el ínfimo

$$(4) \quad \lambda_n := \inf \{I(v, v) : v \in H_0^1, \|v\|_2 = 1, \langle v, w_i \rangle = 0, i = 1, \dots, n-1\}, \quad 0 < \lambda_i \leq \lambda_n,$$

se realiza en  $w_n$ . Además,

$$(5) \quad I(w_n, v) = \lambda_n \langle w_n, v \rangle \quad \text{para toda } v \in H_0^1(U). \quad \blacklozenge$$

DEMOSTRACION. A) Sea  $\{v_n\} \subset H_0^1(U), \|v_n\|_2 = 1$  tal que  $I(v_n, v_n) \rightarrow \lambda_1$ . Como  $\|v_n\|_{H_0^1}^2 = I(v_n, v_n) + \|v_n\|_2^2 \leq I(v_n, v_n) + 1 \leq K < \infty$  debido a la inmersión compacta de  $H_0^1(U)$  en  $L^2(U)$  resulta que existe una subsucesión convergente en  $L^2$  a una función  $w_1$ . Seguiremos denotando a esa sucesión con  $\{v_n\}$ . Para ella tenemos,

$$(6) \quad 4\lambda_1 + \varepsilon \geq 2(I(v_n, v_n) + I(v_m, v_m)) = I(v_n + v_m, v_n + v_m) + I(v_n - v_m, v_n - v_m) \geq \lambda_1 \|v_n + v_m\|^2 + \lambda_1 \|v_n - v_m\|^2 \geq 4\lambda_1 \|w_1\|^2 - \varepsilon \geq 4\lambda_1 - \varepsilon.$$

De esto concluimos que

$$(7) \quad I(v_n + v_m, v_n + v_m) \rightarrow 4\lambda_1 \text{ y que } I(v_n - v_m, v_n - v_m) \rightarrow 0.$$

Del segundo límite sigue que  $v_n \rightarrow w_1$  en  $H_0^1(U)$ . Veamos que  $w_1$  es solución débil.

Sea  $F(t) = \frac{I(w_1 + t\varphi, w_1 + t\varphi)}{\|w_1 + t\varphi\|^2} \geq \lambda_1, \varphi \in C_0^\infty$ .  $F$  tiene un mínimo en  $t=0$  y por tanto

$F'(0) = 2(I(w_1, \varphi) - \langle w_1, \varphi \rangle I(w_1, w_1)) = 2(I(w_1, \varphi) - \langle w_1, \varphi \rangle \lambda_1)$  se anula. Luego,  $\forall v \in C_0^\infty$  vale  $I(w_1, v) = \lambda_1 \langle w_1, v \rangle$  y por tanto vale  $\forall v \in H_0^1(U)$ .  $I(w_1, w_1) > 0$  implica  $\lambda_1 > 0$ .

B) Sea  $n \geq 2$ . Suponiendo hallados  $w_1, \dots, w_{n-1}$  sea  $\{v_h\} \subset H_0^1$  tal que  $\|v_h\|_2 = 1, v_h \perp w_i, i = 1, \dots, n-1, I(v_h, v_h) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \lambda_n$ . Por (3) y (5),  $I(v_h, w_i) = 0$ . Razonando como antes concluimos que existe una subsucesión de  $\{v_h\}$ , que denotaremos de la misma manera, tal que  $\|v_h - w_n\|_2 \rightarrow 0$  para  $h \rightarrow \infty, w_n \perp w_i, i = 1, \dots, n-1$ , y que vale

$$(7') \quad I(v_h + v_m, v_h + v_m) \rightarrow 4\lambda_n, \quad I(v_h - v_m, v_h - v_m) \rightarrow 0.$$

De (7') sigue entonces que  $\|v_h - w_n\|_{H_0^1} \rightarrow 0$  para  $h \rightarrow \infty$ .

Sea  $\varphi \in C_0^\infty, \psi := \varphi - \langle \varphi, w_1 \rangle w_1 - \dots - \langle \varphi, w_{n-1} \rangle w_{n-1} \in H_0^1$ .  $\psi$  es ortogonal en  $L^2$  a  $w_i, i = 1, \dots, n-1$ . La función  $F(t) = \frac{I(w_n + t\psi, w_n + t\psi)}{\|w_n + t\psi\|^2} \geq \lambda_n$  tiene un mínimo en  $t=0$  por

lo que  $F'(0) = 0$ . Esto equivale a  $I(w_n, \psi) - \lambda_n \langle w_n, \psi \rangle = 0$ . Como  $w_n \perp w_i$  sigue que  $I(w_n, \varphi) - \lambda_n \langle w_n, \varphi \rangle = 0$  pues por (3) y (5):  $I(w_i, w_n) = \lambda_i \langle w_i, w_n \rangle = 0$ . En consecuencia,  $I(w_n, v) = \lambda_n \langle w_n, v \rangle$  para  $v \in H_0^1(U)$ , QED.

**TEOREMA 5** (completitud de las autofunciones). 1)  $0 < \lambda_n \leq \lambda_{n+1} \rightarrow \infty$ ,

2)  $\{w_n\}$  es un sistema ortonormal completo en  $L^2$ .

DEMOSTRACION. Paso 1. Sabemos por Corolario 1 al Teorema 2 que existe un operador completamente continuo  $S := L_\gamma^{-1} : L^2 \rightarrow L^2, \gamma \geq 0$ , tal que

$$B_\gamma(Sf, v) = \int \nabla Sf \times \nabla v dx + \gamma \int (Sf)v dx = \int f v dx. \text{ Para } v = Sg \text{ tenemos } B_\gamma(Sf, Sg) = \int f Sg dx = B_\gamma(Sg, Sf) = \int g Sf dx. \text{ Luego } S \text{ es simétrico. Por otra parte } w_n \text{ verifica}$$

$$(8) \quad (-\Delta + \gamma)w_n = (\lambda_n + \gamma)w_n, w_n|_{\partial U} = 0,$$

y en consecuencia  $\frac{w_n}{\lambda_n + \gamma} = S w_n$ . Luego,  $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n + \gamma}$  es autovalor de  $S$  para la autofunción  $w_n$ . Como los autovalores de  $S$  tienen a 0 por único punto de acumulación se deduce que  $\lambda_n \rightarrow \infty$ .

Paso 2. Sea  $u \in H_0^1(U), w := u - \sum_1^N c_n(u)w_n$ , con  $c_n(u) = \langle w_n, u \rangle$ . Vale:  $w \perp w_n,$

$n = 1, \dots, N$ . Luego,  $\frac{I(w, w)}{\|w\|^2} \geq \lambda_N$  es decir,  $\frac{I(w, w)}{\lambda_N} \geq \|w\|^2 = \left\| u - \sum_1^N c_n w_n \right\|^2$ . Pero, (cf.

$$(5)), 0 \leq I(w, w) = I(u, u) - \sum_1^N c_n^2 \lambda_n \leq I(u, u). \text{ Luego, } \left\| u - \sum_1^N c_n w_n \right\|^2 \leq \frac{I(u, u)}{\lambda_N} \rightarrow 0, \text{ QED.}$$

**TEOREMA 6** (minimax y maximin). Valen, con  $\perp$  en  $L^2$  y para  $u, w_j, v_k \in H_0^1 \supset M$ ,

$$(9) \quad \min_{0 \neq u \perp w_1, \dots, w_{n-1}} \frac{I(u, u)}{\|u\|_2^2} = \lambda_n,$$

$$(10) \quad \min_{\dim M = n} \max_{0 \neq u \in M} \frac{I(u, u)}{\|u\|_2^2} = \lambda_n,$$

$$(11) \quad \max_{\{v_1, \dots, v_{n-1}\} \text{ lin. indep.}} \min_{0 \neq u \perp v_1, \dots, v_{n-1}} \frac{I(u, u)}{\|u\|_2^2} = \lambda_n,$$

DEMOSTRACION. (9) ya fue demostrada. El sistema  $\{w_k / \sqrt{\lambda_k}\}$  es ortonormal en  $H_0^1$  respecto de la norma  $\sqrt{I(\cdot, \cdot)} = \sqrt{B_0(\cdot, \cdot)}$ , (cf. (5)). Veamos (10). Si  $M = [w_j : j = 1, \dots, n]$ ,

$u = \sum_1^n c_i w_i \in M$ , entonces  $\frac{I(u, u)}{\|u\|_2^2} = \frac{\sum c_i^2 \lambda_i}{\sum c_i^2} \leq \lambda_n$  y el  $\max = \lambda_n$  se realiza en  $w_n$ .

Si  $M$  es cualquier subespacio de dimensión  $n$ , existe  $w \in M$ ,  $w \perp [w_j : j = 1, \dots, n-1]$ .

Entonces,  $w = \sum_{i=n}^{\infty} c_i w_i$  en  $L^2$ . Por lo dicho,  $\infty > \frac{I(w, w)}{\|w\|_2^2} \geq \frac{\sum_{j=n}^{\infty} c_j^2 \lambda_j}{\sum_{j=n}^{\infty} c_j^2} \geq \lambda_n \frac{\sum_{j=n}^{\infty} c_j^2}{\sum_{j=n}^{\infty} c_j^2} = \lambda_n$ .

Veamos (11). Si  $0 \neq u \in [w_1, \dots, w_n] \cap [v_1, \dots, v_{n-1}]^\perp$  entonces  $u = \sum_1^n c_i w_i$  y vale

$\frac{I(u, u)}{\|u\|_2^2} = \frac{\sum c_i^2 \lambda_i}{\sum c_i^2} \leq \lambda_n$ . En consecuencia,  $\max_{\{v_1, \dots, v_{n-1}\} \text{ lin. indep.}} \min_{0 \neq u \perp v_1, \dots, v_{n-1}} \frac{I(u, u)}{\|u\|_2^2} \leq \lambda_n$ . Pero si

$v_i = w_i, i = 1, \dots, n-1$  entonces  $\min_{0 \neq u \perp v_1, \dots, v_{n-1}} \frac{I(u, u)}{\|u\|_2^2} = \lambda_n$  y (11) sigue, QED.

**DEFINICION 2.** Sea  $\sigma_U$  el espectro de autovalores del operador  $-\Delta$ ,  $(-\Delta - \lambda)u = 0, u = 0$  en  $\partial U$ , contados según su multiplicidad.

**TEOREMA 7** (monotonía de los autovalores). A) Sea  $D \subset E$ . Entonces,

$$(12) \quad \forall j \lambda_j(E) \leq \lambda_j(D) \text{ y } N_D(\lambda) \leq N_E(\lambda).$$

B) Sean  $D, E, U$  regiones acotadas,  $D \cap U = \emptyset, D \cup U = E$ . Si  $\sigma_D = \{\lambda_j\}, \sigma_U = \{\lambda'_j\}, \sigma_E = \{\mu_j\}$  entonces  $\mu_{j+k} \leq \sup\{\lambda_j, \lambda'_k\}$  y  $N_D(\lambda) + N_U(\lambda) \leq N_E(\lambda)$ .

C) Si  $\{D_i : i = 1, \dots, m\}$  es una familia disjunta de regiones tales que para todo  $i, D_i \subset E$ ,

$E$  región acotada, entonces  $\sum_1^m N_{D_i}(\lambda) \leq N_E(\lambda) \diamond$

DEMOSTRACION. A) Si  $M$  es un subespacio de  $H_0^1(D)$  entonces es un subespacio de  $H_0^1(E) \supset H_0^1(D)$ , (cf. T. Aux., II, este §). Usando (10) obtenemos:  $\lambda_j(E) \leq \lambda_j(D)$ .

B) Sea  $M = M_1 + M_2, M_1 = [v_1, \dots, v_j] \subset H_0^1(D)$  y  $M_2 = [v'_1, \dots, v'_k] \subset H_0^1(U)$ . Sea  $u = v + v', v \in M_1, v' \in M_2$ . Entonces  $I(u, u) = I(v, v) + I(v', v')$  y por el teorema del

minimax tenemos  $\mu_{j+k} \leq \min_{M = M_1 + M_2} \max_{0 \neq u \in M} \frac{I(v, v) + I(v', v')}{\|v\|^2 + \|v'\|^2} \leq$

$$\leq \min_{M=M_1+M_2} \frac{\max_{v \in M_1} (I(v, v) / \|v\|^2) \|v\|^2 + \max_{v \in M_2} (I(v', v') / \|v'\|^2) \|v'\|^2}{\|v\|^2 + \|v'\|^2}.$$

Si  $M_1 = \{w_1, \dots, w_j\}$ ,  $M_2 = \{w_1', \dots, w_k'\}$  la última expresión es menor o igual que  $\frac{a\lambda_j + b\lambda_k'}{a+b}$ . Luego,  $\mu_{j+k} \leq \sup\{\lambda_j, \lambda_k'\}$ , QED.

**TEOREMA 8** (acotación de las derivadas (cf. [E])). Si  $\partial U \in C^2$ ,  $f \in L^2(U)$ , y  $(-\Delta + \mu)u = f, u = 0$  en  $\partial U$  entonces

$$\|u\|_{H^2} \leq C(U) [\|f\|_2 + \|u\|_2].$$

Si  $f = 0$  entonces  $\|u\|_{H^2} \leq C(U) \|u\|_2$  y en particular  $\|\nabla u\|_{H^1} \leq M(U) \|u\|_2$ . ♦

**COROLARIO 1.** Si  $\partial U \in C^2$  entonces  $w_i \in H^2 \cap H_0^1 \cap C^\infty$ . ♦

En efecto, es consecuencia del Teorema 8 y la Proposición 1.

**II.** A continuación probaremos que para una región de Jordan  $D \subset R^2$  arbitraria las autofunciones clásicas y las encontradas por el método variacional son esencialmente las mismas. Para ello consideremos el problema de Dirichlet en el círculo unitario  $U = \{z : |z| < 1\}$ . Sea  $\varphi \in C_0^\infty(U)$ . Notación:  $\xi = \rho e^{i\phi}$ ,  $x = r e^{i\theta}$ ,  $\hat{x} = r^{-1} e^{i\theta} = x/r^2 = 1/\bar{x}$ . El núcleo de Green para el problema de Dirichlet en el círculo unitario  $U$  es

$$G(x, \xi) = \frac{-1}{2\pi} \log \frac{|x - \xi|}{|1 - \bar{\xi}x|} = \frac{-1}{2\pi} \left[ \log|x - \xi| - \log|\hat{\xi} - x| - \log|\xi| \right] \quad \text{si } x \neq \xi \neq 0. \quad \text{Para}$$

$\varphi \in C_0^\infty(U)$  la función  $u(x) := \int_U G(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi$  es la solución clásica de  $-\Delta u = \varphi$ :

$u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ ,  $u(z) = 0$  si  $z \in \partial U = \{z : |z| = 1\}$ , (cf. T.2, §1). Probaremos que  $u$  está en  $H_0^1(U)$ . En este caso la solución clásica es también solución débil y por el teorema 8 tenemos  $u \in H_0^1(U) \cap H^2(U) \cap C^\infty(U) \cap C(\bar{U})$ .

**TEOREMA 9** (el círculo unitario). a) Si  $K(x, \xi)$  es igual al núcleo de Dirichlet en  $U$ ,

$$G(x, \xi) = \frac{-1}{2\pi} \log \frac{|x - \xi|}{|1 - \bar{\xi}x|}, \text{ o a alguna de sus derivadas,}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}(x, \xi) = \frac{-1}{2\pi} \left\{ \frac{x_i - \xi_i}{|x - \xi|^2} - \frac{(x_i |\xi| - \xi_i / |\xi|) |\xi|}{|x |\xi| - \xi / |\xi|^2} \right\}, \text{ entonces se verifica}$$

$$(13) \quad \int_U |K(x, \xi)| d\xi \leq C < \infty, \quad \int_U |K(x, \xi)| dx \leq C < \infty,$$

cualesquiera sean  $x, \xi$  en  $U$ .

b) si  $\varphi \in C_0^\infty(U)$  entonces  $u(x) = \int_U G(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi$  pertenece a  $H_0^1(U)$ . ♦

Para demostrar este teorema necesitamos el siguiente resultado:

**LEMA 1.** Si  $K(x, \xi)$ ,  $x, \xi \in U$ , verifica (13) entonces  $w(x) := \int_U K(x, y) \varphi(y) dy$  verifica

$$(14) \quad \int_U |w(x)|^2 dx \leq C^2 \|\varphi\|_2^2. \quad \blacklozenge$$

DEMOSTRACION DEL LEMA 1.

$$|w(x)|^2 = \left| \int_U K(x,y)\varphi(y)dy \right|^2 \leq \left( \int |K(x,y)|dy \right) \left( \int |K(x,y)|\varphi(y)|^2 dy \right) \leq C \int |K(x,y)|\varphi(y)|^2 dy.$$

Por tanto,  $\int_U |w(x)|^2 dx \leq C \int dx \int |K(x,y)|\varphi(y)|^2 dy \leq C^2 \|\varphi\|_2^2$ , QED.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA. Como  $G(x,\xi) = O(\log|x-\xi|)$  y

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x_1} &= -\frac{\partial}{4\pi \partial x_1} \left[ \log|x-\xi|^2 - \log|\xi|^2 - \log|x-\xi/|\xi||^2 \right] = \frac{-1}{2\pi} \left\{ \frac{x_1 - \xi_1}{|x-\xi|^2} - \frac{(x_1|\xi| - \xi_1/|\xi|)|\xi|}{|x|\xi| - \xi/|\xi||^2} \right\} = \\ &= O\left(\frac{1}{|x-\xi|}\right) \text{ sigue a).} \end{aligned}$$

De a) se obtiene, en vista del Lema 1, que  $u \in H^1(U)$ . Por B) del siguiente Teorema auxiliar vale que  $u \in H_0^1(U)$ , QED.

**TEOREMA AUXILIAR.** A) Sean  $D$  y  $E$  regiones tales que  $D \subset E$ . Si extendemos a  $E$  por cero las funciones en  $H_0^1(D)$  se obtiene un subespacio de  $H_0^1(E)$ . Más aún, si

$$\tilde{u}(x) := u(x), x \in D; \quad \tilde{u}(x) := 0, x \in E \setminus D,$$

entonces, en el sentido de las distribuciones, vale  $\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \tilde{u} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}$ , ([A], Cap. III).

B) Sean  $D$  una región de Jordan con contorno  $C^1$  y  $u \in C(\bar{D})$ , nula en el borde. Si  $u \in H^1(D)$  entonces  $u \in H_0^1(D)$ , (cf. [Tr], Ch III). ♦

**LEMA 2.** (norma de las derivadas de la solución clásica). Sea  $D$  una región de Jordan con contorno  $J$ .

i) La solución clásica  $v \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$  de  $-\Delta v = \psi$ ,  $\psi \in C_0^\infty(D)$ ,  $v \equiv 0$  en  $\partial D$  está en  $H^1(D)$ .

ii) Si  $J \in C^1$  entonces  $v \in H_0^1(D)$  y coincide con la solución débil del problema  $-\Delta v = \psi$ ,  $\psi \in C_0^\infty(D)$ ,  $v = 0$  en  $\partial D$ . ♦

DEMOSTRACION. i) Sea  $g$  la aplicación conforme que lleva  $D$  en  $U$  y aplica topológicamente  $\bar{D}$  sobre  $\bar{U}$ , (T. de Riemann-Carathéodory). Sea  $\varphi \in C_0^\infty(U)$  y  $\Phi(z) := \varphi(g(z))$ . Entonces  $\Phi \in C_0^\infty(D)$ . Sea la  $u$  como en b) del teorema 9 y  $v(z) = u(g(z))$ . Definamos,

$$(15) \quad \zeta = \xi + i\eta = g(z) = g(x+iy) = g_1(x,y) + ig_2(x,y).$$

Puesto que  $-\Delta_{\xi,\eta} u = \varphi(\zeta) \in C_0^\infty(U)$  resulta  $-\Delta_{x,y} v = \varphi(g(z)) \left| \frac{dg}{dz} \right|^2$ .

Como  $\frac{dg}{dz} \neq 0$  en  $D$  y es analítica allí, la función,

$$(16) \quad \psi(x,y) := \varphi(g(z)) \cdot \left\{ \left( \frac{\partial g_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_2}{\partial x} \right)^2 \right\} \in C_0^\infty(D).$$

O sea vale,

$$(17) \quad -\Delta v(x,y) = \Phi(x,y) \cdot \left\{ \left( \frac{\partial g_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_2}{\partial x} \right)^2 \right\} = \psi(x,y) \in C_0^\infty(D).$$

$v$  es entonces la solución clásica de  $-\Delta v = \psi(x, y)$ ,  $v|_{\partial D} \equiv 0$ . Por otra parte tenemos,

$$(18) \quad |\nabla_{x,y} v|^2 = |(\nabla_{\xi,\eta} u)(g(z))|^2 \left| \frac{dg}{dz} \right|^2 = |(\nabla_{\xi,\eta} u)(g(z))|^2 \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}.$$

Luego, usando (14) resulta  $\|\nabla_{x,y} v\|_{L^2(D)} = \|\nabla_{\xi,\eta} u\|_{L^2(U)} \leq M \|\phi\|_{L^2(U)}$  y la solución clásica de  $-\Delta v = \psi(x, y)$ ,  $v = 0$  en  $J$  está en  $H^1(D)$ .

ii) sigue fácilmente del teorema auxiliar, QED.

**LEMA 3.** Para  $D$  una región de Jordan con contorno  $J \in C^1$  son idénticos los operadores  $G \equiv L_0^{-1}$ . ♦

DEMOSTRACION. Si  $w$  es la solución débil de  $-\Delta w = \psi(x, y)$ ,  $w=0$  en  $J$  (cf. (16)) y  $v$  es la solución clásica del problema entonces  $v=w$  por el Lema 2. Por tanto tenemos,  $v=G\psi = L_0^{-1}\psi$  para toda  $\psi$  de la forma (16) que en definitiva es para toda  $\psi \in C_0^\infty(D)$ .

Si  $C_0^\infty(D) \ni \psi_n \rightarrow f$  en  $L^2$  entonces  $G(\psi_n) = L_0^{-1}(\psi_n) \rightarrow L_0^{-1}(f)$  en  $H_0^1$  y a  $G(f)$  en  $L^2$ . En consecuencia,  $G \equiv L_0^{-1}$ , QED.

Sea  $D$  una región de Jordan con contorno  $J$  y  $\psi \in C_0^\infty(D)$ . Existen regiones de Jordan  $D_n$  de contorno  $J_n \in C^\infty$  con  $J_n \rightarrow J$  tales que  $\text{sop } \psi \subset D_1 \subset \bar{D}_n \subset D_{n+1} \subset \bar{D}_{n+1} \subset D = D_0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . (Por ejemplo,  $D_n := \{(x, y) : G(x_0, y_0; x, y) > \varepsilon_n\}$ ,  $\varepsilon_n \downarrow 0$ , donde  $G(x_0, y_0; x, y)$  es la función de Green para  $D$ , (cf. [Ke])). Si  $v_n$  es la solución clásica en  $D_n$  de  $-\Delta v_n = \psi$ ,  $v_n = 0$  en  $J_n$ , tenemos que  $v - \tilde{v}_n$  es una función armónica en  $D \setminus J_n$  continua en  $\bar{D}$ . Luego,  $\|v - \tilde{v}_n\|_\infty \leq \sup_{z \in J_n} |v(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . O sea,  $v$  es el límite en  $L^\infty$ , y

por tanto en  $L^2$ , de  $\tilde{v}_n$ . En particular tenemos que  $\forall n \quad \|v_n\|_2 \leq M < \infty$ .

En la notación anterior reemplazamos por  $u$  la  $v$  para denotar las soluciones débiles. Tenemos entonces  $u_n = v_n$ . Veamos que ii) del Lema 2 vale con más generalidad.

**TEOREMA 10.** Para  $D$  una región de Jordan con contorno  $J$  la solución débil  $u$  del problema  $-\Delta u = \psi$ ,  $\psi \in C_0^\infty(D)$ ,  $u = 0$  en  $J$  coincide con la solución clásica  $v$ . ♦

DEMOSTRACION. Tenemos,

$$(19) \quad \iint_D |\nabla \tilde{u}_n|^2 dx dy = \int \nabla \tilde{u}_n \cdot \nabla \tilde{u}_n = \iint_{D_n} \nabla u_n \cdot \nabla u_n = \int \psi u_n \leq \|\psi\|_2 \|u_n\|_2 \leq M \|\psi\|_2 = M'.$$

Entonces,  $\|\tilde{u}_n\|_{H_0^1} \leq K < \infty$ . Usaremos en  $H_0^1(D)$  la norma equivalente  $|\cdot|_{H_0^1}$  dada por el producto escalar  $I(u, v) = \int_D \nabla u \times \nabla v dx$ . Definimos  $W_1 := \tilde{u}_1$ ,  $W_n := \tilde{u}_n - \tilde{u}_{n-1}$  de manera

que  $\sum_1^N W_j = \tilde{u}_N$ . Vale:  $W_n \in H_0^1(D_n) \ominus H_0^1(D_{n-1})$ . En efecto, sea  $\phi \in C_0^\infty(D_{n-1})$ , por ser

las  $u_m$  soluciones débiles en los respectivos  $D_m$  tenemos  $I(W_n, \phi) = \int_D \psi(\phi - \phi) dx = 0$ .

Entonces, en  $H_0^1(D)$  vale  $\sum_1^N |W_j|_{H_0^1}^2 = |\tilde{u}_N|_{H_0^1}^2 \leq K^2$  y en consecuencia  $\sum_1^N W_j = \tilde{u}_N$  converge en  $H_0^1(D)$  a una  $u \in H_0^1(D)$  que es solución débil. Como también  $\tilde{u}_N = \tilde{v}_N$ , la sucesión  $\{\tilde{u}_N\}$  converge en  $L^2$  a la solución clásica  $v$  y por tanto  $u = v$ , QED.

**TEOREMA 11.** i) (Identificación de los operadores inversos). Para  $D$  una región de Jordan son idénticos los operadores  $G \equiv L_0^{-1}$ .

ii) (Identificación de las autofunciones). Sea  $\{w_i\}$  la familia de autofunciones normalizadas obtenidas con el método variacional para el problema de Dirichlet y  $\sigma_V = \{\mu_i\}$  su espectro asociado y sea  $\{\varphi_i\}$  la familia de autofunciones normalizadas clásicas con su espectro  $\sigma = \{\lambda_i\}$ . Entonces vale  $\sigma_V = \sigma$  y para todo  $i$  los autoespacios (de dimensión finita) coinciden:  $N(\mu_i) = N(\lambda_i)$ .  $\{\varphi_i\} \approx \{w_i\}$ : cada autofunción variacional es una combinación lineal de autofunciones clásicas contenidas en su autoespacio:  $w_i = \sum_{\lambda_k = \mu_i} c_k \varphi_k$ , en casi todo punto, y recíprocamente. ♦

DEMOSTRACION. Usando el Teorema 10 puede ahora repetirse la demostración del Lema 3 probando así i). ii) es consecuencia inmediata de i), QED.

Como las autofunciones del problema de Dirichlet en una región de Jordan halladas por el método variacional son indistinguibles de las obtenidas según la definición clásica es legítimo el uso en la sección 1 de los resultados del teorema 7 de esta sección.

§3

**I. REGIONES CON CONTORNO REGULAR. LA SERIE DE DIRICHLET DE LOS AUTOVALORES.** Supondremos en esta sección que  $D$  es una región de Jordan de contorno  $C^2$ :  $J = \partial D$  es una curva de Jordan *definida* por medio de funciones  $y_1(s), y_2(s) \in C^2$  con versor tangente en todo punto (cf. II este §). Nos interesa la función

$$F(p; \lambda) = \lambda \sum_1^{\infty} \varphi_n^2(p) / \lambda_n(\lambda_n - \lambda) \text{ pues } \int_D F(p; \lambda) dp = \lambda \sum_1^{\infty} 1 / \lambda_n(\lambda_n - \lambda), \lambda = -\chi^2, \chi > 0.$$

Recordemos que (cf. Introducción, T. 6),  $F(p, q; \lambda) := G(p, q; \lambda) - G(p, q) = K_0(\chi|p - q|) / 2\pi - H(p, q; \lambda) - (1/2\pi) \log(M/|p - q|) + H(p, q)$ .

Vimos que  $K_0(\chi|p - q|) = \log \frac{M}{\chi|p - q|} + P(\chi|p - q|) - \log M$ . Luego,

$$F(p, q; \lambda) = -(\log \chi) / 2\pi - H(p, q; \lambda) + H(p, q) + P(\chi|p - q|) / 2\pi - (\log M) / 2\pi.$$

Para  $q \rightarrow p$  resulta

$$(1) \quad F(p; \lambda) := \lim_{q \rightarrow p \in D} F(p, q; \lambda) = -(\log \chi) / 2\pi - (\log M) / 2\pi + H(p, p) - H(p, p; \lambda) + P(0) / 2\pi$$

donde

$$(1') \quad H(b, q; \lambda) = K_0(\chi|b - q|) / 2\pi > 0, q \in D, b \in J.$$

Observemos que por ser  $K_0(r)$  decreciente, por (1') y el principio de máximo para funciones  $\chi$ -armónicas, si  $p \in \bar{D}$  y  $q \in D$  entonces

$$(2) \quad 0 < H(p, q; -\chi^2) \leq \max_{b \in J} K_0(\chi|b - q|) / 2\pi = K_0(\chi \text{ dist}(q, J)) / 2\pi.$$

Necesitaremos estimar  $H(p, p; \lambda)$  para  $\chi \rightarrow \infty$ . Pero si  $\text{dist}(q, J) > \delta > 0$  tenemos

$$(3) \quad H(p, q; -\chi^2) \leq C(\delta) e^{-\delta\chi^{1/2}},$$

(cf. B) Intr.). Bastará entonces estimar  $H(p, p; \lambda)$  en  $\bar{D} \cap (\partial D)_\delta$ .

Nuestro objetivo es demostrar el teorema de Pleijel, o sea la siguiente fórmula (6), para regiones de Jordan  $C^2$  y para esto es esencial probar la siguiente fórmula (4). De (6) podemos concluir que la distribución de los autovalores determina el área de la región y la longitud de su contorno.

Definimos,  $I = \int_D H(x, x; -\chi^2) dx$  y probaremos que

$$(4) \quad I = \frac{|J|}{8\chi} + O\left(\frac{\log \chi}{\chi^2}\right), \chi \rightarrow \infty.$$

**NB.** Å. Pleijel prueba en [Pl] que si  $x_1(s), x_2(s) \in C^\infty$  se tiene

$$(4') \quad I = |J| / 8\chi - 1/6\chi^2 + \left(\int_J c^2 ds\right) / 512\chi^3 + O(1/\chi^4),$$

donde  $c(s)$  es la curvatura del contorno y obtiene una expresión más fina que la de la fórmula (6) citada.

Supongamos (4). De (1) y (21) del §1 deducimos que para  $w = \chi^2$  y  $C$  una constante

adecuada vale  $\int_D F(x, -w) dx = -\frac{|D|}{4\pi} \log w + C - I = -w \sum_1^{\infty} \frac{1}{\lambda_n(\lambda_n + w)}$ . Por tanto,

$$(5) \quad h(w) := -w \sum_1^{\infty} \frac{1}{\lambda_n(\lambda_n + w)} = -\frac{|D|}{4\pi} \log w + C - \frac{|J|}{8} \frac{1}{w^{1/2}} + O(1) \frac{\log w}{w}.$$

Obtendremos a continuación, integrando a lo largo de una curva  $\gamma$  del plano  $w$ , que

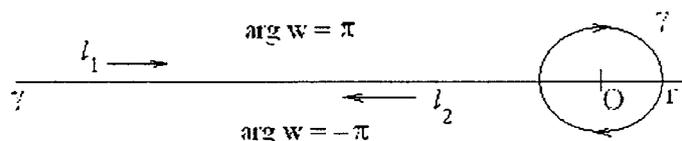
$$(6) \quad \sum \frac{1}{\lambda_n^z} = \int \frac{dN(\lambda)}{\lambda^z} = \frac{|D|}{4\pi} \frac{1}{z-1} - \frac{|J|}{8\pi} \frac{1}{z-1/2} + g(z), \quad g(z) \text{ holomorfa en } \operatorname{Re} z > 0.$$

O lo que es lo mismo,

$$(6') \quad \int_{i+}^{\infty} \frac{dN(\lambda)}{\lambda^z} = \frac{|D|}{4\pi} \frac{1}{z-1} - \frac{|J|}{8\pi} \frac{1}{z-1/2} + G(z), \quad G(z) \text{ holomorfa en } \operatorname{Re} z > 0.$$

Fig. 2

(w)



$\gamma$  es el contorno indicado en la figura 2 con  $r$  tal que  $0 < r < \inf(\lambda_1, 1)$ . Sea  $\Gamma$  la región a la izquierda de  $\gamma$ . Veamos (6).

La función  $k(w) := w \sum_1^{\infty} \frac{1}{\lambda_n(\lambda_n - w)}$  es meromorfa en el plano  $w$  con polos simples en

los puntos  $\lambda_n$ . Para  $a = -|D|/4\pi$ ,  $b = -|J|/8$  y  $C$  constante, verifica en  $t > 0$ ,

$$(7) \quad k(-t) = h(t) = a \log t + bt^{-1/2} + q(t) + C,$$

donde  $q(t)$  es una función continua en  $t \in (0, \infty)$  y tal que  $q(t) = O(t^{-1} \log t)$  para

$t \rightarrow \infty$ , (cf. (5)). Consideremos la expresión  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{k(w)}{w^s} dw$  donde  $s > 1$ . Vale

$$(8) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{k(w)}{w^s} dw = \frac{1}{2\pi i} \int \sum_1^{\infty} \frac{w^{1-s}}{\lambda_n(\lambda_n - w)} dw = \frac{-1}{2\pi i} \sum_1^{\infty} \int_{\gamma} \frac{w^{1-s}}{\lambda_n(w - \lambda_n)} dw = - \sum_1^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^s}.$$

En efecto, sea  $t = |w|$ . La segunda igualdad se debe a que  $\sum \int \left| \frac{t^{1-s}}{\lambda_n(t + \lambda_n)} \right| dt < \infty$ , (cf.

(23) §1). Para la última igualdad en (8) observemos que la región  $\Gamma$  es el límite, para  $R \rightarrow \infty$ , de la región contenida entre las circunferencias  $k$  y  $K$  de radios  $r$  y  $R$  cortada a lo largo del eje real negativo. Las integrales sobre  $K$  tienden a cero cuando  $R \rightarrow \infty$  pues  $s > 1$ . La última igualdad en (8) sigue entonces del teorema de los residuos.

Sean  $k' = \gamma \cap \{z : |z| < 1\}$  y  $l = \gamma \setminus \{z : |z| < 1\} = l_1 + l_2$  (ver fig. 2) con  $l_1$  de  $-\infty$  a  $-1$  donde

$\arg w = \pi$  y con  $l_2$  de  $-1$  a  $-\infty$  donde  $\arg w = -\pi$ . La función  $f_0(s) := \frac{1}{2\pi i} \int_{k'} \frac{k(w)}{w^s} dw$

admite una extensión entera. Entonces,

$$(9) \quad - \sum_1^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^s} = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{k(w)}{w^s} dw + f_0(s).$$

Pero

$$\begin{aligned}
 (10) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_1^{\infty} \frac{k(w)}{w^s} dw &= \frac{1}{2\pi i} \left[ - \int_{-i_1}^k \frac{k(w)}{w^s} dw + \int_{i_2}^k \frac{k(w)}{w^s} dw \right] = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_1^{\infty} k(-t) t^{-s} (e^{-i\pi s} - e^{i\pi s}) dt = \frac{-\operatorname{sen} \pi s}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{k(-t)}{t^s} dt = \frac{-\operatorname{sen} \pi s}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{h(t)}{t^s} dt = \\
 &= \frac{-\operatorname{sen} \pi s}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{a \log t + C + bt^{-1/2}}{t^s} dt + \frac{-\operatorname{sen} \pi s}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{q(t)}{t^s} dt.
 \end{aligned}$$

El último sumando en (10) define una función  $g_0(s)$  con extensión holomorfa a  $\operatorname{Re} z > 0$ . Luego,

$$(11) \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^s} = \frac{\operatorname{sen} \pi s}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{a \log t + bt^{-1/2} + C}{t^s} dt + g_1(s),$$

con  $g_1(z) = -f_0(z) - g_0(z)$  holomorfa en  $\operatorname{Re} z > 0$ . La integral es igual a  $\frac{a}{(s-1)^2} + \frac{b}{s-1/2} + \frac{C}{s-1}$  por lo que el primer sumando a la derecha es igual a  $-\frac{a}{s-1} + \frac{b/\pi}{s-1/2} + g_2(s)$  en  $s > 1$  con  $g_2$  holomorficamente prolongable a  $\operatorname{Re} z > 0$ .

Por tanto, en  $\operatorname{Re} z > 1$  vale

$$(12) \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^z} = -\frac{a}{z-1} + \frac{b/\pi}{z-1/2} + g(z), \quad g \text{ holomorfa en } \operatorname{Re} z > 0.$$

Reemplazando los valores de  $a$  y  $b$  obtenemos (6), QED.

**NB.** Si  $N(\lambda)$  admitiera un segundo término en su expresión asintótica por el Lema 1 §1 debería ser  $N(\lambda) = -a\lambda + 2b\lambda^{1/2}/\pi + o(\lambda^{1/2}) = (|D|/4\pi)\lambda - (|J|/4\pi)\sqrt{\lambda} + o(\lambda^{1/2})$ .

**II. COORDENADAS LOCALES. LA SERIE ESPECTRAL DE DIRICHLET.** Para tratar regiones de contorno regular conviene introducir coordenadas en un entorno del contorno de la siguiente manera en la que imitamos a Å. Pleijel, (cf. [Pl], [B]).

Sea  $s$  el parámetro longitud de arco sobre el contorno  $J$  medido a partir de un origen  $O$ .

Notaremos con  $y = y(s) = (y_1(s), y_2(s))$ ,  $0 \leq s < |J|$ , a los puntos de  $J$ . Supondremos  $y_i(s) \in C^2([0, |J|])$ ,  $y_i(0) = y_i(|J|)$ . Sea  $n_i = \bar{n} = \bar{n}(s) = (\bar{n}_1, \bar{n}_2)$  el versor normal interior

en  $y$ . Supongamos  $\delta > 0$  pequeño y sea  $I$  un intervalo con  $|I| \leq |J|$ .

Definimos la transformación  $T$ :

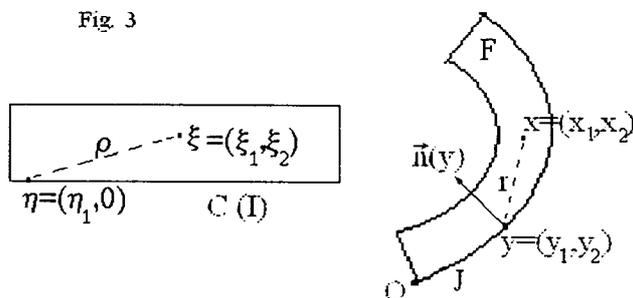
$$(s, t) \rightarrow x := y(s) + t \bar{n}$$

en el rectángulo  $C(I) := I \times (-\delta, \delta)$  con imagen en la franja

$$J_\delta := \{x : \operatorname{dist}(x, J) < \delta\}$$

del contorno. A continuación usaremos la notación  $\xi := (\xi_1, \xi_2)$

para un punto del rectángulo  $C(I)$  y  $x = (x_1, x_2)$  para su imagen en la franja  $J_\delta$ . Esto es,  $T$  se escribe como



$T: \xi = (\xi_1, \xi_2) \rightarrow x = (x_1, x_2) = (y_1(\xi_1), y_2(\xi_1)) + \xi_2(\bar{n}_1(\xi_1), \bar{n}_2(\xi_1)), \quad 0 \leq \xi_1 < |J|, \quad |\xi_2| < \delta,$   
de manera que si  $\xi_2 = 0$  entonces su imagen está en  $J$ . Dado  $\eta = (\eta_1, 0)$  su imagen se representará por  $y = y(\eta_1)$  para indicar que se encuentra en  $J$ .

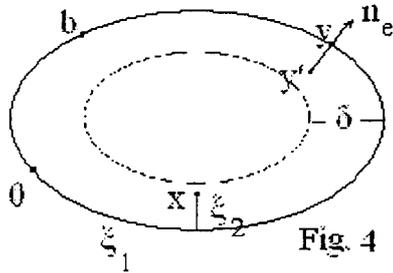


Fig. 4

Puede lograrse para un  $\delta$  suficientemente pequeño que la transformación dada por  $T$  para  $I$  tal que  $|I| = |J|$  sea un homeomorfismo entre el rectángulo  $\{\xi = (\xi_1, \xi_2) : 0 \leq \xi_1 \leq |J|, |\xi_2| < \delta\}$ , con lados verticales identificados, y  $J_\delta$ . En efecto, como por hipótesis  $J$  es  $C^2$ , la transformación  $T$  es  $C^1$  y se reescribe ahora como (nótese que

$n_i = (-\dot{y}_2(\xi_1), \dot{y}_1(\xi_1)), \quad |n_i| = 1$  pues  $\xi_1 = s$ ):

$$(13) \quad T = \begin{cases} x_1(\xi) = y_1(\xi_1) - \xi_2 \dot{y}_2(\xi_1) \\ x_2(\xi) = y_2(\xi_1) + \xi_2 \dot{y}_1(\xi_1) \end{cases}$$

Su jacobiano  $B$  es el módulo del determinante de la siguiente matriz,

$$(14) \quad \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)} = \begin{vmatrix} \dot{y}_1(\xi_1) - \xi_2 \ddot{y}_2(\xi_1) & -\dot{y}_2(\xi_1) \\ \dot{y}_2(\xi_1) + \xi_2 \ddot{y}_1(\xi_1) & \dot{y}_1(\xi_1) \end{vmatrix} = 1 - \xi_2 c(\xi_1).$$

$c(\xi_1)$  es la curvatura de  $J$  en el punto  $T(\xi_1, 0) \in J$ . Por ser  $c$  continua,  $1 - \xi_2 c(\xi_1)$  es positiva para  $|\xi_2| < \delta$ , si  $\delta$  es bastante pequeño, por lo que en este caso  $B = 1 - \xi_2 c(\xi_1) > 0$  y  $T$  es *localmente* un homeomorfismo sobre su imagen.

Veamos que, posiblemente reduciendo  $\delta$ ,  $T$  es *globalmente* un homeomorfismo.

Sean  $y(s) \in J$  y  $\varepsilon$  tal que  $T$  es un homeomorfismo de  $(s - 2\varepsilon, s + 2\varepsilon) \times (-\delta, \delta)$  sobre su imagen  $U := T((s - 2\varepsilon, s + 2\varepsilon) \times (-\delta, \delta))$  que es un entorno de  $y(s)$ .

Sea  $V := \{x \in U : \text{dist}(x, J \setminus U) > 2 \text{dist}(x, J)\}$ . Entonces  $V$  también es un entorno de  $y(s)$

y existe  $0 < \tilde{\delta} \leq \delta$  tal que  $\tilde{U} := T((s - \varepsilon, s + \varepsilon) \times (-\tilde{\delta}, \tilde{\delta})) \subset V$ . Como  $J$  es compacta

podemos cubrirla con un número finito  $\{\tilde{U}_h : h = 1, \dots, N\}$  de tales entornos. Si

$\delta_1 = \min_h \tilde{\delta}_h$ , vale que  $T$  es un homeomorfismo de  $\{\xi = (\xi_1, \xi_2) : 0 \leq \xi_1 \leq |J|, |\xi_2| < \delta_1\}$

sobre  $J_{\delta_1}$ . En efecto, sea  $x \in J_{\delta_1}$ , veamos que existe un único  $y \in J$  tal que

$\text{dist}(x, J) = |x - y|$ . Supongamos que  $y_1$  e  $y_2$  verifican  $\text{dist}(x, J) = |x - y_k| \quad k = 1, 2$ . Si

$y_1 \in \tilde{U} \cap J$ , entonces por la construcción de ese entorno  $y_2 \in U \cap J$ . Escribiendo

$y_h = y(s_h)$  y definiendo  $\xi_2 := \pm \text{dist}(x, J)$ , (donde se tomará el signo  $+$  si  $x \in D$  y el

opuesto si  $x \notin D$ ) se deduce que  $x = T(s_1, \xi_2) = T(s_2, \xi_2)$ . Como  $T$  es un

homeomorfismo en  $U$  resulta  $s_1 = s_2$ , o sea  $y_1 = y_2$ . Luego hemos probado que  $T$  es

biunívoco y sobre  $J_{\delta_1}$ .

Dado  $x = y(\xi_1) + \xi_2 n_i(\xi_1) \in F_\delta$  definimos  $\hat{x}$ , su *simétrico respecto de  $J$* , como

$\hat{x} = y(\xi_1) - \xi_2 n_i(\xi_1)$ .

**TEOREMA 1.** Si  $J \in C^2$  entonces en  $\text{Re } z > 1$  y con  $G(z)$  holomorfa en  $\text{Re } z > 0$  vale

$$(6') \quad \int_{1+}^{\infty} \frac{dN(\lambda)}{\lambda^z} = \frac{|D|}{4\pi} \frac{1}{z-1} - \frac{|J|}{8\pi} \frac{1}{z-1/2} + G(z). \star$$

DEMOSTRACION. (Cf. [PI]). Por lo visto en I §3 basta demostrar la fórmula (4):

$$\int_D H(p, p; -\chi^2) dp = \frac{|J|}{8\chi} + O\left(\frac{\log \chi}{\chi^2}\right). \text{ Recurriendo a (3) vemos que si } F_h = D \cap J_h,$$

$$(15) \quad I = \int_D H(x, x; -\chi^2) dx = \int_{F_h} H(x, x; -\chi^2) dx + \int_{D \setminus F_h} H(x, x; -\chi^2) dx = \\ = \int_0^h d\xi_2 \int_0^{|\mathcal{J}|} H(x(\xi), x(\xi); -\chi^2) [1 - c(\xi_1)\xi_2] d\xi_1 + O(e^{-\chi h/2}).$$

donde suponemos  $h < \delta_1$ . O sea,  $h$  es tan pequeño como para que  $\forall x \in D$  con  $0 < \xi_2 \leq h$  exista  $\hat{x} \notin \bar{D}$ . Tendremos además  $B = |B| = 1 - c(\xi_1)\xi_2 > 0$  en  $\bar{F}_h$ .

Si el contorno fuera el eje real y  $D$  el semiplano superior tendríamos (cf. (1')), para  $b = (b_1, 0) \in J$ ,  $H(b, q; -\chi^2) = K_0(\chi|b - \hat{q}|)/2\pi$ ,  $\hat{q}$  el simétrico de  $q$ . Luego, por la metarmonicidad de ambos miembros, vale  $H(\xi, q; -\chi^2) = K_0(\chi|\xi - \hat{q}|)/2\pi$  en  $D = \{\text{Im} \xi > 0\}$ . Veremos que también en el caso que estamos considerando,

$$R(x, p) := H(x, p; -\chi^2) - \frac{K_0(\chi|x - \hat{p}|)}{2\pi} \text{ es pequeño para } p \in F_h, x \in \bar{D}.$$

En efecto, vale  $(\Delta_x - \chi^2)R = 0$  en  $D$ , o sea,  $R$  es metarmónica. Además, si  $x \in J$ ,

$$(16) \quad |R(x, p)| = |K_0(\chi|p - x|) - K_0(\chi|\hat{p} - x|)/2\pi.$$

Deduciremos de (16) que para  $p \in F_h$  vale, con  $M$  independiente de  $p$  y  $x$ ,

$$(17) \quad |R(x, p)| \leq M \inf(1/\chi, e^{-\chi \text{dist}(p, J)^{1/4}}) \text{ en } x \in J.$$

Aceptando por el momento (17), sigue del principio de máximo para funciones metarmónicas (que dice que éstas toman su máximo positivo y su mínimo negativo en el contorno) que (17) vale en  $x \in D$ . Luego, si

$$R(p) := H(p, p; -\chi^2) - K_0(\chi|p - \hat{p}|)/2\pi,$$

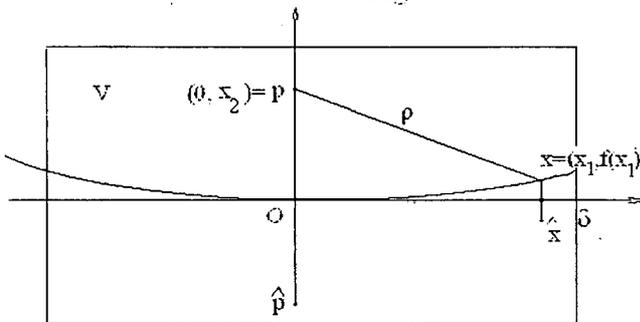
tenemos

$$(18) \quad |R(p)| \leq M \inf(1/\chi, e^{-\chi \text{dist}(p, J)^{1/4}}) \text{ para } p \in F_h.$$

Por tanto,

$$\left| \int_{F_h} R(p) dp \right| \leq \int_{F_h} |R(p)| dp \leq \int_{F_h} |R(p)| I_{\{\text{dist}(p, J) \geq \varepsilon\}} dp + \int_{F_h} |R(p)| I_{\{\text{dist}(p, J) < \varepsilon\}} dp = I + II,$$

Fig. 5



donde (cf. (18)):  $I \leq M|D|e^{-\chi \varepsilon^{1/4}}$ ,

$II \leq M' \varepsilon / \chi$ . Tomando  $\varepsilon = \frac{4}{\chi} \log \chi^2$

resulta,

$$\int_{F_h} |R(p)| dp \leq C' / \chi^2 + C'' (\log \chi) / \chi^2.$$

O sea, para  $\chi$  suficientemente grande tenemos,

$$(19) \quad \int_{D \cap J_h} |R(p)| dp = O(1) \frac{\log \chi}{\chi^2}.$$

Veamos (17). Dado  $p \in F_h$ , sea  $V$  un entorno de  $O \in J$ , siendo  $O$  el punto medio del

segmento  $\overline{p\hat{p}}$  (ver fig. 5). Suponemos efectuado un cambio de coordenadas cartesianas tal que  $p = (0, x_2)$ ,  $\hat{p} = (0, -x_2)$ ,  $J \cap V = \{x = (x_1, f(x_1)) : |x_1| < \delta\}$ , con  $f(x_1) = ax_1^2 + o(x_1^2)$ .

Tomando  $\delta > 0$  suficientemente pequeño se puede lograr que para  $|x_1| < \delta$   $|f(x_1)| < C|x_1|^2$  con  $C$  independiente de  $p \in F_h$ . En efecto, si el parámetro longitud de arco se mide a partir de  $O$ , la ecuación de  $J$  resultará en las coordenadas mencionadas:

$$\begin{cases} x_1(s) = (y_1(s) - y_1(0))\dot{y}_1(0) + (y_2(s) - y_2(0))\dot{y}_2(0) \\ x_2(s) = -(y_1(s) - y_1(0))\dot{y}_2(0) + (y_2(s) - y_2(0))\dot{y}_1(0) \end{cases}$$

Luego,  $\dot{x}_1(s) = \dot{y}_1(s)\dot{y}_1(0) + \dot{y}_2(s)\dot{y}_2(0) = 1 + (\dot{y}_1(s) - \dot{y}_1(0))\dot{y}_1(0) + (\dot{y}_2(s) - \dot{y}_2(0))\dot{y}_2(0)$ , de donde se ve que existe  $\varepsilon > 0$ , dependiente sólo de  $J$ , tal que  $\dot{x}_1(s) > 1/2$  para  $|s| < \varepsilon$ .

Puede elegirse  $\varepsilon \leq 2h$ . Entonces,  $x_1 = x_1(s)$  tiene una función inversa  $s = s(x_1) < 2x_1$  definida por lo menos en  $|x_1| < \delta := \varepsilon/2 \leq h$  y  $f(x_1) = x_2(s(x_1))$ . De las identidades

$f'(x_1(s))\dot{x}_1(s) = \dot{x}_2(s)$ ,  $f''(x_1(s))\dot{x}_1^2(s) + f'(x_1(s))\ddot{x}_1(s) = \ddot{x}_2(s)$  se deduce que  $f'(0) = 0$  y  $|f''(x_1)| < K$  en  $|x_1| < \delta$  con  $K$  independiente de  $O$ . Como allí  $f(x_1) = \int_0^{x_1} f''(t)(x_1 - t)dt$

resulta  $|f(x_1)| < (K/2)x_1^2$ . Podemos reemplazar ahora el  $h$  de la fórmula (15) por  $\delta = \varepsilon/2$  sin que cambie la expresión de esa fórmula ni de las siguientes.

Denotamos  $\rho := \inf(|x - p|, |x - \hat{p}|)$ ,  $r := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . Vale,

$$(20) \quad \rho > r/\sqrt{2}.$$

En efecto, como  $(x_2 \pm f(x_1))^2 = x_2^2 + f^2 \pm 2x_2f \geq \frac{x_2^2}{2} - f^2$ , resulta

$$\rho^2 \geq x_1^2 + x_2^2/2 - C^2x_1^4 \geq (x_1^2 + x_2^2)/2 \quad \text{si } \delta \text{ es bastante pequeño.}$$

Si notamos con  $\hat{x}$  el punto  $\hat{x} = (x_1, -f(x_1))$ , tenemos además  $|x - \hat{p}| = |\hat{x} - p|$ , de donde se obtiene que  $||x - p| - |x - \hat{p}|| \leq |x - \hat{x}| = 2|f(x_1)|$ .

Luego, si  $x \in J \cap V$ ,

$$(21) \quad d := |K_0(\chi|p - x|) - K_0(\chi|p - \hat{x}|)| \leq \chi 2|f(x_1)| |K_0'(\chi\tilde{\rho})|,$$

donde  $\tilde{\rho}$  es un valor intermedio entre  $|x - p|$  y  $|x - \hat{p}|$  y en vista de (20) verifica también la desigualdad  $\tilde{\rho} > r/\sqrt{2}$  ( $\geq |x_2|/\sqrt{2} = \text{dist}(p, J)/\sqrt{2}$ ).

El último miembro de (21) es igual a, (cf. §1),

$$(22) \quad \frac{2|f(x_1)|}{\tilde{\rho}} |\chi\tilde{\rho}K_0'(\chi\tilde{\rho})| \leq c \frac{2|f(x_1)|}{\tilde{\rho}} e^{-\chi\tilde{\rho}/2} \leq c2\sqrt{2} \frac{|f(x_1)|}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} e^{-\chi\tilde{\rho}/2} \leq c' \frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} e^{-\chi r/2\sqrt{2}} \leq c'|x_1| e^{-\chi r/2\sqrt{2}} \leq c're^{-\chi r/4} \leq c'' \inf\left(\frac{1}{\chi}, (\text{diam}D)e^{-\chi \text{dist}(p, J)/4}\right).$$

Si  $x \in J \setminus V$  entonces  $|p - x|, |\hat{p} - x| \geq \delta/2 = h/2$  y vale

$$(23) \quad d' := K_0(\chi|p - x|) + K_0(\chi|\hat{p} - x|) \leq c'''e^{-\chi h/4} \leq c''v \inf(1/\chi, e^{-\chi \text{dist}(p, J)/4}).$$

De (22) y (23) obtenemos  $|R(x, p)| \leq \sup(d, d')/2\pi \leq M \inf(1/\chi, e^{-\frac{\chi}{4} \text{dist}(p, J)})$ , o sea (17).

Calcularemos, para finalizar, lo que debería ser la primera aproximación  $\Theta$  de  $\int_{F_h} H(p, p; -\chi^2) dp$ .

$$\begin{aligned} \Theta &:= \int_{F_h} \frac{K_0(\chi|p - \hat{p}|)}{2\pi} dp = \frac{1}{2\pi} \int_0^{|J|} d\xi_1 \int_0^h K_0(\chi 2\xi_2) [1 - c(\xi_1)\xi_2] d\xi_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{|J|} \left\{ \frac{1}{2\chi} \int_0^{2h\chi} K_0(t) dt - \frac{c(\xi_1)}{(2\chi)^2} \int_0^{2h\chi} K_0(t) t dt \right\} d\xi_1 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{|J|} \left\{ \frac{1}{2\chi} \int_0^\infty K_0(t) dt - \frac{1}{2\chi} \int_{2\chi h}^\infty K_0(t) dt \right\} d\xi_1 + O(1/\chi^2) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{|J|} \left( \frac{1}{2\chi} \int_0^\infty K_0(t) dt \right) d\xi_1 + O(e^{-\chi h}/\chi) + O(1/\chi^2) = (\chi \gg 1) = \int_0^{|J|} \frac{1}{8\chi} d\xi_1 + O\left(\frac{1}{\chi^2}\right) = \\ &= \frac{|J|}{8\chi} + O\left(\frac{1}{\chi^2}\right) \text{ pues } \int_0^\infty K_0(r) dr = \frac{\pi}{2}. \text{ Entonces tenemos} \\ (24) \quad &\frac{1}{2\pi} \int_{F_h} K_0(\chi|p - \hat{p}|) dp = \frac{|J|}{8\chi} + O\left(\frac{1}{\chi^2}\right), \end{aligned}$$

que junto con (19) prueban (4) y por tanto el teorema, QED.

**NB.** El teorema de Weyl para estas regiones resulta inmediatamente pues es consecuencia de (6') y del siguiente teorema tauberiano.

**TEOREMA 2** (Ikehara). Sea  $0 \leq \alpha(x)$  una función monótona no decreciente y sea

$f(s) = \int_{1+}^\infty x^{-s} d\alpha(x)$ . Si para  $\text{Re}(s) > 1$  la integral converge y si la expresión

$g(s) := f(s) - \frac{A}{s-1}$  tiene un límite continuo sobre  $\text{Re } s = 1$  entonces  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x)}{x} = A$ . ♦

#### REFERENCIAS.

- [A] ADAMS, R. A., *Sobolev Spaces*, New York, Academic Press, (1975).
- [B] BENEDEK, A., *Sobre el problema de Dirichlet*, Notas de Álgebra y Análisis n°2, Instituto de Matemática, Univ. Nacional del Sur, (1968).
- [BP] BENEDEK A., PANZONE R., *Problemas de contorno II*, ITI#79, INMABB-CONICET, parte 1(2002)150 pgs., parte 2(2003)77 pgs..
- [C1] CARLEMAN, T., Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes, Åttonde skan.matematikerkongressen i Stockholm (1934), 34-44.
- [C2] CARLEMAN, T., *L'Intégral de Fourier et questions qui s'y rattachent*, Uppsala, (1944).
- [CH] COURANT, R., HILBERT, D., *Methods of Mathematical physics*, Vol I. Interscience, New York, 1987.
- [E] EVANS, L. C., *Partial Differential Equations*, Am. Math. Soc., (1998).
- [F] FALCONER, K., *Techniques in Fractal Geometry*, John Wiley & Sons (1997).
- [Gå] GÅRDING, L. On the asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators, Math. Scand. 1, 237-255 (1953).
- [H] HÖRMANDER, L., *Linear partial differential operators*, Springer Verlag (1963).
- [He] HELLWIG, G., *Partial differential equations, an introduction*, Blaisdell Pub. Co., New York (1964).
- [I] IVRII, V. Ja., *Precise spectral asymptotics for elliptic operators*, Lecture Notes in Math., vol. 1100, Springer-Verlag, Berlin, (1944).

- [K] KAC, M., Can one hear the shape of a drum?, *Am. Math. Monthly*, 73, n°4, 1-23, (1966).
- [Ke] KELLOG, O., On the derivatives of harmonic functions on the boundary, *Trans. Am. Math. Soc.*, vol 33, n°2, 486-510, (1931).
- [Ku] KUTZNETSOV, N. V., Asymptotic distribution of the eigenfrequencies of a plane membrane in the case when the variables can be separated, *Differential Equations*, vol. 2, n° 10, (1966)715-723.
- [L] LAPIDUS, M. L., Fractal drum, inverse spectral theorems for elliptic operators and a partial resolution of the Weyl-Berry conjecture, *T.A.M.S.*, vol. 325, 465-529 (1991).
- [MO] MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F., *Formulas and Theorems for the Functions of Mathematical Physics*, Chelsea Pub. Co., New York, (1954).
- [P] BENEDEK, A., PANZONE, R., Comentario a un teorema de Jakob Steiner, *Rev. Unión Matemática Argentina*, Vol. XXXII, (1985-86), 93-106.
- [PI] PLEIJEL, Å., A study of certain Green's functions with applications in the theory of vibrating membranes, *Arkiv för Matematik*, vol. 2, # 29, (1952), 553-569.
- [S] STEIN, E. M., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, (1970).
- [T] TITCHMARSH, E. C., *Eigenfunction Expansions associated with Second-order Differential Equations*, II, Oxford, (1970).
- [Tj] TSUJI, M., *Potential Theory in Modern Function Theory*, Maruzen, Tokyo, (1959).
- [Tr] TREVES F., *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, (1975).
- [W] WIDDER, D. V., *An Introduction to Transform Theory*, Academic Press, New York and London, (1971).
- [Z] BENEDEK, A., PANZONE, R., The set of Gaussian fractions, *Actas del 2do Congreso "Dr. Antonio A. R. Monteiro"*, UNS, (1993), 11-40.

Instituto de Matemática  
 (UNS-CONICET)  
 Av. Alem 1253  
 (8000) Bahía Blanca  
 ARGENTINA