



INFORME TECNICO INTERNO

Nº. 83

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA
INMABB (UNS - CONICET)



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina



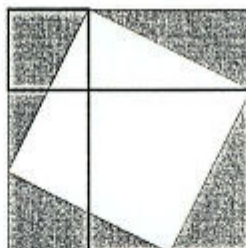
INFORME TÉCNICO INTERNO

Nº 83

UNS-CONICET	
INSTITUTO DE MATEMÁTICA	
BIBLIOTECA "Dr. ANTONIO MONTEIRO"	
LIBRO No	171
VOL.	83
EJ.	-

INSTITUTO DE MATEMÁTICA DE BAHÍA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 2003 -





INFORME TÉCNICO INTERNO N° 83

Álgebras de Lukasiewicz trivalentes

Antonio A. Monteiro

Universidad Nacional del Sur

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 2003



ALGEBRAS DE ŁUKASIEWICZ TRIVALENTES

Antonio A. R. Monteiro

Estas notas reproducen parte del curso [52] que dictara en la Universidad Nacional del Sur, en 1963 el Dr. Antonio A. R. Monteiro así como los seminarios [53], [59] sobre esta teoría. donde presentó resultados originales.

Los primeros capítulos del curso contenían algunos resultados sobre conjuntos ordenados, reticulados distributivos, álgebras de De Morgan y álgebras de Boole monádicas, necesarios para el futuro desarrollo del curso, los mismos se encuentran en las siguientes publicaciones del INMABB, [81], [66], [65].

En sus cursos y seminarios, como era habitual, el Dr. Antonio Monteiro planteó diversos problemas a resolver, entre ellos podemos citar aquellos que dieron origen a las tesis doctorales de Roberto Cignoli [22], Luiz Monteiro [77], Luisa Iturrioz [39], Manuel Abad [1], Aldo V. Figallo [31]. Aún hoy sus resultados son citados en diversas tesis doctorales realizadas en nuestra Universidad, y en otras Universidades Nacionales y Extranjeras.

En la bibliografía se citan diversos trabajos, que podemos decir sin temor a equivocarnos, que tienen su origen en los temas desarrollados en el curso y seminarios citados anteriormente, así como en reuniones de carácter informal del Profesor A. Monteiro con sus discípulos.

Redactor: Luiz F. Monteiro

INMABB - CONICET - UNS

1 Nota

- R. Cignoli en su Tesis Doctoral (1969) *Algebras de Moisil de orden n* , [19],[22], obtiene excelentes resultados sobre estas álgebras que tienen como caso particular a las álgebras de Łukasiewicz trivalentes. En la bibliografía se indican 15 importantes trabajos de este autor.
- L. Monteiro en su Tesis Doctoral (1971) *Algebras de Łukasiewicz trivalentes monádicas*, [76],[77], generaliza el concepto de las álgebras de Łukasiewicz trivalentes.
- M. Abad en su Tesis Doctoral (1986) *Estructuras cíclica y monádica de un álgebra de Łukasiewicz n -valente*, [52] generaliza el concepto de Algebras de Łukasiewicz trivalentes monádicas.
- En el excelente libro *Łukasiewicz-Moisil algebras* de V. Boicescu, A. Filipoiu, G. Georgescu G. y S. Rudeanu, [15], se tratan casos mas generales que las álgebras de Łukasiewicz trivalentes. En el mismo que fue publicado en 1991 se encuentra una amplia bibliografía (hasta 1989) relacionada con las álgebras de Łukasiewicz trivalentes.
- En la bibliografía se encuentran trabajos publicados con posterioridad a 1989, y tambien algunos anteriores a 1989 no citados en [15].

Índice General

1	Nota	ii
2	CAPITULO I	1
2.1	Definición y reglas de cálculo	1
2.2	Algebras de Łukasiewicz con centro	5
2.3	Algebras de Łukasiewicz con eje	6
2.4	Principio de determinación de Moisil	7
2.5	Implicaciones	12
2.6	Algebras de Heyting	20
2.7	La definición de Moisil	26
2.8	Nuevos Ejemplos	27
2.9	3-anillos	30
2.10	Construcción de Algebras de Łukasiewicz a partir de Algebras de Boole monádicas	35
2.11	Subálgebras	40
2.12	Algebras de Łukasiewicz completas	47
3	CAPITULO II	51
3.1	Homomorfismos	51
3.2	Algebras cocientes	56
3.3	Construcción de sistemas deductivos	63
3.4	Aritmética de los sistemas deductivos	68
3.5	Filtros primos y sistemas deductivos	76
3.6	Algebras cocientes por sistemas deductivos principales	81
4	CAPITULO III	84
4.1	Algebras simples	84
4.2	Producto Cartesiano	86
4.3	Factorización de un álgebra de Łukasiewicz con eje	87
4.4	Producto subdirecto de álgebras de Łukasiewicz	90
4.5	Teorema de representación de Moisil	90
4.6	Algebras de Łukasiewicz inyectivas	93
5	CAPITULO IV	95
5.1	Algebras libres	95
5.2	Determinación del álgebra de Łukasiewicz L_n con n generadores libres	95
5.3	Algebras de Moisil con un número finito de generadores libres	98
5.4	Determinación del álgebra de Moisil M_n con n generadores libres	98
6	CAPITULO V	102
6.1	Imágenes homomórficas de un álgebra de Boole finita	102
6.2	Imágenes homomórficas de un álgebra de Łukasiewicz	105
6.3	Epimorfismos	106
6.4	Extensión de homomorfismos	112
6.5	Construcción de las álgebras de Boole libres a partir de las álgebras de Łukasiewicz trivalentes libres	113

6.6	Representación de un álgebra de Łukasiewicz por un álgebra de Łukasiewicz de conjuntos.	116
6.7	Caracter universal de la construcción $\mathcal{L}$ de las álgebras de Łukasiewicz. . .	120
6.8	Una construcción del álgebra de Łukasiewicz con n generadores libres . . .	124
6.9	Sistema determinante de un álgebra de Łukasiewicz	124
7	CAPITULO VI	133
7.1	Introducción	133
7.2	Construcción geométrica de las álgebras de Łukasiewicz libres	138
	Referencias	145



2 CAPITULO I

2.1 Definición y reglas de cálculo

La noción de álgebra de Łukasiewicz trivalente, fue introducida y su teoría desarrollada por Gr. Moisil [43], [45], [47].

Estas álgebras desempeñan en el cálculo proposicional trivalente de Łukasiewicz un papel análogo al que desempeñan las álgebras de Boole en el cálculo proposicional clásico.

La siguiente definición ¹ ([52], [54]) es equivalente a las que fueron indicadas por Moisil.

Definición 2.1.1 *Un álgebra de Łukasiewicz trivalente es un sistema $(L, 1, \sim, \nabla, \vee, \wedge)$ formado por 1) un conjunto no vacío L ; 2) un elemento $1 \in L$; 3) dos operaciones unarias $\sim$ y ∇ definidas sobre L ; 4) dos operaciones binarias $\vee$ y $\wedge$, definidas sobre L de modo que se verifiquen las siguientes condiciones:*

- L1) $1 \vee x = 1$, cualquiera que sea $x \in L$,
- L2) $x \wedge (x \vee y) = x$, cualesquiera que sean $x, y \in L$,
- L3) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$, cualesquiera que sean $x, y, z \in L$,
- L4) $\sim \sim x = x$, cualquiera que sea $x \in L$,
- L5) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$, cualesquiera que sean $x, y \in L$,
- L6) $\sim x \vee \nabla x = 1$, cualquiera que sea $x \in L$,
- L7) $\sim x \wedge x = \sim x \wedge \nabla x$, cualquiera que sea $x \in L$,
- L8) $\nabla (x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$, cualesquiera que sean $x, y \in L$.

El operador $\sim$ se denomina negación y la operación ∇ se denomina operación de posibilidad. También diremos que L es un álgebra de Łukasiewicz.

Uno de los primeros problemas que planteó en su curso el Profesor Antonio Monteiro fue determinar si estos axiomas eran independientes. Este problema fue resuelto por L. Monteiro [67], quien probó que los axiomas L2 a L8 son independientes y que L1 es consecuencia de algunos de los axiomas L2 a L8. Uno de los ejemplos indicados por L. Monteiro en [67] motivaron a A. Monteiro a introducir en 1978 la noción de álgebra modal tetravalente, quien propuso a I. Loureiro estudiar esta teoría. La misma fue desarrollada por I. Loureiro en su tesis doctoral [42], defendida en 1983 en Lisboa.

Para identificar la definición de A. Monteiro con las que fueron indicadas por Moisil debemos poner $\sim x = Nx$ y $\nabla x = \mu x$.

Otra axiomática para las álgebras de Łukasiewicz fue indicada por A. Monteiro y L. Monteiro antes de 1967, pero solo fue publicada en 1996, [60].

De los axiomas L1, L2 y L3, resulta por los axiomas indicados por M. Sholander [94] que el sistema $(L, 1, \wedge, \vee)$ es un reticulado distributivo con último elemento 1. De los axiomas

¹El propósito de A. Monteiro fue indicar una definición de las álgebras de Łukasiewicz trivalentes por medio de un menor número de axiomas que los que figuraban en las diversas definiciones de Moisil, pero conservando las operaciones primitivas indicadas por Moisil.

L1, L2, L3, L4 y L5 resulta que el sistema $(L, 1, \sim, \wedge, \vee)$ es un álgebra de De Morgan [13], [14], [66] y por lo tanto $0 = \sim 1$ es el primer elemento del reticulado L .

Por lo tanto podremos definir un álgebra de Łukasiewicz como un álgebra de De Morgan sobre la cual está definida una operación unaria que verifica L6, L7 y L8.

Supondremos conocidas y aplicaremos sin mencionarlas a todas las reglas de cálculo válidas en las álgebras de De Morgan. Vamos a indicar ahora algunas reglas de cálculo donde interviene el operador ∇ .

L9) $x \leq \nabla x$.

$$x = x \wedge 1 = (\text{por L6}) = x \wedge (\sim x \vee \nabla x) = (x \wedge \sim x) \vee (x \wedge \nabla x) = (\text{por L7}) = (\sim x \wedge \nabla x) \vee (x \wedge \nabla x) = (\sim x \vee x) \wedge \nabla x \leq \nabla x.$$

L10) $\nabla 1 = 1$.

Consecuencia inmediata de L9.

L11) $\nabla 0 = 0$.

$$0 = (\text{por L1}) = 0 \wedge 1 = 0 \wedge \sim 0 = (\text{por L7}) = \sim 0 \wedge \nabla 0 = 1 \wedge \nabla 0 = \nabla 0.$$

L12) Si $x \leq y$ entonces $\nabla x \leq \nabla y$.

Sabemos que $x \leq y \iff x = x \wedge y$, luego $\nabla x = \nabla(x \wedge y) = (\text{por L8}) = \nabla x \wedge \nabla y$ y esto equivale a $\nabla x \leq \nabla y$.

L13) $x \vee \nabla \sim x = 1$.

$$x \vee \nabla \sim x = (\text{por L4}) = \sim(\sim x) \vee \nabla \sim x = (\text{por L6}) = 1.$$

L14) $\nabla \sim \nabla \sim x \leq x$.

De L13 resulta $\sim(x \vee \nabla \sim x) = \sim 1$ esto es $\sim x \wedge \sim \nabla \sim x = 0$. Luego $\nabla(\sim x \wedge \sim \nabla \sim x) = \nabla 0 = (\text{por L11}) = 0$, y utilizando L8 tenemos que (1) $\nabla \sim x \wedge \nabla \sim \nabla \sim x = 0$.

Finalmente $x = x \vee 0 = (\text{por (1)}) = x \vee (\nabla \sim x \wedge \nabla \sim \nabla \sim x) = (x \vee \nabla \sim x) \wedge (x \vee \nabla \sim \nabla \sim x) = (\text{por L13}) = 1 \wedge (x \vee \nabla \sim \nabla \sim x) = x \vee \nabla \sim \nabla \sim x$ de donde resulta L14.

L15) $\nabla \sim \nabla \sim \nabla \sim x = \nabla \sim x$.

De L14 resulta que $\sim x \leq \sim \nabla \sim \nabla \sim x$, luego por L12 tenemos que:

(1) $\nabla \sim x \leq \nabla \sim \nabla \sim \nabla \sim x$. Por otro lado si en L14 reemplazamos x por $\nabla \sim x$ tenemos:

(2) $\nabla \sim \nabla \sim \nabla \sim x \leq \nabla \sim x$. De (1) y (2) resulta L15.

L16) $\nabla \sim \nabla x$ es el complemento booleano de ∇x .

Si en L13 reemplazamos x por ∇x obtenemos (1) $\nabla x \vee \nabla \sim \nabla x = 1$. De L6 resulta $\sim(\sim x \vee \nabla x) = \sim 1 = 0$, esto es $x \wedge \sim \nabla x = 0$ y por lo tanto (2) $0 = \nabla 0 = \nabla(x \wedge \sim \nabla x) = (\text{por L8}) = \nabla x \wedge \nabla \sim \nabla x$. De (1) y (2) resulta L16.

L17) $\sim \nabla x$ es el complemento booleano de ∇x .

De $x \leq \nabla x$ reemplazando x por $\sim \nabla x$ tenemos $\sim \nabla x \leq \nabla \sim \nabla x$, luego

$\nabla x \wedge \sim \nabla x \leq \nabla x \wedge \nabla \sim \nabla x = (\text{por L16}) = 0$, y por lo tanto (1) $\nabla x \wedge \sim \nabla x = 0$ y en consecuencia $\sim(\nabla x \wedge \sim \nabla x) = \sim 0 = 1$ esto es (2) $\nabla x \vee \sim \nabla x = 1$. De (1) y (2) resulta L17.

L18) $\nabla \sim \nabla x = \sim \nabla x$.

Esto es una consecuencia inmediata de L16 y L17, ya que en un reticulado distributivo si un elemento tiene complemento booleano el es único.

L19) $\nabla \sim \nabla \sim x = \sim \nabla \sim x$.

Es una consecuencia de L18 reemplazando x por $\sim x$.

L20) $\nabla \nabla x = \nabla x$.

De L18 resulta $\sim \nabla \sim \nabla x = \sim \sim \nabla x = \nabla x$, y por lo tanto (1) $\nabla \sim \nabla \sim \nabla x = \nabla \nabla x$. Si en L15 reemplazamos x por $\sim x$ obtenemos (2) $\nabla \sim \nabla \sim \nabla x = \nabla x$. De (1) y (2) se deduce L20.

Un elemento $x \in L$ de un álgebra de Łukasiewicz L se dice *constante* ó *invariante* si $\nabla x = x$. Representaremos por $B(L)$ ó B al conjunto de todos los elementos invariantes de L . Por L20 resulta que $\nabla x \in B(L)$ cualquiera que sea $x \in L$, luego en particular B0) $0, 1 \in B(L)$. El conjunto $B(L)$ tiene además las siguientes propiedades:

B1) Si $x, y \in B(L)$ entonces $x \wedge y \in B(L)$.

En efecto por hipótesis $\nabla x = x, \nabla y = y$ luego $\nabla(x \wedge y) = (\text{por L8}) = \nabla x \wedge \nabla y = x \wedge y$.

B2) Si $x \in B(L)$ entonces $\sim x \in B(L)$.

Por L18 sabemos $\nabla \sim \nabla x = \sim \nabla x$, luego si $\nabla x = x$, tenemos $\nabla \sim x = \sim x$.

B3) Si $x, y \in B(L)$ entonces $x \vee y \in B(L)$.

Es una consecuencia inmediata de (B1), (B2) y el axioma L5.

Lema 2.1.1 Si L es un álgebra de Łukasiewicz y $x \in L$ entonces x es invariante si y sólo si x es booleano. [43]

Dem. Es claro que $0, 1$ son elementos booleanos de L .

Sea x un elemento booleano de L y $-x$ su complemento booleano esto es $x \wedge -x = 0$ y $x \vee -x = 1$. De estas condiciones se deduce inmediatamente que (1) $\nabla x \wedge \nabla -x = 0$ y (2) $\nabla x \vee \nabla -x = 1$. Por lo tanto ∇x es un elemento booleano cuyo complemento booleano es el elemento $\nabla -x$. Por otro lado (3) $\nabla x = \nabla x \wedge 1 = \nabla x \wedge (x \vee -x) = (\nabla x \wedge x) \vee (\nabla x \wedge -x) = x \vee (\nabla x \wedge -x)$. Pero de $-x \leq \nabla -x$ se deduce, teniendo en cuenta (1) que $-x \wedge \nabla x \leq \nabla -x \wedge \nabla x = 0$ y por lo tanto (4) $-x \wedge \nabla x = 0$. De (3) y (4) resulta que $\nabla x = x$.

Supongamos ahora que $x \in B(L)$ esto es $\nabla x = x$. Por L17 sabemos que ∇x es booleano y que su complemento es $\sim \nabla x$, luego como $\sim \nabla x = \sim x$ podemos afirmar que $\sim x \wedge x = 0$ y que $\sim x \vee x = 1$, luego x es booleano y tiene por complemento booleano a $\sim x$. ■

Acabamos así de probar que $B(L)$ es un álgebra de Boole.

L21) $\nabla(x \vee y) = \nabla x \vee \nabla y$.

De $x \leq x \vee y$ resulta por L12 que (1) $\nabla x \leq \nabla(x \vee y)$ y de $y \leq x \vee y$ resulta por L12 que (2) $\nabla y \leq \nabla(x \vee y)$. De (1) y (2) tenemos:

$$(3) \quad \nabla x \vee \nabla y \leq \nabla(x \vee y).$$

Por L9 sabemos que $x \leq \nabla x$ y que $y \leq \nabla y$, luego $x \vee y \leq \nabla x \vee \nabla y$ y en consecuencia utilizando L12 tenemos $\nabla(x \vee y) \leq \nabla(\nabla x \vee \nabla y)$, y como $\nabla x, \nabla y \in B(L)$ resulta por B3 que $\nabla x \vee \nabla y \in B(L)$ esto es $\nabla(\nabla x \vee \nabla y) = \nabla x \vee \nabla y$, luego (4) $\nabla(x \vee y) \leq \nabla x \vee \nabla y$. De (3) y (4) resulta L21.

$$\begin{aligned} \text{L22)} \quad & \sim \nabla \sim x \vee (\nabla x \wedge \nabla \sim x) \vee \sim \nabla x = 1. \\ & \sim \nabla \sim x \vee (\nabla x \wedge \nabla \sim x) \vee \sim \nabla x = \\ & (\sim \nabla \sim x \vee \sim \nabla x \vee \nabla x) \wedge (\sim \nabla \sim x \vee \sim \nabla x \vee \nabla \sim x) = (\text{por L17}) = 1 \wedge 1 = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{L23)} \quad & \nabla(x \wedge \nabla y) = \nabla x \wedge \nabla y. \\ & \nabla(x \wedge \nabla y) = (\text{por L8}) = \nabla x \wedge \nabla \nabla y = (\text{por L20}) = \nabla x \wedge \nabla y. \end{aligned}$$

Vamos a definir un nuevo operador unario sobre L del siguiente modo:

$$\Delta x = \sim \nabla \sim x$$

al cual daremos el nombre de operador dual de ∇ ó operador de *necesidad*. Esta terminología está justificada porque valen las siguientes reglas de cálculo:

$$\begin{aligned} \text{L6')} \quad & \sim x \wedge \Delta x = 0. \\ & \sim x \wedge \Delta x = \sim x \wedge \sim \nabla \sim x = \sim (x \vee \nabla \sim x) = (\text{por L6}) = \sim 1 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{L7')} \quad & x \vee \sim x = \sim x \vee \Delta x. \\ & \sim x \vee \Delta x = \sim x \vee \sim \nabla \sim x = \sim (x \wedge \nabla \sim x) = (\text{por L7}) = \sim (x \wedge \sim x) = \\ & (\text{por L5 y L4}) = \sim x \vee x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{L8')} \quad & \Delta(x \vee y) = \Delta x \vee \Delta y. \\ & \Delta(x \vee y) = \sim \nabla \sim (x \vee y) = \sim \nabla (\sim x \wedge \sim y) = (\text{por L8}) = \\ & \sim (\nabla \sim x \wedge \nabla \sim y) = \sim \nabla \sim x \vee \sim \nabla \sim y = \Delta x \vee \Delta y. \end{aligned}$$

$$\text{L9')} \quad \Delta x \leq x. \text{ Por L9 sabemos que } \sim x \leq \nabla \sim x, \text{ luego } \Delta x = \sim x \nabla \sim x \leq \sim \sim x = x.$$

Claramente toda álgebra de Boole es un álgebra de Łukasiewicz donde $\nabla x = x$ y $\sim x = -x$.

Dada una propiedad P válida en todas las álgebras de Łukasiewicz daremos el nombre de dual de P a la propiedad P' que se obtiene intercambiando los elementos 0 y 1 y las operaciones $\nabla, \vee, \wedge$ por $\Delta, \wedge, \vee$ respectivamente. Sabemos que los duales de cada uno de los axiomas L1 a L8 que hemos utilizado para definir el concepto de álgebra de Łukasiewicz son también válidos en estas álgebras, entonces podemos enunciar el siguiente resultado: *Si una propiedad P es válida en un álgebra de Łukasiewicz entonces la propiedad dual P' también es válida.*

Como el operador ∇ tiene las propiedades de un operador de clausura entonces es natural definir los siguientes operadores:

$$\text{Ext } x = \sim \nabla x, \quad \text{Int } x = \Delta x,$$

$$\text{Fr } x = \nabla x \wedge \nabla \sim x = \nabla(x \wedge \sim x),$$

que se denominan *exterior, interior y frontera* respectivamente. Entonces la regla de cálculo L22 se puede escribir del siguiente modo:

$$\text{L23)} \quad \text{Int } x \vee \text{Fr } x \vee \text{Ext } x = 1.$$

A esta fórmula Moisil denominó *principio del cuarto excluido*. Observemos que:

- $Int\ x \wedge Fr\ x = \Delta x \wedge \nabla x \wedge \nabla \sim x = \nabla x \wedge \sim \nabla \sim x \wedge \nabla \sim x = (\text{por L17}) = \nabla x \wedge 0 = 0.$
- $Int\ x \wedge Ext\ x = \Delta x \wedge \sim \nabla x = \Delta x \wedge \Delta \sim x = (\text{por L8'}) = \Delta(x \wedge \sim x) = \sim \nabla \sim (x \wedge \sim x) = \sim \nabla(\sim x \vee x) = \sim(\nabla \sim x \vee \nabla x) = \sim(\nabla(\sim x \vee \nabla x)) = \sim \nabla 1 = \sim 1 = 0.$
- $Fr\ x \wedge Ext\ x = \nabla x \wedge \nabla \sim x \wedge \sim \nabla x = 0.$

Vamos a demostrar que si (*) $x \wedge \sim x = 0$ entonces (i) $Fr\ x = 0$, (ii) $\nabla x = x$, (iii) $Int\ x = x$ y (iv) $Ext\ x = \sim x$. En efecto: (i) $Fr\ x = \nabla(x \wedge \sim x) = \nabla 0 = 0$.

De (*) resulta que (**) $x \vee \sim x = 1$, luego $\nabla x = \nabla x \wedge 1 = \nabla x \wedge (x \vee \sim x) = (\nabla x \wedge x) \vee (\nabla x \wedge \sim x) = (\text{por L9 y L7}) = x \vee (x \wedge \sim x) = x$, y por lo tanto $Ext\ x = \sim \nabla x = \sim x$. Ya vimos que (***) $0 = Fr\ x = \nabla x \wedge \nabla \sim x$ entonces $\nabla \sim x = \nabla \sim x \wedge 1 = (\text{por (**)}) = \nabla \sim x \wedge (x \vee \sim x) = (\nabla \sim x \wedge x) \vee (\nabla \sim x \wedge \sim x) = (\text{por (***) y L9}) = 0 \vee \sim x = \sim x$, luego $Int\ x = \Delta x = \sim \nabla \sim x = \sim \sim x = x$.

2.2 Algebras de Łukasiewicz con centro

Un elemento c de un álgebra de Łukasiewicz L se dice un centro de L , si $\sim c = c$ (Moisil, [43]). Este concepto coincide con el de álgebras de Post, de orden 3. Al respecto ver G. Epstein, *The lattice theory of Post algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., 95 (1960), 300-317, y T. Traczyk, *Axioms and some properties of Post algebras*, Colloq. Math., 10 (1963), 193-209.

Lema 2.2.1 *Para que un elemento c de un álgebra de Łukasiewicz L sea un centro de L es necesario y suficiente que $\Delta c = 0$ y $\nabla c = 1$.*

Dem. Supongamos que $\sim c = c$. Entonces por el axioma L6 y la propiedad L9 tenemos que

$$1 = \sim c \vee \nabla c = c \vee \nabla c = \nabla c.$$

Por L6' y L9' tenemos que

$$0 = \sim c \wedge \Delta c = c \wedge \Delta c = \Delta c = 0.$$

Supongamos ahora que $\Delta c = 0$ y $\nabla c = 1$. Por L7 tenemos que $c \wedge \sim c = \sim c \wedge \nabla c = \sim c \wedge 1 = \sim c$, luego $\sim c \leq c$. Por L7', $c \vee \sim c = \sim c \vee \Delta c = \sim c \vee 0 = \sim c$, esto es $c \leq \sim c$. ■

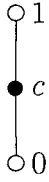
Lema 2.2.2 *Si un álgebra de Łukasiewicz L tiene centro él es único.*

Dem. Supongamos que c_1 y c_2 son centros de L esto es $\nabla c_1 = \nabla c_2 = 1$ y $\Delta c_1 = \Delta c_2 = 0$. Entonces $\nabla(c_1 \wedge c_2) = \nabla c_1 \wedge \nabla c_2 = 1 \wedge 1 = 1$ y $\Delta(c_1 \wedge c_2) = \Delta c_1 \wedge \Delta c_2 = 0 \wedge 0 = 0$. En consecuencia $c = c_1 \wedge c_2$ es un centro de L luego, por el Lema 2.2.1 $c = \sim c$ esto es $c_1 \wedge c_2 = \sim(c_1 \wedge c_2) = \sim c_1 \vee \sim c_2 = c_1 \vee c_2$ y por lo tanto $c_1 = c_2$. ■

Observemos que para probar el lema precedente G. Moisil utilizó el Lema 2.2.1 y el principio de determinación, que indicaremos a continuación. Mas adelante (Lema 2.4.2) veremos como el lema precedente se puede probar de otro modo.

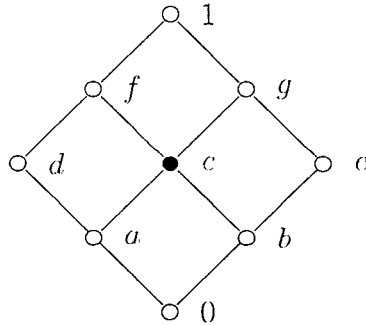
Veamos algunos ejemplos de álgebras de Łukasiewicz con centro

Ejemplo 2.2.1 Sea $\mathbf{T} = \{0, c, 1\}$ un conjunto ordenado donde $0 < c < 1$, luego como $\mathbf{T}$ es una cadena finita, $\mathbf{T}$ es un reticulado distributivo acotado. Definamos las operaciones $\sim, \nabla, \Delta$ por las tablas adjuntas:



x	$\sim x$	∇x	Δx
0	1	0	0
c	c	1	0
1	0	1	1

Ejemplo 2.2.2 Consideremos el reticulado distributivo L cuyo diagrama de Hasse se indica y en el cual los operadores $\sim, \nabla, \Delta$ estan dados por tabla siguiente:



x	$\sim x$	∇x	Δx
0	1	0	0
a	g	d	0
b	f	e	0
c	c	1	0
d	e	d	d
e	d	e	e
f	b	1	d
g	a	1	e
1	0	1	1

Lema 2.2.3 Si L es un Lukasiewicz algebra con centro c y $b \in B(L)$ entonces:

$$c \wedge b = 0 \iff b = 0.$$

Dem. Es obvio que la condición es suficiente. Si $c \wedge b = 0$ entonces:

$$b = 1 \wedge b = \nabla c \wedge b = \nabla(c \wedge b) = 0.$$

■

2.3 Algebras de Łukasiewicz con eje

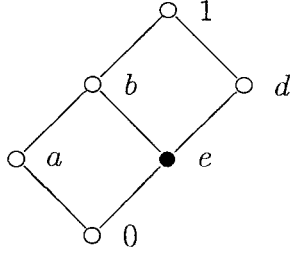
Un elemento e de un álgebra de Łukasiewicz L se dice un eje de L ([44], pág.88) si:

E1) $\Delta e = 0$,

E2) $\nabla x \leq \Delta x \vee \nabla e$, para todo $x \in L$.

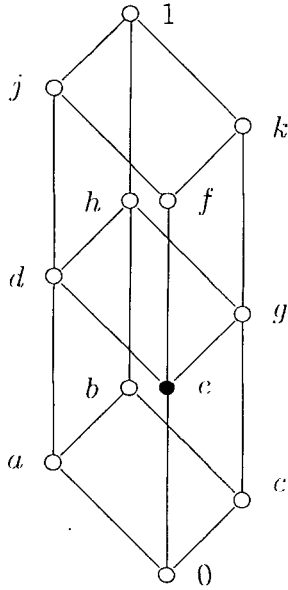
Observemos que la condición E2 es equivalente a cualquiera de las dos condiciones siguientes ([77]) E3) $\nabla x = \nabla x \wedge (\Delta x \vee \nabla e)$, E4) $\nabla x \vee \nabla e = \Delta x \vee \nabla e$.

Ejemplo 2.3.1 Consideremos el reticulado distributivo A cuyo diagrama de Hasse se indica y en el cual se definen los operadores $\sim, \nabla, \Delta$ por medio de la tabla siguiente



x	$\sim x$	∇x	Δx	$\Delta x \vee \nabla e$
0	1	0	0	d
a	d	a	a	1
b	e	1	a	1
d	a	d	d	d
e	b	d	0	d
1	0	1	1	1

Ejemplo 2.3.2 Consideremos el reticulado distributivo A cuyo diagrama de Hasse se indica y en el cual se definen los operadores $\sim, \nabla, \Delta$ por medio de la tabla siguiente



x	$\sim x$	∇x	Δx	$\Delta x \vee \nabla e$
0	1	0	0	h
a	j	a	a	i
b	i	b	b	j
c	h	c	c	1
d	g	i	a	i
e	f	h	0	h
f	e	1	c	1
g	d	j	b	j
h	c	h	h	h
i	b	i	i	i
j	a	j	j	j
1	0	1	1	1

2.4 Principio de determinación de Moisil

Vamos ahora a indicar la demostración del siguiente resultado, denominado *Principio de determinación de Moisil*:

Si L es un álgebra de Łukasiewicz y $a, b \in L$ son tales que
 $\nabla a = \nabla b$ y $\Delta a = \Delta b$ entonces $a = b$.

Observemos que en las definiciones iniciales de álgebra de Łukasiewicz indicadas por Moisil, este principio era tomado como axioma, posteriormente Moisil [45] definió las álgebras de Łukasiewicz por medio de igualdades, a partir de las cuales probó este principio.

Sea L es un álgebra de Łukasiewicz, $p, u \in B(L)$ tales que $p \leq u$, y

$$L' = [p, u] = \{x \in L : p \leq x \leq u\}.$$

Dado $x \in L$ definamos:

$$\approx x = p \vee (u \wedge \sim x).$$

Observemos que $p \leq p \vee (u \wedge \sim x) = \approx x$. Por otro lado $\approx x = p \vee (u \wedge \sim x) = (p \vee u) \wedge (p \vee \sim x) = u \wedge (p \vee \sim x) \leq u$. Luego $\approx x \in L'$, cualquiera que sea $x \in L$. Si $x \in L'$ entonces $p \leq x \leq u$ y como $p, u \in B(L)$ tenemos que $p = \nabla p \leq \nabla x \leq \nabla u = u$. Por lo tanto si $x \in L'$ entonces $\approx x, \nabla x \in L'$. Tenemos así dos operaciones unarias definidas sobre L' .

Teorema 2.4.1 *El sistema $(L', u, \approx, \nabla, \wedge, \vee)$ es un álgebra de Łukasiewicz.*

Dem. Es bien conocido que $(L', p, u, \wedge, \vee)$ es un reticulado distributivo con primer elemento p y último elemento u .

Como $p, u \in B(L)$ entonces $p \wedge \sim p = 0, p \vee \sim p = 1, u \wedge \sim u = 0, u \vee \sim u = 1$.

- Sea $x \in L'$ entonces $\approx \approx x = p \vee (u \wedge \sim (\approx x)) = p \vee (u \wedge \sim (p \vee (u \wedge \sim x))) = p \vee (u \wedge \sim p \wedge (\sim u \vee x)) = (p \vee u) \wedge (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim u \vee x) = u \wedge 1 \wedge (\sim u \vee x) = u \wedge (\sim u \vee x) = (u \wedge \sim u) \vee (u \wedge x) = 0 \vee (u \wedge x) = u \wedge x = x$.
- Sean $x, y \in L'$, luego $x \wedge y \in L'$ y $\approx (x \wedge y) = p \vee (u \wedge \sim (x \wedge y)) = p \vee (u \wedge (\sim x \vee \sim y)) = p \vee (u \wedge \sim x) \vee (u \wedge \sim y) = p \vee (u \wedge \sim x) \vee p \vee (u \wedge \sim y) = \approx x \vee \approx y$.
- Si $x \in L'$ entonces $\nabla x \leq u$ y por lo tanto $\approx x \vee \nabla x = p \vee (u \wedge \sim x) \vee \nabla x = p \vee ((u \vee \nabla x) \wedge (\sim x \vee \nabla x)) = p \vee (u \wedge 1) = p \vee u = u$.
- Si $x \in L'$ entonces $\approx x \wedge \nabla x = (p \vee (u \wedge \sim x)) \wedge \nabla x = (p \wedge \nabla x) \vee (u \wedge \sim x \wedge \nabla x) = p \vee (u \wedge \sim x \wedge x) = p \vee ((u \wedge \sim x) \wedge (u \wedge x)) = (p \vee (u \wedge \sim x)) \wedge (p \vee (u \wedge x)) = \approx x \wedge x$.
- Sean $x, y \in L'$, luego $x \wedge y \in L'$ y $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$.

Observemos que en L' el operador de necesidad se define por $\approx \nabla \approx x$, con $x \in L'$. Utilizando que $p, u \in B(L)$, $p \leq u$ y que $p \leq \Delta x \leq u$, entonces si $x \in L'$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \approx \nabla \approx x &= \approx \nabla(p \vee (u \wedge \sim x)) = \approx (\nabla p \vee (\nabla u \wedge \nabla \sim x)) = \\ &\approx (p \vee (u \wedge \nabla \sim x)) = p \vee (u \wedge \sim (p \vee (u \wedge \nabla \sim x))) = \\ p \vee (u \wedge (\sim (p \wedge (\sim u \vee \Delta x))) &= (p \vee u) \wedge (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim u \vee \Delta x) = \\ u \wedge 1 \wedge (p \vee \sim u \vee \Delta x) &= u \wedge (p \vee \sim u \vee \Delta x) = \\ (u \wedge p) \vee (u \wedge \sim u) \vee (u \wedge \Delta x) &= p \vee 0 \vee \Delta x = \Delta x. \end{aligned}$$

■

Vamos ahora a demostrar el principio de determinación de Moisil². Supongamos que $a, b \in L$ verifican $\nabla a = \nabla b$ y $\Delta a = \Delta b$. Como $p = \Delta a \leq \nabla a = u$ podemos considerar el segmento $L' = [\Delta a, \nabla a] = [\Delta b, \nabla b]$. Como $\Delta a, \nabla a \in B(L)$ entonces por el teorema anterior $(L', u = \nabla a, \approx, \nabla, \wedge, \vee)$ es un álgebra de Łukasiewicz, donde si $x \in L'$, entonces $\approx x = \Delta a \vee (\nabla a \wedge \sim x)$. Vamos a probar que el elemento a de L' , es un centro de L' esto es que $\approx a = a$. En efecto $\approx a = \Delta a \vee (\nabla a \wedge \sim a) = \Delta a \vee (a \wedge \sim a) =$

²En esta parte cambiamos la demostración de A. Monteiro, por otra más sencilla.

$$(\Delta a \vee a) \wedge (\Delta a \vee \sim a) = a \wedge (a \vee \sim a) = a.$$

En forma análoga se demuestra que b es un centro de L' , luego por el Lema 2.2.2, $a = b$.

Inmediatamente después de dar esta demostración el Profesor A. Monteiro propuso a sus alumnos que sería importante indicar una demostración del principio de determinación de Moisil a partir de la axiomática de las álgebras de Łukasiewicz trivalentes. Este problema fué resuelto en 1965 por L. Monteiro y publicado en 1969 en [73]. Como en esa publicación existen varios errores de imprenta, vamos a reproducir la demostración.

Observemos que en toda álgebra de Łukasiewicz L se verifica:

$$(I) \quad x = (\Delta x \vee \sim x) \wedge \nabla x = (\nabla x \wedge \sim x) \vee \Delta x.$$

En efecto:

$$(\Delta x \vee \sim x) \wedge \nabla x = (x \vee \sim x) \wedge \nabla x = (x \wedge \nabla x) \vee (\sim x \wedge \nabla x) = x \vee (x \wedge \sim x) = x.$$

$$x = (\Delta x \vee \sim x) \wedge \nabla x = (\Delta x \wedge \nabla x) \vee (\sim x \wedge \nabla x) = \Delta x \vee (\sim x \wedge \nabla x).$$

Supongamos ahora que $a, b \in L$ verifican (II) $\nabla a = \nabla b$ y (III) $\Delta a = \Delta b$, entonces:

$$\begin{aligned} a \vee b &= (\text{por (I)}) = (\Delta(a \vee b) \vee \sim(a \vee b)) \wedge \nabla(a \vee b) = \\ &= (\Delta a \vee \Delta b) \vee (\sim a \wedge \sim b) \wedge (\nabla a \vee \nabla b) = (\text{por (II) y (III)}) = \\ &= \Delta a \vee (\sim a \wedge \sim b) \wedge \nabla a = (\Delta a \vee \sim a) \wedge (\Delta a \vee \sim b) \wedge \nabla a = \\ &= ((\Delta a \vee \sim a) \wedge \nabla a) \wedge (\Delta a \vee \sim b) \wedge \nabla a = (\text{por (II) y (III)}) = \\ &= ((\Delta a \vee \sim a) \wedge \nabla a) \wedge (\Delta b \vee \sim b) \wedge \nabla b = (\text{por (I)}) = a \wedge b. \end{aligned}$$

Luego $a \vee b = a \wedge b$ y por lo tanto $a = a \wedge (a \vee b) = a \wedge (a \wedge b) = a \wedge b = b \wedge (a \wedge b) = b \wedge (a \vee b) = b$.

Como corolario del principio de determinación de Moisil tenemos que:

Corolario 2.4.1 $x \leq y$ si y sólo si $\Delta x \leq \Delta y$ y $\nabla x \leq \nabla y$.

Lema 2.4.1 Toda álgebra de Łukasiewicz L es un álgebra de Kleene, esto es se verifica

$$x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y, \text{ cualesquiera que sean } x, y \in L.$$

Dem. Queremos demostrar que (1) $x \wedge \sim x = (x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y)$. Utilizando L21, L9 y L6 tenemos que

$$1 = \sim y \vee \nabla y \leq \nabla \sim y \vee \nabla y = \nabla(\sim y \vee y)$$

y por lo tanto (2) $\nabla(\sim y \vee y) = 1$. Luego utilizando el principio de dualidad tenemos que (3) $\Delta(\sim x \wedge x) = 0$. Ahora bien utilizando L8 y (2) tenemos:

$$\begin{aligned} (4) \quad \nabla((x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y)) &= \nabla(x \wedge \sim x) \wedge \nabla(y \vee \sim y) = \\ &= \nabla(x \wedge \sim x) \wedge 1 = \nabla(x \wedge \sim x). \end{aligned}$$

Por otro lado de L23 y (3) resulta:

$$(5) \quad \Delta((x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y)) = \Delta(x \wedge \sim x) \wedge \Delta(y \vee \sim y) =$$

$$0 \wedge \Delta(y \vee \sim y) = 0 = \Delta(x \wedge \sim x).$$

De (4) y (5) se deduce utilizando el principio de determinación de Moisil que se verifica (1). ■

Una demostración del resultado anterior, sin utilizar el principio de determinación de Moisil fué indicada por L. Monteiro. Acabamos de ver que en toda álgebra de Łukasiewicz se verifica: (I) $a = (\Delta a \vee \sim a) \wedge \nabla a$, cualquiera que sea $a \in L$.

Sea $p = (x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y)$, luego por (I)

$$p = (\Delta p \vee \sim p) \wedge \nabla p,$$

y por lo tanto (1) $p \leq \sim x \wedge x$. Como $\Delta p = 0$ y $\nabla p = \nabla x \wedge \nabla \sim x$, entonces:

$$\begin{aligned} (2) \quad p &= \sim p \wedge \nabla p = ((\sim x \vee x) \vee (\sim y \wedge y)) \wedge \nabla x \wedge \nabla \sim x = \\ &= (\sim x \wedge \nabla x \wedge \nabla \sim x) \vee (x \wedge \nabla x \wedge \nabla \sim x) \vee (\sim y \wedge y \wedge \nabla x \wedge \nabla \sim x) = \\ &= (\sim x \wedge \nabla x) \vee (x \wedge \nabla \sim x) \vee (\sim y \wedge y \wedge \nabla x \wedge \nabla \sim x) = \\ &= (\sim x \wedge x) \vee (x \wedge \sim x) \vee (\sim y \wedge y \wedge \nabla x \wedge \nabla \sim x) = \\ &= (\sim x \wedge x) \vee (\sim y \wedge y \wedge \nabla x \wedge \nabla \sim x) \geq \sim x \wedge x. \end{aligned}$$

De (1) y (2) resulta que $x \wedge \sim x = p = (x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y)$.

Lema 2.4.2 *Si A es un álgebra de Kleene y existe un elemento $w \in A$ tal que $\sim w = w$, entonces el es único.*

Dem. Si $z = \sim z$ entonces por la condición (K) tenemos

$$z = z \wedge \sim z \leq w \vee \sim w = w \quad y \quad w = w \wedge \sim w \leq z \vee \sim z = z.$$
■

Lema 2.4.3 *Si L es un álgebra de Łukasiewicz con eje e entonces*

- 1) $x = \Delta x \vee (e \wedge \nabla x \wedge \nabla \sim x)$. (G. Moisil, [44])
- 2) $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x = (\nabla x \wedge e) \vee \Delta x$. (L. Monteiro, [76])
- 3) $x = (\Delta x \vee \sim e) \wedge \nabla x = (\nabla x \wedge \sim e) \vee \Delta x$. (L. Monteiro, [76])

Dem.

- 1) Sea $a = \Delta x \vee (e \wedge \nabla x \wedge \nabla \sim x)$ luego

$$(i) \quad \Delta a = \Delta x \vee (\Delta e \wedge \nabla x \wedge \nabla \sim x) = \Delta x \vee (0 \wedge \nabla x \wedge \nabla \sim x) = \Delta x,$$

y

$$\begin{aligned} \nabla a &= \Delta x \vee (\nabla e \wedge \nabla x \wedge \nabla \sim x) = (\Delta x \vee \nabla e) \wedge (\Delta x \vee \nabla x) \wedge (\Delta x \vee \nabla \sim x) = \\ &= (\Delta x \vee \nabla e) \wedge \nabla x \wedge 1 = (\Delta x \vee \nabla e) \wedge \nabla x. \end{aligned}$$

Por la condición E3 indicada anteriormente sabemos que $\nabla x = (\Delta x \vee \nabla e) \wedge \nabla x$, luego (ii) $\nabla a = \nabla x$. De (i) e (ii) resulta por el principio de determinación de Moisil la propiedad 1).

2) De 1) resulta que $x = (\Delta x \vee e) \wedge (\Delta x \vee \nabla x) \wedge (\Delta x \vee \nabla \sim x) = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x \wedge 1 = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x = (\Delta x \wedge \nabla x) \vee (e \wedge \nabla x) = \Delta x \vee (e \wedge \nabla x)$.

3) Por 2) $\sim x = (\Delta \sim x \vee e) \wedge \nabla \sim x$ luego $x = \sim \sim x = (\nabla x \wedge \sim e) \vee \Delta x = (\nabla x \vee \Delta x) \wedge (\Delta x \vee \sim e) = \nabla x \wedge (\Delta x \vee \sim e)$.

■

Lema 2.4.4 Si L es un álgebra de Łukasiewicz tal que existe un elemento $e \in L$ que verifica las siguientes condiciones:

1) $\Delta e = 0$,

2) $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x$, cualquiera que sea $x \in L$

entonces e es un eje de L . (L. Monteiro, [76])

Dem. Por hipótesis se verifica E1, y de 2) resulta que $\nabla x = (\Delta x \vee \nabla e) \wedge \nabla x$ esto es, se verifica E3, que como vimos es equivalente a E2. Luego e es un eje de L . ■

Lema 2.4.5 Si c es un centro de un álgebra de Łukasiewicz L entonces c es un eje de L .

Dem. Por hipótesis $\Delta c = 0$ y $\nabla c = 1$ luego, $\nabla x \leq 1 = \Delta x \vee \nabla c$. Esto prueba que c verifica las condiciones E1 y E2, luego c es un eje de L . ■

Lema 2.4.6 Si c es un centro de un álgebra de Łukasiewicz L entonces:

$$x = (\Delta x \vee c) \wedge \nabla x = (\nabla x \wedge c) \vee \Delta x, \text{ cualquiera que sea } x \in L.$$

Dem. Consecuencia del Lema 2.4.5 y Lema 2.4.3, 2). ■

Es claro que toda álgebra de Boole es un álgebra de Łukasiewicz, que tiene por eje al primer elemento 0.

Lema 2.4.7 Sea L un álgebra de Łukasiewicz que no es un álgebra de Boole. Si e es un eje de L entonces, $e \neq 0$ y $e \neq 1$.

Dem. Si $e = 1$ entonces $\Delta e = 1$ y no se verifica E1. Si $e = 0$ entonces por E2: $\nabla x \leq \Delta x \vee \nabla e = \Delta x \vee 0 = \Delta x$, esto es $\nabla x = \Delta x$ para todo $x \in L$ y por lo tanto $\nabla x = x$ para todo $x \in L$, luego L sería un álgebra de Boole. ■

Lema 2.4.8 $\Delta x = 0$ si y sólo si $x \leq \sim x$.

Dem. Si $\Delta x = 0$, entonces como $x = (\Delta x \vee \sim x) \wedge \nabla x$ tenemos que $x = \sim x \wedge \nabla x \leq \sim x$. Si $x \leq \sim x$ entonces $\Delta x = \Delta x \wedge x \leq \Delta x \wedge \sim x = 0$. ■

2.5 Implicaciones

En estas álgebras se pueden definir varias operaciones de implicación, entre las cuales figuran:

$$a \longrightarrow b = \nabla \sim a \vee b, \quad (1)$$

$$a \rhd b = (a \longrightarrow b) \wedge (\sim b \longrightarrow \sim a), \quad (2)$$

$$a \Longrightarrow b = \Delta \sim a \vee \Delta b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b) \vee (\Delta a \wedge b \wedge \sim b). \quad (3)$$

Estas operaciones se denominan *implicación débil*, *implicación contrapuesta* ó *implicación de Lukasiewicz e implicación intuicionista* [46, 48, 49].

Lema 2.5.1 $a \rhd b = \sim a \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b)$.

Dem. $a \rhd b = (\nabla \sim a \vee b) \wedge (\nabla b \vee \sim a) =$
 $(\nabla \sim a \wedge \nabla b) \vee (\nabla \sim a \wedge \sim a) \vee (b \wedge \nabla b) \vee (b \wedge \sim a) =$
 $(\nabla \sim a \wedge \nabla b) \vee \sim a \vee b \vee (b \wedge \sim a) = (\nabla \sim a \wedge \nabla b) \vee \sim a \vee b =$
 $\sim a \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b).$ ■

Lema 2.5.2 $a \Longrightarrow b = \Delta \sim a \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b)$. (A. Monteiro [59])

Dem. En efecto de (3) resulta que:

$$(i) \Delta(a \Longrightarrow b) = \Delta \sim a \vee \Delta b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b) \vee (\Delta a \wedge \Delta b \wedge \Delta \sim b) =$$

$$\Delta \sim a \vee \Delta b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b) = \Delta(\Delta \sim a \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b)).$$

De (3) resulta que

$$(ii) \nabla(a \Longrightarrow b) = \Delta \sim a \vee \nabla b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b) \vee (\Delta a \wedge \nabla b \wedge \nabla \sim b) =$$

$$\Delta \sim a \vee [(\Delta b \vee \Delta a) \wedge (\Delta b \vee \nabla b) \wedge (\Delta b \vee \nabla \sim b)] \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla \sim b) =$$

$$\Delta \sim a \vee [(\Delta b \vee \Delta a) \wedge \nabla b] \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla \sim b) =$$

$$\Delta \sim a \vee (\Delta b \wedge \nabla b) \vee (\Delta a \wedge \nabla b) \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla \sim b) =$$

$$\Delta \sim a \vee \Delta b \vee (\Delta a \wedge \nabla b) \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla \sim b) =$$

$$\Delta \sim a \vee \Delta b \vee (\nabla b \wedge (\Delta a \vee \nabla \sim a)) = \Delta \sim a \vee \Delta b \vee \nabla b = \Delta \sim a \vee \nabla b =$$

$$\Delta \sim a \vee \nabla b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b) = \nabla(\Delta \sim a \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b)).$$

Entonces, por el principio de determinación de Moisil, de (i) e (ii) resulta el lema. ■

Observemos que $a \Longrightarrow b = \Delta \sim a \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b) =$
 $(\Delta \sim a \vee b \vee \nabla \sim a) \wedge (\Delta \sim a \vee b \vee \nabla b) = (\nabla \sim a \vee b) \wedge (\Delta \sim a \vee \nabla b) =$
 $(a \longrightarrow b) \wedge (\nabla a \longrightarrow \nabla b).$

De (1), Lema 2.5.2 y Lema 2.5.1 resulta que:

$$a \Longrightarrow b \leq a \rhd b \leq a \longrightarrow b. \quad (4)$$

Si $b = 0$ entonces de tenemos que $a \Longrightarrow 0 = \Delta \sim a = \sim \nabla a$, $a \rhd 0 = \sim a$ y $a \longrightarrow 0 = \nabla \sim a$. Entonces por (4) tenemos que:

$$\sim \nabla a \leq \sim a \leq \nabla \sim a. \quad (5)$$

Somos así llevados a considerar las siguientes operaciones:

$$\lceil a = a \Longrightarrow 0 = \sim \nabla a, \quad (\text{Negación fuerte}), \quad (6)$$

$$\sim a = a \rhd 0, \quad (\text{Negación}), \quad (7)$$

$$\lceil a = a \longrightarrow 0 = \nabla \sim a, \text{ (Negación débil)}. \quad (8)$$

Esta terminología se debe a Moisil. Si interpretamos los elementos de un álgebra de Łukasiewicz como un conjunto de proposiciones, los símbolos “ $\wedge$ ”, “ $\vee$ ” y “ $\sim$ ” como los conectivos lógicos “y”, “ó”, “no” y “ ∇ ” y “ Δ ” como “es posible” y “es necesario” respectivamente. Moisil indicó el siguiente ejemplo para justificar su terminología. Supongamos que a representa la proposición “yo escribo” entonces tenemos:

- $\sim a =$ “yo no escribo,”
- $\lceil a = \sim \nabla a =$ “no es posible que yo escriba” = “es imposible que yo escriba,”
- $\lceil = \nabla \sim a =$ “es posible que yo no escriba”.

luego por (5) tenemos:

$$\lceil a \leq \sim a \leq \lceil a. \quad (9)$$

por lo tanto $\lceil$ es la negación más fuerte, $\lceil$ la negación mas débil y $\sim$ una negación intermedia entre las dos precedentes.

Observemos que de la siguiente desigualdad:

$$\Delta a \leq a \leq \nabla a, \quad (10)$$

se deduce que

$$\lceil a = \sim \nabla a \leq \sim a \leq \sim \Delta a = \nabla \sim a = \lceil a. \quad (11)$$

La desigualdad (10) nos dice que Δa es una proposición mas fuerte que a y que a es una proposición mas fuerte que ∇a , lo que está de acuerdo con el sentido intuitivo. Por (11) vemos que la negación de la proposición mas fuerte se transforma en la mas débil y negación de la proposición mas débil se transforma en la mas fuerte.

En el Ejemplo 2.2.1 las tablas de las operaciones $\longrightarrow$, $\rhd\longrightarrow$ y $\Longrightarrow$ para el álgebra de Łukasiewicz T indicada en el mismo son:

$\longrightarrow$	0	c	1
0	1	1	1
c	1	1	1
1	0	c	1

$\rhd\longrightarrow$	0	c	1
0	1	1	1
c	c	1	1
1	0	c	1

$\Longrightarrow$	0	c	1
0	1	1	1
c	0	1	1
1	0	c	1

Łukasiewicz estudió un cálculo proposicional que tiene por matriz característica el sistema $(T, \sim, \rhd\longrightarrow)$.

Lema 2.5.3 $(a \Longrightarrow b) \vee (\sim b \Longrightarrow \sim a) = a \rhd\longrightarrow b$. (Moisil)

Dem. Utilizando el Lema 2.5.2 tenemos:

$$(a \Longrightarrow b) \vee (\sim b \Longrightarrow \sim a) = \Delta \sim a \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b) \vee \Delta b \vee \sim a \vee (\nabla b \wedge \nabla \sim a) = \sim a \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b) = (\text{por el Lema 2.5.1}) = a \rhd\longrightarrow b.$$

■

Lema 2.5.4 $(a \rhd\longrightarrow b) \rhd\longrightarrow b = a \vee b$.

Dem. $(a \rhd b) \rhd b = \sim (a \rhd b) \vee b \vee (\nabla \sim (a \rhd b) \wedge \nabla b)$.

Como $\sim (a \rhd b) \vee b = (a \wedge \sim b \wedge (\Delta a \vee \Delta \sim b)) \vee b =$

$(a \wedge \sim b \wedge \Delta a) \vee (a \wedge \sim b \wedge \Delta \sim b) \vee b = (\sim b \wedge \Delta a) \vee (a \wedge \Delta \sim b) \vee b$, y

$\nabla \sim (a \rhd b) \wedge \nabla b = \nabla a \wedge \nabla \sim b \wedge (\Delta a \vee \Delta \sim b) \wedge \nabla b =$

$(\nabla a \wedge \nabla \sim b \wedge \Delta a \wedge \nabla b) \vee (\nabla a \wedge \nabla \sim b \wedge \Delta \sim b \wedge \nabla b) = \nabla \sim b \wedge \Delta a \wedge \nabla b$,

entonces:

$(a \rhd b) \rhd b = (\sim b \wedge \Delta a) \vee (a \wedge \Delta \sim b) \vee b \vee (\nabla \sim b \wedge \Delta a \wedge \nabla b) =$

$(\Delta a \wedge (\sim b \vee (\nabla \sim b \wedge \nabla b))) \vee (a \wedge \Delta \sim b) \vee b =$

$(\Delta a \wedge (\sim b \vee \nabla \sim b) \wedge (\sim b \vee \nabla b)) \vee (a \wedge \Delta \sim b) \vee b = (\Delta a \wedge \nabla \sim b) \vee (a \wedge \Delta \sim b) \vee b =$

$((\Delta a \vee b) \wedge (\nabla \sim b \vee b)) \vee (a \wedge \Delta \sim b) = \Delta a \vee b \vee (a \wedge \Delta \sim b)$. Entonces:

(i) $\Delta((a \rhd b) \rhd b) = \Delta a \vee \Delta b \vee (\Delta a \wedge \Delta \sim b) = \Delta a \vee \Delta b = \Delta(a \vee b)$ y

(ii) $\nabla((a \rhd b) \rhd b) = \Delta a \vee \nabla b \vee (\nabla a \wedge \Delta \sim b) =$

$(\Delta a \vee \nabla b \vee \nabla a) \wedge (\Delta a \vee \nabla b \vee \Delta \sim b) = (\nabla b \vee \nabla a) \wedge (\Delta a \vee \nabla b \vee \sim \nabla b) =$

$(\nabla a \vee \nabla b) \wedge 1 = \nabla a \vee \nabla b = \nabla(a \vee b)$.

De (i) e (ii) resulta por el principio de determinación de Moisil que

$(a \rhd b) \rhd b = a \vee b$. ■

Corolario 2.5.1 $(a \rhd b) \rhd b = (b \rhd a) \rhd a$.

Lema 2.5.5 $a \longrightarrow b = a \rhd (a \rhd b)$.

Dem. Por lo visto en el Lema 2.5.1

$$a \rhd (a \rhd b) = \sim a \vee (a \rhd b) \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla(a \rhd b)),$$

y aplicando nuevamente el Lema 2.5.1

$$a \rhd (a \rhd b) =$$

$$\sim a \vee \sim a \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b) \vee (\nabla \sim a \wedge (\nabla \sim a \vee \nabla b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b))) =$$

$$\sim a \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b) \vee \nabla \sim a = \sim a \vee b \vee \nabla \sim a = \nabla \sim a \vee b = a \longrightarrow b. \quad \blacksquare$$

Este resultado nos permite pasar de la implicación contrapuesta a la implicación débil. Vamos a indicar propiedades de las implicaciones débil y contrapuesta, algunas de las cuáles usaremos mas adelante.

Lema 2.5.6 La operación $\longrightarrow$ tiene las siguientes propiedades:

ID1) Si $a \leq b$ entonces $a \longrightarrow b = 1$,

ID2) $a \longrightarrow 1 = 1$,

ID3) $a \longrightarrow a = 1$,

ID4) $1 \longrightarrow a = a$,

ID5) $a \longrightarrow (b \longrightarrow a) = 1$,

ID6) Si $a \leq b$ entonces $c \longrightarrow a \leq c \longrightarrow b$,

ID7) Si $a \leq b$ entonces $b \longrightarrow c \leq a \longrightarrow c$,

ID8) $a \longrightarrow (a \wedge b) = a \longrightarrow b$,

ID9) $a \longrightarrow (b \wedge c) = (a \longrightarrow b) \wedge (a \longrightarrow c)$,

ID10) $(a \wedge b) \longrightarrow c = a \longrightarrow (b \longrightarrow c)$,

ID11) $a \longrightarrow (b \longrightarrow c) = b \longrightarrow (a \longrightarrow c)$,

ID12) $(a \vee b) \longrightarrow c = (a \longrightarrow c) \wedge (b \longrightarrow c)$,

ID13) $a \longrightarrow \Delta a = 1$,

ID14) $a \wedge (a \longrightarrow b) = a \wedge (\sim a \vee b)$,

ID15) $(a \longrightarrow (b \longrightarrow c)) \longrightarrow ((a \longrightarrow b) \longrightarrow (a \longrightarrow c)) = 1$,

ID16) $a \longrightarrow (b \vee c) = (a \longrightarrow b) \vee (a \longrightarrow c)$.

Dem.

ID1) Si $a \leq b$ entonces $1 = \nabla \sim a \vee a \leq \nabla \sim a \vee b = a \longrightarrow b$.

ID2) Es una consecuencia inmediata de $a \leq 1$ e ID1).

ID3) Es una consecuencia inmediata de $a \leq a$ e ID1).

ID4) $1 \longrightarrow a = \nabla \sim 1 \vee a = 0 \vee a = a$.

ID5) Como $a \leq \nabla \sim b \vee a = b \longrightarrow a$ entonces por ID1) resulta ID5).

ID6) Si $a \leq b$ entonces $c \longrightarrow a = \nabla \sim c \vee a \leq \nabla \sim c \vee b = c \longrightarrow b$.

ID7) Si $a \leq b$ entonces $\sim b \leq \sim a$ y por lo tanto $\nabla \sim b \vee c \leq \nabla \sim a \vee c$, esto es $b \longrightarrow c \leq a \longrightarrow c$.

ID8) $a \longrightarrow (a \wedge b) = \nabla \sim a \vee (a \wedge b) = (\nabla \sim a \vee a) \wedge (\nabla \sim a \vee b) = 1 \wedge (a \longrightarrow b) = a \longrightarrow b$.

ID9) $a \longrightarrow (b \wedge c) = \nabla \sim a \vee (b \wedge c) = (\nabla \sim a \vee b) \wedge (\nabla \sim a \vee c) = (a \longrightarrow b) \wedge (a \longrightarrow c)$.

ID10) $(a \wedge b) \longrightarrow c = \nabla \sim (a \wedge b) \vee c = \nabla \sim a \vee \nabla \sim b \vee c = \nabla \sim a \vee (b \longrightarrow c) = a \longrightarrow (b \longrightarrow c)$.

ID11) $a \longrightarrow (b \longrightarrow c) = (\text{por ID10}) = (a \wedge b) \longrightarrow c = (b \wedge a) \longrightarrow c = (\text{por ID10}) = b \longrightarrow (a \longrightarrow c)$.

ID12) $(a \vee b) \longrightarrow c = \nabla \sim (a \vee b) \vee c = (\nabla \sim a \wedge \nabla \sim b) \vee c = (\nabla \sim a \vee c) \wedge (\nabla \sim b \vee c) = (a \longrightarrow c) \wedge (b \longrightarrow c)$.

ID13) $a \longrightarrow \Delta a = \nabla \sim a \vee \Delta a = \sim \Delta a \vee \Delta a = 1$.

ID14) $a \wedge (a \longrightarrow b) = a \wedge (\nabla \sim a \vee b) = (a \wedge \nabla \sim a) \vee (a \wedge b) = (a \wedge \sim a) \vee (a \wedge b) = a \wedge (\sim a \vee b)$.

$$\begin{aligned}
\text{ID15)} \quad & (a \longrightarrow (b \longrightarrow c)) \longrightarrow ((a \longrightarrow b) \longrightarrow (a \longrightarrow c)) = \\
& \nabla \sim (a \longrightarrow (b \longrightarrow c)) \vee ((a \longrightarrow b) \longrightarrow (a \longrightarrow c)) = \\
& \nabla \sim (\nabla \sim a \vee (b \longrightarrow c)) \vee (\nabla \sim (a \longrightarrow b) \vee (a \longrightarrow c)) = \\
& (\Delta a \wedge \nabla \sim (\nabla \sim b \vee c)) \vee (\Delta a \wedge \nabla \sim b) \vee \nabla \sim a \vee c = \\
& (\Delta a \wedge \Delta b \wedge \nabla \sim c) \vee (\Delta a \wedge \nabla \sim b) \vee \nabla \sim a \vee c = \\
& (\Delta a \wedge ((\Delta b \wedge \nabla \sim c) \vee \nabla \sim b)) \vee \nabla \sim a \vee c = \\
& (\Delta a \wedge ((\Delta b \vee \nabla \sim b) \wedge (\nabla \sim c \vee \nabla \sim b))) \vee \nabla \sim a \vee c = \\
& (\Delta a \wedge (\nabla \sim c \vee \nabla \sim b)) \vee \nabla \sim a \vee c = \\
& (\Delta a \vee \nabla \sim a \vee c) \wedge (\nabla \sim c \vee \nabla \sim b \vee \nabla \sim a \vee c) = 1 \wedge 1 = 1.
\end{aligned}$$

$$\text{ID16)} \quad a \longrightarrow (b \vee c) = \nabla \sim a \vee b \vee c = \nabla \sim a \vee b \vee \nabla \sim a \vee c = (a \longrightarrow b) \vee (a \longrightarrow c).$$

■

Lema 2.5.7 *La operación $\longrightarrow$ tiene las siguientes propiedades:*

$$\text{IC1)} \quad \text{Si } a \leq b \text{ entonces } a \longrightarrow b = 1,$$

$$\text{IC2)} \quad a \longrightarrow 1 = 1,$$

$$\text{IC3)} \quad a \longrightarrow a = 1,$$

$$\text{IC4)} \quad 1 \longrightarrow a = a,$$

$$\text{IC5)} \quad a \longrightarrow (b \longrightarrow a) = 1,$$

$$\text{IC6)} \quad \text{Si } a \leq b \text{ entonces } c \longrightarrow a \leq c \longrightarrow b,$$

$$\text{IC7)} \quad \text{Si } a \leq b \text{ entonces } b \longrightarrow c \leq a \longrightarrow c,$$

$$\text{IC8)} \quad a \longrightarrow (a \wedge b) = a \longrightarrow b,$$

$$\text{IC9)} \quad a \longrightarrow (b \wedge c) = (a \longrightarrow b) \wedge (a \longrightarrow c),$$

$$\text{IC10)} \quad (a \longrightarrow b) \longrightarrow ((b \longrightarrow c) \longrightarrow (a \longrightarrow c)) = 1,$$

$$\text{IC11)} \quad \Delta(a \longrightarrow b) \longrightarrow (\nabla a \longrightarrow \nabla b) = 1,$$

$$\text{IC12)} \quad \text{Si } a \longrightarrow b = 1 \text{ entonces } a \leq b,$$

$$\text{IC13)} \quad a = b \text{ si y sólo si } a \longrightarrow b = 1 \text{ y } b \longrightarrow a = 1,$$

$$\text{IC14)} \quad a \longrightarrow c \leq (a \vee b) \longrightarrow (c \vee b),$$

$$\text{IC15)} \quad \sim a \longrightarrow a = \nabla a,$$

$$\text{IC16)} \quad \sim a \longrightarrow \sim b = b \longrightarrow a.$$

Dem.

IC1) Si (1) $a \leq b$ entonces (2) $\sim b \leq \sim a$. De (1) resulta por ID1) que $a \longrightarrow b = 1$ y de (2) resulta por ID1) que $\sim b \longrightarrow \sim a = 1$ luego:

$$a \longrightarrow b = (a \longrightarrow b) \wedge (\sim b \longrightarrow \sim a) = 1 \wedge 1 = 1.$$

IC2) Es una consecuencia inmediata de $a \leq 1$ e IC1).

IC3) Es una consecuencia inmediata de $a \leq a$ e IC1).

IC4) $1 \rhd a = (1 \longrightarrow a) \wedge (\sim a \longrightarrow \sim 1) = (\text{por ID4}) = a \wedge (\nabla a \vee 0) = a \wedge \nabla a = a$.

IC5) $b \rhd a = (\nabla \sim b \vee a) \wedge (\nabla a \vee \sim b) \geq a \wedge \nabla a = a$, luego por IC1 resulta IC5.

IC6) Si (1) $a \leq b$ entonces (2) $\sim b \leq \sim a$. De (1) resulta por ID6 que (3) $c \longrightarrow a \leq c \longrightarrow b$ y de (2) resulta por ID7 que (4) $\sim a \longrightarrow \sim c \leq \sim b \longrightarrow \sim c$. De (3) y (4):

$$(c \longrightarrow a) \wedge (\sim a \longrightarrow \sim c) \leq (c \longrightarrow b) \wedge (\sim b \longrightarrow \sim c)$$

esto es $c \rhd a \leq c \rhd b$.

IC7) Si (1) $a \leq b$ entonces (2) $\sim b \leq \sim a$. De (1) resulta por ID7 que (3) $b \longrightarrow c \leq a \longrightarrow c$ y de (2) resulta por ID6 que (4) $\sim c \longrightarrow \sim b \leq \sim c \longrightarrow \sim a$. De (3) y (4):

$$(b \longrightarrow c) \wedge (\sim c \longrightarrow \sim b) \leq (a \longrightarrow c) \wedge (\sim c \longrightarrow \sim a)$$

esto es $b \rhd c \leq a \rhd c$.

IC8) $a \rhd (a \wedge b) = (a \longrightarrow (a \wedge b)) \wedge (\sim (a \wedge b) \longrightarrow \sim a) = (\text{por ID8}) =$
 $(a \longrightarrow b) \wedge ((\sim a \vee \sim b) \longrightarrow \sim a) = (\text{por ID12}) =$
 $(a \longrightarrow b) \wedge (\sim a \longrightarrow \sim a) \wedge (\sim b \longrightarrow \sim a) = (\text{por ID3}) =$
 $(a \longrightarrow b) \wedge 1 \wedge (\sim b \longrightarrow \sim a) = (a \longrightarrow b) \wedge (\sim b \longrightarrow \sim a) = a \rhd b$.

IC9) $a \rhd (b \wedge c) = (a \longrightarrow (b \wedge c)) \wedge (\sim (b \wedge c) \longrightarrow \sim a) =$
 $(\nabla \sim a \vee (b \wedge c)) \wedge ((\nabla b \wedge \nabla c) \vee \sim a) =$
 $(\nabla \sim a \vee b) \wedge (\nabla \sim a \vee c) \wedge (\nabla b \vee \sim a) \wedge (\nabla c \vee \sim a) =$
 $(\nabla \sim a \vee b) \wedge (\nabla b \vee \sim a) \wedge (\nabla \sim a \vee c) \wedge (\nabla c \vee \sim a) =$
 $(a \rhd b) \wedge (a \rhd c)$.

IC10) Como $x \rhd y = \sim x \vee y \vee (\nabla \sim x \wedge \nabla y)$ entonces:

$$\nabla(x \rhd y) = \nabla \sim x \vee \nabla y \vee (\nabla \sim x \wedge \nabla y) = \nabla \sim x \vee \nabla y, \quad (1)$$

y

$$\Delta(x \rhd y) = \Delta \sim x \vee \Delta y \vee (\nabla \sim x \wedge \nabla y) =$$

$$(\nabla \sim x \vee \Delta y) \wedge (\Delta \sim x \vee \nabla y).$$

Como

$$\sim(x \rhd y) = x \wedge \sim y \wedge (\Delta x \vee \Delta \sim y),$$

entonces

$$\nabla \sim(x \rhd y) = \nabla x \wedge \nabla \sim y \wedge (\Delta x \vee \Delta \sim y) =$$

$$(\Delta x \wedge \nabla \sim y) \vee (\nabla x \wedge \Delta \sim y),$$

y

$$\Delta \sim(x \rhd y) = \Delta x \wedge \Delta \sim y \wedge (\Delta x \vee \Delta \sim y) = \Delta x \wedge \Delta \sim y. \quad (4)$$

Sean $\alpha = a \rhd b$ y $\beta = (b \rhd c) \rhd (a \rhd c)$, luego por (1)

$$\nabla\beta = \nabla \sim (b \rhd c) \vee \nabla(a \rhd c). \quad (5)$$

Luego por (3) y (1)

$$\begin{aligned} \nabla\beta &= (\nabla b \wedge \nabla \sim c \wedge (\Delta b \vee \Delta \sim c)) \vee \nabla \sim a \vee \nabla c = \\ &= (\nabla \sim a \vee \nabla c \vee \nabla b) \wedge (\nabla \sim a \vee \nabla c \vee \nabla \sim c) \wedge (\nabla \sim a \vee \nabla c \vee \Delta b \vee \Delta \sim c) = \\ &= (\nabla \sim a \vee \nabla c \vee \nabla b) \wedge 1 \wedge 1 = \nabla \sim a \vee \nabla c \vee \nabla b. \end{aligned}$$

Por (1) $\nabla\alpha = \nabla(a \rhd b) = \nabla \sim a \vee \nabla b$ luego

$$\nabla\alpha \leq \nabla\beta. \quad (6)$$

Por (2)

$$\Delta\beta = (\nabla \sim (b \rhd c) \vee \Delta(a \rhd c)) \wedge (\Delta \sim (b \rhd c) \vee \nabla(a \rhd c))$$

Luego por (3) y (1)

$$\begin{aligned} \gamma &= \nabla \sim (b \rhd c) \vee \Delta(a \rhd c) = \\ &= (\Delta b \wedge \nabla \sim c) \vee (\nabla b \wedge \Delta \sim c) \vee \Delta \sim a \vee \Delta c \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla c) \end{aligned}$$

Por (4) y (1)

$$\begin{aligned} \delta &= \Delta \sim (b \rhd c) \vee \nabla(a \rhd c) = (\Delta b \wedge \Delta \sim c) \vee \nabla \sim a \vee \nabla c = \\ &= (\Delta b \vee \nabla \sim a \vee \nabla c) \wedge (\Delta \sim c \vee \nabla \sim a \vee \nabla c) = \nabla \sim a \vee \Delta b \vee \nabla c. \end{aligned}$$

Luego

$$\Delta\beta = \gamma \wedge \delta.$$

Por (2)

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \Delta(a \rhd b) = (\nabla \sim a \vee \Delta b) \wedge (\Delta \sim a \vee \nabla b) \leq \nabla \sim a \vee \Delta b \leq \\ &= \nabla \sim a \vee \Delta b \vee \nabla c = \delta, \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \Delta \sim a \vee \Delta b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b) = \\ &= \Delta \sim a \vee (\Delta b \wedge (\nabla \sim c \vee \Delta c)) \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b) = \\ &= \Delta \sim a \vee (\Delta b \wedge \nabla \sim c) \vee (\Delta b \wedge \Delta c) \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b) \leq \\ &= \Delta \sim a \vee (\Delta b \wedge \nabla \sim c) \vee (\Delta b \wedge \Delta c) \vee \Delta c \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b) = \\ &= \Delta \sim a \vee (\Delta b \wedge \nabla \sim c) \vee \Delta c \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b) = \\ &= \Delta \sim a \vee (\Delta b \wedge \nabla \sim c) \vee \Delta c \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b \wedge \nabla c) \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b \wedge \Delta \sim c) \leq \\ &= \Delta \sim a \vee (\Delta b \wedge \nabla \sim c) \vee \Delta c \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla c) \vee (\nabla b \wedge \Delta \sim c) = \gamma, \end{aligned}$$

entonces

$$\Delta\alpha \leq \gamma \wedge \delta = \Delta\beta. \quad (7)$$

De (6) y (7) resulta por el principio de determinación de Moisil que $\alpha \wedge \beta = \alpha$ esto es $\alpha \leq \beta$, luego por IC2 tenemos que $\alpha \rhd \beta = 1$.

IC11) $\Delta(a \longrightarrow b) = \Delta \sim a \vee \Delta b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b)$, luego:

(i) $\sim \Delta(a \longrightarrow b) = \nabla a \wedge \nabla \sim b \wedge (\Delta a \vee \Delta \sim b)$. Además

(ii) $\nabla a \longrightarrow \nabla b = \Delta \sim a \vee \nabla b \vee (\Delta \sim a \wedge \nabla b) = \Delta \sim a \vee \nabla b$.

Luego (iii) $\nabla \sim \Delta(a \longrightarrow b) = \sim \Delta(a \longrightarrow b)$ y

(iv) $\nabla(\nabla a \longrightarrow \nabla b) = \nabla a \longrightarrow \nabla b$. Entonces por (i), (ii), (iii) e (iv) tenemos:

$$\begin{aligned} & \Delta(a \longrightarrow b) \longrightarrow (\nabla a \longrightarrow \nabla b) = \\ & \sim \Delta(a \longrightarrow b) \vee (\nabla a \longrightarrow \nabla b) \vee (\nabla \sim \Delta(a \longrightarrow b) \wedge \nabla(\nabla a \longrightarrow \nabla b)) = \\ & \sim \Delta(a \longrightarrow b) \vee (\nabla a \longrightarrow \nabla b) \vee (\sim \Delta(a \longrightarrow b) \wedge (\nabla a \longrightarrow \nabla b)) = \\ & \sim \Delta(a \longrightarrow b) \vee (\nabla a \longrightarrow \nabla b) = \\ & \nabla a \wedge \nabla \sim b \wedge (\Delta a \vee \Delta \sim b) \vee (\Delta \sim a \vee \nabla b) = \\ & (\nabla a \wedge \nabla \sim b \wedge \Delta a) \vee (\nabla a \wedge \nabla \sim b \wedge \Delta \sim b) \vee \Delta \sim a \vee \nabla b = \\ & (\nabla \sim b \wedge \Delta a) \vee (\nabla a \wedge \Delta \sim b) \vee \Delta \sim a \vee \nabla b = \\ & ((\nabla \sim b \vee \nabla b) \wedge (\nabla \sim b \vee \nabla \sim a)) \vee ((\nabla a \vee \Delta \sim a) \wedge (\Delta \sim b \vee \Delta \sim a)) = \\ & \Delta a \vee \nabla b \vee \Delta \sim b \vee \Delta \sim a = 1. \end{aligned}$$

IC12) Si (i) $a \longrightarrow b = 1$, entonces por el Lema 2.5.4 $a \vee b = (a \longrightarrow b) \longrightarrow b =$ por (i) $= 1 \longrightarrow b =$ por (IC4) $= b$, luego $a \leq b$.

IC13) Si $a = b$ entonces por IC3) tenemos que $a \longrightarrow b = a \longrightarrow a = 1$ y $b \longrightarrow a = b \longrightarrow b = 1$. Supongamos que $a \longrightarrow b = 1$ y $b \longrightarrow a = 1$, luego por IC12 $a \leq b$ y $b \leq a$, y en consecuencia $a = b$.

$$\begin{aligned} \text{IC14)} \quad & (a \vee b) \longrightarrow (c \vee b) = \sim (a \vee b) \vee c \vee b \vee (\nabla \sim (a \vee b) \wedge \nabla(c \vee b)) = \\ & \sim (a \vee b) \vee c \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla \sim b \wedge \nabla(c \vee b)) = \\ & \sim (a \vee b) \vee c \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla \sim b \wedge \nabla c) \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla \sim b \wedge \nabla b) = \\ & \sim (a \vee b) \vee c \vee ((\nabla \sim a \wedge \nabla \sim c) \vee b) \wedge (b \vee \nabla \sim b) \vee ((\nabla \sim a \wedge \nabla b) \vee b) \wedge (b \vee \nabla \sim b) = \\ & \sim (a \vee b) \vee c \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla \sim c) \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b) \vee b = \\ & ((\sim a \vee \nabla \sim a) \wedge (\sim a \vee \nabla b) \wedge (\sim b \vee \nabla \sim a) \wedge (\sim b \vee \nabla b)) \vee c \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla c) = \\ & \nabla \sim a \wedge (\sim a \vee \nabla b) \vee c \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla c) = \sim a \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b) \vee c \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla c) \geq \\ & \sim a \vee c \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla c) = a \longrightarrow c. \end{aligned}$$

$$\text{IC15)} \quad \sim a \longrightarrow a = a \vee a \vee (\nabla a \wedge \nabla a) = a \vee \nabla a = \nabla a.$$

$$\text{IC16)} \quad \sim a \longrightarrow \sim b = (\sim a \longrightarrow \sim b) \wedge (b \longrightarrow a) = b \longrightarrow a.$$

■

Observemos que de las fórmulas:

- $a \vee b = (a \longrightarrow b) \longrightarrow b$,
- $a \wedge b = \sim (\sim a \vee \sim b)$,
- $\nabla a = \sim a \longrightarrow a$,
- $a \longrightarrow a = 1$,

surge que en un álgebra de Łukasiewicz a partir de las operaciones $\longrightarrow$ y $\sim$ se pueden determinar la constante 1, y las operaciones $\vee$, $\wedge$ y ∇ , luego es posible definir un álgebra de Łukasiewicz como un sistema formado por un conjunto no vacío A , una operación unaria $\sim$ y una operación binaria $\longrightarrow$ a condición de obligar a estos dos conectivos a

cumplir ciertas condiciones. Al momento del dictado de este curso este era un problema no resuelto.

- En 1983 A. Figallo y J. Tolosa [32] caracterizaron las álgebras de Łukasiewicz como un sistema $(L, 1, \longrightarrow, \wedge, \lceil)$, y para ello utilizaron un Teorema de representación de Moisil (ver párrafo 4.5),
- En 1983 M. Abad y A. Figallo [5], de un modo diferente, obtienen los mismos resultados,
- En 1983, A. Figallo y A. Ziliani caracterizan el cálculo trivalente de Łukasiewicz en términos de $\longrightarrow, \wedge, \lceil$, modus ponens y la ley de sustitución, los resultados fueron publicados en 1992, [33].

Estos fueron tres problemas propuestos por el Profesor A. Monteiro durante los cursos y seminarios sobre álgebras de Łukasiewicz.

- En 1986 D. Díaz y A. Figallo [30] caracterizaron las álgebras de Łukasiewicz como sistemas $(L, 1, \lceil, \rhd), (L, 1, \lceil, \rhd)$.

2.6 Algebras de Heyting

Definición 2.6.1 *Un álgebra de Heyting es un reticulado H con primer elemento 0 y último elemento 1, en el cual para cada par ordenado (a, b) de elementos de H existe un elemento $c \in H$ tal que:*

AH1) $a \wedge c \leq b$,

AH2) Si $a \wedge x \leq b$ entonces $x \leq c$.

Ver por ejemplo [62] y [90].

Para indicar el elemento c notaremos $c = a \implies b$ y se dice que c es la implicación intuicionista de a y b .

En 1963 Gr. Moisil [48] probó el siguiente resultado:

Teorema 2.6.1 *Toda álgebra de Łukasiewicz es un álgebra de Heyting.*

Dem. La siguiente demostración se debe a A. Monteiro. Moisil define la implicación intuicionista por

$$a \implies b = \Delta \sim a \vee \Delta b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b) \vee (\Delta a \wedge b \wedge \sim b).$$

Pero vimos en el Lema 2.5.2 que

$$a \implies b = \Delta \sim a \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b).$$

AH1) $a \wedge (a \implies b) \leq b$.

En efecto

$$\begin{aligned} a \wedge (a \implies b) &= a \wedge (\Delta \sim a \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b)) = \\ &= (a \wedge \Delta \sim a) \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge \nabla \sim a \wedge \nabla b) \end{aligned}$$

y como $a \wedge \Delta \sim a = 0$ tenemos que

$$(1) \ a \wedge (a \implies b) = (a \wedge b) \vee (a \wedge \nabla \sim a \wedge \nabla b).$$

Por el principio de determinación de Moisil probar AH1 es equivalente a probar que (2) $\nabla(a \wedge (a \implies b)) \leq \nabla b$ y (3) $\Delta(a \wedge (a \implies b)) \leq \Delta b$.

De (1) resulta

$$\begin{aligned} \nabla(a \wedge (a \implies b)) &= \nabla((a \wedge b) \vee (a \wedge \nabla \sim a \wedge \nabla b)) = \\ &(\nabla a \wedge \nabla b) \vee (\nabla a \wedge \nabla \sim a \wedge \nabla b) = \nabla a \wedge \nabla b \leq \nabla b. \end{aligned}$$

También de (1) resulta

$$\begin{aligned} \Delta(a \wedge (a \implies b)) &= \Delta((a \wedge b) \vee (a \wedge \nabla \sim a \wedge \nabla b)) = \\ &(\Delta a \wedge \Delta b) \vee (\Delta a \wedge \nabla \sim a \wedge \nabla b) = \Delta a \wedge \Delta b \leq \Delta b. \end{aligned}$$

Probemos ahora que:

AH2) Si (4) $a \wedge x \leq b$ entonces (5) $x \leq a \implies b$.

Por el principio de determinación de Moisil (4) equivale a

$$\nabla a \wedge \nabla x = \nabla(a \wedge x) \leq \nabla b, \quad (6)$$

y

$$\Delta a \wedge \Delta x = \Delta(a \wedge x) \leq \Delta b \quad (7)$$

y probar (5) equivale a demostrar que

$$\nabla x \leq \nabla(a \implies b) \quad (8)$$

y

$$\Delta x \leq \Delta(a \implies b). \quad (9)$$

Pero

$$\begin{aligned} \nabla(a \implies b) &= \nabla(\Delta \sim a \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b)) = \\ &\Delta \sim a \vee \nabla b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b) = \Delta \sim a \vee \nabla b. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Delta(a \implies b) &= \Delta(\Delta \sim a \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b)) = \Delta \sim a \vee \Delta b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b) = \\ &(\Delta \sim a \vee \Delta b \vee \nabla \sim a) \wedge (\Delta \sim a \vee \Delta b \vee \nabla b) = \\ &(\nabla \sim a \vee \Delta b) \wedge (\Delta \sim a \vee \nabla b). \end{aligned}$$

Por lo tanto las condiciones (8) y (9) se escriben bajo la forma

$$\nabla x \leq \Delta \sim a \vee \nabla b, \quad (10)$$

$$\Delta x \leq (\nabla \sim a \vee \Delta b) \wedge (\Delta \sim a \vee \nabla b). \quad (11)$$

Esta última condición es equivalente a probar que

$$\Delta x \leq \nabla \sim a \vee \Delta b, \quad (12)$$

y

$$\Delta x \leq \Delta \sim a \vee \nabla b. \quad (13)$$

Vamos a probar que (10), (12) y (13) se deducen a partir de (6) y (7).

De (6) se deduce

$$\sim \nabla a \vee (\nabla a \wedge \nabla x) \leq \sim \nabla a \vee \nabla b$$

esto es

$$\sim \nabla a \wedge \nabla x = (\sim \nabla a \vee \nabla a) \wedge (\sim \nabla a \wedge \nabla x) \leq \sim \nabla a \vee \nabla b = \Delta \sim a \vee \nabla b$$

y por lo tanto

$$\sim \nabla a \wedge \nabla x \leq \Delta \sim a \vee \nabla b \quad (14)$$

Luego como

$$\Delta x \leq \nabla x \leq \sim \nabla a \wedge \nabla x \quad (15)$$

de (14) y (15) resulta que

$$\Delta x \leq \Delta \sim a \vee \nabla b \text{ y } \nabla x \leq \Delta \sim a \vee \nabla b \text{ lo que prueba (13) y (10).}$$

De (7) resulta

$$\sim \Delta a \vee (\Delta a \wedge \Delta x) \leq \sim \Delta a \vee \nabla b = \nabla \sim a \vee \Delta b$$

luego

$$\Delta x \leq \sim \Delta a \vee \Delta x \leq \nabla \sim a \vee \Delta b,$$

lo que prueba (12). ■

Ya vimos en el párrafo anterior que la negación intuicionista de un elemento x de un álgebra de Łukasiewicz es

$$\lceil x = x \rceil \implies 0 = \Delta \sim x = \sim \nabla x$$

y por lo tanto

$$\lceil \lceil x = \sim \nabla(\lceil x) \rceil = \sim \nabla(\sim \nabla x) = \Delta \nabla x = \nabla x. \rceil$$

Por lo tanto el operador ∇ se puede obtener a partir de la negación intuicionista.

En toda álgebra de Łukasiewicz se verifica $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$ entonces

$$\lceil \lceil (x \wedge y) \rceil = \lceil \lceil x \rceil \wedge \lceil y \rceil \rceil \quad (1)$$

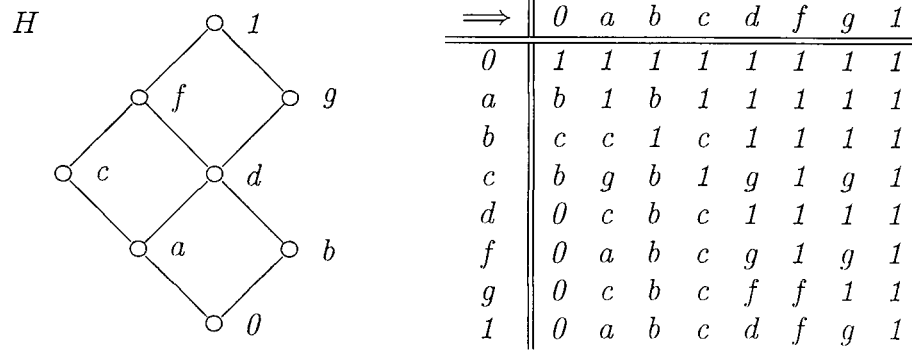
fórmula que vale en todas las álgebras de Heyting.

Como en toda álgebra de Łukasiewicz se verifica $\nabla(x \vee y) = \nabla x \vee \nabla y$ entonces

$$\lceil \lceil (x \vee y) \rceil = \lceil \lceil x \rceil \vee \lceil y \rceil \rceil \quad (2)$$

pero esta fórmula no vale en todas las álgebras de Heyting. En efecto:

Ejemplo 2.6.1 Sea H el álgebra de Heyting H indicada en la figura siguiente, [62], entonces $\lceil \lceil (a \vee b) \rceil = \lceil \lceil d \rceil = \lceil 0 \rceil = 1$ y $\lceil \lceil a \rceil \vee \lceil b \rceil = \lceil b \rceil \vee \lceil c \rceil = c \vee b = f$, lo que prueba que (2) no vale en todas las álgebras de Heyting.



Por lo tanto las álgebras de Łukasiewicz son álgebras de Heyting particulares.

Definición 2.6.2 *Un álgebra de Heyting se dice trivalente si se verifica:*

$$(T) \quad (((a \Rightarrow c) \Rightarrow b) \Rightarrow (((b \Rightarrow a) \Rightarrow b) \Rightarrow b) = 1$$

Lema 2.6.1 *En un álgebra de Heyting la condición (T) es equivalente a cualquiera de las siguientes condiciones: ([69], [70])*

$$(T1) \quad (\downarrow a \Rightarrow b) \Rightarrow (((b \Rightarrow a) \Rightarrow b) \Rightarrow b) = 1,$$

$$(T2) \quad ((b \Rightarrow a) \Rightarrow b) \Rightarrow ((\downarrow a \Rightarrow b) \Rightarrow b) = 1,$$

$$(T3) \quad b = (\downarrow a \Rightarrow b) \wedge ((b \Rightarrow a) \Rightarrow b),$$

$$(T4) \quad b = ((a \Rightarrow c) \Rightarrow b) \wedge ((b \Rightarrow a) \Rightarrow b).$$

$\downarrow$
 a

El siguiente resultado fue obtenido por L. Monteiro en 1963, y expuesto ese mismo año en el seminario dirigido por A. Monteiro [53], pero recién fue publicado en 1970, [74].

Teorema 2.6.2 *Toda álgebra de Łukasiewicz es un álgebra de Heyting trivalente.*

Dem. Como $\downarrow a \Rightarrow b = \Delta \sim a \Rightarrow b = \nabla a \vee b \vee (\nabla a \wedge \nabla b) = \nabla a \vee b$
y

$$\begin{aligned}
 (b \Rightarrow a) \Rightarrow b &= (\Delta \sim b \vee a \vee (\nabla \sim b \wedge \nabla a)) \Rightarrow b = \\
 \Delta \sim (\Delta \sim b \vee a \vee (\nabla \sim b \wedge \nabla a)) \vee b \vee (\nabla \sim (\Delta \sim b \vee a \vee (\nabla \sim b \wedge \nabla a)) \wedge \nabla b) &= \\
 (\nabla b \wedge \Delta \sim a \wedge (\Delta b \vee \Delta \sim a)) \vee b \vee (\nabla b \wedge \nabla \sim a \wedge (\Delta b \vee \Delta \sim a) \wedge \nabla b) &= \\
 (\nabla b \wedge \Delta \sim a) \vee b \vee (\nabla b \wedge \nabla \sim a \wedge (\Delta b \vee \Delta \sim a)) &= \\
 (\nabla b \wedge \Delta \sim a) \vee b \vee (\nabla b \wedge \nabla \sim a \wedge \Delta b) \vee (\nabla b \wedge \nabla \sim a \wedge \Delta \sim a) &= \\
 (\nabla b \wedge \Delta \sim a) \vee b \vee (\Delta b \wedge \nabla \sim a) \vee (\nabla b \wedge \Delta \sim a) &= \\
 (\nabla b \wedge \Delta \sim a) \vee b \vee (\Delta b \wedge \nabla \sim a) &=
 \end{aligned}$$

y como $\Delta b \wedge \nabla \sim a \leq \Delta b \leq b$ tenemos que

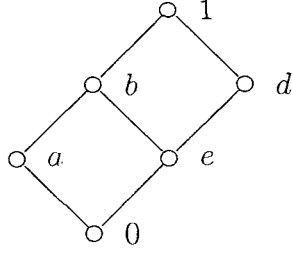
$$(b \Rightarrow a) \Rightarrow b = (\nabla b \wedge \Delta \sim a) \vee b,$$

entonces

$$\begin{aligned} (\lceil a \implies b \rceil \wedge ((b \implies a) \implies b) &= (\nabla a \vee b) \wedge ((\nabla b \wedge \Delta \sim a) \vee b) = \\ &= (\nabla a \wedge \nabla b \wedge \Delta \sim a) \vee b = (\nabla a \wedge \sim \nabla a \wedge \nabla b) \vee b = 0 \vee b = b, \end{aligned}$$

lo que demuestra que se verifica (T3). ■

Dada el álgebra de Łukasiewicz indicada en el Ejemplo 2.3.1 a saber:



x	$\sim x$	∇x
0	1	0
a	d	a
b	e	1
d	a	d
e	b	d
1	0	1

$\implies$	0	a	b	d	e	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	1	d	d	1
b	0	a	1	d	d	1
d	a	a	b	1	b	1
e	a	a	1	1	1	1
1	0	a	b	d	e	1

El subconjunto $L' = \{0, b, 1\}$ es cerrado con respecto a las operaciones $\wedge, \vee, \implies, \lceil \rceil$ y no es cerrado con respecto a $\sim$, por lo tanto en general la operación $\sim$ no se puede expresar en función de las operaciones $\wedge, \vee, \implies, \lceil \rceil$. Este ejemplo fué indicado por A. Monteiro en su seminario de 1963 y propuso, durante el mismo, caracterizar las álgebras de Łukasiewicz por medio de los conectivos $\wedge, \vee, \implies, \sim$. Este problema fué resuelto ese mismo año por L. Monteiro, quien utilizó para ello la teoría de los filtros primos. Luego el Profesor A. Monteiro (ver [61]), puso el problema de obtener el mismo resultado de una forma puramente algebraica y L. Monteiro obtuvo el siguiente resultado en 1969, [74].

Teorema 2.6.3 *Si en un sistema $(L, 1, \sim, \vee, \wedge, \implies)$ que verifica los axiomas:*

- 1) $x \implies x = 1$,
- 2) $(x \implies y) \wedge y = y$,
- 3) $x \implies (y \wedge z) = (x \implies y) \wedge (x \implies z)$,
- 4) $x \wedge (x \implies y) = x \wedge y$,
- 5) $(x \vee y) \implies z = (x \implies z) \wedge (y \implies z)$,
- 6) $((x \implies z) \implies y) \implies (((y \implies x) \implies y) \implies y) = 1$,
- 7) $\sim \sim x = x$,
- 8) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$,
- 9) $(x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y) = x \wedge \sim x$,

ponemos por definición D) $\nabla x = \sim x \implies x$, entonces el sistema $(L, 1, \sim, \nabla, \vee, \wedge)$ es un álgebra de Łukasiewicz y además

$$a \implies b = \Delta \sim a \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b).$$

Como las álgebras de Łukasiewicz son álgebras de Heyting entonces, ver por ejemplo [90], pág. 55 podemos afirmar que

Teorema 2.6.4 Si en un álgebra de Łukasiewicz L existe $\bigvee_{i \in I} y_i$ entonces existe $\bigvee_{i \in I} (x \wedge y_i)$ y además

$$(D) \quad x \wedge \bigvee_{i \in I} y_i = \bigvee_{i \in I} (x \wedge y_i).$$

Vamos a indicar una demostración de la fórmula (D) que no presupone el conocimiento de la teoría de las álgebras de Heyting y que fué indicada por L. Monteiro, [77].

Sea $y = \bigvee_{i \in I} y_i$, luego de $y_i \leq y$ para todo $i \in I$ resulta que

$$(S1) \quad x \wedge y_i \leq x \wedge y \text{ para todo } i \in I.$$

Probemos que:

$$(S2) \quad \text{Si } t \text{ verifica (1) } x \wedge y_i \leq t \text{ para todo } i \in I \text{ entonces } x \wedge y \leq t.$$

Para ello nos basta probar, utilizando el principio de determinación de Moisil que

$$\Delta(x \wedge y) \leq \Delta t \quad \text{y} \quad \nabla(x \wedge y) \leq \nabla t.$$

esto es que

$$\Delta x \wedge \Delta y \leq \Delta t \tag{2}$$

y

$$\nabla x \wedge \nabla y \leq \nabla t \tag{3}$$

De (1) resulta que

$$\nabla \sim x \vee y_i = \nabla \sim x \vee (x \wedge y_i) \leq \nabla \sim x \vee t, \text{ para todo } i \in I$$

luego $y_i \leq \nabla \sim x \vee y_i \leq \nabla \sim x \vee t$, para todo $i \in I$ y en consecuencia

$$y = \bigvee_{i \in I} y_i \leq \nabla \sim x \vee t$$

y por lo tanto

$$\Delta x \wedge y \leq \Delta x \wedge (\nabla \sim x \vee t) = \Delta x \wedge t \leq t,$$

Luego $\Delta x \wedge \Delta y = \Delta(\Delta x \wedge y) \leq \Delta t$, lo que prueba (2).

De (1) resulta que

$$\nabla x \wedge \nabla y_i \leq \nabla t, \text{ para todo } i \in I$$

luego

$$\nabla \sim x \vee \nabla y_i = \sim \nabla x \vee (\nabla x \wedge \nabla y_i) \leq \sim \nabla x \vee \nabla t, \text{ para todo } i \in I$$

y por lo tanto

$$y_i \leq \nabla y_i \leq \sim \nabla x \vee \nabla y_i \leq \sim \nabla x \vee \nabla t, \text{ para todo } i \in I,$$

luego $y = \bigvee_{i \in I} y_i \leq \sim \nabla x \vee \nabla t$ y por lo tanto $\nabla x \wedge y \leq \nabla x \wedge (\sim \nabla x \vee \nabla t) = \nabla x \wedge \nabla t \leq \nabla t$

luego $\nabla x \wedge \nabla y = \nabla(\nabla x \wedge y) \leq \nabla t$, lo que prueba (3).

De (S1) y (S2) resulta:

$$\bigvee_{i \in I} (x \wedge y_i) = x \wedge \bigvee_{i \in I} y_i.$$

2.7 La definición de Moisil

Como dijimos anteriormente el concepto de álgebra de Łukasiewicz fue introducido por Gr. Moisil en sus trabajos de 1940 [43], y 1941 [44], e indicó una simplificación de su definición en 1960 [47] que vamos a indicar a continuación.

Definición 2.7.1 *Un álgebra de Łukasiewicz trivalente es un sistema $(L, 1, \sim, \nabla, \vee, \wedge)$ formado por 1) un conjunto no vacío L ; 2) un elemento $1 \in L$; 3) dos operaciones unarias $\sim$ y ∇ definidas sobre L ; 4) dos operaciones binarias $\vee$ y $\wedge$, definidas sobre L de modo que se verifiquen las siguientes condiciones:*

I) $(L, 0, 1, \wedge, \vee)$ es un reticulado distributivo con primer y último elemento, esto es

$$\text{M0)} \quad 0 \wedge x = 0, \text{ cualquiera que sea } x \in L,$$

$$\text{M1)} \quad 1 \vee x = 1, \text{ cualquiera que sea } x \in L,$$

$$\text{M2)} \quad x \wedge (x \vee y) = x, \text{ cualesquiera que sean } x, y \in L,$$

$$\text{M3)} \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \text{ cualesquiera que sean } x, y, z \in L,$$

II) Además

$$\text{M4)} \quad \sim(x \vee y) = \sim x \wedge \sim y, \text{ cualesquiera que sean } x, y \in L,$$

$$\text{M5)} \quad \sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y, \text{ cualesquiera que sean } x, y \in L,$$

$$\text{M6)} \quad \sim \sim x = x, \text{ cualquiera que sea } x \in L,$$

$$\text{M7)} \quad \nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y, \text{ cualesquiera que sean } x, y \in L.$$

$$\text{M8)} \quad \nabla(x \vee y) = \nabla x \vee \nabla y, \text{ cualesquiera que sean } x, y \in L.$$

$$\text{M9)} \quad x \wedge \nabla x = x, \text{ cualquiera que sea } x \in L.$$

$$\text{M10)} \quad \nabla \nabla x = \nabla x, \text{ cualquiera que sea } x \in L.$$

$$\text{M11)} \quad \sim \nabla \sim x = \nabla x, \text{ cualquiera que sea } x \in L.$$

$$\text{M12)} \quad \sim x \wedge x = \sim x \wedge \nabla x, \text{ cualquiera que sea } x \in L,$$

$$\text{M13)} \quad \sim \nabla \sim x \vee (\nabla x \wedge \nabla \sim x) \vee \sim \nabla x = 1, \text{ cualquiera que sea } x \in L.$$

En 1.1 probamos que si adoptamos la definición 2.1.1 entonces todos los axiomas de $\mathbf{M0}$ a $\mathbf{M13}$ se verifican. Para probar la equivalencia de las dos definiciones como los axiomas $\mathbf{L1}$ a $\mathbf{L5}$ y $\mathbf{L7}$, $\mathbf{L8}$ figuran en la definición de Moisil nos basta probar que se verifica el axioma $\mathbf{L6}$, esto es que $\sim x \vee \nabla x = 1$. De $\mathbf{M4}$ resulta claramente que:

$$\text{Si } x \leq y \text{ entonces } \sim y \leq \sim x. \quad (1)$$

Probemos que

$$\sim \nabla \sim x \leq x. \quad (2)$$

En efecto por $\mathbf{M9}$ tenemos que $y \leq \nabla y$ cualquiera que sea $y \in L$, luego $\sim x \leq \nabla \sim x$ luego por (1) y $\mathbf{M6}$: $\sim \nabla \sim x \leq \sim \sim x = x$.

Por (2) y $\mathbf{M9}$ resulta que

$$\sim \nabla \sim x \leq x \leq \nabla x. \quad (3)$$

Teniendo en cuenta M11, entonces M13 se puede escribir

$$\nabla x \vee (\nabla x \wedge \nabla \sim x) \vee \sim \nabla x = 1,$$

luego

$$\nabla x \vee \sim \nabla x = 1. \quad (4)$$

De (2) y M13 resulta que

$$x \vee (\nabla x \wedge \nabla \sim x) \vee \sim \nabla x = 1$$

esto es

$$(x \vee \sim \nabla x \vee \nabla x) \wedge (x \vee \sim \nabla x \vee \nabla \sim x) = 1$$

luego por (4)

$$x \vee \sim \nabla x \vee \nabla \sim x = 1. \quad (5)$$

Reemplazando x por $\sim x$ en (3) tenemos que $\sim \nabla x \leq \nabla \sim x$ y por lo tanto tenemos finalmente que $\sim x \vee \nabla x = 1$, lo que termina de probar la equivalencia de las dos definiciones.

2.8 Nuevos Ejemplos

Recordemos la siguiente definición: Un par $(B, \exists)$ formado por un álgebra de Boole B y un operador unario $\exists$, denominado cuantificador existencial, definido sobre B se dice un álgebra de Boole monádica [34, 35], [65] si se verifican:

$$E0) \exists 0 = 0,$$

$$E1) x \wedge \exists x = x,$$

$$E2) \exists(x \wedge \exists y) = \exists x \wedge \exists y.$$

Es bien conocido que en toda álgebra de Boole monádica se verifican:

$$E3) \exists 1 = 1,$$

$$E4) \exists \exists x = \exists x,$$

$$E5) \text{ Si } x \leq y \text{ entonces } \exists x \leq \exists y.$$

En las álgebras de Boole monádicas se denomina cuantificador universal al operador definido por $\forall x = -\exists -x$, donde $-x$ es el complemento booleano de x .

Se plantea el problema de saber si existen álgebras de Łukasiewicz cuyos elementos son subconjuntos de un conjunto dado.

Ejemplo 2.8.1 Sea I un conjunto, no vacío, y φ una involución de I , esto es una función de I en I que verifica $\varphi(\varphi(x)) = x$ para todo $x \in I$. Claramente φ es una biyección que verifica $\varphi^{-1} = \varphi$. Sabemos que $(\mathcal{P}(I), I, \mathbb{C}, \cap, \cup)$ es un álgebra de Boole.

Definamos sobre $\mathcal{P}(I)$ un operador ∇ del siguiente modo:

- (1) $\nabla\emptyset = \emptyset$,
- (2) Si $i \in I$ entonces $\nabla\{i\} = \{i, \varphi(i)\}$,
- (3) Si $X \in \mathcal{P}(I)$, $X \neq \emptyset$ entonces $\nabla X = \bigcup_{i \in X} \nabla\{i\}$.

Observemos que $\nabla\{i\} = \nabla\{\varphi(i)\}$ y que si $X \in \mathcal{P}(I)$ entonces $\nabla X = \bigcup_{i \in X} \{i, \varphi(i)\} = \bigcup_{i \in X} \{i\} \cup \bigcup_{i \in X} \{\varphi(i)\} = X \cup \varphi(X)$.

El operador ∇ tiene las siguientes propiedades:

- (4) $X \subseteq \nabla X$, para todo $X \in \mathcal{P}(I)$.
 $\nabla X = X \cup \varphi(X) \supseteq X$.
- (5) $\nabla(X \cap \nabla Y) = \nabla X \cap \nabla Y$, cualesquiera que sean $X, Y \in \mathcal{P}(I)$.
 $\nabla(X \cap \nabla Y) = (X \cap \nabla Y) \cup \varphi(X \cap \nabla Y) = (X \cap \nabla Y) \cup \varphi(X \cap (Y \cup \varphi(Y))) =$
 $(X \cap \nabla Y) \cup (\varphi(X) \cap (\varphi(Y) \cup Y)) = (X \cap \nabla Y) \cup (\varphi(X) \cap \nabla Y) = (X \cup \varphi(X)) \cap \nabla Y =$
 $\nabla X \cap \nabla Y$.

De (1), (4) y (5) resulta que $(\mathcal{P}(I), \nabla)$ es un álgebra de Boole monádica.

Para cada $X \in \mathcal{P}(I) = 2^I$ pongamos $\sim X = \mathbb{C}\varphi(X)$. Como φ es una biyección de E , entonces:

- (6) $\varphi(\mathbb{C}X) = \mathbb{C}\varphi(X)$, para todo $X \in 2^I$.
- (7) $\varphi(X \cap Y) = \varphi(X) \cap \varphi(Y)$, cualesquiera que sean $X, Y \in 2^I$.
- (8) $\varphi(X \cup Y) = \varphi(X) \cup \varphi(Y)$, cualesquiera que sean $X, Y \in 2^I$.

Luego, ver por ejemplo [14], [66], es bien conocido que:

- (9) $\sim \sim X = X$, para todo $X \in 2^I$.
- (10) $\sim (X \cap Y) = \sim X \cup \sim Y$, cualesquiera que sean $X, Y \in 2^I$.
- (11) $\sim I = \emptyset$.

Por lo tanto el sistema $(2^I, \cap, \cup, \sim, I)$ es un álgebra de De Morgan.

Probemos que el operador ∇ verifica los Axiomas L6 y L7.

L6) $\sim X \cup \nabla X = I$, cualquiera que sea $X \in \mathcal{P}(I)$.

En efecto $\nabla X = \bigcup_{i \in X} \nabla\{i\} = \bigcup_{i \in X} (\{i\} \cup \{\varphi(i)\}) = \bigcup_{i \in X} \{i\} \cup \bigcup_{i \in X} \{\varphi(i)\} = X \cup \varphi(X)$. Luego $\sim X \cup \nabla X = \mathbb{C}\varphi(X) \cup X \cup \varphi(X) = I$.

L7) $X \cap \sim X = \sim X \cap \nabla X$, cualquiera que sea $X \in \mathcal{P}(I)$.

$\sim X \cap \nabla X = \mathbb{C}\varphi(X) \cap (X \cup \varphi(X)) = (\mathbb{C}\varphi(X) \cap X) \cup (\mathbb{C}\varphi(X) \cap \varphi(X)) = (\mathbb{C}\varphi(X) \cap X) \cup \emptyset = \mathbb{C}\varphi(X) \cap X = \sim X \cap X$.

Para que el sistema $(\mathcal{P}(I), I, \sim, \nabla, \cap, \cup)$ sea un álgebra de Łukasiewicz es necesario y suficiente que se verifique:

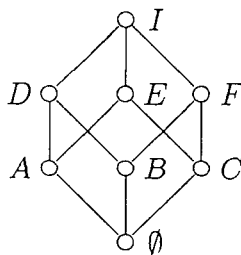
L8) $\nabla(X \cap Y) = \nabla X \cap \nabla Y$, cualesquiera que sean $X, Y \in \mathcal{P}(I)$.

Vamos a probar que se verifica L8 si y sólo si $\varphi(i) = i$ para todo $i \in I$, y por lo tanto en este caso $\sim X = \complement X$ y $\nabla X = X \cup \varphi(X) = X$ cualquiera que sea $X \in \mathcal{P}(I)$, entonces $(\mathcal{P}(I), \nabla)$ es un álgebra de Boole monádica con cuantificador discreto.

Supongamos que existe $i \in I$ tal que $j = \varphi(i) \neq i$ entonces $\nabla(\{i\} \cap \{j\}) = \nabla \emptyset = \emptyset$, $\nabla\{i\} = \{i\} \cup \{\varphi(i)\} = \{i\} \cup \{j\} = \{i, j\}$ y $\nabla\{j\} = \{j\} \cup \{\varphi(j)\} = \{j\} \cup \{i\} = \{i, j\}$. Luego $\nabla\{i\} \cap \nabla\{j\} = \{i, j\} \neq \emptyset$ y por lo tanto no se verifica L8. Supongamos ahora que $\varphi(i) = i$ cualquiera que sea $i \in I$ entonces es claro que se verifica L8.

Por lo tanto el sistema $(\mathcal{P}(I), I, \sim, \nabla, \cap, \cup)$ no es en general un álgebra de Łukasiewicz, pero pueden existir subconjuntos S de $\mathcal{P}(I)$ tales que $(S, I, \sim, \nabla, \cap, \cup)$ es un álgebra de Łukasiewicz. Por ejemplo sea $I = \{a, b, c\}$ y $\varphi : I \rightarrow I$ definida por $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = c$, $\varphi(c) = b$.

$\mathcal{P}(I)$ es un álgebra de Boole con 3 átomos cuyo diagrama indicamos a continuación, donde $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \{c\}$, $D = \{a, b\}$, $E = \{a, c\}$, $F = \{b, c\}$.



X	$\sim X$	∇X
$\emptyset$	I	$\emptyset$
A	F	A
B	D	F
C	E	F
D	B	I
E	C	I
F	A	F
I	$\emptyset$	I

Como φ no es la identidad entonces $\mathcal{P}(I)$ no es un álgebra de Łukasiewicz pero se verifica sin dificultad que el subconjunto $S = \{\emptyset, A, C, E, F, I\}$ es un álgebra de Łukasiewicz.

Definición 2.8.1 Si I es un conjunto, no vacío, φ una involución de I , y para cada $X \in \mathcal{P}(I)$ definimos los operadores $\sim$ y ∇ del modo indicado anteriormente entonces a todo subconjunto S de $\mathcal{P}(I)$ tal que $(S, I, \sim, \nabla, \cap, \cup)$ es un álgebra de Łukasiewicz, daremos el nombre de álgebra de Łukasiewicz de conjuntos determinada por φ ó mas sencillamente álgebra de Łukasiewicz de conjuntos.

Este ejemplo de álgebra de Łukasiewicz es el más general, pues probaremos mas adelante que toda álgebra de Łukasiewicz es isomorfa a un álgebra de Łukasiewicz de conjuntos.

Observación 2.8.1 Considerar el álgebra de Boole $\mathcal{P}(I)$ es lo mismo que considerar el conjunto B^I de todas las funciones de I en el álgebra de Boole $B = \{0, 1\}$, que algebrizado punto a punto es un álgebra de Boole cuyo último elemento es la función $\mathbf{1}(i) = 1$ para todo $i \in I$. Dada $f \in B^I$ si definimos $(\nabla f)(i) = f(i) \vee f(\varphi(i))$, para todo $i \in I$, entonces se prueba sin dificultad que (B^I, ∇) es un álgebra de Boole monádica.

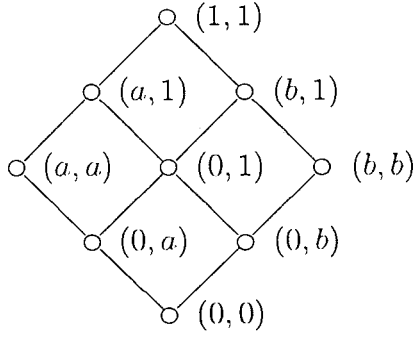
Dada $f \in B^I$ definiendo $(\sim f)(i) = \neg(f(\varphi(i)))$ para todo $i \in I$ entonces $(B^I, \mathbf{1}, \sim, \wedge, \vee)$ es un álgebra de De Morgan. Es fácil ver que se verifican los axiomas L6 y L7. Si $\varphi(i) = j \neq i$, consideremos los siguientes elementos de B^I :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = i \\ 0, & \text{si } x \neq i \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = \varphi(i) = j \\ 0, & \text{si } x \neq \varphi(i) \end{cases}$$

Entonces $(f \wedge g)(x) = 0$ para todo $x \in I$ y por lo tanto $(\nabla(f \wedge g))(x) = 0$ para todo $x \in I$. Por otro lado $(\nabla f \wedge \nabla g)(x) = 1$ para $x = i$ ó $x = j$, luego en general no se verifica que $\nabla(f \wedge g) = \nabla f \wedge \nabla g$.

Ejemplo 2.8.2 Este ejemplo fue indicado por Gr. C. Moisil. Sean K y $B = \{0, 1\}$ álgebras de Boole y $F = K^{[B]}$ el conjunto de todas las funciones isótonas de B en K . Cada elemento $f \in K^{[B]}$ se puede representar del siguiente modo $f = (f(0), f(1))$. Pongamos por definición $\sim f = (-f(1), -f(0))$ y $\nabla f = (f(1), f(1))$. Se verifica sin dificultad que $(K^{[B]}, 1, \sim, \nabla, \wedge, \vee)$ es un álgebra de Łukasiewicz.

Sea $K = \{0, a, b, 1\}$ un álgebra de Boole con dos átomos a y b . Los elementos de $K^{[B]}$, los operadores $\sim, \nabla$ y el diagrama de Hasse se indican a continuación:



f	$\sim f$	∇f
$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(0, 0)$
$(0, a)$	$(b, 1)$	(a, a)
$(0, b)$	$(a, 1)$	(b, b)
$(0, 1)$	$(0, 1)$	$(1, 1)$
(a, a)	(b, b)	(a, a)
(b, b)	(a, a)	(b, b)
$(a, 1)$	$(0, b)$	$(1, 1)$
$(b, 1)$	$(0, a)$	$(1, 1)$
$(1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$

Esta misma construcción fue considerada por A. Rose en *A lattice-theoretic characterization of three-valued logic*, J. London Math. Soc. 25 (1950), 225-259.

2.9 3-anillos

Sea $A = \{0, 1, 2\}$ el anillo de los enteros módulo 3, entonces las tablas de $+$ y $\cdot$ son

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	1
2	2	0	2

Por lo tanto este anillo verifica (i) $3x = 0$, (ii) $x^3 = x$ y (iii) $xy = yx$. En virtud de la condición (ii) resulta que todo polinomio de dos variables es de la forma

$$P(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy + gx^2y + hxy^2 + ix^2y^2.$$

Vamos a tratar de definir operaciones de ínfimo y supremo sobre el conjunto A de forma tal de transformar A en la cadena indicada en la siguiente figura, entonces $\wedge$ y $\vee$ están dadas por las tablas siguientes:

○ 1	<table><tr><td>∧</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td></tr></table>	∧	0	2	1	0	0	0	0	2	0	2	2	1	0	2	1	<table><tr><td>∨</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	∨	0	2	1	0	0	2	1	2	2	2	1	1	1	1	1
∧	0	2	1																															
0	0	0	0																															
2	0	2	2																															
1	0	2	1																															
∨	0	2	1																															
0	0	2	1																															
2	2	2	1																															
1	1	1	1																															
○ 2																																		
○ 0																																		

Para determinar las operaciones de ínfimo debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$0 \wedge 0 = 0 = P(0, 0) = a, \quad (1)$$

$$0 \wedge 2 = 0 = P(0, 2) = a + 2c + e, \quad (2)$$

$$0 \wedge 1 = 0 = P(0, 1) = a + c + e, \quad (3)$$

$$2 \wedge 0 = 0 = P(2, 0) = a + 2b + d, \quad (4)$$

$$2 \wedge 2 = 2 = P(2, 2) = a + 2b + 2c + d + e + f + 2g + 2h + i, \quad (5)$$

$$2 \wedge 1 = 2 = P(2, 1) = a + 2b + c + d + e + 2f + g + 2h + i, \quad (6)$$

$$1 \wedge 0 = 0 = P(1, 0) = a + b + d, \quad (7)$$

$$1 \wedge 2 = 2 = P(1, 2) = a + b + 2c + d + e + 2f + 2g + h + i, \quad (8)$$

$$1 \wedge 1 = 1 = P(1, 1) = a + b + c + d + f + g + h + i. \quad (9)$$

Por (1) tenemos $a = 0$ luego reemplazando en las ecuaciones (2)-(7) tenemos:

$$0 = 2c + e, \quad (10)$$

$$0 = c + e, \quad (11)$$

$$0 = 2b + d, \quad (12)$$

$$2 = 2b + 2c + d + e + f + 2g + 2h + i, \quad (13)$$

$$2 = 2b + c + d + e + 2f + g + 2h + i, \quad (14)$$

$$0 = b + d, \quad (15)$$

$$2 = b + 2c + d + e + 2f + 2g + h + i, \quad (16)$$

$$1 = b + c + d + f + g + h + i. \quad (17)$$

Sumando (10) y (11) tenemos $3c + 2e = 0$ esto es $2e = 0$ y por lo tanto $e = 0$. Luego de (11) resulta $c = 0$. Análogamente sumando (12) y (15) tenemos $3b + 2d = 0$ y por lo tanto $2b = 0$ y en consecuencia $d = 0$, luego por (15) resulta que $b = 0$.

Reemplazando estos valores en (13), (14), (16) y (17) tenemos

$$2 = f + 2g + 2h + i, \quad (18)$$

$$2 = 2f + g + 2h + i, \quad (19)$$

$$2 = 2f + 2g + h + i, \quad (20)$$

$$1 = f + g + h + i. \quad (21)$$

Sumando (19) y (21) obtenemos $2g + 2i = 0$ y por lo tanto:

$$0 = g + i. \quad (22)$$

Sumando (18) y (21) obtenemos $2f + 2i = 0$ y por lo tanto:

$$0 = f + i. \quad (23)$$

Sumando (20) y (21) obtenemos $2h + 2i = 0$ y por lo tanto:

$$0 = h + i. \quad (24)$$

De (24) y (21) obtenemos:

$$1 = f + g. \quad (25)$$

De las ecuaciones (22), (23) y (24) resulta que $i = -g$, $i = -f$ e $i = -h$. Por lo tanto $g = f = h$. Luego de (25) resulta $1 = f + g = f + f = 2f$ y por lo tanto $f = 2$ y en consecuencia $h = g = 2$.

Reemplazando en (21) tenemos $1 = 2 + 2 + 2 + i$ y por lo tanto $i = 1$. Obtenemos así

$$(I) \quad x \wedge y = 2xy + 2x^2y + 2xy^2 + x^2y^2 = 2xy + 2xy(x + y) + x^2y^2.$$

Análogamente obtenemos:

$$(S) \quad x \vee y = x + y + xy + x^2y + xy^2 + 2x^2y^2.$$

Efectuando los cálculos correspondientes tenemos que:

$$(x \wedge y)^2 = x^2y^2 = (xy)^2$$

y

$$(x \vee y)^2 = (x^2 + y^2)^2 = x^2 + 2x^2y^2 + y^2.$$

Por la manera en que fueron definidas las operaciones $\wedge$ y $\vee$ sobre A podemos afirmar que A es un reticulado distributivo dado que A es una cadena.

Vamos a definir dos operaciones unarias en A en forma tal que A sea “igual” al álgebra de Łukasiewicz indicada en el Ejemplo 2.2.1. Todo polinomio de una variable es de la forma $P(x) = a + bx + cx^2$. Luego si Q es el polinomio que le corresponde a $\sim$ se deben verificar:

$$1 = Q(0) = a \quad (2)$$

$$2 = Q(2) = a + 2b + 2^2c = a + 2b + c = 1 + 2b + c \quad (3)$$

$$0 = Q(1) = a + b + c = 1 + b + c \quad (4)$$

De (3) y (4) resulta que $2 = 2 + 3b + 2c$ y por lo tanto $3b + 2c = 0$ esto es $2c = 0$ y en consecuencia $c = 0$. Luego reemplazando en (4) tenemos $0 = 1 + b + 0 = 1 + b$ y por lo tanto $b = -1 = 2$. Luego (II) $\sim x = 2x + 1$.

Si R es el polinomio que le corresponde a ∇ se deben verificar:

$$0 = R(0) = a \quad (5)$$

$$1 = R(2) = a + 2b + 2^2c = a + 2b + c = 2b + c \quad (6)$$

$$1 = R(1) = a + b + c = b + c \quad (7)$$

De (6) y (7) resulta que $2 = 3b + 2c$ esto es $2 = 2c$ y por lo tanto $c = 1$, luego de (7) resulta $1 = 1 + b$ y por lo tanto $b = 0$. Luego (III) $\nabla x = x^2$.

Vamos a probar que $\sim$ y ∇ verifican los axiomas de las álgebras de Łukasiewicz:

$$A4) \sim \sim x = x.$$

$$\sim \sim x = \sim (1 + 2x) = 1 + 2(1 + 2x) = 1 + 2 + x = x.$$

$$A5) \sim x \vee \sim y = \sim (x \wedge y).$$

$$\sim (x \wedge y) = 1 + 2(x \wedge y) = 1 + 2(2xy + 2x^2y + 2xy^2 + x^2y^2) =$$

$$1 + xy + x^2y + xy^2 + 2x^2y^2.$$

$$\begin{aligned} \sim x \vee \sim y &= (1+2x) \vee (1+2y) = 1+2x+1+2y+(1+2x)(1+2y)+(1+x+x^2)(1+2y)+ \\ &+ (1+2x)(1+y+y^2) + 2(1+x+x^2)(1+y+y^2) = 2+2x+2y+1+2y+2x+xy+ \\ &+ 1+2y+x+2xy+x^2+2x^2y+1+y+y^2+2x+2xy+2xy^2+2+2y+2y^2+2x+ \\ &+ 2xy+2xy^2+2x+2x^2y+2x^2y^2 = 1+xy+x^2y+xy^2+2x^2y^2 = \\ &7+9x+9y+7xy+3x^2+3y^2+4xy^2+4x^2y+2x^2y^2 = 1+xy+x^2y+xy^2+2x^2y^2. \end{aligned}$$

$$A6) \sim x \vee \nabla x = 1.$$

$$\begin{aligned} \sim x \vee \nabla x &= (1+2x) \vee x^2 = 1+2x+x^2+x^2+2x+(1+x+x^2)x^2+(1+2x)x^2+ \\ &+ 2(1+x+x^2)x^2 = 1+x+2x^2+2x+2x^2+2x^2 = 1. \end{aligned}$$

$$A7) \sim x \wedge x = \sim x \wedge \nabla x.$$

$$\begin{aligned} \sim x \wedge x &= 2(1+2x)x + 2(1+x+x^2)x + 2(1+2x)x^2 + (1+x+x^2)x^2 = 2x+x^2+ \\ &+ 2x+2x^2+2x+2x^2+x+x^2+x+x^2 = 2x^2+x^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sim x \wedge \nabla x &= (1+2x) \wedge x^2 = 2(1+2x)x^2 + 2(1+x+x^2)x^2 + 2(1+2x)x^2 + (1+x+x^2)x^2 = \\ &2x^2+x+2x^2+2x+2x^2+2x^2+x+x^2+x+x^2 = 2x+x^2. \end{aligned}$$

$$A8) \nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y.$$

$$\text{Sabemos que } (x \wedge y)^2 = x^2y^2 \text{ luego } \nabla(x \wedge y) = (x \wedge y)^2 = x^2y^2.$$

$$\nabla x \wedge \nabla y = x^2 \wedge y^2 = 2x^2y^2 + 2x^2y^2 + 2x^2y^2 + x^2y^2 = x^2y^2$$

Además 2 es el centro de A pues $\sim 2 = 2.2 + 1 = 1 + 1 = 2$.

Sea $(A, +, \cdot, 1)$ un anillo conmutativo con unidad. Con 0 notaremos el elemento neutro con respecto a la operación "+". Notaremos xy en vez de $x \cdot y$. Un anillo A , conmutativo con unidad (1) que verifica $3x = 0$ y $x^3 = x$, cualquiera que sea $x \in A$, se denomina un 3-anillo.

Teorema 2.9.1 (Gr. C. Moisil) *Si A es un 3-anillo, entonces definiendo las operaciones $\wedge, \vee, \sim$ y ∇ sobre A por las fórmulas (I), (S), (II) y (III) indicadas precedentemente, el sistema $(A, 1, \sim, \nabla, \wedge, \vee)$, es un álgebra de Łukasiewicz centrada.*

Dem. Para ello vamos a probar que se verifican los axiomas de Sholander [94]:

$$(S1) \quad x \wedge (x \vee y) = 2x(x \vee y) + 2x^2(x \vee y) + 2x(x \vee y)^2 + x^2(x \vee y)^2.$$

$$(i) \quad 2x(x \vee y) = 2x(x+y+xy+xy(x+y)+2x^2y^2) = 2x^2+2xy+2x^2y+2x^3y+2x^2y^2+x^3y^2 = 2x^2+xy+xy^2+2x^2y+2x^2y^2.$$

$$(ii) \quad 2x^2(x \vee y) = 2x^2(x+y+xy+xy(x+y)+2x^2y^2) = 2x^3+2x^2y+2x^3y+2x^2y+2x^3y^2+x^2y^2 = 2x+2xy+2xy^2+x^2y+x^2y^2.$$

$$\text{De (i) e (ii) resulta (iii) } 2x(x \vee y)^2 + 2x^2(x \vee y) = 2x + 2x^2.$$

$$(iv) \quad 2x(x \vee y)^2 = 2x(x^2+y^2+2x^2y^2) = 2x^3+2xy^2+xy^2 = 2x.$$

$$(v) \quad x^2(x \vee y)^2 = x^2(x^2+y^2+2x^2y^2) = x^2+x^2y^2+2x^2y^2 = x^2.$$

De (iii), (iv) y (v) resulta:

$$x \wedge (x \vee y) = 2x + 2x^2 + 2x + x^2 = x.$$

$$(S2) \quad x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x).$$

$$\begin{aligned}
x \wedge (y \vee z) &= 2x(y \vee z) + 2x^2(y \vee z) + 2x(y \vee z)^2 + 2x^2(y \vee z)^2 = \\
&2x(y + z + yz + y^2z + yz^2 + 2y^2z^2) + 2x^2(y + z + yz + y^2z + yz^2 + 2y^2z^2) + \\
&2x(y^2 + z^2 + 2y^2z^2) + 2x^2(y^2 + z^2 + 2y^2z^2) = \\
&2xy + 2xz + 2xyz + 2xy^2z + 2xyz^2 + 2xy^2z^2 + 2x^2y + 2x^2z + 2x^2yz + 2x^2y^2z + 2x^2y^2z^2 + \\
&x^2y^2z^2 + 2xy^2 + 2xz^2 + xy^2z^2 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + x^2y^2z^2 = 2xy + 2xz + 2xy^2 + 2xz^2 + x^2y^2 + \\
&x^2z^2 + 2x^2y + 2x^2z + 2xyz + 2xyz^2 + 2xy^2z + 2xy^2z^2 + 2x^2yz + 2x^2y^2z + 2x^2yz^2. \\
(z \wedge x) \vee (y \wedge x) &= (z \wedge x) + (y \wedge x) + (z \wedge x)(y \wedge x) + (z \wedge x)^2(y \wedge x) + \\
&(z \wedge x)(y \wedge x)^2 + 2(z \wedge x)^2(y \wedge x)^2. \\
\text{(i) } z \wedge x &= 2xz + 2xz^2 + 2x^2z + x^2z^2, \\
\text{(ii) } y \wedge z &= 2xy + 2xy^2 + 2x^2y + x^2y^2, \\
\text{(iii) } (z \wedge x)(y \wedge x) &= 2xyz + xy^2z^2 + 2x^2yz + 2x^2y^2z^2, \\
\text{(iv) } (z \wedge x)^2(y \wedge x) &= 2xyz^2 + 2xy^2z^2 + 2x^2yz^2 + x^2y^2z^2, \\
\text{(v) } (z \wedge x)(y \wedge x)^2 &= 2xy^2z + 2xy^2z^2 + 2x^2y^2z + x^2y^2z^2, \\
\text{(vi) } (z \wedge x)^2(y \wedge x)^2 &= 2x^2y^2z^2, \text{ luego de (i) a (vi) resulta que:} \\
(z \wedge x) \vee (y \wedge x) &= 2xy + 2xz + 2xy^2 + 2xz^2 + x^2y^2 + x^2z^2 + 2x^2y + 2x^2z + 2xyz + 2xyz^2 + \\
&2xy^2z + 2xy^2z^2 + 2x^2yz + 2x^2y^2z + 2x^2yz^2.
\end{aligned}$$

En forma análoga a la indicada anteriormente se prueban las propiedades A4 - A8.

Además poniendo $c = 1 + 1$ es el centro de A . ■

Teorema 2.9.2 Si $(A, 1, \sim, \nabla, \wedge, \vee)$, es un álgebra de Łukasiewicz con centro c y definimos:

$$\begin{aligned}
x + y &= (\sim \nabla x \wedge \Delta y) \vee (\sim \nabla y \wedge \Delta x) \vee (\nabla x \wedge \nabla y \wedge \nabla \sim x \wedge \nabla \sim y) \vee \\
&\left(c \wedge \left((\sim \nabla x \wedge \nabla y \wedge \nabla \sim y) \vee (\sim \nabla y \wedge \nabla x \wedge \nabla \sim x) \vee (\Delta x \wedge \Delta y) \right) \right), \\
x \cdot y &= (\Delta x \wedge \Delta y) \vee (\nabla x \wedge \nabla y \wedge \nabla \sim x \wedge \nabla \sim y) \vee \\
&\left(c \wedge \left((\Delta x \wedge \nabla y \wedge \nabla \sim y) \vee (\Delta y \wedge \nabla x \wedge \nabla \sim x) \right) \right)
\end{aligned}$$

entonces el sistema $(A, 1, 0, +, \cdot)$ es un 3-anillo. Moisil [44].

Si $(A, 1, 0, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad (1) tal que $x^3 = x$ entonces $6x = 0$.
En efecto:

$$x + y = (x + y)(x + y)(x + y) = xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy$$

luego

$$x + y = x + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + y$$

y por lo tanto

$$xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx = 0$$

entonces para $x = y$ tenemos que $x^3 + x^3 + x^3 + x^3 + x^3 + x^3 = 0$ esto es $6x = x + x + x + x + x + x = 0$, luego $-x = 5x$.

En forma similar a la indicada anteriormente se prueba que si en un anillo conmutativo con unidad que verifica $x^3 = x$ definimos:

$$(I) \quad x \wedge y = 2xy + 2x^2y + 2xy^2 + x^2y^2 = 2xy + 2xy(x + y) + x^2y^2$$

$$(S) \quad x \vee y = x + y + xy + x^2y + xy^2 + 2x^2y^2,$$

entonces $(A, 0, 1, \wedge, \vee)$ es un reticulado distributivo acotado.

Definiendo $\sim x = 1 + 5x$ y $\nabla x = x^2$ entonces $(A, 1, \sim, \nabla, \wedge, \vee)$, es un álgebra de Łukasiewicz: Además $e = 1 + 1$ es el eje del álgebra A .

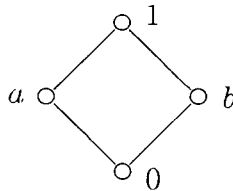
Teorema 2.9.3 Si $(A, 1, \sim, \nabla, \wedge, \vee)$, es un álgebra de Łukasiewicz con eje e y definimos:

$$\begin{aligned} x + y &= (\sim \nabla x \wedge \Delta y) \vee (\sim \nabla y \wedge \Delta x) \vee (\nabla x \wedge \nabla y \wedge \nabla \sim x \wedge \nabla \sim y) \vee \\ &\left(e \wedge \left((\sim \nabla x \wedge \nabla y \wedge \nabla \sim y) \vee (\sim \nabla y \wedge \nabla x \wedge \nabla \sim x) \vee (\Delta x \wedge \Delta y) \right) \right), \\ x \cdot y &= (\Delta x \wedge \Delta y) \vee (\nabla x \wedge \nabla y \wedge \nabla \sim x \wedge \nabla \sim y) \vee \\ &\left(e \wedge \left((\Delta x \wedge \nabla y \wedge \nabla \sim y) \vee (\Delta y \wedge \nabla x \wedge \nabla \sim x) \right) \right) \end{aligned}$$

entonces el sistema $(A, 1, 0, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad tal que $x^3 = x$, Moisil [44].

2.10 Construcción de Algebras de Łukasiewicz a partir de Algebras de Boole monádicas

En los párrafos anteriores hemos encontrado analogías entre las álgebras de Boole monádicas y las álgebras de Łukasiewicz, pero también existen diferencias fundamentales, así por ejemplo el principio de determinación de Moisil no vale en las álgebras de Boole monádicas. En efecto consideremos el álgebra de Boole monádica indicada en la siguiente figura:



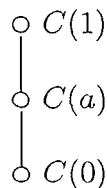
x	$\exists x$	$\forall x$
0	0	0
a	1	0
b	1	0
1	1	1

Entonces tenemos que $\exists a = \exists b = 1$, $\forall a = \forall b = 0$ y $a \neq b$.

Esto nos sugiere la idea de identificar dos elementos a y b de un álgebra de Boole monádica si se verifican:

$$\exists a = \exists b \text{ y } \forall a = \forall b,$$

y en este caso notaremos $a \equiv b$. Es claro que esta relación es una relación de equivalencia. En el ejemplo anterior existen tres clases de equivalencia, a saber $C(0) = \{0\}$, $C(a) = \{a, b\}$ y $C(1) = \{1\}$. Consideremos el conjunto cociente $A' = A / \equiv$. Es natural pensar que A' es la cadena cuyo diagrama se indica.



Sabemos, como lo indicamos anteriormente, que sobre el conjunto precedente se puede definir una estructura de álgebra de Łukasiewicz.

Observemos que la relación “ $\equiv$ ” no es compatible con la operación de “ $\vee$ ” definida sobre A . En efecto $a \equiv a$ y $a \equiv b$ y sin embargo $a \vee a = a \neq 1 = a \vee b$. Esto significa que el “supremo” en A' debe ser definido de un modo especial. A. Monteiro determinó una construcción general, que denominó construcción $\mathcal{L}$ que permite definir un álgebra de Łukasiewicz $\mathcal{L}(A)$ a partir de un álgebra de Boole Monádica A . Por analogía con las álgebras de Łukasiewicz, si A es un álgebra de Boole monádica podemos definir la *implicación débil* por:

$$x \longrightarrow y = \exists - x \vee y,$$

y la *implicación contrapuesta* por

$$x \rhd y = (x \longrightarrow y) \wedge (-y \longrightarrow -x).$$

Entonces es natural definir en A las siguientes operaciones:

$$x \cup y = (x \rhd y) \rhd y$$

$$x \cap y = -(-x \cup -y).$$

Observemos que $x \rhd y = (\exists - x \vee y) \wedge (\exists y \vee -x)$, luego

$$\begin{aligned} x \cup y &= (x \rhd y) \rhd y = (\exists - (x \rhd y) \vee y) \wedge (\exists y \vee -(x \rhd y)) = \\ &= ((\forall x \wedge \exists - y) \vee (\forall - y \wedge \exists x) \vee y) \wedge (\exists y \vee (\forall x \wedge -y) \vee (\forall - y \wedge x)) = \\ &= (\forall x \wedge \exists - y \wedge \exists y) \vee (\forall x \wedge \exists - y \wedge \forall x \wedge -y) \vee (\forall x \wedge \exists - y \wedge \forall - y \wedge x) \vee \\ &= (\forall - y \wedge \exists x \wedge \exists y) \vee (\forall - y \wedge \exists x \wedge \forall x \wedge -y) \vee (\forall - y \wedge \exists x \wedge \forall - y \wedge x) \vee \\ &= (y \wedge \exists y) \vee (y \wedge \forall x \wedge -y) \vee (y \wedge \forall - y \wedge x) = \\ &= (\forall x \wedge \exists - y \wedge \exists y) \vee (\forall x \wedge -y) \vee (\forall x \wedge \forall - y) \vee \\ &= 0 \vee (\forall - y \wedge \forall x) \vee (\forall - y \wedge x) \vee y \vee 0 \vee 0 = \\ &= (\forall x \wedge \exists - y \wedge \exists y) \vee (\forall x \wedge -y) \vee (\forall x \wedge \forall - y) \vee (\forall - y \wedge x) \vee y \end{aligned}$$

y como $\forall x \wedge \forall - y \leq \forall x \wedge -y$ y tenemos que

$$\begin{aligned} x \cup y &= (\forall x \wedge \exists - y \wedge \exists y) \vee (\forall x \wedge -y) \vee (\forall - y \wedge x) \vee y = \\ &= (\forall x \wedge \exists - y \wedge \exists y) \vee (\forall - y \wedge x) \vee ((\forall x \vee y) \wedge (-y \vee y)) = \\ &= (\forall x \wedge \exists - y \wedge \exists y) \vee (\forall - y \wedge x) \vee ((\forall x \vee y) \wedge 1) = \\ &= (\forall x \wedge \exists - y \wedge \exists y) \vee (\forall - y \wedge x) \vee \forall x \vee y \end{aligned}$$

y como $\forall x \wedge \exists - y \wedge \exists y \leq \forall x$ entonces

$$x \cup y = \forall x \vee y \vee (x \wedge \forall - y) =$$

$$(\forall x \vee y \vee x) \wedge (\forall x \vee y \vee \forall - y) = (x \vee y) \wedge (\forall x \vee y \vee \forall - y).$$

Por lo tanto tenemos que:

$$D1) \quad x \cup y = \forall x \vee y \vee (x \wedge \forall - y),$$

$$D2) \quad x \cup y = (x \vee y) \wedge (\forall x \vee y \vee \forall - y).$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } x \cap y &= -(-x \cup -y) = -(\forall - x \vee -y \vee (-x \wedge \forall y) = -\forall - x \wedge y \wedge (x \vee -\forall y) = \\ &= \exists x \wedge y \wedge (x \vee \exists - y) = (\exists x \wedge y \wedge x) \vee (\exists x \wedge y \wedge \exists - y) = (x \wedge y) \vee (\exists x \wedge y \wedge \exists - y) = \\ &= y \wedge (x \vee (\exists x \wedge \exists - y)) = y \wedge (x \vee \exists x) \wedge (x \wedge \exists - y) = \exists x \wedge y \wedge (x \vee \exists - y). \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$C1) \quad x \cap y = \exists x \wedge y \wedge (x \vee \exists - y),$$

$$C2) \quad x \cap y = (x \wedge y) \vee (\exists x \wedge y \wedge \exists - y),$$

Definición 2.10.1 *Dados dos elementos a y b de un álgebra de Boole monádica A diremos que son equivalentes y notaremos $a \equiv b$ si $a \succ \rightarrow b = 1$ y $b \succ \rightarrow a = 1$.*

Lema 2.10.1 (I) $a \succ \rightarrow b = 1$ y $b \succ \rightarrow a = 1$ equivale a (II) $\exists a = \exists b$ y $\forall a = \forall b$.

Dem. Como $a \succ \rightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (-b \rightarrow -a) = (\exists - a \vee b) \wedge (\exists b \vee -a)$ entonces si se verifica (I) tenemos que $\exists - a \vee b = 1$, $\exists - b \vee a = 1$, $\exists b \vee -a = 1$, $\exists a \vee -b = 1$ y esto es equivalente a (1) $\forall a \leq b$, (2) $\forall b \leq a$, (3) $b \leq \exists a$, y (4) $a \leq \exists b$. (1) y (2) son equivalentes a $\forall a \leq \forall b$ y $\forall b \leq \forall a$, luego $\forall a = \forall b$. (3) y (4) son equivalentes a $\exists b \leq \exists a$, y $\exists b \leq \exists a$, esto es $\exists a = \exists b$. ■

Para probar que la relación $\equiv$ es compatible con las operaciones $\cap$ y $\cup$, L. Monteiro [68] demostró que:

Lema 2.10.2 (1) $\exists(x \cap y) = \exists x \wedge \exists y$, (2) $\exists(x \cup y) = \exists x \vee \exists y$, (3) $\forall(x \cap y) = \forall x \wedge \forall y$, (4) $\forall(x \cup y) = \forall x \vee \forall y$.

La relación " $\equiv$ " es una relación de equivalencia compatible con las operaciones $-, \exists, \cap$ y $\cup$. Consideremos el conjunto cociente $\mathcal{L}(A) = A / \equiv$, y representemos por $C(x)$ la clase de equivalencia que contiene al elemento $x \in A$, entonces si ponemos por definición $I = C(1)$, $\sim C(x) = C(-x)$, $\nabla C(x) = C(\exists x)$, $C(x) \cap C(y) = C(x \cap y)$, $C(x) \cup C(y) = C(x \cup y)$, entonces tenemos el siguiente teorema de A. Monteiro:

Si $(A, \exists)$ es un álgebra de Boole monádica entonces el sistema $(\mathcal{L}(A), I, \sim, \nabla, \cap, \cup)$ es un álgebra de Łukasiewicz.

Nota del redactor

- 1) La demostración del teorema precedente recién fué publicada en 1967, [60], pero los resultados fueron expuestos en el curso dictado en 1963, [52] y en [55].
- 2) En la misma el Profesor A. Monteiro utilizó la teoría de los N -reticulados, (ver H. Rasiowa [89]) y en particular los resultados que estableció sobre los N -reticulados semi-simples.
- 3) Los resultados sobre los N -reticulados semi-simples solo fueron publicados en 1995 en los Informes Técnicos Internos nro. 50 del INMABB, y luego en 1996 en las Notas de Lógica Matemática 40, [63] también publicadas por el INMABB.

- 4) Como en el enunciado del teorema precedente solo intervienen nociones relativas a la teoría de las álgebras de Boole monádicas el Profesor A. Monteiro propuso a sus alumnos encontrar una demostración del mismo, sin utilizar los resultados de los N -reticulados.
- 5) Este problema fué resuelto por L. Monteiro y L. González Cópola y publicado en 1964, [68].
- 6) Posteriormente el Profesor A. Monteiro [55] demostró el siguiente resultado: Dada un álgebra de Łukasiewicz L existe un álgebra de Boole monádica A tal que $\mathcal{L}(A)$ es isomorfa a L . El mismo fué expuesto en 1966 en un Seminario [59]. En la demostración, que será indicada en el párrafo 6.7, utiliza un teorema de representación de las álgebras de Łukasiewicz por álgebras de Łukasiewicz de conjuntos, que será indicado en el párrafo 6.6, en cuya demostración interviene el axioma de elección. Este teorema de representación solamente fué publicado en 1995 en el Nro. 45 de los Informes Técnicos Internos del INMABB, y posteriormente en 1996, en las Notas de Lógica Matemática Nro. 40 del INMABB [63].
- 7) L. Monteiro indicó una demostración puramente algebraica del resultado precedente y expuso la misma en un Seminario dirigido por el Profesor A. Monteiro [59], realizado en 1966. El mismo fué publicado en 1978, [80].

Observación 2.10.1 Si A es un álgebra de Boole monádica, notaremos

$$K(A) = \{x \in A : \exists x = x\},$$

entonces si $k \in K(A)$ esto es $\exists k = k$ tenemos que $\nabla C(k) = C(\exists k) = C(k)$, esto es $C(k) \in \mathcal{B}(\mathcal{L}(A))$. Recíprocamente, si $C(k) \in \mathcal{B}(\mathcal{L}(A))$ esto es $\nabla C(k) = C(k)$, por lo tanto $C(\exists k) = C(k)$, luego $\exists k \equiv k$, de donde resulta en particular que $\forall \exists k = \forall k$, esto es $\exists k = \forall k$ y por lo tanto $\exists k = k$ y en consecuencia $k \in K(A)$.

Sean $k_1, k_2 \in K(A)$ y supongamos que $C(k_1) = C(k_2)$, luego $k_1 \equiv k_2$, por lo tanto $k_1 = \exists k_1 = \exists k_2 = k_2$.

Entonces si A es finita tenemos que $N[\mathcal{B}(\mathcal{L}(A))] = N[K(A)]$. Además las álgebras de Boole $\mathcal{B}(\mathcal{L}(A))$ y $K(A)$ son isomorfas. En efecto si $k_1, k_2 \in K(A)$ son tales que $k_1 \leq k_2$ entonces $k_1 \vee k_2 = k_2$ y por lo tanto teniendo en cuenta el Lema 2.10.2 $\exists(k_1 \cup k_2) = \exists k_1 \vee \exists k_2 = k_1 \vee k_2 = k_2$ y análogamente $\forall(k_1 \cup k_2) = k_2$, luego $k_1 \cup k_2 \equiv k_2$ y en consecuencia $C(k_1) \cup C(k_2) = C(k_1 \cup k_2) = C(k_2)$, esto es $C(k_1) \leq C(k_2)$. Recíprocamente si $C(k_1) \leq C(k_2)$ esto es $C(k_1 \cup k_2) = C(k_1) \cup C(k_2) = C(k_2)$, luego $k_1 \cup k_2 \equiv k_2$ y por lo tanto en particular $\exists(k_1 \cup k_2) = \exists k_2$, esto es $k_1 \cup k_2 = k_2$, luego $k_1 \leq k_2$.

Supongamos que A es un álgebra de Boole monádica finita, no trivial, y representemos por $\mathcal{A}(A)$ el conjunto de todos los átomos de A .

Si $x \in A$ notaremos $(C(x)) = \{C(y) \in \mathcal{L}(A) : C(y) \leq C(x)\}$.

Lema 2.10.3 Si $a \in \mathcal{A}(A) \cap K(A)$ entonces $(C(a)) = \{C(0), C(a)\}$.

Dem. Claramente $\{C(0), C(a)\} \subseteq (C(a))$. De $a \in K(A)$ resulta que $C(a) \in \mathcal{B}(\mathcal{L}(A))$. Si $C(x) \in (C(a))$, esto es $C(x) \leq C(a)$ entonces $C(x \cap a) = C(x) \cap C(a) = C(x)$ luego

$x \cap a \equiv x$ y en particular $\exists(x \cap a) = \exists x$, luego por el Lema 2.10.2 $\exists x \wedge \exists a = \exists x$ y como $a \in K(A)$ tenemos que $\exists x \wedge a = \exists x$ luego $0 \leq \exists x \leq a$ de donde resulta por ser a es un átomo de A resulta que (1) $\exists x = 0$ ó (2) $\exists x = a$. Si ocurre (1) entonces $x = 0$ y si ocurre (2) como $0 \leq x \leq \exists x = a$ y a es un átomo tenemos que $x = 0$ ó $x = a$. ■

Lema 2.10.4 Si $k \in K(A)$ y $(C(k)) = \{C(0), C(k)\}$ entonces k es un átomo de A .

Dem. En efecto supongamos que (1) $0 \leq y \leq k$, donde $y \in A$, luego $C(0) \leq C(y) \leq C(k)$ y por lo tanto $C(y) = C(0)$ ó $C(y) = C(k)$, esto es (2) $y \equiv 0$ ó (3) $y \equiv k$. Si ocurre (2) entonces en particular $0 = \exists 0 = \exists y \geq y$ luego $y = 0$. Si ocurre (3) entonces en particular (4) $k = \forall k = \forall y \leq y$. Luego de (1) y (4) resulta que $y = k$. ■

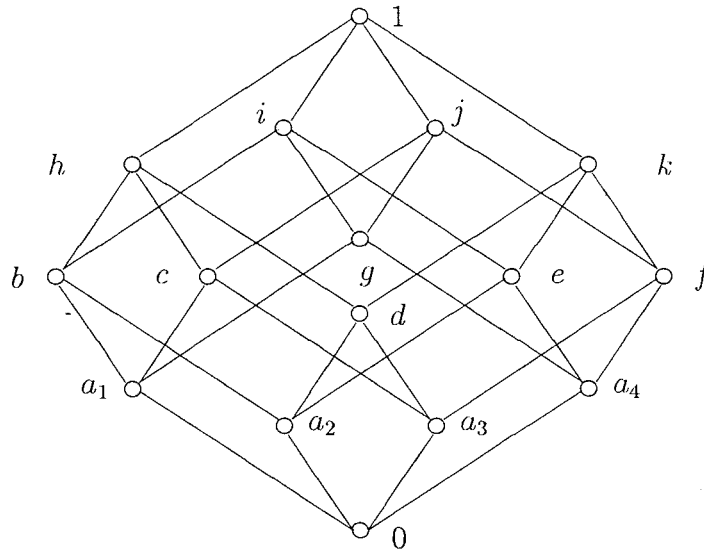
Lema 2.10.5 Si $a \in \mathcal{A}(A)$ y $a \notin K(A)$ entonces $(C(\exists a)) = \{C(0), C(a), C(\exists a)\}$.

Dem. Como $0 \leq a \leq \exists a$, entonces $C(0) \leq C(a) \leq C(\exists a)$ luego $\{C(0), C(a), C(\exists a)\} \subseteq (C(\exists a))$.

Supongamos ahora que $C(x) \in (C(\exists a))$, esto es $C(x) \leq C(\exists a)$ y por lo tanto $C(x \cup \exists a) = C(x) \cup C(\exists a) = C(\exists a)$ luego $x \cup \exists a \equiv \exists a$ y en particular $\exists x \vee \exists a = \exists(x \cup \exists a) = \exists a$. Por lo tanto $0 \leq \exists x \leq \exists a$ y como $\exists a$ es un átomo de $K(A)$ y $\exists x \in K(A)$ tenemos que (1) $\exists x = 0$ ó (2) $\exists x = \exists a$. Si ocurre (1) entonces $x = 0$ y por lo tanto $C(x) = C(0)$. Si ocurre (2) entonces como $0 \leq \forall x \leq \exists x = \exists a$ y $\exists a$ es un átomo de $K(A)$ y $\forall x \in K(A)$ tenemos que (3) $\forall x = 0$ ó (4) $\forall x = \exists a$.

Como $a \in \mathcal{A}(A)$ y $a \notin K(A)$ entonces $\forall a = 0$, luego si ocurre (3) tenemos que (5) $\forall x = 0 = \forall a$. De (5) y (2) resulta que $x \equiv a$ y por lo tanto $C(x) = C(a)$. Si ocurre (4) entonces $C(\forall x) = C(\exists a) = C(\exists x)$ esto es $\Delta C(x) = \nabla C(x)$ y por lo tanto $C(x) \in B(\mathcal{L}(A))$ luego $\nabla C(x) = C(x)$ esto es $C(\exists x) = C(x)$ y por lo tanto $x \equiv \exists x$. Luego en particular $\forall x = \exists x$ y en consecuencia $x \in K(A)$ esto es (6) $\forall x = x$. De (6) y (2) resulta que $x = \exists a$ y por lo tanto $C(x) = C(\exists a)$. ■

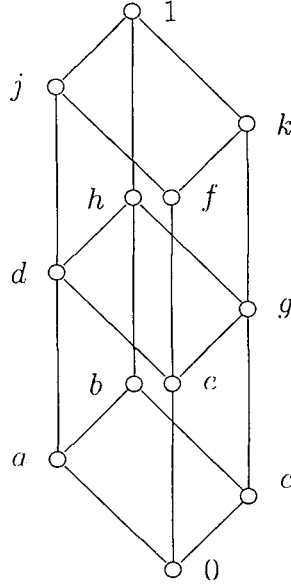
Ejemplo 2.10.1 Consideremos la siguiente álgebra de Boole monádica A



donde los operadores $\exists$ y $\forall$ están indicados en la siguiente tabla

x	0	a_1	a_2	a_3	a_4	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	1
$\exists x$	0	a_1	a_2	f	f	b	j	k	k	f	j	1	1	j	k	1
$\forall x$	0	a_1	a_2	0	0	b	a_1	a_2	a_2	f	a_1	b	b	j	k	1

entonces los elementos de $\mathcal{L}(A)$ son $0 = C(0) = \{0\}$, $a = C(a_1) = \{a_1\}$, $b = C(b) = \{b\}$, $c = C(a_2) = \{a_2\}$, $j = C(j) = \{j\}$, $k = C(k) = \{k\}$, $f = C(f) = \{f\}$, $1 = C(1) = \{1\}$ y $e = C(a_3) = \{a_3, a_4\}$, $d = C(c) = \{c, g\}$, $g = C(d) = \{d, e\}$, $h = C(h) = \{h, i\}$. Entonces el diagrama de Hasse de $\mathcal{L}(A)$ es el siguiente:



y las operaciones de $\sim$ y ∇ estan indicadas en la siguiente tabla:

x	0	a	b	c	d	e	g	h	j	f	k	1
$\sim x$	1	k	f	j	g	h	d	e	c	b	a	0
∇x	0	a	b	c	j	f	k	1	j	f	k	1

Nota El álgebra de Boole monádica indicada precedentemente es el álgebra de Boole monádica con un generador libre [35], [79] y $\mathcal{L}(A)$ es como veremos mas adelante el álgebra de Lukasiewicz con un generador libre. Este ejemplo nos haría sospechar que se verifica:

Si $M(G)$ es el álgebra Boole monádica con un conjunto G de generadores libres entonces $\mathcal{L}(M(G))$ es el álgebra de Lukasiewicz con un conjunto de generadores libres de cardinal igual al cardinal de G .

Veremos mas adelante que esto solamente vale si G es un conjunto finito con un solo elemento.

2.11 Subálgebras

La noción de subálgebra permite obtener nuevas álgebras de Lukasiewicz a partir de un álgebra de Lukasiewicz dada, de acuerdo a la siguiente definición: Una parte, no vacía, S de un álgebra de Lukasiewicz A se dice una L -subálgebra de A si es invariante con respecto a las operaciones $\sim$, ∇ y $\vee$.

Lema 2.11.1 *Toda L -subálgebra de un álgebra de Łukasiewicz es un álgebra de Łukasiewicz.*

Se comprueba fácilmente que una L -subálgebra de A puede definirse como una parte no vacía de A que es invariante con respecto a cualquiera de los siguientes grupos de operaciones: (1) $\sim, \nabla, \wedge$, (2) $\sim, \Delta, \vee$, (3) $\sim, \Delta, \wedge$.

Para ello basta tener en cuenta que $\nabla x = \sim \Delta \sim x$, $\Delta x = \sim \nabla \sim x$ y las leyes de De Morgan. Es claro que si S es una L -subálgebra, entonces $0, 1 \in S$.

Por lo tanto si S es una L -subálgebra de A tenemos:

$$\{0, 1\} \subseteq S \subseteq A.$$

Es claro que la intersección de L -subálgebras de A es una L -subálgebra de A . La noción de L -subálgebra generada por una parte G de B , que notaremos $SL(G)$, se define en la forma habitual y se prueba que $SL(G)$ es la menor L -subálgebra de A que contiene a G . Es claro que $SL(\emptyset) = \{0, 1\}$. Si $SL(G) = A$, se dice que G es un conjunto de generadores de A .

Si $G \subseteq A$, notaremos con $\mathcal{PF}(G)$ la familia de todas las partes finitas de G , entonces:

Lema 2.11.2 $SL(G) = \bigcup \{SL(F) : F \in \mathcal{PF}(G)\}$.

Dem. Sea $X = \bigcup \{SL(F) : F \in \mathcal{PF}(G)\}$. Si $F \subseteq G$ como $G \subseteq SL(G)$ entonces $F \subseteq SL(G)$ y por lo tanto $SL(F) \subseteq SL(G)$ para todo subconjunto de G , en particular para todo $F \in \mathcal{PF}(G)$, luego: (i) $X \subseteq SL(G)$. Probemos que (ii) $SL(G) \subseteq X$. Para ello probaremos que (iia) $G \subseteq X$ e (iib) X es una L -subálgebra de A .

(iia) Sea $g \in G$ luego $\{g\} \subseteq SL(\{g\}) \subseteq X$, y por lo tanto $G = \bigcup_{g \in G} \{g\} \subseteq X$.

(iib) Como $0, 1 \in SL(F)$ cualquiera que sea $F \in \mathcal{PF}(G)$, entonces $0, 1 \in X$. Sean $x, y \in X$ entonces $x \in SL(F_1)$, $y \in SL(F_2)$ donde $F_1, F_2 \in \mathcal{PF}(G)$, por lo tanto $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{PF}(G)$. De $F_1 \subseteq F_1 \cup F_2$ y $F_2 \subseteq F_1 \cup F_2$ resulta que $SL(F_1) \subseteq SL(F_1 \cup F_2)$ y $SL(F_2) \subseteq SL(F_1 \cup F_2)$, luego $x, y \in SL(F_1 \cup F_2)$ y por lo tanto $x \wedge y, x \vee y \in SL(F_1 \cup F_2) \subseteq X$. Es claro que si $x \in X$ entonces $\sim x, \nabla x \in X$. ■

Si G tiene un solo elemento $G = \{g\}$, notaremos $SL(g)$ en vez de $SL(\{g\})$ y si $G = Y \cup \{x\}$ notaremos $SL(Y, x)$ en vez de $SL(Y \cup \{x\})$.

Observemos que si $G = \{g\}$ entonces

$$0, 1, g, \sim g, g \wedge \sim g, \nabla(g \wedge \sim g), \nabla g, \nabla \sim g, \Delta g, \Delta \sim g, g \vee \sim g, \Delta(g \vee \sim g) \in SL(g).$$

Mas adelante veremos que si $G = \{g\}$ entonces $N[SL(g)] \leq 12$.

El Profesor A. Monteiro, propuso encontrar una expresión “sencilla” para los elementos de $SL(S, g)$.

Lema 2.11.3 *Si A es un álgebra de Łukasiewicz, S una L -subálgebra de A , y $g \in A$ entonces*

$$SL(S, g) = \{(s_1 \wedge \Delta g) \vee (s_2 \wedge \Delta \sim g) \vee (s_3 \wedge \nabla g \wedge \nabla \sim g) \vee (s_4 \wedge g \wedge \sim g) : s_1, s_2, s_3, s_4 \in S\}.$$

(L. Monteiro)

Dem. Sea

$$S_0 = \{(s_1 \wedge \Delta g) \vee (s_2 \wedge \Delta \sim g) \vee (s_3 \wedge \nabla g \wedge \nabla \sim g) \vee (s_4 \wedge g \wedge \sim g) : s_1, s_2, s_3, s_4 \in S\}.$$

(I) $S_0 \subseteq SL(S, g)$.

En efecto si $y \in S_0$ entonces

$$(1) \quad y = (s_1 \wedge \Delta g) \vee (s_2 \wedge \Delta \sim g) \vee (s_3 \wedge \nabla g \wedge \nabla \sim g) \vee (s_4 \wedge g \wedge \sim g)$$

donde (2) $s_1, s_2, s_3, s_4 \in S$. De (2) resulta (3) $s_1, s_2, s_3, s_4 \in S \cup \{g\} \subseteq SL(S, g)$. Como $g \in S \cup \{g\} \subseteq SL(S, g)$ entonces (4) $\Delta g, \Delta \sim g, \nabla g \wedge \nabla \sim g, g \wedge \sim g \in SL(S, g)$. De (3), (4) y (1) resulta que $y \in SL(S, g)$.

(II) $SL(S, g) \subseteq S_0$.

Para ello probaremos que:

(IIa) $S \cup \{g\} \subseteq S_0$, y (IIb) S_0 es una L -subálgebra de L .

Empezemos por observar que como:

$$\Delta g \vee \Delta \sim g \vee (\nabla g \wedge \nabla \sim g) \vee (g \wedge \sim g) = \Delta g \vee \Delta \sim g \vee (\nabla g \wedge \nabla \sim g) = (\Delta g \vee \Delta \sim g \vee \nabla g) \wedge (\Delta g \vee \Delta \sim g \vee \nabla \sim g) = 1 \wedge 1 = 1$$

entonces cualquiera que sea $x \in L$ tenemos que

$$x = x \wedge 1 = (x \wedge \Delta g) \vee (x \wedge \Delta \sim g) \vee (x \wedge \nabla g \wedge \nabla \sim g) \vee (x \wedge g \wedge \sim g),$$

luego si $s \in S$ se tiene que $s \in S_0$ y por lo tanto (i) $S \subseteq S_0$. Como

$$(1 \wedge \Delta g) \vee (0 \wedge \Delta \sim g) \vee (0 \wedge \nabla g \wedge \nabla \sim g) \vee (1 \wedge g \wedge \sim g) =$$

$$\Delta g \vee (g \wedge \sim g) = (\Delta g \vee g) \wedge (\Delta g \vee \sim g) = g \wedge (g \vee \sim g) = g$$

entonces (ii) $g \in S_0$. De (i) e (ii) resulta (IIa). Probemos (IIb). Sean $x, y \in S_0$ esto es

$$x = (s_1 \wedge \Delta g) \vee (s_2 \wedge \Delta \sim g) \vee (s_3 \wedge \nabla g \wedge \nabla \sim g) \vee (s_4 \wedge g \wedge \sim g),$$

con $s_1, s_2, s_3, s_4 \in S$ y

$$y = (t_1 \wedge \Delta g) \vee (t_2 \wedge \Delta \sim g) \vee (t_3 \wedge \nabla g \wedge \nabla \sim g) \vee (t_4 \wedge g \wedge \sim g),$$

con $t_1, t_2, t_3, t_4 \in S$ luego

$$x \vee y = (v_1 \wedge \Delta g) \vee (v_2 \wedge \Delta \sim g) \vee (v_3 \wedge \nabla g \wedge \nabla \sim g) \vee (v_4 \wedge g \wedge \sim g)$$

donde $v_i = s_i \vee t_i \in S$ para $i = 1, 2, 3, 4$, luego $x \vee y \in S_0$.

De $x \in S_0$ resulta que

$$\nabla x = (\nabla s_1 \wedge \Delta g) \vee (\nabla s_2 \wedge \Delta \sim g) \vee (\nabla s_3 \wedge \nabla g \wedge \nabla \sim g) \vee (\nabla s_4 \wedge \nabla g \wedge \nabla \sim g) =$$

$$(\nabla s_1 \wedge \Delta g) \vee (\nabla s_2 \wedge \Delta \sim g) \vee ((\nabla s_3 \vee \nabla s_4) \wedge \nabla g \wedge \nabla \sim g) \vee (0 \wedge g \wedge \sim g)$$

y como $\nabla s_i \in S$ para $i = 1, 2, 3, 4$ resulta que $\nabla x \in S_0$.

De $x \in S_0$ resulta que

$$\sim x = (\sim s_1 \vee \nabla \sim g) \wedge (\sim s_2 \vee \nabla g) \wedge (\sim s_3 \vee \Delta \sim g \vee \Delta g) \wedge (\sim s_4 \vee g \vee \sim g).$$

Para simplificar las notaciones pongamos $\sim s_i = b_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$, entonces:

$$\sim x = (b_1 \vee \nabla \sim g) \wedge (b_2 \vee \nabla g) \wedge (b_3 \vee \Delta \sim g \vee \Delta g) \wedge (b_4 \vee g \vee \sim g).$$

Sean

$$y = (b_1 \vee \nabla \sim g) \wedge (b_3 \vee \Delta \sim g \vee \Delta g)$$

y

$$z = (b_2 \vee \nabla g) \wedge (b_4 \vee g \vee \sim g).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} y &= (b_1 \wedge b_3) \vee (b_1 \wedge \Delta \sim g) \vee (b_1 \wedge \Delta g) \vee (\nabla \sim g \wedge b_3) \vee (\nabla \sim g \wedge \Delta \sim g) \vee (\nabla \sim g \wedge \Delta g) = \\ &= (b_1 \wedge b_3) \vee (b_1 \wedge \Delta \sim g) \vee (b_1 \wedge \Delta g) \vee (\nabla \sim g \wedge b_3) \vee \Delta \sim g = \\ &= (b_1 \wedge b_3) \vee (b_1 \wedge \Delta g) \vee (\nabla \sim g \wedge b_3) \vee \Delta \sim g = \\ &= [(b_1 \wedge b_3) \wedge (\Delta g \vee \nabla \sim g)] \vee (b_1 \wedge \Delta g) \vee (\nabla \sim g \wedge b_3) \vee \Delta \sim g = \\ &= (b_1 \wedge b_3 \wedge \Delta g) \vee (b_1 \wedge b_3 \wedge \nabla \sim g) \vee (b_1 \wedge \Delta g) \vee (\nabla \sim g \wedge b_3) \vee \Delta \sim g = \\ &= (b_1 \wedge \Delta g) \vee (\nabla \sim g \wedge b_3) \vee \Delta \sim g \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} z &= (b_2 \wedge b_4) \vee (b_2 \wedge g) \vee (b_2 \wedge \sim g) \vee (\nabla g \wedge b_4) \vee (\nabla g \wedge g) \vee (\nabla g \wedge \sim g) = \\ &= (b_2 \wedge b_4) \vee (b_2 \wedge g) \vee (b_2 \wedge \sim g) \vee (\nabla g \wedge b_4) \vee g \vee (g \wedge \sim g) = \\ &= (b_2 \wedge b_4) \vee (b_2 \wedge \sim g) \vee (\nabla g \wedge b_4) \vee g = \\ &= [(b_2 \wedge b_4) \wedge (\sim g \vee \nabla g)] \vee (b_2 \wedge \sim g) \vee (\nabla g \wedge b_4) \vee g = \\ &= (b_2 \wedge b_4 \wedge \sim g) \vee (b_2 \wedge b_4 \wedge \nabla g) \vee (b_2 \wedge \sim g) \vee (\nabla g \wedge b_4) \vee g = \\ &= (b_2 \wedge \sim g) \vee (b_4 \wedge \nabla g) \vee g. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \sim x &= [(b_1 \wedge \Delta g) \vee (\nabla \sim g \wedge b_3) \vee \Delta \sim g] \wedge [(b_2 \wedge \sim g) \vee (b_4 \wedge \nabla g) \vee g] = \\ &= (b_1 \wedge \Delta g \wedge b_2 \wedge \sim g) \vee (b_1 \wedge \Delta g \wedge b_4 \wedge \nabla g) \vee (b_1 \wedge \Delta g \wedge g) \vee \\ &= (\nabla \sim g \wedge b_3 \wedge b_2 \wedge \sim g) \vee (\nabla \sim g \wedge b_3 \wedge b_4 \wedge \nabla g) \vee (\nabla \sim g \wedge b_3 \wedge g) \vee \\ &= (\Delta \sim g \wedge b_2 \wedge \sim g) \vee (\Delta \sim g \wedge b_4 \wedge \nabla g) \vee (\Delta \sim g \wedge g) = \\ &= (b_1 \wedge \Delta g \wedge b_4) \vee (b_1 \wedge \Delta g) \vee (b_3 \wedge b_2 \wedge \sim g) \vee \\ &= (\nabla \sim g \wedge b_3 \wedge b_4 \wedge \nabla g) \vee (\sim g \wedge b_3 \wedge g) \vee (\Delta \sim g \wedge b_2) = \\ &= (b_1 \wedge \Delta g) \vee (b_3 \wedge b_2 \wedge \sim g) \vee (\nabla \sim g \wedge b_3 \wedge b_4 \wedge \nabla g) \vee (\sim g \wedge b_3 \wedge g) \vee (\Delta \sim g \wedge b_2) = \\ &= (b_1 \wedge \Delta g) \vee [(b_3 \wedge b_2 \wedge \sim g) \wedge (\Delta \sim g \vee \nabla g)] \vee \\ &= (b_3 \wedge b_4 \wedge \nabla \sim g \wedge \nabla g) \vee (b_3 \wedge \sim g \wedge g) \vee (b_2 \wedge \Delta \sim g) = \\ &= (b_1 \wedge \Delta g) \vee (b_3 \wedge b_2 \wedge \sim g \wedge \Delta \sim g) \vee (b_3 \wedge b_2 \wedge \sim g \wedge \nabla g) \vee \\ &= (b_3 \wedge b_4 \wedge \nabla \sim g \wedge \nabla g) \vee (b_3 \wedge \sim g \wedge g) \vee (b_2 \wedge \Delta \sim g) = \\ &= (b_1 \wedge \Delta g) \vee (b_3 \wedge b_2 \wedge \Delta \sim g) \vee (b_3 \wedge b_2 \wedge \sim g \wedge g) \vee \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (b_3 \wedge b_4 \wedge \nabla \sim g \wedge \nabla g) \vee (b_3 \wedge \sim g \wedge g) \vee (b_2 \wedge \Delta \sim g) = \\
& (b_1 \wedge \Delta g) \vee [((b_3 \wedge b_2) \vee b_2) \wedge \Delta \sim g] \vee [((b_3 \wedge b_2) \vee b_3) \wedge \sim g \wedge g] \vee (b_3 \wedge b_4 \wedge \nabla \sim g \wedge \nabla g) = \\
& (b_1 \wedge \Delta g) \vee (b_2) \wedge \Delta \sim g \vee (b_3 \wedge \sim g \wedge g) \vee (b_3 \wedge b_4 \wedge \nabla \sim g \wedge \nabla g).
\end{aligned}$$

Luego como $b_1, b_2, b_3, b_4 \in S$ tenemos que $\sim x \in S_0$. ■

Sea A un álgebra de Łukasiewicz, S una L -subálgebra de A y $g \in A$.

1) Si $g \in B(A)$ entonces $SL(S, g) = \{(s_1 \wedge g) \vee (s_2 \wedge \sim g) : s_1, s_2 \in S\}$.

2) Si $\Delta g = 0$, luego $g \leq \sim g$ entonces:

$$SL(S, g) = \{(s_1 \wedge \Delta \sim g) \vee (s_2 \wedge \nabla g) \vee (s_3 \wedge g) : s_1, s_2, s_3 \in S\}.$$

3) Si c es un centro de A , entonces como $\Delta \sim c = \Delta c = 0$, $\nabla c \wedge \nabla \sim c = 1 \wedge \nabla c = 1$ y $c \wedge \sim c = c$ resulta que: $SL(S, c) = \{(s_1 \vee (s_2 \wedge c)) : s_1, s_2 \in S\}$.

Vamos a indicar una forma de determinar $SL(G)$ en el caso en que G es un conjunto finito, no vacío, de un álgebra de Łukasiewicz A .

Sea $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, consideremos:

- $S_1 = SL(g_1)$
- $S_2 = SL(S_1, g_2)$
-
- $S_n = SL(S_{n-1}, g_n)$

Demostremos que $S_n = SL(G)$. En efecto de la construcción anterior resulta que:

$$\{g_1\} \subseteq S_1 \subseteq S_1 \cup \{g_2\} \subseteq SL(S_1, g_2) = S_2 \subseteq \dots \subseteq S_n,$$

por lo tanto (1) $G \subseteq S_n$ y como por construcción (2) S_n es una L -subálgebra, de (1) y (2) resulta $SL(G) \subseteq S_n$. De $g_1 \in G$ resulta que $S_1 \subseteq SL(G)$, luego $S_1 \cup \{g_2\} \subseteq SL(G)$, por lo tanto $S_2 = SL(S_1, g_2) \subseteq SL(G), \dots, S_n = SL(S_{n-1}, g_n) \subseteq SL(G)$.

Sabemos que si $b \in B(L)$ entonces $\sim b$ es el complemento booleano de b . Si $b \in B(L)$, notaremos con b^* , a cualquiera de los elementos b ó $\sim b$.

Lema 2.11.4 Si L es un álgebra de Łukasiewicz, $X \subseteq B(L)$, X finito entonces $SB(X) = SL(X)$.

Dem. Si $X = \emptyset$, entonces $SB(\emptyset) = \{0, 1\} = SL(\emptyset)$.

Supongamos que $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Como $SB(X)$ es una L -subálgebra de Łukasiewicz de L tal que $X \subseteq SB(X)$ entonces $SL(X) \subseteq SB(X)$. Sea $b \in SB(X)$, si $b = 0$ es evidente que $b \in SL(X)$. Si $b \neq 0$ entonces es bien conocido que $b = \bigvee_{k=1}^r m_k$, donde

$m_k = \bigwedge_{i=1}^n x_i^*$. Como $x_i^* \in SL(X)$ para todo i , $1 \leq i \leq n$, entonces $m_k \in SL(X)$ para todo k , $1 \leq k \leq r$, luego $b \in SL(X)$. ■

Corolario 2.11.1 Si A es un álgebra de Lukasiewicz, $X \subseteq A$, X finito entonces $SB(\Delta X \cup \nabla X) = SL(\Delta X \cup \nabla X)$.

Dem. Es una consecuencia del Lema 2.11.4, pues $\Delta X \cup \nabla X$ es un subconjunto finito de $B(A)$. ■

Lema 2.11.5 Si A es un álgebra de Lukasiewicz, $g \in A$ y S una L -subálgebra de A que verifica $\nabla g, \sim \Delta g \in B(S)$, entonces $B(SL(S, g)) = B(S)$.

Dem. De la hipótesis deducimos que:

$$(1) \Delta g, \Delta \sim g, \nabla(g \wedge \sim g) \in B(S).$$

Si $z \in B(SL(S, g)) = SL(S, g) \cap B(L)$ entonces $\Delta z = z$, y

$$z = (s_1 \wedge \Delta g) \vee (s_2 \wedge \Delta \sim g) \vee (s_3 \wedge \nabla g \wedge \nabla \sim g) \vee (s_4 \wedge g \wedge \sim g), \text{ donde } s_1, s_2, s_3, s_4 \in S,$$

luego

$$z = \Delta z = (\Delta s_1 \wedge \Delta g) \vee (\Delta s_2 \wedge \Delta \sim g) \vee (\Delta s_3 \wedge \nabla g \wedge \nabla \sim g) \vee (\Delta s_4 \wedge \Delta g \wedge \Delta \sim g)$$

y como $\Delta s_4 \wedge \Delta g \wedge \Delta \sim g \leq g \wedge \Delta \sim g = 0$, entonces:

$$z = (\Delta s_1 \wedge \Delta g) \vee (\Delta s_2 \wedge \Delta \sim g) \vee (\Delta s_3 \wedge \nabla g \wedge \nabla \sim g).$$

De $\Delta s_i \in B(S)$, para $i = 1, 2, 3$ deducimos, teniendo en cuenta (1) que $z \in B(S)$.

Como $S \subseteq SL(S, g)$ entonces sabemos que $B(S) = S \cap B(L) \subseteq SL(S, g) \cap B(L) = B(SL(S, g))$. ■

Lema 2.11.6 Si A es un álgebra de Lukasiewicz, $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\} \subseteq A$ y

$$L_0 = SB(\Delta G \cup \nabla G), L_1 = SL(L_0, g_1), L_2 = SL(L_1, g_2), \dots, L_n = SL(L_{n-1}, g_n)$$

entonces: $L_n = SL(G)$ y $B(SL(G)) = SB(\Delta G \cup \nabla G)$.

Dem. Por construcción tenemos $L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_n$, y $g_i \in L_i$, $1 \leq i \leq n$, luego $G \subseteq L_n$ y por lo tanto $SL(G) \subseteq L_n$.

Como $\Delta G, \nabla G \subseteq SL(G)$, entonces $\Delta G \cup \nabla G \subseteq SL(G)$, luego: (1) $SL(\Delta G \cup \nabla G) \subseteq SL(G)$.

Por hipótesis G es un subconjunto finito, entonces por el Corolario 2.11.1:

$$(2) SB(\Delta G \cup \nabla G) = SL(\Delta G \cup \nabla G).$$

De (1) y (2) tenemos $L_0 = SB(\Delta G \cup \nabla G) \subseteq SL(G)$, luego como $g_1 \in SL(G)$ tenemos $L_1 = SL(L_0, g_1) \subseteq SL(G)$. De $g_i \in SL(G)$, y $L_{i-1} \subseteq SL(G)$, $2 \leq i \leq n$, tenemos $L_i = SL(L_{i-1}, g_i) \subseteq SL(G)$, $2 \leq i \leq n$. Esto prueba que $L_n = SL(G)$.

Vimos que $L_0 = SB(\Delta G \cup \nabla G) \subseteq SL(G)$, luego

$$L_0 = L_0 \cap B(L) \subseteq SL(G) \cap B(L) = B(SL(G)).$$

Como $\nabla g_i, \sim \Delta g_i \in B(L_0) = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_n$, para $i = 1, 2, \dots, n$, entonces por el Lema 2.11.5, $B(L_1) = B(SL(L_0, g_1)) = B(L_0) = L_0$, y por lo tanto $B(L_j) = B(SL(L_{j-1}, g_j)) = B(L_{j-1}) = L_0$, $2 \leq j \leq n$. ■

Lema 2.11.7 Si A es un álgebra de Lukasiewicz, $G \subseteq A$, y $L' = SL(G)$, entonces el subconjunto $\Delta G \cup \nabla G$ de $B(L)$ verifica: $SB(\Delta G \cup \nabla G) = B(L')$. (A. Monteiro [52])

Dem. En 1994, L. Monteiro, obtuvo la siguiente demostración, que fue indicada en [63]. La misma es mas simple que la obtenida por A. Monteiro.

Sea G un subconjunto del álgebra de Lukasiewicz A , entonces vimos que:

$$SL(G) = \bigcup \{SL(G') : G' \subseteq G, G' \text{ finito}\}.$$

Vamos a probar que: $B(SL(G)) = SB(\Delta G \cup \nabla G)$. Como $\Delta G \cup \nabla G \subseteq B(A)$ y $\Delta G \cup \nabla G \subseteq SL(G)$, entonces $\Delta G \cup \nabla G \subseteq SL(G) \cap B(A) = B(SL(G))$, luego $SB(\Delta G \cup \nabla G) \subseteq B(SL(G))$. Si $b \in B(SL(G))$ entonces $b = \Delta b$ y $b \in SL(G)$, luego $b \in SL(G')$ donde $G' \subseteq G$ y G' es finito, entonces por el Lema 2.11.6,

$$B(SL(G')) = SB(\Delta G' \cup \nabla G') \subseteq SB(\Delta G \cup \nabla G),$$

y como $b \in B(SL(G'))$ tenemos que $b \in SB(\Delta G \cup \nabla G)$. ■

Corolario 2.11.2 Si G es un conjunto de generadores del álgebra de Lukasiewicz A , esto es $SL(G) = A$, entonces $B(A) = SB(\Delta G \cup \nabla G)$.

Lema 2.11.8 Si e es el eje de un álgebra de Lukasiewicz L , S una L -subálgebra de L tal que $e \in S$, y $x \in L$ verifica: $\Delta x, \nabla x \in S$ entonces $x \in S$. L. Monteiro, [76]

Dem. Es una consecuencia inmediata de las hipótesis y de que en un álgebra con eje todo elemento x se puede escribir como $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x$. ■

Observemos que la recíproca de este lema no es válida. En efecto consideremos el álgebra de Lukasiewicz A indicada en el Ejemplo 2.3.1. El subconjunto $S = \{0, 1\}$ es una L -subálgebra de A que verifica la condición indicada en el lema precedente. Para ello basta ver la tabla indicada de los operadores Δ y ∇ , y sin embargo $e \notin S$.

Lema 2.11.9 Si L es un álgebra de Lukasiewicz con centro c y S una L -subálgebra de L entonces las siguientes condiciones son equivalentes: L. Monteiro, [76]

I) S verifica si $\Delta x, \nabla x \in S$ entonces $x \in S$.

II) $c \in S$.

Dem. (I) $\rightarrow$ (II). Como $\Delta c = 0$ y $\nabla c = 1$ entonces por (I) $c \in S$. (II) $\rightarrow$ (I). Como c es un eje de L que pertenece a S , entonces por el lema precedente es claro que se verifica (I). ■

Lema 2.11.10 Si L es un álgebra de Lukasiewicz con eje e y S una L -subálgebra de L que verifica (1) $B(L) \subseteq S$ y (2) $e \in S$ entonces $S = L$. L. Monteiro, [76]

Dem. Dado $x \in L$ entonces $\Delta x, \nabla x \in B(L)$ luego, por (1) y (2) podemos afirmar que $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x \in S$. ■

Lema 2.11.11 Si L es un álgebra de Lukasiewicz con centro c y S una L -subálgebra de L entonces $SL(S, c) = L$ si y sólo $B(L) \subseteq S$. L. Monteiro, [76]

Dem. Si $SL(S, c) = L$, como $SL(S, c) = \{x \in L : x = s_1 \wedge (s_2 \vee c)\}$, donde $s_1, s_2 \in S$ entonces si $b \in B(L) \subseteq L = SL(S, c)$ tenemos que $b = s_1 \wedge (s_2 \vee c)$ con $s_1, s_2 \in S$ luego $b = \Delta b = \Delta(s_1 \wedge (s_2 \vee c)) = \Delta s_1 \wedge (\Delta s_2 \vee \Delta c) = \Delta s_1 \wedge (\Delta s_2 \vee 0) = \Delta s_1 \wedge \Delta s_2 \in S$. Si $B(L) \subseteq S \subseteq SL(S, c)$ como $c \in SL(S, c)$ entonces por el Lema 2.11.10 $SL(S, c) = L$. ■

En el *IX Latin American Symposium on Mathematical Logic* realizado en la U.N.S. en 1992, M. Abad, L. Monteiro, S. Savini y J. Sewald [9] presentaron un trabajo donde determinaron el número de subálgebras de un álgebra de Łukasiewicz L , no trivial, el número de subálgebras isomorfas a una subálgebra de L y el número de subálgebras de L no isomorfas. Además indican un método para construir todas las subálgebras de L .

2.12 Algebras de Łukasiewicz completas

Un álgebra de Łukasiewicz L se dice completa si el reticulado L es completo.

Lema 2.12.1 Si L es un álgebra de Łukasiewicz con eje e tal que $B(L)$ es un álgebra de Boole completa, entonces L es completa. (L.Monteiro, (1968))

Dem. Dado un subconjunto $F = \{a_i\}_{i \in I} \subseteq L$ consideremos los siguientes subconjuntos de $B(L)$:

$$F_0 = \{\Delta a_i\}_{i \in I} \quad y \quad F_1 = \{\nabla a_i\}_{i \in I}.$$

Como $B(L)$ es completa existen los siguientes elementos:

$$(1) \quad a_0 = \bigwedge_{i \in I} \Delta a_i \in B(L) \quad y \quad (2) \quad a_1 = \bigwedge_{i \in I} \nabla a_i \in B(L)$$

Consideremos el elemento (3) $a = (a_0 \vee e) \wedge a_1$. Vamos a probar que a es el ínfimo del conjunto F . De (3) resulta (4) $a \leq a_0 \vee e$ y (5) $a \leq a_1$.

De (4) resulta (6) $\Delta a \leq \Delta a_0 \vee \Delta e = \Delta a_0 \vee 0 = \Delta a_0 = (\text{por (1)}) = a_0$.

De (1) resulta que (7) $a_0 \leq \Delta a_i$ para todo $i \in I$, luego de (6) y (7) tenemos que (8) $\Delta a \leq \Delta a_i$ para todo $i \in I$.

De (5) resulta (9) $\nabla a \leq \nabla a_1 = (\text{por (2)}) = a_1$. Por (2) tenemos (10) $a_1 \leq \nabla a_i$ para todo $i \in I$, luego de (9) y (10) resulta (11) $\nabla a \leq \nabla a_i$ para todo $i \in I$.

De (8) y (11) se concluye por el corolario del principio de determinación de Moisil, (ver Corolario 2.4.1) que (S1) $a \leq a_i$ para todo $i \in I$.

Probemos que (S2) Si $x \in L$ verifica $x \leq a_i$, para todo $i \in I$, entonces $x \leq a$.

De $x \leq a_i$, para todo $i \in I$, resulta (12) $\Delta x \leq \Delta a_i$, para todo $i \in I$, y (13) $\nabla x \leq \nabla a_i$, para todo $i \in I$.

Como $\Delta x, \nabla x \in B(L)$ entonces de (12) y (1) resulta (14) $\Delta x \leq a_0$ y por lo tanto $\Delta x \vee e \leq a_0 \vee e$.

Por (13) y (2) tenemos (15) $\nabla x \leq a_1$ luego de (14) y (15) resulta que $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x \leq (a_0 \vee e) \wedge a_1 = a$. ■

Corolario 2.12.1 Si L es un álgebra de Łukasiewicz con centro tal que $B(L)$ es un álgebra de Boole completa entonces L es completa.

Como toda álgebra de Łukasiewicz es en particular un álgebra de De Morgan entonces

Lema 2.12.2 Si L es un álgebra de Lukasiewicz y existe el supremo (ínfimo) de una familia, no vacía, $\{a_i\}_{i \in I}$ de elementos de L entonces también existe el ínfimo (el supremo) de la familia $\{\sim a_i\}_{i \in I}$ y además

$$\bigwedge_{i \in I} \sim a_i = \sim \bigvee_{i \in I} a_i, \quad \text{y} \quad \bigvee_{i \in I} \sim a_i = \sim \bigwedge_{i \in I} a_i.$$

Lema 2.12.3 Si L es un álgebra de Lukasiewicz, y existe $a = \bigvee_{i \in I} a_i$ entonces existe $\bigvee_{i \in I} \nabla a_i$ y además $\nabla a = \bigvee_{i \in I} \nabla a_i$.

Dem. De $a = \bigvee_{i \in I} a_i$ resulta que $a_i \leq a$ para todo $i \in I$ luego:

(S1) $\nabla a_i \leq \nabla a$ para todo $i \in I$.

Probemos que (S2) Si (1) $\nabla a_i \leq x$ para todo $i \in I$ entonces $\nabla a \leq x$.

De (1) resulta que $\nabla a_i \leq \Delta x$ para todo $i \in I$ y como $a_i \leq \nabla a_i$ para todo $i \in I$, tenemos que $a_i \leq \Delta x$ para todo $i \in I$ y por lo tanto $a = \bigvee_{i \in I} a_i \leq \Delta x$ luego $\nabla a \leq \Delta x \leq x$. De (S1)

y (S2) resulta $\nabla a = \bigvee_{i \in I} \nabla a_i$. ■

Corolario 2.12.2 Si L es un álgebra de Lukasiewicz, $\{b_i\}_{i \in I} \subseteq B(L)$ y existe $b = \bigvee_{i \in I} b_i$ entonces $b \in B(L)$.

Dem. $\nabla b = \nabla(\bigvee_{i \in I} b_i) = (\text{por Lema 2.12.3}) = \bigvee_{i \in I} \nabla b_i = \bigvee_{i \in I} b_i = b$. ■

Corolario 2.12.3 Si L es un álgebra de Lukasiewicz completa, entonces el álgebra de Boole $B(L)$ es completa. (L. Monteiro, [71]).

Lema 2.12.4 Si L es un álgebra de Lukasiewicz, y existe $a = \bigvee_{i \in I} a_i$ y $\Delta a_i = 0$ para todo $i \in I$ entonces $\Delta a = 0$. (A. Monteiro, [59]). *

Dem. Por hipótesis $\Delta a_i = 0$ para todo $i \in I$, por el Lema 2.4.8 esto es equivalente a $a_i \leq \sim a_i$ para todo $i \in I$, luego como toda álgebra de Lukasiewicz es un álgebra de Kleene tenemos que

$$a_i = a_i \wedge \sim a_i \leq a_j \vee \sim a_j = \sim a_j, \text{ cualesquiera que sean } i, j \in I,$$

y por lo tanto (1) $a = \bigvee_{i \in I} a_i \leq \sim a_j$ para todo $j \in I$. Por el Lema 2.12.2, sabemos que

(2) $\sim a = \bigwedge_{i \in I} \sim a_i$. De (1) y (2) resulta que $a \leq \sim a$ luego por el Lema 2.4.8 $\Delta a = 0$. ■

Lema 2.12.5 Si L es un álgebra de Lukasiewicz, y existe $a = \bigvee_{i \in I} a_i$ entonces también existe $\bigvee_{i \in I} \Delta a_i$ y además:

$$\Delta(\bigvee_{i \in I} a_i) = \bigvee_{i \in I} \Delta a_i.$$

(A. Monteiro, [59].)

Dem. La demostración que indicamos se debe a L. Monteiro, [76]. Al respecto ver A. Monteiro [61].

Por hipótesis $a_i \leq a$ para todo $i \in I$ luego (S1) $\Delta a_i \leq \Delta a$ para todo $i \in I$. Probemos que:
 (S2) Si $t \in L$ verifica $\Delta a_i \leq t$, para todo $i \in I$ entonces $\Delta a \leq t$.

De (1) $\Delta a_i \leq t$, para todo $i \in I$ resulta que (2) $\Delta a_i \leq \Delta t$, para todo $i \in I$.

Para cada $i \in I$ sea (3) $a'_i = \sim \Delta t \wedge \Delta a \wedge a_i$, luego teniendo en cuenta (S1) y (2), podemos afirmar que:

$$\Delta a'_i = \sim \Delta t \wedge \Delta a \wedge \Delta a_i = \sim \Delta t \wedge \Delta a_i \leq \sim \Delta t \wedge \Delta t = 0,$$

esto es (4) $\Delta a'_i = 0$ para todo $i \in I$.

Por el Teorema 2.6.4 de (3) resulta que (5) $\bigvee_{i \in I} a'_i = \bigvee_{i \in I} (\sim \Delta t \wedge \Delta a \wedge a_i) = \sim \Delta t \wedge \Delta a \wedge (\bigvee_{i \in I} a_i) = \sim \Delta t \wedge \Delta a \wedge a = \sim \Delta t \wedge \Delta a$.

Por el Lema 2.12.4 de (4) y (5) resulta que $\Delta(\bigvee_{i \in I} a'_i) = 0$ esto es $\Delta(\sim \Delta t \wedge \Delta a) = 0$, luego $\sim \Delta t \wedge \Delta a = 0$ y por lo tanto $\Delta a \leq \Delta t \leq t$. ■

Como consecuencia de resultados anteriores tenemos

Lema 2.12.6 Si en un álgebra de Łukasiewicz L existe $\bigwedge_{i \in I} y_i$, entonces también existen $\bigwedge_{i \in I} \nabla y_i$, $\bigwedge_{i \in I} \Delta y_i$ y además

$$\bigwedge_{i \in I} \nabla y_i = \nabla(\bigwedge_{i \in I} y_i) \text{ y } \bigwedge_{i \in I} \Delta y_i = \Delta(\bigwedge_{i \in I} y_i).$$

Dada un álgebra de Łukasiewicz L consideremos el conjunto $A(L) = \{x \in L : \Delta x = 0\}$, este conjunto no es vacío dado que $0 \in A(L)$.

Lema 2.12.7 Si L es un álgebra de Łukasiewicz con eje e entonces e es un cota superior de $A(L)$. (A. Monteiro (1969))

Dem. Como L tiene eje entonces $y = (\Delta y \vee e) \wedge \nabla y$, cualquiera que sea $y \in L$. Sea $x \in A(L)$, esto es $\Delta x = 0$, luego $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x = (0 \vee e) \wedge \nabla x = e \wedge \nabla x \leq e$. ■

Lema 2.12.8 Si L es un álgebra de Łukasiewicz y $e \in A(L)$ es una cota superior del conjunto $A(L)$ entonces e es un eje de L . (A. Monteiro (1969))

Dem. Por hipótesis tenemos que (1) $\Delta e = 0$ y (2) Si $\Delta x = 0$ entonces $x \leq e$. Probemos que:

(a) Si $x \leq \sim \nabla e$ entonces $\Delta x = x$, esto es $x \in B(L)$.

Si $x \leq \sim \nabla e$ entonces (3) $x \wedge \sim x \leq x \leq \sim \nabla e$. Como $\Delta(x \wedge \sim x) = 0$ entonces por (2) resulta que (4) $x \wedge \sim x \leq e \leq \nabla e$. De (3) y (4) resulta que $x \wedge \sim x \leq \sim \nabla e \wedge \nabla e = 0$, esto es $x \wedge \sim x = 0$ y por lo tanto $x \vee \sim x = 1$, lo que prueba que $x \in B(L)$ esto es $\Delta x = x$.

De $x \wedge \sim \nabla e \leq \sim \nabla e$ resulta por (a) que:

$$(b) \Delta(x \wedge \sim \nabla e) = x \wedge \sim \nabla e.$$

(c) $x = \Delta x \vee (x \wedge \nabla e)$, cualquiera que sea $x \in L$.

En efecto $x = x \wedge 1 = x \wedge (\nabla e \vee \sim \nabla e) = (x \wedge \nabla e) \vee (x \wedge \sim \nabla e) = (\text{por (b)}) = (x \wedge \nabla e) \vee (\Delta x \wedge \sim \nabla e) = (x \vee \Delta x) \wedge (x \vee \sim \nabla e) \wedge (\nabla e \vee \Delta x) \wedge 1 = x \wedge (x \vee \sim \nabla e) \wedge (\nabla e \vee \Delta x) = x \wedge (\nabla e \vee \Delta x) = (x \wedge \nabla e) \vee \Delta x$.

(d) $\Delta x \vee (e \wedge \nabla x) = \Delta x \vee (x \wedge \nabla e)$, cualquiera que sea $x \in L$.

En efecto (5) $\Delta(\Delta x \vee (e \wedge \nabla x)) = \Delta x \vee (\Delta e \wedge \nabla x) = \Delta x \vee (0 \wedge \nabla x) = \Delta x$.

(26) $\Delta(\Delta x \vee (x \wedge \nabla e)) = \Delta x \vee (\Delta x \wedge \nabla x) = \Delta x$.

(7) $\nabla(\Delta x \vee (e \wedge \nabla x)) = \Delta x \vee (\nabla e \wedge \nabla x) = \nabla(\Delta x \vee (x \wedge \nabla e))$.

De (5), (6) y (7) resulta por el principio de determinación de Moisil que se verifica (d), y de (c) y (d) tenemos que

$$(8) \quad x = \Delta x \vee (e \wedge \nabla x),$$

De (1) y (8) resulta por el Lema 2.4.4 que e es un eje de L . ■

Teorema 2.12.1 *Toda álgebra de Lukasiewicz L completa tiene eje.*

(A. Monteiro (1969))

Dem. Sea $A(L) = \{c_i\}_{i \in I}$, esto es (1) $\Delta c_i = 0$ para todo $i \in I$. Como L es un reticulado completo entonces existe (2) $c = \bigvee_{i \in I} c_i$. De (1) y (2) resulta por el Lema 2.12.4 $\Delta c = \Delta(\bigvee_{i \in I} c_i) = \bigvee_{i \in I} \Delta c_i = 0$. Luego $c \in A(L)$ y por (2) es la cota superior de $A(L)$, entonces por el Lema anterior c es el eje de L . ■

Corolario 2.12.4 *Toda álgebra de Lukasiewicz finita tiene eje.*

Vamos a indicar ahora un ejemplo de un álgebra de Lukasiewicz que no tiene eje. Consideremos el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales y el álgebra de Lukasiewicz $\mathbf{T} = \{0, c, 1\}$ indicada en el Ejemplo 2.2.2. Sea $L = \mathbf{T}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbf{T}$, algebrizado punto por punto. Notaremos con $\mathbf{0}$ el primer elemento de esta álgebra de Lukasiewicz, esto es $\mathbf{0}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{N}$. Sea S el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{T}$ tales que $f(x) = c$ para $x \in F \subset \mathbb{N}$, F finita, eventualmente vacía. Claramente S es una L -subálgebra de L .

Consideremos $A(S) = \{f \in S : \Delta f = \mathbf{0}\}$. Entonces $f \in A(S) \iff f(x) \in \{0, c\}$ para todo $x \in \mathbb{N}$. Probemos que el conjunto $A(S)$ no tiene último elemento. Si $f \in A(S)$ entonces existe una parte finita $F \subset \mathbb{N}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x \notin F \\ c, & \text{para } x \in F \end{cases}.$$

Sea $y \in \mathbb{N} \setminus F$ y $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{T}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x \notin F \cup \{y\} \\ c, & \text{para } x \in F \cup \{y\} \end{cases}.$$

Entonces $h \in A(S)$ y $f < h$, luego $A(S)$ no tiene último elemento y por lo tanto no tiene eje.

3 CAPITULO II

3.1 Homomorfismos

Definición 3.1.1 Una función h de un álgebra de Lukasiewicz A en un álgebra de Lukasiewicz A' se dice un homomorfismo de A en A' , si verifica las siguientes condiciones:

$$H1) \quad h(x \vee y) = h(x) \vee h(y),$$

$$H2) \quad h(\sim x) = \sim h(x),$$

$$H3) \quad h(\nabla x) = \nabla h(x).$$

Si h es suryectiva diremos que h es un epimorfismo y si h es biyectiva diremos que h es un isomorfismo.

Diremos que un álgebra de Lukasiewicz A' es una imagen homomórfica de un álgebra de Lukasiewicz A si existe un epimorfismo de A en A' . Si h es además biunívoca diremos que A es isomorfa a A' y notaremos $A \cong A'$.

El siguiente lema se prueba sin dificultad.

Lema 3.1.1 Si $h : A \rightarrow A'$ es un homomorfismo entonces:

$$H4) \quad h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y),$$

$$H5) \quad h(1) = 1,$$

$$H6) \quad h(0) = 0,$$

$$H7) \quad h(x \longrightarrow y) = h(x) \longrightarrow h(y),$$

$$H8) \quad h(x \rhd \longrightarrow y) = h(x) \rhd \longrightarrow h(y),$$

$$H9) \quad h(x \implies y) = h(x) \implies h(y),$$

$$H10) \quad h(\Delta x) = \Delta h(x),$$

$$H11) \quad h(Fr x) = Fr h(x),$$

$$H12) \quad h(Ext x) = Ext h(x)$$

El siguiente resultado se prueba sin dificultad:

Lema 3.1.2 Si L y L' son álgebras de Lukasiewicz y h es un homomorfismo de L en L' entonces $h(B(L)) \subseteq B(L')$ y la restricción h' de h a $B(L)$ es un homomorfismo booleano de $B(L)$ en $B(L')$.

El objetivo central es la determinación de las imágenes homomórficas de un álgebra de Lukasiewicz por medio de una construcción intrínseca efectuada sobre A .

Si L es un álgebra de Lukasiewicz entonces id_L es un homomorfismo suryectivo, luego L es una imagen homomórfica de L . Si L' es un álgebra de Lukasiewicz con un solo elemento, $L' = \{1'\}$ entonces la transformación $h : L \rightarrow L'$ definida por $h(x) = 1'$, cualquiera que

sea $x \in L$ es un homomorfismo suryectivo luego L' es una imagen homomórfica de L . Estas dos imágenes homomórficas de L se denominan imágenes triviales de L .

Si $h : A \rightarrow A'$ es un homomorfismo se denomina *núcleo* de h al siguiente conjunto:

$$Nuc(h) = h^{-1}(1) = \{a \in A : h(a) = 1\}.$$

Claramente este conjunto tiene las siguientes propiedades

D1) $1 \in Nuc(h)$,

D2) Si $a, a \rightarrow b \in Nuc(h)$, entonces $b \in Nuc(h)$.

Lema 3.1.3 Si A y A' son álgebras de Łukasiewicz y h es un homomorfismo de A en A' , entonces $h(a) = h(b)$ si y solo si $a \rightarrow b \in Nuc(h)$ y $b \rightarrow a \in Nuc(h)$.

Dem. $h(a \rightarrow b) = h(a) \rightarrow h(b) = h(a) \rightarrow h(a) = 1$ luego $a \rightarrow b \in Nuc(h)$. Análogamente de $h(b \rightarrow a) = 1$ resulta que $b \rightarrow a \in Nuc(h)$.

Recíprocamente si $a \rightarrow b \in Nuc(h)$ y $b \rightarrow a \in Nuc(h)$ entonces $1 = h(a \rightarrow b) = h(a) \rightarrow h(b)$ y $1 = h(b \rightarrow a) = h(b) \rightarrow h(a)$, luego por la propiedad IC13 indicada en el párrafo 2.5 tenemos que $h(a) = h(b)$. ■

Diremos que una parte D de un álgebra de Łukasiewicz L es un sistema deductivo si

D1) $1 \in D$,

D2) Si $a, a \rightarrow b \in D$, entonces $b \in D$. modus ponens

Lema 3.1.4 Todo sistema deductivo D de un álgebra de Łukasiewicz L es un filtro de L .

Dem. Las propiedades de la operación $\rightarrow$ que vamos a citar fueron probadas en el párrafo 2.5.

Probemos en primer lugar que si D es un sistema deductivo entonces se verifica:

(C1) Si $b \in D$ entonces $a \rightarrow b \in D$ para todo $a \in L$.

En efecto de $b \in D$ y por la propiedad ID5 sabemos que $b \rightarrow (a \wedge b) = 1$, luego de D1 y D2 resulta que $a \rightarrow b \in D$.

F1) $D \neq \emptyset$.

Obvio, ya que $1 \in D$.

F2) Si $a, b \in D$ entonces $a \wedge b \in D$.

Por la propiedad ID8 sabemos que $a \rightarrow (a \wedge b) = a \rightarrow b$. Como $a \in D$ resulta por (C1) que $a \rightarrow b \in D$, esto es $a \rightarrow (a \wedge b) \in D$, luego como $a \in D$ resulta por D2 que $a \wedge b \in D$.

F3) Si $a \in D$ y $a \leq b$ entonces $b \in D$.

De $a \leq b$ resulta por ID6 que $1 = a \rightarrow a \leq a \rightarrow b$, luego $a \rightarrow b = 1 \in D$ y como $a \in D$ resulta por D2 que $b \in D$. ■

Observemos que existen filtros que no son sistemas deductivos. En efecto en el álgebra de Łukasiewicz T indicada en el Ejemplo 2.2.1, $[c] = \{c, 1\}$ es un filtro y no es un sistema deductivo pues $c \in [c]$, $c \longrightarrow 0 = 1 \in [c]$ y $0 \notin [c]$.

Un filtro F de un álgebra de Łukasiewicz L se dice un Δ -filtro si verifica: Si $f \in F$ entonces $\Delta f \in F$.

Lema 3.1.5 *Un subconjunto D de un álgebra de Łukasiewicz L es un sistema deductivo si y solo si D es un Δ -filtro.*

Dem. Ya sabemos que todo sistema deductivo es un filtro sistema deductivo. Sea $d \in D$ entonces como por ID13 $d \longrightarrow \Delta d = 1$ y $1 \in D$ resulta por D2 que $\Delta d \in D$.

Supongamos ahora que (1) D es un Δ -filtro de L luego $1 \in D$. Si (2) $a \in D$ y (3) $a \longrightarrow b \in D$ entonces de (2) y (1) resulta que (4) $\Delta a \in D$. Luego como D es un filtro de (4) y (3): $\Delta a \wedge (a \longrightarrow b) \in D$. Pero $\Delta a \wedge (a \longrightarrow b) = \Delta a \wedge (\nabla \sim a \vee b) = (\Delta a \wedge \nabla \sim a) \vee (\Delta a \wedge b) = 0 \vee (\Delta a \wedge b) = \Delta a \wedge b$, esto es $\Delta a \wedge b \in D$ y como $\Delta a \wedge b \leq b$ resulta por ser D un filtro que $b \in D$. ■

Consideremos ahora una noción introducida por H. Rasiowa en el estudio de las álgebras de Nelson y que podemos también definir en las álgebras de Łukasiewicz.

Definición 3.1.2 *Un subconjunto D de un álgebra de Łukasiewicz L se denomina un filtro de primera especie si verifica:*

- R1) $D \neq \emptyset$,
- R2) Si $a, b \in D$ entonces $a \wedge b \in D$,
- R3) Si $a \in D$ y $a \longrightarrow b = 1$ entonces $b \in D$

Lema 3.1.6 *Un subconjunto D de un álgebra de Łukasiewicz L es un sistema deductivo si y solo si D es un filtro de primera especie.*

Dem. Empezemos por observar que un “filtro” de primera especie es un filtro, para ello basta probar que si (1) $a \in D$ y (2) $a \leq b$ entonces $b \in D$. De (2) resulta por ID6 que $1 = a \longrightarrow a \leq a \longrightarrow b$, luego (3) $a \longrightarrow b = 1 \in D$ luego de (1) y (3) resulta por R3 que $b \in D$.

Si D es un sistema deductivo entonces claramente se verifican las condiciones R1, R2 y R3.

Supongamos ahora que D es un filtro de primera especie. De R1 resulta que existe $d \in D$ luego como $d \longrightarrow 1 = 1$ resulta por R3 que $1 \in D$. Probemos que se verifica D2, esto es:

$$\text{Si } a, a \longrightarrow b \in D \text{ entonces } b \in D.$$

De las hipótesis resulta por R2 que (1) $(a \longrightarrow b) \wedge a \in D$. Pero (2) $((a \longrightarrow b) \wedge a) \longrightarrow b = (\text{por ID10}) = (a \longrightarrow b) \longrightarrow (a \longrightarrow b) = 1$, luego, de (1) y (2) resulta por R3 que $b \in D$.

También podemos indicar la siguiente demostración: ya vimos que D es un filtro. Si

$a \in D$ entonces como $a \longrightarrow \Delta a = 1$ resulta por R3 que D es un Δ -filtro y por lo tanto un sistema deductivo. ■

Veamos ahora otra forma de definir un sistema deductivo.

Diremos que una parte D de un álgebra de Łukasiewicz L es un sistema deductivo contrapuesto

C1) $1 \in D$,

C2) Si $a, a \rhd b \in D$, entonces $b \in D$.

Lema 3.1.7 *Un subconjunto D de un álgebra de Łukasiewicz L es un sistema deductivo si y solo si D es un sistema deductivo contrapuesto.*

Dem. Supongamos que D verifica D1 y D2, luego se verifica C1. Supongamos que $a, a \rhd b \in D$. Como $a \rhd b = (a \longrightarrow b) \wedge (\sim b \longrightarrow \sim b) \leq a \longrightarrow b$ y D es un filtro entonces $a \longrightarrow b \in D$ y como $a \in D$ resulta por D1 que $b \in D$.

Supongamos ahora que D verifica C1 y C2, luego se verifica D1. Supongamos que (1) $a \in D$ y (2) $a \longrightarrow b \in D$. Vimos en el Lema 2.5.5 que (3) $a \longrightarrow b = a \rhd (a \rhd b)$ luego de (1) y (3) resulta por C2 que (4) $a \rhd (a \rhd b) \in D$, y de (1) y (4) resulta por C2 que $b \in D$. ■

Vemos así que las dos implicaciones $\longrightarrow$ y $\rhd$ dan origen a los mismos sistemas deductivos.

Lema 3.1.8 *Para que un filtro D sea un sistema deductivo es necesario y suficiente que se verifique (C4) Si $a, a \longrightarrow b = \sim a \vee b \in D$ entonces $b \in D$.*

Dem. Supongamos que el filtro D es un sistema deductivo y que (1) $a \in D$ y (2) $a \longrightarrow b = \sim a \vee b \in D$. Entonces como D es un filtro $a \wedge (\sim a \vee b) \in D$, pero

$$\begin{aligned} a \wedge (\sim a \vee b) &= (a \wedge \sim a) \vee (a \wedge b) = (a \wedge \nabla \sim a) \vee (a \wedge b) = \\ &= a \wedge (\nabla \sim a \vee b) = a \wedge (a \longrightarrow b), \end{aligned}$$

luego $a \wedge (\sim a \vee b) \in D$ y como $a \wedge (\sim a \vee b) \leq a \longrightarrow b$ resulta por ser D un filtro que (3) $a \longrightarrow b \in D$. De (1) y (3) resulta por ser D un sistema deductivo que $b \in D$.

Supongamos ahora que D es un filtro que verifica la condición (C4). Como D es un filtro entonces se verifica D1) $1 \in D$. Probemos que se verifica D2), esto es que si (4) $a \in D$ y (5) $a \longrightarrow b \in D$ entonces $b \in D$. En efecto de (4) y (5) resulta por ser D un filtro que $a \wedge (a \longrightarrow b) \in D$, pero $a \wedge (a \longrightarrow b) = a \wedge (\nabla \sim a \vee b) = (a \wedge \nabla \sim a) \vee (a \wedge b) = (a \wedge \sim a) \vee (a \wedge b) = a \wedge (\sim a \vee b)$. Por lo tanto (6) $a \wedge (\sim a \vee b) \in D$, y como (7) $a \wedge (\sim a \vee b) \leq \sim a \vee b$ entonces de (6) y (7) resulta por ser D un filtro que $a \longrightarrow b = \sim a \vee b \in D$, luego por (C4) resulta que $b \in D$. ■

Si X es un subconjunto de un álgebra de Łukasiewicz L notaremos $\Delta X = \{\Delta x : x \in X\}$ y $\nabla X = \{\nabla x : x \in X\}$.

Vamos a indicar a continuación las relaciones que existen entre los sistemas deductivos de un álgebra de Łukasiewicz L y los filtros del álgebra de Boole $B(L)$.

Lema 3.1.9 Si D es un sistema deductivo de L , $D \cap B(L)$ es un filtro de $B(L)$ y $D \cap B(L) = \Delta D = \nabla D$.

Dem.

F1) $1 \in D \cap B(L)$. Obvio ya que $1 \in D, B(L)$.

F2) Supongamos que $x, y \in D \cap B(L)$, esto es (1) $x, y \in D$ y (2) $x, y \in B(L)$. De (1) resulta por ser D un filtro que (3) $x \wedge y \in D$, y de (2) resulta por ser $B(L)$ un álgebra de Boole que (4) $x \wedge y \in B(L)$. De (3) y (4) concluimos que $x \wedge y \in D \cap B(L)$.

F3) Supongamos que (5) $x \in D \cap B(L)$ e (6) $y \in B(L)$ tal que (7) $x \leq y$. De (5) resulta en particular que (8) $x \in D$, luego de (7) y (8) resulta por ser D un filtro que (9) $y \in D$, y de (9) y (6) $y \in D \cap B(L)$.

Sea $f \in D \cap B(L)$ esto es (10) $f \in D$ y (11) $f \in B(L)$. De (11) resulta que $\Delta f = f$, luego por (10) tenemos que $f \in \Delta D$. Supongamos ahora que $f \in \Delta D$, luego $f = \Delta d$ con $d \in D$, y como D es un sistema deductivo, luego un Δ -filtro tenemos que $\Delta d \in D$ y como $\Delta d \in B(L)$ tenemos que $f = \Delta d \in D \cap B(L)$. Análogamente se prueba que $D \cap B(L) = \nabla D$. ■

Recordemos los siguientes resultados de la teoría de reticulados:

Lema 3.1.10 Si R es un reticulado distributivo, con primer elemento 0 y último elemento 1, $X \subseteq R$ entonces

(a) el filtro generado por X es el conjunto

$$F(X) = \{y \in R : \text{existen } x_1, x_2, \dots, x_n \in X \text{ tales que } \bigwedge_{i=1}^n x_i \leq y\}.$$

(b) Si el conjunto X verifica que (I) " $x \wedge y \in X$ cualesquiera que sean $x, y \in X$," entonces

$$F(X) = \{y \in R : \text{existe } x \in X \text{ tal que } x \leq y\}.$$

Si $0 \notin X$ entonces $F(X)$ es un filtro propio de R .

Lema 3.1.11 Si L es un álgebra de Lukasiewicz y X un subconjunto de $B(L)$ que verifica la condición (I) indicada en el lema anterior entonces $F(X)$ es un Δ -filtro.

Dem. Como X verifica la condición (I) entonces por el Lema 3.1.10 (b), si $y \in F(X)$ existe $x \in X$ tal que (3) $x \leq y$. Como $x \in X \subseteq B(L)$ tenemos que (4) $\Delta x = x$, entonces por (3) y (4) resulta $x = \Delta x \leq \Delta y$, luego por el Lema 3.1.10 (b), tenemos que $\Delta y \in F(X)$. ■

Corolario 3.1.1 Si Q es un filtro de L entonces $F(\Delta Q)$ y $F(\nabla Q)$ son Δ -filtros de L .

Dem. Sean $x, y \in \Delta Q$, luego $x = \Delta q_1$, $y = \Delta q_2$, donde $q_1, q_2 \in Q$, luego $x \wedge y = \Delta(q_1 \wedge q_2)$ y como $q_1 \wedge q_2 \in Q$, tenemos que $x \wedge y \in \Delta Q$. Luego por el Lema 3.1.11 $F(\Delta Q)$ es un Δ -filtro de L . Análogamente se prueba que $F(\nabla Q)$ es un Δ -filtro de L . ■

Lema 3.1.12 Si Q es un filtro de L entonces $B(L) \cap Q \subseteq F(\nabla Q)$.

Dem. Si $b \in B(L) \cap Q$ entonces $b = \nabla b \in \nabla Q \subseteq F(\nabla Q)$. ■

Representemos por $\mathbf{D}(L)$ y $\mathbf{F}(B(L))$ los conjuntos de todos los sistemas deductivos de L y de todos los filtros del álgebra de Boole $B(L)$.

Lema 3.1.13 La transformación $\alpha : \mathbf{D}(L) \rightarrow \mathbf{F}(B(L))$ definida por $\alpha(D) = D \cap B(L)$ es un isomorfismo de orden del conjunto ordenado $(\mathbf{D}(L), \subseteq)$ en el conjunto ordenado $(\mathbf{F}(B(L)), \subseteq)$ y $\alpha^{-1}(Q) = F(Q)$ donde $Q \in \mathbf{F}(B(L))$.

Dem. Ya vimos en el Lema 3.1.9 que si $D \in \mathbf{D}(L)$ entonces $\alpha(D) = D \cap B(L) \in \mathbf{F}(B(L))$.

- 1) Si $D_1, D_2 \in \mathbf{D}(L)$ son tales que $D_1 \subseteq D_2$ entonces $\alpha(D_1) \subseteq \alpha(D_2)$.

Esta propiedad es obviamente verificada.

- 2) $F(\Delta D) = F(D \cap B(L)) = D$. Por el Lema 3.1.9 sabemos que $\Delta D = D \cap B(L)$.

Si $D \in \mathbf{D}(L)$ entonces $D \cap B(L) \subseteq D$ y en consecuencia $F(D \cap B(L)) \subseteq F(D) = D$.

Si $d \in D$ entonces $\Delta d \in D \cap B(L) \subseteq F(D \cap B(L))$ luego como $\Delta d \leq d$ tenemos que $d \in F(D \cap B(L))$.

- 3) α es suryectiva.

En efecto dado $Q \in \mathbf{F}(B(L))$ como Q verifica la condición (b) indicada en el Lema 3.1.10 tenemos que $F(Q) \in \mathbf{D}(L)$. Luego $\alpha(F(Q)) = F(Q) \cap B(L)$. Como $Q \subseteq B(L)$ entonces $Q = Q \cap B(L) \subseteq F(Q) \cap B(L)$. Recíprocamente si $y \in F(Q) \cap B(L)$ en particular $y \in F(Q)$ luego por el Lema 3.1.10 existe $x \in Q$ tal que $x \leq y$, y como $y \in B(L)$ tenemos que (1) $\nabla x \leq \nabla y = y$. De $x \in Q$, $x \leq \nabla x$ y $\nabla x \in B(L)$ resulta que (2) $\nabla x \in Q$. De (1) y (2) resulta que $y \in Q$, luego $F(Q) \cap B(L) \subseteq Q$, y por lo tanto $\alpha(F(Q) \cap B(L)) = Q$.

- 4) Si $D_1, D_2 \in \mathbf{D}$ son tales que $\alpha(D_1) \subseteq \alpha(D_2)$ entonces $D_1 \subseteq D_2$. Por hipótesis $D_1 \cap B(L) \subseteq D_2 \cap B(L)$, luego por 2) $D_1 = F(D_1 \cap B(L)) \subseteq F(D_2 \cap B(L)) = D_2$.

Acabamos así de probar que α es un isomorfismo de orden.

Si $Q \in \mathbf{F}(B(L))$ entonces $\alpha(F(Q)) = F(Q) \cap B(L)$. Probemos que $F(Q) \cap B(L) = Q$. En efecto como $Q \subseteq F(Q)$ entonces si $h \in Q \subseteq B(L)$, tenemos que $h \in F(Q) \cap B(L)$. Recíprocamente si $x \in F(Q) \cap B(L)$ entonces existe $t \in Q \subseteq B(L)$ tal que $t \leq x$, y $t = \Delta t$. Luego $t = \Delta t \leq \Delta x$. Como Q es un filtro de $B(L)$, $t \in Q$ y $t \leq \Delta x$ entonces $\Delta x \in Q$, y como $x \in B(L)$, $\Delta x = x$ luego $x \in Q$. Luego $\alpha(F(Q)) = F(Q) \cap B(L) = Q$ y como α es biunívoca tenemos que $F(Q) = \alpha^{-1}\alpha(F(Q)) = \alpha^{-1}(Q)$. ■

3.2 Algebras cocientes

Vamos ahora a indicar como se determinan todas las imágenes homomórficas de un álgebra de Łukasiewicz L por medio de una construcción intrínseca efectuada sobre L .

Lema 3.2.1 Si D es un sistema deductivo de un álgebra de Łukasiewicz L y $d \in D$ entonces $x \succ \longrightarrow d \in D$ cualquiera que sea $x \in L$.

Dem. Como $d \leq x \longrightarrow d = \sim x \vee d \vee (\nabla \sim x \wedge \nabla d)$, $d \in D$ y D es un filtro entonces $x \longrightarrow d \in D$. ■

Dado un sistema deductivo D de un álgebra de Łukasiewicz L y $a, b \in L$ notaremos $a \equiv b$ (mód. D) si: (C1) $a \longrightarrow b \in D$ y $b \longrightarrow a \in D$.

Lema 3.2.2 Para que $a \equiv b$ (mód. D) es necesario y suficiente que se verifique cualquiera de las condiciones siguientes:

$$(C2) (a \longrightarrow b) \wedge (b \longrightarrow a) \in D,$$

$$(C3) a \longrightarrow b, \sim b \longrightarrow \sim a, b \longrightarrow a, \sim a \longrightarrow \sim b \in D,$$

$$(C4) \text{ Existe } d \in D \text{ tal que } a \wedge d = b \wedge d.$$

Dem. (C1) $\iff$ (C2). Por el hecho de que D es un filtro es claro que la condición (C1) es equivalente a (C2).

(C1) $\iff$ (C3). Como por definición $a \longrightarrow b = (a \longrightarrow b) \wedge (\sim b \longrightarrow \sim a)$. Como D es un filtro entonces $a \longrightarrow b \in D$ equivale a $a \longrightarrow b, \sim b \longrightarrow \sim a \in D$, y análogamente $b \longrightarrow a \in D$ equivale a $b \longrightarrow a, \sim a \longrightarrow \sim b \in D$.

(C4) $\iff$ (C3). Supongamos que existe $d \in D$ tal que $a \wedge d = b \wedge d$ luego $b \longrightarrow (a \wedge d) = b \longrightarrow (b \wedge d)$ luego por IC9 y IC3

$$(b \longrightarrow a) \wedge (b \longrightarrow d) = (b \longrightarrow b) \wedge (b \longrightarrow d) = 1 \wedge (b \longrightarrow d) = b \longrightarrow d$$

esto es (1) $b \longrightarrow d \leq b \longrightarrow a$. Pero como $d \in D$ resulta por el Lemma 3.2.1 que (2) $b \longrightarrow d \in D$, luego de (1) y (2) resulta por ser D un filtro que (3) $b \longrightarrow a \in D$. Análogamente de $a \longrightarrow (a \wedge d) = a \longrightarrow (b \wedge d)$ se deduce (4) $a \longrightarrow b \in D$ y de (3) y (4) se concluye (C1).

Supongamos ahora que se verifica (C1), luego como D es un Δ -filtro tenemos que $d = \Delta((a \longrightarrow b) \wedge (b \longrightarrow a)) \in D$, esto es

$$(I) d = (\nabla \sim a \vee \Delta b) \wedge (\nabla b \vee \Delta \sim a) \wedge (\nabla \sim b \vee \Delta a) \wedge (\nabla a \vee \Delta \sim b)$$

y efectuando los cálculos tenemos que

$$d = (\nabla \sim a \wedge \nabla \sim b \wedge \nabla a \wedge \nabla b) \vee (\Delta \sim a \wedge \Delta \sim b) \vee (\Delta a \wedge \Delta b).$$

Luego como $d \in B(L)$

$$\Delta(d \wedge a) = \Delta d \wedge \Delta a = d \wedge \Delta a = 0 \vee 0 \vee (\Delta a \wedge \Delta b) = \Delta a \wedge \Delta b = \Delta(a \wedge b).$$

Análogamente se prueba que $\Delta(d \wedge a) = \Delta(a \wedge b)$ y por lo tanto:

$$(II) \Delta(d \wedge a) = \Delta(d \wedge b).$$

De (I) resulta que

$$\nabla(d \wedge a) = \nabla d \wedge \nabla a = d \wedge \nabla a = (\nabla \sim a \wedge \nabla \sim b \wedge \nabla a \wedge \nabla b) \vee \vee (\Delta a \wedge \Delta b),$$

y que

$$\nabla(d \wedge b) = \nabla d \wedge \nabla b = d \wedge \nabla b = (\nabla \sim a \wedge \nabla \sim b \wedge \nabla a \wedge \nabla b) \vee \vee (\Delta a \wedge \Delta b).$$

Luego (III) $\nabla(d \wedge a) = \nabla(d \wedge b)$.

De (II) y (III) resulta por el principio de determinación de Moisil que $a \wedge d = b \wedge d$ y como $d \in D$, hemos probado que se verifica (C3). ■

Técnicamente la condición (C4) es mas simple que las demás.

Probaremos ahora que la relación $\equiv$ es una relación de equivalencia, y para ello utilizaremos la condición (C4).

(E1) $a \equiv a$ (mód. D).

Como $1 \in D$ y $a \wedge 1 = a \wedge 1$ se verifica E1.

Claramente se verifica

(E2) Si $a \equiv b$ (mód. D) entonces $b \equiv a$ (mód. D).

(E3) Si $a \equiv b$ (mód. D) y $b \equiv c$ (mód. D) entonces $a \equiv c$ (mód. D).

Por hipótesis existen $d_1, d_2 \in D$ tales que $a \wedge d_1 = b \wedge d_1$ y $b \wedge d_2 = c \wedge d_2$ luego $a \wedge d_1 \wedge d_2 = b \wedge d_1 \wedge d_2$ y $b \wedge d_2 \wedge d_1 = c \wedge d_2 \wedge d_1$ y en consecuencia $a \wedge d_1 \wedge d_2 = c \wedge d_1 \wedge d_2$ y como $d_1 \wedge d_2 \in D$ entonces se verifica (E3).

Si utilizáramos la condición (C1) entonces las demostraciones son las siguientes:

(E1) Como por IC3 $a \rhd a = 1$ entonces $a \equiv a$ (mód. D).

Claramente se verifica (E2).

(E3) Por hipótesis (1) $a \rhd b \in D$, (2) $b \rhd a \in D$, (3) $b \rhd c \in D$, y (4) $c \rhd b \in D$. Por la fórmula IC10 sabemos que

$$(5) (a \rhd b) \rhd ((b \rhd c) \rhd (a \rhd c)) = 1 \in D.$$

Luego de (1) y (5) resulta por D2 (modus ponens) que

$$(6) (b \rhd c) \rhd (a \rhd c) \in D.$$

De (6) y (3) resulta nuevamente por D2 que

$$(7) a \rhd c \in D.$$

En forma análoga de

$$(c \rhd b) \rhd ((b \rhd a) \rhd (c \rhd a)) = 1 \in D.$$

Utilizando (4) y (2) se deduce que

$$(8) c \rhd a \in D.$$

Probemos ahora que la relación “ $\equiv$ ” es compatible con todas las operaciones, utilizando la condición (C4).

(E4) Si $a \equiv b$ (mód. D) entonces $\sim a \equiv \sim b$ (mód. D).

Por hipótesis existe $d \in D$ tal que $a \wedge d = b \wedge d$ luego $\sim a \vee \sim d = \sim b \vee \sim d$ y por lo tanto $(\sim a \vee \sim d) \wedge \Delta d = (\sim b \vee \sim d) \wedge \Delta d$ esto es $(\sim a \wedge \Delta d) \vee (\sim d \wedge \Delta d) = (\sim b \wedge \Delta d) \vee (\sim d \wedge \Delta d)$ y como $\sim d \wedge \Delta d = 0$ tenemos que $\sim a \wedge \Delta d = \sim b \wedge \Delta d$, luego como $\Delta d \in D$ resulta que $\sim a \equiv \sim b$ (mód. D).

(E5) Si $a \equiv b$ (mód. D) entonces $\nabla a \equiv \nabla b$ (mód. D).

Por hipótesis existe $d \in D$ tal que $a \wedge d = b \wedge d$ luego $\nabla(a \wedge d) = \nabla(b \wedge d)$ esto es

$\nabla a \wedge \nabla d = \nabla b \wedge \nabla d$ luego como $d \leq \nabla d$, $d \in D$ y D es un filtro tenemos que $\nabla d \in D$, luego $\nabla a \equiv \nabla b$ (mód. D).

(E6) Si $a \equiv a'$ (mód. D) y $b \equiv b'$ (mód. D) entonces $a \vee b \equiv a' \vee b'$ (mód. D).

Por hipótesis existen $d_1, d_2 \in D$ tales que $a \wedge d_1 = a' \wedge d_1$ y $b \wedge d_2 = b' \wedge d_2$ luego $a \wedge d_1 \wedge d_2 = a' \wedge d_1 \wedge d_2$ y $b \wedge d_2 \wedge d_1 = b' \wedge d_2 \wedge d_1$ y en consecuencia $a \wedge d_1 \wedge d_2 = a' \wedge d_1 \wedge d_2$ y $b \wedge d_1 \wedge d_2 = b' \wedge d_1 \wedge d_2$ luego $(a \vee b) \wedge d_1 \wedge d_2 = (a' \vee b') \wedge d_1 \wedge d_2$ y como $d_1 \wedge d_2 \in D$ resulta que $a \vee b \equiv a' \vee b'$ (mód. D).

Que la relación “ $\equiv$ ” es compatible con $\wedge$ es una consecuencia inmediata de una de las leyes de De Morgan y de que “ $\equiv$ ” es compatible con $\sim$ y $\vee$.

Veamos ahora como se demuestra lo anterior si utilizamos la condición (C1).

(E4) Por hipótesis $a \rhd b \in D$ y $b \rhd a \in D$, luego como por IC16

$$\sim a \rhd \sim b = b \rhd a \text{ y } \sim b \rhd \sim a = a \rhd b$$

resulta inmediatamente que $\sim a \equiv \sim b$ (mód. D).

(E5) Por hipótesis $a \rhd b \in D$ y $b \rhd a \in D$, luego (1) $\Delta(a \rhd b) \in D$ y (2) $\Delta(b \rhd a) \in D$.

Por IC10 sabemos que (3) $\Delta(a \rhd b) \rhd (\nabla a \rhd \nabla b) = 1 \in D$ luego de (3) y (1) resulta que $\nabla a \rhd \nabla b \in D$. En forma análoga se prueba que $\nabla b \rhd \nabla a \in D$.

Probemos ahora: (A) Si $a \equiv a'$ (mód. D) entonces $a \vee b \equiv a' \vee b$ (mód. D).

En efecto:

$$\begin{aligned} (a \vee b) \rhd (a' \vee b) &= (\sim a \wedge \sim b) \vee a' \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla \sim b \wedge (\nabla a' \vee \nabla b)) = \\ &= (\sim a \wedge \sim b) \vee a' \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla \sim b \wedge \nabla a') \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla \sim b \wedge \nabla b) = \\ &= (\sim a \wedge \sim b) \vee a' \vee [((\nabla \sim a \wedge \nabla a') \vee b) \wedge (\nabla \sim b \vee b)] \vee [((\nabla \sim a \wedge \nabla b) \vee b) \wedge (\nabla \sim b \vee b)] = \\ &= (\sim a \wedge \sim b) \vee a' \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla a') \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b) \vee b = \\ &= (\sim a \wedge \sim b) \vee a' \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla a') \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b) = \\ &= [(\sim a \vee \nabla \sim a) \wedge (\sim a \vee \nabla b) \wedge (\sim b \vee \nabla \sim a) \wedge (\sim b \vee \nabla b)] \vee a' \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla a') = \\ &= [\nabla \sim a \wedge (\sim a \vee \nabla b) \wedge (\sim b \vee \nabla \sim a)] \vee a' \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla a') = \\ &= [\nabla \sim a \wedge (\sim a \vee \nabla b)] \vee a' \vee b \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla a') \geq \\ &= \sim a \vee a' \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla a') = a \rhd a' \end{aligned}$$

y como $a \rhd a' \in D$ de la desigualdad precedente resulta que $(a \vee b) \rhd (a' \vee b) \in D$.

En forma análoga se prueba que $(a' \vee b) \rhd (a \vee b) \in D$.

(E6) De $a \equiv a'$ (mód. D) resulta por (A) que $a \vee b \equiv a' \vee b$ (mód. D) y de $b \equiv b'$ (mód. D) resulta $b \vee a' \equiv b' \vee a$ (mód. D), luego $a \vee b \equiv a' \vee b'$ (mód. D).

Dado un sistema deductivo D de un álgebra de Łukasiewicz L , al conjunto cociente de L por la relación de congruencia “ $\equiv$ ” lo notaremos por $A/\equiv$ ó A/D . Si $x \in L$ a la clase de equivalencia que contiene al elemento x la notaremos $C_D(x) = \{y \in L : y \equiv x\}$ ó simplemente por $C(x)$.

Si $x, y \in L$ y algebrizamos el conjunto A/D por

$$(1) C(x) \vee C(y) = C(x \vee y); \quad (2) C(x) \wedge C(y) = C(x \wedge y)$$

$$(3) \sim C(x) = C(\sim x); \quad (4) \nabla C(x) = C(\nabla x); \quad (5) 1' = C(1)$$

entonces en virtud de lo demostrado precedentemente el sistema $(A' = A/D, 1', \nabla, \sim, \vee, \wedge)$ es un álgebra de Łukasiewicz a la que denominaremos álgebra cociente de L por D .

Claramente la transformación $h : A \rightarrow A/D$ definida por $h(a) = C(a)$ es un homomorfismo, denominado homomorfismo natural, de A sobre A/D , que tiene por núcleo a D . En efecto, sea $N = h^{-1}(1')$. Probaremos que $N = D$. Si $x \in N$ entonces $C(x) = h(x) = 1' = C(1)$, luego $x \equiv 1$ y en consecuencia existe $d \in D$ tal que $x \wedge d = 1 \wedge d$ esto es $x \wedge d = d$ y por lo tanto $d \leq x$, luego como $d \in D$ y D es un filtro tenemos que $x \in D$. Recíprocamente sea $x \in D$ entonces como $d \wedge d = 1 \wedge d$ resulta que $d \equiv 1$ (mód. D), luego $d \in C(1) = 1'$ esto es $h(d) = 1'$ luego $d \in N$.

Recordemos, ver por ejemplo [81], que si E, E' son conjuntos no vacíos y f es una función de E sobre E' entonces la siguiente relación, definida sobre E :

$$a, b \in E, \quad a R_f b \text{ sss } f(a) = f(b)$$

es una relación de equivalencia. Representemos por $C(a)$ la clase de equivalencia con respecto a R_f que contiene al elemento $a \in E$, esto es:

$$C(a) = \{b \in E : b R_f a\} = \{b \in E : f(b) = f(a)\}.$$

Recordemos aun que si R es una relación de equivalencia sobre un conjunto E se denomina **conjunto cociente** de E por R al conjunto de todas las clases de equivalencia con respecto a R . Este conjunto se representa por la notación E/R .

Consideremos la transformación $\varphi : E \rightarrow E/R$ definida por $\varphi(x) = C(x)$. Es bien conocido que φ está bien definida ya que si $x = y$ entonces $\varphi(x) = C(x) = C(y) = \varphi(y)$. Además φ es suryectiva, ya que dado $x' \in E/R$ esto es, $x' = C(x)$ con $x \in E$ y entonces $\varphi(x) = C(x) = x'$. Por lo tanto E/R es una imagen de E por intermedio de φ .

φ se denomina la **transformación canónica** ("conforme a las reglas") o **natural** de E sobre E/R .

Vamos a demostrar que toda imagen de E se puede obtener de este modo, esto es considerando una relación de equivalencia R sobre E y construyendo el conjunto cociente E/R .

Lema 3.2.3 Si $f_1 : E \rightarrow E_1$, $f_2 : E \rightarrow E_2$, $f_1(E) = E_1$, y $R_{f_1} \subseteq R_{f_2}$, (esto es, $a R_{f_1} b \Rightarrow a R_{f_2} b$) entonces existe una única función h de E_1 en E_2 tal que $h \circ f_1 = f_2$. Si $f_2(E) = E_2$ entonces h es suryectiva.

Recordemos como se define h . Dado $a_1 \in E_1 = f_1(E)$, luego $a_1 = f_1(a)$ con $a \in E$ y por lo tanto $f_2(a) = a_2 \in E_2$. entonces se define $h(a_1) = a_2 = f_2(a)$.

Lema 3.2.4 Si $f_1(E) = E_1$, $f_2(E) = E_2$, y $R_{f_1} = R_{f_2}$, entonces E_1 y E_2 son coordinables.

Lema 3.2.5 Si $f(E) = E_1$ entonces $E' = E/R_f$ es coordinable con E_1 .

Por lo tanto, todas las imágenes de un conjunto, no vacío, E se obtienen (a menos de una biyección) considerando relaciones de equivalencia R sobre E y construyendo E/R , dado que: 1) si R es una relación de equivalencia definida sobre E entonces $E' = E/R$ es una imagen de E y 2) si E' es una imagen de E existe una relación de equivalencia R definida sobre E tal que E' es coordinable con E/R .

Lema 3.2.6 Sean L, L_1, L_2 álgebras de Łukasiewicz, $h_1 : L \rightarrow L_1$ $h_2 : L \rightarrow L_2$ tales que $h_1(L) = L_1$, y $Nuc(h_1) \subseteq Nuc(h_2)$. Entonces existe un homomorfismo $h : L_1 \rightarrow L_2$. Si además $h_2(L) = L_2$ entonces L_2 es una imagen homomórfica de L_1 .

Dem. $Nuc(h_1) \subseteq Nuc(h_2)$, equivale a decir que $R_{h_1} \subseteq R_{h_2}$, luego por el Lema 3.2.3 la transformación $h : L_1 \rightarrow L_2$ definida por $h(a_1) = h_2(a)$, donde $h_1(a) = a_1$ es una función de L_1 en L_2 que verifica $h \circ h_1 = h_2$ y además h es única. Probemos que en este caso h es un homomorfismo.

$$H1) \quad h(a_1 \vee b_1) = h(a_1) \vee h(b_1).$$

Sean $a, b \in L$ tales que $h_1(a) = a_1$, $h_1(b) = b_1$ entonces $h(a_1) \vee h(b_1) = h(h_1(a)) \vee h(h_1(b)) = h_2(a) \vee h_2(b) = h_2(a \vee b) = (h \circ h_1)(a \vee b) = h(h_1(a \vee b)) = h(h_1(a) \vee h_1(b)) = h(a_1 \vee b_1)$.

$$H2) \quad h(\sim a_1) = h(\sim h_1(a)) = h(h_1(\sim a)) = h_2(\sim a) = \sim h_2(a) = \sim ((h \circ h_1)(a)) = \sim (h(h_1(a))) = \sim h(a_1).$$

$$H3) \quad h(\nabla a_1) = h(\nabla h_1(a)) = h(h_1(\nabla a)) = h_2(\nabla a) = \nabla h_2(a) = \nabla ((h \circ h_1)(a)) = \nabla (h(h_1(a))) = \nabla h(a_1).$$

Si $h(L) = L_2$ entonces por el Lema 3.2.3 la función h es suryectiva. ■

Lema 3.2.7 Sean L, L_1, L_2 álgebras de Łukasiewicz, $h_1 : L \rightarrow L_1$ $h_2 : L \rightarrow L_2$ epimorfismos tales que $Nuc(h_1) = Nuc(h_2)$. Entonces L_1 y L_2 son álgebras de Łukasiewicz isomorfas.

Dem. $Nuc(h_1) = Nuc(h_2)$, equivale a decir que $R_{h_1} = R_{h_2}$, luego por el Lema 3.2.4 la transformación $h : L_1 \rightarrow L_2$ definida por $h(a_1) = h_2(a)$, donde $h_1(a) = a_1$ es una biyección de L_1 en L_2 . Por el Lema 3.2.6 h es un homomorfismo, luego h es un isomorfismo. ■

Corolario 3.2.1 Si L y L' son álgebras de Łukasiewicz y h es un homomorfismo de L sobre L' entonces L' es isomorfa a $L/Nuc(h)$.

Dem. Sea $F = Nuc(h)$, luego F es un sistema deductivo de L y en consecuencia $L'' = L/Nuc(h)$ es un álgebra de Łukasiewicz. Además $\varphi(x) = C_{Nuc(h)}(x)$ es un epimorfismo de L en L'' tal que $Nuc(\varphi) = F = Nuc(h)$ y por lo tanto $L'' \cong L/Nuc(h)$. ■

Acabamos así de probar el siguiente resultado de A. Monteiro, ([52]:

Todas las imágenes homomórficas de un álgebra de Łukasiewicz L se obtienen (a menos de isomorfismo) considerando sistemas deductivos D de L y construyendo L/D .

Lema 3.2.8 Si L y L' son álgebras de Łukasiewicz, $h : L \rightarrow L'$ es un homomorfismo, $G \subseteq L$ tal que $SL(G) = L$ entonces $SL(h(G)) = h(L)$. Esto es si G genera a L entonces $h(G)$ genera a $h(L)$.

Dem. Sea $S' = SL(h(G))$, luego S' es una L -subálgebra de L' , y en consecuencia $S = h^{-1}(S')$ es una L -subálgebra de L . Además (1) $G \subseteq S$ pues si $g \in G$ entonces $h(g) \in h(G) \subseteq S'$ y por lo tanto $g \in h^{-1}(S') = S$. De (1) resulta que $L = SL(G) \subseteq S$ y por lo tanto $L = SL(G)$. Como h es una función de L sobre $h(L)$ tenemos que $h(L) = h(S) = h(h^{-1}(S')) = S' = SL(h(G))$. ■

Corolario 3.2.2 Si L y L' son álgebras de Łukasiewicz, $h : L \rightarrow L'$ es un epimorfismo, $G \subseteq L$ tal que $SL(G) = L$ entonces $SL(h(G)) = L'$.

Lema 3.2.9 Sean L y L' álgebras de Łukasiewicz. Para que un epimorfismo $h : L \rightarrow L'$ sea un isomorfismo es necesario y suficiente que $Nuc(h) = \{1\}$.

Dem. Supongamos que h es un isomorfismo entonces si $a \in Nuc(h)$ esto es $h(a) = 1 = h(1)$, luego como h es biunívoca $a = 1$. Supongamos ahora que (1) $Nuc(h) = \{1\}$ y que $h(a) = h(b)$ luego $1 = h(a \rightarrow b) = h(b \rightarrow a)$ y por lo tanto $a \rightarrow b, b \rightarrow a \in Nuc(h)$ luego $a \rightarrow b = 1 = b \rightarrow a$ y en consecuencia $a = b$. ■

Si X es un subconjunto de un álgebra de Łukasiewicz L notaremos $\sim X = \{\sim x : x \in X\}$.

Lema 3.2.10 Si R es una relación de congruencia definida sobre un álgebra de Łukasiewicz L entonces:

I) $C(1) = \{x \in L : x R 1\}$ es un sistema deductivo.

II) Las siguientes condiciones son equivalentes:

- 1) $a R b$.
- 2) $a \rightarrow b, \sim a \rightarrow \sim b, b \rightarrow a, \sim b \rightarrow \sim a \in C(1)$.
- 3) Existe $n \in C(1)$ tal que $a \wedge n = b \wedge n$.

III) $C(1) = \sim C(0) = \{\sim x : x \in C(0)\}$.

Dem.

I) Como $1 R 1$ entonces F1) $1 \in C(1)$.

F2) Sean $x, y \in C(1)$, luego $x R 1, y R 1$, y como R es compatible con $\wedge$ tenemos que $x \wedge y R 1 \wedge 1 = 1$, por lo tanto $x \wedge y \in C(1)$.

F3) Si $x \in C(1)$, entonces $x R 1$ y como $y R y$ y R es compatible con $\wedge$ tenemos que $x \wedge y R 1 \wedge y = y$. Por lo tanto si $x \leq y$ donde $y \in L$ tendremos que $x \wedge y = x$ y por lo tanto $x R y$ y como $x R 1$ tendremos, dado que R es una relación de equivalencia, que $y R 1$, esto es $y \in C(1)$.

Observemos que basta que R sea compatible con $\wedge$ para que $C(1)$ sea un filtro.

F4) Si $x \in C(1)$ esto es $x R 1$ luego como R es compatible con Δ tenemos que $\Delta x R \Delta 1 = 1$, y por lo tanto $\Delta x \in C(1)$. Acabamos así de probar que $C(1)$ es un sistema deductivo.

II) Probemos que $1 \rightarrow 2; 2 \rightarrow 3; 3 \rightarrow 1$.

$1 \rightarrow 2)$ De $a R b$ resulta por ser R compatible con $\vee$ que:

$$1 = \nabla \sim a \vee a R \nabla \sim a \vee b = a \rightarrow b,$$

por lo tanto $a \rightarrow b \in C(1)$. De $a R b$ resulta por ser R compatible con $\sim$ que $\sim a R \sim b$ luego como R es compatible con $\vee$ tenemos que $1 = \nabla a \vee \sim a R \nabla a \vee \sim b = \sim a \rightarrow \sim b$ por lo tanto $\sim a \rightarrow \sim b \in C(1)$. Análogamente se prueba que $b \rightarrow a, \sim a \rightarrow \sim b \in C(1)$.

2 $\rightarrow$ 3) De $a \rightarrow b, \sim a \rightarrow \sim b \in C(1)$ y $b \rightarrow a, \sim b \rightarrow \sim a \in C(1)$ resulta por ser $C(1)$ un filtro que $a \rhd b, b \rhd a \in C(1)$, luego

$$n = (a \rhd b) \wedge (b \rhd a) \in C(1),$$

y se prueba en forma análoga a lo indicado en el Lema 3.2.2, que $a \wedge d = b \wedge d$.

3 $\rightarrow$ 1) Supongamos que existe $n \in C(1)$ tal que $a \wedge n = b \wedge n$. De $n \in C(1)$ resulta $n R 1$, luego como R es compatible con $\wedge$ tenemos que $a \wedge n R a \wedge 1 = a$ y $b \wedge n R b \wedge 1 = b$, y como por hipótesis $a \wedge n = b \wedge n$ resulta que $a R b$.

III) $x \in C(1) \iff x R 1 \iff$ (por ser R compatible con “ $\sim$ ”) $\sim x R \sim 1 = 0$
 $\iff \sim x \in C(0) \iff x \in \sim C(0)$.

■

Por lo tanto podemos afirmar que existe correspondencia biyectiva entre los sistemas deductivos de un álgebra de Łukasiewicz L y el conjunto de las congruencias definidas sobre L .

3.3 Construcción de sistemas deductivos

Vamos a indicar métodos para obtener sistemas deductivos de un álgebra de Łukasiewicz. En la elaboración de una teoría deductiva, como se presenta en matemática, se considera un conjunto H de enunciados, a cada uno de los cuales se denomina axiomas ó hipótesis. Los enunciados que figuran en H no son, en general, tautologías del cálculo proposicional y por eso se dice que son verdaderas por hipótesis.

Se trata de obtener “consecuencias lógicas” a partir de las hipótesis que figuran en H , lo que se hace por medio de “demostraciones” en las cuales se deben respetar las reglas de la lógica.

Esta situación tiene su contrapartida en el estudio de las álgebras de Łukasiewicz de acuerdo a la definición que vamos a indicar.

En primer lugar vamos a considerar el caso en que H es una sucesión finita de elementos de un álgebra de Łukasiewicz L .

Definición 3.3.1 Dada una sucesión $h_1, h_2, \dots, h_n$ de elementos de L se dice que $x \in L$ es consecuencia de la sucesión indicada y notaremos $h_1, h_2, \dots, h_n \vdash x$ si

$$(h_1 \wedge h_2 \wedge \dots \wedge h_n) \rightarrow x = 1.$$

El concepto intuitivo que tenemos de una consecuencia lógica es de tal naturaleza que si x es una consecuencia de la sucesión $h_1, h_2, \dots, h_n$ entonces, si alteramos el orden de las hipótesis, entonces x también es una consecuencia de la nueva sucesión así obtenida. Esto es lo que indicaremos en los siguientes resultados:

Lema 3.3.1 Si $h_1, h_2, \dots, h_{k-1}, h_k, h_{k+1}, \dots, h_n \vdash x$ entonces

$$h_1, h_2, \dots, h_{k-1}, h_{k+1}, h_k, \dots, h_n \vdash x.$$

Dem. El lema es evidente, dada la propiedad conmutativa del ínfimo. ■

A partir de lema precedente, por procedimientos triviales, se prueba:

Lema 3.3.2 Si $h_1, h_2, \dots, h_n \vdash x$ y $k_1, k_2, \dots, k_n$ es una permutación de los elementos $h_1, h_2, \dots, h_n$ entonces $k_1, k_2, \dots, k_n \vdash x$.

Vemos así que el hecho de que x sea consecuencia de las hipótesis que figuran en una sucesión no depende del orden de las mismas, sino solamente de las hipótesis del conjunto en cuestión.

Podemos entonces reemplazar la definición precedente por la siguiente:

Definición 3.3.2 Dada un conjunto finito, no vacío, $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ de elementos de L diremos que $x \in L$ es consecuencia de H y notaremos $(h_1, h_2, \dots, h_n) \vdash x$ si

$$(h_1 \wedge h_2 \wedge \dots, \wedge h_n) \longrightarrow x = 1.$$

Lema 3.3.3 Si $(h_1, h_2, \dots, h_n) \vdash x$ entonces $(h_0, h_1, h_2, \dots, h_n) \vdash x$.

Dem. Como

$$h_0 \wedge h_1 \wedge h_2 \wedge \dots, \wedge h_n \leq h_1 \wedge h_2 \wedge \dots, \wedge h_n$$

entonces teniendo en cuenta la hipótesis $(h_1 \wedge h_2 \wedge \dots, \wedge h_n) \longrightarrow x = 1$ y la propiedad ID7 de $\longrightarrow$ tenemos que

$$1 = (h_1 \wedge h_2 \wedge \dots, \wedge h_n) \longrightarrow x \leq (h_0 \wedge h_1 \wedge h_2 \wedge \dots, \wedge h_n) \longrightarrow x,$$

lo que prueba el lema. ■

Definición 3.3.3 Diremos que $x \in L$ es consecuencia de la parte vacía de L si $x = 1$ y notaremos $\emptyset \vdash x$, esto es $\emptyset \vdash x \iff x = 1$.

Definición 3.3.4 Dada una parte H de un álgebra de Łukasiewicz L , diremos que x es una consecuencia de H , si x es una consecuencia de una parte finita de H y notaremos $H \vdash x$.

Dada un subconjunto H de un álgebra de Łukasiewicz L notaremos por $C(H)$ el conjunto de todas las consecuencias de H . A este operador denominaremos *operador de consecuencia*.

Dado un subconjunto H de un álgebra de Łukasiewicz L , daremos el nombre de *sistema deductivo generado por H* a la intersección de todos los sistemas deductivos que contienen a H , y lo notaremos $D(H)$. Dado que L es un sistema deductivo que contiene a H y que la intersección de sistemas deductivos es un sistema deductivo, entonces el operador D está bien definido. Claramente $D(H)$ es el menor sistema deductivo que contiene a H . La definición de $D(H)$ no es constructiva ya que hace intervenir la familia de todos los sistemas deductivos que contienen a H .

Teorema 3.3.1 Si H es un subconjunto de un álgebra de Łukasiewicz L entonces $D(H) = C(H)$.

Dem.

- Primer caso: $H = \emptyset$. Por definición $C(\emptyset) = \{1\}$. Por otro lado como $\{1\}$ es un sistema deductivo, y es el menor sistema deductivo de L entonces está contenido en cualquier otro sistema deductivo luego $D(\emptyset) = \{1\}$.

- Segundo caso: $H \neq \emptyset$.

(A) $C(H)$ es un sistema deductivo.

D1) $1 \in C(H)$. En efecto como $H \neq \emptyset$ existe $h \in H$ y como $h \rightarrow 1 = 1$ resulta que $1 \in C(H)$.

D2) Si $x \in C(H)$ y $x \rightarrow y \in C(H)$ entonces $y \in C(H)$.

Por hipótesis:

$$\left(\bigwedge_{i=1}^n h_i\right) \rightarrow x = 1, \quad h_i \in H, \quad 1 \leq i \leq n \quad (1)$$

$$\left(\bigwedge_{j=1}^m k_j\right) \rightarrow (x \rightarrow y) = 1, \quad k_j \in H, \quad 1 \leq j \leq m \quad (2)$$

Pongamos $h = \bigwedge_{i=1}^n h_i$ y $k = \bigwedge_{j=1}^m k_j$, entonces

$$h \rightarrow x = 1 \quad (3)$$

$$k \rightarrow (x \rightarrow y) = 1, \quad (4)$$

Como $a \rightarrow 1 = 1$ de (4) resulta que

$$h \rightarrow (k \rightarrow (x \rightarrow y)) = 1, \quad (5)$$

luego teniendo en cuenta la propiedad ID9 de $\rightarrow$, (5) se escribe

$$(h \wedge k) \rightarrow (x \rightarrow y) = 1, \quad (6)$$

Por ID15 sabemos que

$$((h \wedge k) \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow ((h \wedge k) \rightarrow x) \rightarrow ((h \wedge k) \rightarrow y) = 1 \quad (7)$$

Luego como por ID4, $1 \rightarrow a = a$, de (6) y (7) resulta que

$$((h \wedge k) \rightarrow x) \rightarrow ((h \wedge k) \rightarrow y) = 1 \quad (8)$$

Por ID10 sabemos que

$$(h \wedge k) \rightarrow x = (k \wedge h) \rightarrow x = k \rightarrow (h \rightarrow x) \quad (9)$$

y como por (3) $h \rightarrow x = 1$ tenemos

$$(h \wedge k) \rightarrow x = 1 \quad (10)$$

Luego como $1 \rightarrow a = a$ de (9) y (10) resulta

$$(h \wedge k) \rightarrow y = 1 \quad (11)$$

esto es

$$\left(\bigwedge_{i=1}^n h_i \wedge \bigwedge_{j=1}^m k_j\right) \rightarrow y = 1 \quad (12)$$

donde $h_i \in H$, $1 \leq i \leq n$ y $k_j \in H$, $1 \leq j \leq m$, y por lo tanto $y \in C(H)$.

De D1) y D2) resulta que $C(H)$ es un sistema deductivo.

(B) $\frac{H \subseteq C(H)}{}$.

Sea $h \in H$, luego como $h \longrightarrow h = 1$ resulta que $H \vdash h$, esto es $h \in C(H)$.

De (A) y (B) resulta

(C) $D(H) \subseteq C(H)$.

(D) $\frac{C(H) \subseteq D(H)}{}$.

Si $x \in C(H)$ entonces

$$\left(\bigwedge_{i=1}^n h_i\right) \longrightarrow x = 1, \quad h_i \in H, \quad 1 \leq i \leq n \quad (13)$$

luego como $h_i \in H \subseteq D(H)$ para $1 \leq i \leq n$ y $D(H)$ es un filtro resulta que

$$\bigwedge_{i=1}^n h_i \in D(H). \quad (14)$$

De (13) y (14) resulta por modus ponens que $x \in D(H)$.

De (C) y (D) resulta que $D(H) = C(H)$. ■

Tenemos así una manera constructiva de obtener sistemas deductivos generados por un conjunto dado. Vamos ahora a probar un resultado denominado "*Teorema de la deducción*" que fue probado por primera vez, en la lógica clásica, por Alfred Tarski y Jacques Herbrand.

Teorema 3.3.2 Teorema de la deducción

$$H \cup \{x\} \vdash y \iff H \vdash x \longrightarrow y$$

Dem. Si $H = \emptyset$ entonces $H \cup \{x\} = \{x\}$ luego $H \cup \{x\} = \{x\} \vdash y \iff x \longrightarrow y = 1 \iff \emptyset \vdash x \longrightarrow y$. Supongamos ahora que $H \neq \emptyset$.

La condición es necesaria Si $H \cup \{x\} \vdash y$ entonces existen $g_1, g_2, \dots, g_n \in H \cup \{x\}$ tales que

$$\left(\bigwedge_{i=1}^n g_i\right) \longrightarrow y = 1 \quad (1)$$

Sea $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$. Tenemos tres casos a considerar

- Primer caso: $g_i \in H$ para todo i , $1 \leq i \leq n$.

Luego como por ID10

$$\left(\bigwedge_{i=1}^n g_i\right) \longrightarrow (x \longrightarrow y) = x \longrightarrow \left(\bigwedge_{i=1}^n g_i \longrightarrow y\right) \quad (2)$$

Como $a \longrightarrow 1 = 1$, de (2) y (1) tenemos que

$$\left(\bigwedge_{i=1}^n g_i\right) \longrightarrow (x \longrightarrow y) = 1 \quad (3)$$

con $g_i \in H$ para todo i , $1 \leq i \leq n$, luego $H \cup \vdash x \longrightarrow y$.

- Segundo caso: $g_i = x$ para todo i , $1 \leq i \leq n$.
Luego de (1) tenemos que

$$x \longrightarrow y = \left(\bigwedge_{i=1}^n g_i \right) \longrightarrow y = 1 \quad (4)$$

y en consecuencia $h \longrightarrow (x \longrightarrow y) = 1$, cualquiera que sea $h \in H$, luego $H \cup \{x\} \vdash x \longrightarrow y$.

- Tercer caso: $G \cap H \neq \emptyset$ y $G \cap \{x\} \neq \emptyset$.
Supongamos que $G \cap H = \{h_1, h_2, \dots, h_r\}$ entonces por (1) tenemos que

$$1 = \left(\bigwedge_{i=1}^n g_i \right) \longrightarrow y = \left(\left(\bigwedge_{i=1}^r h_i \right) \wedge x \right) \longrightarrow y \quad (5)$$

Luego por ID10

$$\left(\bigwedge_{i=1}^r h_i \right) \longrightarrow (x \longrightarrow y) = 1$$

donde $h_i \in H$ para $1 \leq i \leq r$, y por lo tanto $H \vdash x \longrightarrow y$.

La condición es suficiente Supongamos que $H \vdash x \longrightarrow y$ entonces existen $h_1, h_2, \dots, h_n \in H$ tales que

$$\left(\bigwedge_{i=1}^n h_i \right) \longrightarrow (x \longrightarrow y) = 1 \quad (6)$$

luego por la ID10

$$\left(\left(\bigwedge_{i=1}^n h_i \right) \wedge x \right) \longrightarrow y = 1 \quad (7)$$

esto es $H \cup \{x\} \vdash y$. ■

Dado un sistema deductivo H de un álgebra de Łukasiewicz L y $a \in L$ notaremos, para simplificar la notación, $D(H, a)$ al sistema deductivo generado por el conjunto $H \cup \{a\}$.

Teorema 3.3.3 *Si H es un sistema deductivo de un álgebra de Łukasiewicz L y $a \in L$ entonces*

$$D(H, a) = \{x \in L : a \longrightarrow x \in H\}.$$

Dem. Como H es un sistema deductivo tenemos que $C(H) = D(H) = H$, y por el teorema anterior sabemos que $D(H, a) = C(H \cup \{a\})$ luego

$$x \in D(H, a) \iff x \in C(H \cup \{a\}) \iff H \cup \{a\} \vdash x \iff$$

$$H \vdash (a \longrightarrow x) \iff a \longrightarrow x \in C(H) = H$$
■

3.4 Aritmética de los sistemas deductivos

Vimos que la determinación de todas las imágenes homomórficas de un álgebra de Łukasiewicz L se reduce a la determinación de los sistemas deductivos de L . Vamos a estudiar las propiedades de la familia $\mathbf{D}(L)$ de todos los sistemas deductivos de L . Es claro que $(\mathbf{D}(L), \subseteq)$ es un conjunto ordenado.

Entre los sistemas deductivos de un álgebra de Łukasiewicz L figuran L y el conjunto $\{1\}$, que son diferentes si L tiene mas de un elemento. Claramente la intersección de sistemas deductivos es un sistema deductivo. Un sistema deductivo D de un álgebra de Łukasiewicz L se dice propio si $D \neq L$.

Lema 3.4.1 *Si D es un sistema deductivo propio de un álgebra de Łukasiewicz L entonces $a \wedge \sim a \notin D$, cualquiera que sea $a \in L$.*

Dem. En efecto si $a \wedge \sim a \in D$ entonces como D es un Δ -filtro, $0 = \Delta(a \wedge \sim a) \in D$ luego $D = L$. ■

Denominando “contradicciones” a los elementos de la forma $a \wedge \sim a$, entonces en las álgebras de Łukasiewicz ningún sistema deductivo propio contiene contradicciones.

Lema 3.4.2 *Si $\mathcal{K} = \{D_i\}_{i \in I}$ es una cadena de sistemas deductivos de un álgebra de Łukasiewicz L entonces $D = \bigcup_{i \in I} D_i$ es un sistema deductivo de L .*

Dem. Como $1 \in D_i$ cualquiera que sea $i \in I$ entonces: D1) $1 \in D$.

Probamos que: D2) Si $x \in D$ y $x \rightarrow y \in D$ entonces $y \in D$.

De $x \in D$ resulta que existe $j \in I$ tal que $x \in D_j$ y de $x \rightarrow y \in D$ resulta que existe $h \in I$ tal que $x \rightarrow y \in D_h$. Como $D_j, D_h \in \mathcal{K}$ y $\mathcal{K}$ es una cadena entonces (i) $D_j \subseteq D_h$ ó (ii) $D_h \subseteq D_j$. Supongamos que ocurre (i), entonces $x, x \rightarrow y \in D_h$ y como D_h es un sistema deductivo tenemos que $y \in D_h$ y en consecuencia $y \in D$. Si ocurre (ii) la demostración es análoga. ■

Sea D un sistema deductivo propio de L y $a \notin D$, notaremos

$$\mathbf{D}(D, a) = \{D' \in \mathbf{D}(L) : D \subseteq D', a \notin D'\}$$

Es claro que $D \in \mathbf{D}(D, a)$ y que $(\mathbf{D}(D, a), \subseteq)$ es un conjunto ordenado.

Lema 3.4.3 *El conjunto ordenado. $(\mathbf{D}(D, a), \subseteq)$ es inductivo superiormente.*

Dem. Debemos probar que toda cadena $\mathcal{K}$ de elementos del conjunto $\mathbf{D}(D, a)$ tiene una cota superior en $\mathbf{D}(D, a)$.

Sea $\mathcal{K} = \{D_i\}_{i \in I}$ una cadena de $\mathbf{D}(D, a)$ y consideremos el conjunto $D' = \bigcup_{i \in I} D_i$, entonces por el Lema 3.4.2 tenemos: (1) $D' \in \mathbf{D}(L)$, además (2) $a \notin D'$, ya que $a \notin D_i$ cualquiera que sea $i \in I$. Como $D \subseteq D_i$ para todo $i \in I$ entonces (3) $D \subseteq \bigcup_{i \in I} D_i = D'$, y por lo tanto de (1) y (2) resulta que (4) $D' \in \mathbf{D}(D, a)$, y de (3) y (4) que D' es una cota superior de $\mathcal{K}$ que pertenece al conjunto $\mathbf{D}(D, a)$. Por lo tanto el conjunto ordenado $(\mathbf{D}(D, a), \subseteq)$ es inductivo superiormente.

Observemos que D' es un sistema deductivo propio de L ya que $a \notin D'$. ■

Como el conjunto $\mathbf{D}(D, a)$ es inductivo superiormente, por el lema de Zorn, podemos afirmar que este conjunto tiene por lo menos un elemento máximo.

Si L es un álgebra de Łukasiewicz no trivial y $a \in L$, tal que $a \neq 1$, entonces $D = \{1\}$ es un sistema deductivo de L que no contiene al elemento a . Sea

$$\mathbf{D}(a) = \mathbf{D}(\{1\}, a) = \{D' \in \mathbf{D}(L) : \{1\} \subseteq D', a \notin D'\} = \{D' \in \mathbf{D}(L) : a \notin D'\}.$$

Esto es, si $a \neq 1$, $\mathbf{D}(a)$ representa la familia de todos los sistemas deductivos de L que no contienen al elemento a .

A cada elemento máximo de este conjunto ordenado daremos el nombre de **sistema deductivo ligado al elemento a** y lo notaremos D_a .

A cada elemento máximo del conjunto $\mathbf{D}(0)$ daremos el nombre de **sistema deductivo máximo**, esto es los sistemas deductivos máximos son los elementos maximales del conjunto ordenado de todos los sistemas deductivos propios. Si L es un álgebra de Łukasiewicz, con mas de un elemento, notaremos con $\mathbf{M}(L)$ al conjunto de todos los sistemas deductivos maximales de L .

Lema 3.4.4 *Para que un filtro $F(x) = [x]$ de un álgebra de Łukasiewicz L sea un sistema deductivo es necesario y suficiente que $x \in B(L)$.*

Dem. Si $[x]$ es un sistema deductivo esto es un Δ -filtro entonces de $x \in [x]$ resulta que $\Delta x \in [x]$, esto es $x \leq \Delta x$, luego $\Delta x = x$, esto es $x \in B(L)$. Recíprocamente si $x \in B(L)$, sea $y \in [x]$ luego $x \leq y$ y en consecuencia $x = \Delta x \leq \Delta y$, luego $\Delta y \in [x]$ lo que prueba que $[x]$ es un Δ -filtro, esto es un sistema deductivo. ■

Lema 3.4.5 *Sea $D \in \mathbf{D}(L)$ y $a \notin D$, entonces si M es un elemento máximo de $\mathbf{D}(D, a)$, M es un elemento máximo de $\mathbf{D}(a)$.*

Dem.

- 1) $\mathbf{D}(D, a) \subseteq \mathbf{D}(a)$.
Sea $D' \in \mathbf{D}(D, a)$, luego (i) $D \subseteq D'$ e (ii) $a \notin D'$. De (ii) resulta que (iii) $a \neq 1$, luego $D' \in \mathbf{D}(a)$.
- 2) Supongamos que M es un elemento máximo de $\mathbf{D}(D, a)$, en particular $M \in \mathbf{D}(D, a)$ entonces por 1) tenemos que $M \in \mathbf{D}(a)$. Si M no fuese un elemento máximo de $\mathbf{D}(a)$ existiría (i) $C \in \mathbf{D}(a)$ tal que (ii) $M \subset C$.
De (i) resulta (iii) $a \notin C$. Por hipótesis (iv) $D \subseteq M$, luego de (ii) y (iv) tenemos (v) $D \subset C$. De (v) y (iii), resulta por ser C un sistema deductivo que (vi) $C \in \mathbf{D}(D, a)$.
Luego tenemos que $M \in \mathbf{D}(D, a)$, M máximo, $C \in \mathbf{D}(D, a)$ y $M \subset C$. Absurdo !!! ■

Observemos que la recíproca del lema precedente no es verdadera. Para ello consideremos el álgebra de Łukasiewicz L indicada en el Ejemplo 2.2.2, donde $B(L) = \{0, 1, d, e\}$, y cuyo diagrama se indica en la figura A. El conjunto ordenado $(\mathbf{D}(L), \subseteq)$ está indicado en la figura B. Los elementos del conjunto $\mathbf{D}(a)$ estan indicados con $\bullet$, por lo tanto $[d]$ y $[e]$ son los elementos máximos de $\mathbf{D}(a)$.

El conjunto $\mathbf{D}([d], a)$ tiene un sólo elemento que es $[d]$, luego $[e]$ es un elemento máximo de $\mathbf{D}(a)$ y no es máximo de $\mathbf{D}([d], a)$ ya que $[e] \notin \mathbf{D}([d], a)$.

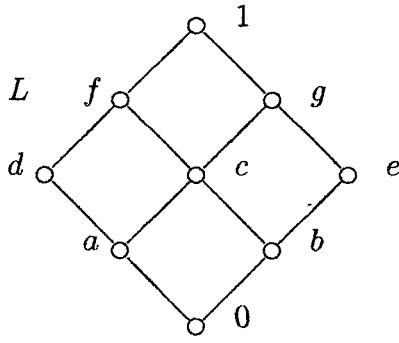


Figura A

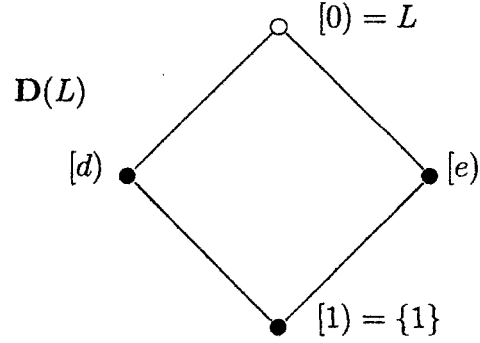


Figura B

Definición 3.4.1 Un sistema deductivo D de un álgebra de Łukasiewicz L es **completamente irreducible** si

CI1) D es propio,

CI2) Si $\{D_i\}_{i \in I}$ es una familia de sistemas deductivos de L y tal que $D = \bigcap_{i \in I} D_i$ entonces existe un índice $i \in I$ tal que $D = D_i$.

D es **irreducible** si:

R1) D es propio,

R2) Si D_1 y D_2 son sistemas deductivos de L tales que $D = D_1 \cap D_2$ entonces $D = D_1$ ó $D = D_2$.

De acuerdo a la definición precedente es claro que todo sistema deductivo completamente irreducible es irreducible.

Lema 3.4.6 Para que un sistema deductivo de un álgebra de Łukasiewicz L sea completamente irreducible es necesario y suficiente que él sea ligado a algún elemento de L .

Dem. Necesaria. Sea C un sistema deductivo completamente irreducible, luego C es un sistema deductivo propio y por lo tanto existe por lo menos un elemento $a \notin C$. Sea D un elemento máximo de $\mathbf{D}(C, a)$ luego $C \subseteq D$. Por el Lema 3.4.5 D es un sistema deductivo ligado al elemento a . Luego para cada $x \notin C$ existe un sistema deductivo D_x , ligado al elemento x tal que (1) $C \subseteq D_x$. Probemos que $C = \bigcap_{x \notin C} D_x$. Por (1) resulta que (2) $C \subseteq \bigcap_{x \notin C} D_x$. Probemos que (3) $\bigcap_{x \notin C} D_x \subseteq C$, esto equivale a probar que $\complement C \subseteq \complement(\bigcap_{x \notin C} D_x) = \bigcup_{x \notin C} \complement D_x$. Sea $y \in \complement C$ esto es $y \notin C$ luego como $y \notin D_y$ tenemos que $y \in \complement D_y \subseteq \bigcup_{x \notin C} \complement D_x$. De (2) y (3) resulta $C = \bigcap_{x \notin C} D_x$ y por lo tanto como C es completamente irreducible existe $x \notin C$ tal que $C = D_x$.

Suficiente. Dado un sistema deductivo D_y ligado al elemento y , como $y \notin D_y$ entonces D_y es propio. Supongamos que $D_y = \bigcap_{i \in I} D_i$ donde $\{D_i\}_{i \in I}$ es una familia de sistemas deductivos de L . Como $y \notin D_y$ existe $i_0 \in I$ tal que $y \notin D_{i_0}$, luego $D_{i_0} \in \mathbf{D}(y)$. Además, $D_y = \bigcap_{i \in I} D_i \subseteq D_{i_0}$ y como D_y es un elemento maximal de $\mathbf{D}(y)$ resulta que $D_y = D_{i_0}$. ■

Lema 3.4.7 *Todo sistema deductivo propio de un álgebra de Łukasiewicz L es intersección de sistemas deductivos completamente irreducibles.*

Dem. Sea H un sistema deductivo propio de L , luego existe $x \in L$ tal que $x \notin H$. Por lo tanto, existe un elemento máximo M de $D(H, x)$ y en consecuencia M es máximo de $D(x)$ esto es $M = D_x$. Además $H \subseteq D_x$.

Luego, para cada $x \notin H$ existe un D_x tal que $H \subseteq D_x$ y por lo tanto $H \subseteq \bigcap_{x \notin H} D_x$.

Probemos que (1) $\bigcap_{x \notin H} D_x \subseteq H$.

Probar (1) es equivalente a probar que $\mathcal{C}H \subseteq \mathcal{C}(\bigcap_{x \notin H} D_x) = \bigcup_{x \notin H} \mathcal{C}D_x$. Sea $y \in \mathcal{C}H$ entonces $y \notin H$ luego, $y \notin D_y$ y en consecuencia $y \in \mathcal{C}D_y \subseteq \bigcup_{x \notin H} \mathcal{C}D_x$.

Luego $H = \bigcap_{x \notin H} D_x$, donde los sistemas deductivos D_x son completamente irreducibles cualquiera que sea $x \notin H$. ■

Corolario 3.4.1 *Todo sistema deductivo propio de un álgebra de Łukasiewicz L es intersección de sistemas deductivos irreducibles.*

Dem. Basta observar que todo sistema deductivo propio completamente irreducible es irreducible. ■

Vamos a probar que en las álgebras de Łukasiewicz las nociones de sistema deductivo completamente irreducible, sistema deductivo irreducible y sistema deductivo máximo son lógicamente equivalentes. Para ello vamos a comenzar por probar:

Lema 3.4.8 *Todo sistema deductivo irreducible P de un álgebra de Łukasiewicz L , es un filtro primo.*

Dem. Por hipótesis P es propio. Supongamos que $x \vee y \in P$ y consideremos los sistemas deductivos $D_1 = D(P, x)$, $D_2 = D(P, y)$, luego $D = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, $P \subseteq D_1$ y $P \subseteq D_2$ en consecuencia $P \subseteq D_1 \cap D_2$.

Probemos que $D_1 \cap D_2 \subseteq P$. Sea $t \in D_1 \cap D_2$, esto es $t \in D(P, x)$ y $t \in D(P, y)$, luego por el Teorema 3.3.3 tenemos que: (1) $x \rightarrow t \in P$ y (2) $y \rightarrow t \in P$, luego como P es un filtro de (1) y (2) resulta que (3) $(x \rightarrow t) \wedge (y \rightarrow t) \in P$, pero por la propiedad ID10 $(x \rightarrow t) \wedge (y \rightarrow t) = (x \vee y) \rightarrow t$ y por lo tanto (4) $(x \vee y) \rightarrow t \in P$, luego como por hipótesis (5) $x \vee y \in P$, de (4) y (5) resulta $t \in P$.

Acabamos así de probar que $P = D_1 \cap D_2$, luego como P es irreducible resulta que (6) $P = D_1$ ó (7) $P = D_2$. Luego como $x \in D_1$ e $y \in D_2$ tenemos que $x \in P$ ó $y \in P$ por lo tanto P es un filtro primo. ■

La recíproca de este resultado no es, en general válida. Si consideramos el álgebra de Łukasiewicz $\mathbf{T}$ indicada en el Ejemplo 2.2.1, entonces $[c]$ es un filtro primo de $\mathbf{T}$ y no es un sistema deductivo pues $c \in [c]$ y $0 = \Delta c \notin [c]$.

Lema 3.4.9 *En un álgebra de Łukasiewicz L todo sistema deductivo propio es intersección de filtros primos.*

Dem. Por el Corolario 3.4.1 sabemos que todo sistema deductivo propio es intersección de sistemas deductivos irreducibles y por el Lema 3.4.8 todo sistema deductivo irreducible es un filtro primo. ■

Lema 3.4.10 *Todo sistema irreducible D de un álgebra de Łukasiewicz L es un sistema deductivo máximo.*

Dem. Sea $M \in \mathbf{D}(L)$ tal que (1) $D \subseteq M$ y (2) $m \in M$. Como por el Lema 3.4.8 D es un filtro primo de $1 = m \vee \nabla \sim m = 1 \in D$ resulta que (3) $m \in D$ ó (4) $\nabla \sim m \in D$. Si ocurre (3) entonces $M \subseteq D$, luego por (1) tenemos $M = D$. Si ocurre (4), entonces de (4) y (1) resulta que (5) $\nabla \sim m \in M$. De (2) resulta por ser M un Δ -filtro que (6) $\Delta m \in M$, luego por (5) y (6) tenemos que $0 = \Delta m \wedge \nabla \sim m \in M$ y por lo tanto $M = L$. ■

Corolario 3.4.2 *En las álgebras de Łukasiewicz, las nociones de sistema deductivo completamente irreducible, sistema deductivo irreducible y sistema deductivo máximo coinciden.*

Dem. Para ello basta observar que

- Por la Definición 3.4.1 todo sistema deductivo completamente irreducible es un sistema deductivo irreducible.
- Por el Lema 3.4.10 todo sistema deductivo irreducible es un sistema deductivo máximo.
- Todo sistema deductivo máximo es un sistema deductivo ligado al primer elemento del álgebra luego por el Lema 3.4.6 es un sistema deductivo completamente irreducible.

Corolario 3.4.3 *En las álgebras de Łukasiewicz, todo sistema deductivo propio es intersección de sistemas deductivos máximos.*

Dem. Consecuencia inmediata del Lema 3.4.7 y del Corolario 3.4.2 ■

Corolario 3.4.4 *Si L es un álgebra de Łukasiewicz no trivial entonces $\{1\}$ es la intersección de todos los sistemas deductivos máximos de L .*

Vamos ahora a caracterizar los sistemas deductivos máximos de un álgebra de Łukasiewicz, esto es a los sistemas deductivos completamente irreducibles.

Teorema 3.4.1 *Para que un sistema deductivo C de un álgebra de Łukasiewicz L sea completamente irreducible es necesario y suficiente que exista $a \notin C$ tal que para todo $x \notin C$ se verifique $x \longrightarrow a \in C$.*

Dem. Si C es un sistema deductivo completamente irreducible, entonces él está ligado a algún elemento $a \notin C$, esto es C es un sistema deductivo máximo entre los sistemas deductivos que no contienen al elemento a . Sea $x \notin C$ y consideremos el sistema deductivo $D = D(C, x)$. Luego $C \subseteq C \cup \{x\} \subseteq D(C, x)$ y (1) $a \in D(C, x)$, pues caso contrario C no sería un sistema deductivo máximo entre los que no contienen al elemento a . Por el Teorema 3.3.3 sabemos que (2) $D(C, x) = \{y \in L : x \longrightarrow y \in C\}$. Luego de (1) y (2) tenemos que $x \longrightarrow a \in C$.

Recíprocamente supongamos que C es un sistema deductivo que verifica: existe $a \in L$

tal que (1) $a \notin C$ y (2) para todo $x \notin C$ se verifica $x \rightarrow a \in C$. Probemos que C es un sistema deductivo ligado al elemento a . Caso contrario existiría un sistema deductivo D tal que (3) $C \subset D$ y (4) $a \notin D$, luego si x es un elemento que verifica (5) $x \in D$ y (6) $x \notin C$, de la hipótesis resulta que (7) $x \rightarrow a \in C$ luego por (3) tenemos (8) $x \rightarrow a \in D$ y de (5) y (8) resulta que $a \in D$, absurdo. ■

Corolario 3.4.5 *Para que un sistema deductivo propio M de un álgebra de Łukasiewicz L sea máximo es necesario y suficiente que si (I) $x, y \notin M$ entonces $x \rightarrow y \in M$.*

Dem. Si M es un sistema deductivo máximo entonces él está ligado a cualquier elemento $x \notin M$, luego por el Teorema 3.4.1 tenemos que $x \rightarrow y \in M$ cualquiera que sea $y \notin M$. Sea M un sistema deductivo propio que verifica (I). Sea $x \notin M$ y probemos que M está ligado a x . En efecto dado $y \notin M$ entonces por el Teorema 3.4.1 podemos afirmar que M está ligado a x . ■

Teorema 3.4.2 *Para que un sistema deductivo propio M de un álgebra de Łukasiewicz L sea máximo es necesario y suficiente que para todo $x \in L$ se verifique $x \in M$ ó $\nabla \sim x \in M$.*

Dem. Si M es máximo entonces por el Corolario 3.4.2 es un sistema deductivo irreducible luego por el Lema 3.4.8 es un filtro primo luego de $x \vee \nabla \sim x = 1 \in M$ resulta que $x \in M$ ó $\nabla \sim x \in M$. Sea $x \notin M$ entonces de la hipótesis resulta que $\nabla \sim x \in M$ y como $\nabla \sim x \leq \nabla \sim x \vee y = x \rightarrow y$, cualquiera que sea $y \in L$, entonces como M es un filtro tenemos que $x \rightarrow y \in M$ cualquiera que sea $y \in L$ y en particular $x \rightarrow y \in M$ cualquiera que sea $y \notin M$, luego por el Corolario 3.4.5 M es un sistema deductivo máximo. ■

Recordemos que toda álgebra de Boole B puede considerarse como un álgebra de Łukasiewicz particular, donde $\nabla x = x$, cualquiera que sea $x \in B$, y por lo tanto $\sim x$ es el complemento booleano de x , esto es $\sim x = -x$ y en consecuencia $\nabla \sim x = -x$.

En este caso la noción de sistema deductivo coincide con la noción de filtro. En efecto sabemos que todo sistema deductivo es un filtro, y si D es un filtro de B como en este caso $\Delta x = x$ para todo $x \in B$ entonces claramente D es un Δ -filtro esto es un sistema deductivo. Por lo tanto en este caso la noción de sistema deductivo máximo coincide con la noción de ultrafiltro, por lo tanto como corolario del teorema anterior tenemos:

Teorema 3.4.3 (Teorema de Stone) *Para que un filtro propio U de un álgebra de Boole B sea un ultrafiltro de B es necesario y suficiente que dado $x \in B$ entonces $x \in U$ ó $-x \in U$.*

El siguiente teorema es un caso particular del teorema indicado por L. Monteiro en 1971, para las álgebras de Łukasiewicz monádicas [77].

Teorema 3.4.4 *En un álgebra de Łukasiewicz L los siguientes enunciados son equivalentes:*

- 1) M es un sistema deductivo máximo,
- 2) Si $a \notin M$, existe $m \in M$ tal que $\Delta a \wedge m = 0$,
- 3) Si $\Delta a \vee b \in M$ entonces $a \in M$ ó $b \in M$,

4) Si $a \notin M$, entonces $\nabla \sim a \in M$,

5) Si $a, b \notin M$, entonces $a \longrightarrow b \in M$ y $b \longrightarrow a \in M$.

Dem. 1 $\rightarrow$ 2) Consideremos el sistema deductivo

$$D = D(M, a) = F(M, \Delta a) = \{x \in L : m \wedge \Delta a \leq x, \text{ donde } m \in M\}.$$

Si $m \wedge \Delta a \neq 0$ para todo $m \in M$ entonces D sería un sistema deductivo propio tal que $M \subset D$, absurdo.

2 $\rightarrow$ 3) Si $a \notin M$, por 2) existe $m \in M$ tal que $\Delta a \wedge m = 0$. Como $b \wedge m = (\Delta a \vee b) \wedge m \in M$, entonces $b \in M$.

3 $\rightarrow$ 4) Como $\Delta a \vee \nabla \sim a = 1 \in M$, entonces por 3) $\nabla \sim a \in M$.

4 $\rightarrow$ 5) Si $a \notin M$, entonces $\nabla \sim a \in M$ y por lo tanto $a \longrightarrow b = \nabla \sim a \vee b \in M$. Análogamente se prueba que $b \longrightarrow a \in M$.

5 $\rightarrow$ 1) Si M no fuese máximo existe un sistema deductivo M' tal que $M \subset M' \subset L$. Sean (i) $a \in M' \setminus M$ e (ii) $b \in L \setminus M'$, luego $a, b \notin M$ y por lo tanto de 5) se deduce en particular que $a \longrightarrow b \in M$ y por lo tanto (iii) $a \longrightarrow b \in M'$. De (i) e (iii) resulta que $b \in M'$, lo que contradice (ii). ■

Lema 3.4.11 Si M es un sistema deductivo máximo de un álgebra de Łukasiewicz L entonces

$$(M \cap B(L)) \cup (\sim M \cap B(L)) = B(L) \text{ y } (M \cap B(L)) \cap (\sim M \cap B(L)) = \emptyset.$$

Dem. Sea $X = (M \cap B(L)) \cup (\sim M \cap B(L))$ luego $X \subseteq B(L)$. Sea $b \in B(L)$, si $b \in M$ entonces claramente $b \in X$, si $b \notin M$ entonces por el lema anterior $\nabla \sim b \in M$, pero como $b \in B(L)$ entonces $\sim b \in B(L)$ luego $\sim b \in M$ y en consecuencia $b \in \sim M$ y por lo tanto $b \in \sim M \cap B(L)$ luego $b \in X$.

Si $a \in (M \cap B(L)) \cap (\sim M \cap B(L))$ entonces (1) $a \in B(L)$, (2) $a \in M$ y (3) $a \in \sim M$ luego de (3) resulta (4) $a = \sim m$ con (5) $m \in M$, luego (6) $\sim a = m \in M$ y por lo tanto de (2) y (6) $a \wedge \sim a \in M$, absurdo, pues vimos que ningún sistema deductivo propio contiene contradicciones. ■

Corolario 3.4.6 Si M es un sistema deductivo máximo de un álgebra de Łukasiewicz L y $b \in B(L)$ entonces $b \in M$ ó $\sim b \in M$.

Lema 3.4.12 $D(X) = F(\Delta X)$.

Dem. (a) $\Delta X \subseteq D(X)$ Sea $y \in \Delta X$ esto es $y = \Delta x$ donde (1) $x \in X$. Como (2) $X \subseteq D(X)$ de (1) y (2) resulta $x \in D(X)$ y como $D(X)$ es un sistema deductivo tenemos que $y = \Delta x \in D(X)$.

Como $D(X)$ es en particular un filtro de (a) resulta (I) $F(\Delta X) \subseteq D(X)$.

Probemos que (b) $X \subseteq F(\Delta X)$. Dado $x \in X$ entonces $\Delta x \in \Delta X \subseteq F(\Delta X)$, luego $\Delta x \in F(\Delta X)$ y como $\Delta x \leq x$ y $F(\Delta X)$ es un filtro tenemos $x \in F(\Delta X)$.

Probemos que (c) $F(\Delta X)$ es un Δ -filtro. Sea $y \in F(\Delta X)$, luego por el Lema 3.1.10

existen (3) $z_1, z_2, \dots, z_n \in \Delta X$ tales que $\bigwedge_{i=1}^n z_i \leq y$ luego $\bigwedge_{i=1}^n \Delta z_i = \Delta(\bigwedge_{i=1}^n z_i) \leq \Delta y$ y

como $\Delta z_i \in B(L)$ tenemos que (4) $\bigwedge_{i=1}^n z_i \leq \Delta y$. De (3) y (4) resulta que $\Delta y \in F(\Delta X)$. De (b) y (c) resulta que (II) $D(X) \subseteq F(\Delta X)$. ■

Notaremos $D(a)$ para indicar el sistema deductivo generado por el conjunto $\{a\}$. A todo sistema deductivo generado por un conjunto con un sólo elemento se denomina **sistema deductivo principal**. Vimos en el Lema 3.4.12 que si $X \subseteq L$ entonces $D(X) = F(\Delta X)$, luego si $X = \{a\}$ tenemos que $D(a) = F(\Delta a) = \{x \in L : \Delta a \leq x\}$. Como $\Delta a \leq x \iff 1 = \sim \Delta a \vee \Delta a \leq \sim \Delta a \vee x = a \longrightarrow x$ entonces

$$D(a) = \{x \in L : a \longrightarrow x = 1\}.$$

Es claro que $D(1) = \{1\} = D(\emptyset)$. Vamos a probar que si X es un subconjunto finito, no vacío, de un álgebra de Łukasiewicz L entonces $D(X)$ es un sistema deductivo principal, mas precisamente:

Lema 3.4.13 $D(\{a_1, a_2, \dots, a_n\}) = D(\bigwedge_{i=1}^n a_i)$.

Dem. Sea $a = \bigwedge_{i=1}^n a_i$, probaremos que $D(\{a_1, a_2, \dots, a_n\}) = D(a)$. En efecto por el Lema 3.4.12 tenemos que

$$D(\{a_1, a_2, \dots, a_n\}) = F(\Delta(\{a_1, a_2, \dots, a_n\})) = F(\{\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_n\}),$$

Y por la teoría de reticulados sabemos que $F(\{x, y\}) = F(x \wedge y)$ luego

$$F(\{\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_n\}) = F(\bigwedge_{i=1}^n \Delta a_i) = F(\Delta(\bigwedge_{i=1}^n a_i)) = F(\Delta a) = D(a).$$

■

Adaptando la terminología de Tarski, indicada en una construcción análoga, podemos denominar sistemas deductivos *axiomatizables* a aquellos que tienen un número finito de generadores. En general en una teoría deductiva, se toma un número finito de proposiciones $h_1, h_2, \dots, h_n$ que son verdaderas por hipótesis y se trata de deducir consecuencias lógicas a partir de las hipótesis. Esta situación tiene su contrapartida en el álgebra al considerar un número finito de elementos $h_1, h_2, \dots, h_n$ y estudiar el sistema deductivo generado por el conjunto $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$, esto es $D(\{h_1, h_2, \dots, h_n\})$.

Como es natural admitir como verdaderas las proposiciones $h_1, h_2, \dots, h_n$, que es lo mismo que admitir como verdadera a $h = \bigwedge_{i=1}^n h_i$, entonces se tiene que el conjunto de consecuencias de $h_1, h_2, \dots, h_n$ coincide con el conjunto de las consecuencias de $h = h_1 \wedge h_2 \wedge \dots \wedge h_n$, esto es:

$$D(\{h_1, h_2, \dots, h_n\}) = D(h_1 \wedge h_2 \wedge \dots \wedge h_n).$$

Es natural dar el nombre de sistema deductivo *no axiomatizable* al que no tiene un número finito de generadores.

Observemos finalmente que si L es un álgebra de Łukasiewicz entonces el conjunto ordenado $\mathbf{D}(L)$ es mas precisamente un reticulado distributivo acotado y completo.

En efecto si $D_1, D_2 \in \mathbf{D}(L)$ y ponemos por definición:

- $D_1 \sqcap D_2 = D_1 \cap D_2$
- $D_1 \sqcup D_2 = D(D_1 \cup D_2)$

entonces $D_1 \sqcap D_2$ y $D_1 \sqcup D_2$ son el ínfimo y el supremo de los sistemas deductivos D_1 y D_2 . El primer y último elemento de $\mathbf{D}(L)$ son $\{1\}$ y L son respectivamente.

Para probar que el reticulado es distributivo resta probar que:

$$D_1 \sqcap (D_2 \sqcup D_3) = (D_1 \sqcap D_2) \sqcup (D_1 \sqcap D_3),$$

cualesquiera que sea $D_1, D_2, D_3 \in \mathbf{D}(L)$.

Esto es

$$D_1 \sqcap (D(D_2 \cup D_3)) = D((D_1 \cap D_2) \cup (D_1 \cap D_3)) = D((D_1 \cap (D_2 \cup D_3))),$$

luego, teniendo en cuenta el Lema 3.4.12, debemos probar que

$$D_1 \cap (F(\Delta(D_2 \cup D_3))) = F(\Delta(D_1 \cap (D_2 \cup D_3))),$$

o sea

$$D_1 \cap (F(\Delta D_2 \cup \Delta D_3)) = F(\Delta D_1 \cap (\Delta D_2 \cup \Delta D_3)).$$

En efecto utilizando la teoría de filtros en reticulados distributivos acotados (ver por ejemplo [81]):

$$\begin{aligned} D_1 \cap (F(\Delta D_2 \cup \Delta D_3)) &= F(D_1) \cap (F(\Delta D_2 \cup \Delta D_3)) = \\ F(D_1) \cap (F(\Delta D_2) \sqcup F(\Delta D_3)) &= (F(D_1) \cap F(\Delta D_2)) \sqcup (F(D_1) \cap F(\Delta D_3)) = \\ (D_1 \cap D(\Delta D_2)) \sqcup (D_1 \cap D(\Delta D_3)) &= (D_1 \cap D_2) \sqcup (D_1 \cap D_3). \end{aligned}$$

Además como siempre existe $\bigcap_{i \in I} D_i$ cualquiera que sea la familia $\mathcal{F} = \{D_i\}_{i \in I}$ de sistemas deductivos de L , entonces (ver por ejemplo [90], pág. 42) también existe el supremo de $\mathcal{F}$ y por lo tanto el reticulado es completo.

3.5 Filtros primos y sistemas deductivos

Este párrafo contiene resultados que fueron indicados por A. Monteiro en un Seminario de 1963, [53] y publicados en 1996, [63], [64].

Representemos por $\mathbf{P}(L)$ el conjunto de todos los filtros primos de un álgebra de Łukasiewicz L y por $\mathbf{p}(L)$ el conjunto de todos los filtros primos minimales de L , esto es el conjunto de los elementos minimales del conjunto ordenado $(\mathbf{P}(L), \subseteq)$. Por lo tanto P es un filtro primo minimal, si P es primo y si no existe ningún filtro primo que sea una parte propia de P .

Si $P \in \mathbf{P}(L)$ es bien conocido que $\varphi(P) = \mathbb{C} \sim P \in \mathbf{P}(L)$. La función φ se denomina transformación de Birula-Rasiowa, [13], [14], y verifica $\varphi(\varphi(P)) = P$ cualquiera que sea $P \in \mathbf{P}(L)$ y si $P, Q \in \mathbf{P}(L)$ entonces $P \subseteq Q \iff \varphi(Q) \subseteq \varphi(P)$.

Vamos a estudiar las relaciones entre los filtros primos de un álgebra de Łukasiewicz L y los sistemas deductivos maximales de L .

Lema 3.5.1 Si L es un álgebra de Łukasiewicz entonces:

- (a) Si $b \notin P, \in \mathbf{P}(L)$ y $b \in B(L)$ entonces $\sim b \in P$.
- (b) Si F es un filtro propio de L y $b \in F \cap B(L)$ entonces $\sim b \notin F$.

Dem.

- (a) Sabemos que $\sim b \vee \nabla b = 1 \in P$ y como $b \in B(L)$ entonces $\nabla b = b$ y por lo tanto $\sim b \vee b = 1 \in P$, luego como P es un filtro primo y $b \notin P$ resulta que $\sim b \in P$.
- (b) Si $\sim b \in F$ entonces $b \wedge \sim b \in F$, pero como $b \in B(L)$ entonces $b \wedge \sim b = 0$ y por lo tanto $F = L$, absurdo. ■

Lema 3.5.2 Si $P \in \mathbf{P}(L)$ entonces $F(\nabla P) \in \mathbf{M}(L)$ y $F(\nabla P) \subseteq P$.

Dem.

- 1) $F(\nabla P) \subseteq P$.
Probemos que (i) $\nabla P \subseteq P$. Sea $t \in \nabla P$, entonces $t = \nabla p$, donde $p \in P$. Como $p \leq \nabla p = t$ y P es un filtro, entonces $t \in P$. Como (ii) P es un filtro, entonces de (i) y (ii) deducimos 1).
- 2) Por el Corolario 3.1.1, $F(\nabla P)$ es un sistema deductivo. Probemos que es un sistema deductivo maximal.
Supongamos que existe $M \in \mathbf{M}(L)$ tal que: (1) $F(\nabla P) \subset M$. Probemos que (2) $M \not\subseteq P$. De (1) resulta que existe un elemento $m \in L$ tal que (3) $m \in M \setminus F(\nabla P)$, entonces como M es un sistema deductivo de (3) deducimos que (4) $\Delta m \in M$. Como $\Delta m \leq m$, teniendo en cuenta (3) resulta (5) $\Delta m \notin F(\nabla P)$. Si (6) $M \subseteq P$, entonces de (4) resulta, $\Delta m \in P$ y por lo tanto $\Delta m = \nabla \Delta m \in \nabla P$, luego $\Delta m \in F(\nabla P)$, lo que contradice (5). De (2) resulta que existe $z \in L$, tal que (7) $z \in M \setminus P$, entonces (8) $\Delta z \in M$, (9) $\Delta z \notin P$. De (8) resulta teniendo en cuenta el Lema 3.5.1 (b), que (10) $\sim \Delta z \notin M$. De (9) y el Lema 3.5.1, (a) $\sim \Delta z \in P$, luego $\sim \Delta z = \nabla \sim \Delta z \in \nabla P$, y por lo tanto $\sim \Delta z \in F(\nabla P) \subseteq M$, lo que contradice (10). ■

Lema 3.5.3 Todo filtro primo P de un álgebra de Łukasiewicz L contiene un y solo un sistema deductivo maximal.

Dem. Por el Lema 3.5.2 sabemos que existe un sistema deductivo maximal contenido en P , a saber $F(\nabla P)$. Sean $M, M' \in \mathbf{M}(L)$ tales que $M \subseteq P, M' \subseteq P$ y $M \neq M'$. Entonces existe $x \in M \setminus M'$ ó existe $x \in M' \setminus M$. Si $x \in M \setminus M'$ entonces $\Delta x \in M$ y $\Delta x \notin M'$. Como M' es un sistema deductivo maximal entonces $L = D(M', \Delta x) = \{y \in L : \sim \Delta x \vee y \in M'\}$, luego $\sim \Delta x \in L = D(M', \Delta x)$, esto es $\sim \Delta x = \sim \Delta x \vee \sim \Delta x \in M'$, y como $M' \subseteq P$ tenemos $\sim \Delta x \in P$. Como $\Delta x \in M \subseteq P$, entonces $\Delta x \in P$ y por el Lema 3.5.1(b), $\sim \Delta x \notin P$. Contradicción. Si $x \in M' \setminus M$, también llegamos a una contradicción. ■

Es bien conocido que

Lema 3.5.4 Si A es un álgebra de Kleene y P es un filtro primo de A entonces $P \subseteq \varphi(P)$ ó $\varphi(P) \subseteq P$.

Lema 3.5.5 Si $P \in \mathbf{P}(L)$ entonces $F(\nabla P) \subseteq \varphi(P)$.

Dem. Supongamos que (1) $F(\nabla P) \not\subseteq \varphi(P) = \mathcal{C} \sim P$, entonces existe (2) $m \in F(\nabla P)$, (3) $m \notin \varphi(P)$.

De (2) deducimos (4) $\Delta m \in F(\nabla P)$ y como $\Delta m \leq m$ de (3) y (4) resulta (5) $\Delta m \notin \varphi(P)$. Como L es un álgebra de Kleene sabemos que todo filtro primo P de L , es comparable con $\varphi(P)$.

Si $P \subseteq \varphi(P)$, entonces como $F(\nabla P) \subseteq P$, tenemos $F(\nabla P) \subseteq \varphi(P)$, lo que contradice (1). Entonces (6) $\varphi(P) \subset P$.

Como $\Delta m \vee \sim \Delta m = 1 \in \varphi(P)$ y $\varphi(P)$ es un filtro primo, entonces teniendo en cuenta (5), tenemos $\sim \Delta m \in \varphi(P)$, y por (6) tenemos $\sim \Delta m \in P$, luego por (4) $0 = \Delta m \wedge \sim \Delta m \in P$.

Demostración de L. Monteiro. Sea $m \in \nabla P$, entonces $m = \nabla p$, donde $p \in P$. Como $\sim p \vee \nabla p = 1 \in \varphi(P)$ y $\varphi(P)$ es un filtro primo entonces $\sim p \in \varphi(P)$ ó $\nabla p \in \varphi(P)$. Si $\sim p \in \varphi(P) = \mathcal{C} \sim P$, entonces $\sim p \notin \sim P$. Esta contradicción muestra que $m = \nabla p \in \varphi(P)$. Acabamos así de probar que $\nabla P \subseteq \varphi(P)$, luego $F(\nabla P) \subseteq \varphi(P)$. ■

Lema 3.5.6 Si $P \in \mathbf{P}(L)$, $P \subseteq \varphi(P)$ y $\nabla a \in P$ entonces $a \in \varphi(P)$.

Dem. Por hipótesis (1) $P \subseteq \varphi(P)$, y (2) $\nabla a \in P$. Supongamos que (3) $a \notin \varphi(P)$, luego $a \in \sim P$, esto es, (4) $\sim a \in P$. De (2) y (4), tenemos: $a \wedge \sim a = \nabla a \wedge \sim a \in P$, luego $a \in P$, y entonces por (1), $a \in \varphi(P)$, contradicción. ■

Lema 3.5.7 Si $P \in \mathbf{P}(L)$ verifica $\varphi(P) \subseteq P$ entonces $F(\nabla P) = \varphi(P)$.

Dem. Por el Lema 3.5.5, sabemos que (1) $F(\nabla P) \subseteq \varphi(P)$. Supongamos que $F(\nabla P) \subset \varphi(P)$, entonces existe (2) $a \in \varphi(P)$ tal que (3) $a \notin F(\nabla P)$. Si $\sim \Delta a = \nabla \sim a \in P$ entonces como por el Lema 3.2.1, $P \cap B(L) \subseteq F(\nabla P)$ tenemos que (4) $\nabla \sim a \in F(\nabla P)$. De (1) y (4) deducimos que (5) $\nabla \sim a \in \varphi(P) = Q \in \mathbf{P}(L)$. Como por hipótesis $\varphi(P) \subseteq P$ entonces (6) $Q = \varphi(P) \subseteq \varphi(\varphi(P)) = \varphi(Q)$. De (5) y (6) resulta por el Lema 3.5.6 que $\sim a \in \varphi(Q) = P$ y por lo tanto $a \notin \varphi(P) = Q$, lo que contradice (2). Luego (7) $\sim \Delta a \notin P$ y como $\Delta a \vee \sim \Delta a = 1 \in P \in \mathbf{P}(L)$ tenemos que $\Delta a \in P$, y por lo tanto $\Delta a \in P \cap B(L)$ y como por el Lema 3.2.1 $P \cap B(L) \subseteq F(\nabla P)$ tenemos que $\Delta a \in F(\nabla P)$ y como $\Delta a \leq a$ resulta que $a \in F(\nabla P)$, lo que contradice (3). ■

Lema 3.5.8 Si $P \in \mathbf{P}(L)$ verifica $P \subseteq \varphi(P)$ entonces $F(\nabla \varphi(P)) = P$.

Dem. Sea $Q = \varphi(P)$ luego de la hipótesis tenemos que $\varphi(Q) = \varphi(\varphi(P)) \subseteq \varphi(P) = Q$, entonces por el Lema 3.5.7 $F(\nabla Q) = \varphi(Q)$ esto es $F(\nabla \varphi(P)) = P$. ■

Corolario 3.5.1 Si $P \in \mathbf{P}(L)$ entonces $P \in \mathbf{M}(L)$ ó $\varphi(P) \in \mathbf{M}(L)$, esto es si P es un filtro primo de L entonces P ó $\varphi(P)$ es un sistema deductivo maximal.

Dem. Como L es en particular un álgebra de Kleene tenemos que (i) $\varphi(P) \subseteq P$ ó (ii) $P \subseteq \varphi(P)$. Si ocurre (i) entonces por el Lema 3.5.7 tenemos que $F(\nabla P) = \varphi(P)$. Pero por el Lema 3.5.2 sabemos que $F(\nabla P) \in \mathbf{M}(L)$ y $F(\nabla P) \subseteq P$.

Si ocurre (ii) entonces por el Lema 3.5.8 tenemos que $F(\nabla \varphi(P)) = P$. Pero por el Lema 3.5.2 sabemos que $F(\nabla \varphi(P)) \in \mathbf{M}(L)$ y $F(\nabla \varphi(P)) \subseteq \varphi(P)$. ■

Corolario 3.5.2 $M(L) \subseteq P(L)$, esto es todo sistema deductivo máximo de L es un filtro primo de L .

Dem. Sea M un sistema deductivo maximal, entonces existe $U \in U(L)$ tal que (1) $M \subseteq U$. Como $U(L) \subseteq P(L)$, entonces U es un filtro primo y como $\varphi(U)$ es comparable con U , tenemos necesariamente (2) $\varphi(U) \subseteq U$. Luego por el Corolario 3.5.1 $\varphi(U)$ es un sistema deductivo maximal, y como por el Lema 3.5.3 existe un único sistema deductivo maximal contenido en U , tenemos que $M = \varphi(U) \in P(L)$. ■

Los siguientes resultados son bien conocidos:

Lema 3.5.9 Si R es un reticulado distributivo con primer y último elemento (0 y 1 respectivamente), entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

- (a) U es un filtro maximal de R .
- (b) Dado $x \notin U$ existe $u \in U$ tal que $x \wedge u = 0$.

Lema 3.5.10 Si R es un reticulado distributivo con primer y último elemento (0 y 1 respectivamente), entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

- (a) P es un filtro primo minimal de R .
- (b) $P = R \setminus I$, donde I es un ideal maximal de R .

y las condiciones siguientes son equivalentes:

- (c) I es un ideal maximal de R .
- (d) Dado $p \notin I$ existe $q \in I$ tal que $p \vee q = 1$.

Lema 3.5.11 (I) $p(L) \subseteq D(L)$; (II) $p(L) = M(L)$. Esto es todo filtro primo minimal de L es un sistema deductivo de L y el conjunto de los filtros primos minimales de L coincide con el conjunto de todos sistemas deductivos maximales de L .

Dem.

- (I) Sea $P \in p(L)$. Si $0 \in \Delta P$, esto es $0 = \Delta p$ donde $p \in P$, luego $p \notin L \setminus P = I$. Entonces por el Lema 3.5.10 (d), existe $q \in I$, luego $q \notin P$, tal que $1 = p \vee q$, luego $1 = \Delta(p \vee q) = \Delta p \vee \Delta q = 0 \vee \Delta q = \Delta q \leq q$, y por lo tanto $q = 1 \in P$. Absurdo. Tenemos así que $0 \notin \Delta P$ de donde se deduce teniendo en cuenta el Corolario 3.1.1 y el Lema 3.1.10 (b), que: (*) $F(\Delta P)$ es un sistema deductivo propio de L . Probemos que $P = F(\Delta P)$. Sea $p \in P$, como $\Delta p \leq p$ y $\Delta p \in F(\Delta P)$ entonces $p \in F(\Delta P)$, luego $P \subseteq F(\Delta P)$. Supongamos que $P \subset F(\Delta P)$, entonces existe un filtro P que verifica (1) $x \in F(\Delta P)$, tal que (2) $x \notin P$. De (1) resulta que existe $p \in P$ tal que (3) $\Delta p \leq x$. De (2) y (3) deducimos (4) $\Delta p \notin P$, y como $\Delta p \vee \sim \Delta p = 1 \in P$, tenemos que (5) $\sim \Delta p \in P$. Como $\Delta p \in F(\Delta P)$ y $P \subset F(\Delta P)$, de (5) deducimos $\sim \Delta p \in F(\Delta P)$, y entonces $0 = \Delta p \wedge \sim \Delta p \in F(\Delta P)$, lo que contradice (*).
- (II) a) Sea $P \in p(L)$ entonces por (I) P es un sistema deductivo. Supongamos que existe $M \in M(L)$ tal que $P \subset M$, entonces existe (1) $x \in M$ tal que (2) $x \notin P$. Entonces (3) $\Delta x \in M$ y (4) $\Delta x \notin P$. Como $\Delta x \vee \sim \Delta x = 1 \in P$, de (4) tenemos que $\sim \Delta x \in P$, y entonces (5) $\sim \Delta x \in M$. De (3) y (5): $0 = \Delta x \wedge \sim \Delta x \in M$. Contradicción.
- b) Sea $M \in M(L)$ entonces por el Corolario 3.5.2, $M \in P(L)$. Si $M \notin p(L)$, entonces existe (1) $P \in p(L)$ tal que (2) $P \subset M$. De (1) resulta por (II) a) que $P \in M(L)$, lo que contradice (2).

■

Corolario 3.5.3 *Todo filtro primo de un álgebra de Łukasiewicz L contiene un único filtro primo minimal de L .*

Dem. Por el Lema 3.5.3 cada filtro primo contiene un y solo un sistema deductivo maximal, y por el Lema 3.5.11 (II), el conjunto de los sistema deductivos maximales de L coincide con el conjunto de los filtros primos minimales de L . ■

Lema 3.5.12 *Si $P \in \mathbf{p}(L)$ y $P \notin \mathbf{U}(L)$ entonces existe un y solo un $P' \in \mathbf{P}(L)$ tal que $P \subset P'$, y más precisamente $P' = \varphi(P)$.*

Dem. Sea $P \in \mathbf{p}(L)$, sabemos que (1) $\varphi(P) \subset P$ ó (2) $P \subseteq \varphi(P)$. Como $\varphi(P) \in \mathbf{P}(L)$ y P es un filtro primo minimal la condición (1) no se puede verificar. Sea $U \in \mathbf{U}(L)$, tal que $\varphi(P) \subseteq U$, entonces $\varphi(U) \subseteq \varphi(\varphi(P)) = P$, luego como P es un filtro primo minimal debemos tener que $\varphi(U) = P$, luego $U = \varphi(P)$.

Entonces $\varphi(P)$ es un ultrafiltro que contiene P . No puede ocurrir que $\varphi(P) = P$, pues por hipótesis $P \notin \mathbf{U}(L)$, entonces :

$$P \subset \varphi(P) \text{ y } \varphi(P) \text{ ultrafiltro.}$$

Sea $P' \in \mathbf{P}(L)$ tal que (3) $P \subset P'$. Vamos a demostrar que (4) $P' \subseteq U = \varphi(P)$. En efecto si $P' \not\subseteq U$ existe (5) $p' \in P'$ tal que (6) $p' \notin U$. De (6), ver Lema 3.5.9 (b), deducimos que existe (7) $u \in U$ tal que (8) $u \wedge p' = 0$. Si $u \in P'$ entonces $0 = u \wedge p' \in P'$, y por lo tanto $P' = L$, contradicción. Como $P' \in \mathbf{P}(L)$ entonces por el Lema 3.5.2:

$$(9) F(\nabla P') \in \mathbf{M}(L) \text{ y } (10) F(\nabla P') \subseteq P'.$$

Por el Lema 3.5.11 (II), $\mathbf{p}(L) = \mathbf{M}(L)$, entonces (11) $P \in \mathbf{M}(L)$. Por el Lema 3.5.3 sabemos que cada filtro primo de un álgebra de Łukasiewicz contiene un y solo un sistema deductivo maximal, entonces de (9), (10), (11) y (3), tenemos que: (12) $F(\nabla P') = P$.

De (5) resulta (13) $\nabla p' \in \nabla P' \subseteq F(\nabla P') = P$. Como $P \subseteq \varphi(P) = U$ y $P \in \mathbf{M}(L)$, por el Lema 3.5.3 tenemos que $P = F(\nabla U) \subseteq U$.

De (7) resulta (14) $\nabla u \in F(\nabla U) = P$, y de (8), (13) y (14): $0 = \nabla 0 = \nabla(u \wedge p') = \nabla u \wedge \nabla p' \in P$, contradicción. Entonces $P' \subseteq U = \varphi(P)$.

Supongamos que $P' \subset U = \varphi(P)$, entonces tenemos $P \subset P' \subset U$, luego

$$P = \varphi(U) \subset \varphi(P') \subset \varphi(P) = U.$$

De $\varphi(P') \subset U$, deducimos que existe $u \in U$ tal que $u \notin \varphi(P')$. Sabemos que P' y $\varphi(P')$ son comparables. Supongamos que $P' \subseteq \varphi(P')$. Como $u \wedge \sim u \leq u$ entonces:

(i) $\sim u \wedge \nabla u = u \wedge \sim u \notin \varphi(P')$. De $u \notin \varphi(P')$ deducimos $\sim u \in P'$ y como $\nabla u \in F(\nabla U) = P \subset P'$, entonces $\sim u \wedge \nabla u \in P' \subseteq \varphi(P')$ lo que contradice (i).

Si $\varphi(P') \subseteq P'$, también llegamos a una contradicción.

Entonces $U = \varphi(P)$ es el único filtro primo que contiene a P como parte propia. ■

Corolario 3.5.4 *Si $P \in \mathbf{p}(L)$ y $P \notin \mathbf{U}(L)$ entonces el único filtro propio F que contiene a P como parte propia es $F = \varphi(P)$.*

Dem. Sea F un filtro propio tal que: (1) $P \subset F$, y supongamos que $F \notin \mathbf{U}(L)$, entonces existe (2) $U \in \mathbf{U}(L)$ tal que (3) $F \subset U$. De (1) y (3) tenemos: $P \subset U$, de donde deducimos por el Lema 3.5.12 que $U = \varphi(P)$. Sea (4) $x \in U \setminus F$.

Como $F = \bigcap \{P' : P' \in \mathbf{P}(L), F \subseteq P'\}$ y $x \notin F$, entonces existe $P' \in \mathbf{P}(L)$ tal que (5) $F \subseteq P'$ y (6) $x \notin P'$. De (4) y (6) tenemos $P' \neq U = \varphi(P)$. De (1) y (5): (7) $P \subset P'$. Entonces existe un filtro primo P' , diferente de $\varphi(P)$ que contiene P como parte propia, lo que es imposible por el Lema 3.5.12. ■

3.6 Algebras cocientes por sistemas deductivos principales

Si L es un álgebra de Łukasiewicz y $u \in L$, vamos a indicar una construcción que permite determinar el álgebra cociente $L/D(u)$.

Si $p, u \in B(L)$ son tales que $p \leq u$, $L' = [p, u] = \{x \in L : p \leq x \leq u\}$, y ponemos por definición $\approx x = p \vee (\sim x \wedge u)$, para $x \in L'$, entonces probamos en el Teorema 2.4.1 que el sistema $(L', u, \approx, \nabla, \wedge, \vee)$ es un álgebra de Łukasiewicz.

Luego si $u \in L$, y $L' = [0, \Delta u] = (\Delta u)$ entonces L' es un álgebra de Łukasiewicz donde si $x \in L'$, $\approx x = 0 \vee (\sim x \wedge \Delta u) = \sim x \wedge \Delta u$.

Lema 3.6.1 *El álgebra de Łukasiewicz $L/D(u)$ es isomorfa al álgebra $L' = [0, \Delta u]$.*

Dem. En efecto dado $x \in L$, sea $h(x) = x \wedge \Delta u$, luego como $0 \leq x \wedge \Delta u \leq \Delta u$ entonces h es una función de L en $[0, \Delta u]$. Además dado $y \in [0, \Delta u]$ esto es $0 \leq y \leq \Delta u$, con $y \in L$ entonces $h(y) = y \wedge \Delta u = y$. Por lo tanto h es una función suryectiva que deja invariantes los elementos de $[0, \Delta u]$. Además

$$H1) \quad h(x \vee y) = (x \vee y) \wedge \Delta u = (x \wedge \Delta u) \vee (y \wedge \Delta u) = h(x) \vee h(y).$$

$$H2) \quad \approx h(x) = \approx (x \wedge \Delta u) = \sim (x \wedge \Delta u) \wedge \Delta u = (\sim x \vee \sim \Delta u) \wedge \Delta u = \sim x \wedge \Delta u = h(\sim x).$$

$$H3) \quad \nabla h(x) = \nabla (x \wedge \Delta u) = \nabla x \wedge \Delta u = h(\nabla x).$$

Como

$$Nuc(h) = \{x : h(x) = \Delta u\} = \{x \in L : x \wedge \Delta u = \Delta u\} =$$

$$\{x \in L : \Delta u \leq x\} = F(\Delta u) = D(u),$$

y el núcleo del homomorfismo natural de $L \rightarrow L/D(u)$ es $D(u)$ tenemos por el Lema 3.2.7 que las álgebras $L/D(u)$ y $[0, \Delta u]$ son isomorfas. ■

Lema 3.6.2 *Si C es una cada clase de equivalencia (mód. $D(u)$) entonces $C \cap [0, \Delta u]$ contiene un único elemento.*

Dem.

- 1) $C \cap [0, \Delta u] \neq \emptyset$. Sea $x \in C$, luego: $h(x) \wedge \Delta u = (x \wedge \Delta u) \wedge \Delta u = x \wedge \Delta u$, y como $\Delta u \in D(u)$ resulta por la condición C4 indicada en el Lema 3.2.2 que $h(x) \equiv x$ (mód. $D(u)$) luego como $x \in C$ tenemos que $h(x) \in C$ y por lo tanto $h(x) \in C \cap [0, \Delta u]$.

- 2) El elemento es único. Supongamos que $x, y \in C \cap [0, \Delta u]$ luego (i) $x, y \in C$ y (ii) $x, y \in [0, \Delta u]$. De (ii) resulta por el lema anterior que $h(x) = x$ y $h(y) = y$. Por (i) tenemos que $x \equiv y$ (mód. $D(u)$), luego por la condición C4 indicada en el Lema 3.2.2, $x \wedge d = y \wedge d$ con (iii) $d \in D(u)$, luego

$$(iv) \quad x \wedge h(d) = h(x) \wedge h(d) = h(x \wedge d) = h(y \wedge d) = h(y) \wedge h(d) = y \wedge h(d).$$

Pero por (iii) como $D(u) = Nuc(h)$ tenemos que (v) $h(d) = \Delta u$, luego de (v) y (iv) resulta que $x \wedge \Delta u = y \wedge \Delta u$ y como por (ii) $x, y \leq \Delta u$ tenemos que $x = y$.

■

Lema 3.6.3 Si $x \in [0, \Delta u]$ entonces $C_{D(u)}(x) = [x, x \vee \nabla \sim u]$. (L. Monteiro (2002))

Dem. Sea $y \in [x, x \vee \nabla \sim u]$, luego (i) $x \leq y$ e (ii) $y \leq x \vee \nabla \sim u$.

De (i) resulta que $1 = \nabla \sim x \vee x \leq \nabla \sim x \vee y = x \longrightarrow y$ luego $x \longrightarrow y = 1$ y por lo tanto

$$x \longrightarrow y \in D(u). \quad (1)$$

De (ii) resulta que $1 = \nabla \sim y \vee y \leq \nabla \sim y \vee x \vee \nabla \sim u$, luego $\nabla \sim y \vee x \vee \nabla \sim u = 1$ y por lo tanto

$$\Delta u \wedge (\nabla \sim y \vee x \vee \nabla \sim u) = \Delta u,$$

esto es

$$\Delta u \wedge (\nabla \sim y \vee x) = (\Delta u \wedge (\nabla \sim y \vee x)) \vee (\Delta u \wedge \nabla \sim u) = \Delta u,$$

y por lo tanto

$$\Delta u \leq \nabla \sim y \vee x = y \longrightarrow x$$

luego como $\Delta u \in D(u)$ tenemos que

$$y \longrightarrow x \in D(u). \quad (2)$$

De (i) resulta que $\sim y \leq \sim x$ y por lo tanto $1 = \nabla y \vee \sim y \leq \nabla y \vee \sim x = \sim y \longrightarrow \sim x$ luego $\sim y \longrightarrow \sim x = 1$ y por lo tanto

$$\sim y \longrightarrow \sim x \in D(u). \quad (3)$$

De (ii) resulta que $\sim x \wedge \Delta u \leq \sim y$, luego

$$(\nabla x \vee \sim x) \wedge (\nabla x \vee \Delta u) = \nabla x \vee (\sim x \wedge \Delta u) \leq \nabla x \vee \sim y = \sim x \longrightarrow \sim y$$

luego

$$\Delta u \leq \nabla x \vee \Delta u \leq \sim x \longrightarrow \sim y,$$

y como $\Delta u \in D(u)$ tenemos que

$$\sim x \longrightarrow \sim y \in D(u). \quad (4)$$

De (1), (2), (3) y (4) resulta por el Lema 3.2.2 que $y \equiv x$ (mód. $D(u)$) esto es $y \in C_{D(u)}(x)$.

Recíprocamente si $y \in C_{D(u)}(x)$, donde (a) $0 \leq x \leq \Delta u$, esto es $y \equiv x$ (mód. $D(u)$),

entonces por el Lema 3.2.2 existe $d \in D(u) = F(\Delta u)$ tal que $x \wedge d = y \wedge d$ y por lo tanto $x \wedge d \wedge \Delta u = y \wedge d \wedge \Delta u$ luego como $d \in F(\Delta u)$ esto es $\Delta u \leq d$ y por (a) $x \leq \Delta u$ resulta (b) $x = y \wedge \Delta u$ luego como $y \wedge \Delta u \leq y$ tenemos que (c) $x \leq y$. De (b) resulta que

$$\nabla \sim u \vee x = \nabla \sim u \vee (y \wedge \Delta u) = \nabla \sim u \vee y$$

y como $y \leq \nabla \sim u \vee y$ tenemos que (d) $y \leq x \vee \nabla \sim u$. De (c) y (d) tenemos que $x \leq y \leq x \vee \nabla \sim u$, esto es $y \in [x, x \vee \nabla \sim u]$. ■

Este lema generaliza el resultado que L. Monteiro indicó en [81].

4 CAPITULO III

4.1 Algebras simples

Definición 4.1.1 *Un álgebra de Łukasiewicz L se dice simple si:*

- S1) L contiene más de un elemento,
- S2) Toda imagen homomórfica de L contiene un solo elemento ó es un álgebra isomorfa a L , esto es las únicas imágenes homomórficas de L son las triviales.

Lema 4.1.1 *Un álgebra de Łukasiewicz L es simple si:*

- S'1) L contiene más de un elemento,
- S'2) los únicos sistemas deductivos de L son $D(1) = \{1\}$ y $D(0) = L$.

Dem. Sea L un álgebra de Łukasiewicz simple luego se verifica S'1). Sea D un sistema deductivo de L . Por hipótesis L/D es isomorfa a L ó a un álgebra con un sólo elemento. Sea h el homomorfismo natural de L en L/D . Si $L \cong L/D$, entonces $C_D(x) = \{x\}$ y como $C_D(1) = D$ tenemos que $D = \{1\} = D(1)$. Si L/D tiene un sólo elemento entonces $C_D(x) = L$ cualquiera que sea $x \in L$, luego $D = C_D(1) = L = D(0)$. Recíprocamente si L es un álgebra de Łukasiewicz que verifica S'1 y S'2, entonces se verifica S1 y las únicas imágenes homomórficas de L son $L/D(1)$ y $L/D(0)$ que son isomorfas a L y a un álgebra con un sólo elemento respectivamente. ■

Corolario 4.1.1 *Si L es un álgebra de Łukasiewicz simple entonces $\{1\}$ es un sistema deductivo maximal de L .*

Lema 4.1.2 *Un álgebra de Łukasiewicz L es simple si:*

- S''1) L contiene más de un elemento,
- S''2) $B(L) = \{0, 1\}$.

Esto es un álgebra de Łukasiewicz L es simple si y sólo si el álgebra de Boole $B(L)$ es simple.

Dem. Supongamos que L es un álgebra de Łukasiewicz simple y que existe (1) $b \in B(L)$ tal que (2) $b \neq 0$ y (3) $b \neq 1$. Sabemos que $D(x) = F(\Delta x)$ cualquiera que sea $x \in L$. Luego por (1) $D(b) = F(\Delta b) = F(b)$. Por (2) $D(b) = F(b) \neq L$ y por (3) $D(b) = F(b) \neq \{1\} = D(1)$. Entonces no se verifica S'2, absurdo.

Recíprocamente supongamos que el álgebra de Łukasiewicz L verifica S''1 y S''2. Sabemos que $D(1)$ es un sistema deductivo. Sea D un sistema deductivo tal que $D \neq D(1)$ luego existe (1) $d \in D$ tal que (2) $d \neq 1$. De (1) resulta (3) $\Delta d \in D$ y por S''2 tenemos (4) $\Delta d = 0$ ó (5) $\Delta d = 1$. Como $\Delta d \leq d$, si ocurriera (5) entonces $d = 1$ lo que contradice (2) luego debe ocurrir (4). De (3) y (4) resulta $0 \in D$ y por lo tanto $D = L = D(0)$. ■

Corolario 4.1.2 *Si D es un sistema deductivo de un álgebra de Łukasiewicz L , con mas de un elemento, la condición necesaria y suficiente para que $L/D = L'$ sea simple es que D sea un sistema deductivo maximal de L .*

Dem. Supongamos que $L' = L/D$ es simple, luego L' es un álgebra con mas de un elemento y por lo tanto D es un sistema deductivo propio y por el Lema 4.1.2, $B(L') = \{0', 1'\}$. Sea h el homomorfismo natural de $L \rightarrow L/D$, como $h(\nabla x) = \nabla h(x)$ entonces $h : B(L) \rightarrow B(L/D)$. Además $D = h^{-1}(1')$ e $I = h^{-1}(0')$ es un ideal del reticulado L , $B(L) \subseteq D \cup I$, $\Delta D = D \cap B(L)$ es un filtro propio de $B(L)$ y se prueba sin dificultad que $\Delta I = I \cap B(L)$ es un ideal propio de $B(L)$. Además $\Delta D \cap \Delta I = \emptyset$ y $\Delta D \cup \Delta I = B(L)$ luego ΔD es un filtro primo de $B(L)$ esto es ΔD es un ultrafiltro del álgebra de Boole $B(L)$, luego por el Lema 3.1.13 $F(\Delta D)$ es un sistema deductivo máximo de L y por el Lema 3.1.13, $F(\Delta D) = D$.

Supongamos ahora que D es un sistema deductivo máximo de L , luego D es propio y en consecuencia $L' = L/D$ tiene mas de un elemento. Sea $b' \in B(L')$, tal que $b' \neq 1'$ y h el epimorfismo natural de $L \rightarrow L/D$, luego existe $b \in L$ tal que $h(b) = b'$ y como $b' \in B(L')$ tenemos que $b \in B(L)$ y $b \neq 1$. Como D es un sistema deductivo máximo sabemos por el Corolario 3.4.6 que (1) $b \in D$ ó (2) $\sim b \in D$. Si ocurre (1) entonces $1' = h(b) = b'$, absurdo, luego ocurre (2) y por lo tanto $\sim b' = h(\sim b) = 1'$ y en consecuencia $b' = 0'$. Luego $B(L') = \{0', 1'\}$ esto es L' es simple. ■

Del corolario anterior resulta la importancia del estudio de los sistemas deductivos máximos para determinar las álgebras simples.

Vamos a representar con **B** un álgebra de Boole con dos elementos y con **T** el álgebra de Łukasiewicz centrada, con tres elementos, indicada en el Ejemplo 2.2.1. El siguiente lema es un caso particular del lema indicado por L. Monteiro en 1971, para las álgebras de Łukasiewicz monádicas [77].

Lema 4.1.3 *Si L es un álgebra de Łukasiewicz, con mas de un elemento, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- 1) L es simple,
- 2) Cualquiera que sea $a \in L$, $a \neq 1$ entonces $\Delta a = 0$,
- 3) $L \cong \mathbf{B}$ ó $L \cong \mathbf{T}$.

Dem. $1 \rightarrow 2$) Por el Corolario 4.1.1, $M = \{1\}$ es un sistema deductivo maximal luego si $a \neq 1$ esto es $a \notin M$ luego por el Teorema 3.4.4, existe $m \in M = \{1\}$ tal que $0 = \Delta a \wedge m = \Delta a \wedge 1 = \Delta a$.

$2 \rightarrow 3$) Primer caso: $L \setminus B(L) = \emptyset$, esto es $L = B(L)$. Entonces si (i) $b \in B(L)$ e (ii) $b \neq 1$, por (i) $\Delta b = b$ y de (ii) resulta por la hipótesis que $\Delta b = 0$, lo que prueba que $B(L) = \{0, 1\}$ y por lo tanto $L \cong \mathbf{B}$.

Segundo caso: $L \setminus B(L) \neq \emptyset$. Entonces si $c \in L \setminus B(L)$ tenemos que (i) $c \neq 0$ y (ii) $c \neq 1$. De (ii) resulta por la hipótesis que (iii) $\Delta c = 0$. Si $\sim c = 1$ esto es $c = 0$ lo que contradice (i), luego $\sim c \neq 1$ resulta por la hipótesis que $\Delta \sim c = 0$ esto es (iv) $\nabla c = 1$. Por lo tanto tenemos que cualquiera que sea $c \in L \setminus B(L)$, c es un centro del álgebra L y como el centro es único $L = \{0, c, 1\} \cong \mathbf{T}$.

$3 \rightarrow 1$) Si $L \cong \mathbf{B}$ ó $L \cong \mathbf{T}$ entonces L tiene mas de un elemento y los únicos sistemas deductivos de L son $D(0)$ y $D(1)$. ■

Observemos que **B** es isomorfa a una subálgebra de **T**.

Lema 4.1.4 *Si M es un sistema deductivo maximal de un álgebra de Łukasiewicz L entonces $L/M \cong \mathbf{B}$ ó $L/M \cong \mathbf{T}$.*

Dem. Como $M \in \mathbf{M}(L)$ entonces por el Corolario 4.1.2, L/M es un álgebra de Łukasiewicz simple, luego por el Lema 4.1.3, 3) $L/M \cong \mathbf{B}$ ó $L/M \cong \mathbf{T}$. ■

Lema 4.1.5 Si L es un álgebra de Łukasiewicz finita, con más de un elemento, entonces $F(b)$ es un sistema deductivo máximo de L si y sólo si b es un átomo del álgebra de Boole $B(L)$. (L. Monteiro, 2002)

Dem. Sea $F(b)$ es un sistema deductivo máximo, en particular es un sistema deductivo, luego por el Lema 3.4.4 tenemos que $b \in B(L)$. Supongamos que existe $x \in B(L)$ tal que $0 \leq x \leq b$ luego $F(b) \subseteq F(x) \subseteq F(0) = A$, y como por el Lema 3.4.4 $F(x)$ es un sistema deductivo y $F(b)$ es máximo resulta que $F(x) = F(b)$ ó $F(x) = F(0)$ esto es $x = b$ ó $x = 0$, lo que prueba que b es un átomo de $B(L)$.

Recíprocamente supongamos que b es un átomo de $B(L)$. Sabemos que $D(x) = F(\Delta x)$ cualquiera que sea $x \in L$, luego de $b \in B(L)$ resulta que $D(b) = F(\Delta b) = F(b)$. Como $b \neq 0$ el sistema deductivo $F(b)$ es propio. Supongamos que (1) D es un sistema deductivo tal que (2) $F(b) \subseteq D$ Como D es un filtro y L es finita (3) $D = F(x)$, con $x \in L$ De (2) y (3) tenemos $F(b) \subseteq F(x)$ y por lo tanto (4) $x \leq b$ luego (5) $0 \leq \Delta x \leq \Delta b = b$. Como b es un átomo de $B(L)$ y $0, \Delta x \in B(L)$ entonces (6) $\Delta x = 0$ ó (7) $\Delta x = b$. Como $x \in D$ y D es un sistema deductivo tenemos que (8) $\Delta x \in D$. Si ocurre (6) de (6) y (8) resulta $0 \in D$ y por lo tanto $D = L$. Si ocurre (7), como $b = \Delta x \leq x$ entonces por $b = x$ y por lo tanto $D = F(b)$, lo que prueba que $F(b)$ es un sistema deductivo máximo. ■

Por lo tanto podemos afirmar que si L es un álgebra de Łukasiewicz finita, con mas de un elemento, el número de sistemas deductivos maximales es igual al número de átomos del álgebra de Boole $B(L)$.

4.2 Producto Cartesiano

Dada una familia de álgebras de Łukasiewicz $\{L_i\}_{i \in I}$, sea $L = \prod_{i \in I} L_i$ el producto cartesiano de la familia de conjuntos $\{L_i\}_{i \in I}$, esto es el conjunto de todas las funciones $x : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} L_i$ tales que en cada elemento $i \in I$ toman un valor $x(i) = x_i \in L_i$. Se dice que x_i es la coordenada de índice i del elemento $x \in L$ y se nota $x = [x_i]_{i \in I}$, $x = [x_i]$, $x = (x_i)_{i \in I}$ o $x = (x_i)$.

Representemos con 0_i y 1_i el primer y último elemento respectivamente de las álgebras L_i , $i \in I$. Sean $0 = (0_i)_{i \in I}$, $1 = (1_i)_{i \in I}$ y dados $x = (x_i)_{i \in I} \in L$, $y = (y_i)_{i \in I} \in L$, pongamos por definición:

$$\nabla x = (\nabla x_i)_{i \in I}, \quad \sim x = (\sim x_i)_{i \in I}, \quad x \wedge y = (x_i \wedge y_i)_{i \in I}, \quad x \vee y = (x_i \vee y_i)_{i \in I}.$$

Se prueba sin dificultad que $(L, 1, \sim, \nabla, \vee, \wedge)$ es un álgebra de Łukasiewicz a la que se denomina **producto cartesiano** o **directo** de la familia de álgebras de Łukasiewicz $\{L_i\}_{i \in I}$. Cada uno de los conjuntos L_i recibe el nombre de **i-ésimo eje de coordenadas** ó **i-ésimo eje**. Si $L_i = L$, $\forall i \in I$, entonces $\prod_{i \in I} L_i$ es el conjunto de todas las funciones de I en L . En este caso se nota L^I en vez de $\prod_{i \in I} L_i$. Si el conjunto I es finito, por ejemplo $I = \{1, 2, \dots, n\}$ entonces se utiliza cualquiera de las notaciones siguientes:

$$\prod_{i=1}^n L_i \quad \text{ó} \quad L_1 \times L_2 \times \dots \times L_n$$

En este caso si $x \in \prod_{i=1}^n L_i$ entonces: $x = (x(1), x(2), \dots, x(n)) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Es claro que $L_1 \times L_2 \neq L_2 \times L_1$, pero $L_1 \times L_2$ y $L_2 \times L_1$ son álgebras de Łukasiewicz isomorfas. También se prueba sin dificultad que $L_1 \times (L_2 \times L_3) \cong (L_1 \times L_2) \times L_3$.

Observemos que si L, L' son álgebras de Łukasiewicz y f es un elemento fijo de L entonces el subconjunto C_f de $L \times L'$ definido $C_f = \{(f, y) : y \in L'\}$ es un álgebra de Łukasiewicz isomorfa a L' , definiendo $\sim (f, y) = (f, \sim y)$, $\nabla (f, y) = (f, \nabla y)$ y si f' es un elemento fijo de L' entonces $C_{f'} = \{(x, f') : x \in L\} \subseteq L \times L'$ es un álgebra de Łukasiewicz isomorfa a L definiendo $\sim (x, f') = (\sim x, f')$, $\nabla (x, f') = (\nabla x, f')$.

4.3 Factorización de un álgebra de Łukasiewicz con eje

Observemos que:

- Toda álgebra de Boole A es un álgebra de Łukasiewicz donde $\nabla x = \Delta x = x$ para todo $x \in A$ y recíprocamente.
- Si A es un álgebra de Boole entonces $e = 0$ es el eje del álgebra de Łukasiewicz A , pues $\Delta e = e = 0$ y $(\Delta x \vee e) \wedge \nabla x = (x \vee 0) \wedge x = x$ para todo $x \in A$.
- Si c es un centro de un álgebra de Łukasiewicz L entonces c es un eje del álgebra de Łukasiewicz L .
- En lo que resta de este párrafo vamos a considerar álgebras de Łukasiewicz que no son álgebras de Boole ni álgebras con centro.

Gr. Moisil [44], pág. 66–90 indicó el siguiente teorema

Teorema 4.3.1 *Toda álgebra de Łukasiewicz con eje es el producto cartesiano de un álgebra de Boole por un álgebra de Łukasiewicz con centro.*

Para probar este teorema, Moisil utilizó algunos resultados de la teoría de anillos (ver párrafo 2.9).

L. Monteiro, [77] indicó una demostración más simple de este teorema, utilizando solamente resultados de la teoría de las álgebras de Łukasiewicz.

Recordemos el siguiente resultado de la teoría de reticulados distributivos. Sea R un reticulado distributivo con primer elemento 0 y último elemento 1. Si $x \in R$ notaremos $[x] = F(x) = \{y \in R : x \leq y\}$ y $(x) = I(x) = \{y \in R : y \leq x\}$. Es bien conocido que estos conjuntos son respectivamente un filtro y un ideal de R que se denominan filtro principal e ideal principal. Además $F(x)$ es un reticulado distributivo con primer elemento x y último elemento 1 e $I(x)$ es un reticulado distributivo con primer elemento 0 y último elemento x . Notaremos con $B(R)$ el conjunto de todos los elementos booleanos de R , luego $\{0, 1\} \subseteq B(R)$. Si $x \in B(R)$ notaremos con $-x$ su complemento booleano.

Lema 4.3.1 *Si R un reticulado distributivo con primer elemento 0 y último elemento 1 y $b \in B(R) \setminus \{0, 1\}$ entonces R es isomorfo al producto cartesiano de los reticulados distributivos $I(b)$ e $I(-b)$ esto es $R \cong I(b) \times I(-b)$.*

Lema 4.3.2 Si R un reticulado distributivo finito no trivial y reducible entonces $R \cong \prod_{i=1}^t (a_i]$, donde $\mathcal{A}(B(R)) = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$.

Recordemos que el isomorfismo de $R \rightarrow I(b) \times I(-b)$ se define del siguiente modo $h(x) = (x \wedge b, x \wedge -b)$.

Lema 4.3.3 Si L es un álgebra de Łukasiewicz y $b \in B(L) \setminus \{0, 1\}$ entonces $L \cong L/F(b) \times L/F(\sim b)$. (L. Monteiro, [77])

Dem. Recordemos que si $b \in B(L)$ entonces su complemento booleano es $\sim b$. Como $b, \sim b \in B(L)$ entonces sabemos que $F(b)$ y $F(\sim b)$ son sistemas deductivos y que además por el Lema 3.6.1 $L/F(b) \cong I(b)$ y $L/F(\sim b) \cong I(\sim b)$. Luego por el Lema 4.3.1 el reticulado distributivo L es isomorfo al reticulado distributivo

$$I(b) \times I(\sim b) \cong L \cong L/F(b) \times L/F(\sim b).$$

Como la función h indicada precedentemente es un isomorfismo de reticulados tenemos que

$$\text{I) } h(0) = 0,$$

$$\text{II) } h(1) = 1,$$

$$\text{III) } h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y),$$

$$\text{IV) } h(x \vee y) = h(x) \vee h(y),$$

Probemos que

$$\text{V) } h(\nabla x) = \nabla h(x).$$

En efecto $\nabla h(x) = \nabla(x \wedge b, x \wedge \sim b) = (\nabla x \wedge \nabla b, \nabla x \wedge \nabla \sim b) = (\nabla x \wedge b, \nabla x \wedge \sim b) = h(\nabla x)$.

En forma análoga se prueba

$$\text{VI) } h(\Delta x) = \Delta h(x).$$

Luego como h verifica las propiedades (I) a (VI) por los resultados de L. Monteiro [75] que h respeta el operador $\sim$ y en consecuencia h es un homomorfismo de álgebras de Łukasiewicz y como h es biyectiva entonces h es un isomorfismo. ■

Lema 4.3.4 El producto cartesiano de un álgebra de Boole por un álgebra de Łukasiewicz con centro es un álgebra de Łukasiewicz con eje.

Dem. Si B es un álgebra de Boole y C es un álgebra de Łukasiewicz con centro c entonces se prueba sin dificultad que el elemento $e = (0, c) \in B \times C$ es un eje del álgebra de Łukasiewicz $B \times C$. ■

Lema 4.3.5 Si L es un álgebra de Łukasiewicz y $a \in L$ verifica $\Delta a = 0$ entonces el álgebra cociente $E = L/F(\nabla a)$ es un álgebra de Łukasiewicz con centro. (L. Monteiro [77])

Dem. Vamos a probar que $c = C(a)$, donde $C(a)$ indica la clase de equivalencia, mód. $F(\nabla a)$, que contiene al elemento a , es el centro del álgebra cociente $E = L/F(\nabla a)$. En efecto probemos que $\sim C(a) = C(a)$ esto es que $\sim a \equiv a$ mód. $F(\nabla a)$. Para ello basta observar que las siguientes condiciones son equivalentes dos a dos:

(1) $\Delta a = 0 \iff$ por Lema 2.4.8 $a \leq \sim a \iff a = a \wedge \sim a \iff$ por L9, $a = a \wedge \nabla a = a \wedge \sim a \iff$ por L7, $a = \sim a \wedge \nabla a \iff \sim a \equiv a$ mód. $F(\nabla a)$. ■

Lema 4.3.6 Si L es un álgebra de Łukasiewicz con eje e entonces el álgebra cociente $B = L/F(\sim \nabla e) = L/F(\Delta \sim e)$ es un álgebra de Boole. (L. Monteiro [77])

Dem. Vamos a probar que $\Delta C(x) = C(x)$ cualquiera que sea $x \in L$, esto es que $\Delta x \equiv x$ mód. $F(\Delta \sim e)$.

Como L tiene eje entonces $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x = \Delta x \vee (e \wedge \nabla x)$ cualquiera que sea $x \in L$, luego $x \wedge \Delta \sim e = (\Delta x \wedge \Delta \sim e) \vee (e \wedge \Delta \sim e \wedge \nabla x) = (\Delta x \wedge \Delta \sim e) \vee (0 \wedge \nabla x) = \Delta x \wedge \Delta \sim e$ y por lo tanto $\Delta x \equiv x$ mód. $F(\Delta \sim e)$. ■

Vamos a probar ahora el Teorema 4.3.1. Sea L un álgebra de Łukasiewicz con eje e que no es un álgebra de Boole ni un álgebra con centro, entonces $\nabla e \neq 1$ y $\nabla e \neq 0$, pues si $\nabla e = 0$ entonces $e = 0$ y L sería un álgebra de Boole, lo que contradice una de las hipótesis. Si $\nabla e = 1$ entonces e sería un centro de L lo que contradice la otra hipótesis. Tenemos así que $\nabla e \in B(L) \setminus \{0, 1\}$, luego por el Lema 4.3.3 podemos afirmar que

$$L \cong L/F(\sim \nabla e) \times L/F(\nabla e)$$

donde por el Lema 4.3.6 $L/F(\sim \nabla e)$ es un álgebra de Boole y por el Lema 4.3.5 $L/F(\nabla e)$ es un álgebra de Łukasiewicz con centro.

Observación 4.3.1 • Si L es un álgebra de Łukasiewicz con centro, luego con eje, entonces es evidente que $L \cong P \times L$ donde P representa un álgebra de Boole con un sólo elemento.

- Si L es un álgebra de Boole, entonces $L \cong L \times P$ donde P representa un álgebra de Łukasiewicz centrada con un sólo elemento.

Lema 4.3.7 Si L es un álgebra de Łukasiewicz finita no trivial y diferente de $\mathbf{B}$ y de $\mathbf{T}$ y $\mathcal{A}(B(L)) = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ entonces $L \cong \prod_{i=1}^t (a_i]$.

Dem. Por hipótesis $B(L)$ es finita no trivial y $B(L) \neq \{0, 1\}$, luego por el Lema 4.3.2 $L \cong \prod_{i=1}^t (a_i]$. ■

Observación 4.3.2 Sea $(A, \exists)$ un álgebra de Boole monádica finita, con n átomos $n \in \mathbf{N}$, y supongamos que el álgebra de Boole $K(A) = \{x \in A : \exists x = x\}$ tiene h átomos $1 \leq h \leq n$. Si la partición $\{X_1, X_2, \dots, X_h\}$ de $\mathcal{A}(A)$ asociada a $K(A)$ es tal que: $N[X_i] = 1$ para $1 \leq i \leq k$ y $N[X_i] > 1$ para $k+1 \leq i \leq h$, entonces los átomos de $K(A)$ son $k_i = \bigvee_{x \in X_i} x$, $1 \leq i \leq h$. Por lo visto en la sección 2.10 sabemos que $\mathcal{L}(A)$ es un álgebra de

Łukasiewicz tal que las álgebras de Boole $B(\mathcal{L}(A))$ y $K(A)$ son isomorfas luego $B(\mathcal{L}(A))$ tiene h átomos, y los átomos de $B(\mathcal{L}(A))$ son $C(k_i)$, $1 \leq i \leq h$. Además vimos que $(C(k_i)) \cong \mathbf{B}$ ó $(C(k_i)) \cong \mathbf{T}$ luego de las hipótesis hechas y el lema anterior tenemos que:

$$\mathcal{L}(A) \cong \prod_{i=1}^h (C(k_i)) \cong \mathbf{B}^k \times \mathbf{T}^{h-k}.$$

4.4 Producto subdirecto de álgebras de Łukasiewicz

Dada una familia $\{L_i\}_{i \in I}$ no vacía de álgebras de Łukasiewicz, consideremos el álgebra de Łukasiewicz $P = \prod_{i \in I} L_i$. Dado $i \in I$ consideremos la proyección Π_i (**proyección i -ésima**) de P sobre L_i definida por $\Pi_i(a) = a_i \in L_i$. Sabemos que Π_i es un homomorfismo de reticulado de P sobre L_i tal que $\Pi(1) = 1_i$ y $\Pi(0) = 0_i$. Además si $a \in P$ entonces $\sim \Pi_i(a) = \sim a_i = \Pi_i(\sim a_i) = \Pi_i(\sim a)$, $\nabla \Pi_i(a) = \nabla a_i = \Pi_i(\nabla a_i) = \Pi_i(\nabla a)$ por lo tanto cada proyección i -ésima es un epimorfismo de P en $\Pi(L_i)$.

Definición 4.4.1 Si S es una subálgebra del álgebra de Łukasiewicz $P = \prod_{i \in I} L_i$ tal que $\Pi_i(S) = L_i$, para todo $i \in I$, entonces diremos que S es un **producto subdirecto** de las álgebras de Łukasiewicz L_i .

Lema 4.4.1 Toda subálgebra S del producto cartesiano $P = \prod_{i \in I} L_i$ de álgebras de Łukasiewicz es un producto subdirecto de álgebras de Łukasiewicz.

Dem. Para cada $i \in I$ sea $L'_i = \Pi_i(S)$. Dado que las proyecciones son homomorfismos de P en L_i entonces L'_i es una subálgebra de L_i . Sea $P' = \prod_{i \in I} L'_i$ y Π'_i la proyección i -ésima de P' en L'_i . Probemos que S es producto subdirecto de P' , esto es que 1) S una subálgebra de P' y 2) $\Pi'_i(S) = L'_i$ cualquiera que sea $i \in I$. Por la definición de P' es obvio que se verifica 2). Dado $s = (s_i)_{i \in I} \in S$, como $s_i = \Pi_i(s) \in L'_i$, entonces $s = (a_i)_{i \in I} \in P' = \prod_{i \in I} L'_i$. Por lo tanto S es un subconjunto de P' , y en consecuencia S es una subálgebra de P' . ■

Definición 4.4.2 Se dice que un álgebra de Łukasiewicz L es **subdirectamente reducible** si L es isomorfa a una subálgebra L' de un producto directo $P = \prod_{i \in I} L_i$, en forma tal que:

1. $\Pi_i(L') = L_i$, cualquiera que sea $i \in I$.
2. Ninguna de las proyecciones es un isomorfismo.

Un álgebra de Łukasiewicz se dice **subdirectamente irreducible** si no es subdirectamente reducible.

4.5 Teorema de representación de Moisil

Conocidas las álgebras simples, a partir de ellas podemos construir otras álgebras con las técnicas elementales, indicadas anteriormente. Las imágenes homomórficas de las álgebras simples, no conducen a nada nuevo.

Resta por lo tanto, hacer productos cartesianos y determinar subálgebras de esos productos, esto nos conduce naturalmente a la siguiente definición: Un álgebra de Łukasiewicz se dice **semisimple** si ella es isomorfa a un subproducto directo de álgebras de Łukasiewicz simples.

Teorema 4.5.1 (Teorema de representación de Moisil) Toda álgebra de Łukasiewicz L , con más de un elemento, es subproducto directo de álgebras de Łukasiewicz simples.

Dem. Si el álgebra de Łukasiewicz L es simple el teorema es evidentemente verificado. Supongamos que L no es simple, entonces $B(L) \neq \{0, 1\}$ luego existe $b \in B(L)$ tal que $b \neq 0$, $b \neq 1$ y por lo tanto $\sim b \in B(L)$ y $\sim b \neq 0$, $\sim b \neq 1$, luego existen sistemas deductivos máximos M_1 y M_2 tales que $b \in M_1$ y $\sim b \in M_2$. Además $M_1 \neq M_2$ pues si $M_1 = M_2$ entonces $b, \sim b \in M_1$, lo que contradice el Corolario 3.4.6. Por lo tanto si L no es simple existen por lo menos dos sistemas deductivos máximos diferentes. Sea $\mathbf{M}(L)$ el conjunto de todos los sistemas deductivos máximos de L . Para cada $M \in \mathbf{M}(L)$ sea h_M el epimorfismo natural de $L \rightarrow L/M$. Sabemos que si $M \in \mathbf{M}(L)$ entonces $L/M \cong \mathbf{B}$ ó $L/M \cong \mathbf{T}$, luego como $\mathbf{B}$ es isomorfa a una subálgebra de $\mathbf{T}$ podemos suponer que para cada $M \in \mathbf{M}(L)$, h_M es un homomorfismo de L en $\mathbf{T}$. Sea $\mathcal{F} = \mathbf{T}^{\mathbf{M}(L)}$, ya sabemos que $\mathcal{F}$ es un álgebra de Łukasiewicz. Vamos a probar que L es isomorfa a una subálgebra $\mathcal{A}$ de $\mathcal{F}$. Para ello, consideremos la siguiente transformación: dado $f \in L$ pongamos $\varphi(f) = F$ donde F está definida por:

$$F(M) = h_M(f), \text{ para todo } M \in \mathbf{M}(L),$$

luego $F \in \mathcal{F}$. Entonces

H1) $\varphi(f \vee g) = \varphi(f) \vee \varphi(g)$, para $f, g \in L$.

Sean $k = f \vee g$, $\varphi(f) = F$, $\varphi(g) = G$ y $\varphi(k) = K$, luego $K(M) = h_M(k) = h_M(f \vee g) = h_M(f) \vee h_M(g) = F(M) \vee G(M) = (F \vee G)(M)$ lo que prueba H1.

H2) $\varphi(\sim f) = \sim \varphi(f)$, para $f \in L$.

Sean $g = \sim f$, $\varphi(f) = F$, y $\varphi(g) = G$, luego $G(M) = h_M(g) = h_M(\sim f) = \sim h_M(f) = \sim F(M) = (\sim F)(M)$ lo que prueba H2.

H3) $\varphi(\nabla f) = \nabla \varphi(f)$, para $f \in L$.

Sean $g = \nabla f$, $\varphi(f) = F$, y $\varphi(g) = G$, luego $G(M) = h_M(g) = h_M(\nabla f) = \nabla h_M(f) = \nabla F(M) = (\nabla F)(M)$ lo que prueba H3.

Acabamos así de probar que φ es un homomorfismo y por lo tanto $\mathcal{A} = \varphi(L)$ es una subálgebra de $\mathcal{F}$.

φ es inyectiva. Sean $f, g \in L$ tales que (1) $f \neq g$, $\varphi(f) = F$ y $\varphi(g) = G$. Para probar que $F \neq G$ debemos probar que existe por lo menos un $M \in \mathbf{M}(L)$ tal que $F(M) \neq G(M)$. De (1) resulta por el principio de determinación de Moisil que (2) $\nabla f \neq \nabla g$ ó (3) $\Delta f \neq \Delta g$. Si ocurre (2) entonces (2a) $\nabla f \not\subseteq \nabla g$ ó (2b) $\nabla g \not\subseteq \nabla f$. Supongamos que ocurre (2a) (en el otro caso la demostración es análoga). De (2a) resulta que $D = F(\nabla f)$ es un sistema deductivo y que $\nabla g \notin D$, por lo tanto D es un sistema deductivo propio y en consecuencia sabemos que D es intersección de sistemas deductivos máximos, luego existe un sistema deductivo máximo M tal que $D \subseteq M$ y $\nabla g \notin M$ y en consecuencia $\nabla f \in M$ y $\nabla g \notin M$, luego $1 = h_M(\nabla f) = \nabla(h_M(f))$ y $1 \neq h_M(\nabla g) = \nabla(h_M(g))$ por lo tanto $\nabla(h_M(f)) \neq \nabla(h_M(g))$ y por lo tanto $F(M) = h_M(f) \neq h_M(g) = G(M)$.

Si ocurre (3) entonces (3a) $\Delta f \not\subseteq \Delta g$ ó (3b) $\Delta g \not\subseteq \Delta f$. Supongamos que ocurre (3a) (en el otro caso la demostración es análoga). De (3a) resulta que $D = F(\Delta f)$ es un sistema deductivo y que $\Delta g \notin D$, por lo tanto D es un sistema deductivo propio y en consecuencia sabemos que D es intersección de sistemas deductivos máximos, luego existe un sistema deductivo máximo M tal que $D \subseteq M$ y $\Delta g \notin M$ y en consecuencia $\Delta f \in M$ y $\Delta g \notin M$, luego $1 = h_M(\Delta f) = \Delta(h_M(f))$ y $1 \neq h_M(\Delta g) = \Delta(h_M(g))$ por lo tanto $\Delta(h_M(f)) \neq \Delta(h_M(g))$ y por lo tanto $F(M) = h_M(f) \neq h_M(g) = G(M)$.

Acabamos así de probar que la subálgebra $\mathcal{A}$ de $\mathcal{F}$ es isomorfa al álgebra L .

Para probar que φ es biunívoca también podemos proceder del siguiente modo: Sean $f, g \in L$, $\varphi(f) = F$, y $\varphi(g) = G$, y supongamos que $F = \varphi(f) = \varphi(g) = G$, esto es $F(M) = G(M)$ para todo $M \in \mathbf{M}(L)$, luego $h_M(f) = h_M(g)$ para todo $M \in \mathbf{M}(L)$. En consecuencia $1 = h_M(f) \longrightarrow h_M(g) = h_M(f \longrightarrow g)$ y $1 = h_M(g) \longrightarrow h_M(f) = h_M(g \longrightarrow f)$, esto es $f \longrightarrow g, g \longrightarrow f \in (h_M)^{-1}(1) = M$ para todo $M \in \mathbf{M}(L)$ y como $\bigcap_{M \in \mathbf{M}(L)} M = \{1\}$ entonces $f \longrightarrow g = 1 = g \longrightarrow f$ y por lo tanto $f = g$. ■

Teorema 4.5.2 *Si L es un álgebra de Lukasiewicz finita con más de un elemento, que no es simple, y $M_1, M_2, \dots, M_n$ sus sistemas deductivos máximos entonces:*

$$L \cong L/M_1 \times L/M_2 \times \dots \times L/M_n.$$

Dem. Sea $\mathcal{F} = \prod_{i=1}^n L_i$, con $L_i = \mathbf{T}$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Sabemos que la aplicación $\varphi : L \rightarrow \mathcal{F}$, definida por: $\varphi(f) = F$, donde $F(M_i) = h_{M_i}(f)$, para $i = 1, 2, \dots, n$, es un homomorfismo de L en $\mathcal{F}$ y que como $\bigcap_{i=1}^n M_i = \{1\}$ entonces φ es biunívoca. Observemos que $L/M_1 \times L/M_2 \times \dots \times L/M_n = \prod_{i=1}^n L/M_i \subseteq \mathcal{F}$

Probemos que φ es suryectiva. Como L es un álgebra de Lukasiewicz finita con más de un elemento que no es simple, entonces $B(L)$ es un álgebra de Boole finita con más de un átomo. Sean $b_1, b_2, \dots, b_n$ los átomos del álgebra de Boole $B(L)$ entonces $M_i = F(b_i)$ $1 \leq i \leq n$ es el conjunto de todos los sistemas deductivos máximos de L y $L_i = L/M_i$, $1 \leq i \leq n$ son álgebras simples. En forma análoga a la indicada en el Teorema 4.5.1 se prueba que L es isomorfa a una subálgebra del álgebra $\mathcal{F} = \prod_{i=1}^n L_i$ donde el isomorfismo en cuestión se define por $\varphi(x) = (h_{M_1}(x), h_{M_2}(x), \dots, h_{M_n}(x))$ donde h_{M_i} indica el epimorfismo natural de L sobre $L_i = L/M_i$. Probemos que en este caso φ es suryectiva. Dado $y = (y_1, y_2, \dots, y_t) \in \mathcal{F}$ entonces para cada $y_i \in L_i$ existe $x_i \in L$ tal que $h_{M_i}(x_i) = y_i$. Sea $x = \bigvee_{i=1}^n (x_i \wedge b_i)$. Como $b_i \in B(L)$ entonces $h_{M_j}(b_i) \in B(L_j) = \{0, 1\}$ luego $h_{M_j}(b_i) = 0$ para $j \neq i$ y $h_{M_j}(b_j) = 1$. Por lo tanto $h_{M_j}(x) = h_{M_j}(\bigvee_{i=1}^n (x_i \wedge b_i)) = \bigvee_{i=1}^n (h_{M_j}(x_i) \wedge h_{M_j}(b_i)) = h_{M_j}(x_j) \wedge h_{M_j}(b_j) = h_{M_j}(x_j) \wedge 1 = h_{M_j}(x_j) = y_j$. Lo que prueba que $\varphi(x) = y$.

Todo sistema deductivo D de L es en particular un filtro y como L es un reticulado distributivo finito todos sus filtros son principales, luego $D = F(x)$, con $x \in L$ y como D es un sistema deductivo y $x \in F(x) = D$ resulta que $\Delta x \in F(x)$ y por lo tanto $D = F(b)$ con $b \in B(L)$. Por otro lado sabemos por el Lema 4.1.5 que M es un sistema deductivo máximo de L si y solo si b es un átomo de $B(L)$. Además (1) $L/M_i \cong \mathbf{B}$ ó (2) $L/M_i \cong \mathbf{T}$ para $1 \leq i \leq n$. Podemos suponer que $M_1, M_2, \dots, M_k$ son sistemas deductivos que verifican (1) y $M_{k+1}, \dots, M_n$ son sistemas deductivos que verifican (2).

Observemos que puede ocurrir que en L no existan sistemas deductivos que verifiquen (1) ó que no verifiquen (2), pero siempre existen sistemas deductivos que verifican alguna de las dos condiciones.

Entonces el número de elementos de $\prod_{i=1}^n L/M_i$ es igual a $2^k \times 3^{n-k}$. ■

4.6 Algebras de Łukasiewicz inyectivas

Definición 4.6.1 *Un álgebra de Łukasiewicz C se dice inyectiva si cualquiera que sea el álgebra de Łukasiewicz L y S una L -subálgebra de L entonces para todo homomorfismo $h : S \rightarrow C$ existe un homomorfismo $H : L \rightarrow C$ que extiende a h , esto es $H(s) = h(s)$ para todo $s \in S$.*

A. Monteiro en el curso dictado en 1963, [52] propuso a sus alumnos determinar las álgebras de Łukasiewicz inyectivas y conjeturó que ellas eran las álgebras de Łukasiewicz completas y centradas. L. Monteiro, publicó un trabajo en 1965, [71], probó la conjetura anterior y que este resultado es una consecuencia de un importante teorema de R. Sikorski [91].

Dado que toda álgebra de Łukasiewicz es un reticulado distributivo con primer y último elemento entonces es claro que:

Lema 4.6.1 *El producto cartesiano de álgebras de Łukasiewicz completas es un álgebra de Łukasiewicz completa.*

Teorema 4.6.1 *Toda álgebra de Łukasiewicz L es isomorfa a una subálgebra de un álgebra de Łukasiewicz completa y centrada.*

Dem. Si L es trivial entonces claramente L es completa y centrada. Si L es simple entonces sabemos que $L \cong \mathbf{T}$ ó $L \cong \mathbf{B}$ y en este último caso $\mathbf{B} \cong \{0, 1\} \subset \mathbf{T}$. Si L no es trivial, y no es simple entonces por el Teorema 4.5.1 sabemos que L es isomorfa a una L -subálgebra del álgebra de Łukasiewicz $P = \mathbf{T}^{\mathbf{M}(L)}$ donde $\mathbf{M}(L)$ es el conjunto de todos los sistemas deductivos maximales de L y como $P \cong \prod_{M \in \mathbf{M}(L)} T_M$ donde $T_M = \mathbf{T}$ para

todo $M \in \mathbf{M}(L)$, y $\mathbf{T}$ es un álgebra de Łukasiewicz completa entonces por el Lema 4.6.1 P es completa. Como el producto cartesiano de álgebras de Łukasiewicz centradas es un álgebra de Łukasiewicz centrada entonces P es centrada. ■

Teorema 4.6.2 *Un álgebra de Łukasiewicz C es inyectiva si y sólo si C es completa y centrada.* L. Monteiro, [71]

Dem. Solamente vamos a indicar las líneas generales de la demostración. Supongamos que C es inyectiva, entonces el Teorema 4.6.1, C es isomorfa a una L -subálgebra S de un álgebra de Łukasiewicz completa y centrada A . Sea f un isomorfismo de C en S y consideremos el isomorfismo $h = f^{-1} : S \rightarrow C$ luego como C es inyectiva h se puede prolongar a un homomorfismo $H : A \rightarrow C$. Dado $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq C$ entonces $\{f(x_i)\}_{i \in I} \subseteq S \subseteq A$, luego como A es completa existe $s = \bigvee_{i \in I} H(x_i) \in A$. Se prueba que $H(s) \in C$ es el supremo de $\{x_i\}_{i \in I}$, luego C es completa. Si c es el centro de A se prueba que $H(c)$ es un centro de C .

Supongamos ahora C es un álgebra de Łukasiewicz completa y con centro c , que A es un álgebra Łukasiewicz, S una L -subálgebra de A y $h : S \rightarrow C$ un homomorfismo. Consideremos las álgebras de Boole $B(A)$, $B(S)$ y $B(C)$. Como C es completa sabemos por el Corolario 2.12.3 que $B(C)$ es un álgebra de Boole completa. Sea f la restricción de h al conjunto $B(S)$ luego f es un homomorfismo booleano, luego por un teorema R. Sikorski [91] existe un homomorfismo booleano $F : B(S) \rightarrow B(C)$, que extiende a f . Probamos que la función $H : A \rightarrow C$ definida por $H(x) = (F(\Delta x) \vee c) \wedge F(\nabla x)$ es un homomorfismo de A en C que extiende a h . ■

Este resultado fué generalizado por R. Cignoli en 1975, [24] quien obtuvo el siguiente:

Teorema 4.6.3 *Un álgebra de Kleene es inyectiva si y sólo si es un álgebra de Post trivalente y completa.*

5 CAPITULO IV

5.1 Algebras libres

En esta sección vamos a determinar el álgebra de Lukasiewicz L_n con un número finito n de generadores libres y a probar que el número de elementos de este álgebra está dado por:

$$N(L_n) = 2^{2^n} \cdot 3^{3^n - 2^n}.$$

Definición 5.1.1 *Dado un número cardinal $\alpha > 0$ diremos que L es un álgebra de Lukasiewicz con α generadores libres, si*

- L1) L contiene un subconjunto G de cardinal α tal que $SL(G) = L$,
- L2) Toda aplicación $f : G \rightarrow L'$, donde L' es un álgebra de Lukasiewicz arbitraria, se puede prolongar a un homomorfismo h_f , necesariamente único, de L en L' .

En estas condiciones diremos que G es un conjunto de generadores libres de L y un álgebra de Lukasiewicz se dice libre si tiene un conjunto de generadores libres. Para poner en evidencia el número cardinal α notaremos $L = L_\alpha$.

Como la noción de álgebra de Lukasiewicz está definida por medio de igualdades, sabemos por un resultado de Garret Birkhoff [12], que existe y es única (a menos de isomorfismos) el álgebra de Lukasiewicz L_α con un conjunto de generadores libres $G = \{g_i\}_{i \in I}$ de cardinal dado α .

Vamos a estudiar las álgebras L_n , donde n es un número natural ≥ 1 , esto es $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$.

5.2 Determinación del álgebra de Lukasiewicz L_n con n generadores libres

Los siguientes resultados fueron indicados por A. Monteiro en 1966, [59], y las demostraciones recién fueron publicadas en 1998 [64].

Ya vimos que si L es un álgebra de Lukasiewicz, no trivial, entonces L es isomorfa a una subálgebra de

$$\prod_{M \in \mathbf{M}(L)} L/M$$

y que si el conjunto $\mathbf{M}(L)$ es finito entonces $L \cong \prod_{M \in \mathbf{M}(L)} L/M$. Vamos a demostrar que el

conjunto $\mathbf{M}(L_n)$ es finito de donde resultará que el conjunto de sus filtros primos es finito, y sabemos que este conjunto determina L_n . Por el Lema 4.1.4 si $M \in \mathbf{M}(L_n)$ entonces $L_n/M \cong \mathbf{B}$ ó $L_n/M \cong \mathbf{T}$. Identificando álgebras isomorfas tenemos que $L_n/M = \mathbf{B}$ ó $L_n/M = \mathbf{T}$

Sea M un sistema deductivo maximal de L_n y h_M el homomorfismo natural de L_n sobre el álgebra cociente L_n/M . Como $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ es el conjunto de generadores libres de L_n , y h_M es el epimorfismo de L_n en L_n/M , entonces por el Lema 3.2.8, $h_M(G)$ es un conjunto de generadores de L_n/M . El epimorfismo h_M determina una aplicación f de G en $\mathbf{T}$,

precisamente la restricción, $h_{M|G}$ de h_M al conjunto G , esto es $f(g) = h_{M|G}(g) = h_M(g)$, cualquiera que sea $g \in G$. Luego como $L_n/M = \mathbf{T}$ ó $L_n/M = \mathbf{B}$, tenemos que $f : G \rightarrow \mathbf{T}$. Pongamos por definición: $\psi(M) = h_{M|G}$, luego $\psi : \mathbf{M}(L_n) \rightarrow \mathbf{T}^G$. Recíprocamente, si f es una aplicación de G en $\mathbf{T}$, entonces existe uno y sólo un homomorfismo h_f de L_n en $\mathbf{T}$ que prolonga f . Sea $M = Nuc(h_f)$. Es claro que h_f y f coinciden sobre G y por lo tanto la restricción de h_f al conjunto G es una función de G en $\mathbf{T}$ que coincide con f , luego $\psi(Nuc(h_f)) = f$, lo que prueba que la función ψ es suryectiva. Esto ya muestra que el conjunto $\mathbf{M}(L_n)$ es finito, pero vamos a probar que existe una correspondencia biunívoca entre los sistemas deductivos maximales de L_n y las aplicaciones de G en $\mathbf{T}$. En efecto, sean M_1 y M_2 dos sistemas deductivos maximales de L_n y $h_{M_1} : L_n \rightarrow L_n/M_1$ y $h_{M_2} : L_n \rightarrow L_n/M_2$ los respectivos homomorfismos naturales. Sean f_1 y f_2 las restricciones de h_{M_1} y h_{M_2} , respectivamente, al conjunto G , luego $f_1 : G \rightarrow \mathbf{T}$, $f_2 : G \rightarrow \mathbf{T}$. Supongamos que $\psi(M_1) = \psi(M_2)$ esto es que $f_1(g) = f_2(g)$, cualquiera que sea $g \in G$. Luego, $h_{M_1}(g) = f_1(g) = f_2(g) = h_{M_2}(g)$. La función $f_1 = f_2$ admite una única extensión a L_n y como h_{M_1} y h_{M_2} son extensiones de f , entonces $h_{M_1}(x) = h_{M_2}(x)$, cualquiera que sea $x \in L_n$. Por lo tanto $M_1 = M_2$.

Acabamos así de probar que existen tantos sistemas deductivos maximales como aplicaciones de G en $\mathbf{T}$. El número de aplicaciones de G en $\mathbf{T}$ es 3^n y por lo tanto existen 3^n sistemas deductivos maximales distintos en L_n , esto es 3^n filtros primos mínimos distintos. Determinemos el número de sistemas deductivos maximales M , tales que $L_n/M = \mathbf{B}$. En este caso, el homomorfismo natural h_M aplica L_n sobre $\mathbf{B}$ y por lo tanto la restricción f de h_M a G es una aplicación de G en $\mathbf{B} = \{0, 1\}$.

El número de tales aplicaciones es, evidentemente, 2^n . Veamos que el conjunto de estos sistemas deductivos maximales de L_n coincide con el conjunto de los ultrafiltros de L_n .

En efecto, sea M un sistema deductivo maximal de L_n tal que (1) $L_n/M = \mathbf{B}$ y $h : L_n \rightarrow \mathbf{B}$ el homomorfismo natural. Sea U un ultrafiltro tal que (2) $M \subseteq U$. En el Corolario 3.5.2 probamos que $M = \varphi(U)$ luego $\sim M = \mathbb{C}U$.

Sea $S = M \cup \sim M = M \cup \mathbb{C}U$. Vamos a demostrar que S es una subálgebra de L_n que contiene a G . En efecto:

- (I) $G \subseteq S$. Sea $g \in G$, si $g \in M$ entonces $g \in S$. Si $g \notin M$ entonces por (1) $h_M(g) = 0$ y por lo tanto $h_M(\sim g) = \sim h_M(g) = 1$ luego $\sim g \in M$ y en consecuencia $g \in \sim M \subseteq S$.
- (II) S es una subálgebra. Sea $s \in S$ luego $s \in M$ ó $s \in \sim M$. En el primer caso $\sim s \in \sim M \subseteq S$. En el segundo $s = \sim m$ donde $m \in M$ luego $\sim s = m \in M \subseteq S$. Sean $s, t \in S$, luego podemos tener los siguientes casos (a) $s, t \in M$, (b) $s, t \in \sim M$ y (c) $s \in M, t \in \sim M$.
 - (a) En este caso como M es un filtro, $s \wedge t \in M \subseteq S$
 - (b) $s = \sim m_1$ con $m_1 \in M$ y $t = \sim m_2$ con $m_2 \in M$, luego $s \wedge t = \sim (m_1 \vee m_2)$ y como M es un filtro, $m_1 \in M$ y $m_1 \leq m_1 \vee m_2$ tenemos que $m_1 \vee m_2 \in M$ y por lo tanto $s \wedge t \in \sim M$.
 - (c) $t = \sim m$ con $m \in M$, luego $s \wedge t = s \wedge \sim m = \sim (\sim s \vee m)$. Como $m \in M$, $m \leq \sim s \vee m$ y M es un filtro tenemos que $\sim s \vee m \in M$ y en consecuencia $s \wedge t \in \sim M$.

Para demostrar que S es una subálgebra sólo nos falta demostrar que::

(III) S verifica "Si $s \in S$ entonces $\nabla s \in S$."

Para ello vamos a demostrar en primer lugar que $B(L_n) \cap (U \setminus M) = \emptyset$. En efecto si existiera $b \in B(L_n) \cap (U \setminus M)$ entonces (d) $b \in B(L)$, (e) $b \in U$ y (f) $b \notin M$. Sabemos que si b es un elemento booleano de un álgebra de Łukasiewicz, su complemento booleano es precisamente $\sim b$ (ver [17], [74]), luego de (d) resulta que (g) $b \vee \sim b = 1 \in M$. Por el Corolario 3.5.2, M es un filtro primo de L_n , luego de (g) y (f) resulta que $\sim b \in M$, luego (h) $b \in \sim M = \complement U$. De (e) y (h) se concluye que $0 = \sim b \wedge b \in U$, absurdo.

De $B(L_n) \cap (U \setminus M) = \emptyset$ resulta que $B(L_n) \subseteq \complement(U \setminus M) = \complement U \cup M = S$, y en consecuencia se verifica (III).

Por lo tanto como S es una subálgebra de L_n que contiene a los generadores de L_n tenemos que $S = L_n$, esto es $M \cup \complement U = M \cup (U \setminus M) \cup \complement U$ y por lo tanto $U \setminus M \subseteq M \cup \complement U$, luego

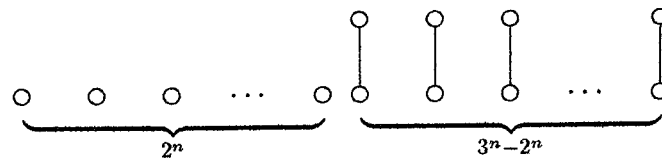
$$U \setminus M = (U \setminus M) \cap (M \cup \complement U) = (M \cup \complement U) \cap (M \cup \complement U) = (U \cap \complement M \cap U) \cup (U \cap \complement M \cap \complement U) = \emptyset$$

De $U \setminus M = \emptyset$ resulta que $U \subseteq M$ y como $M \subseteq U$ tenemos finalmente que $M = U$ y en consecuencia M es un ultrafiltro.

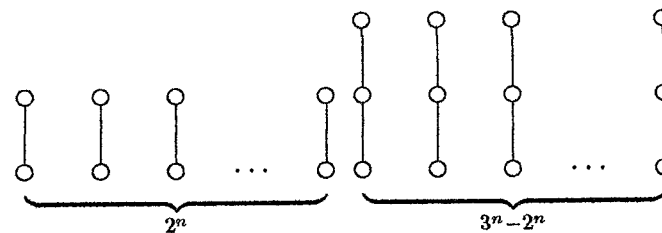
Recíprocamente, si un ultrafiltro M es un sistema deductivo, entonces M es un sistema deductivo maximal. En efecto si M' es un sistema deductivo tal que $M \subset M' \subset L_n$ entonces M' sería un filtro propio que contiene a M como parte propia lo que contradice que M es un ultrafiltro. Probemos en este caso que $L_n/M = \mathbf{B}$. Si $L_n/M = \mathbf{T}$, y h_M es el epimorfismo natural de $L_n \rightarrow \mathbf{T}$, entonces $h_M^{-1}(1) = M$, y existe $a \in L_n$ tal que $h_M(a) = c$. Además $U = h_M^{-1}([c])$ es un ultrafiltro de L_n tal que $U \neq M$, luego $M = h_M^{-1}(1) \subset h_M^{-1}([c]) = U$, absurdo. Por lo tanto $L_n/M = \mathbf{B}$.

Luego existen 2^n sistemas deductivos maximales que son ultrafiltros y por lo tanto $3^n - 2^n$ sistemas deductivos maximales que no son ultrafiltros.

Para cada sistema deductivo maximal M que no es ultrafiltro, $L_n/M = \mathbf{T}$. Además hemos demostrado que cada sistema deductivo maximal M está contenido propiamente en uno y sólo un ultrafiltro U . Por lo tanto, el diagrama de Hasse del conjunto de todos los filtros primos de L_n es el siguiente:



Y en consecuencia, L_n es el producto cartesiano de las cadenas indicadas en el siguiente diagrama de Hasse:



De donde resulta finalmente

$$L_n = \mathbf{B}^{2^n} \times \mathbf{T}^{3^n - 2^n}$$

y

$$N(L_n) = 2^{2^n} \cdot 3^{3^n - 2^n}.$$

El diagrama de L_1 fue indicado en el Ejemplo 2.3.2.

R. Cignoli y A. Monteiro indicaron una construcción geométrica de las álgebras de Łukasiewicz con un conjunto arbitrario de generadores libres [57], que será expuesta en el capítulo VI.

L. Monteiro, A. Figallo y A. Ziliani [85], indicaron una construcción de las álgebras de Łukasiewicz con un conjunto ordenado de generadores libres.

5.3 Álgebras de Moisil con un número finito de generadores libres

Las álgebras de Łukasiewicz trivalentes con eje, ver sección 2.3, fueron introducidas por Gr. M. Moisil [44]. A estas álgebras A. Monteiro denominó álgebras de Moisil trivalentes o álgebras de Moisil.

Es claro que si L, L' son álgebras de Moisil, e es eje de L y $h : L \rightarrow L'$ es un homomorfismo entonces $h(e)$ es un eje de $h(L)$.

Si L es un álgebra de Moisil notaremos con $SM(X)$ la subálgebra de Moisil de L generada por X . Claramente si L es un álgebra de Moisil y e su eje entonces, $SM(X) = SL(X \cup \{e\})$.

Como la noción de álgebra de Moisil se puede definir por medio de igualdades, sabemos por un resultado de Garret Birkhoff [12], que existe y es única (a menos de isomorfismos) el álgebra de Moisil M_α con un conjunto de generadores libres $G = \{g_i\}_{i \in I}$ de cardinal dado α .

Representemos con M_n el álgebra de Moisil con un conjunto $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ de generadores libres.

5.4 Determinación del álgebra de Moisil M_n con n generadores libres

Para ello vamos a seguir, en general el método indicado en el párrafo 5.1.

Vimos que si L es un álgebra de Łukasiewicz, no trivial, entonces L es isomorfa a una subálgebra de

$$\prod_{D \in \mathbf{M}(L)} L/D.$$

y que si el conjunto $\mathbf{M}(L)$ es finito entonces $L \cong \prod_{D \in \mathbf{M}(L)} L/D$.

Sabemos que si $D \in \mathbf{M}(M_n)$ entonces $M_n/D \cong \mathbf{B}$ ó $M_n/D \cong \mathbf{T}$. Identificando álgebras isomorfas tenemos que $L_n/M = \mathbf{B}$ ó $L_n/M = \mathbf{T}$

Sea $\mathbf{M}_1(M_n) = \{D \in \mathbf{M}(M_n) : M_n/D = \mathbf{B}\}$ y $\mathbf{M}_2(M_n) = \{D \in \mathbf{M}(M_n) : M_n/D = \mathbf{T}\}$.

Si $D \in \mathbf{M}_1(M_n)$ sea h_D el homomorfismo natural de M_n sobre el álgebra cociente M_n/D . El homomorfismo h_D determina una aplicación f de G en $\mathbf{B}$, precisamente la restricción, $h_{D|_G}$ de h_D al conjunto G , esto es $f(g) = h_{D|_G}(g) = h_D(g)$, cualquiera que sea $g \in G$.

Pongamos por definición: $\psi_1(D) = h_{D|G}$, luego $\psi_1 : \mathbf{M}_1(M_n) \rightarrow \mathbf{B}^G$. Recíprocamente, si f es una aplicación de G en $\mathbf{B}$, entonces existe uno y sólo un homomorfismo h_f de M_n en $\mathbf{B}$ que prolonga f . Como $h_f(M_n) = SL(h_f(G))$ y la única subálgebra de $\mathbf{B}$ es la propia $\mathbf{B}$ entonces $h_f(M_n) = \mathbf{B}$, esto es h_f es un epimorfismo. Sea $M = Nuc(h_f)$. Es claro que h_f y f coinciden sobre G y por lo tanto la restricción de h_f al conjunto G es una función de G en $\mathbf{B}$ que coincide con f , luego $\psi_1(Nuc(h_f)) = f$, lo que prueba que la función ψ_1 es suryectiva. Vamos a probar que ψ_1 es biunívoca. En efecto, sean $D_1, D_2 \in \mathbf{M}_1(M_n)$, $m_1 : M_n \rightarrow M_n/D_1$ y $m_2 : M_n \rightarrow M_n/D_2$ los respectivos homomorfismos naturales. Sean f_1 y f_2 las restricciones de m_1 y m_2 respectivamente, al conjunto G , luego $f_1 : G \rightarrow \mathbf{B}$, $f_2 : G \rightarrow \mathbf{B}$.

Supongamos que $\psi_1(D_1) = \psi_1(D_2)$ esto es que $f_1(g) = f_2(g)$, cualquiera que sea $g \in G$. Luego, $m_1(g) = f_1(g) = f_2(g) = m_2(g)$. La función $f_1 = f_2$ admite una única extensión a M_n y como m_1 y m_2 son extensiones de f , entonces $m_1(x) = m_2(x)$, cualquiera que sea $x \in M_n$. Por lo tanto $D_1 = D_2$.

Acabamos así de probar que el número de elementos de $\mathbf{M}_1(M_n)$ es igual al número de funciones de G en $\mathbf{B}$, y sabemos que este número es igual a 2^n .

En forma análoga si $D \in \mathbf{M}_2(M_n)$ y m es el homomorfismo natural de M_n sobre el álgebra cociente $M_n/D = \mathbf{T}$, entonces el homomorfismo m determina en este caso una aplicación f de G en $\mathbf{T}$, precisamente la restricción, $m|_G$ de m al conjunto G , esto es $f(g) = m|_G(g) = m(g)$, cualquiera que sea $g \in G$. Poniendo por definición: $\psi_2(D) = m|_G$, entonces $\psi_2 : \mathbf{M}_2(M_n) \rightarrow \mathbf{T}^G$. Recíprocamente, si f es una aplicación de G en $\mathbf{T}$, entonces existe uno y sólo un homomorfismo h_f de M_n en $\mathbf{T}$ que prolonga f . Como $h_f(M_n) = SM(h_f(G)) = SL(h_f(G) \cup \{c\})$ y la única subálgebra de $\mathbf{T}$ que contiene al centro de $\mathbf{T}$ es la propia $\mathbf{T}$ entonces $h_f(M_n) = \mathbf{T}$. Del mismo modo que el anterior se concluye que ψ_2 establece una biyección entre $\mathbf{M}_2(M_n)$ y el conjunto de todas las funciones de G en $\mathbf{T}$ y sabemos que este conjunto tiene 3^n elementos.

Acabamos así de probar que:

$$M_n = \mathbf{B}^{2^n} \times \mathbf{T}^{3^n}.$$

por lo tanto el número, $N(M_n)$ de elementos de M_n es:

$$N(M_n) = 2^{2^n} \cdot 3^{3^n}$$

Una determinación del álgebra de Moisil $M(\alpha)$ con un conjunto G de generadores libres de cardinal α fué indicada por A. Monteiro, antes de 1976 (ver [78]), pero sus resultados solamente fueron publicadas en 1998, [64]. Vamos a indicar los mismos donde hemos introducido pequeñas modificaciones, siguiendo nuestros resultados publicados en [78].

Sea e el eje de $M(\alpha)$ y pongamos $B(\alpha) = M(\alpha)/F(\sim \nabla e)$, $P(\alpha) = M(\alpha)/F(\nabla e)$.

Entonces L. Monteiro probó, ver párrafo 4.3, que:

$$M(\alpha) \cong B(\alpha) \times P(\alpha),$$

y que además que

- $B(\alpha)$ es un álgebra de Boole,
- $B(\alpha)$ es isomorfa a $B = \{x \in M(\alpha) : x \leq \sim \nabla e\}$,

- $P(\alpha)$ es un álgebra de Łukasiewicz con centro,
- $P(\alpha)$ es isomorfa a $C = \{x \in M(\alpha) : x \leq \nabla e\}$,
- $h(x) = (x \wedge \sim \nabla e, x \wedge \nabla e)$ es un isomorfismo de $M(\alpha)$ en $B(\alpha) \times P(\alpha)$.

Dado $x \in M(\alpha)$ se verifica sin dificultad que $h_1(x) = x \wedge \sim \nabla e$ es un epimorfismo de $M(\alpha)$ en $B(\alpha)$.

Vamos a probar que $B(\alpha)$ es un álgebra de Boole con un conjunto de generadores libres de cardinal α .

Si M es un álgebra de Moisil y $X \subseteq M$ notaremos con $SM(X)$ la subálgebra de Moisil de M generada por X .

Sea B^* un álgebra de Boole con un conjunto de generadores libres G^* de cardinal α . Como G y G^* tienen el mismo cardinal existe una biyección $f : G \rightarrow G^*$, luego como $M(\alpha)$ es un álgebra libre, f se puede extender a un único homomorfismo $H : M(\alpha) \rightarrow B^*$. Como G es un conjunto de generadores de $M(\alpha)$ entonces por el Lema 3.2.8, $SM(H(G)) = H(M(\alpha))$ y como $SM(H(G)) = SM(f(G)) = SM(G^*) = B^*$ resulta que H es un epimorfismo.

(I) La restricción de h_1 al conjunto G es inyectiva.

En efecto sean $g, g' \in G$ tales que $h_1(g) = h_1(g')$ esto es $g \wedge \sim \nabla e = g' \wedge \sim \nabla e$, luego

$$H(g \wedge \sim \nabla e) = H(g' \wedge \sim \nabla e),$$

esto es

$$H(g) \wedge \sim \nabla H(e) = H(g') \wedge \sim \nabla H(e).$$

Como H es un homomorfismo, transforma el eje e de $M(\alpha)$ en el eje de B^* que como sabemos es el elemento 0, luego tenemos que

$$H(g) \wedge \sim \nabla 0 = H(g') \wedge \sim \nabla 0,$$

esto es

$$H(g) = H(g')$$

y como H es una extensión de f tenemos

$$f(g) = f(g')$$

de donde resulta por ser f inyectiva que $g = g'$. Luego de (I) resulta que el subconjunto $h_1(G) = G_B$ de $B(\alpha)$ tiene el mismo cardinal que G . Además como h_1 es suryectiva, por el Lema 3.2.8, $SM(h_1(G)) = h_1(M(\alpha)) = B(\alpha)$.

Vamos a probar que G_B es un conjunto de generadores libres de $B(\alpha)$. Para ello sea A un álgebra de Boole, $f' : G_B \rightarrow A$ y $f_1 = f' \circ h_1|_G$, luego f_1 es una función de G en A y como $M(\alpha)$ es un álgebra libre, f_1 se puede extender a un homomorfismo $H_1 : M(\alpha) \rightarrow A$. Observemos que:

(II) $Nuc(h_1) \subseteq Nuc(H_1)$.

En efecto si $h_1(x) = 1$ esto es $1 = x \wedge \sim \nabla e$ entonces

$$1 = H_1(x \wedge \sim \nabla e) = H_1(x) \wedge \sim \nabla H_1(e) = H_1(x) \wedge \sim \nabla 0 = H_1(x) \wedge 1 = H_1(x).$$

De (II) resulta por resultados de la teoría de homomorfismos, ver Lema 3.2.6, que existe un único homomorfismo $H_2 : B(\alpha) \rightarrow A$ tal que $H_2 \circ h_1 = H_1$.

(III) $H_2(g') = f'(g')$ para todo $g' \in G_B$.

En efecto dado $g' \in G_B = h_1(G)$, existe $g \in G$ tal que $h_1(g) = g'$ luego $H_2(g') = H_2(h_1(g)) = (H_2 \circ h_1)(g) = H_1(g) = f_1(g) = (f' \circ h_1)(g) = f'(h_1(g)) = f'(g')$.

Acabamos así de probar que $B(\alpha)$ es un álgebra de Boole con un conjunto G_B de generadores libres de cardinal igual al cardinal α de G .

De un modo análogo se prueba que

- La transformación $h_2(x) = x \wedge \nabla e$ es un epimorfismo de $M(\alpha)$ en $P(\alpha)$,
- $h_2(G) = G_C$ es un conjunto de cardinal α ,
- G_C es un conjunto de generadores libres del álgebra centrada $P(\alpha)$, esto es del álgebra de Post, de orden 3, $P(\alpha)$.

Del resultado precedente resulta que $M(n)$ es isomorfa al producto cartesiano del álgebra de Boole con n generadores libres por el álgebra de Post con n generadores libres luego $M(n) = \mathbf{B}^{2^n} \times \mathbf{T}^{3^n}$ y en consecuencia

$$N(M_n) = 2^{2^n} \cdot 3^{3^n}$$

como ya habíamos indicado anteriormente.

6 CAPITULO V

Vamos a indicar como se construyen todos los epimorfismos entre álgebras de Łukasiewicz finitas y a determinar su número (L. Monteiro (2003) [83]).

6.1 Imágenes homomórficas de un álgebra de Boole finita

Si B y B' son álgebras de Boole, notaremos con $Hom(B, B')$ ($Epi(B, B')$) el conjunto de todos los homomorfismos (epimorfismos) de B en B' . Notaremos con B_n un álgebra de Boole con n átomos, donde $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Si $b \in B_m$ y $b' \in B_n$ sea $Epi^{(b, b')}(B_m, B_n) = \{h \in Epi(B_m, B_n) : h(b) = b'\}$.

Con $\mathcal{A}(B_n)$ notaremos el conjunto de los átomos de B_n y si $b \in B_n \setminus \{0\}$ notaremos $\mathcal{A}(b) = \{a \in \mathcal{A}(B_n) : a \leq b\}$.

Dadas B_m y B_n , si $m < n$ entonces $Epi(B_m, B_n) = \emptyset$.

Es bien conocido que si $f : \mathcal{A}(B_n) \rightarrow \mathcal{A}(B_m)$ entonces la función $h_f : B_m \rightarrow B_n$ definida por

$$h_f(x) = \bigvee \{a \in \mathcal{A}(B_n) : f(a) \leq x\},$$

verifica:

- (A1) $h_f \in Hom(B_m, B_n)$,
- (A2) Si $a \in \mathcal{A}(B_m)$ entonces $h_f(a) = 0$ si y solo si $a \notin f(\mathcal{A}(B_n))$,
- (A3) h_f es suryectivo si y solo si f es inyectiva, [92, 93],
- (A4) h_f es inyectivo si y solo si f es suryectiva [92, 93].

Si $h \in Epi(B_m, B_n)$ entonces dado $b \in \mathcal{A}(B_n)$ sabemos que $[b]$ es un ultrafiltro de B_n y que $h^{-1}([b])$ es un ultrafiltro de B_m luego $h^{-1}([b]) = [a]$ con $a \in \mathcal{A}(B_m)$. Además $Nuc(h) \subseteq [a]$. Sea $f : \mathcal{A}(B_n) \rightarrow \mathcal{A}(B_m)$ definida por $f(a) = b$, entonces f es inyectiva y $h_f = h$.

Además existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto $FI(\mathcal{A}(B_n), \mathcal{A}(B_m))$ de todas las funciones inyectivas de $\mathcal{A}(B_n)$ en $\mathcal{A}(B_m)$ y el conjunto $Epi(B_m, B_n)$. Para ello basta considerar la función $\Phi(f) = h_f$.

Si X es un conjunto finito notaremos con $N[X]$ su número de elementos.

Pongamos por definición

$$V_{m,n} = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!}, & \text{si } m \geq n \\ 0, & \text{si } m < n. \end{cases}$$

Entonces:

$$N[Epi(B_m, B_n)] = V_{m,n}.$$

Lema 6.1.1 Sea $h \in Epi(B_m, B_n)$ donde $m \geq n \geq 1$ entonces

- (A5) Si $a \in \mathcal{A}(B_m)$, entonces $h(a) = 0$ ó $h(a) \in \mathcal{A}(B_n)$,
- (A6) Si $b \in \mathcal{A}(B_n)$, entonces existe un único $a \in \mathcal{A}(B_m)$, tal que $h(a) = b$,

(A7) Si h es inyectivo entonces $h(a) \in \mathcal{A}(B_n)$, cualquiera que sea $a \in \mathcal{A}(B_m)$.

El ítem (A6) del lema precedente fué demostrado por M. Abad y L. Monteiro en [2], y los ítems (A5) y (A7) por los mismos autores en [7]. Una demostración diferente fué indicada por L. Monteiro y A. Kremer en [88].

Otra forma de demostrar lo anterior es la siguiente. Sean $m \geq n \geq 1$. Si $h \in \text{Epi}(B_m, B_n)$ sabemos que el álgebra cociente $B_m/\text{Nuc}(h)$ es isomorfa a B_n , y como B_m es finita $\text{Nuc}(h) = [x]$, con $x \in B_m$. Además $B_m/[x] \cong [x]$ luego $N([x]) = N[B_n] = 2^n$. A. Monteiro demostró, [81] que si B es un álgebra de Boole y F un filtro de B entonces toda clase de equivalencia módulo F es coordinable con F . Por lo tanto $N([x]).t = N[B_m]$ esto es $2^n.t = 2^m$ y por lo tanto $t = 2^{m-n}$. Luego dado $b' \in B_n$ el conjunto $\{b \in B_m : h(b) = b'\}$ tiene 2^{m-n} elementos.

Si B_n es una imagen homomórfica de B_m entonces existe $x \in B_m$ tal que $[x] \cong B_n$ y en consecuencia x es supremo de n átomos de B_m . Existen $\binom{m}{n}$ elementos de B_m que son supremo de n átomos de B_m . Sea $\mathcal{F}_n$ el conjunto de todas las secciones superiores $[x]$ donde x es supremo de n átomos de B_m . Notaremos con $\text{Aut}(B_n)$ el conjunto de todos los automorfismos del álgebra de Boole B_n . Si $\alpha \in \text{Aut}(B_n)$ entonces α es en particular una biyección de $\mathcal{A}(B_n)$ y por el ítem (A7) del Lema 6.1.1, α transforma átomos en átomos de B_n y claramente existen $n!$ biyecciones de $\mathcal{A}(B_n)$, luego $N[\text{Aut}(B_n)] = n!$.

Si $h \in \text{Epi}(B_m, B_n)$ entonces $\text{Nuc}(h) \in \mathcal{F}_n$. Sea $\beta : \text{Epi}(B_m, B_n) \rightarrow \mathcal{F}_n$ definida por $\beta(h) = \text{Nuc}(h)$. Es claro que si $\alpha \in \text{Aut}(B_n)$ entonces $\alpha \circ h \in \text{Epi}(B_m, B_n)$. Dado $[x] \in \mathcal{F}_n$ consideremos $\beta^{-1}([x])$, luego $N[\beta^{-1}([x])] = n!$ y por lo tanto $n! \cdot \binom{m}{n} = V_{m,n} = N[\text{Epi}(B_m, B_n)]$.

Si $b \in B_m \setminus \{0\}$ y $h \in \text{Epi}(B_m, B_n)$ entonces $h(b) = 0$ ó $h(b) \neq 0$. Si $b' = h(b) = 0$ entonces el número de elementos de $\text{Epi}^{(b,0)}(B_m, B_n)$ es igual al número de funciones inyectivas de $\mathcal{A}(B_n)$ en $\mathcal{A}(B_m) \setminus \mathcal{A}(b)$ esto es:

$$N[\text{Epi}^{(b,0)}(B_m, B_n)] = V_{m-N[\mathcal{A}(b)],n},$$

y si $b' = h(b) \neq 0$, [77] entonces

$$N[\text{Epi}^{(b,b')}(B_m, B_n)] = V_{m,n} - V_{m-N[\mathcal{A}(b)],n}.$$

Dados $b \in B_m$ y $b' \in B_n \setminus \{0'\}$ entonces $h_f(b) = b'$ si y solo si $f(\mathcal{A}(b')) \subseteq \mathcal{A}(b)$, luego

$$N[\text{Epi}^{(b,b')}(B_m, B_n)] = V_{N[\mathcal{A}(b)],N[\mathcal{A}(b')]} \cdot V_{m-N[\mathcal{A}(b)],n-N[\mathcal{A}(b')]}.$$

Si $b \neq 0$ entonces $h(b) = 0$ si y solo si $f(\mathcal{A}(B_n)) \subseteq \mathcal{A}(B_m) \setminus \mathcal{A}(b)$.

Lema 6.1.2 Si $m \geq n$, $h \in \text{Epi}^{(b,b')}(B_m, B_n)$, donde $b \in B_m \setminus \{0\}$, $b' \in B_n \setminus \{0'\}$ entonces:

(A8) Si $a \in \mathcal{A}(b)$ y $h(a) \neq 0'$ entonces $h(a) \in \mathcal{A}(b')$.

(A9) Si $a \notin \mathcal{A}(b)$ y $h(a) \neq 0'$ entonces $h(a) \notin \mathcal{A}(b')$.

Dem. Si $a \in \mathcal{A}(b)$ esto es $a \leq b$ entonces $h(a) \leq h(b) = b'$ luego si $h(a) \neq 0'$, $h(a) \in \mathcal{A}(B_n)$ y por lo tanto $h(a) \in \mathcal{A}(b')$.

Supongamos que $h(a) \leq b' = h(b)$ luego $h(a) = h(a) \wedge h(b) = h(a \wedge b)$, por lo tanto

$a \equiv a \wedge b$ (mód. $Nuc(h)$). Como B_m es finita $Nuc(h) = [f]$ con $f \in B_m$, y por lo tanto (1) $a \wedge f = a \wedge b \wedge f$. De $0 \leq a \wedge f \leq a$ y $a \in \mathcal{A}(B_m)$ resulta que (2) $a \wedge f = a$ ó (3) $a \wedge f = 0$. Si ocurre (2) entonces por (1) tenemos que $a = a \wedge b \wedge f \leq b$, absurdo. Si ocurre (3), como $h(f) = 1$ tenemos que $0 = h(0) = h(a \wedge f) = h(a) \wedge h(f) = a \wedge 1 = a$, absurdo. Luego $h(a) \leq b'$. ■

De (A3) y el Lema 6.1.2 resulta que si $h \in Epi(B_m, B_n)$ entonces $f = \Phi^{-1}(h)$ verifica:

$$(C1) \quad f \in IM(\mathcal{A}(B_n), \mathcal{A}(B_m)),$$

$$(C2) \quad f(\mathcal{A}(b')) \subseteq \mathcal{A}(b),$$

$$(C3) \quad f(\mathcal{A}(-b')) \subseteq \mathcal{A}(-b).$$

Si $h \in Hom(B_m, B_n)$ entonces (1) $S = h(B_m)$ es una subálgebra de B_n y por lo tanto (2) $h(B_m) \cong B_t$ con $1 \leq t \leq n$ y $m \geq t$. Sea $\mathcal{A}(S) = \{s_1, s_2, \dots, s_t\}$.

De (1) y (2) resulta que $h \in Epi(B_m, S)$ entonces a $g = \Phi^{-1}(h) \in IM(\mathcal{A}(S), \mathcal{A}(B_m))$ y (3) $h_g = h$.

Como $\{\mathcal{A}(s_1), \mathcal{A}(s_2), \dots, \mathcal{A}(s_t)\}$ es una partición de $\mathcal{A}(B_n)$ entonces si $b \in \mathcal{A}(B_n)$ existe i , $1 \leq i \leq t$ tal que $b \in \mathcal{A}(s_i)$, esto es $b \leq s_i$.

Definamos una función $f : \mathcal{A}(B_n) \rightarrow \mathcal{A}(B_m)$ del siguiente modo: $f(b) = g(s_i)$ si y solo si $b \in \mathcal{A}(s_i)$. Claramente si alguno de los conjuntos $\mathcal{A}(s_i)$ tiene más de un elemento, f no es inyectiva. Observemos que de acuerdo con la definición de f se tiene que $f(\mathcal{A}(B_n)) = g(\mathcal{A}(S))$. Por (A1) $h_f = \Phi(f) \in Hom(B_m, B_n)$. Veamos que $h_f = h$. Por (3) es suficiente probar que $h_g = h$, y para ello que $h_f(a) = h_g(a)$ para todo $a \in \mathcal{A}(B_m)$. Si $a \in f(\mathcal{A}(S))$ esto es $a = f(b)$ con $b \in \mathcal{A}(S)$, pero por definición $f(b) = g(s_i)$ con $b \in \mathcal{A}(s_i)$. Luego $h_f(a) = s_i$ y $h_g(a) = s_i$. Si $a \notin f(\mathcal{A}(S))$ entonces $h_f(a) = 0$ y $h_g(a) = 0$.

Si $m < n$ tenemos que $N[Epi(B_m, B_n)] = 0$, y si $h \in Hom(B_m, B_n)$ entonces $h(B_m)$ es una subálgebra booleana de B_n tal que $1 \leq N[\mathcal{A}(h(B_m))] \leq m < n$.

Es bien conocido que las subálgebras booleanas de B_n se corresponden biyectivamente con las particiones del conjunto $\mathcal{A}(B_n)$, y que el número de subálgebras de B_n con t átomos $1 \leq t \leq n$ es

$$P(n, t) = \frac{\sum_{i=0}^{t-1} (-1)^i \binom{t}{i} (t-i)^n}{t!}.$$

Por lo tanto si S es una subálgebra de B_n con t átomos donde $1 \leq t \leq m < n$ entonces existen $V_{m,t}$ epimorfismos de B_m en S , luego si $m < n$

$$N[Hom(B_m, B_n)] = \sum_{t=1}^m P(n, t) \cdot V_{m,t}.$$

Observemos que si $m \geq n$ entonces

$$N[Hom(B_m, B_n)] = N[Epi(B_m, B_n)] + \sum_{t=1}^{n-1} P(n, t) \cdot N[Epi(B_m, B_t)] =$$

$$V_{m,n} + \sum_{t=1}^{n-1} P(n, t) \cdot V_{m,t}.$$

6.2 Imágenes homomórficas de un álgebra de Łukasiewicz

Sea L un álgebra de Łukasiewicz finita, entonces

$$L \cong \mathbf{B}^j \times \mathbf{T}^k, \text{ donde } j, k \in \mathbb{Z}, j \geq 0, k \geq 0.$$

- (T) Si $j = k = 0$ entonces L es trivial, esto es tiene un solo elemento,
- (B) Si $j \geq 1, k = 0$ entonces L es un álgebra de Boole con j átomos,
- (P) Si $j = 0, k \geq 1$ entonces L es un álgebra con centro y $B(L)$ es un álgebra de Boole con k átomos,
- (E) Si $j \geq 1, k \geq 1$ entonces L es un álgebra de Łukasiewicz con eje, que no es un álgebra de Boole ni un álgebra con centro. El eje es la $(j + k)$ -upla

$$e = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_j, \underbrace{c, \dots, c}_k)$$

Por lo tanto

$$\nabla e = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_j, \underbrace{1, \dots, 1}_k).$$

$B(L)$ es un álgebra de Boole con $j + k$ átomos, cuyos elementos son

$$(b_1, b_2, \dots, b_j, b_{j+1}, \dots, b_{j+k}),$$

donde $b_i = 0 \in \mathbf{B} = \{0, 1\}$ para $1 \leq i \leq j$ y $b_i \in \{0, 1\} \subset \mathbf{T}$ para $j + 1 \leq i \leq j + k$. Dado $b \in B(L)$ sean

$$J(b) = \{i : b_i = 1, 1 \leq i \leq j\}, \text{ y } K(b) = \{i : b_i = 1, j + 1 \leq i \leq j + k\},$$

luego $0 \leq N[J(b)] \leq j$ y $0 \leq N[K(b)] \leq k$.

Si j y k no son simultáneamente nulos entonces L es un álgebra de Łukasiewicz finita no trivial. Sabemos que las imágenes homomórficas de L están determinadas por los filtros $[b]$ donde $b \in B(L)$, y que el álgebra cociente $L/[b]$ es isomorfa al álgebra de Łukasiewicz $(b) = \{x \in L : x \leq b\}$. Luego como $B(L)$ tiene 2^{j+k} elementos: (C) existen 2^{j+k} imágenes homomórficas de L .

- (B) Si $j \geq 1, k = 0$, entonces L tiene 2^j imágenes homomórficas, que son álgebras de Boole.
- (P) Si $j = 0, k \geq 1$, entonces L tiene 2^k imágenes homomórficas, que son álgebras con centro.
- (E) Si $j \geq 1, k \geq 1$, entonces L tiene 2^{j+k} imágenes homomórficas, que son álgebras con eje.
- (E1) Si $N[K(b)] = 0$, entonces $(b) \cong B^{N[J(b)]}$ por lo tanto hay $\binom{j}{j_1}$, $0 \leq j_1 \leq j$ imágenes homomórficas de L que son álgebras de Boole con j_1 átomos, y en total tenemos 2^j imágenes homomórficas que son álgebras de Boole. Observemos que si $N[J(b)] = 0$, entonces $L/[b]$ es un álgebra trivial.

- (E2) Si $N[J(b)] = 0$, entonces $[b] \cong \mathbf{T}^{N[K(b)]}$ por lo tanto hay $\binom{k}{k_1}$, $0 \leq k_1 \leq k$ imágenes homomórficas L' de L que son álgebras con centro tales que $B(L')$ es un álgebra de Boole con k_1 átomos, y en total tenemos 2^k imágenes homomórficas que son álgebras con centro. Observemos que si $N[K(b)] = 0$, entonces $L/[b]$ es un álgebra trivial, que coincide con el álgebra trivial indicada en (E1).
- (E3) Si $1 \leq j_1 = N[J(b)] \leq j$ y $1 \leq k_1 = N[K(b)] \leq k$, entonces $L/[b] \cong [b] \cong \mathbf{B}^{N[J(b)]} \times \mathbf{T}^{N[K(b)]}$ es una imagen homomórfica con eje, que no es un álgebra de Boole ni un álgebra con centro.
- Por lo tanto el número de estas imágenes homomórficas es:

$$\sum_{i=1}^j \binom{j}{i} \cdot \left(\sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \right) = \sum_{i=1}^j \binom{j}{i} \cdot (2^k - 1) =$$

$$(2^k - 1) \cdot \sum_{i=1}^j \binom{j}{i} = (2^k - 1) \cdot (2^j - 1).$$

Como en uno de los casos (E1) y (E2) obtenemos una misma imagen homomórfica, el álgebra trivial, si $j \geq 1$ y $k \geq 1$, en total tenemos:

$$2^j + (2^k - 1) + (2^k - 1) \cdot (2^j - 1) = 2^j + (2^k - 1) \cdot (1 + (2^j - 1)) = 2^j + (2^k - 1) \cdot 2^j =$$

$$2^j \cdot (1 + 2^k - 1) = 2^j \cdot 2^k = 2^{j+k},$$

imágenes homomórficas lo que habíamos determinado en (C).

6.3 Epimorfismos

Si L y L' son álgebras de Lukasiewicz, notaremos con $Epi(L, L')$ el conjunto de todos los epimorfismos de L en L' .

Lema 6.3.1 *Si L y L' son álgebras de Lukasiewicz con ejes e y e' respectivamente y $H \in Epi(L, L')$ entonces $H(e) = e'$. Si $h = H|_{B(L)}$ entonces $h \in Epi^{(\nabla e, \nabla e')}(B(L), B(L'))$.*

Dem. (1) $\Delta H(e) = H(\Delta e) = H(0) = 0'$.

Sea $y \in L'$, luego como H es suryectiva existe $x \in L$ tal que $H(x) = y$, luego (2) $\nabla y = \nabla H(x) = H(\nabla x) \leq H(\Delta x \vee \nabla e) = H(\Delta x) \vee H(\nabla e) = \Delta H(x) \vee \nabla H(e) = \Delta y \vee \nabla H(e)$. De (1) y (2) resulta que $H(e)$ es eje de L' y como el eje es único $H(e) = e'$.

Además $h(\nabla e) = H(\nabla e) = \nabla H(e) = \nabla e'$. ■

El siguiente lema generaliza los resultados de L. Monteiro [71, 77] y el lema 4.1 de L. Monteiro, M. Abad, S. Savini y J. Sewald [87].

Lema 6.3.2 *Si L y L' son álgebras de Lukasiewicz con ejes e y e' respectivamente y $h \in Epi^{(\nabla e, \nabla e')}(B(L), B(L'))$ entonces la transformación $H : L \rightarrow L'$ definida por $H(x) = (h(\Delta x) \vee e') \wedge h(\nabla x)$ verifica (I) H es una extensión de h , (II) $H \in Epi(L, L')$, y (III) H es la única extensión de h .*

Dem. (I) En efecto si $b \in B(L)$ entonces $\Delta b = \nabla b = b$, luego:

$$H(b) = (h(\Delta b) \vee e') \wedge h(\nabla b) = (h(b) \vee e') \wedge h(b) = h(b).$$

$$\begin{aligned} \text{(IIa)} \quad H(x \wedge y) &= (h(\Delta(x \wedge y) \vee e') \wedge h(\nabla(x \wedge y) \vee e') \wedge h(\nabla(x \wedge y)) = \\ &= (h(\Delta x) \wedge h(\Delta y) \vee e') \wedge h(\nabla x) \wedge h(\nabla y) = ((h(\Delta x) \vee e') \wedge (h(\Delta y) \vee e') \wedge h(\nabla x) \wedge h(\nabla y) = \\ &= (h(\Delta x) \vee e') \wedge h(\nabla x) \wedge (h(\Delta y) \vee e') \wedge h(\nabla y) = H(x) \wedge H(y). \end{aligned}$$

(IIb) Como H extiende a h y $\nabla x \in B(L)$ entonces (1) $H(\nabla x) = h(\nabla x)$.

$$(2) \quad \nabla H(x) = \nabla((h(\Delta x) \vee e') \wedge h(\nabla x)) = (\nabla h(\Delta x) \vee \nabla e') \wedge \nabla h(\nabla x) =$$

$(h(\Delta x) \vee \nabla e') \wedge h(\nabla x)$. Como $\nabla x \leq \Delta x \vee \nabla e$, $\nabla x, \Delta x, \nabla e, \Delta x \vee \nabla e \in B(L)$, $\nabla x \leq \Delta x \vee \nabla e$ y h es un homomorfismo booleano que verifica $h(\nabla e) = \nabla e'$ tenemos que

$$(3) \quad h(\nabla x) \leq h(\Delta x \vee \nabla e) = h(\Delta x) \vee h(\nabla e) = h(\Delta x) \vee \nabla e'.$$

De (2) y (3) resulta que

$$(4) \quad \nabla H(x) = h(\nabla x). \text{ De (1) y (4) resulta } \nabla H(x) = H(\nabla x).$$

(IIc) Por definición (5) $H(\sim x) = (h(\Delta \sim x) \vee e') \wedge h(\nabla \sim x)$, luego

$$\Delta H(\sim x) = (h(\Delta \sim x) \vee \Delta e') \wedge h(\nabla \sim x) = (h(\Delta \sim x) \vee 0') \wedge h(\nabla \sim x) =$$

$$h(\Delta \sim x) \wedge h(\nabla \sim x) = h(\Delta \sim x), \text{ y}$$

$$\nabla H(\sim x) = (h(\Delta \sim x) \vee \nabla e') \wedge h(\nabla \sim x) = (h(\Delta \sim x) \vee h(\nabla e)) \wedge h(\nabla \sim x) =$$

$$(h(\Delta \sim x \vee \nabla e) \wedge \nabla \sim x) \text{ y como } \nabla \sim x \leq \Delta \sim x \vee \nabla e \text{ tenemos que:}$$

(6) $\nabla H(\sim x) = h(\nabla \sim x)$. Como h es un epimorfismo booleano, entonces si $b \in B(L)$ tenemos que (7) $h(\sim b) = \sim h(b)$, luego $\sim H(x) = (\sim h(\Delta x) \wedge \sim e') \vee \sim h(\nabla x) =$

$$(h(\sim \Delta x) \wedge \sim e') \vee h(\sim \nabla x), \text{ y por lo tanto:}$$

$$(8) \quad \Delta \sim H(x) = (\Delta h(\sim \Delta x) \wedge \Delta \sim e') \vee \Delta h(\sim \nabla x) =$$

$$(h(\sim \Delta x) \wedge \sim \nabla e') \vee h(\sim \nabla x) = (\sim h(\Delta x) \wedge \sim h(\nabla e)) \vee \sim h(\nabla x) =$$

$$\sim [h(\Delta x) \vee h(\nabla e)] \wedge h(\nabla x) = \sim h((\Delta x \vee \nabla e) \wedge \nabla x) = \sim h(\nabla x) = h(\sim \nabla x) = h(\Delta \sim x),$$

$$\text{y (9) } \nabla \sim H(x) = (\nabla h(\sim \Delta x) \wedge \nabla \sim e') \vee \nabla h(\sim \nabla x) =$$

$$(h(\sim \Delta x) \wedge \sim \Delta e') \vee h(\sim \nabla x) = (h(\sim \Delta x) \wedge \sim 0) \vee h(\sim \nabla x) = h(\sim \Delta x) \vee h(\sim \nabla x) =$$

$$h(\sim \Delta x) = h(\nabla \sim x).$$

De (5) y (8) resulta (10) $\Delta H(\sim x) = \Delta \sim H(x)$ y de (6) y (9) resulta (11) $\nabla H(\sim x) = \nabla \sim H(x)$. De (10) y (11) resulta por el principio de determinación de Moisil que se verifica $H(\sim x) = \sim H(x)$.

(IId) Dado $y \in L'$ entonces $y = (\Delta y \vee e') \wedge \nabla y$, como $\nabla y, \Delta y \in B(L')$ y h es un epimorfismo booleano existen $b_1, b_2 \in B(L)$ tales que $h(b_1) = \Delta y$ y $h(b_2) = \nabla y$. Sean $b_3 = b_1 \wedge b_2 \in B(L)$, $b_4 = b_1 \vee b_2 \in B(L)$ y $x = (b_3 \vee e) \wedge b_4 \in L$. Luego $\Delta x = (\Delta b_3 \vee \Delta e) \wedge \Delta b_4 = (b_3 \vee 0) \wedge b_4 = b_3 \wedge b_4 = b_3 = b_1 \wedge b_2$, y $\nabla x = (\nabla b_3 \vee \nabla e) \wedge \nabla b_4$. Luego $h(\Delta x) = h(b_1 \wedge b_2) = h(b_1) \wedge h(b_2) = \Delta y \wedge \nabla y = \Delta y$, y

$$h(\nabla x) = h((\nabla b_3 \vee \nabla e) \wedge \nabla b_4) = (h(\nabla b_3) \vee h(\nabla e)) \wedge h(\nabla b_4) = (\Delta y \vee \nabla e') \wedge \nabla y \text{ y}$$

como $\nabla y \leq \Delta y \vee \nabla e'$ tenemos que $h(\nabla x) = \nabla y$, luego $H(x) = (h(\Delta x) \vee e') \wedge h(\nabla x) = (\Delta y \vee e') \wedge \nabla y = y$, lo que prueba que H es suryectiva.

(III) Si $H' \in \text{Epi}(L, L')$ verifica $H'(b) = h(b)$ para todo $b \in B(L)$ entonces

$$H'(x) = (\Delta H'(x) \vee e') \wedge \nabla H'(x) = (H'(\Delta x) \vee e') \wedge H'(\nabla x) =$$

$$(h(\Delta x) \vee e') \wedge h(\nabla x) = H(x).$$

■

Corolario 6.3.1 Si L y L' son álgebras de Łukasiewicz centradas cuyos centros son c y c' respectivamente y $h \in \text{Epi}(B(L), B(L'))$ entonces la función $H : L \rightarrow L'$ definida por $H(x) = (h(\Delta x) \vee c') \wedge h(\nabla x)$ es el único epimorfismo de L en L' que extiende a h .

Dem. Basta observar que todo centro es un eje del álgebra y que $h(\nabla c) = h(1) = 1' = \nabla c'$. ■

Lema 6.3.3 Si L y L' son álgebras de Łukasiewicz con ejes e y e' respectivamente, entonces los conjuntos $Epi(L, L')$ y $Epi^{(\nabla e, \nabla e')}(B(L), B(L'))$ son coordinables.

Dem. Si $h \in Epi^{(\nabla e, \nabla e')}(B(L), B(L'))$, entonces por el Lema 6.3.2, la función:

$$H(x) = (h(\Delta x) \vee e') \wedge h(\nabla x)$$

verifica $H \in Epi(L, L')$. Si ponemos $\delta(h) = H$, entonces por el Lema 6.3.2, (III) δ es una función.

Si $H \in Epi(L, L')$ por el Lema 6.3.1, tenemos que $h = H|_{B(L)} \in Epi^{(\nabla e, \nabla e')}(B(L), B(L'))$ y por el Lema 6.3.2 la extensión de h a L es el epimorfismo H , luego $\delta(h) = H$, lo que prueba que δ es suryectiva.

Si $h, h' \in Epi^{(\nabla e, \nabla e')}(B(L), B(L'))$ son tales que $h \neq h'$ entonces existe $b \in B(L)$ tal que $h(b) \neq h'(b)$. Si H y H' son los homomorfismos extensión de h y h' respectivamente entonces $H(b) = h(b) \neq h'(b) = H'(b)$, luego δ es inyectiva. ■

Sean L y L' álgebras de Łukasiewicz finitas, no triviales, luego $L \cong \mathbf{B}^j \times \mathbf{T}^k$ y $L' \cong \mathbf{B}^{j'} \times \mathbf{T}^{k'}$, donde $j, k, j', k' \geq 1$. Probamos que $H \in Epi(L, L')$ si y solo si $h = H|_{B(L)} \in Epi^{(\nabla e, \nabla e')}(B(L), B(L'))$ luego $f = \Phi^1(h) FI(\mathcal{A}(B(L')), \mathcal{A}(B(L)))$ debe verificar las condiciones (C2) y (C3) indicadas anteriormente, esto es

$$f(\mathcal{A}(\nabla c')) \subseteq \mathcal{A}(\nabla c) \text{ y } f(\mathcal{A}(\sim \nabla c')) \subseteq \mathcal{A}(\sim \nabla c). \quad (1)$$

Luego como $N[\mathcal{A}(\nabla c)] = k$, $N[\mathcal{A}(\nabla c')] = k'$, $N[\mathcal{A}(B(L)) \setminus \mathcal{A}(\nabla c)] = j$ y $N[\mathcal{A}(B(L')) \setminus \mathcal{A}(\nabla c')] = j'$ para que el conjunto de las funciones inyectivas de $\mathcal{A}(B(L'))$ en $\mathcal{A}(B(L))$ que verifican (1) sea no vacío es necesario y suficiente que $k \geq k'$ y $j \geq j'$. Entonces por lo visto precedentemente:

$$N[Epi(L, L')] = N[Epi^{(\nabla e, \nabla e')}(B(L), B(L'))] = V_{k, k'} \cdot V_{j, j'} \quad (2)$$

Observemos que:

- Si L y L' son álgebras con centro c y c' respectivamente, esto es $L \cong \mathbf{T}^k$ y $L' \cong \mathbf{T}^{k'}$ entonces

$$N[Epi(L, L')] = N[Epi^{(1, 1')}(B(L), B(L'))] = N[Epi(B(L), B(L'))] =$$

$$V_{N[\mathcal{A}(B(L))], N[\mathcal{A}(B(L'))]} = V_{k, k'}.$$

- Si L y L' son álgebras de Boole, esto es $L \cong \mathbf{B}^j$ y $L' \cong \mathbf{B}^{j'}$ entonces

$$N[Epi(L, L')] = N[Epi^{(0, 0')}(B(L), B(L'))] = N[Epi(B(L), B(L'))] =$$

$$V_{N[\mathcal{A}(B(L))], N[\mathcal{A}(B(L'))]} = V_{j, j'}.$$

Si L es un álgebra de Łukasiewicz finita, no trivial, sea $P(L)$ el conjunto de sus elementos primos y $\varphi : P(L) \rightarrow P(L)$ la transformación de Birula-Rasiowa [14]. Si L' es un álgebra de Łukasiewicz finita, no trivial, una función $f : P(L') \rightarrow P(L)$ se dice una H -función, [8] si f es biunívoca y verifica $f(\nabla p') = \nabla f(p')$, $f(\varphi(p')) = \varphi(f(p'))$. M. Abad y A. Figallo [8] probaron que existe una biyección entre las H -funciones y el conjunto $Epi(L, L')$, donde aparentemente L y L' son álgebras de Łukasiewicz con eje que no son álgebras de Boole ni álgebras con centro. El número de elementos de $Epi(L, L')$ determinado por estos autores coincide con el que indicamos en (2).

Claramente es mas difícil construir H -funciones, que funciones inyectivas de $\mathcal{A}(B_n)$ en $\mathcal{A}(B_m)$ que verifican las condiciones indicadas en (1).

Observación 6.3.1 Si $L \cong \mathbf{B}^j \times \mathbf{T}^k$, sea $b \in B(L)$ tal que $1 \leq N[J(b)] = j_1 \leq j$ y $1 \leq N[K(b)] = k_1 \leq k$. Supongamos por ejemplo que

$$b = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{j_1}, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k_1}, 0, 0, \dots, 0). \quad (1)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_j \quad \underbrace{\hspace{10em}}_k$

Luego el conjunto $\langle b \rangle$ tiene $2^{j_1} \cdot 3^{k_1}$ elementos. Sabemos que $\langle b \rangle$ es un álgebra de Łukasiewicz y que $L/\langle b \rangle \cong \langle b \rangle$. Además $\langle b \rangle$ tiene por eje al elemento

$$c' = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_j, \underbrace{c, c, \dots, c}_{k_1}, 0, 0, \dots, 0), \quad (2)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_k$

luego

$$\nabla c' = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_j, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k_1}, 0, 0, \dots, 0). \quad (3)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_k$

Si $x \in \langle b \rangle$ entonces

$$x = (\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_{j_1}}_j, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{y_1, y_2, \dots, y_{k_1}}_k, 0, 0, \dots, 0) \quad (4)$$

y como la negación en $\langle b \rangle$, (ver sección 3.6) está dada por $\approx x = \sim x \wedge b$ tenemos que

$$\approx x = (\underbrace{\sim x_1, \sim x_2, \dots, \sim x_{j_1}}_j, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{\sim y_1, \sim y_2, \dots, \sim y_{k_1}}_k, 0, 0, \dots, 0) \quad (5)$$

luego

$$\approx \nabla c' = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{j_1}, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_k, 0, 0, \dots, 0). \quad (6)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_j$

Si $x \in \langle b \rangle$ entonces por lo indicado en la sección 4.3

$$L/\langle b \rangle \cong \langle b \rangle \cong \langle b \rangle / [\approx \nabla c'] \times \langle b \rangle / [\nabla c']$$

donde $\langle b \rangle / [\approx \nabla c']$ es un álgebra de Boole y $\langle b \rangle / [\nabla c']$ es un álgebra de Łukasiewicz con centro. Como $\langle b \rangle / [\approx \nabla c'] \cong (\approx \nabla c')$, y $\langle b \rangle / [\nabla c'] \cong (\nabla c')$ tenemos que $N[(\approx \nabla c')] = 2^{j_1}$ y $N[(\nabla c')] = 3^{k_1}$, luego

$$L/\langle b \rangle \cong \mathbf{B}^{j_1} \times \mathbf{T}^{k_1}.$$

Lema 6.3.4 Si L y L' son álgebras de Lukasiewicz, $H : L \rightarrow L'$ un homomorfismo y $h = H|_{B(L)}$ entonces: L. Monteiro [77]

- (1) $H(B(L)) \subseteq B(L')$ y $h : B(L) \rightarrow B(L')$ es un homomorfismo booleano,
- (2) H queda unívocamente determinado por h ,
- (3) Si $B(L') \subseteq H(L)$ entonces h es un epimorfismo de $B(L)$ en $B(L')$,
- (4) Si $H(L) \subseteq B(L')$ entonces $h = H|_{B(L)}$ verifica $h(\Delta x) = h(\nabla x)$ para todo $x \in L$. Recíprocamente, si $g : B(L) \rightarrow B(L')$ es un homomorfismo booleano que verifica $g(\Delta x) = g(\nabla x)$ para todo $x \in L$, entonces g se extiende a un único homomorfismo $H : L \rightarrow L'$ tal que $H(L) \subseteq B(L')$,
- (5) Si L tiene eje e , entonces $H(L) \subseteq B(L')$ si y sólo si $H(e) = 0$. Si $g : B(L) \rightarrow B(L')$ es un homomorfismo booleano que verifica $g(\nabla e) = 0$, g se extiende a un único homomorfismo $H : L \rightarrow L'$ tal que $H(L) \subseteq B(L')$,
- (6) Si L' es un álgebra con centro c' , todo homomorfismo booleano $g : B(L) \rightarrow B(L')$ se extiende a un único homomorfismo $H : L \rightarrow L'$.

Dem.

- (1) Es una consecuencia inmediata de las propiedades de los homomorfismos.
- (2) Si H y H' son homomorfismos de L en L' tales que $h = H|_{B(L)} = H'|_{B(L)} = h'$ entonces
 - (1) $\Delta H(x) = H(\Delta x) = h(\Delta x) = h'(\Delta x) = H'(\Delta x) = \Delta H'(x)$, y análogamente
 - (2) $\nabla H(x) = \nabla H'(x)$. De (1) y (2) se deduce por el principio de determinación de Moisil que $H = H'$.
- (3) Dado $b' \in B(L')$ como $B(L') \subseteq H(L)$ entonces $b' = H(x)$ con $x \in L$, luego $\Delta x \in B(L)$ y $h(\Delta x) = H(\Delta x) = \Delta H(x) = \Delta b' = b'$.
- (4) Si $H(L) \subseteq B(L')$ entonces $\Delta H(x) = H(x) = \nabla H(x)$ cualquiera que sea $x \in L$, luego $h(\Delta x) = H(\Delta x) = \Delta H(x) = H(x) = \nabla H(x) = H(\nabla x) = h(\nabla x)$. Si $g : B(L) \rightarrow B(L')$ es un homomorfismo booleano que verifica $g(\Delta x) = g(\nabla x)$ para todo $x \in L$, pongamos por definición $H(x) = g(\Delta x)$, para todo $x \in L$. De acuerdo con esta definición $H(x) \in B(L')$, cualquiera que sea $x \in L$, luego $H(L) \subseteq B(L')$. Además, si $b \in B(L)$ entonces $H(b) = g(\Delta b) = g(b)$. Finalmente probemos que H es un homomorfismo.

$$H(x \vee y) = g(\Delta(x \vee y)) = g(\Delta x \vee \Delta y) = g(\Delta x) \vee g(\Delta y) = H(x) \vee H(y).$$

$$H(\nabla x) = g(\Delta \nabla x) = g(\nabla x) = H(x) = \nabla H(x).$$

$$H(\sim x) = g(\Delta \sim x) = g(\sim \nabla x) = \sim g(\nabla x) = \sim H(x).$$
 Si $H' : L \rightarrow L'$ es un homomorfismo extensión de g que verifica (1) $H'(L) \subseteq B(L')$ entonces $H'(\Delta x) = g(\Delta x) = H(x)$ luego $\Delta H'(x) = H(x)$ y como por (1) $H'(x) \in B(L')$ tenemos que $H'(x) = H(x)$.
- (5) Sabemos que $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x$, cualquiera que sea $x \in L$, luego si $H(e) = 0$ entonces $H(x) = (H(\Delta x) \vee H(e)) \wedge H(\nabla x) = H(\Delta x) \wedge H(\nabla x) = H(\Delta x) \in B(L')$ y por lo tanto $H(L) \subseteq B(L')$. Recíprocamente, como $H(e) \in H(L) \subseteq B(L')$ tenemos que $\Delta H(e) = H(e)$ luego $H(e) = \Delta H(e) = H(\Delta e) = H(0) = 0$. Observemos que

en este caso $h(\nabla e) = H(\nabla e) = \nabla H(e) = 0$.

Si $g : B(L) \rightarrow B(L')$ es un homomorfismo booleano tal que $g(\nabla e) = 0$, como $\nabla x \leq \Delta x \vee \nabla e$, para todo $x \in L$ entonces $g(\nabla x) \leq g(\Delta x) \vee g(\nabla e) = g(\Delta x)$, luego como $g(\Delta x) \leq g(\nabla x)$ tenemos que $g(\Delta x) = g(\nabla x)$ para todo $x \in L$. Luego por (4) g se extiende a un único homomorfismo $H : L \rightarrow L'$ tal que $H(L) \subseteq B(L')$.

- (6) El homomorfismo H se define por $H(x) = (g(\Delta x) \vee e') \wedge g(\nabla x)$. (L. Monteiro [71]). La unicidad también fué probada por L. Monteiro, [75]. Si F es un homomorfismo de L en L' que extiende a h entonces $F(x) = (\Delta F(x) \vee e') \wedge \nabla F(x) = (F(\Delta x) \vee e') \wedge F(\nabla x) = (h(\Delta x) \vee e') \wedge h(\nabla x) = H(x)$.

■

El lema 4.1 indicado en [87] es un caso particular del lema precedente.

Lema 6.3.5 Si L y L' son álgebras de Łukasiewicz con ejes e y e' respectivamente, $h \in \text{Epi}^{(\nabla e, \nabla e')}(B(L), B(L'))$ y $H \in \text{Epi}(L, L')$ es el epimorfismo extensión de h entonces:

- (a) $x \in \text{Nuc}(H) = \{x \in L : H(x) = 1\} \iff \Delta x, \nabla x \in \text{Nuc}(h) = \{b \in B(L) : h(b) = 1\}$,
- (b) Si $h_1, h_2 \in \text{Epi}^{(\nabla e, \nabla e')}(B(L), B(L'))$ y $H_1, H_2 \in \text{Epi}(L, L')$ son los epimorfismos extensión de h_1 y h_2 respectivamente entonces:

$$\text{Nuc}(h_1) = \text{Nuc}(h_2) \iff \text{Nuc}(H_1) = \text{Nuc}(H_2).$$

Dem.

- (a) $x \in \text{Nuc}(H) \iff H(x) = 1$, luego $h(\Delta x) = H(\Delta x) = \Delta H(x) = 1$ y $h(\nabla x) = H(\nabla x) = \nabla H(x) = 1$ esto es $\Delta x, \nabla x \in \text{Nuc}(h)$.
- Si $\Delta x, \nabla x \in \text{Nuc}(h)$, esto es $h(\Delta x) = h(\nabla x) = 1$ entonces $H(x) = (h(\Delta x) \vee e') \wedge h(\nabla x) = (1 \vee e') \wedge 1 = 1$.
- (b) – Si $x \in \text{Nuc}(H_1)$ entonces por (a) tenemos que: $\Delta x, \nabla x \in \text{Nuc}(h_1) = (\text{por hipótesis}) = \text{Nuc}(h_2)$ luego por (a) $x \in \text{Nuc}(H_2)$.
- Si $b \in \text{Nuc}(h_1)$ entonces $\Delta b = \nabla b = b \in \text{Nuc}(h_1)$, luego por (a): $b \in \text{Nuc}(H_1) = (\text{por hipótesis}) = \text{Nuc}(H_2)$ luego por (a) $b = \Delta b = \nabla b \in \text{Nuc}(h_2)$.

■

Lema 6.3.6 Si L y L' son álgebras de Łukasiewicz con ejes e y e' respectivamente, y $h \in \text{Epi}^{(\nabla e, \nabla e')}(B(L), B(L'))$ entonces el epimorfismo extensión H verifica:

- (a) Si $\Delta x = 0$ entonces $H(x) \leq e'$ y (b) $H(x) = 0 \iff h(\nabla x) = 0$.

Dem. (a) $H(x) = (h(\Delta x) \vee e') \wedge h(\nabla x) = (h(0) \vee e') \wedge h(\nabla x) = (0 \vee e') \wedge h(\nabla x) = e' \wedge h(\nabla x) \leq e'$.

(b) Si $H(x) = 0$ entonces $h(\nabla x) = H(\nabla x) = \nabla H(x) = \nabla 0 = 0$. Si $h(\nabla x) = 0$, luego $H(x) = (h(\Delta x) \vee e') \wedge h(\nabla x) = (h(\Delta x) \vee e') \wedge 0 = 0$.

■

6.4 Extensión de homomorfismos

En 1965 A. Monteiro [56], indicó un teorema sobre extensión de homomorfismos entre álgebras de Boole, que generaliza resultados de R. Sikorski [91]. Utilizando estos resultados de A. Monteiro, en 1970 L. Monteiro [75] estableció resultados similares para las álgebras de Łukasiewicz.

Lema 6.4.1 *Para que una función h de un álgebra de Łukasiewicz L en un álgebra de Łukasiewicz L' sea un homomorfismo es necesario y suficiente que se verifiquen :*

- $h(0) = 0, \quad h(1) = 1,$
- $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y), \quad h(x \vee y) = h(x) \vee h(y),$
- $h(\Delta x) = \Delta h(x), \quad h(\nabla x) = \nabla h(x).$

Definición 6.4.1 *Una función d de un álgebra de Łukasiewicz L en un álgebra de Łukasiewicz L' se dice un semihomomorfismo si*

$$(D1) \quad d(1) = 1,$$

$$(D2) \quad d(x \vee y) = d(x) \vee d(y),$$

$$(D3) \quad d(\nabla x) = \nabla d(x).$$

Lema 6.4.2 *Si d es un semihomomorfismo de un álgebra de Łukasiewicz L en un álgebra de Łukasiewicz L' entonces*

$$(P1) \quad \text{Si } x \leq y \text{ entonces } d(x) \leq d(y),$$

$$(P2) \quad d(\Delta x) \leq d(x),$$

$$(P3) \quad d(\Delta x) \in B(L'),$$

$$(P4) \quad d(\Delta x) \leq \Delta d(x),$$

$$(P5) \quad \sim d(x) \leq d(\sim x),$$

Teorema 6.4.1 *Si L es un álgebra de Łukasiewicz, S una subálgebra de L , C un álgebra de Łukasiewicz inyectiva, d un semihomomorfismo de L en C , h un homomorfismo de S en C tal que (D) $h(s) \leq d(s)$ para todo $s \in S$, entonces existe un homomorfismo H de L en C tal que (I) H prolonga a h ; (II) $H(x) \leq d(x)$ para todo $x \in L$.*

Teorema 6.4.2 *Si d es un semihomomorfismo de un álgebra de Łukasiewicz L en un álgebra de Łukasiewicz inyectiva C y si $a_0 \in L \setminus \{0\}$ entonces existe un homomorfismo H de L en C tal que:*

$$(1) \quad H(\nabla a_0) = d(\nabla a_0),$$

$$(2) \quad H(x) \leq d(x) \text{ cualquiera que sea } x \in L.$$

L. Monteiro utilizó los resultados indicados en este trabajo [75], en su Tesis Doctoral [76], para establecer un teorema de representación funcional de las álgebras de Łukasiewicz monádicas, similar al indicado por P. Halmos [34] para las álgebras de Boole monádicas.

6.5 Construcción de las álgebras de Boole libres a partir de las álgebras de Łukasiewicz trivalentes libres

Los siguientes resultados de A. Monteiro, recién se publicaron en 1995 en los Informes Técnicos Internos del INMABB, número 42. En 1996 fueron publicados en las Notas de Lógica Matemática 40, [63].

Observación 6.5.1 *Si L es un álgebra de Łukasiewicz, $X \subseteq B(L)$, notaremos con $F_B(X)$ al filtro del álgebra de Boole $B(L)$ generado por el conjunto X . Es claro que $F_B(X) = F(X) \cap B(L)$.*

Sea $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\alpha)$ el álgebra de Łukasiewicz con un conjunto $G = \{g_i : i \in I\}$ de generadores libres de cardinal α , $\nabla G = \{\nabla g_i : i \in I\}$ y $F = F_B(\nabla G)$. Consideremos el álgebra de Boole cociente $\mathcal{B} = B(\mathcal{L})/F$ y representemos por $C_B(b)$, la clase de equivalencia de $B(\mathcal{L})$, que contiene al elemento $b \in B(\mathcal{L})$. Entonces:

Teorema 6.5.1 *$\mathcal{B} = B(\mathcal{L})/F$ es un álgebra de Boole que tiene por generadores libres los elementos $C_B(\Delta g_i)$, $i \in I$, y el cardinal del conjunto $G^* = \{C_B(\Delta g_i) : i \in I\}$ es igual a α .*

Dem. Probemos que:

(I) F es un filtro propio de $B(\mathcal{L})$.

Si $F = B(\mathcal{L})$, entonces $0 \in F$, y por el Lema 3.1.10 resulta que existen elementos $\nabla g_{i_1}, \nabla g_{i_2}, \dots, \nabla g_{i_n} \in \nabla G$ tales que:

$$0 = \bigwedge_{k=1}^n \nabla g_{i_k} = \nabla \left(\bigwedge_{k=1}^n g_{i_k} \right), \text{ y por lo tanto : } \bigwedge_{k=1}^n g_{i_k} = 0.$$

Sea f la transformación de G en el álgebra de Łukasiewicz $\mathbf{T} = \{0, c, 1\}$, definida por:

$$f(g_i) = 1, \text{ para todo } i \in I$$

entonces existe un homomorfismo h de $\mathcal{L}$ en T que prolonga f y en consecuencia:

$$0 = h(0) = h\left(\bigwedge_{k=1}^n g_{i_k}\right) = \bigwedge_{k=1}^n h(g_{i_k}) = \bigwedge_{k=1}^n f(g_{i_k}) = 1.$$

Esta contradicción prueba que F es un filtro propio de $B(\mathcal{L})$. Probemos que:

(II) Si $j, k \in I$, y $j \neq k$ entonces las clases de equivalencia $C_B(\Delta g_j)$, $C_B(\Delta g_k)$ son distintas.³

En efecto supongamos que $C_B(\Delta g_j) = C_B(\Delta g_k)$, entonces tenemos que:

$$\Delta g_j \wedge t = \Delta g_k \wedge t, \text{ donde } t \in F. \quad (1)$$

³Nota del redactor: En este párrafo, a partir de este punto, cambié las demostraciones por otras mas simples.

Consideremos la transformación f de G en el álgebra de Łukasiewicz $\mathbf{T}$, indicada en el Ejemplo 2.2.1, definida por:

$$f(g_i) = \begin{cases} c & \text{si } i = k \\ 1 & \text{si } i \neq k \end{cases}, \quad i \in I.$$

Esta transformación se puede prolongar a un homomorfismo h de $\mathcal{L}$ en $\mathbf{T}$, que verifica:

$$h(\nabla g_i) = \nabla h(g_i) = \nabla f(g_i) = 1, \quad \text{para todo } i \in I. \quad (2)$$

Sea $D = h^{-1}(1)$ el núcleo del homomorfismo h , luego $\nabla g_i \in D$, para todo $i \in I$, y por lo tanto por el Lema 3.1.10, tenemos

$$F = F_B(\nabla G) \subseteq D. \quad (3)$$

De la definición de f resulta $f(g_k) = c$ y como por hipótesis $j \neq k$, entonces $f(g_j) = 1$, luego

$$h(\Delta g_j) = \Delta h(g_j) = \Delta f(g_j) = \Delta 1 = 1 \quad (4)$$

y

$$h(\Delta g_k) = \Delta h(g_k) = \Delta f(g_k) = \Delta(c) = 0. \quad (5)$$

De (1) deducimos que:

$$h(\Delta g_j \wedge t) = h(\Delta g_k \wedge t),$$

esto es

$$\Delta h(g_j) \wedge h(t) = \Delta h(g_k) \wedge h(t).$$

Luego por (4) y (5):

$$h(t) = 1 \wedge h(t) = 0 \wedge h(t) = 0. \quad (6)$$

Como $t \in F$ entonces por (3), tenemos que $h(t) = 1$, lo que contradice (6). Esta contradicción prueba que se verifica (II). Luego podemos afirmar:

El conjunto $G^* = \{C_B(\Delta g_i) : i \in I\}$ tiene el cardinal α .

Sea φ el homomorfismo booleano natural de $B(\mathcal{L})$ sobre $\mathcal{B} = B(\mathcal{L})/F$, esto es si $b \in B(\mathcal{L})$ entonces $\varphi(b) = C_B(b)$. Por el Lema 3.2.8 el homomorfismo φ transforma cada conjunto de generadores de $B(\mathcal{L})$ en un conjunto de generadores de $\mathcal{B} = B(\mathcal{L})/F$. Por el Corolario 2.11.2 sabemos que $B(\mathcal{L}) = SB(\Delta G \cup \nabla G)$, luego:

$$\{C_B(\Delta g_i) : i \in I\} \cup \{C_B(\nabla g_i) : i \in I\}$$

es un conjunto de generadores de $\mathcal{B} = B(\mathcal{L})/F$. Pero como, para todo $i \in I$, la clase de equivalencia $C_B(\nabla g_i) = C_B(1) = F$ es el último elemento de $\mathcal{B} = B(\mathcal{L})/F$, no necesitamos considerarla un generador, y podemos entonces afirmar que G^* es un conjunto de generadores de $\mathcal{B} = B(\mathcal{L})/F$.

(III) Toda aplicación f' del conjunto $G^* \subseteq \mathcal{B}$ en el álgebra de Boole $B = \{0, 1\} \subseteq \mathbf{T}$, se puede extender a un homomorfismo booleano h' de $\mathcal{B} = B(\mathcal{L})/F$ en B .

Consideremos la aplicación f de G en $\mathbf{T}$ definida por las siguientes condiciones:

$$f(g_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } f'(C_B(\Delta g_i)) = 1 \\ c & \text{si } f'(C_B(\Delta g_i)) = 0. \end{cases}$$

En consecuencia tenemos:

$$\nabla f(g_i) = 1 \text{ para todo } i \in I \quad (7)$$

y

$$\Delta f(g_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } f'(C_B(\Delta g_i)) = 1 \\ 0 & \text{si } f'(C_B(\Delta g_i)) = 0, \end{cases}$$

esto es:

$$\Delta f(g_i) = f'(C_B(\Delta g_i)), \text{ para todo } i \in I. \quad (8)$$

La aplicación f de G en $\mathbf{T}$, se puede prolongar a un homomorfismo H de $\mathcal{L}$ en $\mathbf{T}$. Luego por (7) tenemos:

$$H(\nabla g_i) = \nabla H(g_i) = \nabla f(g_i) = 1. \quad (9)$$

El núcleo $N = H^{-1}(1)$ de este homomorfismo es un sistema deductivo de $\mathcal{L}$, y por (9) tenemos $\nabla G \subseteq N$, luego $F(\nabla G) \subseteq N$, y por lo tanto de acuerdo a lo indicado en la Observación 6.5.1,

$$F = F_B(\nabla G) = F(\nabla G) \cap B(\mathcal{L}) \subseteq N \cap B(\mathcal{L}) \subseteq N,$$

luego

$$H(F) = \{1\}. \quad (10)$$

Por el Lema 3.2.8 sabemos que el homomorfismo H transforma elementos booleanos de $\mathcal{L}$ en elementos booleanos de $\mathbf{T}$, y como $B(\mathbf{T}) = \{0, 1\}$, entonces tenemos que $H(B(\mathcal{L})) = \{0, 1\}$.

Sea h la restricción de H al conjunto $B(\mathcal{L})$, entonces podemos afirmar que h es un homomorfismo booleano de $B(\mathcal{L})$ sobre $B(\mathbf{T}) = \{0, 1\} \subset \mathbf{T}$, y por (10) tenemos $h(F) = \{1\}$. Observemos que

$$\text{"Si } x, y \in B(\mathcal{L}), \ x \in C_B(y), \text{ entonces } h(x) = h(y)".$$

En efecto, como $x \in C_B(y)$ tenemos: $x \wedge d = y \wedge d$, donde $d \in F$, luego

$$h(x) = h(x) \wedge 1 = h(x \wedge d) = h(y \wedge d) = h(y) \wedge 1 = h(y).$$

Del resultado precedente resulta que si para cada $x \in B(\mathcal{L})$, definimos $h'(C_B(x)) = h(x)$, entonces h' es una función de $\mathcal{B} = B(\mathcal{L})/F$ sobre $B(\mathbf{T})$. Es fácil probar que h' es un homomorfismo booleano. Vamos a probar que h' prolonga f' , esto es que:

$$h'(C_B(\Delta g_i)) = f'(C_B(\Delta g_i)), \text{ para todo } i \in I.$$

Usando (8) tenemos que:

$$h'(C_B(\Delta g_i)) = h(\Delta g_i) = H(\Delta g_i) = \Delta H(g_i) = \Delta f(g_i) = f'(C_B(\Delta g_i)).$$

Probemos ahora que G^* es un conjunto de generadores libres de $\mathcal{B} = B(\mathcal{L})/F$.

(IV) Toda aplicación f del conjunto G^* en un álgebra de Boole A , se puede prolongar a un homomorfismo booleano de $\mathcal{B} = B(\mathcal{L})/F$ en A .

Si A tiene un único elemento, es evidente que se verifica (IV). Si el álgebra de Boole A es isomorfa al álgebra de Boole $\{0, 1\}$ entonces de (III) resulta que se verifica (IV).

Supongamos ahora que A tiene más de un elemento y que A no es simple, entonces es bien conocido que A es isomorfa a una subálgebra de Boole A' del álgebra de Boole $P = \prod_{j \in J} A_j$

donde $A_j = A/M_j$, y $\{M_j : j \in J\}$ es el conjunto de todos los filtros maximales de A . Además sabemos que $A_j \cong \{0, 1\}$ para todo $j \in J$. Si $(x_j)_{j \in J} \in P$ sabemos que la t -proyección de P sobre A_t , $t \in J$, está dada por $\Pi_t \left((x_j)_{j \in J} \right) = x_t$.

Sea α el isomorfismo de A en A' y $f^* = \alpha \circ f$ luego $f^* : G^* \rightarrow A'$, y si $g^* \in G^*$ entonces $f^*(g^*) = g' = (g'_j)_{j \in J}$. Sea $f_j = \Pi_j \circ f^*$, $j \in J$. Entonces $f_j : G^* \rightarrow A_j \simeq \{0, 1\}$ luego por (III) cada f_j puede extenderse a un homomorfismo booleano h_j de $\mathcal{B} = B(\mathcal{L})/F$ sobre A_j .

Sea h la función de $\mathcal{B} = B(\mathcal{L})/F$ en P definida por $h(x) = (h_j(x))_{j \in J}$. Es evidente que h es un homomorfismo booleano. Probemos h prolonga f^* . En efecto:

$$h(g^*) = (h_j(g^*))_{j \in J} = (f_j(g^*))_{j \in J} = (\Pi_j(f^*(g^*)))_{j \in J} = \left(\Pi_j \left((g'_j)_{j \in J} \right) \right)_{j \in J} = (g'_j)_{j \in J} = g' = f^*(g^*), \text{ cualquiera que sea } g^* \in G^*.$$

Como $h(G^*) = f^*(G^*) \subseteq A'$ entonces $\alpha^{-1}(h(G^*)) \subseteq \alpha^{-1}(A') = A$. Como α^{-1} y h son homomorfismos entonces $\alpha^{-1} \circ h$ es un homomorfismo de $\mathcal{B} = B(\mathcal{L})/F$ en A . Probemos que $\alpha^{-1} \circ h$ es una extensión de f . En efecto $(\alpha^{-1} \circ h)(g^*) = \alpha^{-1}(h(g^*)) = \alpha^{-1}(f^*(g^*)) = \alpha^{-1}((\alpha \circ f)(g^*)) = f(g^*)$. ■

Nota del redactor: En el caso en que G es finito y $N[G] = n \in N$, sabemos que: $N[\mathcal{L}] = 2^{2^n} \times 3^{3^n - 2^n}$ y que $N[B(\mathcal{L})] = 2^{3^n}$. Por los resultados precedentes

$$N[B(\mathcal{L})/F_B(\nabla G)] = 2^{2^n}.$$

Por otro lado sabemos que todas las clases de equivalencia (módulo $F_B(\nabla G)$) de $B(\mathcal{L})$ tiene el mismo número de elementos, luego:

$$2^{2^n} = N[B(\mathcal{L})/F_B(\nabla G)] = \frac{N[B(\mathcal{L})]}{N[F_B(\nabla G)]} = \frac{2^{3^n}}{N[F_B(\nabla G)]}.$$

Esto prueba que el número de elementos de cada clase de equivalencia es: $2^{3^n - 2^n}$.

6.6 Representación de un álgebra de Łukasiewicz por un álgebra de Łukasiewicz de conjuntos.

Dada un álgebra de Łukasiewicz L , sea $E = \mathbf{P}(L)$ y para cada $x \in L$ pongamos $\mathcal{S}(x) = \{P \in E : x \in P\}$, entonces la transformación $\mathcal{S}$, que se denomina *la transformación de Stone*, es una función de L en el conjunto $\mathcal{P}(E) = 2^E$, de todas las partes de E . Sabemos que $(2^E, \cap, \cup, \complement, E)$ es un álgebra de Boole y por los resultados de Stone sobre reticulados distributivos que:

- (1) $\mathcal{S}(0) = \emptyset$,
- (2) $\mathcal{S}(1) = E$,
- (3) $\mathcal{S}(x \wedge y) = \mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y)$,
- (4) $\mathcal{S}(x \vee y) = \mathcal{S}(x) \cup \mathcal{S}(y)$,

y que el reticulado distributivo L es isomorfo a $L' = \mathcal{S}(L)$.

Los siguientes resultados de A. Monteiro, que fueron expuestos en un Seminario dictado en 1966 [59] solamente fueron publicados en 1996 [63].

Para cada $X \in 2^E$, pongamos $\sim X = \mathbb{C}\varphi(X)$, donde φ indica la transformación de Birula-Rasiowa (ver párrafo 3.5). Como φ es una biyección de E , entonces:

- (5) $\varphi(\mathbb{C}X) = \mathbb{C}\varphi(X)$, para todo $X \in 2^E$.
- (6) $\varphi(X \cap Y) = \varphi(X) \cap \varphi(Y)$, cualesquiera que sean $X, Y \in 2^E$.
- (7) $\varphi(X \cup Y) = \varphi(X) \cup \varphi(Y)$, cualesquiera que sean $X, Y \in 2^E$.

Por la teoría de las álgebras de De Morgan, ver por ejemplo [14], [66], es bien conocido que:

Lema 6.6.1 *Si $X, Y \in 2^E$ entonces:*

- (8) $\sim \sim X = X$,
- (9) $\sim (X \cap Y) = \sim X \cup \sim Y$,
- (10) $\sim E = \emptyset$,
- (11) $\mathcal{S}(\sim x) = \sim \mathcal{S}(x)$, cualquiera que sea $x \in L$.

Como $(2^E, \cap, \cup, E)$ es un reticulado distributivo con primer elemento $\emptyset$ y último elemento E , entonces por (8), (9) y (10) el sistema $(2^E, \cap, \cup, \sim, E)$ es un álgebra de De Morgan y por (11) resulta que $(L' = \mathcal{S}(L), \cap, \cup, \sim, E)$ es una subálgebra de De Morgan de 2^E , y como L' es un reticulado isomorfo a L entonces L y L' son álgebras de De Morgan isomorfas.

Consideremos el operador ∇ definido sobre 2^E por:

- (i) $\nabla \emptyset = \emptyset$,
- (ii) $\nabla\{P\} = \{P, \varphi(P)\}$, para todo $P \in 2^E$.
- (iii) Si $\emptyset \subset X \subseteq E$, $\nabla X = \bigcup_{P \in X} \nabla\{P\}$.

Por lo indicado en el Ejemplo 2.8.1 sabemos que $(2^E, \nabla)$ es un álgebra de Boole monádica y que $\nabla X = X \cup \varphi(X)$.

Si $X = \{P\}$ donde $P \in E$, notaremos ∇P en vez de $\nabla\{P\}$. Observemos además que $\nabla\varphi(P) = \nabla P$.

Vamos a probar ahora que en L' el operador ∇ verifica los axiomas L6, L7 y L8 (ver párrafo 2.1).

L6) $\sim X \cup \nabla X = E$, cualquiera que sea $X \in 2^E$.
 $\sim X \cup \nabla X = \mathbb{C}\varphi(X) \cup X \cup \varphi(X) = E$.

L7) $\sim X \cap X = \sim X \cap \nabla X$, cualquiera que sea $X \in 2^E$.
 $\sim X \cap \nabla X = \mathbb{C}\varphi(X) \cap (X \cup \varphi(X)) = X \cap \mathbb{C}\varphi(X) = \sim X \cap X$.

Lema 6.6.2 $\nabla S(\nabla x) = S(\nabla x)$, cualquiera que sea $x \in L$.

Dem. Si $x \in L$, entonces $\nabla x \in L$ y por lo tanto $S(\nabla x) \in L' = S(L)$. Como $(2^E, \nabla)$ es un álgebra de Boole monádica tenemos que $S(\nabla x) \subseteq \nabla S(\nabla x)$. Sea $P \in \nabla S(\nabla x) = \bigcup_{Q \in S(\nabla x)} \nabla Q = \bigcup_{Q \in S(\nabla x)} \{Q, \varphi(Q)\}$. Entonces existe $Q \in S(\nabla x)$ tal que $P \in \{Q, \varphi(Q)\}$, lo que equivale a decir que existe (*) $Q \in S(\nabla x)$ tal que: (1) $P = Q$, ó (2) $P = \varphi(Q)$. En el primer caso tenemos que $P \in S(\nabla x)$. Si se verifica (2), supongamos que $\varphi(Q) = P \notin S(\nabla x)$, esto es $\nabla x \notin P = \varphi(Q) = \mathbb{C} \sim Q$ entonces $\nabla x \in \sim Q$, luego $\sim \nabla x \in Q$, y por el Lema 3.5.1 (b), $\nabla x \notin Q$, lo que contradice (*). ■

Lema 6.6.3 $\nabla S(x) = S(\nabla x)$, cualquiera que sea $x \in L$.

Dem. Como $x \leq \nabla x$, entonces $S(x) \subseteq S(\nabla x)$, luego teniendo en cuenta que el operador ∇ es monótono y el Lema 6.6.2: $\nabla(S(x)) \subseteq \nabla S(\nabla x) = S(\nabla x)$. Sea $P \in S(\nabla x)$, esto es (i) $\nabla x \in P$. Como L es en particular un álgebra de Kleene, sabemos que $\varphi(P)$ es comparable con P . Supongamos que (ii) $\varphi(P) \subseteq P$. Por el Lema 3.1.12 tenemos que (iii) $P \cap B(L) \subseteq F(\nabla P)$, luego de (i) e (iii) resulta (iv), $\nabla x \in F(\nabla P)$. De (i) resulta por el Lema 3.5.7 que (v) $F(\nabla P) = \varphi(P)$, luego por (iv) y (v) tenemos (vi) $\nabla x \in \varphi(P)$. Por (i) tenemos que $Q = \varphi(P)$ verifica $Q \subseteq P = \varphi(\varphi(P)) = \varphi(Q)$ luego como $\nabla x \in \varphi(Q) = P$ resulta por el Lema 3.5.6 que $x \in \varphi(Q) = P$ y por lo tanto $P \in S(x) \subseteq \nabla S(x)$, entonces $P \in \nabla S(x)$. Si $P \subseteq \varphi(P)$, como $\nabla x \in P$, entonces por el Lema 3.5.6 tenemos $x \in \varphi(P)$, esto es $\varphi(P) \in S(x)$, luego $\{\varphi(P), P\} = \nabla \varphi(P) \subseteq \nabla S(x)$, luego $P \in \nabla S(x)$. ■

Lema 6.6.4 L8) $\nabla(X \cap Y) = \nabla X \cap \nabla Y$, cualesquiera que sean $X, Y \in L' = S(L)$.

Dem. Sean $X, Y \in L'$, luego $X = S(x)$, e $Y = S(y)$, donde $x, y \in L$. Luego $\nabla(X \cap Y) = \nabla(S(x) \cap S(y)) = \nabla(S(x \wedge y)) = S(\nabla(x \wedge y)) = S(\nabla x \wedge \nabla y) = S(\nabla x) \cap S(\nabla y) = \nabla S(x) \cap \nabla S(y) = \nabla X \cap \nabla Y$. ■

Como $(L' = S(L), E, \sim, \cap, \cup)$ es un álgebra de De Morgan, donde ∇ verifica L6, L7 y L8 deducimos que $(L' = S(L), E, \sim, \nabla, \cap, \cup)$ es un álgebra de Łukasiewicz y como L y L' son álgebras de De Morgan isomorfas, por el Lema 6.6.2, resulta que L y L' son álgebras de Łukasiewicz isomorfas.

Vamos a probar una serie de resultados que serán utilizados en el párrafo 6.7.

En el álgebra de Boole monádica $(2^E, \nabla)$ el *cuantificador universal* se define por:

$$\Delta X = \mathbb{C}\nabla \mathbb{C}X, \text{ para todo } X \subseteq E.$$

Lema 6.6.5 Si $X \subseteq E$ entonces:

(1) $\nabla \mathbb{C}X = \nabla \sim X$.

$$(2) \Delta \mathbb{C}X = \Delta \sim X.$$

Dem. (1) $\nabla \sim X = \nabla \mathbb{C}\varphi(X) = \mathbb{C}\varphi(X) \cup \varphi(\mathbb{C}\varphi(X)) = \varphi(\mathbb{C}X) \cup \mathbb{C}\varphi(\varphi(X)) = \varphi(\mathbb{C}X) \cup \mathbb{C}X = \nabla \mathbb{C}X.$

$$(2) \Delta \sim X = \mathbb{C}\nabla \mathbb{C} \sim X = (\text{por (1)}) = \mathbb{C}\nabla \sim \sim X = \mathbb{C}\nabla X = \Delta \mathbb{C}X. \quad \blacksquare$$

Corolario 6.6.1 Si $X \in L'$ entonces $\nabla \mathbb{C}X \in L'$.

Dem. Si $X \in L'$, entonces como L' es una subálgebra de De Morgan del álgebra de De Morgan 2^E , tenemos que $\sim X \in L'$. Luego como L' es un álgebra de Łukasiewicz $\nabla \sim X \in L'$.

Por el Lema 6.6.5, $\nabla \mathbb{C}X = \nabla \sim X$, y por lo tanto tenemos que $\nabla \mathbb{C}X \in L'$. ■

Lema 6.6.6 Si $X \subseteq E$ entonces $\Delta X = X \cap \varphi(X) = \sim \nabla \sim X$.

Dem. $\Delta X = \mathbb{C}\nabla \mathbb{C}X = \mathbb{C}(\mathbb{C}X \cup \varphi(\mathbb{C}X)) = X \cap \mathbb{C}\varphi(\mathbb{C}X) = X \cap \varphi(\mathbb{C}\mathbb{C}X) = X \cap \varphi(X).$
 $\Delta X = \mathbb{C}\nabla \mathbb{C}X = \mathbb{C}(\mathbb{C}X \cup \varphi(\mathbb{C}X)) = \mathbb{C}\varphi(\mathbb{C}X \cup \varphi(\mathbb{C}X)) = \sim (\mathbb{C}X \cup \varphi(\mathbb{C}X)) = \sim (\nabla \mathbb{C}X) = \sim \nabla \sim X. \quad \blacksquare$

Corolario 6.6.2 Si $X \subseteq E$ entonces $\nabla X = \sim \Delta \sim X$.

Dem. $\sim \Delta \sim X = (\text{por el Lema 6.6.6}) = \sim \sim \nabla \sim \sim X = \nabla X. \quad \blacksquare$

Corolario 6.6.3 Si $X \in L'$ entonces $\Delta X \in L'$.

Dem. Si $X \in L'$ entonces $\sim X \in L'$, luego $\nabla \sim X \in L'$, y en consecuencia $\sim \nabla \sim X \in L'$. Luego por el Lema 6.6.6, $\Delta X \in L'$. ■

Corolario 6.6.4 Si $X \in L'$ entonces $\Delta \mathbb{C}X \in L'$.

Dem. Si $X \in L'$, entonces $\sim X \in L'$, entonces por el Corolario 6.6.3, $\Delta \sim X \in L'$, luego por el Lema 6.6.5, 2) : $\Delta \mathbb{C}X \in L'$. ■

Lema 6.6.7 Cualesquiera que sean $X, Y \in L'$, se tiene:

$$(1) \nabla(X \cup Y) = \nabla X \cup \nabla Y.$$

$$(2) \Delta(X \cup Y) = \Delta X \cup \Delta Y.$$

$$(3) \Delta(X \cap Y) = \Delta X \cap \Delta Y.$$

Dem. Como $(2^E, \nabla)$ es un álgebra de Boole monádica es bien conocido que se verifican (1) y (3), cualesquiera que sea $X, Y \in 2^E$.

Como (L', ∇) es un álgebra de Łukasiewicz cuyo operador de necesidad es por el Lema 6.6.6, Δ entonces si $X, Y \in L'$ se verifica (2). ■

Lema 6.6.8 Si $X, Y \in L'$ entonces $\nabla(X \cap \mathbb{C}Y) = (\Delta X \cap \nabla \sim Y) \cup (\nabla X \cap \Delta \sim Y) = \nabla X \cap \nabla \sim Y \cap \Delta(X \cup \sim Y).$

Dem. $\nabla(X \cap \mathbb{C}Y) =$ (por definición)

$$\begin{aligned} (X \cap \mathbb{C}Y) \cup \varphi(X \cap \mathbb{C}Y) &= (X \cap \mathbb{C}Y) \cup (\varphi(X) \cap \varphi(\mathbb{C}Y)) = \\ (X \cup \varphi(X)) \cap (\mathbb{C}Y \cup \varphi(\mathbb{C}Y)) \cap (X \cup \varphi(\mathbb{C}Y)) \cap (\varphi(X) \cup \mathbb{C}Y) &= \text{(por definición)} = \\ \nabla X \cap \nabla \mathbb{C}Y \cap (X \cup \varphi(\mathbb{C}Y)) \cap \varphi(X \cup \varphi(\mathbb{C}Y)) &= \text{(por Lemas 6.6.5 (1) y 6.6.6)} = \\ \nabla X \cap \nabla \sim Y \cap \Delta(X \cup \varphi(\mathbb{C}Y)) &= \text{(por definición de la negación } \sim) = \\ \nabla X \cap \nabla \sim Y \cap \Delta(X \cup \sim Y). \end{aligned}$$

Como $X, \sim Y \in L'$ entonces $\Delta(X \cup \sim Y) = \Delta X \cup \Delta \sim Y$, luego

$$\nabla(X \cap \mathbb{C}Y) = \nabla X \cap \nabla \sim Y \cap (\Delta X \cup \Delta \sim Y) = (\Delta X \cap \nabla \sim Y) \cup (\nabla X \cap \Delta \sim Y).$$

■

Corolario 6.6.5 Si $X, Y \in L'$ entonces $\nabla(X \cap \mathbb{C}Y) \in L'$.

Dem. Por hipótesis: (1) $X \in L'$, y (2) $Y \in L'$. De (1) deducimos (3) $\nabla X \in L'$. De (2) resulta (4) $\sim Y \in L'$ y por lo tanto (5) $\nabla \sim Y \in L'$.

De (1) y (4) resulta (5) $X \cup \sim Y \in L'$, luego por el Corolario 6.6.3: (6) $\Delta(X \cup \sim Y) \in L'$. De (3), (5) y (6) resulta, por el Lema 6.6.8 que $\nabla(X \cap \mathbb{C}Y) \in L'$. ■

6.7 Caracter universal de la construcción $\mathcal{L}$ de las álgebras de Łukasiewicz.

Si $(M, \exists)$ es un álgebra de Boole monádica. Vimos en el párrafo 2.10 que a partir de M , mediante la construcción $\mathcal{L}$, se obtiene un álgebra de Łukasiewicz $\mathcal{L}(M)$. (A. Monteiro, [60], L. Monteiro, [68].) Vamos a demostrar el siguiente resultado de A. Monteiro que fuera expuesto en un Seminario dictado en 1966 [59] y solamente publicado en 1996 [63].

Teorema 6.7.1 Dada un álgebra de Łukasiewicz L , existe un álgebra de Boole monádica M tal que $\mathcal{L}(M)$ es isomorfa a L . ver ([61], pag 206), [80].

Es bien conocido que:

Lema 6.7.1 Si A es un álgebra de Boole y R un subreticulado de A , tal que $0, 1 \in R$, entonces la subálgebra booleana de A generada por R , es ([90], pág. 74):

$$SB(R) = \{x \in A : x = \bigvee_{i=1}^n (y_i \wedge \neg z_i), \text{ donde } y_i, z_i \in R\}.$$

Sea L un álgebra de Łukasiewicz, no trivial, y $E = \mathbf{P}(L)$, el conjunto de todos los filtros primos de L , vimos en el párrafo 6.6 que $(2^E, \nabla)$ es un álgebra de Boole monádica, y que L es isomorfa al álgebra de Łukasiewicz $L' = \mathcal{S}(L) \subseteq 2^E$, donde $\mathcal{S}$ es la transformación de Stone. Como L' es un subreticulado del álgebra de Boole 2^E , y $\emptyset, E \in L'$, entonces

$$SB(L') = \{X \in 2^E : X = \bigcup_{i=1}^n (Y_i \cap \mathbb{C}Z_i), \text{ donde } Y_i, Z_i \in L'\}.$$

Vamos a probar que: $(SB(L'), \nabla)$ es una subálgebra monádica del álgebra de Boole monádica $(2^E, \nabla)$.

Lema 6.7.2 Si $X \in SB(L')$ entonces $\nabla X \in L'$.

Dem. Si $X \in SB(L')$, entonces $X = \bigcup_{i=1}^n (Y_i \cap \mathbb{C}Z_i)$ donde $Y_i, Z_i \in L'$, luego $\nabla X = \nabla(\bigcup_{i=1}^n (Y_i \cap \mathbb{C}Z_i)) = \bigcup_{i=1}^n \nabla(Y_i \cap \mathbb{C}Z_i)$. Como por el Corolario 6.6.5, $\nabla(Y_i \cap \mathbb{C}Z_i) \in L'$, para todo i , $1 \leq i \leq n$, y L' es un subreticulado de 2^E tenemos que $\nabla X \in L'$. ■

Corolario 6.7.1 $(SB(L'), \nabla)$ es una subálgebra monádica del álgebra de Boole monádica $(2^E, \nabla)$.

Dem. En efecto, si $X \in SB(L')$, entonces por el Lema 6.7.2, $\nabla X \in L' \subseteq SB(L')$. ■

Corolario 6.7.2 $\nabla(SB(L')) = \Delta(SB(L')) \subseteq L'$.

Dem. Como $SB(L')$ es un álgebra de Boole monádica, es bien conocido que $\nabla(SB(L')) = \Delta(SB(L'))$, y por el Lema 6.7.2, $\nabla(SB(L')) \subseteq L'$. ■

Si $X, Y \in 2^E$ entonces, ver párrafo 2.10, si definimos $X \sqcup Y = \Delta X \cup Y \cup (X \cap \Delta \mathbb{C}Y)$ y $X \sqcap Y = \nabla X \cap Y \cap (X \cup \nabla \mathbb{C}Y)$, en [68] probamos, que:

Lema 6.7.3 Si $X, Y \in 2^E$, entonces

- (1) $\nabla(X \sqcup Y) = \nabla X \cup \nabla Y$.
- (2) $\nabla(X \sqcap Y) = \nabla X \cap \nabla Y$.
- (3) $\Delta(X \sqcup Y) = \Delta X \cup \Delta Y$.
- (4) $\Delta(X \sqcap Y) = \Delta X \cap \Delta Y$.

Lema 6.7.4 Si $X, Y \in L'$ entonces $X \sqcup Y \in L'$.

Dem. Por el Corolario 6.6.3, $\Delta X \in L'$, y por el Corolario 6.6.4, $\Delta \mathbb{C}Y \in L'$, luego como $X \sqcup Y = \Delta X \cup Y \cup (X \cap \Delta \mathbb{C}Y)$ y L' es un álgebra de Łukasiewicz, tenemos que $\Delta X \cup Y \cup (X \cap \Delta \mathbb{C}Y) \in L'$. ■

Lema 6.7.5 Si $X, Y \in L'$ entonces $\Delta(X \cap \mathbb{C}Y) = \Delta(X \cap \sim Y) = \Delta X \cap \Delta \sim Y$.

Dem. $\Delta(X \cap \mathbb{C}Y) = \Delta X \cap \Delta \mathbb{C}Y = (\text{por Lema 6.6.5 (2)}) = \Delta X \cap \Delta \sim Y = \Delta(X \cap \sim Y)$. ■

Consideremos la relación de congruencia “ $\equiv$ ” definida sobre $SB(L')$, (ver párrafo 2.10) del siguiente modo:

$$X, Y \in SB(L'), \quad X \equiv Y \quad \text{si y sólo si} \quad \nabla X = \nabla Y \text{ y } \Delta X = \Delta Y.$$

Si $X \in SB(L')$ notaremos $C(X) = \{Y \in SB(L') : Y \equiv X\}$.

Sea $\mathcal{L}(SB(L')) = SB(L') / \equiv$, entonces A. Monteiro, [60], L. Monteiro, [68], probaron que:

Lema 6.7.6 $(\mathcal{L}(SB(L')), C(E), \sim, \nabla, \sqcap, \sqcup)$ es un álgebra de Łukasiewicz, donde los operadores están definidos por $\sim C(X) = C(\mathbb{C}X)$, $\nabla C(X) = C(\nabla X)$, $C(X) \sqcap C(Y) = C(X \sqcap Y)$ y $C(X) \sqcup C(Y) = C(X \sqcup Y)$.

Vamos a probar que $\mathcal{L}(SB(L'))$ y L son álgebras de Łukasiewicz isomorfas.

Lema 6.7.7 Si $X, Y \in L'$ y $X \equiv Y$ entonces $X = Y$.

Dem. De $X, Y \in L'$, resulta por ser (L', ∇) un álgebra de Łukasiewicz que $\nabla X, \nabla Y \in L'$ y por el Corolario 6.6.3 $\Delta X, \Delta Y \in L'$. Por hipótesis $\nabla X = \nabla Y$, $\Delta X = \Delta Y$, y como ∇ y Δ son los operadores de posibilidad y de necesidad del álgebra de Łukasiewicz L' , entonces por el principio de determinación de Moisil tenemos que $X = Y$. ■

Lema 6.7.8 Si $X, Y \in L'$ entonces existe un único $Z \in L'$ tal que $X \sqcap \mathbb{C}Y \equiv Z$.

Dem. Sea $Z = (\Delta X \sqcap \sim Y) \sqcup (X \sqcap \Delta \sim Y)$, entonces es claro que $Z \in L'$.

(1) $\nabla Z = \nabla(\Delta X \sqcap \sim Y) \sqcup \nabla(X \sqcap \Delta \sim Y) = (\Delta X \sqcap \nabla \sim Y) \sqcup (\nabla X \sqcap \Delta \sim Y) = (\text{por Lema 6.6.8 (2)}) = \nabla(X \sqcap \mathbb{C}Y)$, y
 (2) $\Delta Z = (\text{por Lema 6.6.7 (2)}) = \Delta(\Delta X \sqcap \sim Y) \sqcup \Delta(X \sqcap \Delta \sim Y) = (\text{Lema 6.6.7, 3})$
 $(\Delta X \sqcap \Delta \sim Y) \sqcup (\Delta X \sqcap \Delta \sim Y) = \Delta X \sqcap \Delta \sim Y = (\text{por Lema 6.7.5}) = \Delta(X \sqcap \mathbb{C}Y)$,
 luego $Z \equiv X \sqcap \mathbb{C}Y$.

De (1) y (2) deducimos que $X \sqcap \mathbb{C}Y \equiv Z$ y por el Lema 6.7.7, Z es único. ■

Lema 6.7.9 Si $A, B \in SB(L')$ entonces $A \sqcup B \equiv A \sqcup B \sqcup \Delta(A \sqcup B)$.

Dem. Por el Lema 6.7.3:

$\nabla(A \sqcup B \sqcup \Delta(A \sqcup B)) = \nabla A \sqcup \nabla B \sqcup \nabla \Delta(A \sqcup B) = \nabla A \sqcup \nabla B \sqcup \Delta(A \sqcup B) = \nabla(A \sqcup B) \sqcup \Delta(A \sqcup B) = \nabla(A \sqcup B)$.
 $\Delta(A \sqcup B \sqcup \Delta(A \sqcup B)) = \Delta A \sqcup \Delta B \sqcup \Delta \Delta(A \sqcup B) = \Delta A \sqcup \Delta B \sqcup \Delta(A \sqcup B) = \Delta(A \sqcup B)$.
 ■

Corolario 6.7.3 Si $A, B \in SB(L')$, $X, Y \in L'$ y $A \equiv X$, $B \equiv Y$, entonces $A \sqcup B \equiv Z$, donde $Z \in L'$.

Dem. Vimos en el Lema 6.7.9 que $A \sqcup B \equiv A \sqcup B \sqcup \Delta(A \sqcup B)$. Por las hipótesis $A \equiv X$, $B \equiv Y$, tenemos que $A \sqcup B \equiv X \sqcup Y$ y entonces $A \sqcup B \sqcup \Delta(A \sqcup B) \equiv X \sqcup Y \sqcup \Delta(A \sqcup B)$. Finalmente observemos que como $A \sqcup B \in SB(L')$ entonces por el Corolario 6.7.2 $\Delta(A \sqcup B) \in L'$, luego por el Lema 6.7.4, $Z = X \sqcup Y \sqcup \Delta(A \sqcup B) \in L'$. Luego $A \sqcup B \equiv Z$, donde $Z \in L'$. ■

Lema 6.7.10 Si $A \in SB(L')$, existe $X \in L'$ tal que $A \equiv X$.

Dem. Sea $A \in SB(L')$, entonces $A = \bigcup_{i=1}^n X_i$ donde $X_i = Y_i \sqcap \mathbb{C}Z_i$, e $Y_i, Z_i \in L'$, para $1 \leq i \leq n$. Por el Lema 6.7.8, $A_i \equiv W_i$, donde $W_i \in L'$, para $1 \leq i \leq n$.
 Si $n = 1$, entonces el lema es evidentemente verificado. Supongamos que $2 \leq n$. Por el Lema 6.7.8 $X_1 \equiv W_1$ y $X_2 \equiv W_2$ con $W_1, W_2 \in L'$, luego por el Corolario 6.7.3, tenemos que: (1) $X_1 \sqcup X_2 \equiv H_1$, donde $H_1 \in L'$.
 Como (2) $X_3 \equiv W_3$, con $W_3 \in L'$ entonces de (1) y (2) resulta por el Corolario 6.7.3, que: $X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3 \equiv H_2$, donde $H_2 \in L'$. Aplicando este razonamiento, $n - 1$ veces tenemos que: $\bigcup_{i=1}^n X_i \equiv H_{n-1}$, donde $H_{n-1} \in L'$, lo que termina la demostración. ■

Lema 6.7.11 *La transformación H de L en $\mathcal{L}(SB(L'))$, definida por $H(x) = C(S(x))$, verifica:*

- (1) H es biunívoca,
- (2) H es suryectiva.

Dem. (1) En efecto si $H(x) = H(y)$, esto es $C(S(x)) = C(S(y))$, entonces $S(x) \equiv S(y)$, y como $S(x), S(y) \in S(L) = L'$, entonces por el Lema 6.7.7, $S(x) = S(y)$, y como S es biunívoca resulta que $x = y$.

(2) En efecto dado $C(A) \in \mathcal{L}(SB(L'))$, donde $A \in SB(L')$, por el Lema 6.7.10, sabemos que existe $X \in L' = S(L)$ tal que $X \equiv A$, entonces como $X = S(x)$, donde $x \in L$, tenemos que $H(x) = C(S(x)) = C(X) = C(A)$. ■

Lema 6.7.12 *La transformación H verifica:*

- (3) $H(x \wedge y) = H(x) \sqcap H(y)$.
- (4) $H(x \vee y) = H(x) \sqcup H(y)$.
- (5) $H(\sim x) = \sim H(x)$.
- (6) $H(\nabla x) = \nabla H(x)$.

Dem.

- (3) (a) $\nabla(S(x) \sqcap S(y)) = (\text{Lema 6.7.3, (2)}) = \nabla S(x) \sqcap \nabla S(y) = (\text{por Lema 6.6.4}) = \nabla(S(x) \sqcap S(y))$.
 (b) $\Delta(S(x) \sqcap S(y)) = (\text{por Lema 6.7.3, (4)}) = \Delta S(x) \sqcap \Delta S(y) = (\text{por Lema 6.6.7 (3)}) = \Delta(S(x) \sqcap S(y))$.
 De (a) y (b) resulta que $S(x) \sqcap S(y) \equiv S(x) \sqcap S(y)$, y entonces $H(x \wedge y) = C(S(x \wedge y)) = C(S(x) \sqcap S(y)) = C(S(x) \sqcap S(y)) = C(S(x)) \sqcap C(S(y)) = H(x) \sqcap H(y)$.
- (4) (c) $\nabla(S(x) \sqcup S(y)) = (\text{por Lema 6.7.3 (1)}) = \nabla S(x) \sqcup \nabla S(y) = (\text{por Lema 6.6.7 (1)}) = \nabla(S(x) \sqcup S(y))$.
 (d) $\Delta(S(x) \sqcup S(y)) = (\text{por Lema 6.7.3 (3)}) = \Delta S(x) \sqcup \Delta S(y) = (\text{por Lema 6.6.7 (2)}) = \Delta(S(x) \sqcup S(y))$.
 De (c) y (d) resulta que $S(x) \sqcup S(y) \equiv S(x) \sqcup S(y)$, y entonces $H(x \vee y) = C(S(x \vee y)) = C(S(x) \sqcup S(y)) = C(S(x) \sqcup S(y)) = C(S(x)) \sqcup C(S(y)) = H(x) \sqcup H(y)$.
- (5) $\nabla S(\sim x) = (\text{por Lema 6.6.1 (11)}) = \nabla \sim S(x) = (\text{por Lema 6.6.5, (1)}) = \nabla \mathbb{C}(x)$, y $\Delta S(\sim x) = (\text{por Lema 6.6.1, (11)}) = \Delta \sim S(x) = (\text{por Lema 6.6.5, (2)}) = \Delta \mathbb{C}(x)$.
 Entonces $S(\sim x) \equiv \mathbb{C}S(x)$ y por lo tanto $H(\sim x) = C(S(\sim x)) = C(\mathbb{C}S(x)) = \sim C(S(x)) = \sim H(x)$.
- (6) $H(\nabla x) = C(S(\nabla x)) = (\text{por Lema 6.6.3}) = C(\nabla S(x)) = (\text{por Lema 6.7.6}) = \nabla C(S(x)) = \nabla H(x)$.

■

Por el Corolario 6.7.1 $M = SB(L')$ es un álgebra de Boole monádica y por los Lemas 6.7.11 y 6.7.12 tenemos que: el álgebra de Łukasiewicz L es isomorfa a $\mathcal{L}(M)$, lo que prueba el Teorema 6.7.1.

Como dijéramos anteriormente este resultado fué demostrado de un modo diferente por L. Monteiro [80].

6.8 Una construcción del álgebra de Łukasiewicz con n generadores libres

Sea M_n el álgebra de Boole monádica con n generadores libres, es bien conocido, [35], [79] que M_n es un álgebra de Boole con $2^n \cdot 2^{(2^n-1)}$ átomos y que $\mathcal{K}(M_n)$ es un álgebra de Boole con $2^{2^n} - 1$ átomos. Además la partición de los átomos de M asociada con $\mathcal{K}(M_n)$ tiene (*) $\binom{2^n}{i}$ clases con i átomos de M , $1 \leq i \leq 2^n$.

Sea $L = \mathcal{L}(M_n)$, entonces por lo indicado en la Observación 2.10.1 las álgebras de Boole $\mathcal{B}(L)$ y $\mathcal{K}(M_n)$ son isomorfas.

Sabemos que el álgebra de Łukasiewicz L_n con n generadores libres tiene $2^n \cdot 3^{3^n-2^n}$ elementos y que $\mathcal{B}(L_n)$ tiene 3^n átomos, luego si $L \cong L_n$ tendríamos que $\mathcal{B}(L) \cong \mathcal{B}(L_n)$ luego $2^{2^n} - 1 = 3^n$, y esto solo se verifica para $n = 1$. Luego si $n > 1$ tenemos que las álgebras de Łukasiewicz $\mathcal{L}(M_n)$ y L_n no son isomorfas.

Veamos como podemos obtener L_n a partir de $\mathcal{L}(M_n)$, cuando $n > 1$. Por (*) y lo indicado en la Observación 4.3.2 sabemos que

$$\mathcal{L}(M_n) \cong \mathbf{B}^{2^n} \times \mathbf{T}^{2^{2^n}-1-2^n}.$$

Si

$$b = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{2^n}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{3^n-2^n}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{2^{2^n}-1-2^n}),$$

entonces por la Observación 6.3.1

$$\mathcal{L}(M_n)/[b] \cong [b] \cong \mathbf{B}^{2^n} \times \mathbf{T}^{3^n-2^n}.$$

6.9 Sistema determinante de un álgebra de Łukasiewicz

La demostración de los siguientes resultados que indicamos sobre álgebras de De Morgan y álgebras de Kleene se pueden ver, por ejemplo, en [66].

Si M es un álgebra de De Morgan, y $X \subseteq M$, sea $\sim X = \{x \in M : \sim x \in X\}$. Si $P \in \mathbf{P}(M)$ entonces sabemos que $\varphi(P) = \mathbb{C} \sim P$, es una transformación, denominada *transformación de Birula-Rasiowa* [13], [14], de $\mathbf{P}(M)$ en $\mathbf{P}(M)$, que verifica

(1) $\varphi(\varphi(P)) = P$, y (2) Si $P, Q \in \mathbf{P}(M)$ entonces $P \subseteq Q$ si y solo si $\varphi(Q) \subseteq \varphi(P)$.

Lema 6.9.1 Si $P \in \mathbf{P}(M)$ entonces:

(1) $\sim x \in P \iff x \notin \varphi(P)$, (2) $\sim x \notin P \iff x \in \varphi(P)$.

Si K es un álgebra de Kleene, entonces se verifica que

$$\text{Si } P \in \mathbf{P}(K) \text{ entonces : } P \subseteq \varphi(P) \text{ ó } \varphi(P) \subseteq P.$$

Representemos con $\mathbf{P}_1(K)$ el conjunto de todos los filtros $P \in \mathbf{P}(K)$ tales que $P \subseteq \varphi(P)$. Luego $\mathbf{P}_1(K) \subseteq \mathbf{P}(K)$.

Como toda álgebra de Łukasiewicz L es un álgebra de Kleene, entonces si $b \in B(L)$, entonces el complemento booleano de b , que notaremos $-b$, es igual a $\sim b$, esto es $-b = \sim b$. La demostración, de A. Monteiro, fue reproducida, sin ningún cambio, en [17]. Una demostración mas simple fue obtenida, como se indica en [61], por L. Monteiro, [74].

Si R es un reticulado distributivo finito, no trivial, esto es con más de un elemento, representaremos por $\Pi = \Pi(R)$ el conjunto ordenado de los elementos primos de R .

Teorema 6.9.1 *Si R y R' son reticulados distributivos finito, no triviales, tales que $\Pi = \Pi(R)$, $\Pi' = \Pi(R')$ son conjuntos ordenados isomorfos entonces R y R' son reticulados isomorfos.*

Dem. Sea $f : \Pi \rightarrow \Pi'$ un isomorfismo de orden y pongamos por definición:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ \bigvee \{f(p) : p \in \Pi, p \leq x\}, & \text{si } x \neq 0 \end{cases}.$$

entonces se prueba que $H : R \rightarrow R'$ es un isomorfismo de reticulado y que $H(p) = f(p)$, para todo $p \in \Pi$. ■

Corolario 6.9.1 *Todo reticulado distributivo R finito, no trivial, está determinado a menos de isomorfismos. por el conjunto $\Pi = \Pi(R)$ de sus elementos primos.*

Sea X un conjunto ordenado, un subconjunto Y de X se denomina **sección inferior de X** , si $Y = \emptyset$ ó si verifica Si $y \in Y$ y $x \leq y$ entonces $x \in Y$. Los subconjuntos $[x] = \{y \in X : y \leq x\}$ son secciones inferiores de X .

Representaremos por $\mathbf{S}(X)$ el conjunto de todas las secciones inferiores de X .

Teorema 6.9.2 *Si X es un conjunto ordenado finito, existe un reticulado distributivo finito R tal que los conjuntos ordenados X y $\Pi(R)$ son isomorfos. (G. Birkhoff.)*

Dem. Es bien conocido que $(\mathbf{S}(X), \cap, \cup, \emptyset, X)$ es un reticulado distributivo con primer y último elemento. Como X es finito entonces el reticulado distributivo $\mathbf{S}(X)$ también es finito.

Se prueba sin dificultad que $\Pi(\mathbf{S}(X)) = \{[x] : x \in X\}$, y que si ponemos $\beta(x) = [x]$, para todo $x \in X$ entonces β es un isomorfismo de orden de X en $\Pi(\mathbf{S}(X))$. ■

Definición 6.9.1 *Sea X un conjunto ordenado finito. Diremos que $x \in X$ está ligado a $y \in X$, si existe una sucesión finita $a_1, a_2, \dots, a_n$ de elementos de X tales que $a_1 = x, a_n = y$, y a_i es comparable con a_{i+1} , $1 \leq i \leq n-1$. Para indicar que a es comparable con b , notaremos $a \parallel b$, y para indicar que x está ligado a y notaremos $x \approx y$.*

Si $x \neq y$, $x, y \in X$, podemos suponer que los elementos a_i , $1 \leq i \leq n$, verifican $a_i \neq a_j$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$.

Es bien conocido que la relación $\approx$ es una relación de equivalencia definida sobre X . Sea $K(x) = \{y \in X : y \approx x\}$ la clase de equivalencia que contiene al elemento $x \in X$. Observemos que: Si $y \notin K(x)$, entonces y es incomparable con todos los elementos de $K(x)$. Sean $K(x_1), K(x_2), \dots, K(x_n)$ las clases de equivalencia. Es bien conocido que los subconjuntos $K(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, de X son conjuntos ordenados conexos, que podemos también denominar **componentes conexas de X** , y que el conjunto ordenado X es la *suma cardinal* de los conjuntos ordenados $K(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, esto es:

$$X = \sum_{i=1}^n K(x_i).$$

Observemos además que los conjuntos $K(x_i)$ son *disjuntos dos a dos*, y que cada elemento (*) $a \in K(x_i)$ es incomparable con todo $b \in K(x_j)$ si $i \neq j$.

Podemos suponer que los elementos x_i , $1 \leq i \leq n$ son elementos maximales del conjunto ordenado X . En efecto cada $K(x_i)$ es un conjunto ordenado finito, entonces exist $m \in K(x_i)$, m elemento maximal de $K(x_i)$. Veamos que m también es un elemento maximal de X . En efecto si $x \in X$ verifica $m \leq x$, como $m \in K(x_i)$, entonces por (*) m es incomparable con todo elemento $y \in K(x_j)$, $j \neq i$, luego $x \in K(x_i)$ y como m es un elemento maximal de $K(x_i)$ tenemos que $x_i = m$. Esto muestra que m es un elemento maximal de X . Entonces podemos escribir:

$$X = \sum_{i=1}^n K(x_i),$$

donde los x_i , $1 \leq i \leq n$ son elementos maximales del conjunto ordenado X .

Lema 6.9.2 Si R es un reticulado distributivo finito, no trivial, donde el conjunto ordenado $\Pi = \Pi(R)$ de sus elementos primos es isomorfo al conjunto ordenado $X = X_1 + X_2$ y si R_i ; $i = 1, 2$ es un reticulado distributivo cuyo conjunto de elementos primos es isomorfo a X_i ; $i = 1, 2$ entonces R es isomorfo a $R_1 \times R_2$.

Si R es un reticulado distributivo finito, entonces sabemos que $P \in \mathbf{P}(R)$ si y solo si $P = F(p) = \{x \in R : p \leq x\}$, donde $p \in \Pi = \Pi(R)$.

Sea A un álgebra de De Morgan, en este caso la transformación φ de Birula-Rasiowa de $\mathbf{P}(A)$ en $\mathbf{P}(A)$, induce una transformación ψ de $\Pi = \Pi(A)$ en Π del siguiente modo:

$\psi(p) = q$, si y solo si $\varphi(F(p)) = F(q)$.

La transformación ψ tiene las siguientes propiedades:

- 1) $\psi(\psi(p)) = p$, cualquiera que sea $p \in \Pi$.
- 2) $p \leq q$ si y solo si $\psi(q) \leq \psi(p)$, donde $p, q \in \Pi$.

Esto significa que ψ es un anti-isomorfismo del conjunto ordenado Π sobre Π de período 2. Diremos que el par $(\Pi(A), \psi)$ es el *sistema determinante* del álgebra A .

Definición 6.9.2 Denominaremos *espacio de Birula-Rasiowa* a todo par (X, α) formado por un conjunto ordenado X y una transformación α de X en X tal que:

1) $\alpha(\alpha(x)) = x$, cualquiera que sea $x \in X$.

2) $x \leq y$ si y solo si $\alpha(y) \leq \alpha(x)$, donde $x, y \in X$.

Es claro que α es una aplicación biunívoca de X sobre X , y que el sistema determinante de un álgebra de De Morgan es un espacio de Birula–Rasiowa.

Definición 6.9.3 Dos espacios de Birula–Rasiowa (X, α) , (X', α') se dicen isomorfos si existe un isomorfismo de orden f de X sobre X' tal que $f(\alpha(x)) = \alpha'(f(x))$ para todo $x \in X$.

Teorema 6.9.3 Si $(A, \sim)$ es un álgebra de De Morgan finita, no trivial, y si $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ es su sistema determinante entonces:

$$\sim x = \bigvee \{p \in \Pi : \psi(p) \not\leq x\}.$$

[50], [51], [58], [66].

Si ponemos $\Pi_x = \{p \in \Pi : p \leq x\}$ entonces L. Monteiro [66] probó que:

Lema 6.9.3 Si $(A, \sim)$ es un álgebra de De Morgan finita, no trivial, y si

$$\sim x = \bigvee \{p \in \Pi : p \in \psi(\Pi - \Pi_x)\} = \bigvee \{p : p \in \Pi - \psi(\Pi_x)\} = \bigvee \{\psi(q) : q \in \Pi - \Pi_x\}.$$

Teorema 6.9.4 Si $(A, \sim)$ y $(A', \sim')$ son álgebras de De Morgan finitas, no triviales, tales que sus sistemas determinantes $(\Pi = \Pi(A), \psi)$, $(\Pi' = \Pi(A'), \psi')$ son espacios de Birula–Rasiowa isomorfos, entonces las álgebras de De Morgan $(A, \sim)$ y $(A', \sim')$ son isomorfas.

Corolario 6.9.2 Toda álgebra de De Morgan finita, no trivial, $(A, \sim)$ está determinada, a menos de isomorfismos, por su sistema determinante $(\Pi = \Pi(A), \psi)$.

El resultado precedente fué enunciado en 1960, [50] y su demostración fué indicada en 1962, [51], [58], [66]. Según sus propias palabras [61] A. Monteiro indica que la demostración dada en 1960 era muy complicada.

Teorema 6.9.5 Si (X, α) es un espacio de Birula–Rasiowa finito, existe un álgebra de De Morgan $(A, \sim)$ finita, tal que su sistema determinante $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ es un espacio de Birula–Rasiowa isomorfo a (X, α) . [66]

Dem. Sabemos que $\mathbf{S}(X)$ es un reticulado distributivo tal que $\Pi(\mathbf{S}(X))$ es un conjunto ordenado isomorfo a X . La transformación $\alpha : X \rightarrow X$ induce una transformación $\psi : \Pi(\mathbf{S}(X)) \rightarrow \Pi(\mathbf{S}(X))$ del siguiente modo: $\psi([x]) = [\alpha(x)]$, para todo $x \in X$.

Para cada sección inferior Y de X pongamos (ver Lema 6.9.3):

$$\sim Y = \bigcup \{\psi([x]) : [x] \in \Pi(\mathbf{S}(X)) \setminus \Pi_Y\}.$$

entonces se prueba que $\sim Y = X \setminus \alpha(Y)$. Vamos a probar que $\sim Y$ es una sección inferior de X . En efecto si $\sim Y = X \setminus \alpha(Y) = \emptyset$, entonces $\sim Y$ es una sección inferior. Si $\sim Y = X \setminus \alpha(Y) \neq \emptyset$, sea (1) $p \in X \setminus \alpha(Y)$, y $x \in X$ tal que $x \leq p$. Luego (2) $\alpha(p) \leq \alpha(x)$. Si $x \notin X \setminus \alpha(Y)$, entonces $x \in \alpha(Y)$ esto es $x = \alpha(y')$, donde $y' \in Y$, luego (3) $\alpha(x) = y' \in Y$. Como $Y \in \mathbf{S}(X)$ entonces de (1) y (2) deducimos que $\alpha(p) \in Y$ y entonces $p = \alpha(\alpha(p)) \in \alpha(Y)$, lo que contradice (1). Además:

- 1) $\sim X = X \setminus \alpha(X) = X \setminus X = \emptyset$.
- 2) $\sim(\sim Y) = X \setminus \alpha(\sim Y) = X \setminus \alpha(X \setminus \alpha(Y))$. entonces como α es una biyección de período 2, tenemos que: $\sim(\sim Y) = X \setminus (\alpha(X) \setminus Y) = X \setminus (X \setminus Y) = X \cap Y = Y$.
- 3) Como α es biunívoca entonces $\sim(Y \cap Z) = X \setminus \alpha((Y \cap Z)) = X \setminus (\alpha(Y) \cap \alpha(Z)) = (X \setminus \alpha(Y)) \cup (X \setminus \alpha(Z)) = \sim Y \cup \sim Z$.

entonces $(\mathbf{S}(X), \sim)$ es un álgebra de De Morgan. Veamos que los espacios de Birula-Rasiowa (X, α) y $(\Pi(\mathbf{S}(X)), \psi)$ son isomorfos. Ya sabemos que la transformación $\beta : X \rightarrow \Pi(\mathbf{S}(X))$, definida por $\beta(x) = (x]$, $x \in X$ es un isomorfismo de orden. Por la definición de ψ , tenemos que: $\beta(\alpha(x)) = (\alpha(x)] = \psi((x]) = \psi(\beta(x))$, lo que termina la demostración. ■

Sea A un álgebra de De Morgan finita, no trivial, $\Pi = \Pi(A)$ el conjunto de sus elementos primos y $\Pi = \sum_{i=1}^n X_i$, donde X_i $1 \leq i \leq n$, son las componentes conexas de Π . En general si $p \in X_i$ no podemos afirmar que $\psi(p) \in X_i$, pero en las álgebras de Kleene finitas tenemos que:

$$\psi(X_i) = X_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

pués $\psi(p) \parallel p$ para todo $p \in \Pi$.

Sea A un álgebra de De Morgan finita, no trivial, $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ su sistema determinante y $\Pi = \sum_{i=1}^n K(p_i)$. Es claro que si $p, q \in \Pi$, $p \approx q$, entonces $\psi(p) \approx \psi(q)$, luego:

I) si $\psi(p) \in K(p)$ entonces $\psi(K(p)) = K(p)$.

II) si $q = \psi(p) \notin K(p)$ entonces $\psi(K(p)) = K(q)$, y $\psi(K(p) + K(q)) = K(p) + K(q)$.

Diremos que $(K(p), \psi)$ y $(K(p) + K(q), \psi)$ son componentes ψ -conexas de (Π, ψ) , y que los espacios de Birula Rasiowa

$$(K(p), \psi), \quad (K(p) + K(q), \psi)$$

son indecomponibles.

En el caso donde A es un álgebra de Kleene toda componente conexa de $\Pi(A)$ es una componente ψ -conexa de $\Pi(A)$.

Lema 6.9.4 Si A es un álgebra de De Morgan, no trivial, y su sistema determinante $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ es isomorfo al espacio de Birula-Rasiowa (X, α) donde $X = X_1 + X_2$, $\alpha(X_1) = X_1$, $\alpha(X_2) = X_2$ y si A_i ; $i = 1, 2$ es un álgebra de De Morgan cuyo sistema determinante $(\Pi(A)_i, \psi_i)$ es isomorfo a (X_i, α) ; $i = 1, 2$, entonces A es isomorfa a $A_1 \times A_2$.

Definición 6.9.4 Denominaremos espacio de Kleene a todo espacio de Birula-Rasiowa (X, α) donde cada $x \in X$ es comparable con $\alpha(x)$.

Lema 6.9.5 Para que un álgebra de De Morgan finita A sea un álgebra de Kleene es necesario y suficiente que su sistema determinante $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ sea un espacio de Kleene.

Dem. Es claro que la condición es necesaria. Veamos que es suficiente. Si $y \wedge \sim y = 0$, entonces la condición de Kleene es verificada. Supongamos que $y \wedge \sim y \neq 0$. Para probar que la condición de Kleene es verificada es suficiente probar que:

$$\{p \in \Pi : p \leq y \wedge \sim y\} \subseteq \{q \in \Pi : q \leq z \vee \sim z\}.$$

Sea $p \in \Pi$ tal que (1) : $p \leq y \wedge \sim y$. Por hipótesis (2) $\psi(p) \leq p$, or (3) $p \leq \psi(p)$. Si (2) es verificada entonces por (1) tenemos : $\psi(p) \leq y \wedge \sim y$, entonces en particular $\psi(p) \leq \sim y = \bigvee \{\psi(q) : q \in \Pi \setminus \Pi_y\}$, de donde se deduce, dado que $\psi(p) \in \Pi$, que $\psi(p) \leq \psi(q_0)$, donde $q_0 \in \Pi \setminus \Pi_y$. entonces $q_0 \leq p$ y por (1) tenemos $q_0 \leq y \wedge \sim y \leq y$, luego $q_0 \in \Pi_y$, contradicción. Entonces la condición (3) debe verificarse. Si $\psi(p) \not\leq z$ entonces $\psi(p) \in \Pi \setminus \Pi_z$, luego (4) : $\psi(p) \leq \sim z \leq z \vee \sim z$. De (3) y (4) tenemos $p \leq z \vee \sim z$. Si $\psi(p) \leq z$, entonces $p \leq z \leq z \vee \sim z$. ■

Teorema 6.9.6 Si $(A, \sim)$ y $(A', \sim')$ son álgebras de Kleene finitas, no triviales, tales que sus sistemas determinantes $(\Pi = \Pi(A), \psi)$, $(\Pi' = \Pi(A'), \psi')$ son espacios de Kleene isomorfos, entonces las álgebras de Kleene $(A, \sim)$ y $(A', \sim')$ son isomorfas.

Corolario 6.9.3 Toda álgebra de Kleene finita, no trivial, $(A, \sim)$ es determinada, a menos de isomorfismos, por su sistema determinante $(\Pi = \Pi(A), \psi)$.

Teorema 6.9.7 Si (X, α) es un espacio de Kleene finito, existe un álgebra de Kleene $(A, \sim)$ finita, tal que su sistema determinante $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ es un espacio de Kleene isomorfo a (X, α) .

Observación 6.9.1 1) Si $X = \{x\}$, entonces $\alpha(x) = x$, y $A = \{0, 1\}$, donde $0 < 1$, $\sim 0 = 1$ y $\sim 1 = 0$.

2) Si $X = \{x, y\}$, donde $x < y$, $\alpha(x) = y$ y $\alpha(y) = x$, entonces $A = \{0, c, 1\}$, donde $0 < c < 1$, $\sim 0 = 1$, $\sim 1 = 0$, $y \sim c = c$.

Sea L un álgebra de Łukasiewicz finita, entonces $(\mathbf{P}(L), \subseteq)$ es un conjunto ordenado finito, y:

$$\mathbf{P}(L) = \sum_{i=1}^n K(P_i),$$

donde los P_i , $1 \leq i \leq n$ son elementos maximales del conjunto ordenado $(\mathbf{P}(L), \subseteq)$. Vamos a probar que $K(P) = \{P, \varphi(P)\}$, cualquiera que sea $P \in \mathbf{P}(L)$, P elemento maximal de $\mathbf{P}(L)$, esto es $P \in \mathbf{U}(L)$. Como $U \parallel \varphi(U)$, cualquiera que sea $U \in \mathbf{U}(L)$, entonces $K(U) = \{U, \varphi(U), \dots\}$.

Es claro que $\mathcal{V} = \{U \in \mathbf{U}(L) : U \in \mathbf{p}(L)\}$, $\mathcal{W} = \{U \in \mathbf{U}(L) : U \notin \mathbf{p}(L)\}$, es una bipartición del conjunto $\mathbf{U}(L)$.

Si $U \in \mathcal{V}$, (1) $U \in \mathbf{U}(L)$ y (2) $U \in \mathbf{p}(L)$. Como L es un álgebra de Kleene entonces (3) $U \subseteq \varphi(U)$ ó (4) $\varphi(U) \subseteq U$. De (1) y (4) ó de (2) y (4) tenemos: $U = \varphi(U)$. Sea $P \in K(U)$, donde $U \in \mathcal{V}$, entonces existe una sucesión $P_1, P_2, \dots, P_n$ de elementos de $\mathbf{P}(L)$ tales que: $P_1 = U$, $P_n = P$, y $P_i \parallel P_{i+1}$, $P_i \neq P_{i+1}$ $1 \leq i \leq n-1$. Por hipótesis $U \parallel P_2$, entonces si $U \subseteq P_2$, como U es un ultrafiltro tenemos: $P_2 = U$. Si $P_2 \subseteq U$, como U es un filtro primo minimal tenemos: $P_2 = U$. Entonces $P = U$, cualquiera que sea $P \in K(U)$, luego

$$K(U) = \{U\}.$$

Si $U \in \mathcal{W}$, (1) $U \in \mathbf{U}(L)$ y (2) $U \notin \mathbf{p}(L)$, entonces existe (3) $M \in \mathbf{p}(L)$ tal que (4) $M \subseteq U$, entonces $M \in K(U)$. Por (4) tenemos que $M \notin \mathbf{U}(L)$. Por el Corolario 3.5.4 sabemos que (6) $\varphi(M)$ es el único filtro propio que contiene a M como parte propia. De (5) y (6) deducimos que $U = \varphi(M)$, esto es $M = \varphi(U)$.

Veamos que en este caso:

Lema 6.9.6 i) Si $Q \parallel U$ y $Q \neq U$ entonces $Q = M$.

ii) Si $Q \parallel M$ y $M \neq Q$ entonces $Q = U$.

iii) Si $U \in \mathcal{W}$ entonces $K(U) = \{U, \varphi(U)\}$.

Dem.

- i) Como $Q \parallel U$, $Q \neq U$ y U es un ultrafiltro de L entonces $Q \subseteq U$. Si $Q \notin \mathbf{p}(L)$, entonces existe $P_1 \in \mathbf{p}(L)$ tal que $P_1 \subseteq Q \subseteq U$, lo que es imposible por el Corolario 3.5.3. Entonces tenemos que $Q \in \mathbf{p}(L)$, luego: $Q, M \subseteq U$, $Q, M \in \mathbf{p}(L)$, $Q, M \notin \mathbf{U}(L)$ y entonces por el Corolario 3.5.4, $Q = M = \varphi(M)$.
- ii) De $Q \parallel M$, resulta $Q \subseteq M$ ó $M \subseteq Q$, y como $Q \neq M$, tenemos mas precisamente $Q \subseteq M$ ó $M \subseteq Q$. Pero M es un filtro primo minimal entonces debemos tener $M \subseteq Q$. De (4) deducimos que $M \notin \mathbf{U}(L)$ y como $M \in \mathbf{p}(L)$ resulta por el Corolario 3.5.4 que $Q = U$.
- iii) Sea $U \in \mathcal{W}$ y $P \in K(U)$, entonces existe una sucesión $P_1, P_2, \dots, P_n$ de elementos de $\mathbf{P}(L)$ tales que: $P_1 = U$, $P_n = P$, y $P_i \parallel P_{i+1}$, $P_i \neq P_{i+1}$ $1 \leq i \leq n-1$. Como $P_2 \parallel U$, $P_2 \neq U$, entonces por (i) $P_2 = M$. Como $M = P_2 \parallel P_3$ y $P_2 \neq P_3$, entonces por (ii) tenemos $P_3 = U$. Entonces $K(U) = \{U, \varphi(U)\}$.

■

Entonces si L es un álgebra de Łukasiewicz finita, no trivial, las componentes conexas de $\mathbf{P}(L)$ son de la forma (A) $\{F(p)\} = \{\varphi(F(p))\}$ ó de la forma (B) $\{F(p), \varphi(F(p))\}$, donde $p \in \Pi$, p elemento minimal de Π . Entonces el conjunto ordenado Π es la suma cardinal de conjuntos ordenados Π_i , $1 \leq i \leq n$ donde cada Π_i es una cadena con un ó dos elementos. Observemos además que en el caso (A), como $F(p) = \varphi(F(p))$ entonces $\psi(p) = p$, y en el caso (B) $F(q) = \varphi(F(p)) \subseteq F(p)$ entonces $p < q$ y $\psi(q) = p$.

Observemos que si L es un álgebra de Łukasiewicz tenemos que:

$$\nabla x = \bigwedge \{b \in B(L) : x \leq b\}; \quad \Delta x = \bigvee \{b \in B(L) : b \leq x\}, \quad x \in L$$

Teorema 6.9.8 Si L, L' son álgebras de Łukasiewicz finitas, no triviales, tales que sus sistemas determinantes $(\Pi = \Pi(L), \psi)$, $(\Pi' = \Pi(L'), \psi')$ son espacios de Kleene isomorfos, entonces las álgebras de Łukasiewicz L y L' son isomorfas.

Dem. Sabemos que la función $H : L \rightarrow L'$ definida en el Teorema 6.9.1 es un isomorfismo del álgebra de Kleene L en el álgebra de Kleene L' (ver Teoremas 6.9.4, 6.9.6).

Probemos que H verifica (*) $H(\nabla x) = \nabla H(x)$, para todo $x \in L$. Es claro que si $x = 0$,

(*) es verificada. Supongamos que $x \neq 0$. $H(\nabla x) = H(\bigwedge \{b : b \in B(L), x \leq b\}) = \bigwedge \{H(b) : b \in B(L), x \leq b\}$ y $\nabla H(x) = \bigwedge \{b' : b' \in B(L'), H(x) \leq b'\}$. Probemos que $\{H(b) : b \in B(L), x \leq b\} = \{b' : b' \in B(L'), H(x) \leq b'\}$, de donde resulta (*).

Sea $y \in \{H(b) : b \in B(L), x \leq b\}$, luego $y = H(b)$, donde $b \in B(L)$, $x \leq b$. Como H es un isomorfismo de reticulado y $b \in B(L)$, entonces $y = H(b) \in B(L')$ y $H(x) \leq H(b) = y$. Recíprocamente si $b' \in B(L')$ y $H(x) \leq b'$, como H es suryectiva $b' = H(b)$, donde $b \in B(L)$, tenemos así que $H(x) \leq H(b)$, de donde resulta que $x \leq b$. ■

Corolario 6.9.4 *Toda álgebra de Łukasiewicz finita, no trivial, está determinada, a menos de isomorfismos, por su sistema determinante.*

Recordemos la definición y el resultado siguiente (ver [17], [18]) : Si K es un álgebra de Kleene, diremos que el conjunto $B(K)$ de elementos booleanos de K , que es un álgebra de Boole, es:

- *relativamente completo superiormente* si verifica: Si $x \in K$ entonces existe $\bigwedge \{b \in B(K) : x \leq b\}$ en $B(K)$ y $\nabla x = \bigwedge \{b \in B(K) : x \leq b\}$.
- *separador* si verifica: Si $x, y \in K$ y $y \not\leq x$, entonces existe $b \in B(K)$ tal que $x \leq b$ e $y \not\leq b$, ó existe $b' \in B(K)$ tal que $b' \leq y$ y $b' \not\leq x$.

Teorema 6.9.9 *Si K es un álgebra de Kleene tal que el conjunto $B(K)$ de sus elementos booleanos es relativamente completo superiormente y separador, entonces existe una única estructura de álgebra de Łukasiewicz sobre K , [17].*

Observemos que los operadores ∇ y Δ son definidos por:

$$\nabla x = \bigwedge \{b \in B(K) : x \leq b\}; \quad \Delta x = \bigvee \{b \in B(K) : b \leq x\}, \quad x \in K$$

Lema 6.9.7 *Si K es un álgebra de Kleene finita, no trivial, y su sistema determinante $(\Pi = \Pi(K), \psi)$ es isomorfo al espacio de Kleene (X, α) donde $X = X_1 + X_2$, (entonces $\alpha(X_i) = X_i$, $i = 1, 2$) y si K_i $i = 1, 2$ es un álgebra de Kleene cuyo sistema determinante $(\Pi(K_i), \psi_i)$ es isomorfo a (X_i, α) , $i = 1, 2$ entonces K es isomorfa a $K_1 \times K_2$.*

Lema 6.9.8 *Si K_1, K_2 son álgebras de Kleene finitas, no triviales, y $B(K_1), B(K_2)$ son relativamente completas superiormente y separadores, entonces $K_1 \times K_2$ es un álgebra de Kleene y $B(K_1 \times K_2)$ es relativamente completa superiormente.*

Teorema 6.9.10 *Si (X, α) es un espacio de Kleene finito, no trivial, tal que, $X = \sum_{i=1}^t Y_i$, et*

$$Y_i = \begin{cases} \{y_i\}, \alpha(y_i) = y_i, & \text{si } 1 \leq i \leq s, \\ \{z_i, w_i\}, z_i < w_i, \alpha(z_i) = w_i, \alpha(w_i) = z_i, & \text{si } s+1 \leq i \leq t. \end{cases}$$

existe un álgebra de Łukasiewicz A finita, no trivial, tal que su sistema determinante $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ es un espacio de Kleene isomorfo a (X, α)

Dem. Sea A_i , $1 \leq t$, el álgebra de Kleene tal que $\Pi(A_i)$ es isomorfo a Y_i , entonces (ver Observación 6.9.1):

$$A_i = \begin{cases} \{0_i, 1_i\}, & \sim 0_i = 1_i, \text{ si } 1 \leq i \leq s, \\ \{0_i, t_i, 1_i\}, & \sim 0_i = 1_i, \sim t_i = t_i, \text{ si } s+1 \leq i \leq t. \end{cases}$$

Luego

$$\Pi(A_i) = \begin{cases} \{1_i\}, & \text{si } 1 \leq i \leq s, \\ \{t_i, 1_i\}, & \text{si } s+1 \leq i \leq t. \end{cases}$$

Tenemos así que $A = \prod_{i=1}^t A_i$ es un álgebra de Kleene.

$$\text{Como } B(A_i) = \begin{cases} A_i, & \text{si } 1 \leq i \leq s, \\ \{0_i, 1_i\}, & \text{si } s+1 \leq i \leq t, \end{cases}$$

son conjuntos relativamente completos superiormente y separadores entonces por el Lema 6.9.8, $B(A)$ es un conjunto relativamente completo superiormente y separador, luego por el Teorema 6.9.9 existe una única estructura de álgebra de Łukasiewicz sobre A .

Proveamos que $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ y (X, α) son espacios de Kleene isomorfos. En efecto es bien conocido que:

$$\Pi(A) = \{(a_1, \dots, a_s, a_{s+1}, \dots, a_t) : \text{donde } a_i \in \Pi(A_i) \text{ y } a_j = 0, j \neq i, 1 \leq j \leq t\}.$$

Sean h_i , $1 \leq i \leq t$, isomorfismos de Y_i sobre $\Pi(A_i)$. Es fácil ver que la transformación $\psi : \Pi(A) \rightarrow \Pi(A)$ se define del siguiente modo:

Si $p = (a_1, \dots, a_s, a_{s+1}, \dots, a_t) \in \Pi(A)$ entonces $a_i \in \Pi(A_i)$ et $a_j = 0$, $j \neq i$, $1 \leq j \leq t$. Entonces $\psi(p) = (d_1, \dots, d_s, d_{s+1}, \dots, d_t)$, donde $d_j = 0$ si $1 \leq j \leq t$, $j \neq i$, y $d_i = h_i(\alpha(x))$, donde $x \in Y_i$ y $h_i(x) = a_i$.

Si $x \in X$, entonces $x \in Y_i$, donde $1 \leq i \leq t$, pongamos por definición $H(x) = a \in \Pi(A)$, donde $a_j = 0$ si $j \neq i$ y $a_i = h_i(x)$. Es fácil ver que H es un isomorfismo de orden de X sobre $\Pi(A)$. Además $H(\alpha(x)) = \psi(H(x))$. En efecto si $x \in Y_i$ entonces $\alpha(x) \in Y_i$, luego $H(\alpha(x)) = a \in \Pi(A)$, donde $a_j = 0$ si $j \neq i$ y $a_i = h_i(\alpha(x))$, y como la coordenada i -ésima de $H(x)$ es $h_i(x)$, entonces la coordenada i -ésima de $\psi(H(x))$ es $h_i(\alpha(y))$ donde $y \in Y_i$ y $h_i(y) = h_i(x)$, luego $y = x$ y entonces $h_i(\alpha(y)) = h_i(\alpha(x))$, y las otras coordenadas son iguales a 0, entonces $H(\alpha(x)) = \psi(H(x))$. ■

7 CAPITULO VI

En la Reunión Anual de la U.M.A. de 1964, A. Monteiro y R. Cignoli [57], presentaron los resultados que vamos a indicar a continuación. Los detalles de los mismos nunca fueron publicados. La técnica utilizada es similar a la indicada en 1961, para las álgebras de De Morgan libres, por O. Chateaubriand y A. Monteiro, [16] (trabajo que fue realizado durante una estadía de A. Monteiro en la Universidad de Buenos Aires).

En 1979 R. Cignoli publica un trabajo [25] que generaliza los resultados indicados en [57].

7.1 Introducción

Sea T un conjunto no vacío y φ una involución de T . Para cada $X \subseteq T$ pongamos (ver Ejemplo 2.8.1):

$$\sim X = \complement_{\varphi}(X) \quad (1)$$

y

$$\nabla X = X \cup \varphi(X) \quad (2)$$

Las operaciones que acabamos de definir verifican (ver Ejemplo 2.8.1):

$$\sim \sim X = X \quad (3) \quad ; \quad \sim \emptyset = T \quad (4)$$

$$\sim T = \emptyset \quad (5) \quad ; \quad \sim (X \cup Y) = \sim X \cap \sim Y \quad (6)$$

$$\sim (X \cap Y) = \sim X \cup \sim Y \quad (7) \quad ; \quad X \subseteq \nabla X \quad (8)$$

$$\nabla \emptyset = \emptyset \quad (9) \quad ; \quad \nabla T = T \quad (10)$$

$$\nabla (X \cup Y) = \nabla X \cup \nabla Y \quad (11) \quad ; \quad \sim X \cup \nabla X = T \quad (12)$$

$$\sim X \cap \nabla X = \sim X \cap X \quad (13) \quad ; \quad \nabla (X \cap \nabla Y) = \nabla X \cap \nabla Y. \quad (14)$$

Por (3), (4) y (6) resulta que el sistema $(2^T, \cap, \cup, \sim, T)$ es un álgebra de De Morgan. De (11) resulta que

$$(A) \quad \text{Si } X \subseteq Y \text{ entonces } \nabla X \subseteq \nabla Y.$$

Luego como $X \cap Y \subseteq X$ y $X \cap Y \subseteq Y$ por (A) resulta que

$$\nabla (X \cap Y) \subseteq \nabla X \text{ y } \nabla (X \cap Y) \subseteq \nabla Y$$

y por lo tanto:

$$(B) \quad \nabla (X \cap Y) \subseteq \nabla X \cap \nabla Y.$$

A. Monteiro probó (ver Ejemplo 2.8.1) que la inclusión:

$$\nabla X \cap \nabla Y \subseteq \nabla (X \cap Y) \quad (15)$$

se verifica si y solo si φ es la función identidad de T . Luego el sistema $(2^T, \cap, \cup, \sim, \nabla, T)$ es un álgebra de Łukasiewicz si y solo si la involución φ que define a $\sim$ y ∇ por medio de las fórmulas (1) y (2) es la función identidad de T . En este caso $\sim$ concide con el complemento (en T) y ∇ es el operador identidad de 2^T sobre 2^T , luego es un álgebra de Boole, esto es un álgebra de Łukasiewicz trivial. Pero pueden existir subálgebras S del álgebra de De Morgan $(2^T, \cap, \cup, \sim, T)$ tal que la relación (15) se satisface para todo par de elementos $X, Y \in S$, y en este caso S es un álgebra de Łukasiewicz no trivial (ver Ejemplo 2.8.1).

Lema 7.1.1 *Sea T un conjunto no vacío, φ una involución de T y $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de T . Para que exista un álgebra de Łukasiewicz $\mathcal{L}$ de subconjuntos de T determinada por φ (ver párrafo 1.8) tal que $G_i \in \mathcal{L}$ para todo $i \in I$ es necesario y suficiente que la familia $\{G_i\}_{i \in I}$ verifique:*

$$\nabla(G_i \cap \sim G_i) \cap \nabla(G_j \cap \sim G_j) \subseteq \nabla(G_i \cap \sim G_i \cap G_j \cap \sim G_j).$$

Dem. Es claro que la condición es necesaria. Vamos a probar que es suficiente. Para ello, para cada $i \in I$, vamos a considerar los siguientes conjuntos:

$$G_i^1 = G_i \cap \sim G_i \quad (16) \quad ; \quad G_i^2 = \nabla(G_i \cap \sim G_i) \quad (17)$$

$$G_i^3 = \sim \nabla \sim G_i \quad (18) \quad ; \quad G_i^4 = \sim \nabla G_i \quad (19)$$

Usando (1) y (2) es fácil ver que:

$$(a) \quad G_i^1 = G_i \cap \mathbb{L}\varphi(G_i),$$

$$(b) \quad G_i^2 = (G_i \cap \mathbb{L}\varphi(G_i)) \cup (\varphi(G_i) \cap \mathbb{L}G_i),$$

$$(c) \quad G_i^3 = G_i \cap \varphi(G_i),$$

$$(d) \quad G_i^4 = \mathbb{L}\varphi(G_i) \cap \mathbb{L}G_i.$$

Vamos a probar que:

$$G_i = G_i^1 \cup G_i^3 \quad (20) \quad ; \quad \sim G_i = G_i^1 \cup G_i^4 \quad (21)$$

$$\sim G_i^1 = G_i^1 \cup G_i^3 \cup G_i^4 \quad (22) \quad ; \quad \sim G_i^2 = G_i^3 \cup G_i^4 \quad (23)$$

$$\sim G_i^3 = G_i^2 \cup G_i^4 \quad (24) \quad ; \quad \sim G_i^4 = G_i^2 \cup G_i^3 \quad (25)$$

$$\nabla G_i^1 = G_i^2 \quad (26) \quad ; \quad \nabla G_i^2 = G_i^2 \quad (27)$$

$$\nabla G_i^3 = G_i^3 \quad (28) \quad ; \quad \nabla G_i^4 = G_i^4 \quad (29)$$

$$(20) \quad G_i^1 \cup G_i^3 = (G_i \cap \mathbb{L}\varphi(G_i)) \cup (G_i \cap \varphi(G_i)) = G_i \cap (\mathbb{L}\varphi(G_i) \cup \varphi(G_i)) = G_i \cap T = G_i,$$

- (21) $G_i^1 \cup G_i^4 = (G_i \cap \mathbb{L}\varphi(G_i)) \cup (\mathbb{L}\varphi(G_i) \cap \mathbb{L}G_i) = \mathbb{L}\varphi(G_i) \cap (G_i \cup \mathbb{L}G_i) = \mathbb{L}\varphi(G_i) \cap T = \mathbb{L}\varphi(G_i) = \sim G_i,$
- (22) $G_i^1 \cup G_i^3 \cup G_i^4 = (\text{por (21)}) = G_i^3 \cup \sim G_i = (G_i \cap \varphi(G_i)) \cup \sim G_i = (G_i \cup \sim G_i) \cap (\varphi(G_i) \cup \sim G_i) = \sim G_i^1 \cap (\varphi(G_i) \cup \mathbb{L}\varphi(G_i)) = \sim G_i^1 \cap T = \sim G_i^1.$
- (23) $G_i^3 \cup G_i^4 = (G_i \cap \varphi(G_i)) \cup (\mathbb{L}\varphi(G_i) \cap \mathbb{L}G_i) = (G_i \cup \mathbb{L}\varphi(G_i)) \cap (\varphi(G_i) \cup \mathbb{L}G_i). \\ \sim G_i^2 = \mathbb{L}\varphi[(G_i \cap \mathbb{L}\varphi(G_i)) \cup (\varphi(G_i) \cap \mathbb{L}G_i)] = (\mathbb{L}\varphi(G_i) \cup G_i) \cap (\mathbb{L}G_i \cup \varphi(G_i)).$
- (24) $G_i^2 \cup G_i^4 = (G_i \cap \mathbb{L}\varphi(G_i)) \cup (\varphi(G_i) \cap \mathbb{L}G_i) \cup (\varphi(G_i) \cap \mathbb{L}G_i) = (\mathbb{L}\varphi(G_i) \cap T) \cup (\varphi(G_i) \cap \mathbb{L}G_i) = \mathbb{L}\varphi(G_i) \cup \mathbb{L}G_i. \\ \sim G_i^3 = \mathbb{L}\varphi(G_i \cap \varphi(G_i)) = \mathbb{L}\varphi(G_i) \cup \mathbb{L}G_i.$
- (25) $G_i^2 \cup G_i^3 = (G_i \cap \mathbb{L}\varphi(G_i)) \cup (\varphi(G_i) \cap \mathbb{L}G_i) \cup (G_i \cap \varphi(G_i)) = ((G_i \cap (\mathbb{L}\varphi(G_i) \cup \varphi(G_i))) \cup (\varphi(G_i) \cap \mathbb{L}G_i) = (G_i \cap T) \cup (\varphi(G_i) \cap \mathbb{L}G_i) = G_i \cup (\varphi(G_i) \cap \mathbb{L}G_i) = G_i \cup \varphi(G_i). \\ \sim G_i^4 = \mathbb{L}\varphi(\mathbb{L}\varphi(G_i) \cap \mathbb{L}G_i) = G_i \cup \varphi(G_i).$
- (26) $\nabla G_i^1 = G_i^1 \cup \varphi(G_i^1) = (G_i \cap \mathbb{L}\varphi(G_i)) \cup (\varphi(G_i) \cap \mathbb{L}G_i) = (\text{por (b)}) = G_i^2.$
- (27) $\nabla G_i^2 = G_i^2 \cup \varphi(G_i^2) = (\text{por (b)}) = G_i^2 \cup (\varphi(G_i) \cap \mathbb{L}G_i) \cup (G_i \cap \mathbb{L}\varphi(G_i)) = G_i^2 \cup G_i^2 = G_i^2.$
- (28) $\nabla G_i^3 = G_i^3 \cup \varphi(G_i^3) = (G_i \cap \varphi(G_i)) \cup (\varphi(G_i) \cap G_i) = G_i \cap \varphi(G_i) = G_i^3.$
- (29) $\nabla G_i^4 = G_i^4 \cup \varphi(G_i^4) = (\mathbb{L}\varphi(G_i) \cap \mathbb{L}G_i) \cup (\mathbb{L}G_i \cap \mathbb{L}\varphi(G_i)) = \mathbb{L}G_i \cap \mathbb{L}\varphi(G_i) = G_i^4.$

Mediante los conjuntos G_i^p , $i \in I$, $1 \leq p \leq 4$ vamos a construir una familia de subconjuntos C_{ij} de T , del siguiente modo:

$$C_{ij} = (\varepsilon_j^1 \cap G_i^1) \cup (\varepsilon_j^2 \cap G_i^2) \cup (\varepsilon_j^3 \cap G_i^3) \cup (\varepsilon_j^4 \cap G_i^4) \quad (30)$$

donde ε_j^p es igual a $\emptyset$ ó T . Luego para cada $i \in I$ tenemos a los sumo 2^4 conjuntos C_{ij} diferentes. Moisil ([43], pág. 441) probó que para cada $i \in I$ existen exactamente 12 conjuntos C_{ij} diferentes, luego $1 \leq j < 2^4$.

Sea $\mathcal{L}$ el subreticulado del reticulado distributivo $(2^T, \cap, \cup)$ generado por los elementos C_{ij} . Vamos a probar que el sistema $(\mathcal{L}, T, \sim, \nabla, \cap, \cup)$ es un álgebra de Łukasiewicz de subconjuntos de T (determinada por φ) que contiene a todos los G_i , $i \in I$.

- (I) $G_i^p \in \mathcal{L}$, para $1 \leq p \leq 4$.

En efecto:

(I1) Si $\varepsilon_j^1 = T$ y $\varepsilon_j^2 = \varepsilon_j^3 = \varepsilon_j^4 = \emptyset$ entonces $G_i^1 = C_{ij} \in \mathcal{L}$.

(I2) Si $\varepsilon_j^2 = T$ y $\varepsilon_j^1 = \varepsilon_j^3 = \varepsilon_j^4 = \emptyset$ entonces $G_i^2 = C_{ij} \in \mathcal{L}$.

(I3) Si $\varepsilon_j^3 = T$ y $\varepsilon_j^1 = \varepsilon_j^2 = \varepsilon_j^4 = \emptyset$ entonces $G_i^3 = C_{ij} \in \mathcal{L}$.

(I4) Si $\varepsilon_j^4 = T$ y $\varepsilon_j^1 = \varepsilon_j^2 = \varepsilon_j^3 = \emptyset$ entonces $G_i^4 = C_{ij} \in \mathcal{L}$.

- (II) $G_i, \sim G_i \in \mathcal{L}$.

Por (I1), (I3) y (20) podemos afirmar que $G_i = G_i^1 \cup G_i^3 \in \mathcal{L}$.

Por (I1), (I4) y (21) podemos afirmar que $\sim G_i = G_i^1 \cup G_i^4 \in \mathcal{L}$.

- (III) $\sim G_i^p \in \mathcal{L}$, para $1 \leq p \leq 4$.

Es una consecuencia inmediata de (I), (22), (23), (24) y (25).

(IV) $\emptyset, T \in \mathcal{L}$.

Si $\varepsilon_j^1 = \varepsilon_j^2 = \varepsilon_j^3 = \varepsilon_j^4 = \emptyset$ entonces $\emptyset = C_{ij} \in \mathcal{L}$.

Por (26) $\nabla G_i^1 = G_i^2$, luego por (12) $T = \nabla G_i^1 \cup \sim G_i^1 = G_i^2 \cup \sim G_i^1$ y por (I) y (III) $G_i^2 \cup \sim G_i^1 \in \mathcal{L}$ esto es $T \in \mathcal{L}$.

(V) $\sim C_{ij} \in \mathcal{L}$.

Como $C_{ij} = \bigcup_{p=1}^4 (\varepsilon_j^p \cap G_i^p)$ de (6) y (7) se deduce que:

$$\sim C_{ij} = \bigcap_{p=1}^4 (\sim \varepsilon_j^p \cup \sim G_i^p). \quad (31)$$

Por (III) sabemos que $\sim G_i^p \in \mathcal{L}$, para $1 \leq p \leq 4$, por lo tanto para cada $i \in I$ y cada p , $1 \leq p \leq 4$ existe un índice j_p tal que:

$$\sim G_i^p = C_{ij_p}. \quad (32)$$

Luego, por (31) tenemos:

$$\sim C_{ij} = \bigcap_{p=1}^4 (\sim \varepsilon_j^p \cup C_{ij_p}). \quad (33)$$

Teniendo en cuenta (4), (5) y la definición de los ε_j^p , tenemos que $\sim \varepsilon_j^p \cup C_{ij_p}$ es igual a T ó C_{ij_p} , y como $T, C_{ij_p} \in \mathcal{L}$ de (33) resulta que $\sim C_{ij}$ es la intersección de un número finito de elementos de $\mathcal{L}$, luego $\sim C_{ij} \in \mathcal{L}$.

(VI) Si $X \in \mathcal{L}$ entonces $\sim X \in \mathcal{L}$.

Si $X \in \{\emptyset, T\}$ entonces por (4) y (5) $\sim X \in \{\emptyset, T\}$.

Es bien conocido (ver por ejemplo [12]) que todo $X \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset, T\}$ es de la forma:

$$X = \bigcup_{r=1}^m \bigcap_{s=1}^{n_r} C_{i(r,s)j(r,s)}$$

luego, por (6) y (7) tenemos que:

$$\sim X = \bigcap_{r=1}^m \bigcup_{s=1}^{n_r} \sim C_{i(r,s)j(r,s)}$$

de donde resulta teniendo en cuenta (V) que $\sim X \in \mathcal{L}$.

(VII) El sistema $(\mathcal{L}, T, \cap, \cup, \sim)$ es un álgebra de De Morgan de subconjuntos de T .

Por construcción $(\mathcal{L}, \cap, \cup)$ es un reticulado distributivo de subconjuntos de T y por (V) $\mathcal{L}$ es cerrado por la operación $\sim$, por hipótesis $T \in \mathcal{L}$ y teniendo en cuenta (3) y (6) resulta (VII).

(VIII) $\nabla C_{ij} \in \mathcal{L}$.

Como $C_{ij} = \bigcup_{p=1}^4 (\varepsilon_j^p \cap G_i^p)$ por (11) tenemos que

$$\nabla C_{ij} = \bigcup_{p=1}^4 \nabla(\varepsilon_j^p \cap G_i^p). \quad (34)$$

Por (9) y (10) $\varepsilon_j^p = \nabla \varepsilon_j^p$ luego por (14) tenemos que:

$$\nabla(\varepsilon_j^p \cap G_i^p) = \nabla \varepsilon_j^p \cap \nabla G_i^p = \varepsilon_j^p \cap \nabla G_i^p. \quad (35)$$

Luego de (34) y (35) tenemos que:

$$\nabla C_{ij} = (\varepsilon_j^1 \cap \nabla G_i^1) \cup (\varepsilon_j^2 \cap \nabla G_i^2) \cup (\varepsilon_j^3 \cap \nabla G_i^3) \cup (\varepsilon_j^4 \cap \nabla G_i^4)$$

y por (26) a (29) resulta que:

$$\nabla C_{ij} = (\varepsilon_j^1 \cap G_i^2) \cup (\varepsilon_j^2 \cap G_i^2) \cup (\varepsilon_j^3 \cap G_i^3) \cup (\varepsilon_j^4 \cap G_i^4)$$

esto es

$$\nabla C_{ij} = (\emptyset \cap G_i^1) \cup ((\varepsilon_j^1 \cup \varepsilon_j^2) \cap G_i^2) \cup (\varepsilon_j^3 \cap G_i^3) \cup (\varepsilon_j^4 \cap G_i^4)$$

y por lo tanto $\nabla C_{ij} \in \mathcal{L}$.

(IX) $\nabla(G_i^p \cap G_j^p) = \nabla G_i^p \cap \nabla G_j^p$, $i, j \in I$, $1 \leq p, q \leq 4$.

Si $2 \leq q \leq 4$, entonces por (27) a (29) tenemos que $\nabla G_i^q = G_i^q$ y por lo tanto aplicando (14) tenemos

$$\nabla(G_i^p \cap G_j^p) = \nabla(G_i^p \cap \nabla G_j^p) = \nabla G_i^p \cap \nabla G_j^p, \quad 2 \leq p, q \leq 4. \quad (36)$$

Intercambiando G_i^p y G_j^p tenemos que (36) es válida para todos los $i, j \in I$ y $p \neq 1$, $q \neq 1$.

Por (B) sabemos que:

$$\nabla(G_i^1 \cap G_j^1) \subseteq \nabla G_i^1 \cap \nabla G_j^1.$$

Por otro lado usando la hipótesis del lema

$$\nabla G_i^1 \cap \nabla G_j^1 = \nabla(G_i \cap \sim G_i) \cap \nabla(G_j \cap \sim G_j) \subseteq$$

$$\nabla(G_i \cap \sim G_i \cap G_j \cap \sim G_j) = \nabla(G_i^1 \cap \sim G_j^1),$$

luego (36) también es válida para $p = q = 1$.

(X) $\nabla(C_{ij} \cap C_{kl}) = \nabla C_{ij} \cap \nabla C_{kl}$.

Sean $C_{ij} = \bigcup_{p=1}^4 (\varepsilon_j^p \cap G_i^p)$ y $C_{kl} = \bigcup_{q=1}^4 (\varepsilon_l^q \cap G_k^q)$ entonces tenemos

$$C_{ij} \cap C_{kl} = \bigcup_{p,q=1}^4 (\varepsilon_{jl}^{pq} \cap G_i^p \cap G_k^q), \text{ donde } \varepsilon_{jl}^{pq} = \varepsilon_j^p \cap \varepsilon_l^q.$$

Como $\nabla \varepsilon_{jl}^{pq} = \varepsilon_{jl}^{pq}$ entonces usando (11), (14) y (IX) tenemos

$$\begin{aligned} \nabla(C_{ij} \cap C_{kl}) &= \bigcup_{p,q=1}^4 (\varepsilon_{jl}^{pq} \cap \nabla(G_i^p \cap G_k^q)) = \bigcup_{p,q=1}^4 (\varepsilon_{jl}^{pq} \cap \nabla G_i^p \cap \nabla G_k^q) = \\ &= \bigcup_{p=1}^4 (\varepsilon_j^p \cap \nabla G_i^p) \cap \bigcup_{q=1}^4 (\varepsilon_l^q \cap \nabla G_k^q) = \nabla C_{ij} \cap \nabla C_{kl}. \end{aligned}$$

(XI) Si $X \in \mathcal{L}$ entonces $\nabla X \in \mathcal{L}$.

Si $X \in \{\emptyset, T\}$ entonces por (9) y (10) tenemos que $\nabla X \in \{\emptyset, T\}$. Si $X \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset, T\}$ entonces $X = \bigcup_{r=1}^m \bigcap_{s=1}^{n_r} C_{i(r,s)j(r,s)}$ luego por (11) y (X)

$$\nabla X = \bigcup_{r=1}^m \bigcap_{s=1}^{n_r} \nabla C_{i(r,s)j(r,s)}$$

luego teniendo en cuenta (VIII) tenemos $\nabla X \in \mathcal{L}$.

(XII) El sistema $(\mathcal{L}, T, \sim, \nabla, \cap, \cup)$ es un álgebra de Lukasiewicz.

Por (VII) tenemos que el sistema $(\mathcal{L}, T, \sim, \cap, \cup)$ es un álgebra de De Morgan y por (XI) $\mathcal{L}$ es cerrado por la operación ∇ . Los axiomas L6 y L7 son una consecuencia de (12) y (14). Para probar L8 podemos razonar como en la demostración de (XI).

(II) y (XII) prueban el lema. ■

Observación 7.1.1 *Vamos a probar que $\mathcal{L} = SL(\mathcal{G})$.*

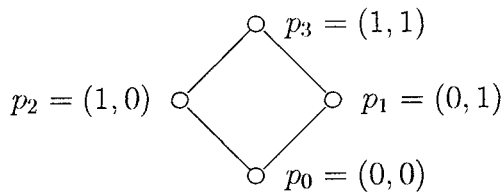
Si $\mathcal{L}'$ es un álgebra de Lukasiewicz de subconjuntos de T determinada por φ tal que (1) $G_i \in \mathcal{L}'$ para todo $i \in I$, entonces (2) $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$.

Por (1) resulta que $G_i^p \in \mathcal{L}'$, $1 \leq p \leq 4$ y por lo tanto (3) $C_{ij} \in \mathcal{L}'$. Luego si $X \in \mathcal{L}$ y $X \in \{\emptyset, T\}$ entonces $X \in \mathcal{L}'$. Si $X \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset, T\}$, tenemos que (4) $X = \bigcup_{r=1}^m \bigcap_{s=1}^{n_r} C_{i(r,s)j(r,s)}$.

De (3) y (4) resulta que $X \in \mathcal{L}'$, lo que prueba (2). Luego $\mathcal{L}$ es la menor subálgebra que contiene a $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i \in I}$ y por lo tanto $\mathcal{L} = SL(\mathcal{G})$.

7.2 Construcción geométrica de las álgebras de Lukasiewicz libres

Dada el conjunto ordenado $D = \{0, 1\}$, donde $0 < 1$, sea $B = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$, [16], luego el conjunto ordenado B tiene el siguiente diagrama



Sea $\psi : B \rightarrow B$ definida por la siguiente tabla:

x	p_0	p_1	p_2	p_3
$\psi(x)$	p_3	p_1	p_2	p_0

Observemos que si $b = (x, y) \in B$ entonces $\psi(b) = \psi((x, y)) = (1 - y, 1, -x)$.

Sea I un conjunto de cardinal c ($c \neq 0$) y consideremos el conjunto $E = \prod_{i \in I} B_i$, donde

$B_i = B$ para todo $i \in I$.

Sea E' el conjunto de todos los elementos $(x_i)_{i \in I} \in E$ tales que no tienen simultáneamente las coordenadas p_0 y p_3 .

Si $(x_i)_{i \in I} \in E'$ definamos una función $\varphi : E' \rightarrow E'$ del siguiente modo:

$$\varphi(x) = (\psi(x_i))_{i \in I},$$

donde ψ es la involución de B indicada precedentemente. Claramente $\varphi(x) \in E'$ y φ es una involución de E' . Luego por lo indicado en el párrafo anterior, las fórmulas (1) y (2) nos permiten definir las operaciones $\sim X$ y ∇X para todo subconjunto X de E' .

Para cada $i \in I$, sea G_i el conjunto de todos los $x = (x_j)_{j \in I} \in E'$ tales la i -ésima coordenada x_i es igual a p_2 ó p_3 , y $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i \in I}$.

Consideremos el siguiente elemento de E' : $e = (e_i)_{i \in I}$ donde $e_i = p_3$ para todo $i \in I$, luego $e \in G_i$ cualquiera que sea $i \in I$, por lo tanto todos los conjuntos G_i son no vacíos. Análogamente el elemento $f = (f_i)_{i \in I}$ donde $f_i = p_2$ para todo $i \in I$, de E' pertenece a todos los G_i , $i \in I$.

Si (1) $i \neq j$ sea $x = (x_h)_{h \in I} \in E'$ definido por (2) $x_j = p_1$ y (3) $x_k = p_3$ para todo $k \neq j$, luego de (1) y (3) $x_i = p_3$ y por lo tanto $x \in G_i$. De (2) $x \notin G_j$ por lo tanto $G_i \neq G_j$. Esto prueba que $\mathcal{G}$ e I tienen la misma cardinalidad.

Observación 7.2.1 *Teniendo en cuenta la definición de φ tenemos que: si $x \in G_i$, esto es $x_i \in \{p_2, p_3\}$ entonces $\psi(x_i) \in \{\psi(p_2), \psi(p_3)\} = \{p_2, p_0\}$, luego:*

$$\varphi(G_i) = \{x \in E' : x_i \in \{p_2, p_0\}\} \text{ y } \sim X = \mathbb{C}\varphi(G_i) = \{x \in E' : x_i \in \{p_1, p_3\}\}.$$

Sea $x \in X = \nabla(G_i \cap \sim G_i) \cap \nabla(G_j \cap \sim G_j) = G_i^2 \cap G_j^2$ luego por (17) tenemos que:

(4) $x \in (G_i \cap \sim G_i) \cup (\varphi(G_i) \cap \mathbb{C}G_i)$ y (5) $x \in (G_j \cap \sim G_j) \cup (\varphi(G_j) \cap \mathbb{C}G_j)$.

De (4) resulta que (6) $x \in G_i \cap \sim G_i$ ó (7) $x \in \varphi(G_i) \cap \mathbb{C}G_i$.

De (6) resulta que $x_i \in \{p_2, p_3\}$ y por la Observación 7.2.1 $x_i \in \{p_1, p_3\}$, luego $x_i = p_3$.

De (7) resulta por la Observación 7.2.1 que $x_i \in \{p_2, p_0\}$ y como $x \in \mathbb{C}G_i$ tenemos que $x_i \in \{p_0, p_1\}$, luego $x_i = p_0$.

Análogamente de (5) resulta que $x_j = p_3$ ó $x_j = p_0$.

Por lo tanto si $x \in X$ tenemos que (a) $x_i = p_3$ ó (b) $x_i = p_0$ y (c) $x_j = p_3$ ó (d) $x_j = p_0$.

Como $x \in E'$ entonces no se pueden verificar (a) y (d) y tampoco (b) y (c).

Luego si $x \in X$ y se verifican (a) y (c) entonces $x_i = x_j = p_3$, y si se verifican (b) y (d) entonces $x_i = x_j = p_0$.

Luego si $x \in X$ tenemos que $x_i = x_j = p_0$ ó $x_i = x_j = p_3$.

Como

$$Y = \nabla(G_i \cap \sim G_i \cap G_j \cap \sim G_j) = (G_i \cap \sim G_i \cap G_j \cap \sim G_j) \cup (\varphi(G_i) \cap \mathbb{C}G_i \cap \varphi(G_j) \cap \mathbb{C}G_j)$$

entonces $y \in Y$ equivale a

$$y \in G_i \cap \sim G_i \cap G_j \cap \sim G_j \text{ ó } y \in \varphi(G_i) \cap \mathbb{C}G_i \cap \varphi(G_j) \cap \mathbb{C}G_j$$

y teniendo en cuenta la Observación 7.2.1, esto equivale a:

$$y_i \in \{p_2, p_3\}, y_i \in \{p_1, p_3\}, y_j \in \{p_2, p_3\}, y_j \in \{p_1, p_3\}$$

ó

$$y_i \in \{p_2, p_0\}, y_i \in \{p_0, p_3\}, y_j \in \{p_2, p_0\}, y_j \in \{p_0, p_3\}$$

esto es $y_i = y_j = p_3$ ó $y_i = y_j = p_0$, luego

$$\nabla(G_i \cap \sim G_i) \cap \nabla(G_j \cap \sim G_j) \subseteq \nabla(G_i \cap \sim G_i \cap G_j \cap \sim G_j).$$

Entonces por el Lema 7.1.1 existe un álgebra de Łukasiewicz $\mathcal{L}$ de subconjuntos de E' , determinada por φ , que contiene todos los conjuntos G_i , $i \in I$.

Por la Observación 7.1.1, $\mathcal{L} = SL(\mathcal{G})$, donde $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i \in I}$.

Teorema 7.2.1 $\mathcal{L}$ es el álgebra de Łukasiewicz con un conjunto de generadores libres de cardinal c .

Dem. Para ello debemos demostrar que dada un álgebra de Łukasiewicz arbitraria A y una función $f : \mathcal{G} \rightarrow A$, f se puede extender a un homomorfismo $h : \mathcal{L} \rightarrow A$.

Si A tiene un sólo elemento, $A = \{0\}$, entonces $f(G_i) = 0$ para todo $i \in I$ y por lo tanto la función $h(x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{L}$ es un homomorfismo que extiende a f .

Si A tiene más de un elemento, sabemos (ver párrafo 6.6) que A es isomorfa a una subálgebra $\mathcal{A}$ de un álgebra de Łukasiewicz de subconjuntos de un cierto conjunto T , determinada por una involución α de T , donde $\approx X = \mathbb{C}_T \alpha(X)$ y $\nabla X = X \cup \alpha(X)$, para todo $X \subseteq T$.

Sea $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$ entonces para cada $i \in I$: $f(G_i) = H_i$, donde $H_i \in \mathcal{A}$ esto es $H_i \subseteq T$.

Dado $X \subseteq T$, sea $K_X : T \rightarrow D = \{0, 1\}$ la función definida por:

$$K_X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in X \\ 0 & \text{si } t \notin X \end{cases}$$

Observemos que (*) $K_{\mathbb{C}_T X}(t) = 1 - K_X(t)$.

Consideremos ahora la función $K_i : T \rightarrow B$ definida por:

$$K_i(t) = (K_{H_i}(t), K_{\approx H_i}(t)),$$

luego por la definición de $\approx$ y (*) tenemos que

$$(1) \quad K_i(t) = (K_{H_i}(t), K_{\mathbb{C}_T \alpha(H_i)}(t)) = (K_{H_i}(t), 1 - K_{\alpha(H_i)}(t)).$$

Probemos que (2) $K_{H_i}(\alpha(t)) = K_{\alpha(H_i)}(t)$.

En efecto $K_{H_i}(\alpha(t)) = 1 \iff \alpha(t) \in H_i \iff t = \alpha(\alpha(t)) \in \alpha(H_i) \iff K_{\alpha(H_i)}(t) = 1$.

De (2) resulta reemplazando t por $\alpha(t)$ que: (3) $K_{H_i}(t) = K_{\alpha(H_i)}(\alpha(t))$.

Como en [16] definamos $K : T \rightarrow E'$ por:

$$K(t) = [K_i(t)]_{i \in I}.$$

Observemos que:

$$[K_i(t)]_{i \in I} = K(t) \in G_i \iff K_i(t) \in \{(1, 0), (1, 1)\} \iff$$

$$(K_{H_i}(t), 1 - K_{\alpha(H_i)}(t)) = (1, 0) \quad \text{ó} \quad (K_{H_i}(t), 1 - K_{\alpha(H_i)}(t)) = (1, 1).$$

Luego:

$$K_{H_i}(t) = 1 \text{ y } 1 - K_{\alpha(H_i)}(t) = 0$$

ó

$$K_{H_i}(t) = 1, \text{ y } 1 - K_{\alpha(H_i)}(t) = 1$$

y por lo tanto

$$(C) \quad K(t) \in G_i \iff K_{H_i}(t) = 1.$$

Es claro que K es una función de T en E . Para probar que K es una función de T en E' debemos probar que para cada $t \in T$, el elemento $K(t) = (K_i(t))_{i \in I}$ no tiene simultáneamente las coordenadas p_0 y p_3 . Supongamos que existe $t \in T$ y dos elementos $i, j \in T$ tal que $K_i(t) = p_0$ y $K_j(t) = p_3$, entonces por la definición de las funciones K_i tenemos que:

$$t \notin H_i \text{ y } t \in \psi(H_i) \quad (I)$$

$$t \notin H_j \text{ y } t \notin \psi(H_i) \quad (II)$$

Pero las condiciones (I) y (II) se contradicen. En efecto de (II) resulta $t \in H_j$ y $t \in \sim H_j$, luego $t \in H_j \cap \sim H_j$ y como toda álgebra de Łukasiewicz es un álgebra de Kleene, tenemos que $H_j \cap \sim H_j \subseteq H_i \cup \sim H_i$ y por lo tanto $t \in H_i \cup \sim H_i$, lo que contradice (I).

Como K es una función de T en E' si definimos $h : 2^{E'} \rightarrow 2^{T'}$ por $h(X) = K^{-1}(X)$ para todo $X \subseteq E'$, entonces cualesquiera que sean $X, Y \subseteq E'$ se verifican:

$$h(X \cap Y) = h(X) \cap h(Y), \quad (III)$$

$$h(X \cup Y) = h(X) \cup h(Y), \quad (IV)$$

$$h(E') = T. \quad (V)$$

$$h(\mathbb{C}_{E'} X) = K^{-1}(\mathbb{C}_{E'} X) = \mathbb{C}_T K^{-1}(X) = \mathbb{C}_T h(X) \quad (VI)$$

Luego h es un homomorfismo de De Morgan de $2^{E'}$ en $2^{T'}$ si y solo si

$$h(\sim X) = \approx h(X), \text{ para todo } X \subseteq E'.$$

Esto es, si y solo si, para todo $X \subseteq E'$

$$h(\mathbb{C}_{E'} \varphi(X)) = K^{-1}(\mathbb{C}_{E'} \varphi(X)) = \mathbb{C}_T \alpha(K^{-1}(X)) = \mathbb{C}_T \alpha(h(X)),$$

luego por (VI) esto equivale a probar

$$\mathbb{C}_T K^{-1}(\varphi(X)) = \mathbb{C}_T \alpha(K^{-1}(X)), \text{ para todo } X \subseteq E'$$

esto es

$$(4) \quad K^{-1}(\varphi(X)) = \alpha(K^{-1}(X)), \text{ para todo } X \subseteq E'.$$

o sea

$$h(\varphi(X)) = \alpha(h(X)), \text{ para todo } X \subseteq E' \quad (VII)$$

Probemos que se verifica (4). En efecto $t \in K^{-1}(\varphi(X)) \iff K(t) \in \varphi(X) \iff$
 (5) $\varphi(K(t)) \in \varphi(\varphi(X)) = X$. Pero como $\varphi(K(t)) = \varphi([K_i(t)]) = [\psi(K_i(t))]$ entonces (5)

equivale a (6) $[\psi(K_i(t))] \in X$.

Pero como por (1) $K_i(t) = (K_{H_i}(t), 1 - K_{\alpha(H_i)}(t))$, entonces

$$\psi(K_i(t)) = (1 - (1 - K_{\alpha(H_i)}(t)), 1 - K_{H_i}(t)) = (K_{\alpha(H_i)}(t), 1 - K_{H_i}(t))$$

y por lo tanto utilizando (2), (3) y (1) tenemos que

$$\psi(K_i(t)) = (K_{H_i}(\alpha(t)), 1 - K_{\alpha(H_i)}(\alpha(t))) = K_i(\alpha(t)).$$

Luego (5) equivale a $K(\alpha(t)) = (K_i(\alpha(t))) \in X$ lo que equivale a $\alpha(t) \in K^{-1}(X)$ esto es $t \in \alpha(K^{-1}(X))$.

Acabamos así de probar que (AI) h es un homomorfismo de De Morgan de $2^{E'}$ en 2^T .
De (VI) y (VII) se deduce

$$h(\sim X) = h(\mathbb{C}_{E'}\varphi(X)) = \mathbb{C}_Th(\varphi(X)) = \mathbb{C}_T\alpha(h(X)) = \approx h(X). \quad (\text{VIII})$$

Además de la definición de ∇ , (IV), (VII) y la definición de ∇ tenemos que:

$$h(\nabla X) = h(X \cup \varphi(X)) = h(X) \cup h(\varphi(X)) = h(X) \cup \alpha(h(X)) = \nabla h(X) \quad (\text{IX})$$

De (III), (IV), (V), (VIII) y (IX) resulta que:

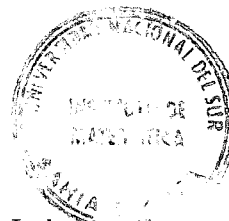
(AII) h es un homomorfismo de $\mathcal{L}$ en $\mathcal{A}$.

Probemos ahora que (AIII) h prolonga a f , esto es que

$$K^{-1}(G_i) = h(G_i) = f(G_i) = H_i, \text{ para todo } G_i \in \mathcal{G}.$$

En efecto $t \in H_i \iff K_{H_i} = 1$ teniendo en cuenta (C) esto equivale a $K(t) \in G_i$, lo que equivale a $t \in K^{-1}(G_i) = h(G_i)$.

Finalmente probemos que (AIV) $h(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{A}$. Por (AII), $h(\mathcal{L})$ es una subálgebra del álgebra 2^T y como $SL(\mathcal{G}) = \mathcal{L}$, entonces $h(\mathcal{G})$ genera a $h(\mathcal{L})$, esto es $SL(h(\mathcal{G})) = h(\mathcal{L})$ y como $h(G_i) = f(G_i) = H_i \in \mathcal{A}$, para todo $i \in I$ entonces $h(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{A}$ luego $h(\mathcal{L}) = SL(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{A}$, lo que termina la demostración. ■



Referencias

- [1] Abad M., *Estructuras cíclica y monádica de un álgebra de Łukasiewicz n -valente*, Notas de Lógica Matemática 36 (1964). Instituto de Matemática. Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca.
- [2] Abad M. and Monteiro L., *Number of epimorphisms between symmetric Boolean algebras*, Rep. Math. Logic 10 (1978), 3-7.
- [3] Abad M., *Cyclic Post algebras of order N* , An. Acad. Brasil. Ciêcias 53 (2) (1981), 243-246.
- [4] Abad M. and Monteiro L., *On three-valued Moisil algebras*, Logique et Analyse 108 (1984), 407-414.
- [5] Abad M. and Figallo A., *Characterization of three-valued Łukasiewicz algebras*, Reports on Mathematical Logic 18 (1984), 47-59.
- [6] Abad M., *Three-valued Łukasiewicz algebras with an additional operation*, Portugaliae Math. 32 (1985), 107-117.
- [7] Abad M. and Monteiro L., *Monadic symmetric Boolean algebras*, Notas de Lógica Matemática 37 INMABB-CONICET-UNS (1989), 1-30.
- [8] Abad M. and Figallo A., *On Łukasiewicz homomorphisms*, Univ. Nac. de San Juan, San Juan, Argentina (1992).
- [9] Abad M., Monteiro L. Savini S. and Sewald J. *Subalgebras of finite three-valued Łukasiewicz algebras*, Proceedings of the IX Latin American Symposium on Mathematical Logic (part 1), Notas de Lógica Matemática 38 (1993). Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca.
- [10] Abad M. Cignoli R. and Díaz Varela J.P., *$\mathcal{K}$ -Post algebras of order n* , Math. Japonica 48, No. 2 (1998), 267-273.
- [11] Abad M., Díaz Varela J.P., Rueda L. A. and Suardíaz A. M., *The lattice of subvarieties of Monadic Łukasiewicz algebras*, presentado para su publicación.
- [12] Birkhoff G., *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Coll. Pub 25, 3rd. ed, Providence, 1967,
- [13] Bialynicki-Birula A. and Rasiowa H., *Remarks on quasi-Boolean algebras*, Bull Acad. Pol. Sc., casse III, 5 (1957), 615-619.
- [14] Bialynicki-Birula A. and Rasiowa H., *On the representation of quasi-boolean algebras*, Bull Acad. Pol. Sc., casse III, 5 (1957), 259-261.
- [15] Boicescu V., Filipoiu A., Georgescu G.. and Rudeanu S., *Łukasiewicz-Moisil algebras*, Annals of discrete mathematics 49, North-Holland, 1991.
- [16] Chateaubriand O. et Monteiro A., *Les algèbres de De Morgan libres*, Notas de Lógica Matemática 26 (1969). Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca.

- [17] Cignoli R., *Boolean elements in Lukasiewicz algebras I*, Proc. Japan. Academy, 41 (1965), 670-675. Notas de Lógica Matemática 23 (1974). Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca.
- [18] Cignoli R. and Monteiro A., *Boolean elements in Lukasiewicz algebras II*, Proc. Japan. Academy, 41 (1965), 676-680. Notas de Lógica Matemática 24 (1974). Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca.
- [19] Cignoli R., *Algebras de Moisil de orden n* , Tesis de Doctorado presentada a la Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, octubre 1969. (ver [22], [23]).
- [20] Cignoli R., *On Varlet's characterization of three-valued algebras*, Notices Amer. Math. Soc., 16 (1969), 661-662.
- [21] Cignoli R., *Representation of Lukasiewicz algebras and Post algebras by continuous functions*, Colloq. Math., 24 (1972), 127-138.
- [22] Cignoli R., *Moisil algebras*, Notas de Lógica Matemática 27 (1974). Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca.
- [23] Cignoli R., *Topological representation of Lukasiewicz algebras and Post algebras*, Notas de Lógica Matemática 33 (1974). Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca.
- [24] Cignoli R., *Injective de Morgan and Kleene algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., 49 (1975), 269-278.
- [25] Cignoli R., *Coproducts in the Categories of Kleene and Lukasiewicz algebras*, Studia Logica 38 (1979), 237-245.
- [26] Cignoli R., *Some algebraic aspects of many-valued logics*. In: A.I. Arruda N.C. da Costa and A.M. Sette (editors), Proc. Third Brazilian Conference on Math. Logic. Soc. Brasileira de Lógica, São Paulo (1980), 49-68.
- [27] Cignoli R., *Proper n -valued Lukasiewicz algebras as S -algebras of Lukasiewicz n -valued propositional calculi*, Studia Logica, (1982), 3-16.
- [28] Cignoli R., *An algebraic approach to elementary theories based on n -valued Lukasiewicz logics*, Z. Math. Logik u. Grundl. Math. 30 (1984), 87-96.
- [29] Cignoli R., D'Ottaviano I.M.L. e Mundici D., *Algebras das Lógicas de Lukasiewicz*, Campinas, UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, (1994), Coleção CLE; vol 12.
Una versión en inglés de este libro fue publicada bajo el título *Algebraic foundations of many-valued reasoning*, Kluwer, Dordrecht, Boston, London (2000).
- [30] Díaz D. y Figallo A., *Dos conjuntos de axiomas para las álgebras de Lukasiewicz trivalentes*, Cuadernos del Instituto de Matemática Serie A, Nro. 3, Univ. Nac. de San Juan, San Juan, Argentina (1986).
- [31] Figallo A., *I_{n+1} -álgebras con operaciones adicionales*, Tesis Doctoral presentada a la Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1989.

- [32] Figallo A. and Tolosa J., *Algebras de Łukasiewicz trivalentes*, Univ. Nac. de San Juan, San Juan, Argentina (1984).
- [33] Figallo A. and Ziliani A., *On the propositional system $\mathcal{A}$ of Sobocinski*, Portugaliae Math. 40, 1 (1992), 11-22.
- [34] Halmos P. R., *Algebraic Logic I, Monadic Boolean algebras*, Compositio Mathematica, 12 (1955), 217-249.
- [35] Halmos P. R., *Algebraic Logic*, Chelsea Pub. Co. New York. (1962).
- [36] Iturrioz L., *Axiomas para el cálculo proposicional trivalente de Łukasiewicz*, Revista de la UMA. 22 (1965), 150.
- [37] Iturrioz L., *Sur une classe particulière d'algèbres de Moisil*, RC. R. Ac. Sc. Paris, Série A, 267 (1968), 585-588.
- [38] Iturrioz L., *Algebras de Heyting trivalentes involutivas*, Tesis de Doctorado presentada a la Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, diciembre 1971. (ver [39]).
- [39] Iturrioz L., *Algèbres de Heyting trivalentes involutives*, Notas de Lógica Matemática 31 (1974). Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca.
- [40] Iturrioz L., *Les algèbres de Heyting-Brouwer et de Łukasiewicz trivalentes*, Notre Dame J. of Formal Logic, 17 (1976), 119-126.
- [41] Iturrioz L., *An axiom system for three-valued Łukasiewicz propositional calculus*, Notre Dame J. of Formal Logic, 28 (1977), 618-620.
- [42] Loureiro, M.I., *Algebras modais tetraivalentes*, Tesis de Doctorado, Faculdade de Ciências de Lisboa. (1983)
- [43] Moisil Gr. C., *Recherches sur les logiques non-chrysipiennes*, Ann. Sc. de l'Université de Yassy, 26 (1940), 431- 466.
- [44] Moisil Gr. C., *Sur les anneaux de caractéristiques 2 ou 3 et leurs applications*, Bulletin de l'École Polytechnique de Bucarets 12 (1941), 66-90.
- [45] Moisil Gr. C., *Notes sur les logiques non-chrysipiennes*, Ann. Sc. de l'Université de Yassy, 27 (1941), 86-98.
- [46] Moisil Gr. C., *Logique Modale*, Disquisitiones Mathematicae et Physica, Buc. 2 (1942), 3-98.
- [47] Moisil Gr. C., *Sur les idéaux des algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Analele Universitatii C.I. Parohn. Seria Acta Logica 3 (1960), 83-95.
- [48] Moisil Gr. C., *Les logiques non-chrysipiennes et leurs applications*, Acta Philosophica Fennica 16 (1953), 137-152.
- [49] Moisil Gr. C., *Essais sur les logiques non-chrysipiennes*, 820 págs, Bucarest (1972).

- [50] Monteiro A., Notas del curso *Algebras de Hilbert y de Tarski*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1960.
- [51] Monteiro A., Notas del curso *N-lattices*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1963.
- [52] Monteiro A., Notas del curso *Algebras de Lukasiewicz trivalentes*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1963.
- [53] Monteiro A., Notas del Seminario *Algebras de Lukasiewicz trivalentes*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1963.
- [54] Monteiro A., *Sur la définition des algèbres de Lukasiewicz trivalentes*, Notas de Lógica Matemática 21 (1964). Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca. Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P. Roumaine, nouvelle série 7 (55), (1963), 3-12.
- [55] Monteiro A., *Relations between Lukasiewicz three-valued algebras and Monadic Boolean algebras*, International Congress for Logic Methodology and Philosophy of Science. Program and Abstracts. The Hebrew University, Jerusalem (1964), 16-17.
- [56] Monteiro A., *Généralisation d'un théorème de R. Sikorski sur les algèbres de Boole*, Bull. Sc. Math. 2^e série, 89 (1965), 65-74.
- [57] Monteiro A. y Cignoli R., *Construcción geométrica de las álgebras de Lukasiewicz trivalentes libres*, Revista de la U.M.A. 22 (1965), 152-153.
- [58] Monteiro A., Notas del curso *Algebras de De Morgan*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1966.
- [59] Monteiro A., Notas del Seminario *Algebras de Lukasiewicz trivalentes*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1966.
- [60] Monteiro A., *Construction des algèbres de Lukasiewicz trivalentes dans les algèbres de Boole monadiques I*, Notas de Lógica Matemática 11 (1974), Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca. Math. Japonicae, 12 (1967), 1-23.
- [61] Monteiro A., *Sur les algèbres de Heyting symétriques*, Portugaliae Mathematica 39 (1980), 1-237.
- [62] Monteiro A., *Algebras de Heyting*, Informes Técnicos Internos 51, INMABB-CONICET-UNS (1995).
- [63] Monteiro A., *Unpublished Papers, I*, Notas de Lógica Matemática 40 (1996) INMABB-CONICET-UNS.
- [64] Monteiro A., *Algebras de Lukasiewicz trivalentes con un número finito de generadores libres, Algebras de Moisil trivalentes con un número finito de generadores libres* Informes Técnicos Internos 61, INMABB-CONICET-UNS (1998).

- [65] Monteiro A. y L. Monteiro, *Algebras de Boole Monádicas*, Informes Técnicos Internos 69, INMABB-CONICET-UNS (1999).
- [66] Monteiro A. y L. Monteiro, *Algebras de De Morgan*, Informes Técnicos Internos 72, INMABB-CONICET-UNS (2000), 77 páginas.
- [67] Monteiro L., *Axiomes indépendants pour les algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Notas de Lógica Matemática 22 (1964). Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca. Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P. Roumaine, nouvelle série 7 (55), (1963), 199-202.
- [68] Monteiro L. y González Cópola L., *Sur une construction des algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Port. Math. 25, Fasc.5 (1964), 157-167. Notas de Lógica Matemática 17 (1964). Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca.
- [69] Monteiro L., *Sur les algèbres de Heyting trivalentes*, Notas de Lógica Matemática 19 (1964). Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca.
- [70] Monteiro L., *Algèbre du calcul propositionnel trivalent de Heyting*, Fundamenta Mathematica LXXIV, (1970), 99-109.
- [71] Monteiro L., *Sur les algèbres de Łukasiewicz injectives*, Notas de Lógica Matemática 25 (1964). Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca. Proc. Japan Acad., 41, 7 (1965), 578-581.
- [72] Monteiro L., *Algebras de Łukasiewicz monádicas*, Revista de la UMA, 23 (1968), 200.
- [73] Monteiro L., *Sur le principe de détermination de Moisil dans les algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P. Roumaine, nouvelle série 13 (61), (1969), 447-448.
- [74] Monteiro L., *Les algèbres de Heyting et de Łukasiewicz trivalentes*, Notre Dame Journal of Formal Logic, XI, 4 (1970), 453-466.
- [75] Monteiro L., *Extension d'homomorphismes dans les algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, International Logic Review, 2 (1970), 193-200.
- [76] Monteiro L., *Algebras de Łukasiewicz trivalentes monádicas*, Tesis de Doctorado presentada a la Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, julio 1971. (ver [77]).
- [77] Monteiro L., *Algebras de Łukasiewicz trivalentes monádicas*, Notas de Lógica Matemática 32 (1974). Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca.
- [78] Monteiro L., *Algèbres de Post et de Moisil trivalentes monadiques*, Logique et Analyse, 79 (1977), 329-337.
- [79] Monteiro L., *Algèbres de Boole monadiques libres*, Algebra Universalis, 8 (1978), 374-380.
- [80] Monteiro L., *Sur la construction $\mathcal{L}$ des algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Revue Roumaine de Math. Pures et Appliquées, 23 (1978), 88-83.

- [81] Monteiro L., *Algebras de Boole*, Informes Técnicos Internos 66, INMABB-CONICET-UNS (1998), versión corregida (2000-2001-2002), 201 páginas.
- [82] Monteiro L., *Número de epimorfismos entre álgebras de Lukasiewicz finitas*, Informes Técnicos Internos 82, INMABB-CONICET-UNS (2003), 14 páginas.
- [83] Monteiro L., Figallo A. and Ziliani A. *Free three-valued Lukasiewicz, Post and Moisil algebras over a poset*, Proc. of the Twentieth international Symposium on multiple-valued logics, 1990, Charlotte, North Carolina, USA, pp. 433-435.
- [84] Monteiro L., Savini S. and Sewald J. *Construction of monadic three-valued Lukasiewicz algebras*, Studia Logica L, nr. 3/4 (1991), 475-483.
- [85] Monteiro L., Abad M., Savini S. and Sewald J. *Finite free generating sets*, Discrete Mathematics, 189 (1998), 177-189.
- [86] Monteiro L. and Kremer A., *Boolean Matrices*, Bull. Math. Soc. Sc. Math. de Roumanie, 44 (92), 2 (2001).
- [87] Rasiowa H., *N-lattices and constructive logic with strong negation*, Fundamenta Mathematicae, 46 (1958), 61-80.
- [88] Rasiowa H. and Sikorski R., *The mathematics of Metamathematics*, Second edition, 519 pages, Warszawa, (1968).
- [89] Sikorski R., *A theorem on extensions of homomorphisms*, Annales de la Société Polonaise de Mathématiques, 21 (1948), 332-335.
- [90] Sikorski R., *On the inducing of homomorphisms by mappings*, Fund. Math. 36 (1949), 7-22.
- [91] Sikorski R., *Boolean Algebras*, Springer-Verlag (1964).
- [92] Sholander, M., *Postulates for distributive lattices*, Canadian Journal of Mathematics, 3 (1951), 28-30.
- [93] Ziliani A., *Algebras de De Morgan modales n-valuadas monádicas*, Tesis Doctoral, Universidad Nacional del Sur (2001).