INFORME TECNICO INTERNO

N°. 85

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina

INFORME TÉCNICO INTERNO

N° 85

INSTITUTO DE MATEMÁTICA DE BAHÍA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 2003 -

INFORME TÉCNICO INTERNO N° 85

Número de epimorfismos entre álgebras de Moisil n-valentes axled

Luiz F. Monteiro

Universidad Nacional del Sur

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 2003

Número de epimorfismos entre álgebras de Moisil n-valentes axled

Luiz F. Monteiro
INMABB-CONICET y Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina
e-mail: luizmont@criba.edu.ar

Resumen

Vamos a indicar como se construyen todos los epimorfimos entre álgebras de Moisil n-valentes axled finitas y a determinar su número, lo que generaliza nuestro resultados indicados en [7].

1 Introducción

Un álgebra de De Morgan es un par $(A, \sim)$ donde A es un reticulado distributivo acotado y $\sim$ es una operación unaria definida sobre A tal que: $\sim\sim x = x$, $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$.

Si $n \geq 2$ un álgebra de Moisil n-valente L, [1], [2], es un álgebra de De Morgan donde están definidos $n-1$ operadores σ_i, $1 \leq i \leq n-1$ que verifican:

L1) $\sigma_i(x \vee y) = \sigma_i x \vee \sigma_i y$, $1 \leq i \leq n-1$.

L2) $\sigma_i x \vee \sim \sigma_i x = 1$, $1 \leq i \leq n-1$.

L3) $\sigma_i(\sigma_j x) = \sigma_j x$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq n-1$.

L4) $\sigma_i(\sim x) = \sim \sigma_{n-i} x$, $1 \leq i \leq n-1$.

L5) $\sigma_1 x \leq \sigma_2 x \leq \ldots \leq \sigma_{n-1} x$.

L6) Si $\sigma_i x = \sigma_i y$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ entonces $x = y$. (Principio de determinación)

Tambien diremos que L es un M-álgebra n-valente. Toda álgebra de Boole es un M-álgebra 2-valente y toda M-álgebra 2-valente es un álgebra de Boole [1].

Es bien conocido [1], [2], que si L es un M-álgebra n-valente y ponemos

$$B_i(L) = \{x \in L : \sigma_i x = x\}$$

entonces $B_1(M) = B_2(M) = \ldots = B_{n-1}(M)$ y este conjunto es un álgebra de Boole que notaremos $\mathcal{B}(L)$.

Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sea $C_n = \{\frac{j}{n-1} : 0 \leq j \leq n-1\}$. Considerado como subreticulado de los números reales, es claro que C_n es un reticulado distributivo acotado. Definiendo $\sim \frac{j}{n-1} = 1 - \frac{j}{n-1}$ y $\sigma_k(\frac{j}{n-1}) = 0$, si $k + j < n$ y $\sigma_k(\frac{j}{n-1}) = 1$, si $k + j \geq n$ donde $1 \leq k \leq n-1$ y $0 \leq j \leq n-1$, entonces C_n es un M-álgebra n-valente.

Observación 1.1 *Si L es un M-álgebra n-valente, y $b \in \mathcal{B}(L)$ consideremos la sección superior $S_1 = [b)$. Sabemos que S_1 es un reticulado distributivo, con primer elemento b y último elemento 1. Si $x \in S_1$ pongamos por definición $\sim_1 x = \sim x \vee b$, entonces S_1 es un álgebra de De Morgan.*
Si $x \in S_1$ entonces $b \leq x$ luego $b = \sigma_i b \leq \sigma_i x$ y por lo tanto S_1 es un M-álgebra n-valente.
En forma análoga si consideramos la sección inferior $S_2 = (b]$ y dado $x \in S_2$ definimos $\sim_2 x = \sim x \wedge b$, entonces S_2 tambien es un M-álgebra n-valente.

Lema 1.1 *Si L es un M-álgebra n-valente y $b \in \mathcal{B}(L)$, la función : $h(x) = x \wedge \sim b$, es un isomorfismo de $[b)$ en $(\sim b]$.*

2 Algebras de Post y axled

Un M-álgebra n-valente L, donde $n \geq 3$, se dice un álgebra de Post n-valente si existen elementos $c_1, c_2, \ldots, c_{n-2}, c_{n-1} = 1 \in L$ tales que $\sigma_i c_j = 0$ para $i + j < n$ y $\sigma_i c_j = 1$ para $i + j \geq n$. Los elementos c_i, $1 \leq i \leq n-1$ se denominan los centros de L.

Definición 2.1 *Un M-álgebra n-valente L, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ se dice axled si existen elementos $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2} \in L$, denominados los ejes de L, tales que para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$ y para todo $j = 1, 2, \ldots, n-2$:*

(A1) *Si $i + j < n$ entonces $\sigma_i a_j = 0$,*

(A2) *Si $i + j = n$ entonces $\sigma_{n-1} x \leq \sigma_1 x \vee \sigma_i a_j$, cualquiera que sea $x \in L$.* ([2], pág. 177)

Los ejes de un M-álgebra n-valente L son únicos [2].

Es bien conocido que toda álgebra de Post n-valente es un M-álgebra n-valente axled. Pero la recíproca no es verdadera. En efecto $A = C_2 \times C_3$ es un M-álgebra 3-valente axled y no es un álgebra de Post 3-valente.

Si L es un M-álgebra n-valente entonces [2]:

(A3) $\sigma_t a_s = \sigma_u a_v$ cualesquiera que sean t, s, u, v tales que $t + s \geq n$ y $u + v \geq n$, $1 \leq t, u \leq n-1$, $1 \leq s, v \leq n-2$,

(A4) $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{n-2}$,

(A5) $x = \bigvee_{j=2}^{n-1} (\sigma_{n-j} x \wedge a_j) \vee \sigma_1, x$ cualquiera que sea $x \in L$.

Si X es un conjunto finito notaremos con $N[X]$ el número de sus elementos.

Por [2], pág. 192 sabemos que si L es un M-álgebra n-valente y $b \in \mathcal{B}(L)$ entonces $L \cong$

$[b)\times(b]$. Por el Lema 1.1, $[b)\cong(\sim b]$ luego también tenemos que $L\cong(\sim b]\times(b]$. Observemos que si $b=0$ entonces $L\cong L\times\{0\}$ y si $b=1$ entonces $L\cong\{1\}\times L$. Si $b\in\mathcal{B}(L)\setminus\{0,1\}$ entonces $N[[b)]>1$ y $N[(\sim b]]>1$.
Por [2], pág. 193, sabemos que si L es un M-álgebra n-valente axled entonces $L\cong[\sigma_{n-1}a_1)\times(\sigma_{n-1}a_1]$ donde $[\sigma_{n-1}a_1)$ es un álgebra de Boole y $(\sigma_{n-1}a_1]$ es un álgebra de Post n-valente. Supongamos que L no es un álgebra de Boole ni un álgebra de Post n-valente, entonces $\sigma_{n-1}a_1\in\mathcal{B}(L)\setminus\{0,1\}$. En efecto si $\sigma_{n-1}a_1=0$ entonces por (A3) $\sigma_i a_{n-i}=\sigma_{n-1}a_1=0$, para $1\leq i\leq n-1$. Luego por (A2) $\sigma_{n-1}x\leq\sigma_1x\vee\sigma_i a_{n-i}=\sigma_1x\vee 0=\sigma_1x$ y como $\sigma_1x\leq x\leq\sigma_{n-1}x$ tenemos que $\sigma_1x=x$ y en consecuencia $x\in\mathcal{B}(L)$ para todo $x\in L$, entonces L sería un álgebra de Boole, absurdo.
Si $\sigma_{n-1}a_1=1$ entonces los elementos $c_i=a_i$ para $i=1,2,\ldots,n-2$ y $c_{n-1}=1$ verifican $\sigma_ic_j=0$ para $i+j<n$ y $\sigma_ic_j=1$ para $i+j\geq n$. Luego L sería un álgebra de Post n-valente, absurdo.

Si L es un M-álgebra n-valente axled finita, $N[L]>1$ y b un átomo de $\mathcal{B}(L)$. Como $b\leq 1=\sim\sigma_{n-1}a_1\vee\sigma_{n-1}a_1$ y $\sim\sigma_{n-1}a_1,\sigma_{n-1}a_1\in\mathcal{B}(L)$ entonces $b\leq\sim\sigma_{n-1}a_1$ ó $b\leq\sigma_{n-1}a_1$.

En [8] probamos que

(I) Si $b\leq\sim\sigma_{n-1}a_1$ entonces $(b]=\{0,b\}\cong C_2$.

(II) Si $b\leq\sigma_{n-1}a_1$, y ponemos $a_0=0$, $a_{n-1}=1$ entonces:
$\{z_j=a_j\wedge b:0\leq j\leq n-1\}=(b]\cong C_n$.

Si $\mathcal{B}(L)$ tiene m átomos y $b\in\mathcal{A}(\mathcal{B}(L))$ sean $j=N[\{b\in\mathcal{A}(\mathcal{B}(L)):b\leq\sim\sigma_{n-1}a_1\}$ y $k=N[\{b\in\mathcal{A}(\mathcal{B}(L)):b\leq\sigma_{n-1}a_1\}$, luego $m=j+k$.

Por el Lema 1.1, sabemos que $[\sigma_{n-1}a_1)\cong(\sim\sigma_{n-1}a_1]$, luego

$$L\cong(\sim\sigma_{n-1}a_1]\times(\sigma_{n-1}a_1],$$

y como

$$(\sim\sigma_{n-1}a_1]\cong\prod\{(b]:b\in\mathcal{A}(\mathcal{B}(L),\ b\leq\sim\sigma_{n-1}a_1\},$$

$$(\sigma_{n-1}a_1]\cong\prod\{(b]:b\in\mathcal{A}(\mathcal{B}(L),\ b\leq\sigma_{n-1}a_1\}$$

entonces

$$L\cong C_2^j\times C_n^k.$$

Esto generaliza nuestros resultados para las álgebras de Łukasiewicz trivalentes con eje [5], y dá una mayor precisión al resultado indicado en [2], pág. 293.

3 Imágenes homomórficas de un álgebra de Moisil n-valente axled finita

Dado $n\geq 3$, sea L un álgebra de Moisil n-valente axled finita, entonces

$$L\cong C_2^j\times C_n^k,\ \text{ donde }\ j,k\in\mathbb{Z},\ j\geq 0,\ k\geq 0.$$

(T) Si $j=k=0$ entonces L es trivial, esto es tiene un solo elemento,

(B) Si $j \geq 1,\ k = 0$ entonces L es un álgebra de Boole con j átomos,

(P) Si $j = 0,\ k \geq 1$ entonces L es un álgebra de Post n-valente y $B(L)$ es un álgebra de Boole con k átomos. Los centros son las i-uplas, $1 \leq i \leq n-1$

$$r_i = (c_i, c_i, \ldots, c_i),$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1} = 1$ son los centros de C_n.

(A) Si $j \geq 1,\ k \geq 1$ entonces L es un M-álgebra axled, que no es un álgebra de Boole ni un álgebra de Post n-valente. Los ejes son las $(j+k)$-uplas

$$a_i = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{j}, \underbrace{c_i, \ldots, c_i}_{k}), \quad \text{donde} \quad 1 \leq i \leq n-2,$$

y $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1} = 1$ son los centros de C_n. Por lo tanto

$$\sigma_{n-1} a_1 = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{j}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k}).$$

$B(L)$ es un álgebra de Boole con $j+k$ átomos, cuyos elementos son

$$(b_1, b_2, \ldots, b_j, b_{j+1}, \ldots, b_{j+k}),$$

donde $b_i = 0 \in C_2 = \{0, 1\}$ para $1 \leq i \leq j$ y $b_i \in \{0, 1\} \subset C_n$ para $j+1 \leq i \leq j+k$. Dado $b \in B(L)$ sean

$$J(b) = \{i : b_i = 1, 1 \leq i \leq j\}, \quad \text{y} \quad K(b) = \{i : b_i = 1, j+1 \leq i \leq j+k\},$$

luego $0 \leq N[J(b)] \leq j$ y $0 \leq N[K(b)] \leq k$.

Si j y k no son simúltaneamente nulos entonces L es un M-álgebra n-valente finita no trivial. Sabemos que las imágenes homomórficas de L están determinadas por los filtros $[b)$ donde $b \in B(L)$, y que el álgebra cociente $L/[b)$ es isomorfa al M-álgebra n-valente $(b] = \{x \in L : x \leq b\}$. Luego como $B(L)$ tiene 2^{j+k} elementos:

(NIH) existen 2^{j+k} imágenes homomórficas de L.

(B) Si $j \geq 1,\ k = 0$, entonces L tiene 2^j imágenes homomórficas, que son álgebras de Boole.

(P) Si $j = 0,\ k \geq 1$, entonces L tiene 2^k imágenes homomórficas, que son álgebras de Post n-valentes.

(E) Si $j \geq 1,\ k \geq 1$, entonces L tiene 2^{j+k} imágenes homomórficas, que son M-álgebras n-valentes axled.

(E1) Si $N[K(b)] = 0$, entonces $(b] \cong B^{N[J(b)]}$ por lo tanto hay $\binom{j}{j_1}$, $0 \leq j_1 \leq j$ imágenes homomórficas de L que son álgebras de Boole con j_1 átomos, y en total tenemos 2^j imágenes homomórficas que son álgebras de Boole. Observemos que si $N[J(b)] = 0$, entonces $L/[b)$ es un álgebra trivial.

(E2) Si $N[J(b)] = 0$, entonces $(b] \cong C_n^{N[K(b)]}$ por lo tanto hay $\binom{k}{k_1}$, $0 \leq k_1 \leq k$ imágenes homomórficas L' de L que son álgebras de Post n-valentes, tales que $B(L')$ es un álgebra de Boole con k_1 átomos, y en total tenemos 2^k imágenes homomórficas que son álgebras de Post n-valentes. Observemos que si $N[K(b)] = 0$, entonces $L/[b)$ es un álgebra trivial, que coincide con el álgebra trivial indicada en (E1).

(E3) Si $1 \leq j_1 = N[J(b)] \leq j$ y $1 \leq k_1 = N[K(b)] \leq k$, entonces $L/[b) \cong (b] \cong C_2^{N[J(b)]} \times C_n^{N[H(b)]}$ es un M-álgebra n-valente axled que es una imagen homomórfica de L, que no es un álgebra de Boole ni un álgebra de Post n-valente.
Por lo tanto el número de estas imágenes homomórficas es:

$$\sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \right) = \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} .(2^k - 1) =$$

$$(2^k - 1). \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} = (2^k - 1).(2^j - 1).$$

Como en uno de los casos (E1) y (E2) obtenemos una misma imagen homomórfica, el álgebra trivial, si $j \geq 1$ y $k \geq 1$, en total tenemos:

$$2^j + (2^k - 1) + (2^k - 1).(2^j - 1) = 2^j + (2^k - 1).(1 + (2^j - 1)) = 2^j + (2^k - 1).2^j =$$

$$2^j.(1 + 2^k - 1) = 2^j.2^k = 2^{j+k},$$

imágenes homomórficas lo que habíamos determinado en (NIH).

4 Epimorfismos

Si B y B' son álgebras de Boole, notaremos con $Epi(B, B')$ el conjunto de todos los epimorfismos de B en B'.
Si $b \in B_m$ y $b' \in B_n$ sea $Epi^{(b,b')}(B_m, B_n) = \{h \in Epi(B_m, B_n) : h(b) = b'\}$.
Si L y L' son álgebras de Moisil n-valentes, notaremos con $Epi(L, L')$ el conjunto de todos los epimorfismos de L en L' y si $x \in L$ y $x' \in L'$ sea:

$$Epi^{(x,x')}(L, L') = \{h \in Epi(L, L') : h(x) = x'\}.$$

Sean L y L' M-álgebras n-valentes axled, $n \geq 3$, cuyos ejes son $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$ y $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n-2}$ respectivamente, entonces el siguiente teorema generaliza nuestros resultados [3, 4, 7] y nuestro lema 4.1 [6].

:

Teorema 4.1 T1) *Si $h \in Epi(B(L), B(L'))$ es tal que $h(\sigma_{n-1}a_{n-2}) = \sigma_{n-1}a'_{n-2}$ entonces $h(\sigma_i a_j) = \sigma_i a'_j$ para $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq n-2$.*

T2) *Si $H \in Epi(L, L')$ entonces $H(a_j) = a'_j$, para $1 \leq j \leq n-2$, y si $h = H_{|B(L)}$ entonces $h \in Epi^{(\sigma_{n-1}a_{n-2}, \sigma_{n-1}a'_{n-2})}(B(L), B(L'))$.*

T3) *Si* $h \in Epi^{(\sigma_{n-1}a_{n-2},\sigma_{n-1}a'_{n-2})}(B(L),B(L'))$ *entonces la transformación* $H : L \to L'$ *definida por:*

$$H(x) = \left(\bigvee_{j=1}^{n-2}(h(\sigma_{n-j}x) \wedge a'_j)\right) \vee h(\sigma_1 x)$$

verifica (T31) H *es una extensión de* h, (T32) $H \in Epi(L,L')$, *y* (T33) H *es la única extensión de* h.

Dem.

T1) Si $i+j<n$ entonces por (A1) tenemos que $\sigma_i a_j = 0$ luego $h(\sigma_i a_j) = h(0) = 0' = \sigma_i a'_j$. Si $i+j \geq n$, como $n \geq 3$ entonces $n-1+n-2 \geq n$, luego por (A3) tenemos que $\sigma_i a_j = \sigma_{n-1}a_{n-2}$, luego $h(\sigma_j a_i) = h(\sigma_{n-1}a_{n-2}) = \sigma_{n-1}a'_{n-2} = \sigma_i a'_j$.

T2) (1) Si $k+j<n$ entonces $\sigma_k H(a_j) = H(\sigma_k a_j) = H(0) = 0'$.
Sea $y \in L'$, luego como H es suryectiva existe $x \in L$ tal que $H(x) = y$, luego teniendo en cuenta (A2) tenemos (2) $\sigma_{n-1}y = \sigma_{n-1}H(x) = H(\sigma_{n-1}x) \leq H(\sigma_1 x \vee \sigma_i a_j) = H(\sigma_1 x) \vee H(\sigma_i a_j) = \sigma_1 H(x) \vee \sigma_i H(a_j) = \sigma_1 y \vee \sigma_i H(a_j)$, para $2 \leq j \leq n-2$, y cualquiera que sea $y \in L'$.
De (1) y (2) resulta que $H(a_j)$ son los ejes de L' y como los ejes son únicos $H(a_j) = a'_j$, para $1 \leq j \leq n-2$.
Además $h(\sigma_i a_j) = H(\sigma_i a_j) = \sigma_i H(a_j) = \sigma_i a'_j$, para $1 \leq j \leq n-2$.

T3) Por hipótesis $h(\sigma_j x) \in B(L')$, $1 \leq j \leq n-1$. Entonces si $1 \leq k \leq n-1$ tenemos que

$$\sigma_k H(x) = \left(\bigvee_{j=1}^{n-2}(h(\sigma_{n-j}x) \wedge \sigma_k a'_j))\right) \vee h(\sigma_1 x)$$

Si $k = n-1$ como $j \geq 1$ entonces $j-1 \geq 0$ y por lo tanto $n-1+j \geq n$ y en consecuencia por (A3) $\sigma_{n-1}a'_j = \sigma_2 a'_{n-2}$, luego

$$\sigma_{n-1}H(x) = \left(\bigvee_{j=1}^{n-2}(h(\sigma_{n-j}x) \wedge \sigma_{n-1}a'_j))\right) \vee h(\sigma_1 x) =$$

$$\left(\bigvee_{j=1}^{n-2}(h(\sigma_{n-j}x) \wedge \sigma_2 a'_{n-2})\right) \vee h(\sigma_1 x) =$$

$$\left(\sigma_2 a'_{n-2} \wedge \left(\bigvee_{j=1}^{n-2} h(\sigma_{n-j}x)\right)\right) \vee h(\sigma_1 x) =$$

$$\left(\sigma_2 a'_{n-2} \wedge \left(h(\bigvee_{j=1}^{n-2} \sigma_{n-j}x\right)\right) \vee h(\sigma_1 x) = (\sigma_2 a'_{n-2} \wedge h(\sigma_{n-1}x)) \vee h(\sigma_1 x) =$$

$$(\sigma_2 a'_{n-2} \vee h(\sigma_1 x)) \wedge (h(\sigma_{n-1}x \vee h(\sigma_1 x) = (\sigma_2 a'_{n-2} \vee h(\sigma_1 x)) \wedge h(\sigma_{n-1}x)$$

y como por (A2) $\sigma_{n-1}x \leq \sigma_1 x \vee \sigma_2 a_{n-2}$ entonces

$$h(\sigma_{n-1}x) \leq h(\sigma_1 x \vee \sigma_2 a_{n-2}) = h(\sigma_1 x) \vee h(\sigma_2 a_{n-2}) = h(\sigma_1 x) \vee \sigma_2 a'_{n-2}$$

luego
$$\sigma_{n-1}H(x) = h(\sigma_{n-1}x).$$
Si $1 \leq k \leq n-2$
$$\sigma_k H(x) = \left(\bigvee_{j=1}^{n-k-1} (h(\sigma_{n-j}x) \wedge \sigma_k a'j)\right) \vee \left(\bigvee_{j=n-k}^{n-2} (h(\sigma_{n-j}x) \wedge \sigma_k a'_j)\right) \vee h(\sigma_1 x).$$
Si $1 \leq j \leq n-k-1$ entonces $j+k \leq n-1$ y por lo tanto $\sigma_k a'_j = 0'$. Si $n-k \leq j \leq n-2$ entonces $n \leq k+j$ luego por (A3) $\sigma_k a'_j = \sigma_2 a_{n-2}$ y por lo tanto
$$\sigma_k H(x) = \left(\bigvee_{j=1}^{n-k-1} (h(\sigma_{n-j}x) \wedge 0')\right) \vee \left(\bigvee_{j=n-k}^{n-2} (h(\sigma_{n-j}x) \wedge \sigma_2 a'_{n-2})\right) \vee h(\sigma_1 x) =$$
$$\left(\bigvee_{j=n-k}^{n-2} (h(\sigma_{n-j}x) \wedge \sigma_2 a'_{n-2})\right) \vee h(\sigma_1 x) =$$
$$\left(\sigma_2 a'_{n-2} \wedge \left(\bigvee_{j=n-k}^{n-2} h(\sigma_{n-j}x)\right)\right) \vee h(\sigma_1 x) =$$
$$\left(\sigma_2 a'_{n-2} \wedge \left(h(\bigvee_{j=n-k}^{n-2} \sigma_{n-j}x)\right)\right) \vee h(\sigma_1 x) =$$
$$(\sigma_2 a'_{n-2} \wedge h(\sigma_k x)) \vee h(\sigma_1 x) =$$
$$(\sigma_2 a'_{n-2} \vee h(\sigma_1 x)) \wedge (h(\sigma_k x) \vee h(\sigma_1 x)) =$$
$$(\sigma_2 a'_{n-2} \vee h(\sigma_1 x)) \wedge h(\sigma_k x)$$
y como por (A2) $\sigma_k x \leq \sigma_{n-1}x \leq \sigma_1 x \vee \sigma_2 a_{n-2}$ entonces
$$h(\sigma_k x) \leq h(\sigma_1 x \vee \sigma_2 a_{n-2}) = h(\sigma_1 x) \vee h(\sigma_2 a_{n-2}) = h(\sigma_1 x) \vee \sigma_2 a'_{n-2}.$$
Acabamos así de probar que:
$$\text{(T4)} \quad \sigma_k H(x) = h(\sigma_k x), \quad \text{para} \quad 1 \leq k \leq n-1.$$
Si $b \in B(L)$ entonces $\sigma_j b = b$, para $1 \leq j \leq n-1$, y como $h(b) \in B(L')$ entonces $\sigma_k h(b) = h(b)$ para $1 \leq j \leq n-1$. Entonces por (T4)
$$\sigma_k H(b) = h(\sigma_k b) = h(b) = \sigma_k h(b), \quad \text{para} \quad 1 \leq k \leq n-1$$
luego por (L6) resulta
$$\text{(T31)} \quad H(b) = h(b), \quad \text{cualquiera que sea} \quad b \in B(L).$$
Si $1 \leq k \leq n-1$, entonces por (T4)

$$\sigma_k H(x \wedge y) = h(\sigma_k(x \wedge y)) = h(\sigma_k x \wedge \sigma_k y) =$$

$$h(\sigma_k x) \wedge h(\sigma_k y) = \sigma_k H(x) \wedge \sigma_k H(y) = \sigma_k(H(x) \wedge H(y),$$

luego por (L6) resulta que

$$\text{(T32a)} \;\; H(x \wedge y) = H(x) \wedge H(y).$$

Como H extiende a h y $\sigma_k x \in B(L)$ para $1 \leq k \leq n-1$ entonces:

$$(1) \;\; H(\sigma_k x) = h(\sigma_k x), \;\; \text{para} \;\; 1 \leq k \leq n-1.$$

Por (T4), si $1 \leq k \leq n-1$ entonces (2) $\sigma_k H(x) = h(\sigma_k x)$. De (1) y (2) resulta que

$$\text{(T32b)} \;\; H(\sigma_k x) = \sigma_k H(x), \;\; \text{para} \;\; 1 \leq k \leq n-1.$$

Si $1 \leq k \leq n-1$, por (T4) sabemos que (3) $\sigma_k H(\sim x) = h(\sigma_k \sim x)$.
Por L4) $\sigma_k \sim H(x) = \sim \sigma_{n-k} H(x)$ luego por (T4) y L4)
(4) $\sigma_k \sim H(x) = \sim h(\sigma_{n-k} x) = h(\sim \sigma_{n-k} x) = h(\sigma_k x)$.
Luego de (3) y (4) resulta $\sigma_k \sim H(x) = \sigma_k H(\sim x)$ para $1 \leq k \leq n-1$, entonces por L6),

$$\text{(IIc)} \;\; \sim H(x) = H(\sim x).$$

(T32d) Dado $y \in L'$ entonces $y = \bigvee_{j=1}^{n-2} (\sigma_{n-j} y \wedge a'_j) \vee \sigma_1 y$, como $\sigma_j y \in B(L')$ para $1 \leq j \leq n-1$, y h es un epimorfismo booleano existen $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1} \in B(L)$ tales que $h(b_j) = \sigma_j y$, para $1 \leq j \leq n-1$,
Sean $z_j = \bigvee_{i=1}^{j} b_i \in B(L)$, $1 \leq j \leq n-1$, luego $\sigma_k z_j = z_j$, para $1 \leq k, j \leq n-1$ y por lo tanto $h(z_j) = h(\bigvee_{i=1}^{j} b_i) = \bigvee_{i=1}^{j} h(b_i) = \bigvee_{i=1}^{j} \sigma_i y = \sigma_j y$, para $1 \leq j \leq n-1$.
Sea $x = \left(\bigvee_{j=1}^{n-2} (z_{n-j} \wedge a_j)\right) \vee z_1$, luego

$$\sigma_k x = \left(\bigvee_{j=1}^{n-2} (z_{n-j} \wedge \sigma_k a_j)\right) \vee z_1, \;\; \text{para} \;\; 1 \leq k \leq n-1$$

y por lo tanto

$$h(\sigma_k x) = \left(\bigvee_{j=1}^{n-2} (h(z_{n-j} \wedge \sigma_k a_j)\right) \vee h(z_1) =$$

$$\left(\bigvee_{j=1}^{n-2} (h(z_{n-j}) \wedge h(\sigma_k a_j)\right) \vee h(z_1) = \left(\bigvee_{j=1}^{n-2} (\sigma_{n-j} y \wedge \sigma_k a'_j)\right) \vee \sigma_1 y.$$

Si $k = 1$ como $1 \leq j \leq n-2$ entonces $1 + j \leq n-1$ y por lo tanto $\sigma_1 a'_j = 0'$, para $1 \leq j \leq n-2$, luego

$$h(\sigma_1 x) = \left(\bigvee_{j=1}^{n-2} (\sigma_{n-j} y \wedge 0') \right) \vee \sigma_1 y = 0' \vee \sigma_1 y = \sigma_1 y.$$

Supongamos ahora que $2 \leq k \leq n-1$ entonces si $1 \leq j \leq n-k-1$ tenemos que $k + j \leq n-1$ y por lo tanto por (A1) $\sigma_k a'_j = 0'$
Si $j \geq n-k$ entonces $k + j \geq n$, luego por (A3) $\sigma_k a'_j = \sigma_2 a'_{n-2}$. Entonces:

$$h(\sigma_k x) = \left(\bigvee_{j=1}^{n-k-1} (\sigma_{n-j} y \wedge 0') \right) \vee \left(\bigvee_{j=n-k}^{n-2} (\sigma_{n-j} y \wedge \sigma_2 a'_{n-2}) \right) \vee \sigma_1 y =$$

$$\left(\sigma_2 a'_{n-2} \wedge \left(\bigvee_{j=n-k}^{n-2} \sigma_{n-j} y \right) \right) \vee \sigma_1 y =$$

$$(\sigma_2 a'_{n-2} \wedge \sigma_k y) \vee \sigma_1 y = (\sigma_2 a'_{n-2} \vee \sigma_1 y) \wedge (\sigma_k y \vee \sigma_1 y) = (\sigma_2 a'_{n-2} \vee \sigma_1 y) \wedge \sigma_k y$$

y como $k \geq 2$ entonces por (A2):

$$\sigma_k y \leq \sigma_{n-1} y \leq \sigma_1 y \vee \sigma_2 a'_{n-2}$$

entonces $(\sigma_2 a'_{n-2} \vee \sigma_1 y) \wedge \sigma_k y = \sigma_k y$ y por lo tanto

$$(1) \;\; h(\sigma_k x) = \sigma_k y, \;\; \text{para} \;\; 1 \leq k \leq n-1.$$

Luego por (T4) y (1) tenemos que:

$$\sigma_k H(x) = h(\sigma_k x) = \sigma_k y \;\; \text{para} \;\; 1 \leq k \leq n-1$$

luego por L6), $H(x) = y$.

(T33) Si $H' \in Epi(L, L')$ verifica $H'(b) = h(b)$, para todo $b \in B(L)$ entonces

$$H'(x) = \left(\bigvee_{j=1}^{n-2} (\sigma_{n-j} H'(x) \wedge a'_j) \right) \vee \sigma_1 H'(x) =$$

$$\left(\bigvee_{j=1}^{n-2} (H'(\sigma_{n-j} x) \wedge a'_j) \right) \vee H'(\sigma_1 x) =$$

$$\left(\bigvee_{j=1}^{n-2} (h(\sigma_{n-j} x) \wedge a'_j) \right) \vee h(\sigma_1 x) = H(x).$$

■

Sean L y L' álgebras de Post n-valentes, $n \geq 3$ cuyos centros son $c_1, c_2, \ldots, c_{n-2}$, $c_{n-1} = 1$ y $c'_1, c'_2, \ldots, c'_{n-2}, c'_{n-1} = 1'$ respectivamente, entonces

Corolario 4.1 *Si $h \in Epi(B(L), B(L'))$, la función $H : L \to L'$ definida por*

$$H(x) = \left(\bigvee_{j=1}^{n-2} (h(\sigma_{n-j}x) \wedge c'_j) \right) \vee h(\sigma_1 x)$$

es el único epimorfismo de L en L' que extiende a h.

Dem. Como $n \geq 3$ entonces $2n-3 \geq n$ luego $\sigma_{n-1}c_{n-2} = 1$ y por lo tanto $h(\sigma_{n-1}c_{n-2}) = h(1) = 1' = \sigma_{n-1}c'_{n-2}$. ■

Si L y L' son M-álgebras n-valentes axled con ejes $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$ y $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n-2}$ respectivamente, entonces:

Lema 4.1 *Los conjuntos $Epi(L, L')$ y $Epi^{(\sigma_{n-1}a_{n-2}, \sigma_{n-1}a'_{n-2})}(B(L), B(L'))$ son coordinables.*

Dem. Si $h \in Epi^{(\sigma_{n-1}a_{n-2}, \sigma_{n-1}a'_{n-2})}(B(L), B(L'))$, entonces la función H definida en el item T3) del Teorema 4.1 verifica $H \in Epi(L, L')$. Si ponemos $\delta(h) = H$, entonces por lo demostrado en (T33) del Teorema 4.1, δ es una función.
Si $H \in Epi(L, L')$ por el item (T2) del Teorema 4.1, tenemos que

$$h = H_{|B(L)} \in Epi^{(\sigma_{n-1}a_{n-2}, \sigma_{n-1}a'_{n-2})}(B(L), B(L'))$$

y por el item (T33) del Teorema 4.1, la extensión de h a L es el epimorfismo H, luego $\delta(h) = H$, lo que prueba que δ es suryectiva.
Si $h, h' \in Epi^{(\sigma_{n-1}a_{n-2}, \sigma_{n-1}a'_{n-2})}(B(L), B(L'))$ son tales que $h \neq h'$ entonces existe $b \in B(L)$ tal que $h(b) \neq h'(b)$. Si H y H' son los homomorfismos extensión de h y h' respectivamente entonces $H(b) = h(b) \neq h'(b) = H'(b)$, luego δ es inyectiva. ■

Si B es un álgebra de Boole finita, $N[B] > 1$, sea $\mathcal{A}(B)$ al conjunto de sus átomos. Notaremos B_m, donde $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ el álgebra de Boole con m átomos.

Es bien conocido que si $f : \mathcal{A}(B_n) \to \mathcal{A}(B_m)$ entonces la función $h_f : B_m \to B_n$ definida por

$$h_f(x) = \bigvee \{a \in \mathcal{A}(B_n) : f(a) \leq x\},$$

verifica:

(B1) $h_f \in Hom(B_m, B_n)$,

(B2) Si $a \in \mathcal{A}(B_m)$ entonces $h_f(a) = 0$ si y solo si $a \notin f(\mathcal{A}(B_n))$,

(B3) h_f es un epimorfismo si y solo si f es inyectiva, [9, 10],

(B4) h_f es inyectivo si y solo si f es suryectiva [9, 10].

Si $h \in Epi(B_m, B_n)$ entonces dado $b \in \mathcal{A}(B_n)$ sabemos que $[b)$ es un ultrafiltro de B_n y que $h^{-1}([b))$ es un ultrafiltro de B_m luego $h^{-1}([b)) = [a)$ con $a \in \mathcal{A}(B_m)$. Además $Nuc(h) \subseteq [a)$. Sea $f : \mathcal{A}(B_n) \to \mathcal{A}(B_m)$ definida por $f(a) = b$, entonces f es inyectiva y $h_f = h$.
Además existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto $FI(\mathcal{A}(B_n), \mathcal{A}(B_m))$ de todas las funciones inyectivas de $\mathcal{A}(B_n)$ en $\mathcal{A}(B_m)$ y el conjunto $Epi(B_m, B_n)$. Para ello basta

considerar la función $\Phi(f) = h_f$.
Pongamos por definición

$$V_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!}\,, & \text{si } m \geq n \\ 0, & \text{si } m < n. \end{cases}$$

Entonces:

$$N[Epi(B_m, B_n)] = V_{m,n}.$$

En [7] indicamos otro modo de demostrar el resultado precedente.

Si $b \in B_m \setminus \{0\}$ notaremos $\mathcal{A}(b) = \{a \in \mathcal{A}(B_m) : a \leq b\}$, y si $b' \in B_n \setminus \{0'\}$ entonces [7]:

$$h_f(b) = b' \text{ si y solo si } f(\mathcal{A}(b')) \subseteq \mathcal{A}(b),$$

luego

$$N[Epi^{(b,b')}(B_m, B_n)] = V_{N[\mathcal{A}(b)],N[\mathcal{A}(b')]}.V_{m-N[\mathcal{A}(b)],n-N[\mathcal{A}(b')]}. \tag{1}$$

Lema 4.2 [7]. *Si $m \geq n \geq 1$, $h \in Epi^{(b,b')}(B_m, B_n)$, donde $b \in B_m \setminus \{0\}$, $b' \in B_n \setminus \{0'\}$ entonces:*

(B5) *Si $a \in \mathcal{A}(b)$ y $h(a) \neq 0'$ entonces $h(a) \in \mathcal{A}(b')$.*

(B6) *Si $a \notin \mathcal{A}(b)$ y $h(a) \neq 0'$ entonces $h(a) \notin \mathcal{A}(b')$.*

Si $b \in B_m$ notaremos con $-b$ el complemento booleano de b. De (B3) y el Lema 4.2 resulta que si $h \in Epi^{(b,b')}(B_m, B_n)$ entonces $f = \Phi^{-1}(h)$ verifica:

(C1) $f \in FI(\mathcal{A}(B_n), \mathcal{A}(B_m))$,

(C2) $f(\mathcal{A}(b')) \subseteq \mathcal{A}(b)$,

(C3) $f(\mathcal{A}(-b')) \subseteq \mathcal{A}(-b)$.

Sean L y L' M-álgebras n-valentes axled finitas, no triviales, entonces $L \cong C_2^j \times C_n^k$ y $L' \cong C_2^{j'} \times C_n^{k'}$, donde $j, k, j', k' \geq 1$.
En el Lema 4.1 probamos que:

$$H \in Epi(L, L') \text{ si y solo si } h = H_{|B(L)} \in Epi^{(\sigma_{n-1}a_{n-2},\sigma_{n-1}a'_{n-2})}(B(L), B(L')),$$

luego $f = \Phi^1(h) \in FI(\mathcal{A}(B(L')), \mathcal{A}(B(L)))$ debe verificar las condiciones (C2) y (C3) indicadas anteriormente, esto es

$$f(\mathcal{A}(\sigma_{n-1}a'_{n-2})) \subseteq \mathcal{A}(\sigma_{n-1}a_{n-2}) \text{ y } f(\mathcal{A}(\sim \sigma_{n-1}a'_{n-2})) \subseteq \mathcal{A}(\sim \sigma_{n-1}a_{n-2}). \tag{2}$$

Luego como

$$N[\mathcal{A}(\sigma_{n-1}a_{n-2})] = k, \quad N[\mathcal{A}(\sigma_{n-1}a'_{n-2})] = k',$$

$$N[\mathcal{A}(B(L)) \setminus \mathcal{A}(\sigma_{n-1}a_{n-2})] = j \text{ y } N[\mathcal{A}(B(L')) \setminus \mathcal{A}(\sigma_{n-1}a'_{n-2})] = j'$$

para que el conjunto de las funciones inyectivas de $\mathcal{A}(B(L'))$ en $\mathcal{A}(B(L))$ que verifican (2) sea no vacío es necesario y suficiente que $k \geq k'$ y $j \geq j'$. Entonces por lo indicado en (1):

$$N[Epi(L, L')] = N[Epi^{(\sigma_{n-1}a_{n-2}, \sigma_{n-1}a'_{n-2})}(B(L), B(L'))] = V_{k,k'} \cdot V_{j,j'}.$$

Si $L \cong C_2^j \times C_n^k$ y notamos con $Aut(L)$ el conjunto de todos los automorfimos de L entonces $N[Aut(L)] = k! \cdot j!$.

Observemos que:

- Si L y L' son álgebras de Post n-valentes, esto es $L \cong C_n^k$ y $L' \cong C_n^{k'}$ entonces

$$N[Epi(L, L')] = N[Epi^{(1,1')}(B(L), B(L'))] = N[Epi(B(L), B(L'))] =$$

$$V_{N[\mathcal{A}(B(L))], N[\mathcal{A}(B(L'))]} = V_{k,k'}.$$

- Si L y L' son álgebras de Boole, esto es $L \cong C_2^j$ y $L' \cong C_2^{j'}$ entonces

$$N[Epi(L, L')] = N[Epi^{(0,0')}(B(L), B(L'))] = N[Epi(B(L), B(L'))] =$$

$$V_{N[\mathcal{A}(B(L))], N[\mathcal{A}(B(L'))]} = V_{j,j'}.$$

Referencias

[1] Cignoli, R., *Moisil Algebras*, Notas de Lógica Matemática 27, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina,(1970).

[2] Boicescu, V., Filipoiu, A., Georgescu, G. and Rudeanu, S., *Łukasiewicz-Moisil Algebras*, Annals of Discrete Mathematics 49, North-Holland, 1991.

[3] Monteiro L., *Sur les algèbres de Łukasiewicz injectives*, Notas de Lógica Matemática 25 (1964). Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca. Proc. Japan Acad., 41, 7 (1965), 578-581.

[4] Monteiro L., *Algebras de Łukasiewicz trivalentes monádicas*, Notas de Lógica Matemática 32 (1974). Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca.

[5] Monteiro L., Savini S. and Sewald J., *Construction of Monadic Three-valued Łukasiewicz algebras*. Studia Logica, L , 3/4 (1991), 473-483.

[6] Monteiro L., Abad M., Savini S. and Sewald J., *Finite generating sets*, Discrete Math. 189 (1998), 177-189.

[7] Monteiro L., *Número de epimorfimos entre álgebras de Łukasiewicz finitas*, Informes Técnicos Internos 82 (2003), INMABB-CONICET-UNS.

[8] Monteiro L., *Construcción de álgebras de Moisil n-valentes axled*, Informes Técnicos Internos, 84 (2003), INMABB-CONICET-UNS.

[9] Sikorski R., *On the inducing of homomorphisms by mappings*, Fund. Math. 36 (1949), 7-22.

[10] Sikorski R., *Boolean Algebras*, Springer-Verlag (1964).