INFORME TECNICO INTERNO

Nº. 81

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina

INFORME TÉCNICO INTERNO

N° 81

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 2003 -

INFORME TÉCNICO INTERNO N° 81

PROBLEMAS DE CONTORNO II

A. Benedek y R. Panzone

Universidad Nacional del Sur

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 2003

PROBLEMAS DE CONTORNO II

por A. Benedek y R. Panzone

PROLOGO.

Estas notas constituyen una continuación, pero en varias variables, del texto de los autores "PROBLEMAS DE CONTORNO, I. *Lecciones sobre métodos y resultados básicos de la teoría de Sturm-Liouville y algunas de sus generalizaciones*, Notas de Algebra y Análisis nº 13, INMABB(UNS-CONICET), (1985).

En estas lecciones se estudian problemas de contorno de ecuaciones diferenciales en varias variables. En su mayoría estos problemas están planteados para ecuaciones de segundo orden en regiones planas de Jordan. El presente volumen está dividido en dos partes y cada una de ellas en capítulos y apéndices.

R.P.
Bahía Blanca, Febrero 2003

CONTENIDOS
PROBLEMAS DE CONTORNO II
PARTE II

CAPITULOS

APENDICES

CAPITULO 10
OPERADORES FORMALMENTE HIPOELIPTICOS

10A. Sean P y Q polinomios en n variables de grado $\leq m$, $\mu=(\mu_1,..,\mu_n)$.

DEFINICION 1. Diremos que $P \prec Q$ si existe una constante C tal que, para todo $\xi \in R^n$, $|P(\xi)| \leq C\widetilde{Q}(\xi)$. Recordemos que $\widetilde{Q}(\xi) := \left(\sum_\mu \left|Q^{(\mu)}(\xi)\right|^2\right)^{1/2}$ donde $Q^{(\mu)}(\xi)$ designa a $\dfrac{\partial^{|\mu|}}{\partial\xi_1^{\mu_1}...\partial\xi_n^{\mu_n}}Q(\xi) = i^{|\mu|}D^\mu Q(\xi)$.♦

PROPOSICION 1. *i*) existe $C = C(n,m)$ tal que $\widetilde{P}(\xi+\eta) \leq (1+C|\eta|)^m \widetilde{P}(\xi)$,

ii) $P \prec Q$ equivale a $\widetilde{P}(\xi) := \left(\sum \left|P^{(\mu)}(\xi)\right|^2\right)^{1/2} \leq C.\widetilde{Q}(\xi)$ para todo $\xi \in R^n$.♦

DEMOSTRACION. Por la *fórmula de Taylor*:

(10.1) $$P(\xi+\eta) = \sum_\mu c_\mu \eta^\mu P^{(\mu)}(\xi), \quad c_\mu = 1/\mu!$$

Luego, $P(\xi+\eta) = \sum_\mu \dfrac{(i\eta)^\mu}{\mu!}D^\mu P(\xi)$. También,

(10.2) $$P^{(\alpha)}(\xi+\eta) = \sum_\mu c_\mu \eta^\mu P^{(\mu+\alpha)}(\xi) \qquad \text{para } |\alpha| \leq m.$$

Entonces, $(\widetilde{P}(\xi+\eta))^2 \leq \sum_\alpha \left[\left|P^{(\alpha)}(\xi)\right| + \sum_{\mu\neq 0}\left|c_\mu\eta^\mu\right|\left|P^{(\mu+\alpha)}(\xi)\right|\right]^2 = \sum_\alpha \left(\left|P^{(\alpha)}(\xi)\right|^2 + ...\right)$.

Sigue que

(10.3) $$(\widetilde{P}(\xi+\eta))^2 \leq \left(1 + \sum_{0\neq|\nu|\leq 2m}\left|c'_\nu\eta^\nu\right|\right)(\widetilde{P}(\xi))^2 \leq (1+C|\eta|)^{2m}(\widetilde{P}(\xi))^2,$$

que prueba *i*).

Sea $A = \{\eta_{(\alpha)} \in R^n : |\alpha| \leq m\}$ una familia de vectores de la bola abierta unitaria indexados con los multiíndices $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ tal que sea distinto de cero el determinante $\tau(\eta)$ de $\left\lfloor\eta^\mu_{(\alpha)}\right\rfloor \equiv \left\lfloor(\eta_{(\alpha)})_1^{\mu_1}.(\eta_{(\alpha)})_2^{\mu_2}.....(\eta_{(\alpha)})_n^{\mu_n}\right\rfloor$. Una tal familia existe pues el polinomio $\tau(\eta)$ no puede anularse en un entorno de cero sin ser idénticamente nulo.

Entonces (cf. (10.1),

(10.4) $$\left\{P(\xi+\eta_{(\alpha)}) = \sum_\mu c_\mu \eta^\mu_{(\alpha)} P^{(\mu)}(\xi), \qquad \eta_{(\alpha)} \in A\right.$$

es un sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas $P^{(\mu)}(\xi)$, de determinante no nulo y por ello existen coeficientes $R_{(\alpha,\mu)}$ que sólo dependen de A, verificando

(10.5) $$P^{(\mu)}(\xi) := \sum_{|\alpha|\leq m} R_{(\alpha,\mu)} P(\xi+\eta_{(\alpha)}).$$

De (10.5) sigue que existe una constante $C_0 = C_0(A,m,n)$ tal que

(10.6) $$\widetilde{P}(\xi) \leq C_0 \sup_{\alpha\in A}\left|P(\xi+\eta_{(\alpha)})\right|.$$

Si $P \prec Q$, obtenemos de (10.6) e *i*),

$\widetilde{P}(\xi) \leq C_0 \sup_{\alpha\in A}\left|P(\xi+\eta_{(\alpha)})\right| \leq C_1 \sup_{\alpha\in A}\left|\widetilde{Q}(\xi+\eta_{(\alpha)})\right| \leq C.\widetilde{Q}(\xi)$, o sea, la proposición *ii*), QED.

Una consecuencia inmediata de la prop. 1 es que la relación $\prec$ es transitiva:

$$Q \prec P, P \prec R \Rightarrow Q \prec R.$$

Se prueba en [Sc], pg. 46, que si Q es *más débil* que P, $Q \prec P$, entonces, para todo k entero no negativo,

(10.7) $$(1+|\xi|^2)^k Q(\xi) \prec (1+|\xi|^2)^k P(\xi).$$

Más aún, si $Q_1 \prec P_1$, $Q_2 \prec P_2$ entonces $Q_1 Q_2 \prec P_1 P_2$, (cf. [H], pg. 71).

Si un operador a coeficientes constantes lo notamos con $P(D)$, decir que es *hipoelíptico* equivale a decir que para todo multiíndice $\mu \neq 0$ y ξ real vale, (cf. Cap. 7, 7F),

$$\frac{P^{(\mu)}(\xi)}{P(\xi)} \xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0.$$

También, $P(D)$ es *hipoelíptico* si y sólo si existe $a>0$ tal que

(10.7') $$\sum_{|\alpha|>0} \left|\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)}\right| \leq M|\xi|^{-a} \quad \text{para } \xi \in R^n,\ |\xi| \geq l,\ M=M(P).$$

Sea $\Omega \subset R^n$ un dominio. Supongamos $a_\mu(x) \in C^\infty(\Omega)$ para todo multiíndice $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ tal que $|\mu| := \mu_1 + \ldots + \mu_n \leq m$.

DEFINICION 2. El operador diferencial

(10.8) $$P(x,D) = \sum_{|\mu|\leq m} a_\mu(x) D^\mu$$

se dirá *formalmente hipoelíptico* en Ω si

i) es hipoelíptico el operador a coeficientes constantes $P(y,D)$, cualquiera sea $y \in \Omega$, cuyos coeficientes son las funciones a_μ evaluadas en el punto y,

ii) para todo par $y,z \in \Omega$: $P(y,\xi) \prec P(z,\xi)$, es decir, existe una constante C tal que

$$|P(y,\xi)| \leq C \sum_\mu \left| \frac{\partial^{|\mu|}}{\partial\xi_1^{\mu_1}\ldots\partial\xi_n^{\mu_n}} P(z,\xi) \right| \quad \text{para todo } \xi \in R^2.$$

O sea, $|P(y,\xi)| \leq C \sum_\mu |P^{(\mu)}(z,\xi)|$.♦

NB. Recurriendo a los Teoremas (4.1.3) y (4.1.6) de [H] podemos deducir que: si a verifica (10.7') para un operador P hipoelíptico y $P \prec Q, Q \prec P$ entonces Q es hipoelíptico y con la misma a vale (10.7') para Q.

La función $u \in L^2(\Omega)$ se dirá una *solución débil* de $P(x,D)u = f$ si para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ se tiene $(f,\phi) = (u, P^*(x,D)(\phi)) := (u, \sum_{|\mu|\leq m} D^\mu(\overline{a}_\mu \phi))$.

Vale el siguiente *teorema fundamental*:

TEOREMA 1. Si $P(x,D)$ es formalmente hipoelíptico en Ω y $f \in C^\infty(\Omega)$ entonces toda solución débil de $P(x,D)u = f$ está en $C^\infty(\Omega)$ y es, por consiguiente, una solución.♦

Del teorema 1 se deduce el siguiente Teorema 2. Pero antes recordemos *la fórmula de Leibniz:*

(10.9) $$P(D)(au) = \sum_\mu (D^\mu a)(P^{(\mu)}(D)u)/\mu!\ .$$

TEOREMA 2. Sean $P(x,D)$ formalmente hipoelíptico en Ω y $f \in C^\infty(\Omega)$. Si $u \in D'(\Omega)$ satisface $P(x,D)u = f$ en el sentido de las distribuciones entonces u es una solución débil. Por tanto pertenece a $C^\infty(\Omega)$ y es una solución ordinaria.•

DEMOSTRACION. Para todo $k \in N$, $P(x,D)(1-\Delta)^k$ es formalmente hipoelíptico, (cf. (10.7)). Dado el dominio acotado $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$, sea $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\phi = 1$ en Ω'. Vale entonces en Ω': $P(x,D)(\phi u) = f$. Como $\phi u \in S'(R^n)$ puede escribirse como: $\phi u = (1-\Delta)^k v$ para cierto k y cierta función v continua de crecimiento lento (cf. [S], vol. II. p.104). Luego, $(P(x,D)((1-\Delta)^k v) = f$ en Ω', $v \in L^2(\Omega')$, implican, en vista del teorema 1, $v \in C^\infty(\Omega')$ y por tanto $u \in C^\infty(\Omega')$, QED.

10B. Si $P(D)$ es un operador a coeficientes constantes y S es un número real, definimos: $|\varphi|_{P,S} := |P(D)\varphi|_S$ para $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ y donde $|\varphi|_S := \left(\int |\hat{\varphi}(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2S} d\xi\right)^{1/2}$. También, $H_P^S(\Omega) :=$ la completación de $C_0^\infty(\Omega)$ en la norma $|\,.\,|_{P,S}$. $H_P^S(\Omega)$ es un espacio de Hilbert: $(w,v)_{P,S} = \int \hat{w}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)} |P(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2S} d\xi$. Lo denotaremos indistintamente con $H_{P,S}(\Omega)$.

Vale el siguiente resultado:

TEOREMA 3. Si Ω es un dominio acotado entonces $Q \prec P$ implica

$$|Q(D)\phi|_S \le C(\Omega,Q,P)|P(D)\phi|_S \text{ para toda } \phi \in C_0^\infty(\Omega).\bullet$$

Este teorema en el caso $S=0$ es el teorema 2.3.5 de [H]. El caso $S=k$, $k=1,2,\ldots$, es una consecuencia directa de este resultado ya que $|\phi|_S \approx |(1-\Delta)^S \phi|_0$. No daremos la demostración general aquí.

En particular, como $1 \prec P$ se tiene $|\phi|_S \le C|P(D)\phi|_S$. En consecuencia: $H_P^S(\Omega) \subset H^S(\Omega)$ y la inclusión es continua.

Los elementos de $H^S(\Omega)$ son fácilmente identificables como distribuciones. Más aún, $H^S(\Omega) \subset$ espacio de distribuciones temperadas y la inclusión es continua, (cf. [H], T. 2.2.1). Luego, esto mismo le ocurre a $H_P^S(\Omega)$.

También vale (cf. [Sc], p. 25):

$$\bigcap_{S=-\infty}^{\infty} H_P^S(\Omega) \subset \bigcap_{-\infty}^{\infty} H^S(\Omega) \subset C^\infty(\Omega).$$

De $|P(D)w|_{-m}^2 = \int |P(\xi)\hat{w}(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{-2m} d\xi \le C\int |\hat{w}(\xi)|^2 d\xi = C\int |w(x)|^2 dx$, resulta que: si $w = \phi u$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $u \in L^2(\Omega)$, entonces $w \in H_P^{-m}$.

Denotaremos con $(J_\varepsilon u)(x)$ a la convolución de u con una contracción de una función $j(x) \in C_0^\infty(|x|<1)$ tal que $0 \le j(x)$, $\int j(x)dx = 1$, $j(x) = j(-x)$:

(10.10) $$(J_\varepsilon u)(x) = \int u(y)\, j\!\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n} dy = u * j_\varepsilon,$$

donde $j_\varepsilon(t) = j(t/\varepsilon)\,\varepsilon^{-n}$. Vale el siguiente resultado clave que usaremos en la demostración del T. 1, (cf. (10.7')).

TEOREMA 4. Dados $y \in \Omega$, s real, $P(x,D)$ formalmente hipoelíptico de orden m, sean $P(D) = P(y, D_x)$ y a como en (10.7'). Entonces existe N_y, entorno de y en Ω, tal que si

i) u es solución débil de $P(x,D)u = f$, $f \in C^\infty(\Omega)$,

ii) para toda $\phi \in C_0^\infty(N_y)$, $\phi u \in H_{P,s-a/m}$,

entonces para cada una de esas ϕ se verifica:

$$\left|J_\varepsilon(\phi u)\right|_{P,s} \leq C(N_y, s, P)\left(\left|\phi f\right|_s + \sum_{|\mu| \leq m} \left|u(D^\mu \phi)\right|_{P,s-a/m}\right). \blacklozenge$$

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1. Sea $b = a/m$. Si para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\phi\, u \in H_P^{s-b}(\Omega)$ (vimos que siempre existe una s con tal propiedad) entonces, por el Teorema 4, $\left\{\left|J_\varepsilon(\phi u)\right|_{P,s}\right\}$ es una familia acotada por una constante independiente de ε. Del T. de Banach- Saks sigue entonces que

$$\frac{J_{\varepsilon_1}(\phi u) + \ldots + J_{\varepsilon_k}(\phi u)}{k} \longrightarrow v \text{ en } H_P^s(\Omega).$$

Como $J_\varepsilon(\phi u) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \phi u$ en L^2, $v = \phi u$. Luego, $v = \phi u$ está en $H_P^s(\Omega)$. Iterando el argumento llegamos finalmente a que $\phi u \in \bigcap_{s=0}^{\infty} H_P^s(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$. Por tanto u es infinitamente diferenciable en un entorno de y, QED.

10C. A continuación probamos algunos lemas necesarios para la demostración del T. 4.

LEMA 1. Sean $\phi \in C_0^\infty$, $v \in H^s(R^n)$. Entonces

(10.11) $\qquad \left|\phi v\right|_s \leq \left\|\phi\right\|_\infty \left|v\right|_s + C(\phi, s)\left|v\right|_{s-1}.$

DEMOSTRACION. Basta verlo para $v \in S$.

$$\left|\phi\, v\right|_s = \left[\int d\xi \left|\frac{1}{(2\pi)^n}\int \hat{\phi}(\eta)\hat{v}(\xi - \eta)d\eta\right|^2 (1 + |\xi|)^{2s}\right]^{1/2} \leq$$

$$\leq \left[\int d\xi \left|\frac{1}{(2\pi)^n}\int \hat{\phi}(\eta)\hat{v}(\xi - \eta)(1 + |\xi - \eta|)^s d\eta\right|^2\right]^{1/2} +$$

$$+ \left[\int d\xi \left|\frac{1}{(2\pi)^n}\int \hat{\phi}(\eta)\hat{v}(\xi - \eta)\left[-(1 + |\eta - \xi|)^s + (1 + |\xi|)^s\right]d\eta\right|^2\right]^{1/2} = I_1 + I_2.$$

Sea $\hat{w}(\xi) := \hat{v}(\xi)(1 + |\xi|)^s$. Entonces

$I_1 = C\left\|\hat{\phi} * \hat{w}\right\|_2 = C'\left\|w\phi\right\|_2 \leq C'\left\|w\right\|_2 \left\|\phi\right\|_\infty = \left\|\hat{w}\right\|_2 \left\|\phi\right\|_\infty = \left\|v\right\|_s \left\|\phi\right\|_\infty.$

Además, si x, y son números reales $0 \leq x, y$, vale con cierto x', $x' \in (x, y)$,

(10.12) $\qquad \left|(1+x)^s - (1+y)^s\right| = \left|s(x-y)(1+x')^{s-1}\right| \leq |x-y||s|\sup\left((1+x)^{s-1}, (1+y)^{s-1}\right),$

y también

(10.12') $\qquad \left(\dfrac{1+x}{1+y}\right)^{s-1} \leq (1 + |x-y|)^{|s-1|}$

Luego, el corchete en I_2 no supera a $|s|.|\eta|(1+|\xi-\eta|)^{s-1}(1+|\eta|)^{|s-1|}$, de donde

(10.13) $$I_2 \le \frac{|s|}{(2\pi)^n}\left\| \left(|\hat{\phi}(\eta)|.|\eta|(1+|\eta|)^{|s-1|}\right) * \left(|\hat{v}(\eta)|(1+|\eta|)^{s-1}\right) \right\|_2 \le$$

$$\le \frac{|s|}{(2\pi)^n}\left\| |\hat{\phi}(\eta)|.|\eta|(1+|\eta|)^{|s-1|} \right\|_1 |v|_{s-1}, \qquad \text{QED.}$$

LEMA 2. Sean $v \in H^{s-1}(R^n)$, $\phi \in C_0^\infty(R^n)$. Existe una constante $C = C(\phi, s, n)$ tal que

(10.14) $$|J_\varepsilon(\phi v) - \phi J_\varepsilon(v)|_s \le C.|v|_{s-1}.\blacklozenge$$

DEMOSTRACION. Recordemos que $J_\varepsilon v = v * j_\varepsilon$, $j_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} j(x/\varepsilon)$. Luego, $(J_\varepsilon v)^\wedge = (j_\varepsilon)^\wedge.\hat{v}$, donde $(j_\varepsilon)^\wedge(\xi) = \hat{j}(\varepsilon\xi)$. Tenemos entonces,

(10.15) $$|J_\varepsilon(\phi v) - \phi J_\varepsilon(v)|_s = \left\| (2\pi)^{-n}\left[\hat{\phi} * (\hat{v}\hat{j}_\varepsilon) - \hat{j}_\varepsilon(\hat{\phi} * \hat{v})\right](1+|\xi|)^s \right\|_2 .$$

Pero,

(10.16) $$\left[\hat{\phi} * (\hat{v}\hat{j}_\varepsilon) - \hat{j}_\varepsilon(\hat{\phi} * \hat{v})\right](1+|\xi|)^s = \int \hat{\phi}(\eta)\hat{v}(\xi-\eta)\left(\hat{j}(\varepsilon(\xi-\eta)) - \hat{j}(\varepsilon\xi)\right)(1+|\xi|)^s d\eta \le$$

$$\le \left(|\hat{v}|(1+|\cdot|)^{s-1}\right) * \left(|\hat{\phi}|(1+|\cdot|)^{|s-1|+1}\right),$$

pues valen $(1+|\xi|)^{s-1} \le (1+|\xi-\eta|)^{s-1}(1+|\eta|)^{|s-1|}$, (cf. (10.12'), y

(10.17) $$|\hat{j}(\varepsilon(\xi-\eta)) - \hat{j}(\varepsilon\xi)|(1+|\xi|) \le C(1+|\eta|).$$

Aceptando por un momento (10.17), obtenemos de (10.15) y (10.16):

$|\phi J_\varepsilon v - J_\varepsilon(\phi v)|_s \le \left\| \hat{\phi}(1+|\,.\,|)^{|s-1|+1} \right\|_1 (2\pi)^{-n} \left\| \hat{v}(1+|\,.\,|)^{s-1} \right\|_2 = C(\phi, n, s)|v|_{s-1}$, que es la tesis.

Sea $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_h, \ldots, \xi_n)$. (10.17) es consecuencia de las siguientes desigualdades,

$$\left|\xi_h\left(\hat{j}(\varepsilon(\xi-\eta)) - \hat{j}(\varepsilon\xi)\right)\right| \le \left|\xi_h \int \left(e^{i<\eta,x>\varepsilon} - 1\right) e^{-i<\xi,x>\varepsilon} j(x)\, dx\right| =$$

$$\left|\frac{1}{i\varepsilon}\int e^{-i<x,\xi>\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_h}\left(j(x)(e^{i<\eta,x>\varepsilon} - 1)\right)dx\right| = \left|\int e^{-i<x,\xi>\varepsilon}\left\{\left(\frac{\partial j}{\partial x_h}\right)\frac{e^{i<\eta,x>\varepsilon} - 1}{i\varepsilon} + j(x)\eta_h e^{i<\eta,x>\varepsilon}\right\}dx\right| \le$$

$$\le |\eta|\,(\int \left|\frac{\partial j}{\partial x_h}\right| |x| dx + \int |j| dx) = O(|\eta|), \text{ QED.}$$

LEMA 3. Sea $P(D)$ hipoelíptico de orden m con $\dfrac{|P^{(\mu)}(\xi)|}{|P(\xi)|} \le \dfrac{C_1}{|\xi|^a}$ para ξ real, $|\xi| > C$, $\mu \ne 0$ y cierto $a > 0$. Sean $b = a/m$, s real y $Q \prec P$. Entonces, si Ω es acotado existe $C = C(s, P, Q, \Omega)$ tal que para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\sum_{|\mu|>0} |Q^{(\mu)}(D)\phi|_{s+b} \le C\left(|P(D)\phi|_s + |\phi|_s\right).\blacklozenge$$

Para la demostración de este lema veremos algunas proposiciones.

PROPOSICION 1. Sean $r = \#\{\alpha : |\alpha| \le m\}$ y $\theta_1, \ldots, \theta_r \in R^n$ tales que $\det|\theta_i^\alpha|_{|\alpha|\le m, 1\le i\le r} \ne 0$. Entonces existen números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, dependientes de $\{\theta_i\}$, tales que $t^{|\mu|}Q^{(\mu)}(\xi) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j Q(\xi + t\theta_j)$ para todo $t \in R$ y para todo $\xi \in R^n$.$\blacklozenge$

En efecto, la existencia de tales $\{\theta_i\}$ sigue del análisis del polinomio $\det\left|\theta_i^\alpha\right|_{|\alpha|\le m,\, 1\le i\le r}$, (cf. Apéndice B). En esta situación, de los desarrollos de Taylor: $Q(\xi+t\theta_j)=\sum_{|\alpha|\le m}(t\theta_j)^\alpha Q^{(\alpha)}(\xi)/\alpha!$, $j=1,\dots,r$, se deduce que

$$\frac{t^{|\alpha|}Q^{(\alpha)}(\xi)}{\alpha!}=\begin{vmatrix} \dots & Q(\xi+t\theta_1) & \dots & \theta_1^\beta & \dots \\ \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots \end{vmatrix} \Big/ \det\left|\theta_j^\alpha\right|, \qquad \text{QED.}$$

PROPOSICION 2. $Q\prec P \Rightarrow \sum_{|\mu|\le m} t^{|\mu|}\left|Q^{(\mu)}(\xi)\right| \le C\sum_{|\mu|\le m} t^{|\mu|}\left|P^{(\mu)}(\xi)\right|$, para todo $\xi\in R^n$ y todo $t\ge 1$.♦

En efecto, $\left|t^{|\mu|}Q^{(\mu)}(\xi)\right|\le\sum\left|\lambda_j\right|\left|Q(\xi+t\theta_j)\right|\le C\sum_{\alpha,j}\left|P^{(\alpha)}(\xi+t\theta_j)\right|\le$

$$\le C'\sum_{\alpha,|\alpha+\beta|\le m} t^{|\beta|}\left|P^{(\alpha+\beta)}(\xi)\right|\le C''\sum_{|\gamma|\le m} t^{|\gamma|}\left|P^{(\gamma)}(\xi)\right|, \qquad \text{QED.}$$

COROLARIO. Sea P hipoelíptico y $Q\prec P$. Entonces, para todo $\mu\ne 0$:

$\left|Q^{(\mu)}(\xi)\right|\le C\dfrac{\widetilde{P}(\xi)}{(1+|\xi|)^b}$, donde $b=\dfrac{a}{m}$, a como en (10.7'), m el grado de P.♦

DEMOSTRACION. $\left|P^{(\mu)}(\xi)\right|\le C\dfrac{\widetilde{P}(\xi)}{(1+|\xi|)^a}$. Sea $t=(1+|\xi|)^{a/m}$. Entonces, de

$$t\left|Q^{(\mu)}(\xi)\right|\le\left|t^{|\mu|}Q^{(\mu)}(\xi)\right|\le C\left[\left|P(\xi)\right|+\sum_{\mu\ne 0}t^m\left|P^{(\mu)}(\xi)\right|\right]$$ y la tesis sigue de (10.7'), QED.

PROPOSICION 3. $\sum\left|Q^{(\mu)}(D)\phi\right|_{s+|\mu|c}\le C\sum\left|P^{(\mu)}(D)\phi\right|_{s+|\mu|c}$.♦

En efecto, aplicar prop. 2 con $t=(1+|\xi|)^c$.

DEMOSTRACION DEL LEMA 3.

Utilizando la prop. 3 con $c=b$, obtenemos:

$$\sum_{|\mu|>0}\left|Q^{(\mu)}(D)\phi\right|_{s+b}\le\sum_{\mu}\left|Q^{(\mu)}(D)\phi\right|_{s+|\mu|b}\le$$

$$\le C\sum_{\mu}\left|P^{(\mu)}(D)\phi\right|_{s+|\mu|b}\le C\left(\left|P(D)\phi\right|_s+\sum_{|\mu|>0}\left|P^{(\mu)}(D)\phi\right|_{s+a}\right).$$

Por otra parte,

$$\sum_{|\mu|\ne 0}\left|P^{(\mu)}(D)\phi\right|_{s+a}^2=\int\left|\hat\phi(\xi)\right|^2\left(\sum_{|\mu|\ne 0}\left|P^{(\mu)}(\xi)\right|^2\right)(1+|\xi|)^{2(s+a)}d\xi\le C\left(\left|P(D)\phi\right|_s^2+\left|\phi\right|_s^2\right),$$

pues el paréntesis en la integral no supera a $C.\left(\left|P(\xi)\right|^2+1\right)(1+|\xi|)^{-2a}$, QED.

DEMOSTRACION DEL T.4. Sea $V=\{Q(\xi):Q(\xi)\prec P(y,\xi)\}$. Este es un espacio vectorial de dimensión finita, N, con una base $\{P_1(\xi),\dots,P_N(\xi)\}$. Si $P(x,D)=\sum_{j=1}^{N}c_j(x)P_j(D)$ y $P(D)=P(y,D)$, escribimos

$$\sum_{j=1}^{N} b_j(x)P_j(D) = P(x,D) - P(D).$$

Entonces, $c_j(x)$ y $b_j(x)$ son funciones indefinidamente diferenciables en x. En efecto,

$$\begin{vmatrix} P_1(\xi^{(1)}) & \ldots & P_1(\xi^{(N-1)}) & P_1(\xi^{(N)}) \\ . & \ldots & . & . \\ P_{N-1}(\xi^{(1)}) & \ldots & P_{N-1}(\xi^{(N-1)}) & P_{N-1}(\xi^{(N)}) \\ P_N(\xi^{(1)}) & \ldots & P_N(\xi^{(N-1)}) & P_N(\xi^{(N)}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & | & P_1(\xi^{(N)}) \\ & B & & | & . \\ \_\_ & & \_\_ & | & P_{N-1}(\xi^{(N)}) \\ P_N(\xi^{(1)}) & . & . & & P_N(\xi^{(N)}) \end{vmatrix}$$

es un polinomio $\neq 0$ si $\det B \neq 0$. Luego, por inducción sigue que $\det\left|P_j(\xi^{(k)})\right| \neq 0$ para cierta familia $\{\xi^{(k)}\} \subset R^n$.

Del sistema $P(x,\xi^{(k)}) = \sum_{j=1}^{N} c_j(x)P_j(\xi^{(k)})$, $k = 1,\ldots,N$, se deduce entonces que $c_j(x) \in C^\infty$ para todo j. Para estos P_j vale que (cf. T.3):

(10.18) $\qquad \left|P_j(D)w\right|_s \leq C_0\left|P(D)w\right|_s$ para todo $w \in H_P^s(\Omega)$.

Sea Ω_1 una esfera en Ω de centro y tal que $\sum_{j=1}^{N}\left|b_j(x)\right| \leq \frac{1}{2C_0}$ para todo $x \in \Omega_1$. Sea N_y un entorno de y tal que $N_y \subset \overline{N_y} \subset \Omega_1$.

Queremos demostrar que para todo $\varphi \in C_0^\infty(N_y)$, $s \in R$, se verifica

(10.19) $\qquad \left|P(D)J_\varepsilon(\varphi u)\right|_s \leq C\left(\left|\varphi f\right|_s + \sum_{|\mu|\leq m}\left|P(D)(uD^\mu\varphi)\right|_{s-b}\right),$

donde $C = C(N_y,s,P)$, u es una solución débil de $P(D)u = f \in C^\infty(\Omega)$, $b = a/m$, $P(D) = P(y,D)$ es un operador hipoelíptico de orden m para el cual vale ($1 \geq a > 0$):

(10.20) $\qquad \sup_{|\xi|\geq l}\ \sup_{m\geq|\alpha|>0} |\xi|^a \left|\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)}\right| = O(1).$

Notemos que $\varphi u \in H_{P,s-b}$ equivale a $P(D)(\varphi u) \in H_{s-b}$, e implica: $P_j(D)(\varphi u) \in H_{s-b}$; también, en virtud de que $b < 1$, vale $\left|\varphi u\right|_{P,s-1} \leq \left|\varphi u\right|_{P,s-b}$.

Sea $v \in C_0^\infty(\Omega)$ y recordemos que $Q(D)(u\,v) = \sum_\mu \frac{1}{\mu!}\left(Q^{(\mu)}(D)u\right)\left(D^\mu v\right)$. Tenemos:

(10.21) $\qquad (P(D)J_\varepsilon\varphi u, v) = (u, \overline{\varphi}\,P^*(D)J_\varepsilon v) =$

$$= (u, \overline{\varphi}\,P^*(x,D)(J_\varepsilon v)) - (u, \overline{\varphi}(\sum_{j=1}^{N} b_j(x)P_j(D))^*(J_\varepsilon v)).$$

Si definimos $P_0(D) := P(y,D)$ y $b_0(x) := 1$, entonces $P(x,D) = \sum_{j=0}^{N} b_j(x)P_j(D)$. Luego,

$$P^*(x,D)(\overline{\varphi}\,w) = \sum_{j=0}^{N} P_j{}^*(D)(\overline{b}_j w\overline{\varphi}) = \sum_{j=0}^{N}\sum_\mu P_j{}^{*(\mu)}(D)(\overline{b}_j w)\frac{D^\mu\overline{\varphi}}{\mu!} =$$

$$= \sum_{j=0}^{N}\sum_{\mu\neq 0} P_j{}^{*(\mu)}(D)(\overline{b}_j w)\frac{D^\mu\overline{\varphi}}{\mu!} + \overline{\varphi}\,P^*(x,D)w, \text{ de donde}$$

$$\overline{\varphi}\, P^*(x,D)w = P^*(x,D)(\overline{\varphi}\, w) - \sum_{j=0}^{N}\sum_{\mu\neq 0} P_j{}^{*(\mu)}(D)(\overline{b}_j w)\frac{D^\mu\overline{\varphi}}{\mu!}.$$

Reemplazando en el último miembro de (10.21), obtenemos:

$$(10.22)\qquad (P(D)J_\varepsilon\varphi u, v) = (u, P^*(x,D)(\overline{\varphi}\, J_\varepsilon v)) - \sum_{j=0}^{N}\sum_{\mu\neq 0}(u, \frac{D^\mu\overline{\varphi}}{\mu!}P_j{}^{*(\mu)}(D)(\overline{b}_j\, J_\varepsilon v))$$

$$-(u,\overline{\varphi}(\sum_{j=1}^{N} b_j(x)P_j(D))^*(J_\varepsilon v)) = (f,\overline{\varphi}\, J_\varepsilon v) - \sum_{j=0}^{N}\sum_{\mu\neq 0}(u,\frac{D^\mu\overline{\varphi}}{\mu!}P_j{}^{*(\mu)}(D)(\overline{b}_j\, J_\varepsilon v))$$

$$-((\sum_{j=1}^{N} b_j(x)P_j(D))(u\varphi), J_\varepsilon v).$$

Sea $\psi \in C_0^\infty(\Omega_1)$ tal que $\psi = 1$ en $\overline{N_y}$, $0 \le \psi \le 1$. Como el soporte de φ está contenido en N_y, en el último miembro de (10.22) podemos reemplazar b_j por $\psi_j := \psi b_j$, obteniendo así la identidad en $D'(\Omega)$:

$$(10.23)\qquad P(D)J_\varepsilon(\varphi u) = J_\varepsilon(\varphi f) - \sum_{j=1}^{N} J_\varepsilon(\psi_j P_j(D)(\varphi u)) -$$

$$-\sum_{j=0}^{N}\sum_{|\mu|>0}(-1)^{|\mu|}J_\varepsilon\left(\psi_j P_j^{(\mu)}(D)(uD^\mu\varphi)/\mu!\right).$$

Pero,

$$(10.24)\qquad \left|J_\varepsilon\left(\psi_j P_j(D)(\varphi u)\right)\right|_s \le$$

$$\le \left|J_\varepsilon\left(\psi_j P_j(D)(\varphi u)\right) - \psi_j J_\varepsilon\left(P_j(D)(\varphi u)\right)\right|_s + \left|\psi_j J_\varepsilon\left(P_j(D)(\varphi u)\right)\right|_s \le$$

$$\le C'\left|P_j(D)(\varphi u)\right|_{s-1} + \left\|\psi_j\right\|_\infty \left|J_\varepsilon P_j(D)(\varphi u)\right|_s + C''\left|J_\varepsilon P_j(D)(\varphi u)\right|_{s-1} =$$

$$= C\left|P_j(D)(\varphi u)\right|_{s-1} + \left\|\psi_j\right\|_\infty \left|J_\varepsilon P_j(D)(\varphi u)\right|_s.$$

Luego, de (10.23) sigue que

$$\left|P(D)J_\varepsilon(\varphi u)\right|_s \le \left|\varphi f\right|_s + C\sum_{j=1}^{N}\left|P_j(D)(\varphi u)\right|_{s-1} + \sum_{j=1}^{N}\left\|\psi_j\right\|_\infty\left|P_j(D)J_\varepsilon(\varphi u)\right|_s +$$

$$+\sum_{j=0}^{N}\sum_{|\mu|>0}\left|J_\varepsilon\left(\psi_j P_j^{(\mu)}(D)(uD^\mu\varphi)\right)\right|_s.$$

Usando (10.18) obtenemos ahora

$$\left|P(D)J_\varepsilon(\varphi u)\right|_s \le \left|\varphi f\right|_s + C'\left|P(D)(\varphi u)\right|_{s-1} + \frac{1}{2}\left|P(D)J_\varepsilon(\varphi u)\right|_s +$$

$$+\sum_{j=0}^{N}\sum_{|\mu|>0}\left|J_\varepsilon\left(\psi_j P_j^{(\mu)}(D)(uD^\mu\varphi)\right)\right|_s.$$

En virtud del Lema 3 y la desigualdad $s-1 < s-b$, se obtiene

$$\frac{1}{2}\left|P(D)J_\varepsilon(\varphi u)\right|_s \le \left|\varphi f\right|_s + C'\left|P(D)(\varphi u)\right|_{s-1} + \sum_{j=0}^{N}\sum_{|\mu|>0}\left|J_\varepsilon\left(\psi_j P_j^{(\mu)}(D)(uD^\mu\varphi)\right)\right|_s \le$$

$$\le \left|\varphi f\right|_s + C'\left|P(D)(\varphi u)\right|_{s-1} + C''\sum_{j=0}^{N}\sum_{|\mu|>0}\left|P_j^{(\mu)}(D)(uD^\mu\varphi)\right|_s \le$$

$$\leq |\varphi f|_s + C'|P(D)(\varphi u)|_{s-1} + C''\sum_{|\mu|>0}\left(|P(D)(uD^\mu\varphi)|_{s-b} + |uD^\mu\varphi|_{s-b}\right) \leq \text{(T.3)}$$

$$\leq |\varphi f|_s + C\sum_{|\mu|\leq m} |P(D)(uD^\mu\varphi)|_{s-b}\text{, QED.}$$

10D. El espacio H_s coincide con el espacio $B_{2,k}$ definido en el Cap.7, para $k=(1+|\xi|)^s$, de norma $\|u\|_{2,k} = (\int|\hat{u}\,k|^2 d\xi)^{1/2}$. El teorema de existencia de solución fundamental E con las mejores propiedades locales establece que (cf. Cap.7):
dado un polinomio $P(\xi)$ existe $E\in D'$ tal que $P(D)E=\delta$, $E/\cosh|x|\in B_{\infty,\tilde{P}}$.
De esto se deduce que $E\in B^{loc}_{\infty,\tilde{P}}$. Es decir, $\phi E\in B_{\infty,\tilde{P}}$ para todo $\phi\in C_0^\infty$. Además que $u\in B_{p,k}$, soporte de u compacto $\Rightarrow u*E\in B^{loc}_{p,k\tilde{P}}$ y $\|\phi(u*E)\|_{p,k\tilde{P}}\leq C(\phi)\|u\|_{p,k}$.
Entonces vale la
PROPOSICION 4. $u\in H_s$, $\phi,\psi\in C_0^\infty \Rightarrow \psi((\phi u)*E)\in B_{2,(1+|\xi|)^s\tilde{P}}$.♦

Sea $u=P(D)v$, $v\in C_0^\infty(|x|<R)$. Luego, $E*u=E*P(D)\delta*v=\delta*v=v$. Por tanto, $\|E*u\|_{2,k\tilde{P}}=\|v\|_{2,k}\leq C(\tau)\|u\|_{2,k}$ con $\tau\in C_0^\infty$, $\tau=1$ en $|x|\leq 1$. Si $k=(1+|\xi|)^s$ tenemos

$$\int\left|\hat{v}(\xi)(1+|\xi|)^s\tilde{P}(\xi)\right|^2 d\xi\leq M_R|u|_s^2.$$

Sea ahora $w=Q^{(\mu)}(D)v$, $v\in C_0^\infty(|x|<R)$. Entonces, del corolario a la proposición 2 sigue la:
PROPOSICION 5. Sean P hipoelíptico y $Q\prec P$. Entonces, si $\mu\neq 0$,

$$\left|Q^{(\mu)}(D)v\right|_s\leq C_R|P(D)v|_{s-b},\ ♦$$

En efecto,

$$(10.25)\quad |w|_s^2=\int\left|\hat{v}(\xi)Q^{(\mu)}(\xi)\right|^2(1+|\xi|)^{2s}d\xi\leq C^2\int\left|\hat{v}(\xi)\tilde{P}(\xi)\right|^2(1+|\xi|)^{(s-b)2}d\xi\leq C_R^2|u|_{s-b}^2.$$

CAPITULO 11
EL TEOREMA DE H. WEYL - SEGUN GÅRDING - PARA EL OPERADOR $-(1/k)\Delta$ EN UNA REGION DE JORDAN.

11A. Queremos estudiar el operador $\Delta+\Lambda k$ en una región de Jordan D, para este operador suponemos $k\in C(\overline{D})\cap Lip_{loc}(D)$, $k>0$ en la clausura $\overline{D}$ de D. Y precisamente el problema de contorno:

$$-(\Delta+\Lambda k)\Phi=f,\quad \Phi|_{\partial D}=0.$$

En el caso en que k sea idénticamente igual a 1 usaremos las minúsculas λ y ϕ.

Sea $\Lambda\le 0$, $-\Lambda=t=\chi^2$. El operador (cf. Cap.8),

(11.1) $$\left(G_t^{(1)}v\right)(p):=\int_D G(p,q;\Lambda)v(q)k(q)dq,$$

(11.2) $$G(p,q;\Lambda):=G(p,q)+\Lambda\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m(p)\Phi_m(q)}{\Lambda_m(\Lambda_m-\Lambda)}=G(p,q)+F(p,q;\Lambda),$$

($-(1/k)\Delta\Phi_m=\Lambda_m\Phi_m$, $\Phi_m|_{\partial D}=0$) lleva $L^2(D;k)$ en $C(\overline{D})$ y es completamente continuo.

Si $$D_{\Delta+\Lambda k}:=\left\{u\in C(\overline{D}):u|_{\partial D}=0,\ -(\Delta+\Lambda k)u\in L^2(D)\right\}=$$
$$=\left\{u\in C(\overline{D}):u|_{\partial D}=0,\ \Delta u\in L^2(D)\right\}=D_{\Delta+0},$$

entonces el operador $-(\Delta+\Lambda k):D_{\Delta+\Lambda k}\to L^2(D)$ es cerrado.

DEFINICION 1. $T_tw:=G_t^{(1)}(w/k)$.♦

Luego, $T_t=-(\Delta+\Lambda k)^{-1}$ y $G(p,q;\Lambda)$ es el *núcleo de Green* del problema:

$$-(\Delta+\Lambda k)u=f,\quad u|_{\partial D}=0.$$

En particular, $u(p)=T_tf(p)=\int_D G(p,q;\Lambda)f(q)dq$.

NB. Si $k\in C^1(\overline{D})$ entonces $G_t^{(1)}$ es completamente continuo de $L^2(D)\approx L^2(D;k)$ en $H(D)=W_0^{1,2}(D)$ y es el *inverso* del operador $-(1/k)\Delta+t$ con dominio, (cf. Ap. G):

$$D_\Delta=\left\{h\in W_0^{1,2}:\Delta h\in L^2(D)\right\}.\ ♦$$

DEFINICION 2. $G_t:=G_t^{(2)}=G_t^{(1)}\circ G_t^{(1)}$. ♦

Sea $g_t^{(1)}(p,q):=G(p,q;\Lambda)k(q)$. Entonces, respecto de la medida de Lebesgue, G_t tiene por núcleo a

(11.3) $$g_t(p,q):=g_t^{(2)}(p,q):=\int_D g_t^{(1)}(p,r)g_t^{(1)}(r,q)dr.$$

Resumiendo, si $v\in L^2(D)$,

(11.4) $$\begin{cases}(G_t^{(1)}v)(p)=\int_D g_t^{(1)}(p,q)v(q)dq\\ (G_t\,v)(p)=\int_D g_t\,(p,q)v(q)dq\\ -(\frac{\Delta}{k}+\Lambda)G_t^{(1)}v=v\quad ;\quad (\frac{\Delta}{k}+\Lambda)^2G_tv=v.\end{cases}$$

Como $\dfrac{\Phi_m}{\Lambda_m} = G_0^{(1)}(\Phi_m)$ tenemos, uniformemente en $\overline{D}$, (cf. Cap. 8),

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\Phi_m(p)/\Lambda_m|^2 = O(1).$$

De las propiedades conocidas de G, (11.2) y (11.3), sigue que

$$g_t \in C(\overline{D} \times \overline{D}).$$

Por otra parte, de $G_t^{(1)}((\Lambda_m - \Lambda)\Phi_m) = T_t(-(\Delta + \Lambda k)\Phi_m) = \Phi_m$ se deduce que

$$G_t((\Lambda_m - \Lambda)^2 \Phi_m) = \Phi_m.$$

Utilizamos el *símbolo* $\doteq$ para indicar que la convergencia de una serie es *uniforme*.

TEOREMA 1. $g_t(p,q) = k(q)A(p,q) \in C(\overline{D} \times \overline{D})$ y $A(p,q) \doteq \sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{\Phi_m(p)\Phi_m(q)}{(\Lambda_m - \Lambda)^2}$, $p,q \in \overline{D}$. ♦

DEMOSTRACION. Repetimos aquí la demostración del teorema de Mercer, [RN]. Sea $A(x,y) = \dfrac{g_t(x,y)}{k(y)}$. Luego,

$$(11.5) \qquad \frac{\Phi_m(x)}{(\Lambda_m - \Lambda)^2} = \int_D A(x,y)\Phi_m(y)dm(y), \; dm(y) = k(y)dy.$$

Definimos:

$$(11.6) \qquad (Af)(x) := \int_{\overline{D}} A(x,y) f(y) dm(y), \; f \in L^2(\overline{D}; dm), \; x \in \overline{D}.$$

Nótese que $J := \partial D$ puede tener área positiva independientemente del hecho que $\Phi_m = 0$ en J y que exista un núcleo de Green G_0.

Sea $\{\phi_i\}$ un sistema ortonormal completo en $\overline{D}$ respecto de la medida m tal que $\phi_i = \Phi_i$ en D, $\phi_i = 0$ en $\overline{D} \setminus D$, $i = 1, 2, \ldots$, y donde las ϕ_i con índice $i \le 0$, si hubiere, se anulan en D. Entonces, $A\phi_i = \mu_i \phi_i = \dfrac{\phi_i}{(\Lambda_i - \Lambda)^2}$ si $i \ge 1$. Si $i \le 0$, como $A(x,y) = A(y,x)$ y $A(x,y) = 0$ si $x \in J$ o $y \in J$, se tiene $A\phi_i = 0$. Los restos

$$A_n(x,y) = A(x,y) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \phi_i(x)\phi_i(y), \; (x,y) \in \overline{D} \times \overline{D},$$

son iguales para cada x, a

$$A_n(x,y) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu_i \phi_i(x)\phi_i(y) \text{ en } L^2(\overline{D}; m).$$

Además, $\int_{\overline{D} \times \overline{D}} A_n(x,y) f(x) f(y)\, dm(x)\, dm(y) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu_i |c_i(f)|^2 \ge 0$, y como $A_n(x,y)$ es continua en $\overline{D} \times \overline{D}$ sigue que $A_n(x,x) \ge 0$. Es decir, $A_n(x,x) = A(x,x) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \phi_i^2(x) \ge 0$, y por tanto,

$$A(x,x) \ge \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \phi_i^2(x).$$

Además,

(11.7) $$\left|\sum_{i=m}^{n}\mu_i\phi_i(x)\phi_i(y)\right|^2 \le \left(\sum_{i=m}^{n}\mu_i\phi_i^2(x)\right)\left(\sum_{i=m}^{n}\mu_i\phi_i^2(y)\right) \le$$
$$\le A(x,x)\sum_{i=m}^{n}\mu_i\phi_i^2(y) \le M\sum_{i=m}^{n}\mu_i\phi_i^2(y).$$

O sea, $\sum_{i=m}^{n}\mu_i\phi_i(x)\phi_i(y)$ converge, fijado y, uniformemente en x, y fijado x, uniformemente en y. Sea

$$B(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty}\mu_i\phi_i(x)\phi_i(y).$$

Entonces,

$$\int_D B(x,y)\, f(y)\, dm(y) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu_i\phi_i(x)\, c_i(f).$$

Por otro lado, $A(x,y) = O(1)$ implica

$$(Af)(x) = \lim_{n\to\infty} A\left(\sum_{i=1}^{n} c_i(f)\,\phi_i\right)(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu_i\, c_i(f)\,\phi_i(x).$$

Luego, para toda f, $\int_D (B(x,y) - A(x,y))\, f(y)\, dm(y) = 0$, lo cual implica $B \equiv A$.

En consecuencia, $A(x,x) = B(x,x) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu_i\phi_i^2(x)$, para toda x en el compacto $\overline{D}$. Del teorema de Dini se concluye entonces que $\sum_{i=1}^{N}\mu_i\ \phi_i^2(x,x) \xrightarrow{\bullet} A(x,x)$ para $N \to \infty$

De (11.7) obtenemos ahora que $\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i\ \phi_i(x)\,\phi_i(y)$ converge uniformemente a una función continua en $\overline{D}$ y precisamente a $B(x,y) = A(x,y)$, QED.

11B. Supongamos que k sea una función $\alpha-$Hölder continua en $\overline{D}$. Sea $\dot{D}$ una región de Jordan tal que $\dot{D} \supset \overline{D}$ y sea $\dot{k}$ una extensión $\alpha-$Hölder continua de k de $\overline{D}$ a $\overline{\dot{D}}$ (cf. [Mt]) tal que

$$\inf \dot{k} = \inf k\,,\ \sup \dot{k} = \sup k\,.$$

El problema de contorno $\Delta w + \Lambda\dot{k}w = 0,\ w|_{\partial\dot{D}} = 0$, posee infinitos autovalores: $0 < \dot{\Lambda}_1 \le \dot{\Lambda}_2 \le \ldots \le \dot{\Lambda}_m \to +\infty$ correspondientes a autofunciones $\{\dot{\Phi}_m\}$ que forman un *sistema ortonormal completo en* $L^2(\dot{D},\dot{k})$. El operador

$$\left(\dot{G}_t^{(1)}v\right)(p) = \int_{\dot{D}} \dot{G}(p,q;\Lambda)\dot{k}(q)v(q)dq\,,\ t = -\Lambda \ge 0\,,$$

es completamente continuo de $L^2(\dot{D},\dot{k})$ en $C(\overline{\dot{D}})$ y verifica, en el sentido de las distribuciones, para toda $v \in L^2(\dot{D},\dot{k})$: $\ -\Delta(\dot{G}_t^{(1)}v) = -t\,\dot{k}\,\dot{G}_t^{(1)}v + \dot{k}\,v$.

Sea $Y = C_0^\infty(D)$ y definamos para $f,g \in Y$:

(11.8) $$a_t(f,g) = ((-\frac{\Delta}{k}+t)f,g)_k = \lim_{N\to\infty}\sum_{m=1}^{N}(\Lambda_m + t)c_m(f)c_m(g).$$

Entonces, $a_t(f,g) = a_t(g,f)$; $a_t(f,f) \ge t\sum_{m=1}^{\infty}c_m(f)^2 = t\|f\|_k^2 \ge t(\inf k)\|f\|^2$.

Completando Y respecto de $a_t(.,.)$ se obtiene un espacio de Hilbert X identificable con una variedad lineal de $L^2(D)$. Por otra parte, como

$$G_t^{(1)}\Phi_m = \Phi_m/(\Lambda_m - \Lambda),$$

si $f \in Y$ vale

(11.9) $$a_t(G_t^{(1)}f, G_t^{(1)}f) = \int_D f\,(G_t^{(1)}f)\,k\,dx = \sum \frac{c_m(f)^2}{\Lambda_m + t}.$$

Luego, para $\Lambda \leq -1$:

(11.10) $$a_t(G_t^{(1)}f, G_t^{(1)}f) \leq \frac{\sup k}{t}\|f\|^2 \leq \frac{1}{t^2}\frac{\sup k}{\inf k}a_t(f,f) = Ma_t(f,f).$$

Es decir, si $t \geq 1$, $G_t^{(1)}$ admite una extensión de Y a X, lineal y acotada, que verifica (cf. (11.8)):

(11.11) $$a_t(G_t^{(1)}f, f) = (f,f)_k > 0 \text{ si } f \neq 0.$$

Por otra parte, el operador positivo $G_t^{(1)}$ satisface en Y a la relación:

(11.12) $$a_t(G_t^{(1)}f, G_t^{(1)}f) = \sup_{g\in Y}\frac{|a_t(G_t^{(1)}f, g)|^2}{a_t(g,g)} = \sup_{g\in Y}\frac{|(f,g)_k|^2}{a_t(g,g)},$$

la cual, naturalmente, vale aún para $f \in X$. Análogamente,

(11.13) $$\dot{a}_t(\dot{G}_t^{(1)}h, \dot{G}_t^{(1)}h) = \sup_{g\in \dot{Y}}\frac{|(h,g)_{\dot{k}}|^2}{\dot{a}_t(g,g)}, \quad h \in \dot{X}.$$

Como $\dot{Y} \supset Y$, si $h = f \in Y$ entonces, por (11.12) y (11.13), tenemos,:

(11.14) $$\int_D f(G_t^{(1)}f)k\,dx = a_t(G_t^{(1)}f, G_t^{(1)}f) \leq \dot{a}_t(\dot{G}_t^{(1)}f, \dot{G}_t^{(1)}f) = \int_D f(\dot{G}_t^{(1)}f)k\,dx.$$

Definimos: $\widetilde{G}_t^{(1)}(h) = \chi_D \dot{G}_t^{(1)}(\chi_D h)$. $\widetilde{G}_t^{(1)}$ es un operador positivo en $L^2(D,k)$ que en virtud de (11.14) verifica allí: $\widetilde{G}_t^{(1)} \geq G_t^{(1)}$.

Luego, sus autovalores guardan la misma relación (cf. §A1, Apéndice al Cap. 11):

(11.15) $$\widetilde{\mu}_i \geq \mu_i \quad \text{para todo } i.$$

De $G_t^{(1)}\Phi_i = \mu_i\Phi_i, (-(\Delta/k)+t)\Phi_i = (\Lambda_i + t)\Phi_i$ resulta $\mu_i(\Lambda_i + t) = 1$. Por tanto,

$$\frac{1}{\dot{\Lambda}_i + t} = \dot{\mu}_i = \sup\left\{(\dot{G}_t^{(1)}f, f)_{\dot{k}} : \|f\|_{\dot{k}} = 1, f \perp \dot{\Phi}_1, \ldots, \dot{\Phi}_{i-1}\right\} \geq$$

$$\geq \sup\left\{(\widetilde{G}_t^{(1)}g, g)_k : \|g\|_k = 1, g \perp \chi_D\dot{\Phi}_1, \ldots, \chi_D\dot{\Phi}_{i-1}\right\} \geq$$

$$\geq \inf_{\{h_1,\ldots,h_{i-1}\}\subset L^2(D,k)} \sup\left\{(\widetilde{G}_t^{(1)}g, g) : \|g\|_k = 1, g \perp h_1, \ldots, h_{i-1}\right\} \geq \mu_i = \frac{1}{\Lambda_i + t}.$$

Si en lugar del operador $-\dfrac{\Delta}{k}+t$ hubiéramos utilizado en (11.8) a su cuadrado y en lugar de $G_t^{(1)}$, en (11.9), a $G_t = G_t^{(2)}$, habríamos obtenido que en $L^2(D,k)$ vale:

(11.16) $$\widetilde{G}_t \geq G_t.$$

TEOREMA 2. Para todo $p \in D$, $\dot{A}_t(p,p) \geq A_t(p,p)$.•

En efecto, la tesis es consecuencia de la siguiente desigualdad válida para toda $f \in Y$:

$$((\widetilde{G}_t - G_t)f, f)_k = \int_D f(p)k(p)dp \int_D \left[\dot{A}_t(p,q) - A_t(p,q)\right] f(q)k(q)dq \geq 0, \text{ QED.}$$

NOTA. Sean $u \in C(\overline{D})$, $u|_{\partial D} = 0$, y $(-\Delta + \Lambda k)u = 0$ en $D'(D)$. Como $ku \in C(D)$, resulta $u \in C^1(D)$ y por lo tanto $\Delta u \in Lip_{loc}(D)$ y u es una solución. De acuerdo con el teorema 5, Ap. M, debe ser $u = 0$. En consecuencia,

$$u \in C(\overline{D}),\ u|_{\partial D} = 0,\ -(\Delta / k + \Lambda)u = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(u)(\Lambda_m - \Lambda)\Phi_m = 0 \Rightarrow c_m(u) = 0\ \ \forall\ m.$$

No es cierto en general para un sistema ortonormal $\{\Phi_m\}$completo en D que $\sum_{m=1}^{N} d_m \Phi_m \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ en $D'(D)$ implica $d_m = 0$ $\forall m$. Por ejemplo, $\Phi_m = \cos mx$, $m = 0,1,2,\ldots$, en $(0,\pi)$ verifica

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos mx = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{m\pi},$$

pero la serie se anula en $D'(0,\pi)$.

11C. En esta sección queremos demostrar los siguientes teoremas.

TEOREMA 3. Supongamos que D sea un recinto de Jordan, o un abierto con la propiedad G. Sea $k \in C^{\infty}(D) \cap C(\overline{D})$, $k > 0$ en $\overline{D}$. Entonces, para todo $p,q \in D$ vale

$$\lim_{t\to\infty} t\, g_t(p,q) = \frac{\delta_{p,q}\, k(p)}{4\pi}. \blacklozenge \tag{11.17}$$

TEOREMA 4. Supongamos además que $k \in C^{\infty}(\dot{D})$ y es positiva en una región de Jordan $\dot{D} \supset \overline{D} \supset D$. Entonces

$$\lim_{t\to\infty} t \int_D g_t(p,p)\, dt = \frac{1}{4\pi} \int_D k(p)\, dp. \blacklozenge \tag{11.18}$$

TEOREMA 5. (H. Weyl). Sean k y D como en el Teor. 4 y sea

$$N_\lambda := \#\{autovalores\ de - (1/k)\Delta\ menores\ que\ \lambda\}.$$

Entonces,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} = \frac{1}{4\pi} \int_D k(p)\, dp. \blacklozenge \tag{11.19}$$

T.4$\Rightarrow$T.5: Por el Teor. 1 podemos reescribir (11.18) de la siguiente forma:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\Lambda_m + t)^{-2} \approx \frac{1}{4\pi t} \int_D k(p)\, dp. \tag{11.20}$$

Pero,

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\Lambda_m + t)^{-2} = \int_0^{\infty} (s+t)^{-2} dN(s) = \lim_{\sigma\to\infty} \int_0^{\sigma} (s+t)^{-2} dN(s) = \lim_{\sigma\to\infty} \left(\frac{N(\sigma)}{(\sigma+t)^2} + 2\int_0^{\sigma} (s+t)^{-3} N(s) ds\right).$$

Como $\sum_{m=1}^{\infty} (\Lambda_m + t)^{-2} < \infty$, dado ε existe σ_0 tal que para todo $\sigma > \sigma_0$

$$\varepsilon > \sum_{\sigma_0 < \Lambda_m < \sigma} \frac{1}{(\Lambda_m + t)^2} \geq \frac{N(\sigma) - N(\sigma_0)}{(\sigma + t)^2} \geq 0.$$

Se deduce entonces que $\dfrac{N(\sigma)}{(\sigma+t)^2}$ tiende a cero para $\sigma \to \infty$ y por tanto que

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} (s+t)^{-2} dN(s) \approx \int_0^{\infty} \frac{N(s)}{(s+t)^3} ds \approx \frac{1}{8\pi t} \int_D k(p)\, dp.$$

Aplicando ahora el teorema tauberiano del apéndice H (Teor. 2) resulta:

$$N(s) \approx \frac{s}{4\pi} \int_D k(p)\, dp, \qquad \text{QED.}$$

Para demostrar los Teoremas 3 y 4 necesitamos algunos resultados previos que pasamos a demostrar.

11D. Sea $z \in D$ fijo; denotaremos con $B(\chi; z, x)$ a la solución fundamental del operador

$$b_z(D_x) := \left(-(\Delta_x / tk(z)) + 1\right)^2.$$

Precisamente, $b_z B = \delta(x-z)$. Transformando Fourier esta igualdad se tiene,

$$\left(\frac{|y|^2}{t\,k(z)} + 1\right)^2 \hat{B} = e^{-i<y,z>},$$

y por tanto, recordando que $\chi = \sqrt{t}$, obtenemos,

(11.21) $$B(\chi; z, x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} \frac{e^{i<x-z,y>}}{(|y|^2 / tk(z) + 1)^2} dy = \frac{k(z)t}{(2\pi)^2} \int_{R^2} \frac{e^{i<x-z,y>\chi\sqrt{k(z)}}}{(|y|^2+1)^2} dy,$$

(11.22) $$\frac{B(\chi; z, x)}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \delta_{x,z} \frac{k(z)}{4\pi^2} \int_{R^2} \frac{dy}{(1+|y|^2)^2} = \frac{\delta_{x,z} k(x)}{4\pi},$$

donde $\delta_{x,z}$ es la delta de Kronecker. Podemos ahora aplicar el T.1 del apéndice a este capítulo a $p(y) = M\left(1+|y|^2\right)^2$, donde $P(x) = B(\chi; z, x)$, para obtener de (11.21) la fórmula (11.23). Como $\mu = 4$, $B(\chi; z, .) \in L^1(R^2) \cap C^\infty(R^2 \setminus \{z\})$. La función $e_\alpha(x)$ de esa fórmula se define como

$$e_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |\alpha| < 2 \\ |x|^{2-|\alpha|-\varepsilon} & si \quad |\alpha| \geq 2 \end{cases}.$$

(11.23) $$D_x^\alpha B(\chi; z, x) = \frac{O(\|k\|_\infty) t\, e_\alpha(\chi\sqrt{k(z)}(x-z))}{(1+\chi\sqrt{k(z)}|x-z|)^N}$$

si $x, z \in U$ =*abierto, acotado y tal que* $\overline{U} \subset D$, N entero positivo.
Entonces, dado $\varepsilon \in (0,1)$, se tiene:

(11.24) $$D_x^\alpha B = \begin{cases} O(1)t(1+\chi|x-z|)^{-N} & si \quad |\alpha| < 2, \\ O(1)t(1+\chi|x-z|)^{-N} (\chi|x-z|)^{2-|\alpha|-\varepsilon} & si \quad |\alpha| \geq 2. \end{cases}$$

Si $t \geq 1$ obtenemos de (11.24), para todo $N \geq 0$, $\chi \geq 1$, $|\alpha| \leq 4$:

(11.25) $$D_x^\alpha B = O(1)\chi^2 (1+\chi|x-z|)^{-N} (\chi|x-z|)^s, \quad s = (2-|\alpha|-\varepsilon) \wedge 0.$$

También, si $\alpha = 0, 1$, de la primera igualdad en (11.24) obtenemos:

(11.26) $$D_x^\alpha B = O(\chi)\chi|x-z|^{-1}(1+\chi|x-z|)^{-N} = O(\chi)\chi|x-z|^{-1-\varepsilon}(1+\chi|x-z|)^{-N},$$

y la segunda, si $|\alpha| = 2, 3, 4$ y $h = |\alpha| - 2$, se escribe como:

(11.27) $$D_x^\alpha B = O(\chi)\chi(1+\chi|x-z|)^{-N}(\chi|x-z|)^{-h-\varepsilon}.$$

11E. Sea $b(D_x)=\left(\frac{-1}{tk(x)}\Delta_x+1\right)^2$. Luego,

(11.28) $$b(D_x)u=\frac{1}{(tk(x))^2}\Delta^2 u+\frac{2}{t^2k(x)}\operatorname{grad}\Delta u\times\operatorname{grad}\frac{1}{k(x)}+$$
$$+\frac{1}{t^2k(x)}\left(\Delta\frac{1}{k(x)}\right)\Delta u-\frac{2\Delta u}{tk(x)}+u=:\sum b_\alpha(\chi;x)\left(\frac{D^\alpha u}{\chi^{|\alpha|}}\right).$$

Si *definimos* $b_0(\chi;\xi,x)=\sum_{|\alpha|\le 4} b_\alpha(\chi;x)\xi^\alpha$, al hacer $\chi\to\infty$ tendremos,

(11.29) $$b_0(\infty;\xi,x)=\frac{|\xi|^4}{k^2(x)}+\frac{2|\xi|^2}{k(x)}+1=\left(\frac{|\xi|^2}{k(x)}+1\right)^2.$$

NB. Tanto b_z como B no coinciden con sus homónimos en el trabajo de Gårding citado en las referencias.

11F. DETERMINACION Y ESTIMACION DE UNA SOLUCION FUNDAMENTAL DEL OPERADOR $b(D_x)$.

Comenzaremos describiendo el procedimiento con el que obtendremos una solución de la ecuación en $x\in U$:

$$b(D_x)\Gamma(\chi;z,x)=\delta(x-z)\ \text{ en }\ D'(U),\ z\in U=\overset{\circ}{U}\subset\subset D.$$

Supongamos que β sea la distribución:

(11.30) $$\beta(\chi;z,x):=(b_z(D_x)-b(D_x))B(\chi;z,x),\quad x\in U\setminus\{z\}.$$

De lo visto sabemos que β es una función en $U\setminus\{z\}$. Veremos más adelante que $\beta(\chi;z,.)\in L^1(U)$ (lo mismo que $\beta(\chi;.,x)$). También veremos que satisface (11.30) en $D'(U)$. Esto es, para toda $\phi\in C_0^\infty(U)$,

(11.31) $$\int_U\beta(\chi;z,x)\phi(x)dx=\int_U b_z(D_x)B(\chi:z,x)\phi(x)dx-\int_U B(\chi:z,x)b^*(D_x)\phi(x)dx,$$
$$\int_U B(\chi:z,x)b^*(D_x)\phi(x)dx\ =\ \phi(z)-\int_U\beta(\chi:z,x)\phi(x)dx.$$

En otras palabras, para *z* fijo en *U*, tenemos

$$b(D_x)B(\chi;z,x)=\delta(x-z)-\beta(\chi;z,x)\ \text{ en }\ D'(U).$$

Esto sugiere que es posible que encontremos Γ bajo la forma

$$\Gamma(\chi;z,x)=B(\chi;z,x)+V(\chi;z,x),$$

donde *V* debe ser entonces solución de

(11.32) $$b(D_x)V(\chi;z,x)=\beta(\chi;z,x)\qquad \text{en }D'(U).$$

Para resolver (11.32), observemos las siguientes identidades, consecuencias de (11.31) y del teorema de Fubini. Sean $u\in L^1(U)$, $\phi\in C_0^\infty(U)$. Entonces, aceptando que $B\in C(D\times D)$, (cf. la prop. 1 siguiente), y la estimación (11.42), tenemos:

$$\int_U\left(\int_U u(z)B(\chi;z,x)dz\right)b^*(D_x)\phi(x)dx=\int_U u(z)\left(\int_U B(\chi;z,x)b^*(D_x)\phi(x)dx\right)dz=$$
$$=\int_U u(z)\left(\phi(z)-\int_U\beta(\chi;z,x)\phi(x)dx\right)dz=\int_U\phi(z)\left(u(z)-\int_U\beta(\chi;t,z)u(t)dt\right)dz.$$

Entonces, si llamamos

(11.33) $$\begin{cases} V(x) := \int_U B(\chi; z, x) u(z) dz\,, \\ T(x) := u(x) - \int_U \beta(\chi; z, x) u(z) dz\,, \end{cases}$$

resulta: $\int_U V(x) b^*(D_x)\phi(x)\, dx = \int_U T(x)\phi(x)\, dx$. O sea,

(11.34) $$b(D_x)V = T \text{ en } D'(U).$$

Comparando (11.34) con (11.32) vemos que para resolver nuestro problema es suficiente encontrar $u(\chi; z, x)$ tal que

(11.35) $$\beta(\chi; z, x) = u(\chi; z, x) - \int_U \beta(\chi; t, x) u(\chi; z, t)\, dt\,.$$

Entonces, de (11.33) seguiría que

(11.36) $$V(\chi; z, x) = \int_U B(\chi; t, x) u(\chi; z, t)\, dt$$

sería una solución de (11.32) y tendríamos que

$$\Gamma(\chi; z, x) = B(\chi; z, x) + V(\chi; z, x)$$

sería una solución de

(11.37) $$b(D_x)\Gamma(\chi; z, x) = \delta(x - z)\,.$$

REGULARIDAD DE $B(\chi; z, x)$. En la notación de las distribuciones que aparecen en lo que sigue de esta sección omitiremos su dependencia de $\chi = t^{1/2} > 0$ cuando esto no dé lugar a confusión. La función

$$S(x, c) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} \frac{e^{i<x,y>}}{(|y|^2 / c + 1)^2} dy\,, \qquad c \in R^+\,,$$

resuelve la ecuación $(-\Delta_x / c + 1)^2 S = \delta(x)$, (cf. (11.21)). Como el operador diferencial en cuestion es elíptico, $S(x,c)$ es una función analítica en $x \in R^2 \setminus \{0\}$, (cf. [Hörmander], p.114 o bien Cap.7). Fijado x, es una función analítica en $c \neq 0$, por lo que es analítica en $(x, c) \in (R^2 \setminus \{0\}) \times R^+$. Por otra parte, la transformación:

$$(D \times R^2) \setminus \{x = z\} \to R^+ \times (R^2 \setminus \{0\}) \quad \textit{definida por} \quad (z, x) \to (tk(z), x - z)\,,$$

es indefinidamente diferenciable. Por tanto, $S(x - z, tk(z))$ es indefinidamente diferenciable en $x, z \in D$, $x \neq z$. Luego, de $S(x - z, tk(z)) = B(\chi; z, x)$ sigue la

PROPOSICION 1. $B(z, x) \in C^\infty((D \times D) \setminus \{x = z\}) \cap C(D \times D)$.•

En efecto, que $B(z, x) \in C(D \times D)$ sigue del teorema de Lebesgue de la convergencia dominada aplicado a la primera integral en (11.21), QED.

DETERMINACION Y ESTIMACION DE β. (11.30) puede escribirse de la siguiente manera:

(11.38) $$\beta(z, x) = \sum_{|\alpha| \le 4} \left(b_{z,\alpha} - b_\alpha(x)\right)\left(D^\alpha / \chi^{|\alpha|}\right) B(z, x)\,,$$

pues, de (11.28) tenemos,

(11.39) $$b_z(D_x) = \sum_{|\alpha| \le 4} b_{z,\alpha}(D^\alpha / \chi^{|\alpha|}) = k^{-2}(z)(\Delta^2 / \chi^4) - 2k^{-1}(z)(\Delta / \chi^2) + 1\,,$$

(11.40) $$b(D_x)=\sum_{|\alpha|\le 4} b_\alpha(x)(D^\alpha/\chi^{|\alpha|})=k^{-2}(x)(\Delta^2/\chi^4)-2k^{-1}(x)(\Delta/\chi^2)+1+$$
$$+\frac{1}{\chi}\left[\frac{2}{k(x)}\operatorname{grad}\frac{1}{k(x)}\times\operatorname{grad}\frac{\Delta}{\chi^3}+\frac{1}{\chi k(x)}\left(\Delta\frac{1}{k(x)}\right)\frac{\Delta}{\chi^2}\right].$$
Estimaremos a continuación los sumandos
$$S_\alpha=(b_{z,\alpha}-b_\alpha(x))(D^\alpha/\chi^{|\alpha|})B(z,x).$$
Si $|\alpha|=0{,}1$ entonces $S_\alpha=0$.

Si $|\alpha|=3$, $b_{z,\alpha}=0$ y por tanto de (11.27) se obtiene, para $\chi\ge 1$,

(11.41) $$S_\alpha=\frac{O(1)}{\chi^\varepsilon|x-z|^{1+\varepsilon}(1+\chi|x-z|)^N},$$
uniformemente en $x,z\in U$.

Si $|\alpha|=2$, $\sum_{|\alpha|=2}S_\alpha=\left(\frac{2}{k(x)}-\frac{2}{k(z)}\right)\left(\frac{\Delta}{\chi^2}\right)B-\frac{1}{\chi^2 k(x)}\Delta\left(\frac{1}{k(x)}\right)\left(\frac{\Delta}{\chi^2}\right)B$, y usando otra vez (11.27) obtenemos nuevamente (11.41).

Si $|\alpha|=4$, tomando en cuenta la regularidad de k y que $U\subset\subset D$, volvemos a obtener la estimación (11.41).

Luego, uniformemente en $(z,x)\in U\times U$ y para $\chi\ge 1$, vale,

(11.42) $$|\beta(z,x)|\le\frac{C}{\chi^\varepsilon|x-z|^{1+\varepsilon}(1+\chi|x-z|)^N}.$$

PROPOSICION 2. $\beta(z,x)\in C^\infty((D\times D)\setminus\{z=x\})$. Además, tanto $\beta(.,v)$ como $\beta(v,.)$ están en una cierta bola de $L^1(U)$, cualquiera sea $\chi\ge 1$ y el valor del parámetro $v\in U$.♦

DETERMINACION Y ESTIMACION DE u. De (11.42) se obtiene,

(11.43) $$|\beta(x,y)\beta(y,z)|\le\frac{C^2}{\chi^{2\varepsilon}(|x-y||y-z|)^{1+\varepsilon}(1+\chi|x-z|)^N}.$$

En consecuencia, usando (11.43) y (*) del apéndice a este capítulo con $\alpha=\beta=1+\varepsilon$, obtenemos:

(11.44) $$\left|\int_U\beta(x,y)\beta(y,z)\,dy\right|\le\frac{C^2 2^{1+\varepsilon}}{\chi^{2\varepsilon}|x-z|^{1+\varepsilon}(1+\chi|x-z|)^N}\int_U\left(|x-y|^{-1-\varepsilon}+|y-z|^{-1-\varepsilon}\right)dy\le$$
$$\le\frac{C^2M2^{2+\varepsilon}}{\chi^{2\varepsilon}|x-z|^{1+\varepsilon}(1+\chi|x-z|)^N},$$
uniformemente en $(x,z)\in U\times U$ con $M=\int_{|y|\le diam\,D}|y|^{-1-\varepsilon}dy$. En general,

(11.45) $$\left|\int_U\beta(z,y_{n-1})dy_{n-1}\int_U\beta(y_{n-1},y_{n-2})dy_{n-2}\cdots\int_U\beta(y_2,y_1)\beta(y_1,x)dy_1\right|\le$$
$$\le\frac{C^nM^{n-1}2^{n(1+\varepsilon)}}{\chi^{n\varepsilon}|x-z|^{1+\varepsilon}(1+\chi|x-z|)^N}=\frac{1}{M}\left(\frac{Q}{\chi^\varepsilon}\right)^n\frac{1}{|x-z|^{1+\varepsilon}(1+\chi|x-z|)^N}.$$

Luego, para la constante $Q=CM2^{1+\varepsilon}>0$ y $\chi^\varepsilon\ge 1+Q$ vale

(11.46) $$u(z,x) := \beta(z,x) + \int_U \beta(z,y)\beta(y,x)\,dy + \int_U \beta(z,v)dv \int_U \beta(v,y)\beta(y,x)\,dy + \ldots =$$

$$= \frac{O(1)}{|x-z|^{1+\varepsilon}(1+\chi|x-z|)^N} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{Q}{\chi^\varepsilon}\right)^m,$$

uniformemente en $(x,z) \in U \times U$. Además la *serie de valores absolutos* define una función $v(z,x)$ que satisface la misma estimación (11.46) y tenemos la

PROPOSICION 3. Sea $\chi^\varepsilon \geq 1+Q = 1+CM2^{1+\varepsilon}$. Entonces, $u(.,x)$ y $u(x,.)$ pertenecen a una bola de $L^1(U)$ de radio $O(\chi^{-\varepsilon})$. Idem para la función v.♦

En efecto, $\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{Q}{\chi^\varepsilon}\right)^m = \frac{Q}{\chi^\varepsilon - Q} \leq \frac{Q(1+Q)}{\chi^\varepsilon}$, QED.

PROPOSICION 4. Sea $\chi^\varepsilon \geq 1+Q$. Entonces la función $u(z,x)|x-z|^{1+\varepsilon}$ es acotada y continua en $T = (U \times U) \setminus \{x = z\}$. Lo mismo le ocurre a $v(z,x)|x-z|^{1+\varepsilon}$.♦

DEMOSTRACION. Si $x \in B_r(X)$, $z \in B_r(Z)$ y $|X - Z| > 2r$, entonces la estimación (11.42) permite demostrar que

$$I(x,z) = \int_U \beta(x,y)\beta(y,z)\,dy \to \int_U \beta(X,y)\beta(y,Z)\,dy,$$

o sea, I es continua en (x,z), $x \neq z$. La estimación (11.44) y el mismo procedimiento aseguran que el siguiente sumando del segundo miembro de (11.46) es continuo en (x,z), etc.. Luego de multiplicar la serie por $|x-z|^{1+\varepsilon}$ vemos que ésta tiene por mayorante, salvo por un factor constante, a $\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{Q}{\chi^\varepsilon}\right)^m = O\left(\frac{1}{\chi^\varepsilon}\right)$, QED.

DETERMINACION Y ESTIMACION DE Γ Y ALGUNAS DE SUS DERIVADAS.

(11.47) $$V(z,x) = \int_U B(y,x)u(z,y)dy = O(\chi^{2-\varepsilon}) \int_U \frac{|y-z|^{-1-\varepsilon}}{(1+\chi|x-y|)^N(1+\chi|y-z|)^N} dy =$$

$$= \frac{O(\chi^{2-\varepsilon})}{(1+\chi|x-z|)^N} \int_U \frac{dy}{|y-z|^{1+\varepsilon}} = \frac{O(1)\chi^{2-\varepsilon}}{(1+\chi|x-z|)^N}.$$

PROPOSICION 5. Sean $T = U \times U \setminus \{x = z\}$, $\chi^\varepsilon \geq 1+Q$. Valen las siguientes estimaciones para $\Gamma(z,x) = B(z,x) + V(z,x)$, $(z,x) \in T$:

$$D_x^\alpha \Gamma(z,x) = \frac{O(\chi^2)}{(1+|x-z|)^N}, \quad |\alpha| = 0,1,$$

$$D_x^\alpha \Gamma(z,x) = \frac{O(\chi^2)}{(\chi|x-z|)^{h(\alpha)+\varepsilon}(1+|x-z|)^N}, \; h(\alpha) = 0 \text{ si } |\alpha| = 2,\; h(\alpha) = 1 \text{ si } |\alpha| = 3.♦$$

En efecto, se deducen usando (11.47), (11.24) y (11.27), QED.

PROPOSICION 6. Con las mismas hipótesis de la prop. 5 valen: $V(z,x) \in C(U \times U)$,

$$D_x^\alpha V(z,x) \in C(T) \cap L^\infty(T) \text{ si } |\alpha| \leq 1,$$

$$D_x^\alpha V(z,x)|x-z|^\varepsilon \in C(T) \cap L^\infty(T) \text{ si } |\alpha| = 2,$$

$$D_x^\alpha V(z,x)\,|x-z|^{1+\varepsilon} \in C(T) \cap L^\infty(T) \text{ si } |\alpha| = 3.$$

Lo mismo vale para el núcleo $\Gamma(z,x)$.♦

DEMOSTRACION Recordemos que $B(z,x)=O(1)$, $D_x^\alpha B=O(1)$ si $|\alpha|=1$, que $D_x^\alpha B=\dfrac{O(1)\chi^2}{(\chi|x-z|)^{h(\alpha)+\varepsilon}}$ si $|\alpha|=2$ o 3 con $h(\alpha)=0$ o 1 y que $u(z,x)=\dfrac{O(1)\chi}{(\chi|x-z|)^{1+\varepsilon}}$.

Entonces resulta (cf. (11.47) y la proposición 1): $V\in C(U)\cap L^\infty(U)$ y si $|\alpha|=1$,

$$D_x^\alpha V(z,x)=\int_U u(z,y)D_x^\alpha B(y,x)\,dy\in C(T)\cap L^\infty(T).$$

Definamos para $|\alpha|=2,3$,

$$W_\alpha(z,x)=\int_U u(z,y)D_x^\alpha B(y,x)\,dy. \tag{11.48}$$

Luego, de las proposiciones 1 y 4 y de (*) del apéndice sigue que $W_\alpha\in C(T)$ y que

$$W_\alpha(z,x)|x-z|^\varepsilon=O(1) \text{ si } |\alpha|=2,\ W_\alpha(z,x)|x-z|^{1+\varepsilon}=O(1) \text{ si } |\alpha|=3.$$

Por otra parte, si $\phi\in C_0^\infty(B_r(x_0))$, $|x_0-z|>2r$, utizando el T. De Gauss obtenemos,

$$\int W_\alpha(z,x)\phi(x)dx=\int_U u(z,y)dy\int D_x^\alpha B(y,x)\phi(x)dx=\lim_{\eta\to 0}\int_U u(z,y)dy\int_{|x-y|\geq\eta} D_x^\alpha B(y,x)\phi(x)dx=$$

$$=\int_U u(z,y)\,dy\int(-1)^{|\alpha|}B(y,x)D_x^\alpha\phi(x)dx=<V(z,x),(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\phi(x)>=<D_x^\alpha V(z,x),\phi(x)>.$$

O sea, $W_\alpha(z,x)=D_x^\alpha V(z,x)$, QED.

COROLARIO. Sea $\phi\in C_0^\infty(U)$. Si $|\alpha|\leq 3$,

$$D_x^\alpha\int B(t,x)\phi(t)\,dt=\int D_x^\alpha B(t,x)\phi(t)\,dt\in C(T)\cap L^\infty(T).$$

Lo mismo vale para el núcleo $\Gamma(t,x)$.♦

DETERMINACION Y ESTIMACION DE β^* y Γ^*. El operador adjunto de $b(D_x)$ se define de la siguiente manera:

$$b^*(D_x)u=\frac{1}{t^2}\Delta\left(\frac{1}{k}\Delta\left(\frac{u}{k}\right)\right)-\frac{2}{t}\Delta\left(\frac{u}{k}\right)+u. \tag{11.49}$$

Luego, $b^*(D_x)u=\sum_{|\alpha|\leq 4}b_\alpha^*(\chi;x)\left(\dfrac{D^\alpha}{\chi^{|\alpha|}}\right)u=$

$$=\frac{1}{\chi^4 k}\Delta^2\left(\frac{u}{k}\right)-\frac{2}{\chi^2}\Delta\left(\frac{u}{k}\right)+u+\frac{2}{\chi^4}\operatorname{grad}\Delta\left(\frac{u}{k}\right)\times\operatorname{grad}\frac{1}{k}+ \tag{11.50}$$

$$+\frac{1}{\chi^4}\Delta\left(\frac{1}{k}\right)\Delta\left(\frac{u}{k}\right)-\frac{4}{\chi^2}\operatorname{grad}u\times\operatorname{grad}\frac{1}{k}-\frac{2u}{\chi^2}\Delta\left(\frac{1}{k}\right).$$

Por tanto, si $b_0^*(\chi;\xi,x):=\sum_{|\alpha|\leq 4}b_\alpha^*(\chi;x)\xi^\alpha$ entonces al tender χ a infinito tendremos

$b_0^*(\infty;\xi,x)=\left(\dfrac{|\xi|^2}{k(x)}+1\right)^2$, (cf. (11.29)). *Definimos*

$$\beta^*(\chi;z,x):=\left(b_z^*(D_x)-b^*(D_x)\right)B(\chi;z,x)=\left(b_z(D_x)-b^*(D_x)\right)B(\chi;z,x)=$$

$$=\sum_{|\alpha|\leq 4}\left(b_{z,\alpha}^*(\chi;x)-b_\alpha^*(\chi;x)\right)\left(\frac{D^\alpha}{\chi^{|\alpha|}}\right)B(\chi;z,x).$$

Entonces, omitiendo el parámetro χ en el argumento de β^*, obtenemos:

$$(11.51)\qquad \beta^*(z,x)=\frac{O(1)}{\chi^\varepsilon|x-z|^{1+\varepsilon}(1+\chi|x-z|)^N},$$

uniformemente en $x,z\in U=\overset{\circ}{U}\subset\subset D$ y $\chi\geq 1$. O sea, β^* satisface la misma estimación que β. En efecto, la demostración de (11.51) procede a lo largo de las mismas lineas que (11.42) utilizando las acotaciones (11.24)-(11.27). Precisamente, para $|\alpha|=2,3,4$ puede usarse (11.27) y si $|\alpha|=0,1$, (11.24). Sin embargo, para acotar los dos últimos sumandos en (11.50) conviene observar que vale

$$\frac{1}{(1+\chi|x-z|)^{N+1}}\leq\frac{1}{(1+\chi|x-z|)^N\chi|x-z|}=\frac{O(1)}{(1+\chi|x-z|)^N\chi^\varepsilon|x-z|^{1+\varepsilon}},\quad x,z\in U.$$

Se puede deducir ahora la

PROPOSICION 7.

$$u^*(z,x):=\beta^*(z,x)+\int_U\beta^*(z,y)\beta^*(y,x)dy+\dots,$$

$$V^*(z,x):=\int_U u^*(y,z)B^*(x,y)dy,$$

$$\Gamma^*(z,x):=B(z,x)+V^*(z,x),$$

tienen propiedades semejantes a las de u, V y Γ respectivamente.•

11G. $\Gamma(z,x)$ ES UNA SOLUCION FUNDAMENTAL DEL OPERADOR $b(D_x)$. El procedimiento descripto al comienzo del §11F para hallar Γ será correcto si se demuestra (11.31) y la existencia de $u(z,x)$, solución de (11.35), tal que $u(z,.)\in L^1(U)$. Esto último es lo que afirma la proposición 3. Veamos entonces que $\int_U\beta(z,x)\phi(x)dx=\int_U B(z,x)(b_z(D_x)-b^*(D_x))\phi(x)dx$ (cf. (11.31)). Sea α un multiíndice y ε_j, $j=1,2,\dots$, multiíndices tales que $|\varepsilon_j|=1$, $\sum_{j=1}^{|\alpha|}\varepsilon_j=\alpha$. Luego, si $\beta_j=\sum_{i>j}\varepsilon_i$, $\gamma_j=\sum_{i<j}\varepsilon_i$, tenemos $|\gamma_j|+|\beta_j|=|\alpha|-1$ y

$$(11.52)\qquad (D^\alpha u)\phi-(-1)^{|\alpha|}u(D^\alpha\phi)=-\sum_{j=1}^{|\alpha|}(-1)^j D^{\varepsilon_j}(D^{\beta_j}\phi\, D^{\gamma_j}u),$$

como se ve desarrollando el miembro derecho. Consideremos

$$I_\delta:=\int_{U\setminus B_\delta(z)}\beta(z,x)\phi(x)dx-\int_{U\setminus B_\delta(z)}B(z,x)(b_z(D_x)-b^*(D_x))\phi(x)dx$$

De (11.30) y (11.52) obtenemos $I_\delta=\int_{U\setminus B_\delta(z)}\{(b_z(D_x)-b(D_x))B(z,x)\}\phi(x)dx$

$$-\int_{U\setminus B_\delta(z)}B(z,x)(b_z(D_x)-b^*(D_x))\phi(x)dx=\sum_{|\beta|,|\gamma|\leq 3}\int_{|z-x|=\delta}C_{\gamma\beta}(x,z)D_x^\gamma B(z,x)D_x^\beta\phi(x)\,d\sigma_\delta(x).$$

Los sumandos con $|\gamma|\leq 2$ son, en virtud de (11.24), $O(\delta^{1-\varepsilon})$. Si $|\gamma|=3$ entonces $\beta=0$ y de (11.39), (11.40) y (11.27) obtenemos que $C_{\gamma 0}=O\left(\frac{1}{k^2(z)}-\frac{1}{k^2(x)}\right)=O(\delta)$.

Luego, la integral correspondiente es $O(\delta^{1-\varepsilon})$, $\lim_{\delta\to 0}I_\delta=0$ sigue y (11.31) vale.

Análogamente se demuestra que $\Gamma^*(\chi;z,x)$ es una solución fundamental del operador $b^*(D_x)$.

NOTA. Para toda $\phi \in C_0^\infty(U)$:

$$\int_U \Gamma^*(\chi;z,x)\,b(D_x)\phi(x)\,dx = \phi(z) = \int_U \Gamma(\chi;z,x)\,b^*(D_x)\phi(x)\,dx,$$

y si

$(\Gamma\eta)(x) := \int_U \Gamma(\chi;z,x)\eta(z)dz$ entonces $<\eta,\phi>=<\Gamma\eta,b^*\phi>$. Es decir, $b(\Gamma\eta)=\eta$.

Como b es un operador hipoelíptico, si $\eta \in C_0^\infty(U)$ resulta que $\Gamma\eta \in C^\infty(U)$. Además (cf. (11.37)), $\Gamma(\chi;z,.) \in C^\infty(U\setminus\{z\})$.

11H. **TEOREMA 6** (Gårding). Sea $C(f,g)$ una funcional bilineal real asociada al operador $b(D_x)=\left(1-\dfrac{1}{tk(x)}\Delta\right)^2$, $t\geq 1$, definida en $L^2(D)\times L^2(D)$ tal que

(11.53) $$\begin{cases} |C(f,g)| \leq K\|f\|_2\|g\|_2, & \textit{para toda } f,g \in L^2(D), \textit{reales}, \\ C(b\phi,\psi)=C(\phi,b^*\psi)=(\phi,\psi), & \textit{para toda } \phi,\psi \in C_0^\infty(D), \textit{reales} \end{cases}$$

Entonces, dado $V=\overset{\circ}{V} \subset\subset D$, existe un núcleo continuo en $V\times V$, $\sigma(\chi;y,x)$, tal que

(11.54) $$C(\phi,\psi)=\iint \sigma(\chi;y,x)\phi(x)\psi(y)\,dx\,dy$$

para toda $\phi,\psi \in C_0^\infty(V)$. Este núcleo es único y de la forma

(11.55) $$\sigma(\chi;y,x)=\Gamma^*(\chi;y,x)+r(\chi;y,x)$$

con $r\in C(V\times V)$ y $r=\dfrac{O(1)}{\chi^N}$ si x e y pertenecen a un abierto V_1, $D \supset\supset V_1 \supset\supset V$.

Además verifica:

(11.56) $$\sigma(\chi;y,x)=\frac{O(1)\chi^2}{(1+\chi|x-y|)^N} \text{ uniformemente en } V,$$

(11.57 $$\lim_{\chi\to\infty}\frac{\sigma(\chi;y,x)}{\chi^2}=\delta_{x,y}\frac{k(x)}{4\pi}, \text{ para todo } x\in V.\blacklozenge$$

Antes de demostrar este teorema veamos como se deducen de él los teoremas 3 y 4. Notemos antes que las funciones que aparecen son reales.

DEMOSTRACION DEL T.3. De (11.4) obtenemos

$$b(D_x)t^2G_tf=f \text{ si } f\in L^2(D); \quad t^2G_t(b(D_x)\phi)=\phi \quad \text{si } \phi\in C_0^\infty(D).$$

Para ϕ, ψ reales, definamos:

(11.58) $$C(\phi,\psi):=(t^2G_t\phi,\psi).$$

Entonces,

$$C(b\phi,\psi)=(\phi,\psi)=(bt^2G_t\phi,\psi)=C(\phi,b^*\psi),$$

$$C(\phi,\psi)=\iint t^2g_t(y,x)\phi(x)\psi(y)\,dx\,dy.$$

Del T.1 se deduce:

$$\left|\iint t^2g_t(y,x)\phi(x)\psi(y)\,dx\,dy\right| = \left|t^2\sum c_n(\phi)c_n(\psi/k)(\Lambda_n+t)^{-2}\right| \leq$$

$$\leq \left(\sum \frac{c_n(\phi)^2}{(1+\Lambda_n/t)^2}\right)^{1/2} \left(\sum \frac{c_n(\psi/k)^2}{(1+\Lambda_n/t)^2}\right)^{1/2} \leq \|\phi\|_2 \|\psi/k\|_2 \leq M\|\phi\|_2\|\psi\|_2 .$$

O sea, $t^2 g_t(y,x)$ es un núcleo $\sigma(\chi;y,x)$. Entonces

$$(11.59) \begin{cases} t\,g_t(x,x) = c(\chi;x,x)/\chi^2 = O(1) & en\, U \subset\subset D, \\ t\,g_t(y,x) \to \delta_{x,y} \dfrac{k(x)}{4\pi}, & \end{cases} \qquad \text{QED.}$$

DEMOSTRACION DEL T.4. Como ya vimos una funcional bilineal puede definirse por $\dot{C}(\phi,\psi) = (t^2\dot{G}_t\phi,\psi)$ para $\phi,\psi \in C_0^\infty(\dot{D})$ donde $\dot{G}$ es el operador definido en el §11B para un recinto $\dot{D} \supset\supset D$. Entonces, $t\,\dot{g}_t(x,x) = O(1)$ en D.

Como el T.2 implica que

$$(11.60) \qquad O(1) = t\,\dot{g}_t(x,x) \geq t\,g_t(x,x) \geq 0 \text{ en } D,$$

sigue inmediatamente de (11.59) que $t\int_D g_t(x,x)dx \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{4\pi}\int_D k(x)dx$, QED.

11I. **PROPOSICION 8.** Sean $x \in B_r(x_0)$, $z \in B_r(z_0)$, $|x_0 - z_0| > 4r$, $|\alpha| = 4$. La función $D_x^\alpha \Gamma(\chi;z,x)$ es integrable en $B_r(x_0) \times B_r(z_0)$, y define una aplicación continua de $B_r(z_0)$ en $L^2(B_r(x_0))$,

$$D_x^\alpha \Gamma(\chi;z,.) : B_r(z_0) \to L^2(B_r(x_0)) \quad \text{si } \chi \geq \chi_0 .\bullet$$

DEMOSTRACION. Definamos

$$P_t(x,d) = t^2 b(D) = \left(-\frac{1}{k(x)}\Delta + t\right) \circ \left(-\frac{1}{k(x)}\Delta + t\right) = \left(-\frac{1}{k}\Delta\right)^2 - 2\frac{t}{k}\Delta + t^2 .$$

Sea $\phi \in C_0^\infty(B_{2r}(x_0))$ real. De la desigualdad de Gårding (en el apéndice cf. (85)) sigue que

$$|\phi|_2^2 \leq M_0(P_0\phi,\phi) + M_1|\phi|_0^2 = M_0(P_t\phi,\phi) + |\phi|_0^2(M_1 - M_0t^2) + 2M_0t(\frac{1}{k}\Delta\phi,\phi) \leq$$
$$\leq M_0(P_t\phi,\phi) + |\phi|_0^2(M_1 - M_0t^2) + M_2t|\phi|_0|\phi|_1 .$$

En efecto,

$$\int(\Delta\phi)\frac{\phi}{k}\,dx = \int div((\phi/k)\,\text{grad}\,\phi)\,dx - \int \text{grad}\,\phi \times \text{grad}\,(\phi/k)\,dx =$$
$$= -\int|\text{grad}\phi|^2\,\frac{dx}{k} - \int \phi\,\text{grad}\,\phi \times \text{grad}\,(1/k)\,dx \leq -\int \phi\,\text{grad}\phi \times \text{grad}\,(1/k)\,dx = O(|\phi|_1|\phi|_0) .$$

Por otra parte, $\quad |\phi|_1^2 = \int|\hat{\phi}|^2(1+|x|)^2\,dx \leq |\phi|_0|\phi|_2$,

y por tanto (*)

$$|\phi|_0|\phi|_1 \leq |\phi|_0^{3/2}|\phi|_2^{1/2} \leq \varepsilon|\phi|_2^2 + \varepsilon^{-1/3}|\phi|_0^2,$$
$$|\phi|_2^2 \leq M_0(P_t\phi,\phi) + |\phi|_0^2(M_1 - M_0t^2) + M_2t(\varepsilon|\phi|_2^2 + \varepsilon^{-1/3}|\phi|_0^2) .$$

(*) Sean $a,b \geq 0$, $0 < \varepsilon < 1$. Vale que: $a^{3/2}b^{1/2} \leq \varepsilon b^2 + a^2\varepsilon^{-1/3}$. En efecto, sean $a > 0$, $b = 1$, Separando los casos $a < \varepsilon^{2/3}$ y $a \geq \varepsilon^{2/3}$ vemos que: $a^{3/2} \leq \varepsilon + a^2\varepsilon^{-1/3}$. Por homogeneidad obtenemos la desigualdad general.

Haciendo $\varepsilon = \frac{1}{2M_2 t}$ obtenemos (para $t > \frac{1}{2M_2}$)

$$\frac{|\phi|_2^2}{2} \le M_0(P_t\phi,\phi) + |\phi|_0^2 (M_1 - M_0 t^2 + (2M_2^4 t^4)^{1/3}).$$

En consecuencia, si t es bastante grande

$$|\phi|_2^2 \le C_0(P_t\phi,\phi),\ C_0 = 2M_0,$$

es decir, el operador uniformemente fuertemente elíptico P_t satisface (84) del apéndice. Sea ahora $B = B_{2r}(x_0)$, $b = \partial B$, $u_z(x) = \psi(x)\Gamma(\chi; z, x)$, donde $\psi \in C_0(B_{2r}(x_0))$, $\psi = 1$ en $B_r(x_0)$. Entonces $u_z(.) \in H_4(B)$ para todo $z \in B_r(z_0)$, (cf. Nota precedente).
La aplicación,

$$H_4(B) \to H_0(B) \times H_{7/2}(b) \times H_{5/2}(b)$$

definida por $P: v \to (P_t v, v|_b, \partial v / \partial \eta)$, $\eta =$ normal exterior a *b*, es *continua* (cf. *iii*) §A4 del apéndice). Por otra parte

$$H_4(B) \subset H_2(B),\ H_0(B) \subset H_{-2}(B),\ H_{7/2}(b) \subset H_{3/2}(b),\ H_{5/2}(b) \subset H_{1/2}(b);$$

y si $t \ge \chi_0^2$, la aplicación

$$P: H_2(B) \to H_{-2}(B) \times H_{3/2}(b) \times H_{1/2}(b)$$

es *sobre*, *biunívoca* y *bicontinua* (cf. *iv*) §A4 del apéndice).
En consecuencia, P es biunívoca en $H_4(B)$ y sobre un *subespacio* L de $H_0(B) \times H_{7/2}(b) \times H_{5/2}(b)$. Además,

$$P_t(x, D)u = \psi P_t\Gamma + Q(x, D)\Gamma = Q(x, D)\Gamma,$$

donde Q es un operador de orden ≤ 3. Aplicando el teorema del gráfico cerrado obtenemos

$$|u_z|_4 \le M|Q(x, D)\Gamma(\chi; z, .)|_0,$$

pues u se anula en el borde b. De la proposición 6 se deduce ahora que u_z es continua como función de $z \in B_{2r}(z_0)$ a valores en $H_4(B)$. Y de esto sigue la tesis, QED.

COROLARIO. Si $\chi \ge \chi_0$, $b(D)$ es un operador uniformemente fuertemente elíptico que satisface la siguiente relación de coercividad

$$|\phi|_2^2 \le M\chi^4 \operatorname{Re}(b(D)\phi, \phi),$$

con M= constante independiente de χ y $\phi \in C_0^\infty(D)$.♦

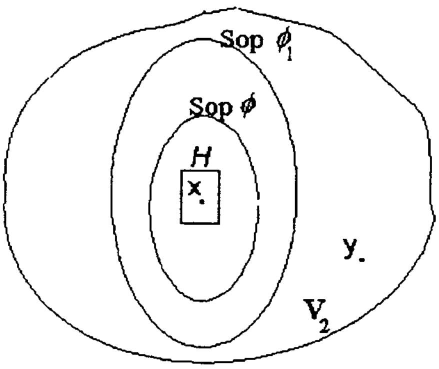
11J. DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE GÅRDING. Si un núcleo continuo $c(\chi; y, x)$ define una funcional lineal como en (11.54) entonces es único. Si además es de la forma (11.55) entonces de la proposición 5 y (11.22) siguen (11.56) y (11.57). Resta entonces por demostrar que existe un núcleo continuo para la funcional C si las igualdades y desigualdades en (11.53) son satisfechas.

LEMA 1. Sean $V_1 = \overset{\circ}{V_1} \subset\subset V_2 = \overset{\circ}{V_2} \subset\subset V_3 = \overset{\circ}{V_3} \subset\subset D$. Supongamos $x \ne y$, $x, y \in V_2$, y que $\psi \in C_0^\infty(V_3)$, $\psi = 1$ en V_2. Entonces

(11.61) $$\Gamma^*(x, y) - \Gamma(y, x) =: \rho(y, x) = \int_{V_3 \setminus \bar{V}_2} \Gamma(y, z)\left[b^*(D_z)(\psi(z)\Gamma^*(x, z))\right] dz,\ ^{(**)}.♦$$

(**) El corchete indica que la distribución en él encerrada es función y definida en $z \ne x$.

DEMOSTRACION. Sean $f(z)=\Gamma(y,z)$, $f^*(z)=\Gamma^*(x,z)$, $\phi\in C_0^\infty(V_2\setminus\{y\})$, $\phi=1$ en un entorno H de x, $\phi_1\in C_0^\infty(V_2\setminus\{y\})$, $\phi_1=1$ en un entorno del soporte de ϕ.



La siguiente función:

$$g(z):=(\psi(z)-\phi(z))f^*(z)\in C_0^\infty(V_3),$$

es tal que

$$b^*g=\lfloor b^*(\psi f^*)\rfloor+\lfloor b^*((1-\phi)f^*)\rfloor,$$

pues b^*f^* se anula en $z\neq x$. Entonces,

$$b^*g=\lfloor b^*(\psi f^*)\rfloor+b^*((1-\phi)f^*)$$

con el segundo sumando en $C_0^\infty(V_2)$. En efecto,

$$\phi_1 b^*((1-\phi)f^*)=b^*((1-\phi)f^*).$$

Además,

$$\Gamma^*(x,y)=f^*(y)=g(y)=<f,b^*g>.$$

De lo dicho sigue ahora que

$$<f,b^*g>=<f,\lfloor b^*(\psi f^*)\rfloor>+<f,\phi_1 b^*((1-\phi)f^*)>=\rho(y,x)+<b(\phi_1 f),(1-\phi)f^*>=$$
$$=\rho(y,x)+<(1-\phi)f^*,b(\phi_1 f)>.$$

Como $b(\phi_1 f)$ se anula en un entorno del soporte de ϕ, la última expresión es igual a

$$\rho(y,x)+<f^*,b(\phi_1 f)>=\rho(y,x)+(\phi_1 f)(x)=\rho(y,x)+\Gamma(y,x),$$

o sea, $\Gamma^*(x,y)=\rho(y,x)+\Gamma(y,x)$, QED.

COROLARIO. La función $\rho(y,x)$ es continua en $V_2\times V_2$.•

En efecto, esto se deduce recurriendo a las proposiciones 1, 6 y 7, QED.

Definimos, utilizando la notación,

$$\Gamma^*(f,g)=\iint\Gamma^*(u,x)f(x)g(u)du\,dx=\int(\Gamma^*g)(x)f(x)dx=<f,\Gamma^*g>,\quad f,g\in L^2(V_3),$$

(11.62) $$C'(f,g):=C(f,g)-\Gamma^*(f,g).$$

De (11.53) y la Prop. 6 sigue que $|C'(f,g)|\le K'\|f\|_2\|g\|_2$. Bajo las mismas hipótesis que en el lema 1 tenemos,

LEMA 2. Existe una función continua $c'(t,s)\in C(V_1\times V_1)$ tal que

(11.63) $$C'(\phi,\psi)=\iint c'(t,s)\phi(t)\psi(s)dt\,ds-\rho(\phi,b^*(\mu\Gamma^*\psi)),$$

donde $\phi,\psi\in C_0^\infty(V_1)$, $\mu\in C_0^\infty(V_2)$, $\mu=1$ en un entorno de $\overline{V}_1$, y

(11.64) $$\rho(f,g):=\iint\rho(y,x)f(y)g(x)dy\,dx.$$

DEMOSTRACION. Obsérvese que $\Gamma^*\psi\in C^\infty(V_3)$ y $b^*(\mu\Gamma^*\psi)\in C_0^\infty(V_2)$. De (11.53) y (11.61) obtenemos (cf. Nota 11G):

$$C'(b\phi,\psi)=<\phi,\psi>-<b\phi,\Gamma^*\psi>=<\phi,\psi>-<\phi,\psi>=0.$$

Luego,

(11.65) $$C'(b\phi,\psi)=0,$$

(11.66) $$C'(\phi,b^*\psi)=-\rho(\phi,b^*\psi).$$

En efecto, $C'(\phi,b^*\psi)=<\phi,\psi>-\iint\Gamma(y,x)\phi(y)(b^*\psi)(x)dx\,dy+$

$$+\iint(\Gamma(y,x)-\Gamma^*(x,y))\phi(y)(b^*\psi)(x)\,dx\,dy=$$
$$=<\phi,\psi>-<\phi,\psi>-\iint\rho(y,x)\phi(y)(b^*\psi)(x)dxdy=-\rho(\phi,b^*\psi).$$

Recordando que b y b^* son hipoelípticos, de (11.65) y (11.66) concluímos que si $\phi,\psi \in C_0^\infty(V_1)$ entonces

(11.67) $$C'(\phi,\psi) = C'(\phi - b(\mu\Gamma\phi), \psi - b^*(\mu\Gamma^*\psi)) - \rho(\phi, b^*(\mu\Gamma^*\psi)).$$

Definamos, para $x,y \in V_1$, $z \in V_2$,

(11.68) $$\begin{cases} p(x,z) := b(D_z)((1-\mu(z))\Gamma(x,z)) = b(D_z)((1-\mu(z))[\Gamma(x,z)]) \\ p^*(z,y) := b^*(D_z)((1-\mu(z))\Gamma^*(y,z)). \end{cases}$$

$p(x,z) = 0$ para z en un entorno de $\overline{V_1}$. Como $b(D_z)[\Gamma(x,z)] = 0$ en $z \in V_2 \setminus \overline{V_1}$, $x \in V_1$, resulta

(11.68') $$p(x,z) = -b(D_z)(\mu(z)[\Gamma(x,z)]) = \sum_{|\beta|>0} A_{\beta\gamma}(z) D_z^\beta \mu(z) [D_z^\gamma \Gamma](x,z), \quad |\beta| \le 4, |\gamma| \le 3.$$

De las proposiciones 6 y 7 se deduce que $p(x,z)$ define una función continua en $V_1 \times V_2$, nula para z en $\overline{V_1}$ o z fuera de V_2. Luego, $\phi - b(\mu\Gamma\phi) =$
$= b(\Gamma\phi) - b(\mu\Gamma\phi) = b\{(1-\mu)\int \Gamma(x,z)\phi(x)dx\} = b(D_z)\int(1-\mu(z))[\Gamma(x,z)]\phi(x)dx =$
$= \int_{V_1} b(D_z)((1-\mu(z))[\Gamma(x,z)])\phi(x)dx = \int_{V_1} p(x,z)\phi(x)dx$. O sea, si $z \in V_2$,

(11.69) $$(\phi - b(D_z)(\mu\Gamma\phi))(z) = \int_{V_1} \phi(t)\, p(t,z)\, dt.$$

Análogamente, para $z \in V_2$,

(11.70) $$(\psi - b^*(\mu\Gamma^*\psi))(z) = \int_{V_1} \psi(s) p^*(z,s)\, ds.$$

Entonces, $C'(\phi - b(\mu\Gamma\phi), \psi - b^*(\mu\Gamma^*\psi)) = C'(\int_{V_1} \phi\, p\, dt, \int_{V_1} \psi\, p^* ds) =$

$$= C'(lim \sum_{i,j} \phi(t_{ij}) p(t_{ij},.)\Delta_{ij}, lim \sum_{k,l} \psi(s_{kl}) p^*(.,s_{kl})\Delta_{kl}) = (\#).$$

De la continuidad de C' y de la de p se deduce que la función

(11.71) $$c'(t,s) := C'(p(t,.), p^*(.,s)), \qquad (t,s) \in V_1 \times V_1,$$

es continua en (t,s). Como $\sum_{i,j} \phi(t_{ij}) p(t_{ij},x)\Delta_{ij}$ converge en $L^2(V_2)$ a $\int_{V_1} \phi(t)\, p(t,x)dt$, la expresión (#) es igual a $lim \sum\sum C'(p(t_{ij},.), p^*(.,s_{kl}))\phi(t_{ij})\psi(s_{kl})\Delta_{ij}\Delta_{kl} =$
$= \iint_{V_1\times V_1} C'(p(t,.), p^*(.,s))\phi(t)\psi(s)dtds = \iint_{V_1\times V_1} c'(t,s)\phi(t)\psi(s)dtds$, QED.

LEMA 3. Las mismas hipótesis que en los lemas precedentes. Existe un núcleo continuo $\sigma(z,y)$, $(z,y) \in V_2 \times V_1$, tal que

(11.72) $$\rho(\phi, b^*(\mu\Gamma^*\psi)) - \rho(\phi,\psi) = \rho(\phi(.), \int \sigma(.,t)\psi(t)\, dt).\bullet$$

DEMOSTRACION. $v(z) := b^*(\mu\Gamma^*\psi)(z) - \psi(z) = \sum_{\|\beta\|>0} B_{\beta\gamma}(z) D_z^\beta \mu(z) D_z^\gamma (\Gamma^*\psi)(z)$

se anula en V_1 y puede escribirse en la siguiente forma (cf. corolario prop. 6 y nota al pie en 11J): $\quad v(z) = \int [b^*(D_z)(\mu(z)\Gamma^*(t,z)) - \mu(z) b^*(D_z)\Gamma^*(t,z)]\psi(t)dt =$

$$= \int [b^*(D_z)(\mu(z)\Gamma^*(t,z))]\psi(t)\, dt.$$

En consecuencia, si *definimos* (cf. 11.68'),

$$(11.73)\qquad \begin{cases} \sigma(z,y) = b^*(D_z)(\mu(z)\Gamma^*(y,z)) & si\ (z,y) \in (V_2 \setminus \overline{V}_1) \times V_1, \\ \sigma(z,y) = 0 & si\quad (z,y) \in \overline{V}_1 \times V_1, \end{cases}$$

resulta que el núcleo σ es continuo y que $v(z) = \int \sigma(z,t)\psi(t)dt$. Luego,

$$\rho(\phi, b^*(\mu\Gamma^*\psi)) = \rho(\phi(x), \int \sigma(z,t)\psi(t)\,dt), \qquad \text{QED.}$$

Para completar la demostración del Teorema 6 de Gårding *definamos*:

$$(11.74)\qquad \lambda(x,y) := \int \sigma(z,y)\rho(x,z)\,dz = \int_{V_2\setminus\overline{V}_1} \rho(x,z)\sigma(z,y)\,dz.$$

Entonces (cf. (11.64), $\rho(\phi(x), \int \sigma(z,y)\psi(y)\,dy) = \int \lambda(x,y)\phi(x)\psi(y)\,dy = \lambda(\phi,\psi)$.

Recurriendo a (11.74), (11.72), (11,71) y (11.67) obtenemos,

$$(11.75)\qquad C(\phi,\psi) = \Gamma^*(\phi,\psi) + C'(\phi,\psi) = \Gamma^*(\phi,\psi) + c'(\phi,\psi) - \rho(\phi,\psi) - \lambda(\phi,\psi),$$

$$C(\phi,\psi) = \iint c(\chi; x,y)\phi(x)\psi(y)\,dx\,dy,$$

$$(11.76)\qquad c(x,y) := \Gamma^*(y,x) + c'(x,y) - \rho(x,y) - \lambda(x,y) \in C(V_1 \times V_1), \qquad \text{QED.}$$

Definamos:

$$(11.76)\qquad r(x,y) := c'(x,y) - \rho(x,y) - \lambda(x,y),$$

y $d := dist(\overline{V}, V_2 \setminus \overline{V}_1)$ donde el abierto V_1 contiene la clausura del abierto V. Queremos ahora estimar el crecimiento de la función continua $r(x,y) \in C(V_1 \times V_1)$ en función del parámetro χ. De (11.68) y las estimaciones derivadas de Γ se deduce que

$$(11.77)\qquad p(x,y) = \frac{O(1)}{(1+\chi d)^N}.$$

Idem p^*. De (11.73) y (11.68) sigue que, salvo por los dominios de definición: $\sigma(z,y) = p^*(z,y)$.

Luego, de (11.74) obtenemos (cf. prop. 5):

$$(11.78)\qquad \lambda(x,y) = \int_{V_2\setminus\overline{V}_1} (\Gamma^*(z,x) - \Gamma(x,z))\sigma(z,y)\,dz = \frac{O(1)}{(1+\chi\, d)^N}.$$

Recordemos que

$$(11.79)\qquad \rho(x,y) = \int_{V_3\setminus\overline{V}_2} \Gamma(x,z)\left[b^*(D_z)\psi(z)\Gamma^*(y,z)\right]dz$$

El corchete en (11.79) es semejante a σ aunque definido con una función auxiliar ψ en lugar de la función μ utilizada en la definición de p^*. Luego, valen las mismas estimaciones que en (11.78). Luego,

$$(11.80)\qquad \rho = \frac{O(1)}{\chi^N}.$$

Finalmente,

$$(11.81)\qquad |c'(x,y)| = |C'(p(x,.), p^*(.,y))| \le K'\|p(x,.)\|\,\|p(.,y)\| = O(\chi^{-N}).$$

Hemos probado entonces la

PROPOSICION 9. $r(x,y) := c'(x,y) - \rho(x,y) - \lambda(x,y) \in C(V_1 \times V_1)$ y $r = O(\chi^{-N})$.

CAPITULO 12

ANALITICIDAD DE LAS SOLUCIONES DE LA ECUACION $P(D)u = 0$ PARA $P(D)$ ELIPTICO.

12A. Sea $Z = \{\eta \in C^n : P(\eta) = 0\}$ y $d(\xi) := \text{dist}\ (\xi, Z)$, donde P es un polinomio asociado a un operador hipoelíptico, (cf. Cap. 7). *Diremos*, por ejemplo, que $d(\xi) \approx |\xi|$ si existe una constante $M > 0$ tal que $M^{-1}|\xi| \le d(\xi) \le M|\xi|$ para $|\xi|$ suficientemente grande.
Los operadores diferenciales que consideramos en este capítulo son todos a coeficientes constantes, (cf. Cap. 7, sección 7G).
TEOREMA 1. Sea $P(D)$ elíptico de orden m. Entonces, para $\xi \in R^n$,

(12.1) $$d(\xi) \approx |\xi|. \blacklozenge$$

DEMOSTRACION. Se sabe que, para $\xi \in R^n$,

(12.2) $$d(\xi) \sum_{\alpha \ne 0} \left|P^{(\alpha)}(\xi) / P(\xi)\right|^{1/|\alpha|} \approx 1.$$

Por otra parte, si $|\xi| >> 1$: $|P(\xi)| \ge M'|\xi|^m - M''|\xi|^{m-1} \ge M|\xi|^m$, y $\left|P^{(\alpha)}(\xi)\right| \le K|\xi|^{m-|\alpha|}$. Luego, si $|\xi| >> 1$: $\sum_{\alpha \ne 0} \left|P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi)\right|^{1/|\alpha|} \le K'/|\xi|$. De las observaciones hechas sigue el teorema, pues, si $\zeta_0 \in Z$ entonces $|\zeta_0 - \xi| \ge d(\xi)$, y cuando $|\xi|$ es bastante grande $|\zeta_0 - \xi| \le 2|\xi|$, QED.

12B. Sea $y \in R^n$. *Definimos* $\rho(y)$ como el infimo de los ρ que verifican

(12.3) $$|< y, \xi >| \le C(d(\xi) + 1)^\rho$$

para todo $\xi \in R^n$ y cierto C. Sea demuestra, y esto no es trivial, que para un operador hipoelíptico se alcanza el ínfimo, es decir $\rho(y)$ es un mínimo. Además, como $d(\xi) \le M|\xi|$ para $|\xi|$ grande, necesariamente $\rho \ge 1$ si $y \ne 0$.
En el caso elíptico que nos interesa, se deduce del teorema precedente que $\rho(y) = 1$ si $y \ne 0$. Resulta inmediatamente que

(12.4) $$\rho(t_1 y_1 + t_2 y_2) \le \sup(\rho(y_1), \rho(y_2)).$$

EJEMPLO. Sea $P(D) = \dfrac{\partial}{\partial x_1} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} \equiv iD_1 + D_2^2$. Luego, $P(\tau) = i\tau_1 + \tau_2^2$. Sea $\tau_1 = x_1 + iy_1$, $\tau_2 = x_2 + iy_2$. Entonces

$$P(\tau) = 0 \Leftrightarrow i\tau_1 = -\tau_2^2 \Leftrightarrow y_1 = x_2^2 - y_2^2,\ x_1 = -2x_2 y_2.$$

En consecuencia, $|\xi - \tau|^2 = (\xi_1 + 2x_2 y_2)^2 + (x_2^2 - y_2^2)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + y_2^2$;

$\xi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad |\xi - \tau|^2 = (x_2^2 + y_2^2)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + y_2^2 \ge c\xi_2^2$, $c > 0$, $|\xi| >> 1$, como se ve considerando los casos $|\xi_2 - x_2| \ge 2|x_2|$ y $|\xi_2 - x_2| < 2|x_2|$.

$\xi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad |\xi - \tau|^2 = |\xi_1 - \tau_1|^2 + |\tau_2|^2 = |\xi_1 - \tau_1|^2 + |\tau_1| = (x_1 - \xi_1)^2 + y_1^2 + |\tau_1| \ge M|\xi_1|$, como se ve tratando separadamente los casos $|\xi_1 - x_1| \le |\xi_1|/2$ y $|\xi_1 - x_1| > |\xi_1|/2$.
Entonces,

$$\xi_1 = 0 \Rightarrow |\xi| \le C(d(\xi)+1), \quad d(\xi) \le |\xi|,$$

$$\xi_2 = 0 \Rightarrow |\xi| \le K(d(\xi)+1)^2, \quad d(\xi) \le |\xi|^{1/2}.$$

La última desigualdad sigue de la precedente cadena de igualdades cuando $\tau_1 = \xi_1$.
En consecuencia, ρ toma distintos valores para direcciones distintas.

12C. **LEMA 1.** Existe una sucesión de subespacios

$$\{0\} = G_0 \underset{\neq}{\subset} G_1 \underset{\neq}{\subset} \ldots \underset{\neq}{\subset} G_k = R^n,$$

y una sucesión numérica: $\rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_k$ tal que

$$y \in G_j \setminus G_{j-1} \Rightarrow \rho(y) = \rho_j.$$

DEMOSTRACION. $G_\rho := \{y : \rho(y) \le \rho\}$ es un subespacio (cf. (12.4)) y el resultado sigue inmediatamente, QED.
Si elegimos un sistema ortonormal de vectores de manera que G_j sea generado por

$$e_1, e_2, \ldots, e_{\dim G_j},$$

podremos elegir una cadena de n subespacios distintos, para los cuales los ρ's correspondientes verifiquen:

$$\rho_1 \le \rho_2 \le \ldots \le \rho_n.$$

El teorema fundamental en este trozo de la teoría es el siguiente
TEOREMA 2. Sea P hipoelíptico en Ω, $u \in D'(\Omega)$ tal que $P(D)u = 0$. Entonces $u \in C^\infty(\Omega)$ y si $K \subset \Omega$ es un compacto, existe una constante $C = C(P,u,K,\Omega)$ tal que para todo $x \in K$ y todo α

(12.5) $$|D^\alpha u(x)| \le C^{|\alpha|+1} \alpha_1^{\rho_1\alpha_1} \ldots \alpha_n^{\rho_n\alpha_n}.$$

Si P es elíptico entonces $\rho_i = 1$ para todo i.•
COROLARIO 1. Si $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_n = 1$ en el teorema anterior entonces u es analítica en Ω.•
DEMOSTRACION DEL COROLARIO. Sea $x_0 \in K$, tal que $S_\varepsilon(x_0) :=$ la esfera con centro x_0 y radio $\varepsilon \subset K$. El módulo de la suma de los términos de orden m del desarrollo de Taylor alrededor de x_0, en un punto $x \in S_\varepsilon(x_0)$, está acotado por: (Recordemos la notación: $\alpha! := \alpha_1! \ldots \alpha_n!$ y $\alpha^\alpha := \alpha_1^{\alpha_1} \ldots \alpha_n^{\alpha_n}$)

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{C^{m+1}\alpha^\alpha |x-x_0|^m}{\alpha!} \le C(C\varepsilon)^m \sum_{|\alpha|=m} \frac{\alpha^\alpha}{\alpha!} \le C_0(C'\varepsilon)^m m^{n/2}.$$

En efecto, por la fórmula de Stirling: $\dfrac{h^h}{h!} \le M \dfrac{h^h}{h^{h-1/2}e^{-h}} \le M\sqrt{h}e^h$, de donde

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{\alpha^\alpha}{\alpha!} \le M^n e^m \sum_{|\alpha|=m} \sqrt{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)} \le M^n e^m m^{n/2} \#\{\alpha : |\alpha| = m\} \le M^n m^{n/2} e^m n^m.$$

Entonces la serie de Taylor converge absolutamente si $\varepsilon < \dfrac{1}{C'}$. Las mismas desigualdades muestran que el término del resto tiende a cero en este caso, QED.

12D. Sólo demostraremos el teorema 2 en el caso en que $P(D)$ sea elíptico y para esto nos apoyaremos en el siguiente

TEOREMA 3. Sean Ω abierto acotado en R^n, $\Omega_\delta := \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \delta\}$ para $\delta > 0$, $P(D)$ elíptico, $\delta_h > 0$ $h = 1,2,\dots,n$, j un entero no negativo y u tal que $P(D)u = 0$. Existe una constante $C = C(P,\Omega)$ tal que para $h = 1,2,\dots,n$,

(12.6) $$\sum_{\alpha\neq 0} \delta^{-2|\alpha|} \int_{\Omega_{\delta_h + j\delta}} \left|P^{(\alpha)}(D) D_h^j u\right|^2 dx \le C^j \delta^{-2j} \sum_{\alpha\neq 0} \delta^{-2|\alpha|} \int_{\Omega_{\delta_h}} \left|P^{(\alpha)}(D)u\right|^2 dx. \blacklozenge$$

DEMOSTRACION DEL T.2. Supongamos $n = 2$. Podemos suponer también que para cada β, $|D^\beta u(x)| \le M_\beta < \infty$ en Ω. Sea $c = c_1 + c_2 + \delta_2$ donde $1 > c_i, \delta_i > 0$ y tales que $K \subset \Omega_c$. Aplicando (12.6) con $\delta = \frac{c_1}{j}$ y observando que para algún α, con $|\alpha| = m$, $P^{(\alpha)}(D) = cte. \neq 0$, obtenemos

$$\delta^{-2m} \int_{\Omega_{\delta_1 + c_1}} \left|D_1^j u\right|^2 dx \le C_0^{j+1} \delta^{-2j} \sum_{\alpha\neq 0} \delta^{-2|\alpha|} \int_{\Omega_{\delta_1}} \left|P^{(\alpha)}(D)u\right|^2 dx = C_0^{j+1} \left(\frac{j}{c_1}\right)^{2j} \sum_{\alpha\neq 0} \delta^{-2|\alpha|} \int_{\Omega_{\delta_1}} \left|P^{(\alpha)}(D)u\right|^2 dx$$

Reemplazando u por $D_2^k u$ y Ω_{δ_1} por $\Omega_{\delta_2 + c_2}$, con $\frac{c_2}{k}$ en lugar de $\frac{c_1}{j}$, obtenemos

$$\delta^{-2m} \int_{\Omega_{\delta_2 + c_1 + c_2}} \left|D_1^j D_2^k u\right|^2 dx \le C_1^{j+1} (j/c_1)^{2j} C_1^{k+1} (k/c_2)^{2k} \sum_{\alpha\neq 0} \int_{\Omega_{\delta_2}} \delta^{-2|\alpha|} \left|P^{(\alpha)}(D)u\right|^2 dx.$$

Es decir, si $\beta = (j,k)$,

$$\int_{\Omega_c} \left|D^\beta u\right|^2 dx \le C_2^{2|\beta|+1} \beta^{2\beta} \sum_{\alpha\neq 0} \int_{\Omega_{\delta_2}} \delta^{-2|\alpha|} \left|P^{(\alpha)}(D)u\right|^2 dx \le M_0 C_2^{2|\beta|+1} \beta^{2\beta}.$$

Sabemos que si $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ entonces (T. de Sobolev),

$$|\phi(x)|^2 \le M \sum_{|\gamma| \le n} \int_\Omega \left|D^\gamma \phi\right|^2 dy.$$

Luego, sobre K,

$$\left|D^\alpha u(x)\right|^2 \le M' \sum_{|\gamma| \le n} \int_{\Omega_c} \left|D^{\alpha+\gamma} u(y)\right|^2 dy.$$

Para $x \in K$ vale,

$$\left|D^\alpha u(x)\right|^2 \le M'' \sum_{|\gamma| \le n} C_3^{|\alpha|+|\gamma|+1} (\alpha_1 + \gamma_1)^{2(\alpha_1+\gamma_1)} (\alpha_2 + \gamma_2)^{2(\alpha_2+\gamma_2)}.$$

En consecuencia, $\left|D^\alpha u(x)\right| \le M_1 C_4^{|\alpha|} \alpha^\alpha \le C_5^{|\alpha|+1} \alpha^\alpha$, QED.

12E. A continuación demostraremos algunos lemas que serán usados en la demostración del teorema 3. En el resto del capítulo $P(D)$ denota un operador elíptico. Con respecto a la notación véase la Def. 3 del Cap. 7.

DEFINICION 1. Sean $\varepsilon > 0$, s real. $\|\cdot\|_{s,\varepsilon} := \|\cdot\|_{2,k}$ con $k(\xi) = (1 + \varepsilon|\xi|)^s$. ♦

LEMA 2. Para todo $u \in C_0^\infty(R^n)$ vale

(12.7) $$\sum_{\alpha\neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\|P^{(\alpha)}(D)u\right\|_{s+1,\varepsilon}^2 \le M \sum_{\alpha} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\|P^{(\alpha)}(D)u\right\|_{s,\varepsilon}^2. \blacklozenge$$

DEMOSTRACION. El primer miembro de (12.7) es igual a

$$\int \sum_{\alpha\neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left|P^{(\alpha)}(\xi)\hat{u}(\xi)(1+\varepsilon|\xi|)^{s+1}\right|^2 d\xi = \int |\hat{u}(\xi)|^2 \left\{\sum_{\alpha\neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left|P^{(\alpha)}(\xi)\right|^2\right\} (1+\varepsilon|\xi|)^{2(s+1)} d\xi,$$

salvo por un factor constante. Bastará entonces mostrar que

$$\left\{\sum_{\alpha\neq 0}\varepsilon^{-2|\alpha|}\left|P^{(\alpha)}(\xi)\right|^2\right\}(1+\varepsilon|\xi|)^2 \leq M\sum_{\alpha}\varepsilon^{-2|\alpha|}\left|P^{(\alpha)}(\xi)\right|^2 .$$

Como $\dfrac{1+\varepsilon|\xi|}{1+\varepsilon\, d(\xi)} \approx 1$, es suficiente ver que

$$\left\{\sum_{\alpha\neq 0}\varepsilon^{-2|\alpha|}\left|P^{(\alpha)}(\xi)\right|^2\right\}(1+\varepsilon\, d(\xi))^2 \leq M'\sum_{\alpha}\varepsilon^{-2|\alpha|}\left|P^{(\alpha)}(\xi)\right|^2 .$$

La desigualdad se satisface con $M'=4$ si $\varepsilon\, d(\xi)\leq 1$. Si $\varepsilon\, d(\xi)>1$ entonces $(1+\varepsilon\, d(\xi))^2 \leq 4(\varepsilon\, d(\xi))^2$, Luego, teniendo en cuenta (7.23) del Cap. 7,

$$\left\{\sum_{\alpha\neq 0}\varepsilon^{-2|\alpha|}\left|P^{(\alpha)}(\xi)\right|^2\right\}(1+\varepsilon\, d(\xi))^2 \leq 4\left(\sum_{\alpha\neq 0}\varepsilon^{-2|\alpha|}\left|P^{(\alpha)}(\xi)\right|^2\right)(\varepsilon\, d(\xi))^2 \leq$$

$$\leq 4K\left(\sum_{\alpha\neq 0}\varepsilon^{-2|\alpha|}\left|P(\xi)\right|^2 (d(\xi))^{-2|\alpha|}\right)(\varepsilon\, d(\xi))^2 =$$

$$= 4K\left(\sum_{\alpha\neq 0}(\varepsilon\, d(\xi))^{2-2|\alpha|}\right)\left|P(\xi)\right|^2 \leq M'\left|P(\xi)\right|^2, \text{ QED.}$$

LEMA 3. Sea $P(D)u=0$ en $S_\varepsilon=\{x:|x|<\varepsilon\}$. Sean $\phi\in C_0^\infty(S_1)$ y s entero no negativo. Si denotamos con $\phi^\varepsilon(x)$ a $\phi(x/\varepsilon)$, tenemos

$$(12.8)\qquad \sum_{\alpha\neq 0}\varepsilon^{-2|\alpha|}\left\|P^{(\alpha)}(D)(u\phi^\varepsilon)\right\|_{s,\varepsilon}^2 \leq M\sum_{\alpha\neq 0}\varepsilon^{-2|\alpha|}\int_{S_\varepsilon}\left|P^{(\alpha)}(D)u\right|^2 dx$$

con M independiente de u y de ε.

DEMOSTRACION. Sea $s=0$. Entonces $\|\cdot\|_{0,\varepsilon}=\|\cdot\|_2$. Recordando que

$$Q(D)(u\psi)=\sum_{\beta}(D^\beta\psi)(Q^{(\beta)}(D)u)/\beta!$$

se obtiene

$$(12.9)\qquad P^{(\alpha)}(D)(u\phi^\varepsilon)=\sum_{\beta}\frac{D^\beta\phi^\varepsilon}{\beta!}P^{(\alpha+\beta)}(D)u=\sum_{\beta}\frac{(D^\beta\phi)^\varepsilon}{\varepsilon^{|\beta|}\beta!}P^{(\alpha+\beta)}(D)u,$$

$$\varepsilon^{-2|\alpha|}\left\|P^{(\alpha)}(D)(u\phi^\varepsilon)\right\|_{0,\varepsilon}^2 \leq M\sum_{\beta}\varepsilon^{-2(|\alpha|+|\beta|)}\left\|D^\beta\phi\right\|_\infty \int_{S_\varepsilon}\left|P^{(\alpha+\beta)}(D)u\right|^2 dx .$$

Para demostrar (12.8) para $s>0$ procederemos por inducción. Suponiendola cierta para s, demostrémosla para $s+1$.

Por lema 2:

$$\sum_{\alpha\neq 0}\varepsilon^{-2|\alpha|}\left\|P^{(\alpha)}(D)(u\phi^\varepsilon)\right\|_{s+1,\varepsilon}^2 \leq C\left[\sum_{\alpha\neq 0}\varepsilon^{-2|\alpha|}\left\|P^{(\alpha)}(D)(u\phi^\varepsilon)\right\|_{s,\varepsilon}^2+\left\|P(D)(u\phi^\varepsilon)\right\|_{s,\varepsilon}^2\right].$$

Pero, si $\psi=1$ en el soporte de ϕ, $\psi\in C_0^\infty(S_1)$, entonces por (12.9),

$$P(D)(u\phi^\varepsilon)=\sum_{\beta\neq 0}\frac{(D^\beta\phi)^\varepsilon}{\varepsilon^{|\beta|}\beta!}P^{(\beta)}(D)(\psi^\varepsilon u).$$

Luego, $$\left\|P(D)(u\phi^\varepsilon)\right\|_{s,\varepsilon}^2 \leq C'\left[\sum_{\alpha\neq 0}\varepsilon^{-2|\alpha|}\left\|P^{(\alpha)}(D)(u\psi^\varepsilon)\right\|_{s,\varepsilon}^2\right],$$

y el lema sigue, QED.

LEMA 4. Sea $P(D)u = 0$ en S_ε, $0 < \varepsilon < 1$. Existe una constante M independiente de ε y u tal que

$$\varepsilon^2 \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \int_{S_{\varepsilon/2}} \left|P^{(\alpha)}(D)(D_1 u)\right|^2 dx \leq M \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \int_{S_\varepsilon} \left|P^{(\alpha)}(D)u\right|^2 dx . \blacklozenge$$

DEMOSTRACION. Si $v \in C_0^\infty(R^n)$,

$$\varepsilon^2 \int |D_1 v|^2 dx = \int \left|\hat{v}(\xi)\xi_1 \varepsilon\right|^2 d\xi \leq \int |\hat{v}|^2 (1 + \varepsilon|\xi|)^2 d\xi = \|v\|_{1,\varepsilon}^2 .$$

Sean $\phi \in C_0^\infty(S_1)$, $\phi = 1$ en $S_{1/2}$, $v := P^{(\alpha)}(D)(u\phi^\varepsilon)$. Entonces

$$\varepsilon^2 \int \left|D_1 P^{(\alpha)}(D)(u\phi^\varepsilon)\right|^2 dx \leq \left\|P^{(\alpha)}(D)(u\phi^\varepsilon)\right\|_{1,\varepsilon}^2 \text{ y}$$

$$\varepsilon^2 \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left|P^{(\alpha)}(D)(D_1(u\phi^\varepsilon))\right|^2 dx \leq \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\|P^{(\alpha)}(D)(u\phi^\varepsilon)\right\|_{1,\varepsilon}^2 \leq \text{por lema 3} \leq$$

$$\leq M \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \int_{S_\varepsilon} \left|P^{(\alpha)}(D)u\right|^2 dx \text{ y el lema sigue,} \qquad \text{QED.}$$

12F. DEMOSTRACION DEL TEOREMA 3. Sea $y \in \Omega_{\delta_1 + \varepsilon}$ y $S_\varepsilon = \{x : |x - y| < \varepsilon\}$. Entonces, del lema 4 obtenemos,

$$A = \varepsilon^2 \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \int_{|x-y|<\varepsilon/2} \left|P^{(\alpha)}(D) D_1 u\right|^2 dx \leq M \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \int_{|x-y|<\varepsilon} \left|P^{(\alpha)}(D)u\right|^2 dx = B .$$

Luego,

$$\int_{\Omega_{\delta_1+\varepsilon}} A\, dy \leq \int_{\Omega_{\delta_1+\varepsilon}} B\, dy \leq M \int_{\Omega_{\delta_1}} \left\{ \varepsilon^n |S_1| \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left|P^{(\alpha)}(D)u\right|^2 \right\} dx ,$$

$$\int_{\Omega_{\delta_1+\varepsilon}} A\, dy \geq \int_{\Omega_{\delta_1+\varepsilon+\varepsilon/2}} \left\{ (\varepsilon/2)^n |S_1| \varepsilon^2 \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left|P^{(\alpha)}(D)(D_1 u)\right|^2 \right\} dx .$$

Pongamos $\delta = \varepsilon + \varepsilon/2$, es decir, $\varepsilon = 2\delta/3$. Luego,

$$\int_{\Omega_{\delta_1+\delta}} \left(\frac{2\delta}{3}\right)^2 \sum_{\alpha \neq 0} \left(\frac{2\delta}{3}\right)^{-2|\alpha|} \left|P^{(\alpha)}(D)(D_1 u)\right|^2 dx \leq 2^n M \int_{\Omega_{\delta_1}} \sum_{\alpha \neq 0} \left(\frac{2\delta}{3}\right)^{-2|\alpha|} \left|P^{(\alpha)}(D)u\right|^2 dx .$$

Por tanto, $\displaystyle\int_{\Omega_{\delta_1+\delta}} \sum_{\alpha \neq 0} \delta^{-2|\alpha|} \left|P^{(\alpha)}(D)(D_1 u)\right|^2 dx \leq \delta^{-2} M_1 \int_{\Omega_{\delta_1}} \sum_{\alpha \neq 0} \delta^{-2|\alpha|} \left|P^{(\alpha)}(D)u\right|^2 dx$,

y tenemos el teorema para $j = 1$, QED.

CAPITULO 13
ALGUNOS TEOREMAS DE INMERSION.

13A. En los resultados que consideramos en este capítulo un espacio de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ se aplica en forma continua en otro definido sobre el contorno de Ω y obtenido del primero por restricción al borde de sus elementos más regulares. Si s es un número real, $H^s(R^n)$ *designa* al espacio de las distribuciones $u \in S'$ tales que $\hat{u}\,(=F_{R^n}u)$ es una función tal que su norma $\|u\|_s = \left(\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{R^n} |\hat{u}|^2 (1+|x|^2)^s dx\right)^{1/2}$ es finita, (O sea, para $k(x) = \left(1+|x|^2\right)^{s/2}$, $H^s(R^n) = B_{2,k}(R^n)$, cf. Cap. 10, §10B y Cap. 7, Def. 3). Si $s = m$ entonces

$$\langle u \rangle_m := \sqrt{\sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|_2^2}\,. \tag{13.1}$$

define una norma equivalente a $\|.\|_m$. *Designaremos*, si m es un entero positivo, con $H^m(\Omega)$ a $W^{m,2}(\Omega)$. (13.1) es la norma con la que el espacio $W^{m,2}(R^n)$, o en general $W^{m,2}(\Omega)$, está munido, (cf. [A]).

Si $\Omega = R^n_+$ entonces $C^\infty_{0,+}(\Omega) := \left\{u|_\Omega : u \in C^\infty_0(R^n)\right\}$ es *denso* en $H^m(R^n_+)$ y podemos definir una aplicación lineal $\gamma : C^\infty_{0,+} \to C^\infty_0(R^{n-1})$, mediante

$$\gamma u(x') = u(x',0),\ x' = (x_1,\dots,x_{n-1}).$$

Esta aplicación γ lleva continuamente $H^m(R^n_+) \cap C^\infty_{0,+}$ en $H^{m-1/2}(R^{n-1})$ y su extensión continua a $H^m(R^n_+)$ es una suryección. En efecto, vale el

TEOREMA 1. *i)* Sea $m \ge 1$, $u \in C^\infty_0(R^n)$. Entonces, para $\Omega = R^n_+$,

$$\|\gamma u\|_{m-1/2} \le C\|u\|_m, \qquad C = C(n,m).$$

ii) γ se extiende en forma única a $H^m(R^n_+)$ y $\gamma(H^m(R^n_+)) = H^{m-1/2}(R^{n-1})$.♦

DEMOSTRACION. *i)* Sea $v(x',t) := (F_{R^{n-1}}\, u(.,t))(x')$. Entonces,

$$|v(x',0)|^2 = v(x',0)\bar{v}(x',0) = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}(v(x',t)\bar{v}(x',t))dt = -2\,\mathrm{Re}\int_0^\infty \frac{\partial v(x',t)}{\partial t} v(x',t)dt\,,$$

$$\|\gamma u\|^2_{m-1/2} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} \int_{R^{n-1}} |v(x',0)|^2 (1+|x'|^2)^{m-1/2} dx' \le$$

$$\le 2\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} \left(\int_{R^n_+} |\partial v/\partial t|^2 (1+|x'|^2)^{m-1} dx'dt\right)^{1/2} \left(\int_{R^n_+} |v|^2 (1+|x'|^2)^m dx'dt\right)^{1/2}.$$

El último integrando es igual a $\left(\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} |x'|^{2j}\right)|v|^2 = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha |F_{R^{n-1}}(D^\alpha u)|^2$. Luego, salvo por un factor constante, $\int |v(x',t)|^2 (1+|x'|^2)^m dx'$ está acotado por

$$\sum c_\alpha \int_{R^{n-1}} |D^\alpha u|^2 (x',t)dx' \le M\|u\|^2_m.$$

Análogamente,

$\left(\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}|x'|^{2j}\right)|\partial v/\partial t|^2=\sum_{|\alpha|\le m} b_\alpha |F_{R^{n-1}}(D^\alpha u)|^2$ por lo que $\int|\partial v/\partial t|^2(1+|x'|^2)^{m-1}dx'$ está acotado por $M'\|u\|_m^2$. En consecuencia, $\|\gamma u\|_{m-1/2}^2\le C\|u\|_m^2$.

NB. Obsérvese que se pudo haber utilizado S en lugar de C_0^∞ en la definición de γ y el Teorema 1.

ii) Sea $v\in S(R^{n-1})$ y

(13.2) $$Kv(x):=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int_{R^{n-1}} e^{i<\xi',x'>-x_n^2(1+|\xi'|^2)}\hat{v}(\xi')d\xi'.$$

El operador K tiene las siguientes propiedades:

1) $Kv(x',0)=v(x')$,

2) $Kv\in S(R^n)$,

3) $\|Kv\|_{H^m(R_+^n)}\le C\|v\|_{H^{m-1/2}(R^{n-1})}$, $C=C(n,m)$,

4) $\gamma(Kv)=v$.

En efecto, 1) es obvia y 1), 2)$\Rightarrow$4). Veamos 2)

(13.3) $$\frac{d^q}{dt^q}e^{-t^2r}=\sum_{2j\le q} b_j t^{q-2j}r^{q-j}e^{-t^2r},$$

y por tanto

$$x^\beta D^\alpha(Kv)(x)=\sum_j c_j x'^{\beta'}x_n^{\beta_n}\int_{R^{n-1}} e^{i\langle\xi',x'\rangle-x_n^2(1+|\xi'|^2)}\xi'^{\alpha'}x_n^{\alpha_n-2j}(1+|\xi'|^2)^{\alpha_n-j}\hat{v}(\xi')d\xi'=O(1).$$

Veamos ahora 3). Sea $|\alpha|\le m$, $\alpha=(\alpha',\alpha_n)$:

$$D^\alpha(Kv)(x)=\sum_{2j\le\alpha_n} c'_j x_n^{\alpha_n-2j}F_{R^{n-1}}^{-1}(e^{-x_n^2(1+|\cdot|^2)}(\cdot)^{\alpha'}(1+|\cdot|^2)^{\alpha_n-j}\hat{v}(\cdot)),$$

$$\int_{R_+^n}|D^\alpha Kv(x)|^2dx=\int_0^\infty dx_n\int_{R^{n-1}}|D^\alpha Kv(x',x_n)|^2dx'\le$$

$$\le\sum_{2j\le\alpha_n}\tilde{c}_j\int_0^\infty dx_n\int_{R^{n-1}}\left|x_n^{\alpha_n-2j}e^{-x_n^2(1+|\xi'|^2)}\xi'^{\alpha'}(1+|\xi'|^2)^{\alpha_n-j}\hat{v}(\xi')\right|^2d\xi'.$$

Haciendo el cambio de variable $x_n=t(1+|\xi'|^2)^{-1/2}$, el último miembro es igual a:

$$\sum_{2j\le\alpha_n}\tilde{c}_j\int_{R^{n-1}}\left|\xi'^{\alpha'}(1+|\xi'|^2)^{\alpha_n-j}\hat{v}(\xi')\right|^2d\xi'\int_0^\infty\frac{e^{-2t^2}t^{2\alpha_n-4j}}{(1+|\xi'|^2)^{\alpha_n-2j+1/2}}dt=$$

$$=\sum_{2j\le\alpha_n}\tilde{c}_j\int_{R^{n-1}}|\xi'^{\alpha'}\hat{v}(\xi')|^2(1+|\xi'|^2)^{\alpha_n-1/2}d\xi'\int_0^\infty e^{-2t^2}t^{2\alpha_n-4j}dt\le$$

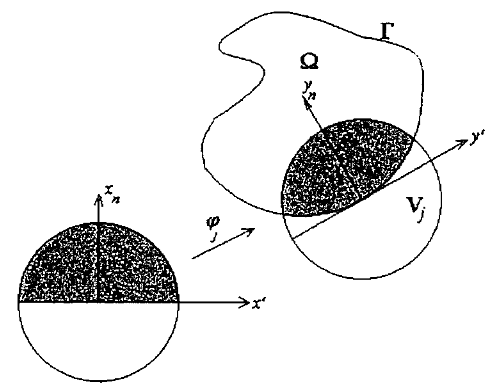
$$\le C\int_{R^{n-1}}|\hat{v}(\xi')|^2(1+|\xi'|^2)^{|\alpha|-1/2}d\xi'.$$

ii) sigue ahora fácilmente, QED.

13B. Sea Ω un dominio acotado de contorno Γ que es una variedad C^∞ que deja a un lado a Ω. Precisamente, para cierto cubrimiento finito $\{V_j\}_{j=1}^N$ de Ω y para cada $j=1,\ldots,N$, existe un sistema de coordenadas en V_j tal que

$$\Omega\cap V_j=\{(y',y_n)\in V_j: y_n>f_j(y')\},\ f_j\in C^\infty.$$

Por medio de una transformación C^∞, φ_j, referimos $\Omega \cap V_j$ a una semiesfera (o esfera) fija del espacio R^n. Por ejemplo, φ_j se define localmente, salvo factores, por $x_n = y_n - f_j(y')$, $x' = y'$. Suponemos dadas las aplicaciones φ_j, $j = 1,\ldots,N$, junto con la familia $\{V_j\}_{j=0}^N$ tal que $\bigcup_{j=0}^N V_j \supseteq \overline{\Omega}$. Suponemos dada también una partición de la unidad para $\overline{\Omega}$ constituída por una familia de funciones $\zeta_j \in C_0^\infty(R^n)$, $j = 0,\ldots,N$, tal que $\sum_{j=0}^N \zeta_j(x) = 1$ para $x \in \overline{\Omega}$ y soporte de $\zeta_j \subset V_j$. En particular, $\sum_{j=1}^N \zeta_j(x) = 1$ si $x \in \Gamma$. Si $(\zeta_j h) \circ \varphi_j \in H^s(R^{n-1})$ para todo j con h definida sobre Γ podemos definir una norma $H^s(\Gamma)$ por medio de



(13.4) $$\|h\|^2_{H^s(\Gamma)} = \sum_{j=1}^N \|(\zeta_j h) \circ \varphi_j\|^2_{H^s(R^{n-1})},$$

es decir, que $h \in H^s(\Gamma)$ exactamente cuando $\|h\|^2_{H^s(\Gamma)} < \infty$.

TEOREMA 2. Existe un operador continuo $\gamma : H^m(\Omega) \to H^{m-1/2}(\Gamma)$ tal que si $u \in C_0^\infty(R^n)$, $\gamma(u|_\Omega) = u|_\Gamma$. Este operador es único.♦

DEMOSTRACION. La continuidad de γ sigue de las estimaciones siguientes,

$$\|(\zeta_j u) \circ \varphi_j(\cdot,0)\|^2_{H^{m-1/2}(R^{n-1})} \le c_j \|(\zeta_j u) \circ \varphi_j\|^2_{H^m(R^n)} \le c''_j \|u\|^2_{H^m(\Omega)}.$$

La unicidad de γ resulta de la densidad en $H^m(\Omega)$ de las restricciones de las funciones de $C_0^\infty(R^n)$ a Ω, QED.

13C. En R^n_+ podemos definir el operador $\gamma^j : H^m(R^n_+) \to H^{m-j-1/2}(R^{n-1})$ por medio de

(13.5) $$\gamma^j u := \gamma\left(\frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}\right), \qquad m > j.$$

Para definir en Ω un operador análogo podemos utilizar coordenadas locales tales que las curvas $x' = cte.$ se correspondan con las normales a Γ. Como esas coordenadas locales pueden elegirse de manera que las distancias entre puntos en una normal coincidan con las distancias de sus homólogos sobre la normal correspondiente a Γ (cf. Cap. 2), resulta

(13.6) $$\left(\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\right)\circ\varphi_i=\frac{\partial^j(u\circ\varphi_i)}{\partial x_n^j}.\ m>j.$$

Definimos

(13.7) $$\gamma^j u=\gamma\circ\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^j u.$$

Vale entonces el

TEOREMA 3. $\gamma^j : H^m(\Omega)\to H^{m-j-1/2}(\Gamma)$ es una aplicación continua y sobre.

DEMOSTRACION. De (13.7) sigue, como en el Teor. 2, que γ^j es un operador lineal y continuo. Veamos que es sobre. Aceptemos por un momento la siguiente proposición, (cf. Teor. 4).

LEMA 1. Sea $v\in C_0^\infty(B^{n-1})$. Entonces existe $w\in C^\infty(\overline{B_+^n})$ con $\operatorname{sop} w\subset B^n$ tal que $\frac{\partial^j w}{\partial x_n^j}(x',0)=v(x')$. Además, $\|w\|_{H^m(R_+^n)}\le K\|v\|_{H^{m-j-1/2}(R^{n-1})}$. ♦

Sea $v\in C^\infty(\Gamma)$; $v=\sum_{i=1}^N v\zeta_i=\sum_{i=1}^N v_i$. De acuerdo con el lema existe $w_j\subset C^\infty(\overline{B_+^n})$ con $\left.\frac{\partial^j w_i}{\partial x_n^j}\right|_{x_n=0}=v_i\circ\varphi_i$. Definamos $u:=\sum_{i=1}^N w_i\circ\varphi_i^{-1}$. Entonces

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}=\sum_{i=1}^N\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j\left(w_i\circ\varphi_i^{-1}\right)=\text{por (13.6)}=\sum_{i=1}^N\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^j w_i\right)\circ\varphi_i^{-1}=\sum_{i=1}^N\tilde{u}_i.$$

Luego, de $(\gamma u)\circ\varphi_i=(u\circ\varphi_i)(x',0)$, obtenemos,

$$\gamma\left(\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\right)=\sum_{i=1}^N\gamma\tilde{u}_i=\sum_{i=1}^N(\tilde{u}_i\circ\varphi_i)|_{B^{n-1}}\circ\varphi_i^{-1}=\sum_{i=1}^N v_i=v,$$

y de esto el teorema sigue, QED.

TEOREMA 4. Sea $w\in H^{m-1/2}(R^{n-1})$. Si

(13.8) $$K_j(w):=\frac{(-1)^j}{(2\pi)^{n-1}}\int_{R^{n-1}}\frac{e^{i<x',\xi'>-x_n(1+|\xi'|^2)^{1/2}}\,\hat{w}(\xi')}{(1+|\xi'|^2)^{j/2}}\,d\xi',$$

entonces

i) $K_j w\in C^\infty(R_+^n)\cap H^{m+j}(R_+^n)$,

ii) $\|K_j w\|_{H^{m+j}(R_+^n)}\le C\|w\|_{H^{m-1/2}(R^{n-1})}$,

iii) $\gamma\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^j(K_j w)\right]=w$ en $H^{m-1/2}$,

iv) Si $w\in C_0^\infty(B^{n-1})$ entonces $K_j w\in C^\infty(\overline{B_+^n})$ y $w(x')=\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^j K_j w\right)(x',0)$. ♦

DEMOSTRACION. *i)*, *ii)*. Sean α tal que $|\alpha|\le m+j$ y

(13.9) $$a=a(x',x_n,\xi'):=i<x',\xi'>-x_n(1+|\xi'|^2)^{1/2}.$$

Como $x_n>0$, la infinita diferenciabilidad de (13.8) es consecuencia de que $a\in C^\infty(x)$:

$$\left(D^{\alpha}K_j w\right)(x)=c_0\int_{R^{n-1}}\hat{w}(\xi')\,\xi'^{\alpha'}(1+|\xi'|^2)^{(\alpha_n-j)/2}e^{a}d\xi'.$$

Por ser la transformada de Fourier una isometría en L^2 tenemos:

$$\|D^{\alpha}K_j w\|_2^2=$$

$$=\int_0^{\infty}dx_n\int_{R^{n-1}}|D^{\alpha}K_j w(x',x_n)|^2dx'=c_0^2\int_0^{\infty}dx_n\int_{R^{n-1}}\left|\hat{w}(\xi')\,\xi'^{\alpha'}(1+|\xi'|^2)^{(\alpha_n-j)/2}e^{-x_n(1+|\xi'|^2)^{1/2}}\right|^2d\xi'=$$

$$=c_0^2\int_{R^{n-1}}\left|\hat{w}\,\xi'^{\alpha'}(1+|\xi'|^2)^{(\alpha_n-j)/2}\right|^2d\xi'\int_0^{\infty}e^{-2x_n(1+|\xi'|^2)^{1/2}}dx_n=$$

$$=c'\int_{R^{n-1}}|\hat{w}\,\xi'^{\alpha'}|^2(1+|\xi'|^2)^{\alpha_n-j-1/2}d\xi'\le c'\int_{R^{n-1}}|\hat{w}|^2(1+|\xi'|^2)^{|\alpha|-j-1/2}d\xi'\le$$

$$\le c''\|w\|^2_{H^{|\alpha|-j-1/2}}\le c\|w\|^2_{H^{m-1/2}(R^{n-1})}.$$

iv). Si $u\in H^m(R^n_+)\cap C^{\infty}(\overline{R^n_+})$ entonces $u(x',x_n+\varepsilon)\to u(x',x_n)$ en $H^m(R^n_+)$ para $\varepsilon\downarrow 0$. Luego, $\gamma(u(x',x_n+\varepsilon))\to\gamma u$ en $H^{m-1/2}(R^{n-1})$. Como $\gamma(u(x',x_n+\varepsilon))=u(x',\varepsilon)$ se tiene $u(x',\varepsilon)\to\gamma u$ en $H^{m-1/2}$. Por otra parte, $u(x',\varepsilon)\to u(x',0)$ pues u y todas sus derivadas son continuas hasta el borde. En consecuencia, $\gamma u=u(x',0)$.

De (13.8) y (13.9) obtenemos para $K=K_j$,

$$\frac{\partial^j}{\partial x_n^j}(Kw)=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int_{R^{n-1}}e^{a}\hat{w}\,d\xi'. \tag{13.10}$$

Si $w\in C_0^{\infty}(R^{n-1})$ entonces (13.10)$\in C^{\infty}(\overline{R^n_+})\cap H^m(R^n_+)$. Entonces,

$$\gamma\left((\partial/\partial x_n)^j Kw\right)=\left((\partial/\partial x_n)^j Kw\right)(x',0)=w(x'),$$

y *iv*) sigue inmediatamente. *iii*) sigue de *i*), *ii*) y *iv*), QED.

NB. El operador K_0 del T.4 no coincide con el operador K del T.1.

13D. **TEOREMA 5.** Son equivalentes las siguientes proposiciones:

i) $u\in H^m(R^n_+)$, $\gamma^j u=0$, $j=0,1,\ldots,m-1$,

ii) $u\in H_0^m(R^n_+)$,

iii) $\tilde{u}:=\begin{cases}u & si\quad x_n>0\\ 0 & si\quad x_n\le 0\end{cases}$ pertenece a $H^m(R^n)$.•

DEMOSTRACION. *ii*) $\Rightarrow$ *i*). Sea $\phi_m\to u$ en H^m, $\phi_m\in C_0^{\infty}(R^n_+)$. Entonces $0=\gamma^j\phi_m\to\gamma^j u$ en $H^{m-j-1/2}$ si $j\le m-1$.

iii) $\Rightarrow$ *ii*). $\tilde{u}(x',x_n-\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{}\tilde{u}(x',x_n)$ en $H^m(R^n)$. Por tanto, en $H^m(R^n_+)$, $v_\varepsilon:=\tilde{u}(x',x_n-\varepsilon)|_{R^n_+}\to u(x',x_n)$.

Como sop$\,v_\varepsilon$ está contenido en R^n_+ y a distancia positiva de $x_n=0$, v_ε es aproximable por funciones de $C_0^{\infty}(R^n_+)$.

i) $\Rightarrow$ *iii*). Probaremos que $D^{\alpha}\tilde{u}=(D^{\alpha}u)\tilde{}$. Sea $\phi_h\in C_0^{\infty}(R^n)$,

$$\phi_h\to u\ \text{en}\ H^m(R^n_+).$$

Entonces,

$$D^\alpha \widetilde{u}(\phi) = \widetilde{u}(\pm D^\alpha \phi) = \lim_{h\to\infty} \pm \int_{R_+^n} \phi_h\, D^\alpha \phi\, dx'\, dx_n =$$

$$= \lim_{h\to\infty} \int_{R_+^n} D^\alpha \phi_h\, \phi\, dx'\, dx_n + \sum_{i=0}^{\alpha_n - 1} \pm \int_{R^{n-1}} \left(D_n^i \phi_h\right)(x',0) D^{\alpha'} D_n^{\alpha_n - i - 1} \phi(x',0)\, dx'.$$

Pero, $\int_{R_+^n} D^\alpha \phi_h . \phi\, dx \to \int_{R_+^n} D^\alpha u . \phi\, dx$ y

$\int_{R^{n-1}} \left(D_n^i \phi_h\right)(x',0) D^\beta \phi(x',0)\, dx'$, salvo por un factor constante, es igual a

$< \gamma^i \phi_h, D^\beta \phi(x',0) > \to 0$ pues $\gamma^i \phi_h \to \gamma^i u$ en $L^2(R^{n-1})$ y $\gamma^i u = 0$.

O sea, $< D^\alpha \widetilde{u}, \phi > = < \widetilde{(D^\alpha u)}, \phi >$, QED.

13E. Veamos ahora una extensión del T.3.

TEOREMA 6. Sea $\widetilde{\gamma}(u) := \left(\gamma^0 u, \gamma^1 u, \ldots, \gamma^{m-1} u\right)$. Entonces

(13.11) $$\widetilde{\gamma} : H^m(R_+^n) \to \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(R^{n-1}) =: \Pi,$$

es continua y sobre.•

DEMOSTRACION. La continuidad de $\widetilde{\gamma}$ sigue del T.3. Sin embargo, aún es necesario probar que $\widetilde{\gamma}(H^m) = \Pi$. En efecto, sea $(g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}) \in \Pi$ y definamos u por medio de:

(13.12) $$u(x', x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{R^{n-1}} e^a \sum_{s=0}^{m-1} x_n^s \hat{w}_s(\xi')\, d\xi', \qquad a := i < x', \xi' > - x_n (1 + |\xi'|^2)^{1/2},$$

donde los w_s quedan determinadas por $g_0, \ldots, g_{m-1}$ de la siguiente forma. Como debe ser

(13.13) $$\gamma^j u = g_j,$$

y por otra parte,

$$\gamma^j u = \sum_{s=0}^{j} \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{R^{n-1}} e^{i<x',\xi'>} \left[-(1 + |\xi'|^2)^{1/2}\right]^{j-s} s! \binom{j}{s} \hat{w}_s(\xi')\, d\xi' =$$

$$= \sum_{s=0}^{j} \frac{j!(-1)^{j-s}}{(j-s)!} F^{-1}\left(\hat{w}_s (1 + |\xi'|^2)^{(j-s)/2}\right),$$

las w's deben satisfacer las siguientes relaciones

$$g_0 = w_0,$$

$$g_1 = w_1 - F^{-1}\left(\hat{w}_0 (1 + |\xi'|^2)^{1/2}\right),$$

$$g_2 = 2w_2 - 2F^{-1}\left(\hat{w}_1 (1 + |\xi'|^2)^{1/2}\right) + F^{-1}\left(\hat{w}_0 (1 + |\xi'|^2)\right),$$

....

De esto se deduce que las w's quedan determinadas por las g's y que $w_t \in H^{m-t-1/2}(R^{n-1})$ para $t = 0, \ldots, m-1$. Con estas w's definimos u (cf. (13.12)) la que satisface (13.13) si $j = 0, \ldots, m-1$.

Veamos ahora que $u \in H^m(R_+^n)$. Sea

(13.14) $$U = x_n^s \int \hat{w}\, e^a d\xi'.$$

Entonces,

$$\int_0^\infty dx_n \int |D_\alpha U|^2 dx' = C_\alpha \int_0^\infty dx_n \int dx' \left| \int \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} (x_n^s e^{-x_n(1+|\xi'|^2)^{1/2}}) \xi'^{\alpha'} \hat{w} e^{i<x',\xi'>} d\xi' \right|^2 =$$

$$= C_\alpha \int_0^\infty dx_n \int dx' \left| \left(\sum_{k=0}^{s\wedge\alpha_n} c_k x_n^{s-k} (1+|\xi'|^2)^{(\alpha_n-k)/2} \right) e^{-x_n(1+|\xi'|^2)^{1/2}} \xi'^{\alpha'} \hat{w} e^{i<x',\xi'>} d\xi' \right|^2 \leq \text{(Parseval)}$$

$$\leq C'_\alpha \int_0^\infty dx_n \int d\xi' \left| \left(\sum_{k=0}^{s\wedge\alpha_n} c_k x_n^{s-k} (1+|\xi'|^2)^{(\alpha_n-k)/2} \right) e^{-x_n(1+|\xi'|^2)^{1/2}} |\xi'|^{|\alpha'|} \hat{w} \right|^2 \leq$$

$$\leq C''_\alpha \sum_{k=0}^{s\wedge\alpha_n} \int_0^\infty dx_n \int \left| x_n^{s-k} (1+|\xi'|^2)^{(|\alpha|-k)/2} e^{-x_n(1+|\xi'|^2)^{1/2}} \hat{w}(\xi') \right|^2 d\xi' \leq$$

$$\leq C''_\alpha \sum_{k=0}^{s\wedge\alpha_n} \int_{R^{n-1}} (1+|\xi'|^2)^{|\alpha|-k} |\hat{w}(\xi')|^2 d\xi' \int_0^\infty x_n^{2(s-k)} e^{-2x_n(1+|\xi'|^2)^{1/2}} dx_n \leq$$

$$\leq \tilde{C}_\alpha \sum_k \int_{R^{n-1}} (1+|\xi'|^2)^{|\alpha|-k+k-s-1/2} |\hat{w}|^2 d\xi' \leq M \|w\|^2_{H^{m-s-1/2}} < \infty .$$

En consecuencia $u \in H^m(R^n_+)$, QED.

COROLARIO. Sean Ω un abierto acotado, $\partial\Omega = \Gamma$ una variedad lineal C^∞ tal que Ω yace a un lado de Γ, $\gamma^j := \gamma \circ (\partial / \partial \nu)^j$. Entonces el operador $\tilde{\gamma} := (\gamma^0, \gamma^1, \ldots, \gamma^{m-1})$ lleva continuamente $H^m(\Omega)$ sobre $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$.♦

(La demostración es semejante a la del T.3).

13F. Sea Ω como en el corolario precedente, $a_\alpha \in B^\infty(\Omega)$= el espacio de funciones acotadas indefinidamente diferenciables con todas sus derivadas acotadas.

(13.15) $\qquad P(x,D) := \sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha , \qquad P_{2m}(x,D) := \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) D^\alpha .$

$P(x,D)$ se dice *uniformemente fuertemente elíptico* (u.f.e.) en Ω si existe $c_0 > 0$ tal que para todo $x \in \Omega$ y para todo $\xi \in R^n$:

(13.16) $\qquad \operatorname{Re} P_{2m}(x,\xi) \geq c_0 |\xi|^{2m} .$

P debe ser de grado par para que su parte principal P_{2m} verifique (13.16). Un resultado debido a Gårding afirma que

$$P \in \text{u.f.e.} \Rightarrow \textit{para todo } u \in C_0^\infty(\Omega): \quad \|u\|^2_{H^m(\Omega)} \leq K \operatorname{Re}(P(x,D)u,u) + M\|u\|^2_{H^0(\Omega)},$$

K y M constantes. En esta situación

(13.17) $\qquad \|u\|^2_{H^m(\Omega)} \leq K|(P(x,D)u,u)| + M\|u\|^2_{H^0(\Omega)} .$

TEOREMA 7. Sea $P(x,D)$ un operador que satisfece (13.17) con $M = 0$ y tal que todos sus coeficientes tienen derivadas de orden $\leq m$ acotadas.

i) El operador $\tau : u \to (P(x,D)u, \tilde{\gamma}u)$ es continuo y biunívoco de $H^m(\Omega)$ sobre $H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$.

ii) Lo mismo vale para este operador τ y los espacios $H_0^m(\Omega)$ y $H^{-m}(\Omega) \times \{0\}$.♦

Para demostrar el teorema veamos antes una versión compleja del Lema de Lax y Milgram. Sea E un espacio de Hilbert y E' su dual. Si $e \in E$ y $e' \in E'$, $< e', e \overline{>}$ representa la antidualidad de E y E' definiendo una funcional continua sesquilineal: $< \mu e', \lambda e \overline{>} = \mu \overline{\lambda} < e', e \overline{>}$. Pensando en espacios de funciones esa funcional podría escribirse como $\int e'(t)\, \overline{e}(t)\, dt$.

Sea $a(u,v)$ una funcional sesquilineal continua definida en $E \times E$ (lineal en u, antilineal en v y tal que $|a(u,v)| \le M\|u\|\|v\|$). Supongámosla *coerciva*, es decir, que exista $c_0 > 0$ tal que para todo $u \in E$:

(13.18) $$|a(u,u)| \ge c_0 \|u\|_E^2 .$$

El lema afirma que A definida por $< Au, \cdot \overline{>} := a(u, \cdot)$ es biunívoca y sobre de E en su antidual. En efecto, $|a(u,v)| = |< Au, v \overline{>}| \le (M\|u\|)\|v\|$ implica que $\|Au\|_{E'} \le M\|u\|_E$. Por otra parte de (13.18) sigue que $\|Au\|_{E'} \ge c_0\|u\|_E$. Es decir, A es inyectiva y de rango cerrado. Por otra parte, si A^* se define por

$$\overline{< Au, v \overline{>}} = \overline{a(u,v)} = \alpha(v,u) =: < A^* v, u \overline{>},$$

como antes se tiene que A^* es uno a uno. En consecuencia, el rango de A es denso. Luego, A es sobre, QED.

DEMOSTRACION DEL T.7. Sean $E = H_0^m(\Omega)$, E' =dual de E, $u' \in E'$ y $v \in C_0^\infty(\Omega) \subset E$. Entonces, $E' = H^{-m}(\Omega) \subset D'(\Omega)$ y

(13.19) $$< u', v \overline{>} = u'(\overline{v}).$$

Además,

(13.20) $$\|u'\|_{E'} := \sup_v \frac{|< u', v \overline{>}|}{\|v\|_{H_0^m}} = \|u'\|_{H^{-m}(\Omega)}.$$

En efecto, vale la

PROPOSICION 1. $(H_0^m(\Omega))' = H^{-m}(\Omega) \subset D'(\Omega)$.•

DEMOSTRACION. Si $u' \in$ antidual de $H_0^m(\Omega)$ entonces u' es representable por una $w \in H_0^m$: $u'(\overline{v}) = (w,v)_{H_0^m}$. Por otra parte, $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $H_0^m(\Omega)$ por lo que u' puede representarse como una distribución de $D'(\Omega)$.

Si $v \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$(w,v)_{H_0^m} = \sum_{|\alpha| \le m} \int D^\alpha w \overline{D^\alpha v}\, dx = \left(\sum_{|\alpha| \le m} D^\alpha w_\alpha \right)(\overline{v}), \quad w_\alpha \in L^2.$$

Luego, $u' = \sum_{|\alpha| \le m} D^\alpha w_\alpha$ en D', y en consecuencia $u' \in H^{-m}$ con

$$\|u'\|_{H^{-m}} := \inf\left\{ (\sum \|f_\alpha\|^2)^{1/2} : \sum D^\alpha f_\alpha = u' \right\} \le (\sum \|w_\alpha\|^2)^{1/2} = \|w\|_{H_0^m} = \|u'\|_{(H_0^m)'}.$$

Recíprocamente, si $u' \in H^{-m}$ entonces $u' = \sum_{|\alpha| \le m} D^\alpha f_\alpha$, $f_\alpha \in L^2$, y $u'(\overline{v}) = \sum f_\alpha (\overline{D^\alpha v})$.

Por tanto,

$$|u'(\overline{v})| \le (\sum \|f_\alpha\|^2)^{1/2} (\sum \|D^\alpha v\|^2)^{1/2} \le (\sum \|f_\alpha\|^2)^{1/2} \|v\|_{H_0^m},$$

y esto implica $\|u'\|_{(H_0^m)'} \le \inf\left\{ (\sum \|f_\alpha\|^2)^{1/2} : \sum D^\alpha f_\alpha = u' \right\} = \|u'\|_{H^{-m}}$, QED.

ii) Definamos, para $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$

(13.21) $a(u,v):=(P(x,D)u)(\bar{v})=\int_\Omega u\overline{P'(x,D)v}\,dx=\sum_{|\alpha|\le m}\int a_{\alpha\beta}\, D^\alpha u\,\overline{D^\beta v}\,dx=O(1)\|u\|_E\|v\|_E$.

Por hipótesis, $|a(u,u)|\ge c_0\|u\|_m^2$. Del lema de Lax-Milgram sigue ahora que para toda $u\in H_0^m$ existe exactamente una $f'\in H^{-m}$ tal que

(13.22) $$a(u,v)=f'(\bar{v}),$$

y estas f' llenan ese espacio.

Luego, dada $f'\in H^{-m}$ hay exactamente una $u\in H_0^m$ tal que para toda $v\in C_0^\infty(\Omega)$:

$$(P(x,D)u)(\bar{v})=\int u\overline{P'(x,D)v}\,dx=f'(\bar{v}).$$

O sea, $P(x,D)u=f'$ en $D'(\Omega)$. Es decir, $P(x,D)H_0^m=H^{-m}$.

La demostración de la segunda parte del T.7 se concluye recurriendo al T.5 que muestra que $\tilde{\gamma}(H_0^m(\Omega)=\{0\}$.

i) Si $\tilde{\gamma}u=0$, $P(x,D)u=0$ y $u\in H^m(\Omega)$ entonces $u\in H_0^m(\Omega)$ (cf. T.5) y de *ii*) resulta $u=0$. O sea, la aplicación es biunívoca.

Sea $(g_0,\dots,g_{m-1})\in\prod_{i=0}^{m-1}H^{m-i-1/2}(\Omega)$. Existe $v\in H^m(\Omega)$ tal que $\tilde{\gamma}v=(g_0,\dots,g_{m-1})$. (Corolario al T.8). Luego, $V=P(x,D)v\in H^{-m}(\Omega)$. Dada $F\in H^{-m}(\Omega)$ existe $w\in H_0^m(\Omega)$, tal que $P(x,D)w=F-V$. Entonces, $u:=v+w\in H^m(\Omega)$, $P(x,D)u=F$, $\tilde{\gamma}u=\tilde{\gamma}v$, y la aplicación es sobre.

La continuidad de τ sigue del corolario al T.6 y de la acotación de $D^\beta a_\alpha$ para todo α y todo β tal que $|\alpha|\le m$. En efecto,

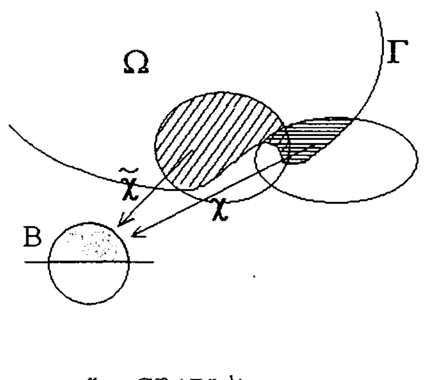
$$P(x,D)u=\sum_{|\alpha|\le 2m}a_\alpha D^\alpha u=\sum_{|\alpha|\le 2m}a_\alpha D^{\alpha_1}(D^{\alpha_2}u)$$

con $\alpha_1=[\alpha/2]$. Luego,

(13.23) $$P(x,D)u=\sum_{\substack{|\beta|\le m\\|\gamma|\le m}}D^\beta(b_{\beta\gamma}D^\gamma u),$$

con $b_{\beta\gamma}\in C^\infty\cap L^\infty$. En consecuencia, los paréntesis en (13.23) son funciones en L^2 con normas menores o iguales a $\|u\|_{H^m}$ por un factor constante, por lo que

$$\|Pu\|_{H^{-m}}\le\left(\sum\|b_{\beta\gamma}D^\gamma u\|_{L^2}^2\right)^{1/2}\le K\|u\|_{H^m},\quad \text{QED.}$$



13G. Sea ahora $\overline{\Omega}$ una variedad $n-$dimensional conexa compacta con borde $\partial\Omega=\Gamma$, como en 13B.

DEFINICION 1. Diremos que p es un operador de borde de orden transversal ν si $p:C^\infty(\overline{\Omega})\to C^\infty(\Gamma)$ viene definido por $(pu)\circ\chi^{-1}=p^\chi(u\circ\chi^{-1})$ donde, para $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$ y $w=u\circ\chi^{-1}$, se tiene:

(13.24) $$p^\chi w=\sum_{\substack{|\alpha|\le\mu\\|\alpha_n|\le\nu}}a_\alpha^\chi(x_1,\dots,x_{n-1})(D^\alpha w)(x_1,\dots,x_{n-1},0),$$

con $a_\alpha^\chi\in C^\infty(R^{n-1})$.♦

μ y ν son los menores números que pueden utilizarse en la definición la que por otra parte suponemos consistente (cf. Apéndice al Cap. 11):

(13.25) $$p^{\chi}(w)\circ\chi\circ\tilde{\chi}^{-1}=p^{\tilde{\chi}}(w\circ\chi\circ\tilde{\chi}^{-1}).$$

$C^{\infty}(\overline{\Omega})$ es el espacio de las funciones C^{∞} en Ω tales que junto con todas sus derivadas son prolongables con continuidad hasta el borde. Gracias a un teorema de Whitney sabemos que $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ coincide con la familia de restricciones a Ω de las funciones en $C^{\infty}(R^n)$. De la misma manera *definimos*, para todo $m\geq 0$, $\mathrm{H}^m(\Omega)$ como la clase de restricciones a Ω de las funciones en $H^m(R^n)$ con la norma:

$$\|u\|_m=\inf\left\{\|U\|_{H^m(R^n)}:U|_{\Omega}=u\right\}.$$

En nuestro caso, si m es además entero≥ 0, existe un operador extensión de $H^m(\Omega)$ a $H^m(R^n)$, (cf. 13A). De esto sigue que: *si m es un entero no negativo* $H^m(\Omega)=\mathrm{H}^m(\Omega)$ y $\|\cdot\|_m\approx\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$.

También vale que si p es un operador de borde de orden μ y de orden transversal $\nu<m$=entero entonces p lleva continuamente $H^m(\Omega)$ en $H^{m-\mu-1/2}(\partial\Omega)$. En efecto, basta demostrarlo para $u\in C_0^{\infty}(R^n)$ y con $\Omega=B_+$. Sea $p=aD^{\alpha}$, $a\in C_0^{\infty}(R^{n-1})$. Entonces,

$$(aD^{\alpha}u)(x_1,\dots,x_{n-1},0)=a*D^{\alpha'}\left(\gamma^{\alpha_n}(u)\right).$$

Como γ^{α_n} lleva continuamente $H^m(R^n)$ en $H^{m-\alpha_n-1/2}(R^{n-1})$ y $D^{\alpha'}$ lleva este espacio continuamente en $H^{m-\alpha_n-1/2-|\alpha'|}(R^{n-1})$, resulta que D^{α} lleva $H^m(R^n)$ en $H^{m-|\alpha|-1/2}(R^{n-1})\subseteq H^{m-\mu-1/2}(R^{n-1})$, qed.

13H. Sea $\Omega=R^n_+$, P un operador diferencial homogéneo, elíptico, a coeficientes constantes y $p_1,p_2,\dots,p_{\mu}$ operadores de borde también homogéneos y a coeficientes constantes con $2\mu=$ orden de $P=:m$.

PROPOSICION 2. Sea $n>2$, $0\neq\xi'\in R^{n-1}$. Si $\#\{\lambda:P(\xi',\lambda)=0,\operatorname{Im}\lambda>0\}=\mu$ (los ceros contados con su multiplicidad) entonces μ es independiente de ξ' y también $\#\{\lambda:P(\xi',\lambda)=0,\operatorname{Im}\lambda<0\}=\mu$. Además, $m=2\mu$.•

DEMOSTRACION. Como para $\xi\in R^n$ vale $|P(\xi)|\geq c_0|\xi|^m$ con $c_0>0$, tenemos que, para $0\neq\xi'\in R^{n-1}$, el polinomio en τ: $P(\xi',\tau)$, no se anula en el eje real. Por otra parte,

$$P(\xi',\tau)=Q_0(\xi')\tau^m+Q_1(\xi')\tau^{m-1}+\dots+Q_m(\xi')$$

con Q_i homogéneo de grado i. La elípticidad y homogeneidad de P implican que $Q_0=const.\neq 0$ y que $P(-\xi',-\tau)=(-1)^m P(\xi',\tau)$. Si $\mu(\xi')$ es el número de raíces τ de $P(\xi',\tau)$=0 con $\operatorname{Im}\tau>0$ entonces $\mu(-\xi')=m-\mu(\xi')$. Además, μ es independiente de ξ' debido a la continuidad de las raíces en los coeficientes y a que $R^{n-1}\setminus\{0\}$ es conexo. Luego, $m=2\mu(\xi')$, QED.

La proposicion no vale para $n=2$: el operador de Cauchy-Riemann D_1+iD_2 tiene asociado el polinomio $\xi_1+i\xi_2$.

DEFINICION 2. $\mathrm{P} = (P, p_1, ..., p_\mu)$ se dice un sistema de contorno elíptico si toda solución no trivial de $\mathrm{P}u = 0$ de la forma

(13.26) $$u(x) = w(x_n)\, e^{i<\xi',x'>}, \ \xi' \neq 0,$$

no es acotada en R^n_+.♦

La definición 2 es funcional y podría reemplazarse por una condición algebraica sobre los polinomios intervinientes en P. En efecto, para ilustrar esto supongamos que $n \geq 3$, orden de $P = m$, P elíptico $P = P(x) = P(x', x_n)$. Luego,

$$P(D)u = e^{i<\xi',x'>} P(\xi', D_n) w(x_n) = 0$$

implica, en el caso que $P(\xi', \lambda) = 0$ tenga m raíces distintas λ_h, $h = 1, ..., m$, que $w(x_n) = \sum_{j=1}^{m} A_j(\xi') e^{i\lambda_j x_n}$. Si u es acotada en $x_n > 0$ entonces debe ser $A_j = 0$ para los j tales que $\mathrm{Im}\lambda_j < 0$. Puesto que, si $\xi' \neq 0$, $u(x) = w(x_n)\, e^{i<\xi',x'>}$ es una solución de $\mathrm{P}u = 0$ si y sólo si $u = \left(\sum_{j=1}^{\mu} A_j(\xi') e^{i\lambda_j x_n} \right) e^{i<\xi',x'>}$ y

(13.27) $$\left\{ p_h u = \sum_{j=1}^{\mu} A_j \Gamma_{h,j} = 0, \quad h = 1, ..., \mu, \right. \qquad \text{donde } \Gamma_{h,j} = p_h(e^{i(\lambda_j x_n + <\xi',x'>)}),$$

el sistema P será elíptico si y sólo si para todo $\xi' \neq 0$ el sistema de ecuaciones (13.27) en los A_j no tiene soluciones no triviales. Esto equivale a que para todo $\xi' \neq 0$ el determinante $\det(\Gamma_{i,j}) \neq 0$. Esta condición algebraica reemplazaría entonces la condición funcional de la definición 2.

DEFINICION 3. $\mathrm{P} = \{P(x,D), p_1(x,D), ..., p_\mu(x,D)\}$, $x \in R^n$, se dice elíptico en el punto $x_0 = (x'_0, 0) \in \partial R^n_+$ si (*) $\{P^\circ(x_0,D), p_1^\circ(x_0,D), ..., p_\mu^\circ(x,D)\}$ es un sistema elíptico. Si $x_0 \in R^n_+$ debe ser $P^\circ(x_0,D)$ elíptico.♦

DEFINICION 4. $\mathrm{P} = \{P(x,D), p_1(x,D), ..., p_\mu(x,D)\}$ es un sistema elíptico en Ω cuando para cada parche de coordenadas Ω_χ con borde,

$$\{P^\chi, p_1^\chi, ..., p_\mu^\chi\}$$

es elíptico en B_+.♦

TEOREMA 8. Sea P un sistema elíptico en Ω de órdenes $m = 2\mu, m_1, ..., m_\mu$ y orden transversal de p_i menor que m. Sea

$$M(\Omega) := H^0(\Omega) \prod_{j=1}^{\mu} H^{m-m_j-1/2}(\Gamma).$$

Entonces, $\mathrm{P} : H^m(\Omega) \to M(\Omega)$ continuamente, y

i) si $u \in H^m(\Omega)$ y $\mathrm{P}u \in C^\infty(\Omega) \times C^\infty(\Gamma) \times ... \times C^\infty(\Gamma)$ entonces $u \in C^\infty(\Omega)$,

ii) $N := \{u \in H^m(\Omega) : \mathrm{P}(u) = 0\}$ es un subespacio de dimensión finita de $C^\infty(\Omega)$,

iii) $R = \mathrm{P}(H^m(\Omega))$ es un subespacio cerrado de $M(\Omega)$ y de codimensión finita.♦

(Para la demostración, véase [H], Cap. 10)

(*) Q° designa la parte homogénea de orden máximo de Q.

CAPITULO 14
REGIONES PLANAS ISOESPECTRALES

14A. En 1966 M. Kac, [K], popularizó un interesante problema. Preguntó si dos tambores no iguales pueden sonar de la misma manera. Técnicamente la pregunta se formula así:
K) *¿los autovalores del Laplaciano para el problema de Dirichlet de una región plana determinan la región?.*
La respuesta es *no*. Planteado el problema de otro modo se formula así:
I) *¿dos regiones planas acotadas no congruentes pueden ser isoespectrales para el problema de Dirichlet?.*
Observemos que decir que *dos regiones planas tienen el mismo espectro* significa que tienen los mismos autovalores para el problema de Dirichlet y estos contados según sus multiplicidades.
La respuesta a I) es *sí*, [GWW], y en este capítulo exhibiremos dos tales regiones pero no siguiendo el tratamiento original de Gordon, Webb y Wolpert sino la presentación que hace Conway en su libro [Cw] donde utiliza un método de demostración debido a Buser.

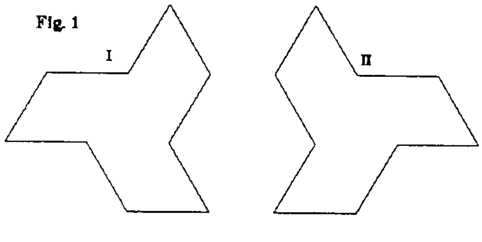
14B. Sea A una región de Jordan en el plano complejo, simétrica respecto del eje real (i.e. $(x,y)\in A \Rightarrow (x,-y)\in A$), tal que $I := A\cap\{(x,0): x\in R\}$, (su intersección con el eje real), es un intervalo. Sean $G := \{(x,y)\in A : y>0\}$ y $\hat{G} := \{(x,y)\in A : y<0\}$.
El *principio de reflexión de Schwarz* dice que una función $W(z)$, holomorfa en G, continua en $G\cup I$ y que toma valores reales en I, puede continuarse a $\hat{G}$ definiendo en $A = G\cup I\cup\hat{G}$ una función holomorfa $W_0(z)$ tal que

$$W_0(z) = W(z),\ \mathrm{Im}\, z \geq 0,$$

$$W_0(z) = \overline{W(\bar{z})},\ \mathrm{Im}\, z < 0.$$

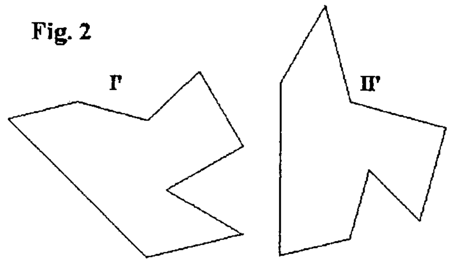
De este teorema se deduce el principio de reflexión para funciones armónicas: Si $V(x,y)$ es armónica en G, continua en $G\cup I$, nula en I, entonces existe $H(x,y)$ armónica en A que coincide con V en $G\cup I$ y tal que para todo punto en A vale: $H(x,y) = -H(x,-y)$.
Es importante notar, (cf. Teorema 2) que esto vale también para autofunciones del problema de Dirichlet.

Fig. 1



14C. Los polígonos I y II son congruentes y por tanto isoespectrales. Ellos resultan de la unión esencialmente disjunta de 7 triángulos congruentes a un triángulo equilátero T. (cf. Fig.4). Los polígonos I' y II' resultan de la unión esencialmente disjunta de 7 triángulos congruentes a un triángulo escaleno T (cf. Fig.5). O sea, estos polígonos tienen la misma área pero como los lados más largos de cada uno de ellos tienen distinta longitud no son congruentes A pesar de esto ellos son también isoespectrales, como veremos.

Fig. 2



Por deformación de I y II se obtienen I' y II'. En este caso los menores ángulos interiores de T son $\pi/4$ y $\pi/3$. Si fueran $2\pi/9$ y $\pi/3$ obtendríamos las regiones no congruentes isoespectrales de la Fig. 3.

14D. Vale el siguiente resultado

TEOREMA 1. i) Sean D una región de Jordan, $F \in C(\overline{D}), f \in C(\partial D)$. Entonces existe u (única) tal que $u \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$, $\Delta u = F$ en D'(D), $u = f$ en ∂D.

ii) Si $F \in C^1(D) \cap L^\infty(D)$ entonces $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$.

DEMOSTRACION. Utilizando el T. 3 del Cap. 1 §K vemos que es suficiente demostrar el teorema para $f \equiv 0$. Sea

(14.1) $$u(p) := -\int_D G(p,q)F(q)dq.$$

ii) De iv) del T. 3 del Cap. 1 concluímos que u definida por (14.1) es solución del problema $\Delta u = F$, $u = 0$ en el contorno, con $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$, si $F \in C^1(D) \cap L^\infty(D)$.

i) Si solamente sabemos que $F \in C(\overline{D})$ entonces sólo podremos afirmar que (14.1) satisface la condición de contorno y que $u \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$, (cf. iii) T. 1, Cap. 3). Veamos que $\Delta u = F$ en el sentido de las distribuciones. Existe una sucesión de funciones $\varphi_n \in C^\infty(D_0), D_0 \supset\supset D$ tal que $\varphi_n \to F$ uniformemente en $\overline{D}$. Sea $u_n(p) = -\int_D G(p,q)\varphi_n(q)dq$. Luego, para $p \in D$,

(14.2) $$|(u_n - u)(p)| \le \int_D |G(p,q)||\varphi_n(q) - F(q)|dq \le \|\varphi_n - F\|_\infty \int_{\overline{D}} |G(p,q)|dq \le C|D|.\|\varphi_n - F\|_\infty,$$

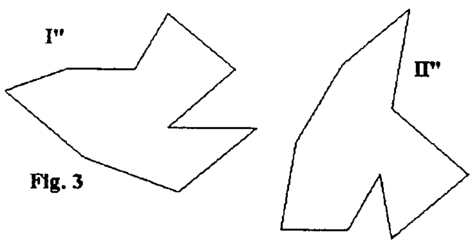


Fig. 3

(cf. vii), T. 1, Cap. 3). Por tanto, $u_n \to u$ acotadamente y en $L^1(D)$. O sea, en D'(D). Luego, de $\Delta u_n = \varphi_n$ para todo n se deduce que $\Delta u = F$ en el sentido de las distribuciones, QED.

Sea A una región como en 14B.

TEOREMA 2 (de reflexión de las autofunciones). Sea ϕ una autofunción correspondiente al autovalor λ en la región G:

(14.3) $$\phi \in C^2(G) \cap C(\overline{G}), \quad \Delta\phi = \lambda\phi, \ \phi = 0 \ en \ \partial G.$$

Entonces, Φ definida por

(14.4) $$\Phi(x,y) = \phi(x,y) \text{ en } \overline{G}, \ \Phi(x,y) = -\phi(x,-y) \text{ en } \hat{G},$$

es una autofunción en la región A para el problema de Dirichlet y el autovalor λ.

DEMOSTRACION. Sea $F \in C(\overline{A})$. Definimos $\tilde{F}(x_1,x_2) := -F(x_1,-x_2)$. Si F es tal que

(14.5) $$\tilde{F}(x_1,x_2) = -F(x_1,-x_2) = F(x_1,x_2)$$

y f es una función continua en ∂A que también verifica (14.5), o sea $\tilde{f} = f$ en ∂A, entonces la función $H \in C^1(A) \cap C(\overline{A})$ que es solución (cf. T.1) del problema:

(14.6) $$\Delta H = F, \ H\big|_{\partial A} = f,$$

verifica (14.5). En efecto, $\tilde{H}(x_1,x_2) := -H(x_1,-x_2)$ satisface

(14.7) $$\Delta\tilde{H} = \tilde{F} = F, \ \tilde{H}\big|_{\partial A} = \tilde{f} = f.$$

Entonces, $\Delta(H - \tilde{H}) = 0, (H - \tilde{H})\big|_{\partial A} = 0$. Luego, $V := H - \tilde{H}$ es una función armónica en A, continua en $\overline{A}$, que se anula en el contorno y por tanto $V = 0$. O sea,

(14.8) $$H(x_1,x_2) = -H(x_1,-x_2).$$

(14.8) implica que H se anula en I.
Sea ahora ϕ como en (14.3) y Φ como en (14.4). Sea $F := \lambda\Phi$ en A y $f = 0$ en ∂A y H la solución correspondiente de (14.6). Entonces, en G, H satisface $\Delta H = F$ con H=0 en el contorno de G. En consecuencia, $H=\phi$ en G. Como H verifica (14.8), vale $H=\Phi$ en A.
O sea, Φ verifica $\Delta\Phi = \lambda\Phi$ en A, $\Phi = 0$ en ∂A y pertenece a $C^1(A) \cap C(\overline{A})$. Pero entonces $F = \lambda\Phi$ pertenece a este espacio y $\Phi \in C^2(A) \cap C(\overline{A})$. O sea, Φ es una autofunción para el autovalor λ del problema de Dirichlet en A, QED.

14E. En esta sección definimos una biyección de las autofunciones de la región I correspondientes al autovalor λ con las autofunciones de las región II asociadas al mismo autovalor. En las siguientes figuras 4 y 4bis se muestra a estas regiones divididas en triángulos equiláteros con sus tres lados diferenciados de manera que cada uno es

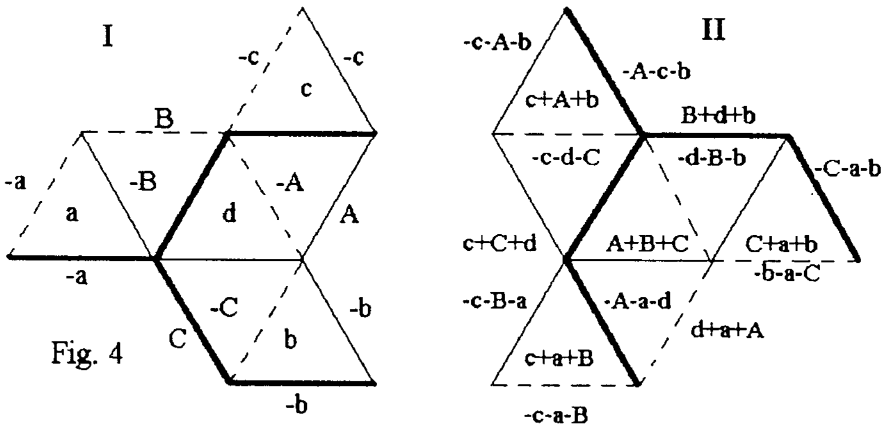


Fig. 4

congruente de una sola manera con otro y de tal forma que los triángulos se tocan según lados del mismo tipo y de manera que los triángulos lindantes se presenten simétricamente. Demostraremos que si $N_\lambda^I, N_\lambda^{II}$ son los autoespacios en cuestión existe una inyección $T: N_\lambda^I \to N_\lambda^{II}$ por lo que dim(N_λ^I)$\leq$dim(N_λ^{II}). Esto bastará pues el

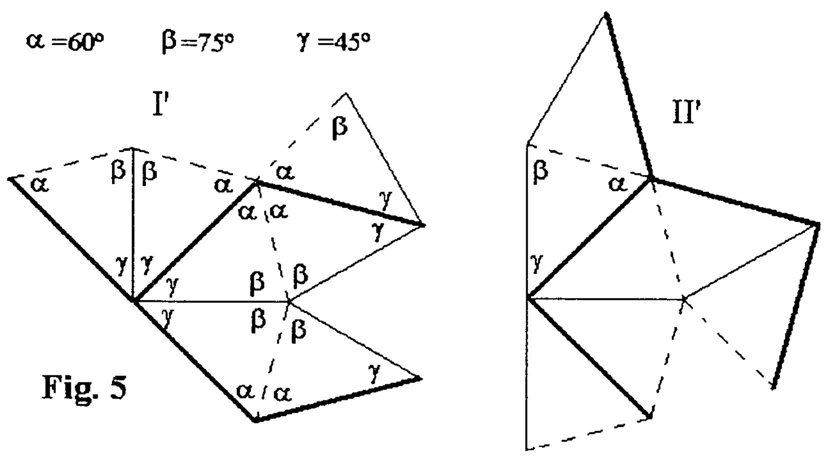


Fig. 5

procedimiento puede repetirse de II a I simplemente observando que II y I se intercambian por una reflexión. Pero que dim(N_λ^I)=dim(N_λ^{II}) lo sabemos pues las regiones son congruentes. Lo interesante radica en que el procedimiento puede repetirse en regiones obtenidas por deformación de I y II como I' y II' en la figura 5, con lo que se respondería negativamente al problema K) planteado por M. Kac. En la Fig. 5 los lados gruesos son los más largos de los triángulos y los punteados los más cortos.

Sea ϕ una autofunción para el problema de Dirichlet en I correspondiente al autovalor (real) λ:

(14.9) $\Delta\phi = \lambda\phi$ en I, ϕ=0 en ∂I.

Cada letra con su signo en la Fig. 4 indica la restricción de ϕ al triángulo donde esa letra se encuentra. Como ϕ se anula en los lados del contorno puede prolongarse a lo largo de cada uno de ellos en forma C^2 y satisfaciendo (14.9), como fue mostrado en el principio de reflexión de autofunciones. Por ejemplo, en el triángulo superior de I en la Fig. 4, $\phi = c$ se prolonga, a través del lado punteado y del de línea fina, por funciones que denotaremos simplemente como $-c$, ignorando el argumento, pero recordando cuando haga falta el tipo de lado por donde se realiza la extensión. Esto es justamente lo que distinguirá a una extensión de la otra. Naturalmente ϕ no tiene por qué anularse en el lado grueso y por allí se prolonga como $-A$.

En la hélice II de la Fig. 4 se muestra como de ϕ se obtiene una autofunción ψ para el mismo autovalor λ para esa región, o sea, que resuelve:

(14.10) $\Delta\psi = \lambda\psi$ en II,

(14.11) ψ=0 en ∂II.

Se comienza definiendo $\psi = A + B + C$ en el triángulo central. Pero las funciones A, B, C pueden extenderse como $-d, -B, -b$, respectivamente, a través de la linea punteada. Por tanto, definimos $\psi = -d - B - B$ en el triángulo a la derecha del central. A través del lado de línea gruesa, A, B, C, se extienden como $-c, -d, -C$, por lo que definimos $\psi = -c - d - C$ en el triángulo a la izquierda del central, y así continuamos. De lo dicho sigue que (14.10) resulta satisfecha.

Pero observando las prolongaciones hacia el exterior de II vemos que también queda satisfecha (14.11).

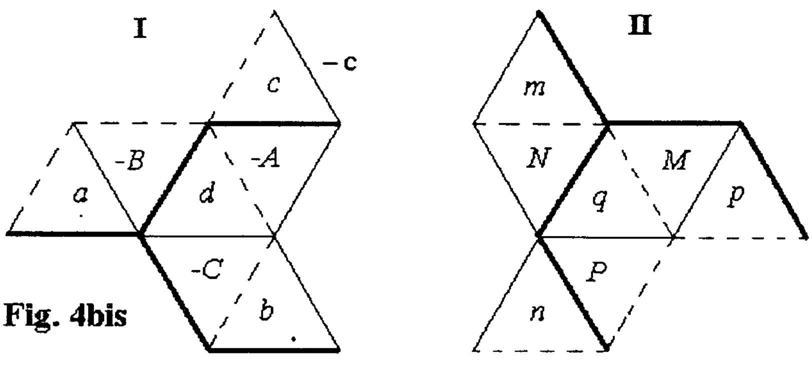


Fig. 4bis

Las restricciones de ψ a los triángulos que forman II las llamaremos m, n, p, q, M, N, P. Las definimos algebraicamente así:

$$(14.12)\qquad \begin{cases} q = A + B + C \\ M = -d - B - b \\ N = -c - d - C \\ P = -A - a - d \\ m = c + A + b \\ n = c + a + B \\ p = C + a + b \end{cases}$$

Como ya notamos cada una de las funciones de la derecha en (14.12) satisface la ecuación diferencial (14.10) en el triángulo correspondiente y es continua hasta su borde. También se ve que la función q se extiende en forma C^2 como M a través de la linea punteada ya que lo hacen sus sumandos: A como $-d$, B como $-B$ y C como $-b$. Siguiendo así se verifica que ψ satisface (14.10) en todo II.

ψ=0 en cada cada segmento del borde de II; p. ej., m se anula en el lado fino de su triángulo pues allí se anula cada uno de sus sumandos mientras que en el lado grueso $c+A=c-(-A)=0$ y b es cero. Siguiendo así se verifica que ψ satisface (14.11).

Si miramos las ecuaciones (14.12) como un sistema lineal en las variables A, B, C, a, b, c, d su matriz M tiene determinante no nulo, luego la transformación T es uno a uno, QED.

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} A & B & C & a & b & c & d \end{matrix} & \\ \mathsf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} q \\ M \\ N \\ P \\ m \\ n \\ p \end{matrix} \end{array}$$

$\det \mathsf{M} = 24$

No es dificil despejar A, B, C, a, b, c, d como combinación lineal de m, n, p, q, M, N, P para luego demostrar directamente que la aplicación es sobre. Vale que

$$\begin{aligned} -6A &= -2q - M - N + 2P - 2m + n + p \\ -6B &= -2q + 2M - N - P + m - 2n + p \\ -6C &= -2q - M + 2N - P + m + n - 2p \\ 6a &= -q + M + N - 2P - m + 2n + 2p \\ 6b &= -q - 2M + N + P + 2m - n + 2p \\ 6c &= -q + M - 2N + P + 2m + 2n - p \\ 6d &= -q - 2M - 2N - 2P - m - n - p \end{aligned}$$

APENDICE al CAPITULO 11

A1. Sea A un operador lineal en un espacio de Hilbert, simétrico y completamente continuo. Si $(Af,f)\geq 0$ para todo $f\in H$ entonces se dice que A es *positivo* y escribiremos $A\geq 0$. Vale que: $A\geq 0$ si y sólo si

$\sigma(A)\setminus\{0\}=\sigma_p^+(A)=$familia de autovalores positivos del operador.

Si K es solamente simétrico y completamente continuo entonces

$$Kf=\sum_i \mu_i(f,\phi_i)\phi_i \quad \text{con } K\phi_i=\mu_i\phi_i,\quad \|\phi_i\|=1,\quad |\mu_1|\geq|\mu_2|\geq\ldots,$$

O bien, $(Kf,f)=\sum\mu_i^+|(f,\phi_i^+)|^2+\sum\mu_i^-|(f,\phi_i^-)|^2$, $\mu_1^-\leq\mu_2^-\leq\ldots<0<\ldots.\leq\mu_2^+\leq\mu_1^+$.

Además,

$$\mu_n^+=\sup\{(Kf,f):\|f\|=1,(f,\phi_i^+)=0,i=1,2,\ldots,n-1\}.$$

Si este supremo resultara ≤ 0 entonces no existe μ_n^+. En caso de existir vale que

$$\mu_n^+=\inf_{h_1,\ldots,h_{n-1}}\sup\{(Kf,f):\|f\|=1,(f,h_i)=0,i=1,2,\ldots,n-1\}.$$

El ínfimo es alcanzado en $\{h_i:i=1,2,\ldots,n-1\}=\{\phi_i^+:i=1,2,\ldots,n-1\}$.

Sea $K=K_1+K_2$, K_i simétrico y completamente continuo. Entonces, $\mu_{p+q-1}^+\leq\mu_{1.p}^+ +\mu_{2.q}^+$. Además, si $K_2=A\geq 0$, $A\neq 0$, cada valor propio de K es mayor o igual al valor propio del mismo rango de K_1.

Si además $\#\sigma_p^+(A)=N<\infty$, se tiene: $|\mu_{p+N}|\leq|\mu_{1.p}|$, $p=1,2,\ldots$.

A2. Sean $a,b>0$ y $0<\alpha\leq\beta$. Entonces, $\dfrac{(a+b)^\alpha}{a^\alpha b^\beta}\leq 2^\alpha\left(a^{-\beta}+b^{-\beta}\right)$.

En efecto, si $a<b$ tenemos

$$\frac{(a+b)^\alpha}{a^\alpha b^\beta}=\frac{(1+a/b)^\alpha}{a^\beta}\left(\frac{a}{b}\right)^{\beta-\alpha}\leq\frac{2^\alpha}{a^\beta},$$

y si $b\leq a$,

$$\frac{(a+b)^\alpha}{a^\alpha b^\beta}=\frac{(1+b/a)^\alpha}{b^\beta}\leq\frac{2^\alpha}{b^\beta}, \qquad \text{QED.}$$

En consecuencia,

$$(*)\qquad \frac{1}{a^\alpha b^\beta}\leq\frac{2^\alpha}{(a+b)^\alpha}\left(\frac{1}{a^\beta}+\frac{1}{b^\beta}\right).$$

A3. **TEOREMA 1.** Sean $1\leq N$ entero, $1>\varepsilon>0$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$, $x=(x_1,x_2)$. Si $p(\xi)$ es un polinomio de grado μ con coeficientes acotados por c_1 y

$$\left|\frac{1}{p(\xi)}\right|\leq\frac{c_2}{(1+|\xi|)^\mu},$$

entonces $P:=(1/p)^\wedge$ coincide en $R^2\setminus\{0\}$ con una función indefinidamente diferenciable. Además, si $x\neq 0$,

$$|D^\alpha P(x)|\leq C(c_1,c_2,N,\varepsilon,\alpha)\frac{e_\alpha(x)}{(1+|x|)^N}\quad\text{donde}\quad e_\alpha(x):=\begin{cases}|x|^{\mu-|\alpha|-2-\varepsilon} & si\quad \mu-|\alpha|\leq 2,\\ 1\quad si & \mu-|\alpha|>2.\end{cases} \quad\blacklozenge$$

DEMOSTRACION. Sea $\beta=(\beta_1,\beta_2)$. Entonces

$$D_\xi^\beta(\xi^\alpha/p(\xi))\le C(c_1,c_2)(1+|\xi|)^{|\alpha|-|\beta|-\mu},$$

y por tanto, si $\mu+|\beta|-|\alpha|>2$ entonces $\left(D_\xi^\beta(\xi^\alpha/p(\xi))\right)^\wedge(x)=x^\beta D^\alpha P(x)$ es una función continua y acotada en R^2 que tiende a cero en el infinito. En particular, para todo α, $D^\alpha P(x)$ es una función continua en $R^2\setminus\{0\}$ por lo que pertenece a $C^\infty(R^2\setminus\{0\})$. Luego, si $|\beta|\ge k_0:=(3+|\alpha|-\mu)\vee 0$, entonces

$$\left|\left(D_\xi^\beta(\xi^\alpha/p(\xi))\right)^\wedge(x)\right|=\left|x^\beta D^\alpha P(x)\right|\le C. \tag{82}$$

Ahora bien, si $\mu-|\alpha|>2$ entonces $k_0=0$. Sumando en los β con $|\beta|=N$ y tomando en consideración el caso $|\beta|=0$, obtenemos de (1):

$$\left|D^\alpha P(x)\right|\le C(c_1,c_2,N,\alpha)(1+|x|)^{-N}.$$

Si $|\beta|\ge 1$ y $|\beta|\ge k_0$, entonces

$$\int_{R^2} D_\xi^\beta(\xi^\alpha/p(\xi))d\xi=0.$$

(En efecto, supongamos por ejemplo que $\beta=(1,0)+\beta'$; en este caso el integrando es igual a $\dfrac{\partial}{\partial\xi_1}\left[D_\xi^{\beta'}\left(\dfrac{\xi^\alpha}{p(\xi)}\right)\right]$ donde el corchete es $O\left(\dfrac{1}{(1+|\xi|)^T}\right)$, $T=\mu+|\beta|-1-|\alpha|\ge 2$.

Por tanto, la integral $\int d\xi_2\int\dfrac{\partial}{\partial\xi_1}[\ldots]d\xi_1=0$.)

En consecuencia, para $|\beta|\ge k_0\vee 1$ vale

$$x^\beta D^\alpha P(x)=\int_{R^2} D_\xi^\beta(\xi^\alpha/p(\xi))e^{-i<\xi,x>}d\xi=\int_{R^2} D_\xi^\beta(\xi^\alpha/p(\xi))(e^{-i<\xi,x>}-1)d\xi.$$

Como $\left|e^{-i<\xi,x>}-1\right|\le\inf(2,|x||\xi|)\le 2(|x||\xi|)^{1-\varepsilon}$, obtenemos para $\mu+|\beta|-|\alpha|\ge 3, |\beta|\ge 1\vee k_0$,

$$\left|x^\beta D^\alpha P(x)\right|\le C\int_{R^2}\frac{|x|^{1-\varepsilon}|\xi|^{1-\varepsilon}}{(1+|\xi|)^{\mu+|\beta|-|\alpha|}}d\xi\le C'|x|^{1-\varepsilon}. \tag{83}$$

Si $\mu-|\alpha|\le 2$, sumando los β tales que $|\beta|=k_0=3+|\alpha|-\mu$ (≥ 1), obtenemos de (83):

$$\left|D^\alpha P(x)\right|\le C'(c_1,c_2,N,\varepsilon,\alpha)|x|^{1-k_0-\varepsilon}.$$

Utilizando esta estimación y sumando los β tales que $|\beta|=k_0+N$, obtenemos,

$$(1+|x|)^N\left|D^\alpha P(x)\right|\le C''(c_1,c_2,N,\varepsilon,\alpha)|x|^{1-k_0-\varepsilon}=C''|x|^{\mu-|\alpha|-2-\varepsilon},$$ QED.

COROLARIO 1. Sea $\mu\ge 2$. Entonces $P(x)\in L^1(R^2)$ y $(1/p)^\wedge=P$.♦

DEMOSTRACION. Por el T. 1, $P(x)$ coincide en $R^2\setminus\{0\}$ con una función $f\in L^1(R^2)$. Entonces $P=f+T$, con T una distribución de soporte $\subset\{0\}$. Luego, $1/p(\xi)=F^{-1}(f)(\xi)+q(\xi)$, q un polinomio. Como necesariamente $q(\xi)\xrightarrow[|\xi|\to\infty]{}0$, sigue que $q\equiv 0$. En consecuencia, $P=f$, QED.

A4. *i*) Definimos para m y s reales (cf. [H], p. 51):

$$H_{m,s}(R^n) := B_{2,k_{m,s}},$$

donde $k_{m,s}(\xi) = (1+|\xi|^2)^{m/2}(1+|\xi'|^2)^{s/2}$, $\xi' = (\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},0)$. La norma en el espacio de Banach $H_{m,s}(R^n)$ de una función de prueba es

$$|\varphi|_{m,s} = \left(\int |\hat{\varphi}(\xi)|^2 k_{m,s}^2(\xi) d\xi\right)^{1/2}.$$

Un espacio funcional normado para el semiespacio de R^n con $\xi_n > 0$ se define como:

$$H_{m,s}(\overline{R_n^+}) = \{u \in D'(R_n^+) : \exists U \in H_{m,s}(R^n) \ tq. \ U = u \ en \ R_n^+\} \text{ con } \|u\|_{m,s} = \inf_U |U|_{m,s}.$$

$C_0^\infty(R^n)\big|_{R_n^+}$ es denso en $H_{m,s}(\overline{R_n^+})$ mientras que $C_0^\infty(R_n^+)$ es denso en el siguiente espacio de distribuciones:

$$\overset{\circ}{H}_{m,s}(\overline{R_n^+}) = \{u \in H_{m,s}(R^n) : sop\, u \subset \overline{R_n^+}\}$$

que es un subespacio cerrado de $H_{m,s}(R^n)$.

$\overset{\circ}{H}_{m,s}(\overline{R_n^+})$, en general, no está contenido en $D'(R_n^+)$ aunque por definición $H_{m,s}(\overline{R_n^+})$ es un subespacio de $D'(R_n^+)$, topológicamente incluído. Con el anterior establecen una *dualidad*, $< H_{m,s}(\overline{R_n^+}), \overset{\circ}{H}_{-m,-s}(\overline{R_n^+}) >$, tal que si $u \in C_0^\infty(R^n)$ y $v \in C_0^\infty(R_n^+)$ entonces

$$\left|\int u\, \bar{v}\, dx\right| \le \|u\|_{m,s} \|v\|_{-m,-s}.$$

Valen los siguientes teoremas.

TEOREMA 2. $u \in H_{m,s}(\overline{R_n^+})$ si y sólo si $u \in H_{m-1,s+1}(\overline{R_n^+})$ y la derivada en la dirección x_n, $D_n u$, pertenece a $H_{m-1,s}(\overline{R_n^+})$. Además: $\dfrac{\|u\|_{m,s}^2}{2} \le \|u\|_{m-1,s+1}^2 + \|D_n u\|_{m-1,s}^2 \le \|u\|_{m,s}^2$.♦

TEOREMA 3. Sean $0 \le j < m$ enteros. La aplicación de $C_0^\infty(R^n)$ en $C_0^\infty(R^{n-1})$,

$$u \to (D_n^j u)(x_1,\ldots x_{n-1},0)$$

se extiende continuamente a $H_{m,s}(\overline{R_n^+})$:

$$H_{m,s}(\overline{R_n^+}) \to H_{m+s-j-1/2}(R^{n-1}).♦$$

COROLARIO 2. Sea $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\alpha_n < m$. Entonces

$$D^\alpha : H_{m,s}(\overline{R_n^+}) \to H_{m+s-|\alpha|-1/2}(R^{n-1})$$

define una aplicación *sobre* tal que si $u \in C_0^\infty(R^n)$:

$$|(D^\alpha u)(x',0)|_{m+s-|\alpha|-1/2} \le \|u\|_{m,s}.♦$$

ii) Introducimos ahora el concepto de *variedad n-dimensional*, C^∞, *compacta con contorno*. Esta es una variedad Ω que admite un cubrimiento finito F por parches coordenados abiertos, homeomorfos a esferas o semiesferas de R^n tales que las intersecciones de dos de ellos tienen imágenes (en las esferas o semiesferas) que se aplican entre sí en forma C^∞ de manera que los diagramas correspondientes se cierren.
Sea $\omega = \{\Omega_\chi\}$ el sistema de coordenadas. $\chi \in F = \{\chi : \Omega_\chi \in \omega\}$ representa la aplicación que lleva $\Omega_\chi \subset \Omega$ sobre $\tilde{\Omega}_\chi \subset R^n$. F es *completa* pues para toda χ hay una función $\phi_\chi \in C_0^\infty(\tilde{\Omega}_\chi)$, no negativa, tal que para todo $x \in \Omega$ vale: $\sum_{\chi\in F} \phi_\chi(\chi(x)) > 0$.
Supondremos que con la variedad vienen definidas las familias $\omega = \{\Omega_\chi\}$ y $\{\phi_\chi\}$.
DEFINICION 1. $u \in L_2^{loc}(\Omega)$ pertenece a $H_s(\Omega)$ si $\forall \chi$, $\phi_\chi.(u \circ \chi^{-1}) \in H_s(\tilde{\Omega}_\chi)$.•
Vale que $\{|\phi_\chi.(u \circ \chi^{-1})|_s : \chi \in F\}$ es una *familia de seminormas* para $H_s(\Omega)$ que permite *definir la norma* $\| \,.\, \|_s$: $\|u\|_s^2 = \sum_{\chi\in F} |\phi_\chi(u \circ \chi^{-1})|_s^2$.
Esta norma proviene del producto escalar: $\langle u,v\rangle_s = \sum_{\chi\in F} (\phi_\chi.(u \circ \chi^{-1}), \phi_\chi.(v \circ \chi^{-1}))_s$.
Se dice que $u \in C^\infty(\Omega)$ si $u \circ \chi^{-1} \in C^\infty$ para toda χ. Podemos ahora definir el concepto de *operador diferencial* P sobre Ω. Sobre cada $\tilde{\Omega}_\chi$ debemos tener un operador diferencial $P^\chi(D)$, a coeficientes C^∞, vinculados por la *relación de coherencia*:

$$(P^{\chi_1}v) \circ \chi_1\chi_2^{-1} = P^{\chi_2}(v \circ \chi_1\chi_2^{-1}).$$

Se verifica que $P^{\chi_1}(u \circ \chi_1^{-1}) \circ \chi_1\chi_2^{-1} = P^{\chi_2}(u \circ \chi_2^{-1})$. *Definimos* P en $u \in C^\infty(\Omega)$ como

$$(Pu) \circ \chi^{-1} = P^\chi(D)(u \circ \chi^{-1}).$$

Orden de P es el $\sup_\chi \{\textit{orden de } P^\chi(D)\}$.
NB. Un resultado debido a Peetre afirma que una aplicación lineal de $C^\infty(\Omega)$ en $C^\infty(\Omega)$ tal que para todo u: $\operatorname{sop} Pu \subset \operatorname{sop} u$, es un operador diferencial.•

Sean $W = \partial\Omega$ y $R_n^0 = \{(x_1,\ldots,x_n) \in R^n : x_n = 0\}$. Sea p un *operador diferencial de contorno* que lleva $C^\infty(\Omega)$ en $C^\infty(W)$ *definido* por $(pu) \circ \chi^{-1} = p^\chi(u \circ \chi^{-1})$, con la correspondiente relación de coherencia, donde $p^\chi(x,D)$ tiene sumandos de la forma $a_\alpha^\chi(x)D^\alpha$, $x = (x_1,\ldots,x_{n-1},0) \in R_n^0 \cap \tilde{\Omega}_\chi$. Se *define* orden *transversal* de p como el $\sup_\chi \{\alpha_n : D^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} \textit{ en } p^\chi \textit{ tiene coeficiente no nulo}\}$. Así que *orden* $\geq$ *orden transversal*.

iii) Sea ahora $m = 2\mu$ el orden de $P=P(x,D)$, un operador diferencial sobre Ω, donde Ω es una variedad n-dimensional C^∞, compacta y sumergida en R^n. O sea, $\Omega \setminus W$ es un abierto acotado de R^n. Sean $p_1,\ldots,p_\mu$ operadores diferenciales de contorno de ordenes transversales $m_1,\ldots,m_\mu$ con $m_j < m$ para todo j. Recordemos que si $(P,p_1,\ldots,p_\mu)$ define un *sistema elíptico de contorno* (cf. [H], pg.254), la aplicación

$$C^\infty(\Omega) \ni u \to (P(u), p_1(u),\ldots,p_\mu(u)) =: (f, f_1,\ldots,f_\mu)$$

se extiende a una *aplicación continua*

$$H_m(\Omega) \to H_0(\Omega) \times H_{m-m_1-1/2}(W) \times \ldots \times H_{m-m_\mu-1/2}(W),$$

con rango cerrado y codimensión finita, (cf. [H], pg.260, o Cap 13).

iv) Sea $P=P(x,D)$ como en *iii)*. Supongamos que para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus W)$,

(84) $\qquad |\phi|_\mu^2 \le C_0 \operatorname{Re}(P(x,D)\phi,\phi)_0$, donde $C_0 > 0$ no depende de ϕ.

LEMA 1. Si $P(x,D)$ satisface, para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus W)$,

(85) $\qquad |\phi|_\mu^2 \le C_0 \operatorname{Re}(P(x,D)\phi,\phi)_0 + C_1|\phi|_0^2$,

entonces $P(x,D)+\lambda$ satisface (84) para λ suficientemente grande.•

Sea ν la dirección normal exterior a Ω sobre W, y escribamos: $\gamma^j u = \dfrac{\partial^j u}{\partial \nu^j}$, j=0, 1, ..., $\mu-1$. Entonces, (cf. Cap.III de [Treves], o Cap.13),

$$\gamma^j : H_\mu(\Omega) \to H_{\mu-j-1/2}(W).$$

Definamos, $\mathsf{P}(u) := (P(x,D)u, \gamma^0 u, \ldots, \gamma^{\mu-1}u)$. Luego,

$$\mathsf{P}: H_\mu(\Omega) \to H_{-\mu}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{\mu-1} H_{\mu-j-1/2}(W).$$

La aplicación P, si P satisface (84), es *biunívoca, sobre y bicontinua.*

v) DESIGUALDAD DE GÅRDING. Sean E un abierto acotado y P un operador elíptico en E de orden par $m = 2\mu > 0$,

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\, D^\alpha \qquad (D_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j}).$$

Los coeficientes a_α serán funciones indefinidamente diferenciables en E. *Ellas y todas sus derivadas de orden* $\le \mu$ *se supondrán acotadas* allí. Supondremos también que P es *uniformemente fuertemente elíptico*. Esta condición se define mediante el *símbolo principal* del operador:

$$P_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

La condición exige la existencia de una constante $c_0 > 0$ tal que

$$\operatorname{Re} P_m(x,\xi) \ge c_0|\xi|^m, \quad x \in E,\ \xi \in R^n.$$

TEOREMA 4. Bajo las hipótesis mencionadas existen dos constantes positivas N_0 y N_1 tales que para toda $\phi \in C_0^\infty(E)$:

(86) $\qquad |\phi|_\mu^2 \le N_0 \operatorname{Re}(P(x,D)\phi,\phi)_0 + N_1|\phi|_{\mu-1}^2$.•

En (86) puede reemplazarse $|\phi|_{\mu-1}$ por $|\phi|_0$ cambiando la constante N_i. En efecto, dada $\varepsilon > 0$ existe $h = h(\varepsilon)$ tal que

$$1 \le \varepsilon(1+|x|^2) + h(1+|x|^2)^{1-\mu}, \quad x \in R^n.$$

Luego,

$$|\phi|_{\mu-1}^2 = \int |\hat{\phi}|^2 (1+|x|^2)^{\mu-1} dx \le \int |\hat{\phi}|^2 ((1+|x|^2)^\mu \varepsilon + h) dx = \varepsilon|\phi|_\mu^2 + h|\phi|_0^2.$$

En consecuencia, si $\varepsilon = \dfrac{1}{2N_1}$, tenemos

(87) $$\frac{|\phi|_\mu^2}{2} \le N_0 \operatorname{Re}(P(x,D)\phi,\phi)_0 + N_1 h |\phi|_0^2 .$$

A5. **TEOREMA 5.** *a*) Sean ρ y σ constantes no nulas tales que $\rho,\sigma < 2$, $\rho+\sigma > 2$. Entonces existe una constante c_1 tal que

$$\int_{R^2} \frac{dz}{|x-z|^\rho |z-y|^\sigma} \le \frac{c_1}{|x-y|^{\sigma+\rho-2}} .$$

b) Si $0<\sigma,\rho<2$, $\rho+\sigma<2$ y $\operatorname{diam} D < \infty$ entonces existe una constante c_2 tal que para todo $x,y \in R^2$

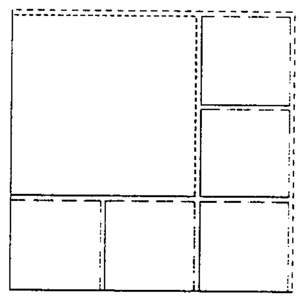
$$\int_D \frac{dz}{|x-z|^\rho |z-y|^\sigma} \le c_2 . \blacklozenge$$

(cf. [Gå], p. 198, op. Cit. Ap.M).

APENDICE C.
PARTICIONES EN CUBOS Y MEDIDAS SINGULARES.

Sea $Q = Q^m$ un cubo de lado uno en R^m. Este cubo y los que intervengan en las particiones finitas que aparecerán pueden suponerse de lados paralelos a los ejes y semicerrados.

Sea J una función nonegativa, superaditiva, definida sobre cubos contenidos en Q:



(1) $\sum_{i=1}^{n} J(\Delta_i) \le J(\Delta)$ si $\Delta \supset \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$ y los Δ_i no se solapan.

Sea $\mathcal{J}$ la familia de esas funciones de conjunto. $J \in \mathcal{J}$ se dice *singular* si para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición S de Q en cubos tal que para cierta subfamilia H de S vale

(2) $\sum_{\Delta \in H} J(\Delta) < \varepsilon$, $\sum_{\Delta \in S \setminus H} |\Delta| < \varepsilon$, donde $|\Delta|$ es la medida de Lebesgue de Δ.

Utilizando la desigualdad de Hölder se ve enseguida que si J_1, $J_2 \in \mathcal{J}$ entonces $J_1^{\theta} J_2^{1-\theta} \in \mathcal{J}$ si $\theta \in [0,1]$. De aquí se deduce que si J_1 es singular y $\theta \in (0,1)$, entonces $J_1^{\theta} J_2^{1-\theta}$ es singular.

DEFINICION 1. Sean $s > 0$, $J \in \mathcal{J}$, S una partición de Q en cubos, $\#S :=$número de cubos de S. Definimos

$$G_s(J;S) := \sup\{|\Delta|^s J(\Delta) : \Delta \in S\}.\blacklozenge$$

Si partimos los lados de Q en 2^h lados iguales se genera un partición T que divide a Q en $n = \#T = 2^{mh}$ cubos congruentes y valen las relaciones:

$$(\#T.|\Delta|)^s = 2^{mhs}|\Delta|^s = 1, \qquad |\Delta|^s \sum_{\Delta \in T} J(\Delta) \le \frac{J(Q)}{2^{mhs}} = \frac{J(Q)}{n^s}.$$

Luego, $G_s(J;T) \le \frac{J(Q)}{n^s} = \frac{J(Q)}{(\#T)^s}$. Sin embargo tenemos el

LEMA 1. Sean $s > 0$ y $J \in \mathcal{J}$. Para todo entero positivo n existe una partición S tal que $\#S \le n$ y

$$G_s(J;S) \le C\frac{J(Q)}{n^{s+1}} \le C\frac{J(Q)}{(\#S)^{s+1}} \qquad \text{con } C = C(m,s).\blacklozenge$$

DEMOSTRACION. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $J(Q) = 1$. Dada una partición Σ de Q llamaremos *extensión elemental de* Σ a aquella partición que se obtiene subdividiendo en 2^m cubos iguales a los $\Delta \in \Sigma$ que verifican

(3) $$|\Delta|^s J(\Delta) > \frac{G_s(J,\Sigma)}{2^{ms}}.$$

Sea $S_0 = \{Q\}$ y S_{j+1} la extensión elemental de S_j. Llamemos $g_j := G_s(J;S_j)$. Entonces

(4) $$g_0 = J(Q) = 1, \qquad g_{j+1} \le \frac{g_j}{2^{ms}}.$$

En efecto, un elemento $\Delta \in S_j$ que se subdivide da lugar a 2^m cubos Δ' tales que $|\Delta'| = \frac{|\Delta|}{2^m}$. En consecuencia, $|\Delta'|^s J(\Delta') \le \sum_{\Delta' \subset \Delta} |\Delta'|^s J(\Delta') \le |\Delta|^s J(\Delta)/2^{ms} \le g_j/2^{ms}$.

Obsérvese que de (4) y la definición de G_s se deduce que la sucesión de extensiones elementales consecutivas es infinita y por tanto que $\#S_j \uparrow \infty$.

Sea $n_j := \#S_j$, $T_j := \{\Delta \in S_j : \Delta \textit{ se subdivide al pasar a } S_{j+1}\}$, $t_j := \#T_j$. Entonces, $n_0 = 1$ y $t_0 = 1$. Además, $n_{j+1} = n_j - t_j + 2^m t_j = n_j + (2^m - 1)t_j$ y por tanto

(5) $$n_j - n_0 = (2^m - 1)(t_0 + t_1 + \ldots + t_{j-1}).$$

De (5) sigue también que $n_j - n_0 \geq 2^m - 1 \geq n_0$ para j=1,2,... , o sea que

(6) $$n_j - n_0 \geq \frac{n_j}{2} \text{ para } j = 1,2,\ldots .$$

Para acotar a t_i necesitaremos el siguiente resultado:

PROPOSICION 1. Sean $x_i > 0$, $y_i > 0$, $\sum_{i=1}^{h} x_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{h} y_i \leq 1$. Si existe $\eta > 0$ tal que, para todo i, $x_i y_i^s \geq \eta$ entonces $h^{1+s}\eta \leq 1$.♦

DEMOSTRACION. $h\eta^{\frac{1}{1+s}} \leq \sum_{i=1}^{h} x_i^{\frac{1}{1+s}} y_i^{\frac{s}{1+s}} \leq \left(\sum x_i\right)^{\frac{1}{1+s}} \left(\sum y_i\right)^{\frac{s}{1+s}} \leq 1$, QED.

Si $\Delta \in T_j$ vale $|\Delta|^s J(\Delta) > \frac{g_j}{2^{ms}}$. Además $\sum_{\Delta\in T_j} J(\Delta) \leq 1$, $\sum_{\Delta\in T_j} |\Delta| \leq 1$. Aplicando primero la proposición 1 y luego repetidamente (4), obtenemos,

(7) $$t_j^{1+s} \leq \frac{2^{ms}}{g_j} \leq \frac{1}{g_{j+1}} \leq \frac{1}{2^{ms} g_{j+2}} \leq \ldots \leq \frac{2^{-ms(h-j-1)}}{g_h}.$$

De (5), (7) y (6) sigue que para h=1, 2, ... , vale

(8) $$\frac{n_h}{2} \leq n_h - n_0 \leq \frac{(2^m - 1)\sum_{j=0}^{h-1} 2^{-\frac{ms}{1+s}(h-j-1)}}{g_h^{\frac{1}{s+1}}} \leq \frac{C'(m,s)}{g_h^{\frac{1}{s+1}}}.$$

Luego, $g_h \leq \left(\frac{2C'}{n_h}\right)^{s+1}$, h=1,2,... . Dado $n > 1$ existe h tal que:

$$n_h \leq n < n_{h+1} \leq 2^m n_h.$$

Entonces, $g_h \leq \frac{C}{n^{1+s}}$ donde $C = C(m,s) = (C'(m,s)2^{m+1})^{1+s}$, QED.

Hemos probado que para toda $J \in \mathcal{J}$ se tiene

(9) $$I_n(J) := \inf_{\#S\leq n} G_s(J,S) = O\left(\frac{1}{n^{s+1}}\right),$$

y esto vale también cuando se consideran solamente particiones S que refinan a una S_0 dada.

LEMA 2. Si J es singular entonces $I_n(J) := \inf_{\#S\le n} G_s(J,S) = o\left(\frac{1}{n^{s+1}}\right)$.♦

DEMOSTRACION. Sea S_0, S_1, S_2, ... una cadena de sucesivas extensiones elementales donde S_0 es una división en cubos dada. Para mejorar el resultado ya obtenido conviene estimar más ajustadamente a t_j. Como para $\Delta \in T_j$ se tiene $|\Delta|^s J(\Delta) > g_j 2^{-ms}$ de la Prop. 1 resulta que

$$t_j\left(\frac{g_j}{2^{ms}}\right)^{\frac{1}{s+1}} < \sum_{\Delta\in T_j} |\Delta|^{\frac{s}{s+1}} J(\Delta)^{\frac{1}{s+1}} = \sum_{\Delta\in A} |\Delta|^{\frac{s}{s+1}} J(\Delta)^{\frac{1}{s+1}} + \sum_{\Delta\in B} |\Delta|^{\frac{s}{s+1}} J(\Delta)^{\frac{1}{s+1}}$$

donde $A = \{\Delta : \Delta \subset \Delta' \in S_0, |\Delta'| < J(\Delta')\}$, $B = \{\Delta : \Delta \subset \Delta' \in S_0, |\Delta'| \ge J(\Delta')\}$.
Luego,

$$t_j\left(\frac{g_j}{2^{ms}}\right)^{\frac{1}{s+1}} < \left(\sum_{\Delta\in A}|\Delta|\right)^{\frac{s}{s+1}}\left(\sum_{\Delta\in A}J(\Delta)\right)^{\frac{1}{s+1}} + \left(\sum_{\Delta\in B}|\Delta|\right)^{\frac{s}{s+1}}\left(\sum_{\Delta\in B}J(\Delta)\right)^{\frac{1}{s+1}} \le$$

$$\le \left(\sum_{\Delta\in A}|\Delta|\right)^{\frac{s}{s+1}} + \left(\sum_{\Delta\in B}J(\Delta)\right)^{\frac{1}{s+1}} \le \left(\sum_{\Delta\in A}|\Delta|\right)^{\frac{s\wedge 1}{s+1}} + \left(\sum_{\Delta\in B}J(\Delta)\right)^{\frac{s\wedge 1}{s+1}} \le 2\left(\sum_{\Delta'\in S_0}|\Delta'|\wedge J(\Delta')\right)^{\frac{s\wedge 1}{s+1}} =: D$$

En consecuencia, usando (4) y para $j \le h$, vale

$$(10) \qquad t_j^{1+s} \le \frac{2^{ms}}{g_j} D^{s+1} \le \frac{2^{ms(j+1-h)}}{g_h} D^{s+1}.$$

Por tanto, si h=1, 2,... (cf. (5), (6)),

$$(11) \qquad \frac{n_h}{2} \le (2^m - 1)(t_0 + t_1 + \ldots + t_{h-1}) \le \frac{D\,C'(m,s)}{g_h^{\frac{1}{s+1}}}.$$

Por ser J singular, dado $\varepsilon > 0$ existe S_0 tal que $D < \varepsilon^{\frac{1}{s+1}}$. Partiendo de S_0 obtenemos:

$$(12) \qquad g_h \le \left(\frac{1}{n_h}\right)^{s+1} C''(m,s)\,\varepsilon = \frac{C(m,s)}{(2^m n_h)^{s+1}}\varepsilon .$$

Recordemos que valen: $n_h \uparrow \infty$ para $h \uparrow \infty$ y $n_{h+1} \le 2^m n_h$. Luego, para toda $n \ge n_0$ existe h tal que $n_h \le n < 2^m n_h$ y vale $\inf_{\#S\le n} G_s(J,S) \le g_h$.
Resulta entonces, usando (12), que

$$I_n(J) := \inf_{\#S\le n} G_s(J,S) \le \frac{C(m,s)}{(2^m n_h)^{s+1}}\varepsilon < \frac{C(m,s)}{n^{s+1}}\varepsilon .$$

Luego, hemos probado que para $n \ge n_0$ vale la desigualdad: $I_n(J) < \frac{C(m,s)}{n^{s+1}}\varepsilon$. De aquí el Lema 2 sigue fácilmente, QED.

APENDICE Q.
FORMAS CUADRATICAS POSITIVAS CON DOMINIO DENSO.

Q1. **NOTACION.** $D(B)$ *designará* el dominio del operador B y $R(B)$ su rango; si A denota una forma cuadrática, designaremos su dominio con $d(A)$.♦

Sea A una forma cuadrática con $\overline{d(A)} := \mathit{clausura}\ d(A) = H$, $A(x,y) = \overline{A(y,x)}$, para la que existe $m > 0$ tal que para todo $x \in d(A)$:

(1) $$A(x,x) \geq m(x,x).$$

DEFINICION 1. A se dice cerrada si respecto al producto escalar $(x,y)_A := A(x,y)$ la variedad lineal $d(A)$ es un espacio de Hilbert H_A.♦

En este caso, como $\|y\|^2 \leq m^{-1}\|y\|_A^2$, si $x_n \to x$ en H y $\{x_n\}$ es de Cauchy en la norma $\|.\|_A$ entonces $\|x_n - x\|_A \to 0$ para $n \to \infty$.

TEOREMA 1. Sea A una forma cuadrática cerrada. Entonces existe un único operador autoadjunto, positivo, biunívoco, T, tal que $D(T) = d(A)$, $R(T) = H$, $A(x,y) = (Tx,Ty)$. Además, si $x \in D(T^2)$ e $y \in d(A)$ entonces $A(x,y) = (T^2x,y)$.♦

DEMOSTRACION. Vale
$$|(h,y)| \leq \|h\|.\|y\| \leq \left(\|h\|/\sqrt{m}\right)\|y\|_A, \text{ para } h \in H,\ y \in H_A.$$
Luego, por el teorema de representación de F. Riesz tenemos que existe $Bh \in H_A$ t.q.

(2) $\qquad (h,y) = (Bh,y)_A = A(Bh,y)$ para todo $y \in H_A$,

con $\qquad \|Bh\| \leq \|Bh\|_A/\sqrt{m} \leq \|h\|/m$ pues $\|Bh\|_A \leq \|h\|/\sqrt{m}$.

Entonces, si $y = Bh$ en (2),

(3) $\qquad (Bh,h) = \overline{(h,Bh)} = \overline{(Bh,Bh)_A} = \|Bh\|_A^2 = (h,Bh)$,

para todo $h \in H$. Además, si $h \in H_A$ vale $\|Bh\|_A \leq \|h\|/\sqrt{m} \leq \|h\|_A/m$.

De (2) obtenemos que si $Bh = 0$ entonces $h = 0$; precisamente,
$$h \neq 0 \Rightarrow (Bh,h)_A = \|h\|^2 > 0.$$
O sea, B es un operador lineal, acotado, biunívoco, autoadjunto, positivo, con dominio H y rango $R(B) \subset H_A$. Podemos entonces definir $B^{1/2}$, acotado, autoadjunto, biunívoco y positivo: $B^{1/2} : H \to H$ con $R(B^{1/2}) \supset R(B)$.

También $B|_{H_A} = B|_{d(A)}$ es autoadjunto, acotado y biunívoco en H_A.

Veamos que

(4) $$R(B^{1/2}) = H_A.$$

Dado $z \in d(A)$ existe $\{x_n\} \subset d(A)$ tal que $B(x_n) \to z$ en H_A, pues $B(H)$ es denso en en H_A (y en H). Entonces,
$$\|B(x_n - x_m)\|_A^2 = (x_n - x_m, B(x_n - x_m)) = \|B^{1/2}(x_n - x_m)\|^2 \to 0 \text{ para } m,n \to \infty,$$
y por lo tanto existe $x \in H$ tal que $B^{1/2}x_n \to x$. En consecuencia, $Bx_n \to B^{1/2}x = z$ y $R(B^{1/2}) \supset H_A$.

También $R(B^{1/2}) \subset H_A$. En efecto, sea $x \in H$ y $\{x_n\}$ una sucesión tal que $B^{1/2}x_n \to x$. Sea $z_n := Bx_n \in H_A$. Luego

$$\|z_n - z_m\|_A^2 = A(B(x_n - x_m), B(x_n - x_m)) = (x_n - x_m, B(x_n - x_m)) =$$

$$= \|B^{1/2}(x_n - x_m)\|^2 \to 0 \text{ si } n, m \to \infty.$$

Entonces existe $z \in H_A$ tal que $z_n \to z$ en ese espacio. Además $z_n = B^{1/2}(B^{1/2}x_n) \to B^{1/2}x$, y por tanto $B^{1/2}x = z \in H_A$ y (4) queda probada.

Definamos: $T := (B^{1/2})^{-1} \equiv B^{-1/2}$. Sean $x, h \in H$, entonces

$$A(B^{1/2}(B^{1/2}h), B^{1/2}x) = A(Bh, B^{1/2}x) = (h, B^{1/2}x) = (B^{1/2}h, x).$$

Si escribimos $y = B^{1/2}h$ resulta $A(B^{1/2}y, B^{1/2}x) = (y, x)$ con $y \in H_A, x \in H$.

Entonces, para $y_n \in H_A$: $\|B^{1/2}y_n\|_A = \|y_n\|$. De esto sigue que si $y_n \to z$ en H entonces $B^{1/2}y_n \to B^{1/2}z$ en H y en H_A. Luego,

$$\|B^{1/2}z\|_A = \|z\| \text{ para todo } z \in H$$

y también se concluye que $A(B^{1/2}a, B^{1/2}b) = (a, b)$ para todo $a, b \in H$.

Como $T = B^{-1/2}$ sigue que para todo $x, y \in d(A)$, $A(x, y) = (Tx, Ty)$.

Finalmente, para $y \in d(A)$ y $x \in B^{1/2}(H_A) = B(H) = D(T^2) \subset H_A$ se tiene $(T^2x, y) = (Tx, Ty) = A(x, y)$, QED.

En vista del teorema 1 cabe la siguiente definición:

DEFINICION 2. Dada una forma cuadrática cerrada A con dominio $d(A)$ llamaremos A también al operador T^2.♦

O sea, $A = B^{-1}$. De esta manera, $D(A) = B^{1/2}(H_A)$ y $A(x, y) = (Ax, y)$ para $x \in D(A)$, $y \in d(A)$. Entonces, $A^{1/2} = T$ es un operador biunívoco con dominio $R(B^{1/2}) = H_A$ y rango $R(A^{1/2}) = R(T) = D(B^{1/2}) = H$.

TEOREMA 2. Sean A y A_n, n=1,2,... , formas cuadráticas de dominios tales que $d(A_n) \subset d(A)$ y $d_0 := \bigcap d(A_n)$ es denso en H_A $(=d(A))$. Si para todo $x \in d_0$,

$$m(x, x) \leq A(x, x) \leq A_n(x, x) \to A(x, x),\ n \to \infty,$$

entonces.

$$\lim_{n\to\infty} A^{1/2}A_n^{-1/2}(A^{1/2}A_n^{-1/2})^*(x) = I(x) = x \quad \text{para todo } x \in H.\blacklozenge$$

DEMOSTRACION. *i*) Caso $A = I$. Entonces, $d(A) = H$ y $\|A_n^{1/2}x\| \to \|x\|$ para $x \in d_0$. Como en este caso $m = 1$ tenemos

$$(5) \qquad \|A_n^{1/2}x - x\|^2 = (A_nx, x) - 2(A_n^{1/2}x, x) + (x, x) = \int_1^\infty (\lambda - 2\lambda^{1/2} + 1)d(E_n(\lambda)x, x) \leq$$

$$\leq \int_1^\infty (\lambda - 1)d(E_n(\lambda)x, x) = (A_nx, x) - (x, x) \to 0 \text{ si } n \to \infty.$$

Por otra parte $A_n^{-1/2}$ es acotado de dominio H con $\|A_n^{-1/2}\| \leq 1$, pues

$$\|A_n^{1/2}x\|^2 = (A_nx, x) \geq \|x\|^2.$$

En consecuencia, si $y \in d_0$, (cf. (5)):

(6) $\left\|A_n^{-1/2}y-y\right\|=\left\|A_n^{-1/2}(I-A_n^{1/2})y\right\|\le\left\|(I-A_n^{1/2})y\right\|\to 0$

y también $\left\|A_n^{-1}y-y\right\|\to 0$ para $n\to\infty, y\in d_0$.

Luego, de $\left\|A_n^{-1/2}\right\|\le 1\ge\left\|A_n^{-1}\right\|$ y la densidad de d_0 en H, se deduce que para todo $x\in H$:

(7) $A_n^{-1}x=A_n^{-1/2}(A_n^{-1/2})^*x\to x$.

ii) Caso general. Observemos que del teorema 1 sigue que $A_n^{-1/2}$ es acotado de dominio H y rango $d(A_n)\subset d(A)$. Además $A^{1/2}$ es cerrado de dominio $d(A)$ y rango H. Por tanto, $A^{1/2}A_n^{-1/2}$ es cerrado de dominio H y en consecuencia acotado. Lo mismo vale para $(A^{1/2}A_n^{-1/2})^*$.

Reemplacemos H por H_A. En este caso cada forma A_n genera un operador autoadjunto V_n (correspondiente al original operador A_n) en el espacio de Hilbert H_A de manera que $V_n^{-1}x\to I$ fuertemente (cf. (7)) donde (véase *i*)),

$$V_n^{1/2}:d(A_n)\to d(A).$$

Sea $h\in d(A)$ y $W_nh:=x=A_n^{-1/2}(A^{1/2}A_n^{-1/2})^*A^{1/2}h\in d(A_n)$. Tenemos, para $h,y\in d(A)$:

$$A_n(W_nh,y)=(A_n^{1/2}W_nh,A_n^{1/2}y)=(A^{1/2}h,A^{1/2}y)=A(h,y).$$

Luego, W_n juega el papel de B en (2) y por tanto V_n, de rango $d(A)$, es su inverso: $W_nV_nk=k$ para todo $k\in D(V_n)=d(A)$. Entonces,

(8) $A(V_nk,y)=A_n(k,y)$.

Además, de *i*), si $h\in d(A)$:

$$A(W_nh-h,W_nh-h)=\left\|A^{1/2}W_nh-A^{1/2}h\right\|^2\to 0.$$

Entonces, $\left\|(A^{1/2}A_n^{-1/2}(A^{1/2}A_n^{-1/2})^*-I)A^{1/2}h\right\|\to 0$ para $n\to\infty$. Como $A^{1/2}(d(A))=H$ resulta que

$$A^{1/2}A_n^{-1/2}(A^{1/2}A_n^{-1/2})^*x\to x \text{ para todo } x\in H, \quad \text{QED.}$$

Q2. **NOTACION.** Sea Ω un abierto de R^m, los puntos de R^m serán denotados con $x=(x_1,\dots,x_m)$. α y β designarán *m*-uplas de enteros no negativos: $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$, $|\alpha|=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j$. $D^\alpha:=D_1^{\alpha_1}..D_m^{\alpha_m}$ donde $D_j:=\frac{\partial}{i\partial x_j}$. $L^p(\Omega;k)$ denotará al espacio L^p de funciones a valores en C^k, éste con la norma pitagórica. $H^h(\Omega):=W_2^h(\Omega)=$ el espacio de distribuciones en $L^2(\Omega)$ con sus derivadas de orden menor o igual a h también en ese espacio. $\overset{o}{H}{}^1(\Omega):=\overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)=$ los elementos de $H^1(\Omega)$ con soporte compacto$\subset\Omega$.•

Si $i(m,h)$ denota al número de *m*-uplas distintas de enteros no negativos cuya suma es h, entonces el *gradiente de orden h*, $\nabla_h(u)=\{D^\alpha u;|\alpha|=h\}$, de una función u, es un vector de dimensión $i(m,h)$ y

$$\nabla_h:H^h(\Omega;k)\to L^2(\Omega,i(m,h)\times k).$$

El adjunto formal de ∇_h, ∇_h^*, o *divergencia de orden h*, se define por

$$\nabla_h^*(v)=\sum_{|\alpha|=h}D^\alpha v^\alpha=(\sum_{|\alpha|=h}D^\alpha v_1^\alpha,\sum_{|\alpha|=h}D^\alpha v_2^\alpha,\ldots,\sum_{|\alpha|=h}D^\alpha v_k^\alpha),$$

donde $v=(v^\alpha)$ es un vector con $i(m,h)$ componentes, $|\alpha|=h$, y cada componente v^α tiene k componentes que son funciones de R^m en C: $v^\alpha=(v_1^\alpha,\ldots,v_k^\alpha)$.

Ejemplo. Sean $m=2=k$, $h=1$. Entonces $i(m,h)=2$ y

$\nabla_h u=\left(D_x u_1,D_x u_2;D_y u_1,D_y u_2\right)\in L^2(\Omega;4)$; $v=\left(v_1^x,v_2^x;v_1^y,v_2^y\right)$ y

$$(\nabla u,v)=\iint_\Omega(D_x u_1.\overline{v_1^x}+D_x u_2.\overline{v_2^x}+D_y u_1.\overline{v_1^y}+D_y u_2.\overline{v_2^y})\,dx\,dy.$$

Si v es suficientemente regular,

(9) $$(\nabla u,v)=-\iint_\Omega(u_1.\overline{D_x v_1^x}+u_2.\overline{D_x v_2^x}+u_1.\overline{D_y v_1^y}+u_2.\overline{D_y v_2^y})\,dx\,dy=$$

$$=\iint_\Omega(u_1\overline{(D_x v_1^x+D_y v_1^y)}+u_2\overline{(D_x v_2^x+D_y v_2^y)})\,dx\,dy=(u,\sum_{|\alpha|=1}D^\alpha v^\alpha).\blacklozenge$$

Sea X un espacio normado. Si $u\in X$, denotamos con $N(u;X)$ la norma de u. Por ejemplo, $N(u;L^p)=\|u\|_p$,

$N(u;W_p^h(\Omega))=\left(\int_\Omega(\sum_{|\alpha|\le h}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}|D^\alpha u|^2)^{p/2}\right)^{1/p}$. Esta norma, restringida a $\overset{o}{W}{}_p^h$, es equivalente a $N(u;\overset{o}{W}{}_p^h(\Omega))=\left(\int_\Omega(\sum_{|\alpha|=h}\frac{h!}{\alpha!}|D^\alpha u|^2)^{p/2}\right)^{1/p}$.

Q denotará a una matriz (hermítica) de matrices: $Q=\{a_{\sigma_1\sigma_2}(x)\}_{|\sigma_i|=h}$, $a_{\sigma_1\sigma_2}(x)$ matrices $k\times k$ con $a_{\sigma_1\sigma_2}=a^*_{\sigma_2\sigma_1}$.

Su norma $|Q(x)|$ es, por definición, *la norma como operador* en $C^{i(m,h)\times k}$. Diremos que $Q\in L^p(\Omega)$ si $|Q(x)|\in L^p(\Omega)$ y definimos:

$$\|Q\|_p:=\|\,|Q(x)|\,\|_p.$$

HIPOTESIS SOBRE $Q(x)$: existe una función $\gamma(x)>0$ tal que para todo $f=\{f_\sigma\}_{|\sigma|=h}$, $f_\sigma\in C^k$, vale

(10) $$<Q(x)f,f>:=\sum_{|\sigma_i|=h}a_{\sigma_1\sigma_2}(x)f_{\sigma_2}.\overline{f_{\sigma_1}}\ \equiv$$

$$\equiv\sum_{|\sigma_i|=h}\left(a_{\sigma_1\sigma_2}(x)f_{\sigma_2},f_{\sigma_1}\right)\ge\gamma(x)\sum_{|\sigma|=h}\frac{h!}{\sigma!}|f_\sigma|^2.$$

$\gamma(x)$ denotará la *mayor* función posible.

CONDICION I. $\gamma(x)^{-1}\in L^1(\Omega)$, $Q\in L^1_{loc}(\Omega)$.

Si *denotamos* con $<.,.>'$ al producto escalar con pesos $\frac{h!}{\sigma!}$ en el espacio C^K, $K=i(m.h)\times k$, vemos que $<f,f>\le<f,f>'\le h!<f,f>$. O sea, $\|f\|\cong\|f\|'$. Haciendo $g=Q^{-1}f$ obtenemos:

$$\frac{1}{\gamma(x)} = \sup_{f\neq 0} \frac{\sum_{|\sigma|=h} \frac{h!}{\sigma!}|f_\sigma|^2}{<Qf,f>} = \sup_{f\neq 0}\frac{<f,f>'}{<Qf,f>} \cong \sup_{f\neq 0}\frac{<f,f>}{<Qf,f>} = \sup_{g\neq 0}\frac{<Q^{-1}g,Q^{-1}g>}{<g,Q^{-1}g>} =$$

$$= \sup_{g\neq 0}\frac{<Q^{-1/2}Q^{-1/2}g,Q^{-1/2}Q^{-1/2}g>}{<Q^{-1/2}g,Q^{-1/2}g>} = \sup_{h\neq 0}\frac{<Q^{-1/2}h,Q^{-1/2}h>}{<h,h>} = \sup_{h\neq 0}\frac{<Q^{-1}h,h>}{<h,h>} = \left|Q^{-1}\right|.$$

Luego,

(11) $$\frac{1}{\gamma(x)} \cong \left|Q^{-1}\right| \cong \left|Q^{-1}\right|'.$$

A Q le corresponde una forma cuadrática diferencial

(12) $$A(u,v) := \int_\Omega <Q\nabla_h u, \nabla_h v> dx\,,\ u,v\in C_0^\infty(\Omega),\ u(x), v(x)\in C^k.$$

O sea, si $a_{\sigma_1\sigma_2}(x)$ es diferenciable h veces:

(13) $$A(u,v) = \sum_{|\sigma_i|=h}\int_\Omega a_{\sigma_1\sigma_2} D^{\sigma_2}u\,\overline{D^{\sigma_1}v}\,dx = \int_\Omega \sum D^{\sigma_1}(a_{\sigma_1\sigma_2}D^{\sigma_2}u)\,\bar v\,dx = (Au,v).$$

Y a Q le corresponde también una matriz $k\times k$ llamada su *símbolo principal*:

(14) $$a(x,\xi) = \sum_{\sigma_1,\sigma_2} a_{\sigma_1\sigma_2}(x)\,\xi^{\sigma_1+\sigma_2}\,, \qquad x,\xi\in R^m,$$

donde $\xi^h = \xi_1^{h_1}\ldots\xi_m^{h_m}$. Si f es un vector de C^k, designaremos con $\vec f$ al vector en C^K tal que su componente σ-ésima es $\xi^\sigma f$. Luego,

(15) $$a(x,\xi)f.\bar f = \sum_{\sigma_1,\sigma_2}(a_{\sigma_1\sigma_2}(x)\,\xi^{\sigma_2}f, \xi^{\sigma_1}f) = <Q\vec f, \vec f>.$$

Entonces,

$$a(x,\xi)f.\bar f \geq \gamma(x)\sum_\sigma \frac{h!}{\sigma!}|f|^2\xi^{2\sigma} = \gamma(x)|f|^2(\xi_1^2+\ldots+\xi_m^2)^h = \gamma(x)|\xi|^{2h}|f|^2.$$

APENDICE S.
OPERADORES PROPIAMENTE ELIPTICOS

1. ALGUNOS RESULTADOS SOBRE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EN LA SEMIRRECTA.

LEMA 1. Sea $P(t)$ un polinomio mónico de grado *m*,

(1) $\qquad P(t) := t^m + a_1 t^{m-1} + \ldots + a_m$

con r raíces $\tau_1,\ldots,\tau_r$ con parte imaginaria positiva y las restantes en $\{\operatorname{Im} z \le 0\}$. Sean $f(t) \in S([0,\infty))$ (*) y $g_0,\ldots,g_{r-1} \in \mathbf{C}$ datos numéricos. Entonces existe exactamente una función $u(t) \in S([0,\infty))$ tal que si $D = \dfrac{d}{idt}$:

(2) $\qquad P(D)u = f(t), \quad 0 < t < \infty,$

(3) $\qquad D^j u(0) = g_j, \qquad j = 0,\ldots,r-1.$ •

DEMOSTRACION. Etapa 1: existe una solución en $S([0,\infty))$ de (2). En efecto, basta considerar el caso $P(D) = (D - \tau)$, $\tau \in \mathbf{C}$. Sea

$$(4) \qquad \begin{cases} v(t) := -i \displaystyle\int_t^\infty e^{i\tau(t-s)} f(s)\, ds & si \ \operatorname{Im}\tau \le 0, \\ \\ v(t) := i \displaystyle\int_0^t e^{i\tau(t-s)} f(s)\, ds & si \ \operatorname{Im}\tau > 0. \end{cases}$$

Como $Dv = \tau v + f$ para demostrar que $v \in S([0,\infty))$ basta mostrar que $|t^h v(t)| \le M_h$ para todo h si $t \ge 1$. Si $\operatorname{Im}\tau \le 0$,

$$|v(t)| \le \int_t^\infty |f(s)|\, ds \le t^{-h} \int_t^\infty s^h |f(s)|\, ds,$$

y si $\operatorname{Im}\tau = \delta > 0$,

$$|v(t)| \le e^{-\delta t/2} \int_0^{t/2} e^{-\delta(t/2-s)} |f(s)| ds + (t/2)^{-h} \int_{t/2}^t |f(s)| s^h ds \le$$

$$\le e^{-\delta t/2} \int_0^\infty |f(s)|\, ds + (t/2)^{-h} \int_0^\infty |f(s)|\, s^h ds.$$

Etapa 2: las soluciones de $P(D)u = 0$ son de la forma

$$u = \sum_{k=1}^m c_k e^{i\tau_k t} t^{\alpha_k},$$

donde $\tau_1,\ldots,\tau_m$ son las raíces de P y $\alpha_k = 0,1,\ldots,(\textit{multiplicidad de la raíz } \tau_k) - 1$. Esta solución pertenece a S si y sólo si $c_k = 0$ para los k tales que $\operatorname{Im}\tau_k \le 0$, o sea si y sólo si,

(5) $$u = \sum_{k=1}^r c_k e^{i\tau_k t} t^{\alpha_k}.$$

(*) Un teorema de extensión debido a Sealey, análogo al teorema de Whitney, asegura que $S([0,\infty))$ puede extenderse linealmente a $S(-\infty,\infty)$. En particular, $S([0,\infty)) = S(-\infty,\infty)|_{[0,\infty)}$.

Las ecuaciones $(d/dt)^j u(0)=\tilde{g}_j$, $j=0,1,\ldots,r-1$, son r ecuaciones lineales en c_k, cuyo determinante tiene por elemento $(j,k)\in\{0,\ldots,r-1\}\times\{1,\ldots,r\}$ a

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^j (e^{i\tau_k t}t^{\alpha_k})\Big|_{t=0} = \binom{j}{\alpha_k}\alpha_k!(\tau_k)^{j-\alpha_k} = \frac{d^{\alpha_k}(\tau^j)}{d\tau^{\alpha_k}}\Big|_{\tau=\tau_k}.$$

Entonces, si todas las raíces son simples, $\alpha_k=0$ para todo k y el determinante es de Vadermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots \\ \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \ldots \\ \tau_1^2 & \tau_2^2 & \tau_3^2 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{vmatrix},$$

o, si por ejemplo τ_1 es de multiplicidad $\alpha_1>1$: $\tau_1=\ldots=\tau_{\alpha_k}$ deben reemplazarse las columnas 2, 3, ..., α_1 por las derivadas primera, segunda,..., $(\alpha_1-1)-$*ésima* de la primera columna. Nuevamente el determinante de las ecuaciones en c_k es no nulo y estas quedan unívocamente determinadas.

Más aún, existen números β_{kj} que dependen de P tales que

(6) $$c_k=\sum_{j=0}^{r-1}\beta_{kj}\tilde{g}_j,$$ QED.

LEMA 2. Sean $\tau\in\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$ y $f(t)\in S([0,\infty))$. La solución $v(t)\in S([0,\infty))$ tal que $(D-\tau)v=f(t)$ definida por (4) verifica

(7) $$\|v\|_{k+1}\le C_{k,\tau}\|f\|_k.\ \blacklozenge$$

DEMOSTRACION. Ya probamos en el lema 1 que $v\in S$. Veamos (7).

Como para k entero≥ 0: $D^{k+1}v=\tau D^k v+D^k f$ se verifica $\|v\|_{k+1}\le A_\tau(\|v\|_k+\|f\|_k)$, y por tanto,

$$\|v\|_{k+1}\le C_\tau(\|v\|_0+\|f\|_k),\qquad (\ \|\cdot\|_k=\|\cdot\|_{H^k}\ ).$$

Para finalizar observemos que la definición de v permite escribir ésta en la forma

$$v(t)=\int_0^\infty f(s)N_\tau(t-s)\,ds$$

con $N_\tau(y)\in L^1(R^1)$. Luego,

$$\|v\|_0=(\int_0^\infty|v(t)|^2dt)^{1/2}\le\|f\|_0\int_0^\infty|N_\tau(y)|\,dy,$$

y $\|v\|_{k+1}\le C_{\tau,k}\|f\|_k$, QED.

Obsérvese que cuando $\operatorname{Im}\tau>0$, $v(0)=0$.

TEOREMA 1. Sea $P(z)$ un polinomio como en el lema 1, pero sin raíces reales y sean $\tau_1,\ldots,\tau_r$ sus raíces con parte imaginaria positiva. Sea k entero ≥ 0. Entonces existe una constante $C_{k,P}$ tal que para toda $u\in C^\infty([0,\infty))\cap H^{m+k}(0,\infty)$ vale

(8) $$\|u\|_{m+k}\le C_{k,P}\left(\|P(D)u\|_k+\sum_{j=0}^{r-1}|D^j u(0)|\right),$$

donde la sumatoria está ausente si $r=0$.•

DEMOSTRACION. Sean $u\in S([0,\infty))$ y $f(t)=P(D)u$, $g_j=D^ju(0)$, $j=0,\ 1,\dots,r-1$. Entonces u es única solución en S del problema

(9) $$P(D)u=f\,,\ D^ju(0)=g_j\,,\ j=0,\dots,r-1\,.$$

Esta solución se obtiene siguiendo las etapas 1 y 2 del lema 1. Puede escribirse como $u=u_p+u_h$ donde u_p es una solución particular de la ecuación diferencial y u_h es una solución de la ecuación homogénea $P(D)u=0$. Como $P(D)=\prod_{j=1}^{m}(D-\tau_j)$, definimos

(10) $$\begin{cases} u_m(t):=f(t), \\ (D-\tau_k)u_{k-1}=u_k, \quad k=m,m-1,\dots,1, \quad u_{k-1}\in S. \end{cases}$$

Entonces u_0 verifica $P(D)u_0=f$ y por la nota al lema 2:

(11) $$u_0(0)=u_1(0)=\dots=u_{r-1}(0)=0\,.$$

Como

(12) $$Du_{k-1}=\tau_k u_{k-1}+u_k\,,$$

(13) $$Du_k(0)=0 \text{ si } k+1\le r-1\,.$$

Derivando (12) resulta

(14) $$\begin{cases} D^2u_j(0)=0 & si\ j+2\le r-1, \\ \vdots & \\ D^nu_0(0)=0 & si\ 0\le n\le r-1. \end{cases}$$

O sea, la solución particular $u_p:=u_0$ verifica

(15) $$P(D)u_p=f\,,\ D^nu_p(0)=0\,, \quad 0\le n\le r-1\,.$$

Del lema 2 sigue ahora que:

(16) $$\begin{aligned}\|u_p\|_{m+k}&=\|u_0\|_{m+k}\le C_{m+k,\tau_1}\|u_1\|_{m+k-1}\le C_{m+k,\tau_1}C_{m+k-1,\tau_2}\|u_2\|_{m+k-2}\le\dots\le \\ &\le C_{m+k,\tau_1}\dots C_{k+1,\tau_m}\|u_m\|_k=C_{k,\tau_1,\dots,\tau_m}\|f\|_k\,.\end{aligned}$$

Por otra parte u_h, por definición, es la solución en S de

(17) $$P(D)u=0\,,\quad D^ju(0)=g_j$$

que se obtiene en la etapa 2. Entonces

(18) $$u_h=\sum_{j=1}^{r}c_je^{i\tau_jt}\,t^{\alpha_j}\,,$$

donde c_i es una combinación lineal de los g_j's. Luego,

$$\|u_h\|_{m+k}\le\sum_{j=1}^{r}|c_j|\,\left\|e^{i\tau_jt}\,t^{\alpha_j}\right\|_{m+k}\le\sum_{s=0}^{r-1}\tilde{c}_{s,m+k,P}\,|g_s|\,,$$

y la tesis sigue para $u\in S$ con

(19) $$C_{k,P}=\sup_{s\le r-1}\{\tilde{c}_{s,m+k,P}\}\vee C_{k,\tau_1,\dots,\tau_m}\,.$$

Se pasa de S a $C^\infty\cap H^{m+k}$ por continuidad, QED.

Sea ahora $\tilde{P}$ otro polinomio mónico con coeficientes cercanos a los de P. Entonces, $\|\tilde{P}u-Pu\|_k\le\varepsilon\|u\|_{m+k}$ y vale

$$\|u\|_{m+k} \le C_{k,P}\left(\left\|\widetilde{P}u\right\|_k + \varepsilon\|u\|_{m+k} + \sum_{j=0}^{r-1}\left|D^j u(0)\right| \right).$$

De esto sigue que

(20) $$\frac{C_{k,P}}{1+\varepsilon\, C_{k,P}} \le C_{k,\widetilde{P}} \le \frac{C_{k,P}}{1-\varepsilon\, C_{k,P}}.$$

2. EL PROBLEMA EN UN SEMIESPACIO. Sea $P(\xi,t) = t^m + a_1(\xi)t^{m-1} + \dots$ un polinomio de grado $m = 2r$ en $R^{n+1} = \{(\xi,t) : \xi \in R^n, t \in R^1\}$ tal que para todo $\xi \in R^n$, $\xi \ne 0$, el polinomio en *z*, $P(\xi,z)$, tiene *r* raíces en $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ y *r* raíces en $\{\operatorname{Im} z < 0\}$.

TEOREMA 2. Sea *k* entero y $u \in C^\infty(\overline{R^{n+1}_+}) \cap H^{m+k}(R^{n+1}_+)$. Entonces existe $C_{k,P}$ tal que

(21) $$\|u\|^2_{m+k} \le C_{k,P}\left(\|P(D)u\|_k^2 + \|u\|_0^2 + \sum_{j=0}^{r-1}\left\|D_t^j u(x,0)\right\|^2_{m+k-j-1/2} \right).\bullet$$

DEMOSTRACION. Sea $|u|^2_{m+k} = \sum_{|\alpha|=m+k}\left\|D^\alpha u\right\|_0^2$. Como $\|u\|^2_{m+k} \le C\left(|u|^2_{m+k} + \|u\|_0^2\right)$, basta probar (21) con $|\cdot|_{m+k}$ en lugar de $\|\cdot\|_{m+k}$. Observemos que

(22) $$|u|^2_{m+k} = \sum_{|\alpha|=m+k}\int_0^\infty dt\int_{R^n}\left|D^\alpha u\right|^2 dx \approx \sum_{j=0}^{m+k}\int_0^\infty dt\int_{R^n}|\xi|^{2(m+k-j)}\left|D_t^j\hat{u}(\xi,t)\right|^2 d\xi$$

donde $\hat{u}(\xi,t) := \int_{R^n} e^{-i<\xi,x>}u(x,t)\,dx$.

Sea $u \in C^\infty(\overline{R^{n+1}_+})$, sop$u$ acotado. Si $P(D)u = f(x,t)$ entonces $P(\xi,D_t)\hat{u} = \hat{f}(\xi,t)$. Sea $v(t) := \hat{u}(\xi,t/|\xi|)$ con ξ fijo, $\xi \in R^n \setminus \{0\}$. Entonces $v \in C^\infty([0,\infty))$ y es de soporte acotado. Además verifica

$$P\left(\frac{\xi}{|\xi|},D_t\right)v(t) = \frac{1}{|\xi|^m}P(\xi,|\xi|D_t)v(t) = |\xi|^{-m}\hat{f}\left(\xi,\frac{t}{|\xi|}\right).$$

Puede ahora aplicarse ahora el teorema 1 a la familia $P(\xi',D_t)$, $|\xi'| = 1$, con la misma constante en (8) pues ξ' varía sobre un compacto y la constante es una función de ξ' localmente acotada. Luego

$$\int_0^\infty\sum_{j=0}^{m+k}\left|D_t^j v(t)\right|^2 dt \le C_k\left(\sum_{j=0}^{k}\int_0^\infty\left|D_t^j\hat{f}(\xi,t/|\xi|)\right|^2|\xi|^{-2m}dt + \sum_{j=0}^{r-1}\left|D_t^j v(0)\right|^2 \right).$$

Reemplazando $v(t)$ por su definición y cambiando variables obtenemos,

$$\sum_{j=0}^{m+k}\int_0^\infty|\xi|^{-2j+1}\left|D_t^j\hat{u}(\xi,t)\right|^2 dt \le C_k\left(\sum_{j=0}^{k}\int_0^\infty|\xi|^{-2j+1}\left|D_t^j\hat{f}(\xi,t)\right|^2|\xi|^{-2m}dt + \sum_{j=0}^{r-1}|\xi|^{-2j}\left|D_t^j\hat{u}(\xi,0)\right|^2 \right).$$

Multiplicando por $|\xi|^{2m+2k-1}$ resulta

(23) $$\sum_{j=0}^{m+k}\int_0^\infty|\xi|^{2(m+k-j)}\left|D_t^j\hat{u}(\xi,t)\right|^2 dt \le$$

$$\le C_k\left(\sum_{j=0}^{k}\int_0^\infty|\xi|^{2(k-j)}\left|D_t^j\hat{f}(\xi,t)\right|^2 dt + \sum_{j=0}^{r-1}|\xi|^{2(m+k-j)-1}\left|D_t^j\hat{u}(\xi,0)\right|^2 \right)$$

Integrando (23) y usando (22) obtenemos

$$|u|_{m+k}^2 \le C_k \left(|f|_k^2 + \sum_{j=0}^{r-1} \|D_t^j u(x,0)\|_{m+k-j-1/2}^2 \right), \qquad \text{QED.}$$

3. EL MISMO PROBLEMA EN UNA REGION REGULAR. Supondremos ahora que $P(x,D)$ tiene coeficientes en $C^\infty(\overline{\Omega})$ donde Ω es una región acotada con borde C^∞. Se dice que $P(x,D)$ de orden m=$2r$ es *propiamente elíptico* si para todo $x \in \overline{\Omega}$ y para toda $\xi, \eta \in R^n$, linealmente independientes, $P_m(x, \xi + z\eta) = 0$ tiene $r = m/2$ raíces en $\operatorname{Im} z > 0$ y $r = m/2$ raíces en $\operatorname{Im} z < 0$. Se sabe que si $n > 2$, elíptico implica propiamente elíptico. Por otra parte, elíptico significa que $P_m(x,\xi)$ no tiene raíces reales ξ distintas de cero cualquiera sea x. En consecuencia, si $n > 2$, *elíptico* y *propiamente elíptico* describen el mismo concepto.

Sea

$$D^\circ := \{u \in C^\infty(\overline{\Omega}) : D^\alpha u = 0 \; en \; \partial\Omega \; si \; |\alpha| < m/2\}.$$

TEOREMA 3. Si P es propiamente elíptico existe C tal que para todo $u \in D^\circ$ vale

(24) $\quad \|u\|_m \le C(\|P(x,D)u\|_0 + \|u\|_0), \qquad (m = \text{orden de } P = 2r > 0).$•

DEMOSTRACION. Recurriendo a particiones de la unidad basta probar el teorema localmente, es decir, todo punto $y \in \overline{\Omega}$ tiene un entorno N tal que si $u \in D^\circ$, $\operatorname{sop} u \subset N$, entonces vale (24).

a) Sea $y \in \Omega$ fijo. $P(y,D)$ es un operador elíptico a coeficientes constantes. Luego, $|P(y,\xi)| \ge c_0 |\xi|^m - K_0(|\xi|^{m-1} + 1)$, y también,

$$\|P(y,Du\|_0^2 \ge C|u|_m^2 - K(\|u\|_{m-1}^2 + \|u\|_0^2).$$

En efecto, si $|\alpha| = m$ entonces $c_0 \int |\xi^\alpha \hat{u}|^2 d\xi \le \int |\sum c_\alpha \xi_\alpha|^2 |\hat{u}|^2 d\xi \le \int |(P_m(y,D)u)^\wedge|^2 d\xi$.

En consecuencia, si $u \in C_0^\infty(N)$,

(25) $\quad \|u\|_m \le M(\|u\|_{m-1} + \|P(y,D)u\|_0).$

Por otra parte, $P(x,D) = P(y,D) + (P(x,D) - P(y,D))$. Si $x, y \in N$ el operador entre paréntesis tiene coeficientes pequeños en N si este entorno es suficientemente pequeño, y por tanto

(26) $\quad \|P(x,D)u\|_0 \ge \|P(y,D)u\|_0 - \varepsilon\|u\|_m, \qquad 0 < \varepsilon < 1.$

Reemplazando en (25) y eligiendo $M\varepsilon < 1/4$ resulta

$$\|u\|_m \le \frac{1}{4}\|u\|_m + M(\|P(x,D)u\|_0 + \|u\|_{m-1}).$$

La tesis sigue ahora recordando que $\|u\|_{m-1} \le \varepsilon\|u\|_m + K(\varepsilon)\|u\|_0$.

b) Sea $y \in \partial\Omega$. Un cambio de variables reduce el problema a un semientorno de un punto en un semiespacio. Sean $t = x_n$, $x' = (x_1,\dots,x_{n-1})$ y $p(y,D)$ la parte principal del operador en el punto $y = (y',0)$, $y' = (y_1,\dots,y_{n-1})$. Resulta, aplicando el teorema 2 y para $u \in D^\circ$, $\operatorname{sop} u \subset N$ = entorno acotado de y, que

$$\|u\|_m \le C(\|p(y,D)u\|_0 + \|u\|_0).$$

Eligiendo N suficientemente pequeño, como en (26),

$$\|p(y,D)u\|_0 \le \|P(x,D)u\|_0 + \varepsilon\|u\|_m + K\|u\|_{m-1} \le \|P(x,D)u\|_0 + 2\varepsilon\|u\|_m + K(\varepsilon)\|u\|_0, \quad \text{QED.}$$

COROLARIO. 1) El teorema precedente vale para $u \in H$ = la clausura de D° en H^m,

2) $F := \{u \in H : P(x,D)u = 0\}$ es un subespacio de dimensión finita,

3) $\|u\|_m \le C\|P(x,D)u\|_0$ para toda $u \in F^{\perp}$.•

DEMOSTRACION. 2) Si $\{u_k\} \subset F$, $\|u_k\|_m = 1$, entonces como $L^2(\Omega) \supset\supset H^m(\Omega)$ ([H], Cap. 2, T. 2.2.3) existe una subsucesión convergente en L^2, y por (24) en H^m, o sea, en F.

3) Sean $\|P(x,D)u_k\|_0 \to 0$ y $\|u_k\|_m = 1$, $u_k \in F^{\perp}$. $\{u_k\}$ tiene una subsucesión convergente en L^2 a u. De (24) sigue que $\{u_k\}$ converge en H^m (a u). Luego,

$$P(x,D)u_{k_j} \to P(x,D)u \text{ en } L^2,\ \|u\|_m = 1.$$

Entonces, $P(x,D)u = 0$ y $u \in F$, contradicción, QED.

4. UNA APLICACION. Sea $u \in D^{\circ}$ y $\tilde{u} := u$ en Ω, $\tilde{u} := 0$ en $R^n \setminus \Omega$. Del teorema de Gauss obtenemos, si $\phi \in C_0^{\infty}(R^n)$, que $\int_{\Omega} \frac{\partial(u\phi)}{\partial x_j} dx = 0$. Luego, $\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \phi\, dx = -\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} u\, dx$, o sea, $\int (\frac{\partial u}{\partial x_j}\tilde{)} \phi\, dx = -\int \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \tilde{u}\, dx$. Por tanto, $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} = (\frac{\partial u}{\partial x_j}\tilde{)}$.

En consecuencia, $\tilde{u} \in H^r(R^n)$ y sus derivadas de orden menor o igual a r son las extensiones triviales de las correspondientes derivadas de u en Ω. Con una partición de la unidad de Ω adecuada, $\{\phi_i\}$, podemos lograr que cada función $\phi_i \tilde{u}$ se aproxime por la misma función corrida al interior de Ω y así demostrar que esa función pertenece a $\overset{\circ}{H}{}^r(\Omega)$. Y por tanto $u \in \overset{\circ}{H}{}^r(\Omega)$.

La clausura en $H^{2r}(\Omega)$ de $D^{\circ}(\Omega)$ estará entonces contenida en $\overset{\circ}{H}{}^r(\Omega)$, o sea,

(27) $$H \subset H^m \cap \overset{\circ}{H}{}^r = \boldsymbol{H}.$$

Como veremos más adelante vale el

TEOREMA 4. $H(\Omega) = H^m(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^r(\Omega) = \boldsymbol{H}(\Omega)$.•

Consideremos un operador diferencial de la forma

(28) $$P(x,D) = \sum_{|\sigma|=|\beta|=r} D^{\sigma} a_{\sigma\beta}(x) D^{\beta},$$

con $a_{\sigma\beta}(x) \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, $a_{\sigma\beta} = \overline{a_{\beta\sigma}}$, $m = 2r$ y

(29) $$\sum_{|\sigma|=|\beta|=r} a_{\sigma\beta}(x)\, \xi_{\beta} \overline{\xi}_{\sigma} \ge c \sum_{|\sigma|=r} \frac{r!}{\sigma!} |\xi_{\sigma}|^2, \qquad c > 0.$$

Sean u, $v \in \boldsymbol{H}$. Entonces, si $(.,.)_0 := (.,.)_{L^2}$, tenemos

(30) $$(P(x,D)u, v)_0 = \sum \int_{\Omega} a_{\sigma\beta} D^{\beta} u . \overline{D^{\sigma} v}\, dx.$$

En efecto, es cierto si $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$. Si $v \in \boldsymbol{H}(\Omega)$, existe $\{v_n\} \subset C_0^{\infty}(\Omega)$ tal que $v_n \to v$ en $\overset{\circ}{H}{}^r(\Omega)$. Luego,

$$(P(x,D)u, v)_0 = \lim_{n\to\infty} (P(x,D)u, v_n)_0 = \lim_{n\to\infty} \sum \int_{\Omega} a_{\sigma\beta} D^{\beta} u\, \overline{D^{\sigma} v_n}\, dx = \sum \int_{\Omega} a_{\sigma\beta} D^{\beta} u\, \overline{D^{\sigma} v}\, dx.$$

En esta situación vale el siguiente

TEOREMA 5. Para toda $u \in H$ vale

(31) $$\|u\|_m \leq M\|P(x,D)u\|_0 .\bullet$$

DEMOSTRACION. De (30), con $u = v \in H(\Omega)$, y (29), obtenemos

(32) $$(P(x,D)u,u)_0 \geq c'|u|_r^2 \geq c''\|u\|_r^2 .$$

Si $P(x,D) = 0$ sigue ahora que $u = 0$. Luego valen, $F = \{0\}$, $F^{\perp} = H(\Omega)$, (cf. corolario al teorema 3) y también (31), QED.

5. Para completar la demostración del teorema 4 basta probar la
PROPOSICION 1. $H(\Omega) \supset \boldsymbol{H}(\Omega)$.•
Observemos en primer lugar que (32) vale aún para $u \in \boldsymbol{H}$ pues (30) y (29) son válidas en ese espacio. También que el operador $P(x,D)$ lleva continuamente $\boldsymbol{H}$ en $L^2(\Omega)$. De (32) sigue entonces que lo hace biunívocamente. De (31) se deduce que $P(x,D)(H)$ es un subespacio de L^2. Si probamos que $P(x,D)(H) = L^2$ habremos probado que $H = \boldsymbol{H}$ (y en este caso (31) no sería otra cosa que la continuidad del operador inverso, resultado que entonces podríamos haber llegado a conocer utilizando un teorema de Banach). Esto es un hecho cierto para todo operador de la forma (28), (cf. [Sc], p. 204). Sin embargo para probar el teorema 4 bastaría probarlo para un operador particular Q, y sería suficiente ver que $Q(x,D)(D^{\circ}) \supset C_0^{\infty}(\Omega)$.

Para enfrentar las dificultades típicas veamos que ocurre con $Q \equiv (-\Delta)^r$, $\Omega = R_+^n$. Sea $f(x,t) \in C_0^{\infty}(\overline{R_+^n})$, $x \in R^{n-1}$, $t \in (0,\infty)$. Queremos resolver $(-\Delta)^r u = f$ en R_+^n con $D_t^j u(x,0) = 0$, $j = 0,\ldots,r-1$. Fijado ξ, sea

(33) $$\hat{f}(\xi,t) := \int_{R^{n-1}} e^{-i<\xi,x>} f(x,t)\, dx .$$

La ecuación

(34) $$(D_t - i|\xi|)^r (D_t + i|\xi|)^r v(\xi,t) = \left(D_t^2 + |\xi|^2\right)^r v(\xi,t) = \hat{f}(\xi,t), \qquad \xi \neq 0,$$

tiene exactamente una solución en $S([0,\infty))$ verificando $D_t^j v(\xi,0) = 0$, que podemos escribir en la forma (cf. lema 1 y teorema 2):

(35) $$v(\xi,t) = \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{r-1}} ds_r\, e^{-|\xi|(t-s_r)} \int_{s_r}^{\infty} ds_{r+1} \cdots \int_{s_{2r-1}}^{\infty} ds_{2r} e^{|\xi|(s_r - s_{2r})} \hat{f}(\xi, s_{2r}) =$$

$$= \int_0^t ds_r \int_{s_r}^{\infty} e^{-|\xi|(t+s_{2r}-2s_r)} \hat{f}(\xi,s_{2r}) \frac{(t-s_r)^{r-1}(s_{2r}-s_r)^{r-1}}{(r-1)!^2} ds_{2r} =$$

$$= \int_0^t ds \int_s^{\infty} e^{-|\xi|(t+\sigma-2s)} \hat{f}(\xi,\sigma) F(t,s,\sigma) d\sigma .$$

Sea $\quad u(x,t) := (2\pi)^{1-n} \int_{R^{n-1}} e^{i<\xi,x>} v(\xi,t)\, d\xi$. Recordemos la fórmula

(36) $$(2\pi)^{-n} \int_{R^n} e^{-|\xi|\alpha + i<\xi,x>} d\xi = \pi^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \alpha (\alpha^2 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}} .$$

Luego, si $r = 1$ y $c_n = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\pi^{-\frac{n}{2}}$, $F \equiv 1$ y tenemos,

$$v(\xi,t)=\int_0^t ds\int_s^\infty\left(c_n\int_{R^{n-1}} f(\cdot-y,\sigma)(\sigma+t-2s)((\sigma+t-2s)^2+|y|^2)^{-n/2}dy\right)^\wedge d\sigma\,,$$

(37) $$u(x,t)=c_n\int_{R^{n-1}} dy\int_0^\infty d\sigma\int_0^{\sigma\wedge t} f(x-y,\sigma)(\sigma+t-2s)((\sigma+t-2s)^2+|y|^2)^{-n/2}ds=$$

$$=c_n\int_{R^{n-1}} dy\int_0^\infty d\sigma\, f(x-y,\sigma)\left.\frac{((\sigma+t-2s)^2+|y|^2)^{1-n/2}}{2(n-2)}\right|_{s=0}^{s=\sigma\wedge t}=$$

$$=\frac{c_n}{2(n-2)}\int_{R^{n-1}} dy\int_0^\infty d\sigma\, f(x-y,\sigma)\left[((\sigma-t)^2+|y|^2)^{1-n/2}-((\sigma+t)^2+|y|^2)^{1-n/2}\right]$$

$$=\frac{c_n}{2(n-2)}\int_{R^{n-1}} dy\int_{-\infty}^\infty \tilde{f}(x-y,\sigma)((\sigma-t)^2+|y|^2)^{1-n/2}d\sigma$$

donde $\tilde{f}(x,-t)=-f(x,t)$ si $t>0$.

La función u se anula en $t=0$ y pertenece a $C^\infty(R^n_+)$. También pertenece a $L^2(R^n_+)$, (cf. (35)): $u(x,t)$, salvo factor, es igual a

$$\int_{|(\sigma,y)|<M}\frac{\tilde{f}(x-y,t-\sigma)}{(|y|^2+|\sigma|^2)^{\frac{n-2}{2}}}dy\,d\sigma+\int_{|(\sigma,y)|>M}\cdots\,,$$

el primer sumando está en L^2 pues es la convolución de una función de L^1 con una de L^2. Sin embargo, en el segundo sumando debe aprovecharse la compensación de signos en la $\tilde{f}$.

APENDICE T.
TEORIA DE OPERADORES.

T1. En este apéndice usaremos la siguiente notación. H designará a un espacio de Hilbert separable y $G_\infty(H)$ a la familia de operadores completamente continuos en él. Si $T \in G_\infty(H)$ y si además $T^* = T$, definimos, para $n \geq 1$:

$$\lambda_n^+ := \text{enésimo autovalor positivo de } T,$$

$$-\lambda_n^- := \text{enésimo autovalor negativo de } T,$$

$$n_+(\lambda,T) := \#\{\lambda_j^+(T) > \lambda\} \qquad n_-(\lambda,T) := \#\{\lambda_j^-(T) > \lambda\} \qquad \text{para } \lambda > 0.$$

NB. Los autovalores se cuentan repitiéndolos según su multiplicidad y se supone que $\lambda_n^+ \geq \lambda_{n+1}^+$, $\lambda_n^- \geq \lambda_{n+1}^-$.

Si $T \in G_\infty(H)$ entonces T^*T es autoadjunto, positivo $((T^*Tx,x) = (Tx,Tx) \geq 0)$ y completamente continuo. T^*T admite una raíz positiva: $R = (T^*T)^{1/2}$, o sea, $R^2 = T^*T$. Los autovalores no nulos de R se denotarán con $s_n(T)$ y a su función de distribución la denotaremos con $n(\lambda,T) := \#\{s_n(T) > \lambda\}$.

En el caso $T = T^* \in G_\infty(H)$ observemos que si

(1) $$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda,$$

$$T^*T = T^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, dE_\lambda = \int_0^{\infty} \mu \, d(E_{\sqrt{\mu}} + E_{-\sqrt{\mu}}).$$

Definimos R de modo que,

(2) $$R = (T^*T)^{1/2} = \int_0^{\infty} \lambda d(E_\lambda + dE_{-\lambda}).$$

En esta situación,

(3) $$\{s_n(T)\} = \{\lambda_m^+(T)\} \cup \{\lambda_p^-(T)\}, \qquad s_n \geq s_{n+1},$$

y obviamente,

(4) $$n(\lambda,T) = n_+(\lambda,T) + n_-(\lambda,T).$$

Cuando se sobrentienda T escribiremos simplemente: $n(\lambda) = n_+(\lambda) + n_-(\lambda)$.

El comportamiento asintótico de $\lambda_n^\pm$ se puede describir en términos de $n_\pm(\lambda)$.

PROPOSICION 1. Sean $\theta > 0$ y $\lambda > 0$.

i) $\overline{\lim_{\lambda \to 0}} \lambda^\theta n_\pm(\lambda) = \overline{\lim_{m \to \infty}} (\lambda_m^\pm)^\theta m$,

ii) $\underline{\lim_{\lambda \to 0}} \lambda^\theta n_\pm(\lambda) = \underline{\lim_{m \to \infty}} (\lambda_m^\pm)^\theta m$. •

DEMOSTRACION. $\{\lambda_{n_i}^+\}$ designa al conjunto de autovalores positivos *distintos* de manera que $\lambda_{n_i+1}^+ < \lambda_{n_i}^+$. Por tanto, $n_+(\lambda_{n_i}^+ - 0) = n_i$. Además, $\lambda_m^+ = \lambda_{n_i}^+$ implica $n_i \geq m$.

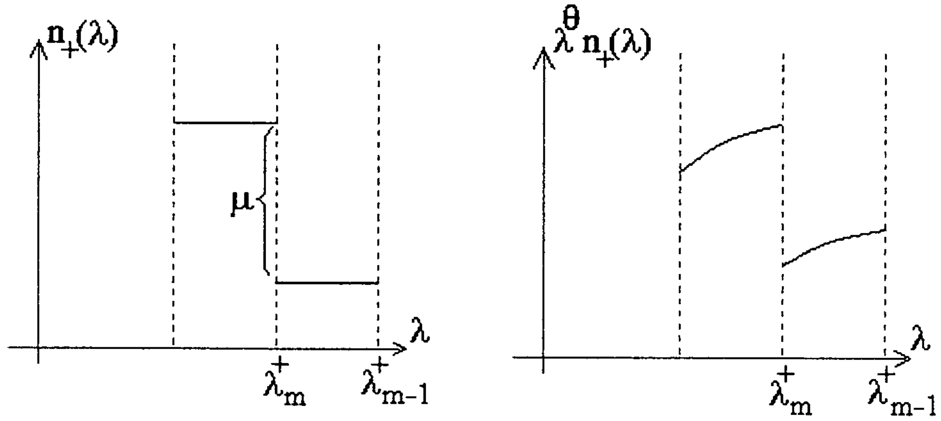
Entonces, (cf. los gráficos que siguen),

$$\overline{\lim_{\lambda \to 0}} \lambda^\theta n_+(\lambda) \leq \overline{\lim_{m \to \infty}} (\lambda_m^+)^\theta n_+(\lambda_m^+ - 0) = \overline{\lim_{i \to \infty}} \lambda_{n_i}^\theta n_+(\lambda_{n_i}^+ - 0) \leq \overline{\lim_{\lambda \to 0}} \lambda^\theta n_+(\lambda - 0) = \overline{\lim_{\lambda \to 0}} \lambda^\theta n_+(\lambda).$$

Luego vale,

$$\overline{\lim_{\lambda \to 0}} \lambda^\theta n_+(\lambda) = \overline{\lim_{i \to \infty}} (\lambda_{n_i}^+)^\theta n_i = \overline{\lim_{m \to \infty}} (\lambda_m^+)^\theta m.$$

Análogamente se demuestra el otro caso, QED..



μ=mult de $\lambda_m^+ = n_+(\lambda_m^+ - 0) - n_+(\lambda_m^+ + 0)$

DEFINICION 1. Sean $T = T^* \in G_\infty(H)$, $\theta > 0$. Definimos $\Delta_\theta^\pm(T) = \overline{\lim_{\lambda \to 0}} \lambda^\theta n_\pm(\lambda)$, $\delta_\theta^\pm(T) = \underline{\lim_{\lambda \to 0}} \lambda^\theta n_\pm(\lambda)$.•

PROPOSICION 2 (Principio del minimax). Sean T un operador autoadjunto, completamente continuo de H en H y F un subespacio de H. Valen (cf. (3)):

i) $\lambda_{n+1}^\pm(T) = \inf_{\operatorname{codim} F \le n} \sup_{0 \ne u \in F} \dfrac{\pm(Tu,u)}{(u,u)} = \inf_{\operatorname{codim} F < n+1} \sup_{u \in F, \|u\|=1} \pm(Tu,u)$,

ii) $s_{n+1}(T) = \inf_{\operatorname{codim} F \le n} \sup_{0 \ne u \in F} \dfrac{\|Tu\|}{\|u\|} = \inf_{\operatorname{codim} F < n+1} \sup_{u \in F, \|u\|=1} \|Tu\|$.•

DEMOSTRACION. *i)* Sea u_i autovector normalizado de T, $Tu_i = \lambda_i^+ u_i$, $u_i \perp u_j$ si $i \ne j$ y F un subespacio tal que $\operatorname{codim} F \le n$. Entonces existe $v \in F \cap [u_1, \ldots, u_{n+1}]$, $v \ne 0$. Luego,

$$\frac{(Tv,v)}{(v,v)} = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} c_j^2 \lambda_j^+}{\sum_{j=1}^{n+1} c_j^2} \ge \lambda_{n+1}^+, \qquad \inf_{\operatorname{codim} F \le n} \sup_{0 \ne u \in F} \frac{(Tu,u)}{(u,u)} \ge \lambda_{n+1}^+.$$

Por otro lado, si $u \perp [u_1, \ldots, u_n]$ entonces $u = w + \sum_{j=n+1}^{\infty} c_j u_j$ con $w \perp u_j$ para todo j y $(Tw,w) \le 0$. Entonces,

$$\frac{(Tu,u)}{(u,u)} = \frac{(Tw,w) + \sum_{j=n+1}^{\infty} c_j^2 \lambda_j^+}{\|w\|^2 + \sum_{j=n+1}^{\infty} c_j^2} \le \frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} c_j^2 \lambda_j^+}{\|w\|^2 + \sum_{j=n+1}^{\infty} c_j^2} \le \lambda_{n+1}^+.$$

Luego, $\inf_{\operatorname{codim} F \le n} \sup_{0 \ne u \in F} \dfrac{(Tu,u)}{(u,u)} \le \sup\left\{\dfrac{(Tu,u)}{(u,u)} : u \perp [u_1, \ldots, u_n]\right\} \le \lambda_{n+1}^+$,

y queda probado *i)*.

ii) Sea μ_n= autovalor de T^*T. Luego, por *i*),

$$\mu_{n+1} = \inf_{codim\, F\le n}\ \sup_{u\in F} \frac{(T^*Tu,u)}{(u,u)} = \inf_{codim\, F\le n}\ \sup_{u\in F} \frac{\|Tu\|^2}{\|u\|^2} = \left(\inf_{codim\, F\le n}\ \sup_{u\in F} \frac{\|Tu\|}{\|u\|}\right)^2 .$$

Como $s_n = \sqrt{\mu_n}$, resulta la tesis, QED.

Para otras versiones del principio del minimax véase [Gl].

DEFINICION 2. Sean $\lambda > 0$ y T autoadjunto completamente continuo.
$K_\pm(\lambda) := K_\pm(\lambda;T) = \{G : G = subesp.\ de\ H\ t.q.\ \forall f \in G, f \neq 0\ vale\ \pm(Tf,f) > \lambda(f,f)\}$.•

PROPOSICION 3. *i*) $n_\pm(\lambda;T) = \sup\{\dim G : G \in K_\pm(\lambda)\}$.

ii) Sea L una variedad lineal de H tal que $L \subset H = \overline{L}$. Entonces,

$$n_\pm(\lambda;T) = \sup\{\dim G : G \in K_\pm(\lambda), G \subset L\}.•$$

DEMOSTRACION. *i*) Con la misma notación de la proposición 1, supongamos $\lambda^+_{n+1} \le \lambda < \lambda^+_n$, $G := [u_1,\ldots,u_n]$. Entonces $(T\sum_{j=1}^n c_j u_j, \sum_{j=1}^n c_j u_j) = \sum_{j=1}^n c_j^2 \lambda_j^+ > \lambda \sum_{j=1}^n c_j^2$ si la última suma es positiva. Luego $G \in K_+(\lambda)$ y $n_+(\lambda;T) = n \le \sup\{\dim G : G \in K_+(\lambda)\}$.

Por otra parte, si $n < \sup\{\dim G : G \in K_+(\lambda)\}$ entonces existe $G' \in K_+(\lambda)$ con $\dim G' = n+1$. Sea F tal que $codim\, F \le n$. Entonces $F \cap G' \neq \{0\}$ y por tanto

$$\lambda^+_{n+1} = \inf_{codim\, F\le n}\ \sup_{u\in F} \frac{(Tu,u)}{(u,u)} \ge \inf_{codim\, F\le n}\ \sup_{u\in F\cap G'} \frac{(Tu,u)}{(u,u)} \ge \inf_{u\in G'} \frac{(Tu,u)}{(u,u)} > \lambda,\ \text{contradicción.}$$

ii) Sea $G \in K_+(\lambda)$, dim $G = n_+(\lambda;T) = h$. Entonces, si $\inf_{0\neq v\in G} \frac{(Tv,v)}{(v,v)} =: \mu$, tenemos $\varepsilon := \mu - \lambda > 0$. Sea $\{u_1,\ldots,u_h\}$ una base ortonormal de G. Sea $v_i \in L$ tal que $\|u_i - v_i\| \le \varepsilon' < \frac{1}{\sqrt{h}}$, i=1,...,h.

Definamos $G' := [v_1,\ldots,v_h]$, y ϑ una aplicación de G sobre G':

$$\vartheta : u = \sum_{j=1}^h c_j u_j \to v = \sum_{j=1}^h c_j v_j .$$

Luego,

$$(5)\qquad \frac{\|u-v\|}{\|u\|} \le \frac{\varepsilon' \sum_{j=1}^h |c_j|}{\|u\|} \le \frac{\varepsilon' \sqrt{h} (\sum c_j^2)^{1/2}}{(\sum c_j^2)^{1/2}} = \varepsilon' \sqrt{h} < 1, \quad 1 - \varepsilon'\sqrt{h} \le \frac{\|v\|}{\|u\|} \le 1 + \varepsilon'\sqrt{h} .$$

De (5) se deduce que ϑ define un isomorfismo por lo que $\dim G = \dim G' = h$.

Veamos que $G' \in K_+(\lambda)$ para ε' suficientemente pequeño. Usando (5) obtenemos que

$$(Tv,v) = (Tu,u) + (T(v-u),u) + (Tv, v-u) > \mu\|u\|^2 - \|T\|\,\|u-v\|\left(\|u\| + \|v\|\right) \ge$$

$$\ge \mu\left(\frac{\|v\|}{1+\varepsilon'\sqrt{h}}\right)^2 - 2\|T\|\varepsilon'\sqrt{h}\left(\frac{\|v\|}{1-\varepsilon'\sqrt{h}}\right)^2 \ge \left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2}\right)\|v\|^2 > \lambda(v,v),$$

si ε' es bastante pequeño, QED.

T2. Intentaremos ahora comparar los espectros de operadores distintos.

LEMA 1. Sea $T_i = T_i^* \in G_\infty(H_i)$, i=1, 2 y $S: H_1 \to H_2$ un operador acotado tal que

(6) $$Su = 0 \Rightarrow (T_1 u, u)_{H_1} = 0,$$

(7) $$Su \neq 0 \Rightarrow \pm \frac{(T_1 u, u)_1}{(u,u)_1} \leq \pm \frac{(T_2 Su, Su)_2}{(Su, Su)_2}.$$

Entonces

$$n_\pm(\lambda; T_1) \leq n_\pm(\lambda; T_2).\blacklozenge$$

DEMOSTRACION. Sin pérdida de generalidad supongamos que vale (7) con signo +. Si $G \in K_+(\lambda; T_1)$ entonces $S(G)$ tiene la misma dimensión, ya que en G, $(T_1 u, u) > 0$ para $u \neq 0$. (7) implica $S(G) \in K_+(\lambda; T_2)$. Luego, para cierto $G_0 \in K_+(\lambda; T_1)$:

$$n_+(\lambda; T_1) = \dim G_0 = \dim S(G_0) \leq \sup\{\dim G' : G' \in K_+(\lambda; T_2)\} = n_+(\lambda; T_2),\ \text{QED}.$$

Otro corolario de la proposición 2 se refiere a la perturbación completamente continua de la métrica de H. Sea $Q = Q^* \in G_\infty(H)$, $Q < I$, esto es, $(Qu, u) < (u, u)$ si $u \neq 0$.

Sea $(u, v)_1 := (u, v) - (Qu, v)$ y *definimos* H_1 como el espacio vectorial H con la métrica generada por el producto escalar $(.,.)_1$. Vale:

PROPOSICION 4. H_1 es un espacio de Hilbert con norma equivalente a la de H y tal que

(8) $$(1 - \lambda_1^+(Q))\|u\|^2 \leq \|u\|_1^2 \leq (1 + \|Q\|)\|u\|^2.\blacklozenge$$

DEMOSTRACION. En nuestro caso vale $\lambda_1^+(Q) < 1$. La desigualdad de la izquierda sigue de la proposicion 2 y la de la derecha es inmediata. (8) implica la equivalencia de las normas, y por tanto, la completitud de H_1, QED.

Dado $T \in G_\infty(H)$, $T = T^*$, definimos T_1 operando en H_1 por

$$(T_1 u, v)_1 = (Tu, v).$$

T_1 es autoadjunto y completamente continuo.

LEMA 2. Vale: $\Delta_\theta^\pm(T_1) = \Delta_\theta^\pm(T)$ y $\delta_\theta^\pm(T_1) = \delta_\theta^\pm(T).\blacklozenge$

DEMOSTRACION. Demostraremos solamente el caso Δ_θ^+. Dado $\varepsilon \in (0,1)$ existe $H_\varepsilon \subset H$ tal que $co\dim H_\varepsilon = m_\varepsilon < \infty$ y para todo $u \in H_\varepsilon$: $|(Qu, u)| \leq \varepsilon \|u\|^2$. En efecto, bastará definir $H_\varepsilon := [w_1, \ldots, w_h]^\perp$, donde $\{w_j\}$ es el conjunto de los autovectores ortogonales de Q correspondientes a *todos* los autovalores $\{\mu_j\}$, $|\mu_j| > \varepsilon$, (cf. demostración de la Prop. 2). Luego, en H_ε: $\dfrac{1}{1+\varepsilon} \leq \dfrac{\|u\|^2}{\|u\|_1^2} \leq \dfrac{1}{1-\varepsilon}$.

Como $(rango T)^\perp = (rango T_1)^\perp$ podemos excluir el caso en que el rango de T es finito. Si λ es bastante pequeño y $G \in K_+(\lambda; T_1)$ entonces para $u \neq 0, u \in G \cap H_\varepsilon$, vale

$$\lambda < \frac{(T_1 u, u)_1}{(u, u)_1} = \frac{(Tu, u)}{\|u\|_1^2} \leq \frac{(Tu, u)}{(1-\varepsilon)\|u\|^2}.$$

Luego, $G_\varepsilon := G \cap H_\varepsilon \in K_+(\lambda(1-\varepsilon); T)$. Pero $\dim G_\varepsilon \geq \dim G - m_\varepsilon$ y por tanto,

$n_+(\lambda(1-\varepsilon);T) \geq n_+(\lambda;T_1)-m_\varepsilon$. Entonces, para todo $\varepsilon>0$; $\Delta_\theta^+(T_1) \leq (1-\varepsilon)^{-\theta}\Delta_\theta^+(T)$, y en consecuencia $\Delta_\theta^+(T_1) \leq \Delta_\theta^+(T)$.

Por otra parte, si $E \in K_+(\lambda;T)$ y $u \in E \cap H_\varepsilon$ se tiene

$$\lambda < \frac{(Tu,u)}{(u,u)} = \frac{(T_1u,u)_1}{(u,u)_1}\frac{(u,u)_1}{(u,u)} \leq (1+\varepsilon)\frac{(T_1u,u)_1}{(u,u)_1}.$$

Así, $E_\varepsilon := E \cap H_\varepsilon \in K_+(\lambda/1+\varepsilon;T_1)$ y $n_+(\lambda/1+\varepsilon;T_1) \geq n_+(\lambda;T)-m_\varepsilon$. Como antes $\Delta_\theta^+(T_1) \geq \Delta_\theta^+(T)$, QED.

Consideramos a continuación el comportamiento de $\Delta_\theta^\pm(T)$ y $\delta_\theta^\pm(T)$ bajo perturbaciones aditivas de T.

LEMA 3. *i*) Sea $T_j = T_j^* \in G_\infty(H)$, j=1, 2 y $m,n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\lambda_{m+n-1}^\pm(T_1+T_2) \leq \lambda_m^\pm(T_1)+\lambda_n^\pm(T_2), \qquad \text{(H. Weyl).}$$

ii) Sea $T_j \in G_\infty(H)$, j=1, 2. Entonces,

$$s_{m+n-1}(T_1+T_2) \leq s_m(T_1)+s_n(T_2),$$

$$s_{m+n-1}(T_2T_1) \leq s_m(T_1).s_n(T_2), \qquad \text{[GK].}\bullet$$

DEMOSTRACION. *i*) Caso +. Sean $T_1u_i = \lambda_i^+(T_1)u_i$, $u_i \neq 0$; $T_2v_i = \lambda_i^+(T_2)v_i$, $v_i \neq 0$ y $F := [u_1,\ldots,u_{m-1},v_1,\ldots,v_{n-1}]^\perp$. Entonces, $co\dim F \leq m+n-2$. Luego, por el principio del minimax:

$$\lambda_{m+n-1}^+(T_1+T_2) \leq \sup_{u\in F}\frac{((T_1+T_2)u,u)}{(u,u)} \leq \sup_{u\in F}\frac{(T_1u,u)}{(u,u)}+\sup_{u\in F}\frac{(T_2u,u)}{(u,u)} \leq$$

$$\leq \sup_{[u_1,\ldots,u_{m-1}]^\perp}\frac{(T_1u,u)}{(u,u)}+\sup_{[v_1,\ldots,v_{n-1}]^\perp}\frac{(T_2u,u)}{(u,u)} \leq \lambda_m^+(T_1)+\lambda_n^+(T_2).$$

ii) Sea u_i, $i=1,2,\ldots,n-1$, autofunción de $T_1^*T_1$ correspondiente al autovalor $s_i^2(T_1)$ y sea v_j $j=1,2,\ldots,m-1$, autofunción de $T_2^*T_2$ correspondiente al autovalor $s_j^2(T_2)$. Definimos $F := [u_1,\ldots,u_{m-1},v_1,\ldots,v_{n-1}]^\perp$. Entonces

$$s_{m+n-1}(T_1+T_2) \leq \sup_{u\in F}\frac{\|(T_1+T_2)u\|}{\|u\|} \leq \sup_{u\in F}\frac{\|T_1u\|}{\|u\|}+\sup_{u\in F}\frac{\|T_2u\|}{\|u\|} \leq$$

$$\leq \sup_{[u_1,\ldots,u_{m-1}]^\perp}\frac{\|T_1u\|}{\|u\|}+\sup_{[v_1,\ldots,v_{n-1}]^\perp}\frac{\|T_2u\|}{\|u\|} \leq s_m(T_1)+s_n(T_2).$$

Para demostrar la segunda desigualdad pongamos (y con la nomenclatura precedente): $G := [v_1,\ldots,v_{n-1}] \cap \textit{rango de } T_1$. Sea $\{T_1w_1,\ldots,T_1w_h\}$ una base en G, $h \leq n-1$. Sea $J := [u_1,\ldots,u_{m-1}]^\perp \cap [T_1^*T_1w_1,\ldots,T_1^*T_1w_h]^\perp$. Entonces, $co\dim J \leq m+h-1 \leq m+n-2$. Si $u \in J$ entonces para todo k, $(T_1u,T_1w_k)=0$. O sea, $T_1J \perp G$. Es decir, $T_1J \subset G^\perp$. Sigue que $T_1J \subset [v_1,\ldots v_{n-1}]^\perp$. Luego,

$$s_{n+m-1}(T_2T_1) \leq \sup_{0\neq u\in J}\frac{\|T_2T_1u\|}{\|u\|} \leq \sup_{\substack{u\in J\\ 0\neq T_1u}}\frac{\|T_2T_1u\|}{\|T_1u\|}\sup_{0\neq u\in J}\frac{\|T_1u\|}{\|u\|} \leq \sup_{G^\perp}\frac{\|T_2v\|}{\|v\|}\sup_{G^\perp}\frac{\|T_1u\|}{\|u\|} \leq$$

$$\leq \sup_{v\in[v_1,\ldots,v_{n-1}]^\perp}\frac{\|T_2v\|}{\|v\|}\sup_{u\in[u_1,\ldots,u_{m-1}]^\perp}\frac{\|T_1u\|}{\|u\|}, \qquad \text{QED.}$$

LEMA 4 (Weyl). Sea $T_i = T_i^* \in G_\infty(H)$, i=1, 2. Supongamos $s_n(T_2) = o(n^{-1/\theta})$, $\theta > 0$. Entonces,

$$\Delta_\theta^\pm(T_1 + T_2) = \Delta_\theta^\pm(T_1), \quad \delta_\theta^\pm(T_1 + T_2) = \delta_\theta^\pm(T_1). \blacklozenge$$

DEMOSTRACION. Basta probar las desigualdades $\le$. Estas son un corolario ($\varepsilon = 0$) del siguiente resultado, QED.

LEMA 5. Sean $T_i = T_i^* \in G_\infty(H)$, i=1, 2, $\varepsilon \ge 0$ y $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(s_n(T_2) n^{1/\theta}\right) \le \varepsilon$.

Entonces

$$\Delta_\theta^\pm(T_1 + T_2) \le \left(\Delta_\theta^\pm(T_1)^{\frac{1}{1+\theta}} + \varepsilon^{\frac{\theta}{1+\theta}}\right)^{1+\theta}, \quad \delta_\theta^\pm(T_1 + T_2) \le \left(\delta_\theta^\pm(T_1)^{\frac{1}{1+\theta}} + \varepsilon^{\frac{\theta}{1+\theta}}\right)^{1+\theta}. \blacklozenge$$

DEMOSTRACION. Del lema 3, *i*), se deduce que

(9) $$n_\pm(\lambda; T_1 + T_2) \le n_\pm(\lambda\tau; T_1) + n_\pm(\lambda(1-\tau); T_2).$$

En efecto, si $n_\pm(\lambda\tau; T_1) = n - 1$ y $n_\pm(\lambda(1-\tau); T_2) = m - 1$ entonces $\lambda_n^\pm(T_1) \le \lambda\tau$, $\lambda_m^\pm(T_2) \le \lambda(1-\tau)$. Sumando y aplicando lema 3, obtenemos $\lambda_{m+n-1}^\pm(T_1 + T_2) \le \lambda$. Luego $n_\pm(\lambda; T_1 + T_2) \le n + m - 2 = n_\pm(\lambda\tau; T_1) + n_\pm(\lambda(1-\tau); T_2)$.

De (9) sigue que

(10) $$\Delta_\theta^\pm(T_1 + T_2) \le \frac{\Delta_\theta^\pm(T_1)}{\tau^\theta} + \frac{\Delta_\theta^\pm(T_2)}{(1-\tau)^\theta} = \frac{A}{\tau^\theta} + \frac{B}{(1-\tau)^\theta}.$$

Minimizando el segundo miembro en $\tau \in (0,1)$, obtenemos:

(11) $$\Delta_\theta^\pm(T_1 + T_2) \le \left(A^{1/1+\theta} + B^{1/1+\theta}\right)^{1+\theta}.$$

Esto prueba la prima aserción del lema pues de $\lambda_n^\pm(T_2) \le s_n(T_2)$ resulta que

$$B = \Delta_n^\pm(T_2) = \overline{\lim_{n\to\infty}}(\lambda_n^\pm(T_2))^\theta n \le \varepsilon^\theta.$$

El caso $\delta_\theta^\pm$ se trata análogamente sólo que en vez de (10) se tendrá

(12) $$\delta_\theta^\pm(T_1 + T_2) \le \frac{\delta_\theta^\pm(T_1)}{\tau^\theta} + \frac{\Delta_\theta^\pm(T_2)}{(1-\tau)^\theta},$$ QED.

REFERENCIAS

[B] BENEDEK, A., *Sobre el problema de Dirichlet*, Notas de Álgebra y Análisis n°2, Instituto de Matemática, Univ. Nacional del Sur, (1968).

[BP1] BENEDEK, A. y PANZONE, R., *Problemas de contorno*, I. *Lecciones sobre métodos y resultados básicos de la teoría de Sturm-Liouville y algunas de sus generalizaciones*, Notas de Álgebra y Análisis n° 13, Instituto de Matemática, Univ. Nacional del Sur, (1985).

[BS] BIRMAN, S. M. and SOLOMIAK, M. Z., Spectral asymptotics of nonsmooth elliptic operators, I. Trans. Moscow Math. Soc. Vol. 27 (1972), 1-52.

[C1] CARLEMAN, T., Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes, Åttonde skan.matematikerkongressen i Stockholm (1934), 34-44.

[Ch] CHAPMAN, S.J., Drums that sound the same, Amer. Math. Monthly, 102(1955)124-138.

[Cw] CONWAY, J. H., Can you hear the shape of a drum?, segunda lectura de *The Sensual (quadratic) Form*, The Carus Math. Monographs, M. A. A., (1997).

[Gå] GÅRDING, L. On the asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators, Math. Scand. 1, 237-255 (1953).

[GWW] GORDON, C., WEBB, D.L. and WOLPERT, S., One can't hear the shape of a drum, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 27(1992)134-138.

[H] HÖRMANDER, L., *Linear partial differential operators*, (1963).

[He] HELLWIG, G., *Partial differential equations, an introduction*, Blaisdell Pub. Co., New York (1964).

[K] KAC, M., Can one hear the shape of a drum? Am. Math. Monthly, 73, n°4, 1-23, (1966).

[K1] KELLOG, O., On the derivatives of harmonic functions on the boundary, Trans. Am. Math. Soc., vol 33, n°2, 486-510, (1931).

[Pl] PLEIJEL, Å., A study of certain Green's functions with applications in the theory of vibrating membranes, Arkiv för Matematik, vol. 2, # 29, (1952), 553-569.

[RN] RIESZ, F. et SZ.–NAGY, B., *Leçons d'Analyse Fonctionelle*, (1953).

[Sc] SCHECHTER, M. *Modern Methods in Partial Differential Equations, an Introduction*, Mc Graw-Hill Inc., (1977)

[Se] SEIDENBERG, A., A new decision method for elementary algebra, Ann. Math., (2), 60,(1954) 365-374.

[Tr] TREVES, F., *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, (1975).