INFORME TECNICO INTERNO

N°. 78

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA
INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA
República Argentina

INFORME TÉCNICO INTERNO

N° 78

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 2002 -

INFORME TÉCNICO INTERNO N° 78

ÁLGEBRAS DE BOOLE INVOLUTIVAS

Antonio A. R. Monteiro

Universidad Nacional del Sur

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 2002

ALGEBRAS DE BOOLE INVOLUTIVAS

Antonio A. R. Monteiro

Estas notas reproducen el curso (ver [17]), *que dictara en la Universidad Nacional del Sur, en 1969 el Dr. Antonio A. R. Monteiro, donde presentó resultados originales* (ver [16], [19]).
En la transcripción de las mismas colaboraron los siguientes docentes del Departamento de Matemática de la U.N.S.: Dr. Luiz F. Monteiro, Dr. Manuel Abad, Lic. Sonia Savini y Lic. Julio Sewald.
Hemos agregado resultados obtenidos por A. Monteiro, con posterioridad a 1969, y tambien por algunos de sus discípulos.
Agradecemos a la Lic. Sonia Savini por el esmero y dedicación en la revisión y corrección de este trabajo.

Luiz F. Monteiro

INMABB - CONICET -UNS

2.002

Índice General

1 CAPITULO I

1.1 Definiciones y reglas de cálculo

Dada un álgebra de Boole A, notaremos como es habitual el supremo (ínfimo) de dos elementos $x, y \in A$ por $x \vee y$ $(x \wedge y)$ y con $-x$ el complemento booleano de x. El primer y último elemento de A serán representados por 0 y 1, respectivamente.
Con id_A notaremos la función identidad de A. Sea T un automorfismo (booleano) de A, T se dice *involutivo* si:

$$T(T(x)) = x, \text{ cualquiera que sea } x \in A,$$

lo que equivale a decir que $T^2 = id_A$ ó equivalentemente $T = T^{-1}$. Claramente $T = id_A$ es un automorfismo involutivo. Todo otro automorfismo involutivo diferente de la función identidad de A se denominará un automorfismo involutivo propio.
En este curso nos proponemos estudiar las álgebras de Boole que admiten automorfismos involutivos propios. Observemos que M. Katetov [10], B. Jónsson [6] y L. Rieger [24] indicaron ejemplos de álgebras de Boole que no admiten ningún automorfismo propio.

Definición 1.1.1 *Un sistema (A, T) formado por un álgebra de Boole y un automorfismo involutivo T de A se dirá un álgebra de Boole involutiva* [16], [20].

Observemos que si $T = id_A$, el álgebra de Boole involutiva (A, id_A) se puede identificar con el álgebra de Boole A y por lo tanto la teoría de las álgebras de Boole involutivas contiene a la de las álgebras de Boole. Un álgebra de Boole involutiva (A, T) se dirá trivial si $T = id_A$.

Como tenemos en vista aplicar la noción de las álgebras de Boole involutivas a un cierto cálculo proposicional, indicaremos una definición equivalente a la anterior.
Sea (A, T) un álgebra de Boole involutiva y consideremos la aplicación "$\sim$" de A en A definida por $\sim x = -T(x)$, cualquiera que sea $x \in A$, entonces se verifica sin dificultad que se cumplen las siguientes condiciones:

M1) $\sim\sim x = x$,

M2) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$,

y además se verifica

$$\text{T)} \quad T(x) = - \sim x, \text{ cualquiera que sea } x \in A,$$

esto nos conduce a:

Definición 1.1.2 *Un sistema $(A, \sim)$ formado por un álgebra de Boole A y una aplicación $\sim: A \to A$ que verifica las condiciones M1 y M2 se dirá un álgebra de Boole involutiva.*

Teorema 1.1.1 *Las dos definiciones anteriores son equivalentes.*

Dem. Si (A, T) un álgebra de Boole involutiva ya vimos que la aplicación $\sim x = -T(x)$ verifica M1 y M2. Recíprocamente consideremos un sistema $(A, \sim)$ que verifica las condiciones M1 y M2. Entonces:

M3) $\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$.
Por M1 y M2 tenemos que $x \vee y = \sim\sim x \vee \sim\sim y = \sim (\sim x \wedge \sim y)$ de donde resulta M3.

M4) $\sim 0 = 1$.
De $0 = 0 \wedge \sim x$, por M2 y M1 se deduce que $\sim 0 = \sim 0 \vee \sim\sim x = \sim 0 \vee x$ cualquiera que sea $x \in A$. Por lo tanto ~ 0 es el último elemento de A, luego $\sim 0 = 1$.

M5) $\sim 1 = 0$.
De M1 y M4 se tiene $\sim 1 = \sim\sim 0 = 0$.

M6) $\sim -x = - \sim x$.
Como $-x \vee x = 1$ por M3 y M5 resulta (i) $0 = \sim 1 = \sim (-x \ \vee x) = \sim -x \wedge \sim x$. Análogamente de $-x \wedge x = 0$ por M2 y M4 resulta (ii) $1 = \sim 0 = \sim (-x \ \wedge x) = \sim -x \vee \sim x$.
De (i) y (ii) resulta que $\sim -x$ es el complemento booleano de $\sim x$ esto es $\sim -x = - \sim x$.

M7) $\sim x = - \sim -x$.
Es una consecuencia inmediata de M6.

M8) $-x = \sim - \sim x$.
Es una consecuencia inmediata de M6 y M1.

M9) $x = - \sim - \sim x$.
Es una consecuencia inmediata de M8.

Pongamos por definición $T(x) = - \sim x$. entonces aplicando las reglas de cálculo indicadas precedentemente se prueba de inmediato que T es un homomorfismo de A en A. Además por M9 tenemos que $T(T(x)) = - \sim - \sim x = x$, luego T es una involución de A, y en consecuencia es una función biunívoca. Luego T es un automorfismo involutivo de A y en consecuencia (A, T) es un álgebra de Boole involutiva según la primera definición. Finalmente observemos que $-T(x) = -- \sim x = \sim x$. ■

Recordemos que un álgebra de De Morgan [21] se puede definir como un par $(A, \sim)$ donde A es un reticulado distributivo con primer elemento 0 y $\sim$ es un operador unario que verifica: M1) $\sim\sim x = x$, M2) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$.
La noción de álgebra de De Morgan fue considerada y estudiada por primera vez por A. Bialynicki-Birula y H. Rasiowa [5] bajo el nombre de *álgebras casi booleanas*. Se demuestra como anteriormente que: M3) $\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$, que ~ 0 es el último elemento de A y notando $1 = \sim 0$, tenemos que $\sim 1 = 0$.
Si A es un álgebra de De Morgan tal que cada elemento $x \in A$ tiene un complemento booleano $-x \in A$ entonces A es un álgebra de Boole involutiva, y en este caso es simultáneamente un álgebra de Boole y un álgebra de De Morgan. Esta circunstancia condujo a A. Monteiro a cambiar la terminología de álgebra casi booleana, introducida por Birula y Rasiowa por el de álgebra de De Morgan..

Teorema 1.1.2 *Un álgebra de Boole involutiva* $(A, \sim)$ *es trivial* $\iff$ $-x = \sim x$ *cualquiera que sea* $x \in A$.

Dem. $(A, \sim)$ es trivial $\iff T(x) = x$, cualquiera que sea $x \in A$, esto es $- \sim x = x$, cualquiera que sea $x \in A$ ó lo que es equivalente $\sim x = -x$, cualquiera que sea $x \in A$. ∎

Teorema 1.1.3 $x \vee \sim x = 1 \iff \sim x = -x$.

Dem. En efecto $x \vee \sim x = 1 \iff \sim x \wedge x = 0$, luego $\sim x = -x$. ∎
En forma dual se prueba que

Teorema 1.1.4 $x \wedge \sim x = 0 \iff \sim x = -x$.

En consecuencia si (A, T) es un álgebra de Boole involutiva propia, esto es no trivial, no son válidas las dos propiedades siguientes:

P1) *Principio del tercero excluído para la negación* $\sim$:

$$x \vee \sim x = 1, \text{ cualquiera que sea } x \in A.$$

P2) *Principio de contradicción para la negación* $\sim$:

$$x \wedge \sim x = 0, \text{ cualquiera que sea } x \in A.$$

Definición 1.1.3 *Si (A, T) es un álgebra de Boole involutiva una parte S no vacía de A se dice una subálgebra involutiva de A si $S1)$ S es cerrada por las operaciones de* $\wedge$, $\vee$, $-$, T.

Lema 1.1.1 *La condición $S1$ es equivalente a las tres condiciones siguientes:*

S2) *Si $x, y \in S$ entonces $x \wedge y \in S$,*

S3) *Si $x \in S$ entonces $-x \in S$,*

S4) *Si $x \in S$ entonces $T(x) \in S$.*

Es claro que si un álgebra de Boole involutiva está definida como un par $(A, \sim)$, una parte S no vacía de A, es una subálgebra involutiva de A si S es cerrada por las operaciones de $\wedge$, $\vee$, $-$, $\sim$.

Definición 1.1.4 *Si (A, T) es un álgebra de Boole involutiva un elemento $x \in A$ se dice invariante ó trivial si $T(x) = x$.*

Al conjunto de todos los elementos triviales de A lo notaremos $I(A)$. Claramente $0, 1 \in I(A)$, $I(A)$ es una subálgebra involutiva de A y es un álgebra de Boole involutiva trivial, luego para que A sea trivial es necesario y suficiente que $I(A) = A$. Observemos que $x \wedge T(x)$, $x \vee T(x) \in I(A)$.
Mas adelante veremos que si $I(A) = \{0, 1\}$ entonces A es un álgebra finita con a lo sumo 4 elementos.

1.2 Ejemplos de álgebras de Boole involutivas

Vamos a indicar una construcción de B. Birula y H. Rasiowa que nos permite obtener ejemplos de álgebras de Boole involutivas.
Sea E un conjunto no vacío, y β una involución de E esto es $\beta : E \longrightarrow E$ y $\beta(\beta(x)) = x$ cualquiera que sea $x \in E$.
Sea $A = \mathcal{P}(E)$ el conjunto de todas las partes de E, es bien conocido que A algebrizado con las operaciones de unión $(\cup)$, intersección $(\cap)$ y complemento $(\complement)$ es un álgebra de Boole con primer elemento $(\emptyset)$ y último elemento (E). Si $X \subseteq E$ pongamos por definición:

$$\sim X = \complement\beta(X).$$

Vamos a probar que:

M1) $\sim\sim X = X$,

M2) $\sim (X \cap Y) = \sim X \cup \sim Y$.

En primer lugar recordemos que si $f : E \longrightarrow F$ entonces I) f biunívoca $\Longleftrightarrow$ $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$, cualesquiera que sean $X, Y \subseteq E$ y II) f biyectiva $\Longleftrightarrow$ $f(\complement X) = \complement f(X)$, cualquiera que sea $X \subseteq E$.
Como β es una involución de E entonces es biyectiva, luego $\sim\sim X = \complement\beta(\complement(\beta(X))) = \complement\complement(\beta(\beta(X)) = X$ y $\sim (X \cap Y) = \complement\beta(X \cap Y) = \complement(\beta(X) \cap \beta(Y)) = \complement\beta(X) \cup \complement\beta(Y) = \sim X \cup \sim Y$. Tenemos así el siguiente resultado:

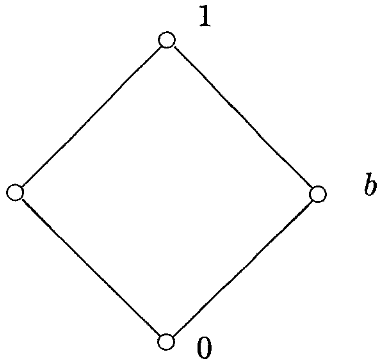
Teorema 1.2.1 *Si E es un conjunto no vacío, β una involución de E, $A = \mathcal{P}(E)$ está algebrizado por las operaciones de $\cup$, $\cap$, $\complement$ y definimos $\sim X = \complement\beta(X)$, cualquiera que sea $X \subseteq E$, entonces $(\mathcal{P}(E), \sim)$ es un álgebra de Boole involutiva .*

De acuerdo a lo indicado anteriormente $T(X) = \complement \sim X = \complement\complement\beta(X) = \beta(X)$.

Toda subálgebra involutiva del álgebra de Boole involutiva $(\mathcal{P}(E), \sim)$ se denominará álgebra de Boole involutiva de conjuntos.
Observemos que si $\beta = id_E$ entonces $\sim X = \complement X$ cualquiera que sea $X \subseteq E$ y por lo tanto en este caso el álgebra de Boole involutiva $(\mathcal{P}(E), \sim)$ es trivial.

Sea $E = \{a\}$ entonces la única involución que admite E es la identidad, esto es $\beta(a) = a$. En este caso $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, E\}$ y la operación $\sim$ está definida por $\sim \emptyset = \complement\beta(\emptyset) = E$ y por lo tanto $\sim E = \emptyset$. Luego en este caso $(\mathcal{P}(E), \sim)$ es un álgebra de Boole involutiva trivial y claramente isomorfa al álgebra de Boole $A' = \{0, 1\}$ que es un álgebra de Boole involutiva trivial si definimos $\sim 0 = 1$ y $\sim 1 = 0$. Veamos ahora el ejemplo mas sencillo de álgebra de Boole involutiva no trivial.

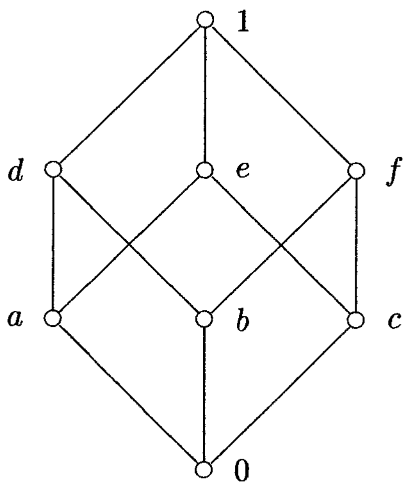
Ejemplo 1.2.1 *Sea $E = \{a, b\}$ y definamos $\beta(a) = b$ y $\beta(b) = a$. Entonces tenemos $A = \mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, E\}$, $\sim \emptyset = \complement\beta(\emptyset) = E$ y en consecuencia $\sim E = \emptyset$, $\sim \{a\} = \complement\beta(\{a\}) = \complement\{b\} = \{a\}$ y $\sim \{b\} = \{b\}$. Luego el álgebra de Boole involutiva es isomorfa, como álgebra de Boole, al álgebra de Boole A' indicada en la siguiente figura:*



Si definimos en A': $\sim 1 = 0$, $\sim 0 = 1$, $\sim a = a$ y $\sim b = b$ entonces $(A', \sim)$ es un álgebra de Boole involutiva propia y el conjunto de los elementos triviales de A' es $I(A') = \{0, 1\}$. Además $T(a) = - \sim a = -a = b$ y $T(b) = - \sim b = -b = a$.

Indiquemos otro ejemplo de álgebra de Boole involutiva no trivial.

Ejemplo 1.2.2 *Sea $E = \{a, b, c\}$ y definamos $\beta(a) = a$, $\beta(b) = c$ y $\beta(c) = b$. Entonces tenemos $A = \mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$, $\sim \emptyset = \complement\beta(\emptyset) = E$, $\sim \{a\} = \{b, c\}$, $\sim \{b\} = \{a, b\}$, $\sim \{c\} = \{a, c\}$. Luego $\sim E = \emptyset$, $\sim \{b, c\} = \{a\}$, $\sim \{a, b\} = \{b\}$, $\sim \{a, c\} = \{c\}$. Luego el álgebra de Boole involutiva es isomorfa al álgebra A' indicada en la siguiente figura:*



Si definimos en A'

x	0	a	b	c	d	e	f	1
$\sim x$	1	f	d	e	b	c	a	0

entonces $(A', \sim)$ es un álgebra de Boole involutiva no trivial y $I(A') = \{0, a, f, 1\}$. Observemos que:

x	0	a	b	c	d	e	f	1
$T(x)$	0	a	c	b	e	d	f	1

2 CAPITULO II

2.1 Homomorfismos

Definición 2.1.1 *Si (A,T) y (A',T') son álgebras de Boole involutivas a toda aplicación h de A en A' que verifique*

H1) $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$, *cualesquiera que sean* $x, y \in A$,

H2) $h(-x) = -h(x)$, *cualquiera que sea* $x \in A$,

H3) $h(T(x)) = T'(h(x))$, *cualquiera que sea* $x \in A$,

se dirá un homomorfismo de A en A'.

Se prueba sin dificultad que $h(A)$ es una subálgebra de Boole involutiva de A'. Si $h(A) = A'$ diremos que A' es una imagen homomórfica de A, que h es un homomorfismo de A sobre A' o que h es un epimorfismo. Si h es biyectiva diremos que h es un isomorfismo de A en A' y notaremos $A \cong A'$. Observemos que si A es un álgebra de Boole involutiva, A' un conjunto no vacío sobre el cual están definidas una operación binaria $\wedge$, una operación unaria $-$, una aplicación $T' : A' \to A'$, y $h : A \to A'$ una función suryectiva que verifica H1, H2 y H3, entonces A' es un álgebra de Boole involutiva . Más precisamente, las operaciones $\wedge$, $-$ son el ínfimo y el complemento booleano en A' y la aplicación T' es un automorfismo involutivo de A'. Es claro que en este caso A' es una imagen homomórfica de A.
En efecto por la teoría de las álgebras de Boole sabemos que A' es un álgebra de Boole. Probemos que T' es un automorfismo involutivo. Sean $x', y' \in A'$, luego como h es suryectiva $x' = h(x)$, $y' = h(y)$ con $x, y \in A$. Como la aplicación T definida sobre A es un automorfismo, por H1 y H2 tenemos que:

$$\text{(i)}\ T'(x' \wedge y') = T'(h(x) \wedge h(y)) = T'(h(x \wedge y)) = h(T(x \wedge y)) =$$

$$h(T(x) \wedge T(y)) = h(T(x)) \wedge h(T(y)) = T'(h(x)) \wedge T'(h(y)) = T'(x') \wedge T'(y')$$

Análogamente de H2 y H3 se deduce (ii) $T'(-x') = -T'(x')$ cualquiera que sea $x' \in A'$. Como la aplicación T es una involución de A, usando H3 tenemos

$$\text{(iii)}\ T'(T'(x')) = T'(T'(h(x))) = T'(h(T(x))) = h(T(T(x))) = h(x) = x'$$

De (i), (ii) y (iii) resulta que T' es un automorfismo involutivo de A'.

El objetivo que tenemos en vista es determinar todas las imágenes homomórficas de un álgebra de Boole involutiva A por medio de una construcción intrínseca efectuada sobre A.

Si A es un álgebra de Boole involutiva entonces id_A es un homomorfismo suryectivo, luego A es una imagen homomórfica de A. Si A' es un álgebra de Boole involutiva con un solo elemento, $A' = \{1'\}$ entonces la transformación $h : A \to A'$ definida por $h(x) = 1'$, cualquiera que sea $x \in A$ es un homomorfismo suryectivo luego A' es una imagen homomórfica de A. Estas dos imágenes homomórficas de A se denominan imágenes triviales de A.

Definición 2.1.2 *Un álgebra de Boole involutiva A se dice simple si:*

1) *A contiene más de un elemento,*

2) *Toda imagen homomórfica de A contiene un solo elemento ó es un álgebra isomorfa a A, esto es las únicas imágenes homomórficas de A son las triviales.*

En el próximo párrafo determinaremos las álgebras de Boole involutivas simples.

Definición 2.1.3 *Si (A,T) y (A',T') son álgebras de Boole involutivas y $h : A \to A'$ es un homomorfismo involutivo, al conjunto:*

$$Nuc(h) = \{x \in A : h(x) = 1'\}, \text{ donde } 1' \text{ es el último elemento de } A'$$

se denomina núcleo de h.

Como h es en particular un epimorfismo booleano entonces sabemos que $Nuc(h)$ es un filtro de A. Veamos que si $x \in Nuc(h)$ entonces $T(x) \in Nuc(h)$. En efecto $h(T(x)) = T'(h(x)) = T'(1') = 1'$.

Definición 2.1.4 *A todo subconjunto F de un álgebra de Boole involutiva (A,T) que verifique:*

I1) *F es un filtro,*

I2) *Si $x \in F$ entonces $T(x) \in F$,*

se denominará T-filtro.

Por lo tanto todo núcleo de un homomorfismo es un T-filtro.

Por la teoría de las álgebras de Boole sabemos que vale el siguiente:

Teorema 2.1.1 *Si (A,T) y (A',T') son álgebras de Boole involutivas, h un epimorfismo de A en A' entonces la condición necesaria y suficiente para que $h(a) = h(b)$ es que exista $n \in Nuc(h)$ tal que $a \wedge n = b \wedge n$.*

Sea F un T-filtro de un álgebra de Boole involutiva A, diremos que el elemento $a \in A$ está relacionado con el elemento $b \in A$, módulo F y notaremos $a \equiv b$ (mód. F), $a \equiv b$ (F), ó $a \equiv b$ si existe $n \in F$ tal que $a \wedge n = b \wedge n$. Por la teoría de las álgebras de Boole sabemos que "$\equiv$" es una relación de congruencia en el álgebra de Boole A. Veamos que si $a \equiv b$ entonces $T(a) \equiv T(b)$. En efecto por hipótesis existe $n \in F$ tal que $a \wedge n = b \wedge n$ luego como T es un homomorfismo

$$T(a) \wedge T(n) = T(a \wedge n) = T(b \wedge n) = T(b) \wedge T(n)$$

y como F es un T-filtro tenemos que $T(n) \in F$, luego $T(a) \equiv T(b)$.
Si $x \in A$ notaremos $C(x) = C_F(x) = \{y \in A : y \equiv x(F)\}$. Al conjunto cociente de A por la relación de congruencia $\equiv$ lo notaremos $A/\equiv$ ó A/F. Como "$\equiv$" es una congruencia booleana sabemos que las siguientes operaciones están bien definidas: $C(x) \wedge C(y) = C(x \wedge y)$, $C(x) \vee C(y) = C(x \vee y)$, $-C(x) = C(-x)$. Además $C(1) = F$ es el último elemento de A/F y $C(0)$ es el primer elemento de A/F. Por lo visto precedentemente

también la siguiente operación $T(C(x)) = C(T(x))$, está bien definida. Por lo tanto $(A/F, T)$ es un álgebra de Boole involutiva . Definiendo $\varphi(x) = C(x)$, $x \in A$ entonces φ es un epimorfismo de A en A/F. La función φ se denomina homomorfismo canónico o natural de A sobre A/F y al álgebra de Boole involutiva A/F, álgebra cociente de A por F. Además $Nuc(\varphi) = F$.
En forma análoga a lo demostrado en la teoría de las álgebras de Boole se prueban los siguientes resultados:

Teorema 2.1.2 *Sean A, A_1, A_2 álgebras de Boole involutivas, $h_1 : A \to A_1$, $h_2 : A \to A_2$ epimorfismos involutivos tales que $Nuc(h_1) = Nuc(h_2)$. Entonces A_1 y A_2 son álgebras de Boole involutivas isomorfas.*

Corolario 2.1.1 *Si A y A' son álgebras de Boole involutivas y h un homomorfismo involutivo de A sobre A' entonces A' es isomorfa a $A/Nuc(h)$.*

Acabamos así de probar que todas las imágenes homomórficas de un álgebra de Boole involutiva A se obtienen (a menos de isomorfismo) considerando T-filtros F de A y construyendo A/F.

Sea A un álgebra de Boole. Un filtro F de A se dice principal si existe $x \in A$ tal que $F = F(x) = \{y \in A : x \leq y\}$. En las álgebras de Boole finitas A, todos los filtros son principales.

Lema 2.1.1 *Si (A, T) un álgebra de Boole involutiva entonces*

1) $T(F(x)) = F(T(x))$,

2) un filtro principal $F(i)$ es un T-filtro si y solo $i \in I(A)$.

Dem.

1) En efecto, $y \in T(F(x))$ es equivalente a la condición $T(y) \in F(x)$, o sea $x \leq T(y)$, luego $T(x) \leq y$, ó lo que es equivalente, $y \in F(T(x))$.

2) Este resultado fué indicado por M. Abad y L. Monteiro en 1976, [1].
Supongamos que $F(i)$ es un T-filtro luego $T(x) \in F(i)$ cualquiera que sea $x \in F(i)$. Como $i \in F(i)$ entonces $T(i) \in F(i)$ esto es $i \leq T(i)$ luego $T(i) \leq T(T(i)) = i$ y por lo tanto $T(i) = i$.
Si $i \in I(A)$ esto es $T(i) = i$. Sea $x \in F(i)$ luego $T(x) \in T(F(i)) =$ (por 1)) $= F(T(i)) =$ (por hipótesis) $= F(i)$, luego $F(i)$ es un T-filtro.

■

Por lo tanto en el caso en que el álgebra A es finita, los T-filtros coinciden con los filtros principales $F(i)$ con $i \in I(A)$.

Lema 2.1.2 *Un álgebra de Boole involutiva A es simple si:*

1) A contiene más de un elemento,

2) los únicos T-filtros de A son $F(1)$ y $F(0) = A$.

Dem. Sea A un álgebra de Boole involutiva simple luego se verifica 1. Sea F un T-filtro de A. Por hipótesis A/F es isomorfa a A ó a un álgebra con un sólo elemento. Sea h el homomorfismo natural de A en A/F. Si $A \cong A/F$, entonces $C_F(x) = \{x\}$ y como $C_F(1) = F$ tenemos que $F = \{1\} = F(1)$. Si A/F tiene un sólo elemento entonces $C_F(x) = A$ cualquiera que sea $x \in A$, luego $F = C_F(1) = A = F(0)$.
Recíprocamente si A es un álgebra de Boole involutiva que verifica 1 y 2 entonces las únicas imágenes homomórficas de A son $A/F(1)$ y $A/F(0)$ que son isomorfas a A y a un álgebra con un sólo elemento respectivamente. ∎

Lema 2.1.3 *Un álgebra de Boole involutiva A es simple si:*

1) A contiene más de un elemento,

2) $I(A) = \{0, 1\}$.

Dem. Sea A un álgebra de Boole involutiva que verifica 1 y 2. Sabemos que $F(1)$ es un T-filtro. Sea F un T-filtro tal que $F \neq F(1)$ luego existe (1) $f \in F$ tal que $f \neq 1$. Como F es un T-filtro de (1) resulta que (2) $T(f) \in F$, luego (3) $f \wedge T(f) \in F$. Sabemos que $f \wedge T(f) \in I(A)$, por tanto (4) $f \wedge T(f) = 1$ ó (5)$f \wedge T(f) = 0$. Si ocurriera (4) como $f \wedge T(f) \leq f$ entonces $f = 1$, absurdo. Luego debe ocurrir (5) y de (5) y (3) resulta que $0 \in F$ luego $F = A$, entonces por el lema anterior A es simple.
Recíprocamente supongamos que A es un álgebra de Boole involutiva simple y supongamos que existe (6) $i \in I(A)$ tal que (7) $i \neq 0$ y (8) $i \neq 1$. De (6) resulta que $F(i)$ es un T-filtro. Por (7) resulta que $F(i) \neq A$ y por (8) que $F(i) \neq F(1)$, absurdo. ∎

Si $x \in A$ notaremos $(x] = \{y \in A : y \leq x\}$. Si $i \in I(A)$ entonces claramente $(i]$ es un álgebra de Boole involutiva .

Recordemos el siguiente resultado:

Lema 2.1.4 *Dado un filtro principal $F(p)$, de un álgebra de Boole A entonces $a \equiv b$ (mód. $F(p)$) $\iff$ $a \wedge p = b \wedge p$.*

Además $A/F(p) \cong I(p)$ lo que permite en el caso finito obtener el diagrama de Hasse del álgebra de Boole $A/F(p)$ a partir del diagrama de Hasse de A, [23]. Sea A el álgebra de Boole involutiva indicada en el Ejemplo 1.2.2 y consideremos el filtro principal $F(i)$, luego como $i \in I(A)$ entonces $F(f)$ es un T-filtro.

x	0	a	b	c	d	e	f	1
$x \wedge f$	0	0	b	c	b	c	f	f

Luego $C(0) = \{0, a\}$, $C(b) = \{b, d\}$, $C(c) = \{c, e\}$, $C(1) = \{1, f\} = [f)$ y $T(C(0)) = C(T(0)) = C(1)$, $T(C(b)) = C(T(b)) = C(c)$.

Recordemos que si A es un álgebra de Boole se define la operación de implicación "$\rightarrow$" del siguiente modo: $x \rightarrow y = -x \vee y$, y un subconjunto D de A se dice un sistema deductivo de A si verifica:

1) $1 \in D$,

2) Si $x \in D$ y $x \rightarrow y \in D$ entonces $y \in D$.

Es bien conocido que en las álgebras de Boole las nociones de filtro y sistema deductivo son equivalentes.

Teorema 2.1.3 *El núcleo $Nuc(h)$ de un homomorfismo $h : A \to A'$ tiene las siguientes propiedades:*

D1) *$Nuc(h)$ es un sistema deductivo del álgebra de Boole A,*

D2) *Si $x \to y \in Nuc(h)$ entonces $T(x) \to T(y) \in Nuc(h)$.*

Dem. Como T' es un automorfismo tenemos que:

$$\text{(i)}\ T'(h(x \to y)) = h(T(x \to y)) = h(T(-x \ \vee y)) = h(T(-x) \ \vee T(y)) =$$

$$h(T(-x)) \ \vee h(T(y)) = h(-T(x)) \ \vee h(T(y)) = -h(T(x)) \ \vee h(T(y)) =$$

$$h(T(x)) \ \to h(T(y)) = h(T(x) \ \to T(y)).$$

Supongamos que $x \to y \in Nuc(h)$, esto es, $h(x \to y) = 1'$, luego (ii) $h(T(x \to y)) = T'(h(x \to y)) = T'(1') = 1'$.
De (i) y (ii) resulta que $h(T(x) \to T(y)) = 1'$ y por lo tanto $T(x) \to T(y) \in Nuc(h)$. ■

Si A y A' son álgebras de Boole involutivas, luego en particular álgebras de Boole entonces sabemos que:

Teorema 2.1.4 *Si h es un homomorfismo involutivo de A en A' entonces: $h(a) = h(b) \iff a \to b \in Nuc(h)$ y $b \to a \in Nuc(h)$*

Observemos que la condición D2 es independiente de D1. En efecto, consideremos el álgebra de Boole involutiva indicada en el Ejemplo 1.2.1, entonces el conjunto $D = \{a, 1\}$ verifica D1 pero no verifica D2, ya que $1 \to a = a \in D$ pero $T(1) \to T(a) = 1 \to b = b \notin D$.

Definición 2.1.5 *Una parte D de un álgebra de Boole involutiva A se dirá un sistema deductivo involutivo de A si verifica las condiciones* D1 *y* D2.

Luego el núcleo de un homomorfismo es un sistema deductivo involutivo .
Observemos que la condición D2 es equivalente a D3: Si $x \in D$ entonces $T(x) \in D$. En efecto D2 $\Rightarrow$ D3. Si $x \in D$ como $x = 1 \to x$ resulta por D2 que $T(x) = T(1 \to x) = T(1) \to T(x) \in D$.
D3 $\Rightarrow$ D2. Si $x \to y \in D$ entonces por D3: $T(x \to y) \in D$, esto es $T(x) \to T(y) \in D$.

Observemos que por lo demostrado anteriormente resulta que existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los T-filtros, esto es los sistemas deductivos involutivos de un álgebra A y el de sus imágenes homomórficas. Esto nos conduce al estudio de los sistemas deductivos involutivos de un álgebra de Boole involutiva, lo que desarrollaremos en el próximo párrafo.

2.2 Sistemas deductivos involutivos

En este párrafo usaremos la expresión sistema deductivo en vez de sistema deductivo involutivo.

Teorema 2.2.1 *Si $\{D_i\}_{i\in I}$ es una familia de sistemas deductivos de un álgebra de Boole involutiva A entonces $D = \bigcap_{i\in I} D_i$ es un sistema deductivo de A.*

Definición 2.2.1 *Sea $\{D_i\}_{i\in I}$ una familia de sistemas deductivos de un álgebra de Boole involutiva A, diremos que D es el sistema deductivo generado por la familia $\{D_i\}_{i\in I}$ si D es la intersección de todos los sistemas deductivos D' de A tales que $D_i \subseteq D'$ para todo $i \in I$. Notaremos $D = \bigvee_{i\in I} D_i$.*

Es claro que siempre existe un sistema deductivo D' en las condiciones de la definición, basta considerar $D' = A$. Observemos también que D es el menor sistema deductivo que contiene a todos los D_i.

Sea A un álgebra de Boole involutiva con más de un elemento, consideremos el conjunto Φ de todos los sistemas deductivos propios del álgebra A, y si D es un sistema deductivo propio de A sea Φ_D el conjunto de todos los sistemas deductivos que contienen a D. $\Phi_D \subseteq \Phi$. Observemos que $\Phi \neq \emptyset$, pues $\{1\}$ es un sistema deductivo propio y que como $D \in \Phi_D$ también $\Phi_D \neq \emptyset$. Es claro que $(\Phi, \subseteq)$ y $(\Phi_D, \subseteq)$ son conjuntos ordenados.

Teorema 2.2.2 *El conjunto ordenado Φ_D tiene elementos maximales.*

Dem. Veamos que Φ_D es inductivo superiormente, es decir, que toda cadena creciente $\{C_i\}_{i\in I}$ de elementos del conjunto Φ_D tiene una cota superior C en Φ_D. Sea (1) $C = \bigcup_{i\in I} C_i$, luego es claro que (2) $D \subseteq C$. Probemos que C es un sistema deductivo propio. Como A es un álgebra de Boole sabemos que C es un filtro propio. Veamos que C verifica D2. Si $x \to y \in C$ entonces $x \to y \in C_i$, para algún $i \in I$, luego $D(x) \to D(y) \in C_i$ y en consecuencia, $D(x) \to D(y) \in C$, luego como C es un filtro que verifica D2 resulta que (3) C es un sistema deductivo involutivo. De (2) y (3) resulta que $C \in \Phi_D$, y por (1) C es cota superior de $\{C_i\}_{i\in I}$. Luego Φ_D es inductivo superiormente, de donde resulta por el lema de Zorn que Φ_D tiene elementos maximales. ∎

Observemos que en el caso particular en que $D = \{1\}$ se obtiene:

Corolario 2.2.1 *Φ tiene elementos maximales.*

Definición 2.2.2 *Un sistema deductivo D del álgebra de Boole involutiva A se dice maximal ó máximo si es un elemento maximal del conjunto ordenado Φ, es decir:*

1) D es propio,

2) Si D' es un sistema deductivo tal que $D \subseteq D'$ entonces $D' = A$ ó $D' = D$.

Teorema 2.2.3 *Todo sistema deductivo propio está contenido en un sistema deductivo maximal.*

Dem. Basta observar que si M es máximo en Φ_D, es máximo en A. ∎

Teorema 2.2.4 *Sea H un sistema deductivo de A, $A' = A/H$ y h el homomorfismo natural de A sobre A', entonces existe una correspondencia biunívoca entre los sistemas deductivos de A que contienen a H y los sistemas deductivos de A'.*

Dem. Sea D un sistema deductivo de A tal que $H \subseteq D$, veamos que $D' = h(D)$ es un sistema deductivo de A'.
D1) $1' \in D'$, ya que $1' = h(1)$ y $1 \in D$. Si x', $x' \to y' \in D'$ entonces existen $x, z \in D$ tales que $x' = h(x)$ y $x' \to y' = h(z)$. Además $x' \to y' = h(x) \to h(y) = h(x \to y)$ para algún $y \in A$.
Probemos que $x \to y \in D$. Como $h(x \to y) = h(z)$, entonces $x \to y \equiv z$ (mód. H), luego existe $h \in H$ tal que $(x \to y) \wedge h = z \wedge h$. Como por hipótesis $H \subseteq D$, $z \wedge h \in D$, es decir, $(x \to y) \wedge h \in D$, luego como D es un filtro $x \to y \in D$. Entonces de x, $x \to y \in D$, resulta $y \in D$ y por lo tanto $h(y) = y' \in D'$.

D3) Si $x' \in D'$ entonces $x' = h(x)$, para algún $x \in D$. Como D es invariante por T, $T(x) \in D$. Luego $h(T(x)) \in D'$ y entonces $T(h(x)) = T(x') \in D'$.

Probemos que la aplicación que a cada sistema deductivo D de A tal que $H \subseteq D$ le hace corresponder el sistema deductivo $D' = h(D)$ es biunívoca y sobreyectiva.
Sean D_1, D_2 sistemas deductivos de A tales que (1) $H \subseteq D_1$, (2) $H \subseteq D_2$ y supongamos $h(D_1) = h(D_2)$. Sea (3) $a_1 \in D_1$, entonces $h(a_1) \in h(D_1) = h(D_2)$, es decir, (4) $h(a_1) = h(a_2)$ para algún (5) $a_2 \in D_2$. De (4) resulta, en particular, por el Teorema 2.1.4 que (6) $a_2 \to a_1 \in H$. De (6) y (2) resulta (7) $a_2 \to a_1 \in D_2$ y por lo tanto de (5) y (7) resulta que $a_1 \in D_2$, luego $D_1 \subseteq D_2$. En forma análoga se prueba que $D_2 \subseteq D_1$, luego $D_1 = D_2$, y por lo tanto la correspondencia indicada es biunívoca.

Sea D' un sistema deductivo de A', veamos que existe un sistema deductivo D en A, tal que $H \subseteq D$ y $h(D) = D'$. En efecto, consideremos $D = h^{-1}(D')$. Sea $x \in H$ luego $h(x) = 1' \in D'$ y por lo tanto $x \in h^{-1}(D') = D$, luego $H \subseteq D$. Verifiquemos que D es un sistema deductivo de A.
D1) $1 \in D$ ya que $h(1) = 1' \in D'$.
D2) Si x, $x \to y \in D = h^{-1}(D')$ entonces $h(x)$, $h(x \to y) = h(x) \to h(y) \in D'$, como D' es un sistema deductivo, $h(y) \in D'$, luego $y \in h^{-1}(D') = D$.

D3) Si $x \in D$ entonces $h(x) \in D'$, luego como D' es un T-filtro $h(T(x)) = T(h(x)) \in D'$ y por lo tanto resulta que $T(x) \in h^{-1}(D') = D$. En consecuencia la correspondencia indicada es sobreyectiva. ■

Corolario 2.2.2 *Si H es un sistema deductivo de un álgebra de Boole involutiva la condición necesaria y suficiente para que $A/H = A'$ sea simple es que H sea maximal en A.*

Dem. Es una consecuencia inmediata de: A' es simple si y sólo si los únicos sistemas deductivos de A' son A' y $\{1'\}$. ■

2.3 Determinación de las álgebras de Boole involutivas simples

Del corolario anterior resulta la importancia del estudio de los sistemas deductivos máximos para determinar las álgebras simples.

Teorema 2.3.1 *Si (A, T) es un álgebra de Boole involutiva y U es un ultrafiltro del álgebra de Boole A, entonces $T(U)$ es un ultrafiltro.*

Dem. Sabemos que en un álgebra de Boole todo isomorfismo transforma filtros en filtros. En particular, para el automorfismo T se tiene que $T(U)$ es un filtro. Además $T(U)$ es propio ya que $0 \notin T(U)$; en efecto, si $0 \in T(U)$ entonces $0 = T(0) \in T(T(U)) = U$, absurdo.
Como en un álgebra de Boole la noción de ultrafiltro es equivalente a la de filtro primo, para completar la demostración, veamos que $T(U)$ es primo. Supongamos que $x \vee y \in T(U)$, entonces $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y) \in U$. Como U es primo, $T(x) \in U$ ó $T(y) \in U$, de donde $T(T(x)) = x \in T(U)$ ó $T(T(y)) = y \in T(U)$. ∎

Teorema 2.3.2 *Si U es un ultrafiltro entonces $M = U \cap T(U)$ es un sistema deductivo propio.*

Dem. Como la intersección de filtros es un filtro, entonces M es un filtro. Como $M \subseteq U$ y U es propio entonces M es propio. Veamos que M es invariante por T. Sea $x \in M$, es decir, $x \in U$ y $x \in T(U)$, entonces $T(x) \in T(U)$ y $T(x) \in T(T(U)) = U$, luego $T(x) \in M$. ∎

Teorema 2.3.3 *Si U es un ultrafiltro de un álgebra de Boole involutiva (A,T) y D un sistema deductivo tal que $D \subseteq U$ entonces $D \subseteq T(U)$.*

Dem. Supongamos $D \not\subseteq T(U)$. Sea $d \in D$ tal que $d \notin T(U)$. Como D es un sistema deductivo y $T(d) \in T(U)$, entonces $T(d) \in T(U) \cap U = M$. Por el teorema anterior, sabemos que M es un sistema deductivo, entonces $T(T(d)) = d \in M = T(U) \cap U$, de donde resulta que $d \in T(U)$, lo que contradice la hipótesis, por lo tanto $D \subseteq T(U)$. ∎

Teorema 2.3.4 *Si M es un sistema deductivo máximo de un álgebra de Boole involutiva (A,T) entonces existe un ultrafiltro U del álgebra de Boole A tal que $M = U \cap T(U)$.*

Dem. Como M es un filtro propio, existe un ultrafiltro U tal que $M \subseteq U$. Luego por el teorema anterior $M \subseteq U \cap T(U)$. Como por el Teorema 2.3.2, $U \cap T(U)$ es un sistema deductivo propio, entonces $M = U \cap T(U)$. ∎

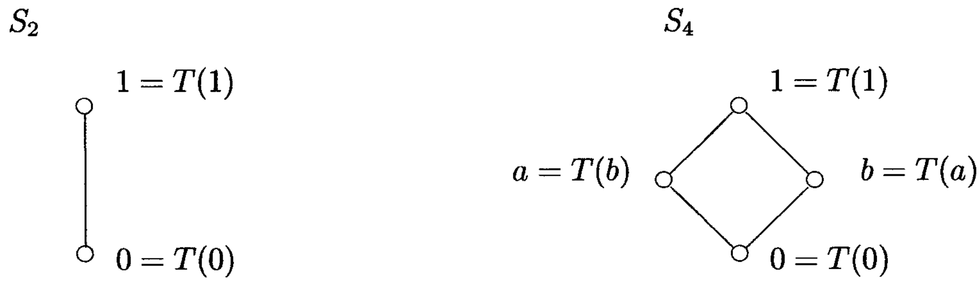
Teorema 2.3.5 *Si (A,T) es un álgebra de Boole involutiva y U es un ultrafiltro del álgebra de Boole A entonces $U \cap T(U)$ es un sistema deductivo máximo de A.*

Dem. Sabemos que $M = U \cap T(U)$ es un sistema deductivo propio. Sea M' un sistema deductivo máximo tal que $M \subseteq M'$, entonces por el teorema anterior existe un ultrafiltro U' tal que $M' = U' \cap T(U')$, luego (i) $M = U \cap T(U) \subseteq U'$.
Sabemos que si F_1, F_2 son filtros y U es un ultrafiltro tal que $F_1 \cap F_2 \subseteq U$, entonces $F_1 \subseteq U$ ó $F_2 \subseteq U$. Entonces de (i) resulta (ii) $U \subseteq U'$ ó (iii) $T(U) \subseteq U'$.
Si se verifica (ii), como U y U' son ultrafiltros $U = U'$ y en consecuencia $M = U \cap T(U) = U' \cap T(U') = M'$. Análogamente si se cumple (iii), como $T(U)$, U' son ultrafiltros $T(U) = U'$, luego $M = M'$. Por lo tanto M es maximal. ∎

Observemos que los dos últimos teoremas se pueden enunciar:
"La condición necesaria y suficiente para que un sistema deductivo M sea máximo es que $M = U \cap T(U)$, para algún ultrafiltro U de A." En el caso particular en que $U = T(U)$, se tiene $M = U = T(U)$.

Teorema 2.3.6 *Todo sistema deductivo máximo de un álgebra de Boole involutiva (A, T) está contenido en a lo sumo dos ultrafiltros del álgebra de Boole A.*

Dem. Por el Teorema 2.3.4 sabemos que (1) $M = U \cap T(U)$ donde U es un ultrafiltro del álgebra de Boole A. Por el Teorema 2.3.1 $T(U)$ es un ultrafiltro del álgebra de Boole A, y por (1) $M \subseteq U$ y $M \subseteq T(U)$. Por lo tanto M está contenido en dos ultrafiltros. Supongamos que U_1 es un ultrafiltro tal que $M \subseteq U_1$, entonces por el Teorema 2.3.3 $M \subseteq T(U_1)$ y en consecuencia $M \subseteq U_1 \cap T(U_1) = M_1$. Pero por el Teorema 2.3.2 M_1 es un sistema deductivo propio, luego como M es un sistema deductivo máximo, tenemos que $M = M_1$, esto es $U \cap T(U) = U_1 \cap T(U_1)$ luego $U \cap T(U) \subseteq U_1$ y como U_1 es un filtro primo resulta que (2) $U \subseteq U_1$ ó (3) $T(U) \subseteq T(U_1)$. Si ocurre (2) como U y U_1 son ultrafiltros entonces $U = U_1$ y si ocurre (3), como $T(U)$ y U_1 son ultrafiltros tenemos que $T(U) = U_1$. Luego los únicos ultrafiltros que contienen a M son U y $T(U)$.
Observemos que si $U = T(U)$ entonces existe un único ultrafiltro que contiene a M. ∎
Consideremos las siguientes álgebras de Boole involutivas:



Observemos que el álgebra S_2 es isomorfa a la subálgebra $\{0, 1\}$ de S_4, y que más precisamente $\{0, 1\}$ es la única subálgebra propia de S_4.

Teorema 2.3.7 *Las únicas álgebras de Boole involutivas simples son isomorfas a las álgebras S_2 y S_4 indicadas en la figura anterior.*

Dem. Sabemos que todo sistema deductivo máximo M de un álgebra de Boole involutiva (A, T) es de la forma $M = U \cap T(U)$, donde U es un ultrafiltro del álgebra de Boole A. Luego tenemos dos casos a considerar: $U = T(U)$ ó $U \neq T(U)$.

Caso 1) Si $U = T(U)$, entonces $A/M = A/U = A/T(U)$. Sabemos que el álgebra de Boole cociente por un ultrafiltro es un álgebra de Boole con dos elementos. Como debe cumplirse que $T(0) = 0$ y $T(1) = 1$, el álgebra de Boole involutiva A/M, es isomorfa al álgebra S_2 indicada.

Caso 2) Si $U \neq T(U)$, como U y $T(U)$ son ultrafiltros y son diferentes, ellos son incomparables, es decir, $U \setminus T(U) \neq \emptyset$, $T(U) \setminus U \neq \emptyset$. También $M \neq \emptyset$ ya que $1 \in M$. Además $A \setminus (U \cup T(U)) \neq \emptyset$, pues $0 \in A \setminus (U \cup T(U))$.
Probemos que A/M tiene cuatro elementos: $0' = A \setminus (U \cup T(U))$, $1' = M = U \cap T(U)$, $X = U \setminus T(U)$ e $Y = T(U) \setminus U$.

Sabemos que $M = 1'$ es una clase de equivalencia, mas precisamente $1' = C(1)$.
Probemos que X es una clase de equivalencia módulo M. Sea (1) $x \in X = U \setminus T(U)$, veamos que (i) $C(x) \subseteq X$. Supongamos que $y \in A$ es tal que $y \equiv x$ (mód. M), es decir,

$y \to x \in M$, $x \to y \in M$, entonces (2) $y \to x \in T(U)$, (3) $x \to y \in U$. De (1) resulta (4) $x \notin T(U)$ y (5) $-x \notin U$, pues U es un ultrafiltro y como U es primo, de (3) y (5) se tiene (6) $y \in U$.
De (2) y (4) por la misma razón, $-y \in T(U)$, es decir, (7) $y \notin T(U)$. De (6) y (7), $y \in U \setminus T(U)$, luego $C(x) \subseteq X$.

Probemos que (ii) $X \subseteq C(x)$. Sea (8) $y \in X = U \setminus T(U)$. De (8) como $y \vee -y = 1 \in T(U)$ y $T(U)$ es primo, $-y \in T(U)$. Como $-y \leq -y \vee x = y \to x$ y $T(U)$ es filtro entonces (9) $y \to x \in T(U)$. De (1), como $x \leq x \vee -y = y \to x$ y U es filtro resulta (10) $y \to x \in U$. De (9) y (10) se tiene (11) $y \to x \in M$.

Análogamente se prueba (12) $x \to y \in M$. De (11) y (12) resulta $y \equiv x$ (mód. M), es decir, $X \subseteq C(x)$.
De (i) y (ii) se tiene que X es una clase de equivalencia.

En la misma forma se prueba que Y es una clase de equivalencia.

Veamos entonces que $0' = A \setminus (U \cup T(U))$ es una clase de equivalencia. Observemos que $0 \in 0'$ pues $0 \notin U \cup T(U)$.
Probemos que (iii) $C(0) \subseteq 0'$. Sea $x \in A$ tal que $x \equiv 0$ (mód. M), es decir, $x \to 0 = -x \in M = U \cap T(U)$ entonces $-x \in U$ y $-x \in T(U)$, de donde como U y $T(U)$ son filtros primos, $x \notin U$ y $x \notin T(U)$, luego $x \in A \setminus (U \cup T(U)) = 0'$, es decir, $C(0) \subseteq 0'$.
Veamos que (iv) $0' \subseteq C(0)$. Sea $x \in 0' = A \setminus (U \cup T(U))$, entonces $x \notin U$, $x \notin T(U)$ de donde como U y $T(U)$ son filtros primos, $-x \in U$ y $-x \in T(U)$, es decir, $-x = x \to 0 \in M$.
Como además siempre se cumple que $0 \to x = 1 \in M$ resulta $x \equiv 0$ (mód. M) y por lo tanto $x \in C(0)$. Luego $0' \subseteq C(0)$.
De (iii) y (iv) $0' = C(0)$, o sea A/M es el álgebra de Boole con cuatro elementos.

Determinemos en $A/M = \{0', X, Y, 1'\}$ el operador T. Sabemos que $T(0') = 0'$, $T(1') = 1'$. Vamos a probar que $T(X) = Y$ y $T(Y) = X$.
Sea $x \in X$ y supongamos que $T(x) \notin Y = T(U) \setminus U$. Como $x \in U$ entonces $T(x) \in T(U)$ por lo tanto $T(x) \notin -U$, es decir, $T(x) \in U$, o sea $x \in T(U)$. Absurdo. Luego $T(X) = Y$ y en consecuencia $T(Y) = X$. Es decir, A/M es isomorfa al álgebra de Boole involutiva S_4.

Luego hemos probado que $A/M \cong S_2$ ó $A/M \cong S_4$, o lo que es equivalente, que S_2 y S_4 son las únicas álgebras de Boole involutivas simples. ■

El resultado precedente fué probado de un modo diferente por M. Abad y L. Monteiro en 1976, [1].

Lema 2.3.1 *Si A es un álgebra de Boole involutiva finita, con más de un elemento, entonces $F(b)$ es un sistema deductivo máximo de A si y sólo si b es un átomo del álgebra de Boole $I(A)$.* (L. Monteiro, 2002)

Dem. Si $F(b)$ es un sistema deductivo máximo, luego por el Lema 2.1.1 sabemos que $b \in I(A)$. Supongamos que existe $i \in I(A)$ tal que $0 \leq i \leq b$ luego $F(b) \subseteq F(i) \subseteq F(0) = A$, donde $F(i)$ es un sistema deductivo, luego como $F(b)$ es máximo resulta que $F(i) = F(b)$ ó $F(i) = F(0)$ esto es $i = b$ ó $i = 0$, lo que prueba que b es un átomo de $I(A)$.

Recíprocamente supongamos que b es un átomo de $I(A)$. De $b \in I(A)$ resulta por el Lema 2.1.1 que $F(b)$ es un sistema deductivo y como $b \neq 0$ entonces $F(b)$ es propio. Supongamos que D es un sistema deductivo tal que $F(b) \subseteq D$. Como D es un filtro entonces $D = F(x)$ con $x \in A$ y como D es un T-filtro entonces (1) $T(x) \in D$. Luego de $F(b) \subseteq F(x)$ resulta que (2) $x \leq b$ y por lo tanto (3) $T(x) \leq T(b) = b$. De (2) y (3) resulta que $0 \leq x \ \wedge T(x) \leq b$ y como $x \ \wedge T(x) \in I(A)$ entonces (4) $x \ \wedge T(x) = b$ ó (5) $x \ \wedge T(x) = 0$. Si ocurre (4) entonces (6) $b = x \ \wedge T(x) \leq x$, luego de (6) y (2) resulta $x = b$ y por lo tanto $D = F(b)$. Como $x \ \wedge T(x) \in D$ si ocurre (5), entonces $D = A$. Luego $F(b)$ es un sistema deductivo máximo. ■

Por lo tanto podemos afirmar que si A es un álgebra de Boole involutiva finita, con mas de un elemento, el número de sistemas deductivos maximales es igual al número de átomos del álgebra de Boole $I(A)$.

2.4 Semisimplicidad de las álgebras de Boole involutivas

Teorema 2.4.1 *Todo sistema deductivo propio es intersección de sistemas deductivos máximos.*

Dem. Sea D un sistema deductivo propio. En particular, D es un filtro propio, entonces $D = \bigcap\limits_{a \notin D} U_a$, donde U_a son los ultrafiltros tales que $D \subseteq U_a$, $a \notin U_a$.
De $D \subseteq U_a$ resulta por el Teorema 2.3.3 que $D \subseteq T(U_a)$ y en consecuencia $D \subseteq U_a \cap T(U_a) = M_a$. Sabemos que M_a es un sistema deductivo máximo y es claro que $D = \bigcap\limits_{a \notin D} M_a$. ∎

En el caso particular que $D = \{1\}$ se tiene:

Corolario 2.4.1 *El sistema deductivo* $\{1\}$ *es intersección de todos los sistemas deductivos máximos del álgebra.*

Teorema 2.4.2 (Teorema de representación) *Toda álgebra de Boole involutiva A, con más de un elemento, que no es simple, es subálgebra del producto cartesiano de álgebras simples.*

Dem. Como A no es simple entonces $I(A) \neq \{0, 1\}$ luego existe $i \in I(A)$ tal que $i \neq 0$, $i \neq 1$ y $F(i)$ es un sistema deductivo propio luego la familia Φ de sistemas deductivos propios de A es no vacía y por el Corolario 2.2.1 el conjunto E de todos los sistemas deductivos máximos de A es no vacío.
Si $M \in E$, sea m el homomorfismo natural de A sobre A/M. Sabemos que $A/M \cong S_2$ ó $A/M \cong S_4$. Como S_2 es isomorfa a una subálgebra de S_4, en cualquiera de los dos casos m es un homomorfismo de A en S_4.
Sea $\mathcal{F} = S_4^E$ el conjunto de todas las funciones definidas sobre E y que toma valores en el álgebra de Boole involutiva S_4, es decir, $\mathcal{F}$ es el producto cartesiano de tantas álgebras S_4 como elementos tiene E.
Sabemos que el producto de álgebras de Boole, algebrizado puntualmente, es un álgebra de Boole. Es inmediato probar que si definimos el operador T punto a punto se obtiene un álgebra de Boole involutiva .
Consideremos entonces el álgebra de Boole involutiva $\mathcal{F}$ y veamos que A es isomorfa a una subálgebra de $\mathcal{F}$, precisamente a la subálgebra $\varphi(A)$.
Definamos $\varphi : A \to \mathcal{F}$ por $\varphi(f) = F$, donde $F(M) = m(f)$, para todo $M \in E$. Entonces se comprueba sin dificultad que φ verifica: H1) $\varphi(f \wedge g) = \varphi(f) \wedge \varphi(g)$, H2) $\varphi(-f) = -\varphi(f)$ y H3) $\varphi(T(f)) = T(\varphi(f))$, luego $\varphi(A)$ es una subálgebra de $\mathcal{F}$.
Veamos que φ es biunívoca. Supongamos que $\varphi(f) = \varphi(g)$, es decir $F(M) = G(M)$, para todo $M \in E$, o sea, $m(f) = m(g)$, para todo $M \in E$, o lo que es equivalente, $f \to g \in M$, $g \to f \in M$, para todo $M \in E$, luego $f \to g \in \bigcap\limits_{M \in E} M$ y $g \to f \in \bigcap\limits_{M \in E} M$.
Como $\bigcap\limits_{M \in E} M = \{1\}$ entonces $f \to g = 1$ y $g \to f = 1$, o sea, $f = g$. Entonces φ es biunívoca de donde resulta que A es isomorfa a la subálgebra $\varphi(A)$ de $\mathcal{F}$. ∎

Ejemplo 2.4.1 *Representar el álgebra A indicada en el Ejemplo 1.2.2 mediante la construcción dada en el teorema anterior.*
Observemos que todos los filtros son principales ya que el álgebra es finita. Fácilmente se ve que los sistemas deductivos de A son: $F(1) = \{1\}$, $F(a) = \{a, d, e, 1\}$, $F(f) = \{f, 1\}$ y $F(0) = A$. También es inmediato que los únicos sistemas deductivos máximos son $M_1 = F(a)$ y $M_2 = F(f)$, es decir, $E = \{M_1, M_2\}$ y $\mathcal{F} = S_4^E = S_4 \times S_4$. Determinemos las álgebras A/M_1, A/M_2 y los homomorfismos naturales: $m_1 : A \to A/M_1$, $m_2 : A \to A/M_2$.
$A/M_1 = \{\{0, b, c, f\}, \{a, d, e, 1\}\} = \{0, 1\} \cong S_2$. Este resultado puede obtenerse de inmediato sin hallar las clases de equivalencia, observando que $M_1 = F(a)$ es un ultrafiltro y $F(a) = T(F(a))$.
También es evidente que $A/M_2 = \{\{0, a\}, \{b, d\}, \{c, e\}, \{f, 1\}\} = \{0, a', b', 1\} \cong S_4$ ya que $M_2 = F(c) \cap T(F(c))$.
Los homomorfismos naturales m_1, m_2 están definidos por:

x	0	a	b	c	d	e	f	1
$m_1(x)$	0	1	0	0	1	1	0	1
$m_2(x)$	0	0	a'	b'	a'	b'	1	1

Observemos que en este caso A es isomorfa al producto $A/M_1 \times A/M_2$.

Veamos mas generalmente que:

Teorema 2.4.3 *Sea (A, T) un álgebra de Boole involutiva finita con más de un elemento, que no es simple, y $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sus sistemas deductivos máximos entonces $A \cong A/M_1 \times A/M_2 \times \cdots \times A/M_n$.*

Dem. Sea $\mathcal{F} = \prod_{i=1}^{n} A_i$, con $A_i = S_4$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Sabemos que la aplicación $\varphi : A \to \mathcal{F}$, definida por: $\varphi(f) = F$, donde $F(M_i) = m_i(f)$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, es un homomorfismo de A en $\mathcal{F}$ y que como $\bigcap_{i=1}^{n} M_i = \{1\}$ entonces φ es biunívoca. Observemos que $A/M_1 \times A/M_2 \times \cdots \times A/M_n = \prod_{i=1}^{n} A/M_i \subseteq \mathcal{F}$

Probemos que φ es una función de A sobre $\prod_{i=1}^{n} A/M_i$. Por la definición de φ resulta inmediato que toma sus valores en el álgebra $\prod_{i=1}^{n} A/M_i$. Como además φ es biunívoca es suficiente probar que las álgebras A y $\prod_{i=1}^{n} A/M_i$ tienen el mismo número de elementos.
Como A es finita todos sus filtros son principales, en particular, sus ultrafiltros son los generados por los átomos de A. Luego por el Teorema 2.3.4 los sistemas deductivos máximos son de la forma $M_i = F(a_i) \cap T(F(a_i))$, donde a_i es átomo de A, para $i = 1, 2, \ldots, n$, es decir, (1) $M_i = F(a_i) \cap T(F(a_i))$, con $F(a_i) \neq T(F(a_i))$ ó (2) $M_i = F(a_i) \cap T(F(a_i))$, con $F(a_i) = T(F(a_i))$. En consecuencia, A/M_i tiene cuatro ó dos elementos, respectivamente.
Podemos suponer que $M_1, M_2, \ldots, M_k$ son sistemas deductivos de la forma (1) y $M_{k+1}, \ldots, M_n$ son del tipo (2).

Observemos que puede ocurrir que en A no existan sistemas deductivos de la forma (1) ó de la forma (2), pero siempre existen sistemas deductivos de alguna de las dos formas.
Entonces el número de elementos de $\prod_{i=1}^{n} A/M_i$ es igual a $4^k \times 2^{n-k} = 2^{k+n}$.

Veamos que A tiene 2^{k+n} elementos, ó lo que es equivalente, que el número de átomos del álgebra de Boole A es $k+n$.
Por el Lema 2.1.1 sabemos que $T(F(x)) = F(T(x))$ cualquiera que sea $x \in A$, en particular si a es un átomo de A se tiene $T(F(a)) = F(T(a))$ y como por el Teorema 2.3.1 $T(F(a))$ es un ultrafiltro entonces $F(T(a))$ es un ultrafiltro y en consecuencia $T(a)$ es un átomo de A.
Por lo tanto T transforma átomos de A en átomos de A. Entonces se tiene $M_i = F(a_i) \cap T(F(a_i)) = F(a_i) \cap F(T(a_i))$, donde a_i, $T(a_i)$ son átomos de A, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Probemos que $a_1, \ldots, a_k, T(a_1), \ldots, T(a_k), a_{k+1} = T(a_{k+1}), \ldots, a_n = T(a_n)$ son todos los átomos de A.
En efecto, si a es un átomo de A entonces $M = F(a) \cap T(F(a))$ es un sistema deductivo máximo de A, es decir, $M = M_i$ para algún i, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Por otra parte, si $M(a) = F(a) \cap T(F(a)) = F(b) \cap T(F(b)) = M(b)$ entonces $a = b$ ó $a = T(b)$. En efecto, $F(a \vee T(a)) = M(a) = M(b) = F(b \vee T(b))$, como la función que a cada $x \in A$ le hace corresponder el filtro $F(x)$ es una aplicación biunívoca del álgebra finita A sobre el conjunto de todos sus filtros, entonces $a \vee T(a) = b \vee T(b)$, de donde, $a \wedge (a \vee T(a)) = a \wedge (b \vee T(b))$, o sea, $a = (a \wedge b) \vee (a \wedge T(b))$. Si suponemos $a \neq b$ y $a \neq T(b)$ entonces como $a, b, T(b)$ son átomos, $a = 0$, absurdo.
Luego $a = b$ ó $a = T(b)$, es decir, los elementos $a_1, \ldots, a_k, T(a_1), \ldots, T(a_k), a_{k+1}, \ldots, a_n$, son todos los átomos de A. Es claro que son distintos dos a dos, ya que los sistemas deductivos M_i, para $i = 1, 2, \ldots, n$, son distintos. Luego A tiene $2k + (n-k) = n+k$ átomos, lo que finaliza la demostración. ■

Observación. (L. Monteiro, 2002) Sea A un álgebra de Boole involutiva finita con más de un elemento que no es simple, luego $I(A)$ es un álgebra de Boole finita con más de un átomo. Sean $b_1, b_2, \ldots, b_t$ los átomos del álgebra de Boole $I(A)$ entonces $A_i = A/F(b_i)$, $1 \leq i \leq t$ son álgebras simples. En forma análoga a la indicada en el Teorema 2.4.2 se puede probar que A es isomorfa a una subálgebra del álgebra $\mathcal{F} = \prod_{i=1}^{t} A_i$ donde el isomorfismo en cuestión se define por $\varphi(x) = (m_1(x), m_2(x), \ldots, m_t(x))$ donde m_i indica el epimorfismo natural de A sobre A_i. Probemos que en este caso φ es suryectiva. Dado $y = (y_1, y_2, \ldots, y_t) \in \mathcal{F}$ entonces para cada $y_i \in A_i$ existe $x_i \in A$ tal que $m_i(x_i) = y_i$. Sea $x = \bigvee_{i=1}^{t} (x_i \wedge b_i)$. Como $b_i \in I(A)$ entonces $m_j(b_i) \in I(A_j) = \{0, 1\}$ luego $m_j(b_i) = 0$ para $j \neq i$ y $m_j(b_j) = 1$. Por lo tanto $m_j(x) = m_j(\bigvee_{i=1}^{t} (x_i \wedge b_i)) = \bigvee_{i=1}^{t} (m_j(x_i) \wedge m_j(b_i)) = m_j(x_j) \wedge m_j(b_j) = m_j(x_j) \wedge 1 = m_j(x_j) = y_j$. Lo que prueba que $\varphi(x) = y$.
Sean $b_1, b_2, \ldots, b_k$ los átomos de $I(A)$ tales que $A/F(b_i) \cong S_4$ y $b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_t$ los átomos de $I(A)$ tales que $A/F(b_i) \cong S_2$ luego el número de elementos de A es igual a $4^k \times 2^{t-k} = 2^{k+t}$.

Como $S_2 \cong A/F(b_i) \cong I(b_i)$ para $k+1 \leq i \leq t$ entonces b_i es un átomo de A. Como $S_4 \cong A/F(b_i) \cong I(b_i)$ para $1 \leq i \leq k$ entonces $b_i = a_{i1} \vee a_{i2}$ donde a_{i1} y a_{i2} son átomos de A, tales que $T(a_{i1}) = a_{i2}$. Luego el número de átomos de A es $2k + (t-k) = t+k$.

Del teorema anterior resulta:

Teorema 2.4.4 *Dado un conjunto finito $E = \{p_1, \ldots, p_n, q_1, r_1, q_2, r_2, \ldots, q_k, r_k\}$ con la involución T definida por $T(p_i) = p_i$, $T(q_i) = r_i$ y $T(r_j) = q_j$, el álgebra de Boole involutiva $(A = \mathcal{P}(E), T)$ se puede escribir $A = S_2^n \times S_4^k$.*

Dem. Por hipótesis $A = \mathcal{P}(E)$ es un álgebra finita y en consecuencia sus ultrafiltros son los filtros principales generados por átomos, es decir, por los conjuntos unitarios $\{x\}$, con $x \in E$. Hallemos entonces los sistemas deductivos máximos de A.
Sea $x \in E$. Si $x = p_i$, para algún i, $i = 1, 2, \ldots, n$ entonces $F(\{p_i\}) = T(F(\{p_i\}) = M_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, es decir, $A/M_i \cong S_2$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.
Si $x = q_j$, para algún j, $j = 1, 2, \ldots, k$ entonces $T(F(\{q_j\})) = F(T(\{q_j\})) = F(\{r_j\})$, luego también resulta $T(F(\{r_j\})) = F(\{q_j\})$, $j = 1, 2, \ldots, k$.
Por lo tanto $M_j = F(\{q_j\}) \cap F(\{r_j\})$, $j = 1, 2, \ldots, k$, o sea $A/M_j \cong S_4$, para $j = 1, 2, \ldots, k$.
Luego $A \cong S_2^n \times S_4^k$. ■

2.5 Representación de un álgebra de Boole involutiva por un álgebra de conjuntos

En el Capítulo I indicamos un ejemplo de un álgebra de Boole involutiva cuyos elementos son subconjuntos de un conjunto E.
Recordemos esa construcción. Dado un conjunto E y una involución T definida sobre E, entonces como T es una biyección tenemos que:
$T(E) = E$, $T(\emptyset) = \emptyset$, $T(X \cap Y) = T(X) \cap T(Y)$, $T(\complement X) = \complement T(X)$ y $T(T(X)) = X$. Es decir que T es un automorfismo involutivo del álgebra de Boole 2^E, de todas las partes de E, y por lo tanto, el sistema $(2^E, T)$ es un álgebra de Boole involutiva. Por definición, toda subálgebra de 2^E es un álgebra de Boole involutiva de conjuntos.

Teorema 2.5.1 *Toda álgebra de Boole involutiva A es isomorfa a un álgebra de Boole involutiva de conjuntos.*

Dem. Sea (A, T) un álgebra de Boole involutiva . Si A tiene un sólo elemento entonces claramente A es isomorfa al álgebra de Boole involutiva $(\emptyset, T)$ donde $T(\emptyset) = \emptyset$. Si A tiene mas de un elemento sea $\mathbf{U}$ la familia de los ultrafiltros de A. Si $U \in \mathbf{U}$ entonces vimos que $T(U)$ es un ultrafiltro y por lo tanto T es una transformación definida sobre $\mathbf{U}$ y tomando sus valores en $\mathbf{U}$. Como $T(T(U)) = U$, entonces T es una involución en $\mathbf{U}$. Consideremos el álgebra de Boole involutiva de conjuntos $(\mathcal{P}(\mathbf{U}), T)$ y probemos que A es isomorfa a una subálgebra de $\mathcal{P}(\mathbf{U})$. Sea $S(a)$ la familia de todos los ultrafiltros de A que contienen al elemento a. Veamos que S es un isomorfismo de A sobre una subálgebra de $\mathcal{P}(\mathbf{U})$, es decir, que se verifican:

1) S es biunívoca.

2) $H_1)$ $S(a \wedge b) = S(a) \wedge S(b)$.
$H_2)$ $S(-a) = -S(a)$.
$H_3)$ $S(T(a)) = T(S(a))$.

Por la teoría de las álgebras de Boole (teorema de Stone), sabemos que se verifican H_1 y H_2. Probemos H_3. En efecto, como $U \in S(T(a))$ si y sólo si $T(a) \in U$, entonces $a \in T(U)$, o sea $T(U) \in S(a)$, esto es $U \in T(S(a))$. Luego $(S(A), T)$ es un álgebra de Boole involutiva isomorfa a (A, T). ■

2.6 Subálgebras involutivas

La noción de subálgebra involutiva de un álgebra de Boole involutiva fué indicada en la Definición 1.1.3.
Sea (B, T) un álgebra de Boole involutiva con más de un elemento, luego si S es una subálgebra involutiva de B tenemos:

$$\{0, 1\} \subseteq S \subseteq B.$$

Es claro que la intersección de subálgebras involutiva de B es una subálgebra involutiva de B. La noción de subálgebra generada por una parte G de B, que notaremos $SI(G)$, se define en la forma habitual y se prueba que $SI(G)$ es la menor subálgebra involutiva de B que contiene a G. Es claro que $SI(\emptyset) = \{0, 1\}$. Si $SI(G) = B$, se dice que G es *un conjunto de generadores de B*.
Si $G \subseteq B$, notaremos con $\mathcal{PF}(G)$ la familia de todas las partes finitas de G, entonces se prueba sin dificultad que:

Lema 2.6.1 $SI(G) = \bigcup\{SI(F) : F \in \mathcal{PF}(G)\}$.

Vamos a ver como se determina $SI(G)$ en el caso en que G es un conjunto finito, no vacío, de un álgebra de Boole involutiva B. Para ello vamos a empezar por recordar ciertos resultados de la teoría de las álgebras de Boole, cuyas notaciones y demostraciones fueron indicadas por L. Monteiro en [23]. Si B es un álgebra de Boole, $x, y \in B$ y ponemos por definición: $x + y = (-x \wedge y) \vee (x \wedge -y)$, entonces $x + 0 = x$ y $x + 1 = -x$.
Dada un álgebra de Boole B, con más de un elemento, sea

$$\mathbf{P}(B, n) = \{p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) : p_i \in \{0, 1\} \subseteq B, 1 \leq i \leq n\},$$

esto es, el conjunto $\mathbf{P}(B, n)$ está formado por todas las n-uplas de elementos $0, 1 \in B$. $\mathbf{P}(B, n)$ es el producto cartesiano de n álgebras de Boole iguales a $\{0, 1\} \subseteq B$, luego es un álgebra de Boole con n átomos, que son precisamente las n-uplas que tienen una única coordenada igual a 1 y las restantes iguales a 0.

Si $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subseteq B$ y $p \in \mathbf{P}(B, n)$, notaremos con $m_p(G)$ o mas sencillamente m_p al elemento:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} (g_i + p_i).$$

Estos elementos se denominan *combinaciones algebraicas elementales* de G. Observemos que de acuerdo con la definición precedente $g_i + p_i = g_i$ ó $g_i + p_i = -g_i$.
Sea $m(G) = \{m_p : p \in \mathbf{P}(B, n)\}$, como $N[\mathbf{P}(B, n)] = 2^n$ entonces $N[m(G)] \leq 2^n$.

Lema 2.6.2 *Si B es un álgebra de Boole, $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ entonces:*

1) Si $p, q \in \mathbf{P}(B,n)$ y $p \neq q$ entonces $m_p \wedge m_q = 0$.

2) $\bigvee\{m_p : p \in \mathbf{P}(B,n)\} = 1$.

3) Si $p, q \in \mathbf{P}(B,n)$, $p \neq q$ y $m_p \leq m_q$ entonces $m_p = 0$.

4) $g_i = \bigvee\{m_p : p \in \mathbf{P}(B,n),\ p_i = 0\}$, $1 \leq i \leq n$.

Si X es un conjunto no vacío con n elementos notaremos $N[X] = n$. Sea $(R, \wedge, \vee, 0)$ un reticulado con primer elemento 0, $X \subseteq R$, $N[X] = t$, notaremos:

$$S_0(X) = \{0\}, \qquad S_1(X) = X,$$

$$S_j(X) = \{\bigvee y : y \in Y,\ Y \subseteq X, N[Y] = j\},\ \ 1 < j \leq t,$$

$$S(X) = \bigcup_{j=0}^{t} S_j(X).$$

Si B es un álgebra de Boole, $G \subseteq B$ notaremos con $SB(G)$ a la subálgebra booleana de B generada por G, y si B es finita con más de un elemento notaremos con $\mathcal{A}(B)$ el conjunto de todos los átomos de B.

Lema 2.6.3 *Si B es un álgebra de Boole, $G \subseteq B$ y $N[G] = n$ con $n \in \mathbf{N}$, entonces:*

1) $SB(G) = S(m(G))$.

2) $\mathcal{A}(SB(G)) = \{m_p : m_p \in m(G), m_p \neq 0\}$.

Como $N[m(G)] \leq 2^n$ por el lema precedente, tenemos que $N[\mathcal{A}(SB(G))] \leq 2^n$ y en consecuencia $N[SB(G)] \leq 2^{(2^n)}$.

Lema 2.6.4 *Si B es un álgebra de Boole y $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subseteq B$ entonces $SB(G) = SB(m(G))$.*

Lema 2.6.5 *Si (B,T) es un álgebra de Boole involutiva, $G \subseteq B$ entonces $SI(G) = SB(G \cup T(G))$.*

Dem. Es claro que el lema es válido si $G = \emptyset$.
(1) $SB(G \cup T(G)) \subseteq SI(G)$. Como $G \subseteq SI(G)$ y $SI(G)$ es una subálgebra involutiva entonces $T(G) \subseteq SI(G)$ luego $G \cup T(G) \subseteq SI(G)$ y como $SI(G)$ es una subálgebra booleana tenemos que $SB(G \cup T(G)) \subseteq SI(G)$.
(2) $SI(G) \subseteq SB(G \cup T(G))$. Como $G \subseteq SB(G \cup T(G))$ nos basta probar que $SB(G \cup T(G))$ es una subálgebra involutiva, esto es si $y \in SB(G \cup T(G))$ entonces $T(y) \in SB(G \cup T(G))$.
Probemos en primer lugar que se verifica (2) para el caso que G es finito, no vacío. Supongamos que $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ entonces:

$$G \cup T(G) = \{g_1, g_2, \ldots, g_n, g_{n+1} = T(g_1), g_{n+2} = T(g_2), \ldots, g_{2n} = T(g_n)\}.$$

Por el Lema 2.6.3 sabemos que $SB(G\cup T(G)) = S(m(G\cup T(G))$. Sea $y \in SB(G\cup T(G))$ luego

$$\text{(i)}\quad y = 0, \quad \text{(ii)}\quad y \in m(G\cup T(G))$$

ó

$$\text{(iii)}\quad y = \bigvee\{m_p : p \in P \subseteq \mathbf{P}(B, 2n),\ 1 < N[P] \leq 2n\}.$$

En el caso (i) $T(y) = T(0) = 0 \in SB(G\cup T(G))$. Analizemos el caso (ii): como $m_p = \bigwedge_{i=1}^{2n}(g_i + p_i)$, entonces $T(m_p) = \bigwedge_{i=1}^{2n} T(g_i + p_i)$. Luego tenemos los siguientes casos

1) $1 \leq i \leq n$.

 1a) Si $p_i = 0$ entonces $g_i + p_i = g_i$ luego entonces $T(g_i + p_i) = T(g_i) = T(g_i) + p_i = g_{i+n} + p_i$, con $n + 1 \leq i + n \leq 2n$.

 1b) Si $p_i = 1$ entonces $g_i + p_i = -g_i$ luego $T(g_i + p_i) = T(-g_i) = -T(g_i) = T(g_i) + p_i = g_{i+n} + p_i$, con $n + 1 \leq i + n \leq 2n$.

2) $n + 1 \leq i \leq 2n$.
Observemos que en este caso $T(g_i) = g_{i-n}$.

 2a) Si $p_i = 0$ entonces $g_i + p_i = g_i$ luego $T(g_i + p_i) = T(g_i) = g_{i-n} = g_{i-n} + p_i$, con $1 \leq i - n \leq n$.

 2b) Si $p_i = 1$ entonces $g_i + p_i = -g_i$ luego $T(g_i + p_i) = T(-g_i) = -T(g_i) = -g_{i-n} = g_{i-n} + p_i$, con $1 \leq i - n \leq n$.

Por lo tanto $T(m_p) \in m(G\cup T(G))$.
En el caso (iii) $T(y) = \bigvee\{T(m_p) : p \in P \subseteq \mathbf{P}(B, 2n),\ 1 < N[P] \leq 2n\}$. Acabamos de demostrar que $T(m_p) \in m(G\cup T(G))$ luego $T(y) \in SB(G\cup T(G))$.
Sea ahora G un conjunto arbitrario no vacío sabemos que:

$$SB(G\cup T(G)) = \bigcup\{SB(F) : F \in \mathcal{PF}(G\cup T(G))\}.$$

Sea $y \in SB(G\cup T(G))$ luego $y \in SB(F)$ para alguna parte finita F de $G\cup T(G)$. Como $F \subseteq F\cup T(F)$ entonces $SB(F) \subseteq SB(F\cup T(F)) = SI(F)$. Luego $y \in SI(F)$ y en consecuencia $T(y) \in SI(F) = SB(F\cup T(F)) \subseteq SB(G\cup T(G))$. ■

Corolario 2.6.1 *Si (B, T) es un álgebra de Boole involutiva , con mas de un elemento y $G \subseteq B$ tal que $N[G] = n$, con $n \in \mathbf{N}$ entonces $N[\mathcal{A}(SI(G))] \leq 4^n$ y $N[SI(G)] \leq 2^{4^n}$.*

Dem. Como $SI(G) = SB(G\cup T(G))$ y $N[G\cup T(G)] \leq 2n$ entonces por el Lema 2.6.3 resulta que $N[\mathcal{A}(SI(G))] \leq 2^{2n} = 4^n$ y por lo tanto

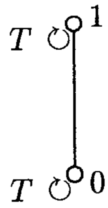
$$N[SI(G)] = N[SB(G\cup T(G))] \leq 2^{4^n}.$$

■

Por el Lema 2.6.3, 2) sabemos que si G es finito, no vacío los átomos de $SI(G) = SB(G\cup T(G))$ son los elementos $m_p \neq 0$. Observemos que si $G = \{g\}$ entonces las combinaciones algebraicas elementales son:

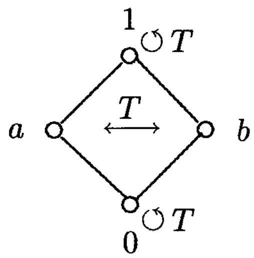
$$g \wedge T(g),\quad g \wedge -T(g),\quad -g \wedge T(g),\quad -g \wedge -T(g).$$

Ejemplo 2.6.1 $B = S_2$.



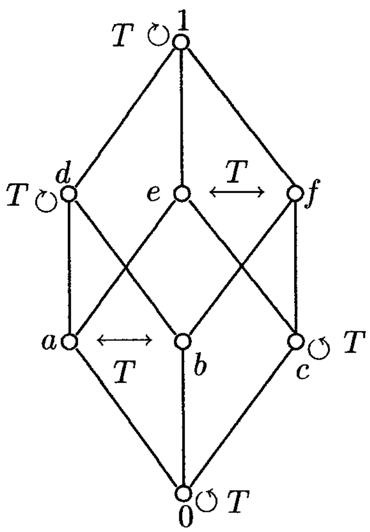
Si $g = 1$, *entonces las combinaciones algebraicas elementales son:*
$1 \wedge T(1) = 1 \wedge 1 = 1$, $1 \wedge -T(1) = 1 \wedge 0 = 0$, $-1 \wedge T(1) = 0 \wedge 1 = 0$, $-1 \wedge -T(1) = 0 \wedge 0 = 0$. *Luego* $SI(\{1\}) = S_2$.
Si $g = 0$, *entonces:* $0 \wedge T(0) = 0 \wedge 0 = 0$, $0 \wedge -T(0) = 0 \wedge 1 = 0$, $-0 \wedge T(0) = 1 \wedge 0 = 0$, $-0 \wedge -T(0) = 1 \wedge 1 = 1$. *Luego* $SI(\{0\}) = S_2$.

Ejemplo 2.6.2 *Sea* $B = S_4$.



Si $g = 0$ *ó* $g = 1$, *se obtiene, como en el ejemplo anterior, que* $SI(\{g\}) = \{0, 1\} \cong S_2$.
Si $g = a$ *entonces* $a \wedge T(a) = a \wedge b = 0$, $a \wedge -T(a) = a \wedge a = a$, $-a \wedge T(a) = b \wedge b = b$, $-a \wedge -T(a) = b \wedge a = 0$. *Luego en este caso* $SI(\{a\}) = S_4$. *Análogamente* $SI(\{b\}) = S_4$. *Luego si* $g = 0$ *ó* $g = 1$ *entonces* $N[SI(\{g\})] = 2$ *y si* $g = a$ *ó* $g = b$ $N[SI(\{g\})] = 4$.

Ejemplo 2.6.3 $B = S_2 \times S_4$.



Si $g = 0$ *ó* $g = 1$, *se obtiene, como en los ejemplos anteriores, que* $SI(\{g\}) = \{0, 1\} \cong S_2$.
Sea $g = a$, *entonces se obtiene que* $a \wedge T(a) = a \wedge b = 0$, $a \wedge -T(a) = a \wedge e = a$, $-a \wedge T(a) = f \wedge b = b$, $-a \wedge -T(a) = f \wedge e = c$. *Luego en este caso el conjunto*

de las combinaciones algebraicas elementales diferentes de 0 *coincide con el conjunto de los átomos de* B *y por lo tanto* $SI(\{a\}) = B$. *Análogamente si* $g = b$ *tenemos que* $SI(\{b\}) = B$. *Si* $g = c$ *entonces* $c \wedge T(c) = c \wedge c = c$, $c \wedge -T(c) = c \wedge -c = 0$, $-c \wedge T(c) = -c \wedge c = 0$, $-c \wedge -T(c) = d \wedge d = d$. *Luego* $SI(\{c\}) \cong S_4$. *Es fácil ver que* $SI(\{d\}) = SI(\{c\})$ *y* $SI(\{e\}) = SI(\{f\}) = SI(\{a\})$.

Observemos que dado un elemento x de un álgebra de Boole involutiva (B, T) para obtener $SI(\{x\})$ debemos ver cuantos elementos diferentes se obtienen aplicando las operaciones $\wedge$, $-$ y T ó ($\vee$, $-$ y T). Es claro, dadas las siguientes tablas, que a lo sumo se pueden obtener los siguientes elementos, dado que ellos no son necesariamente diferentes dos a dos.

$$
\begin{array}{ll}
y_1 = x, & y_2 = -x, \\
y_3 = T(x), & y_4 = -T(x), \\
y_5 = x \wedge T(x), & y_6 = -x \wedge T(x), \\
y_7 = x \wedge -T(x), & y_8 = -x \wedge -T(x), \\
y_9 = 0, & y_{10} = x \vee T(x), \\
y_{11} = -x \vee T(x), & y_{12} = x \vee -T(x), \\
y_{13} = -x \vee -T(x), & y_{14} = 1, \\
y_{15} = (x \wedge -T(x)) \vee (-x \wedge T(x)), & y_{16} = (x \wedge T(x)) \vee (-x \wedge -T(x)).
\end{array}
$$

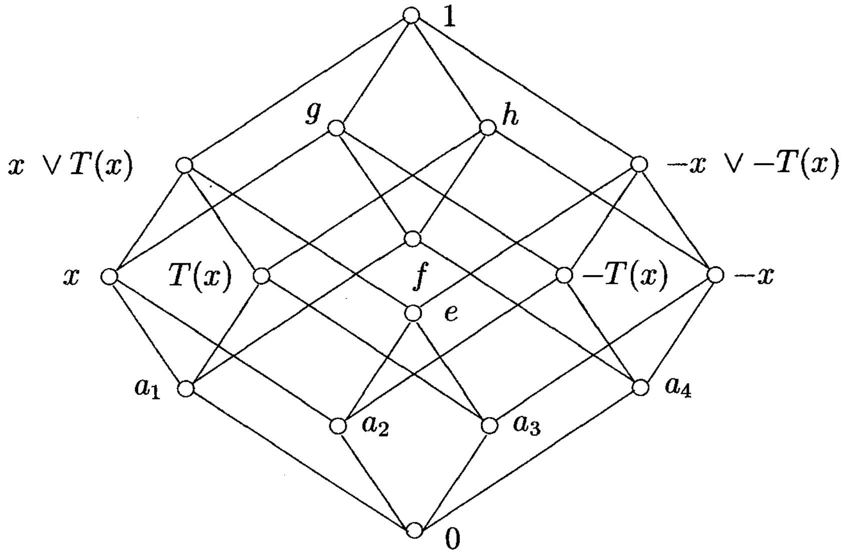
En efecto:

y_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}
$-y_i$	y_2	y_1	y_4	y_3	y_{13}	y_{12}	y_{11}	y_{10}	y_{14}	y_8	y_7	y_6	y_5	y_9	y_{16}	y_{15}
$T(y_i)$	y_3	y_4	y_1	y_2	y_5	y_7	y_6	y_8	y_9	y_{10}	y_{12}	y_{11}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}

$\wedge$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}
y_1	y_1	y_9	y_5	y_7	y_5	y_9	y_7	y_9	y_9	y_1	y_5	y_1	y_7	y_1	y_7	y_5
y_2		y_2	y_6	y_8	y_9	y_6	y_9	y_8	y_9	y_6	y_2	y_8	y_2	y_2	y_6	y_8
y_3			y_3	y_9	y_5	y_6	y_9	y_9	y_9	y_3	y_3	y_6	y_6	y_3	y_6	y_5
y_4				y_4	y_9	y_9	y_7	y_8	y_9	y_4	y_8	y_4	y_4	y_4	y_7	y_8
y_5					y_5	y_9	y_9	y_9	y_9	y_5	y_5	y_5	y_7	y_5	y_9	y_5
y_6						y_6	y_9	y_9	y_9	y_6	y_6	y_9	y_6	y_6	y_6	y_9
y_7							y_7	y_9	y_9	y_7	y_9	y_7	y_7	y_7	y_7	y_9
y_8								y_8	y_9	y_9	y_8	y_8	y_8	y_8	y_9	y_8
y_9									y_9	y_9	y_9	y_9	y_9	y_9	y_9	y_9
y_{10}										y_{10}	y_3	y_1	y_{15}	y_{10}	y_{15}	y_5
y_{11}											y_{11}	y_{16}	y_2	y_{11}	y_6	y_{16}
y_{12}												y_{12}	y_4	y_{12}	y_7	y_{16}
y_{13}													y_{13}	y_{13}	y_{15}	y_8
y_{14}														y_{14}	y_{15}	y_{16}
y_{15}															y_{15}	y_9
y_{16}																y_{16}

Dada un álgebra de Boole involutiva (B, T), entonces es claro que si $x \in B$ para que $SB(\{x\})$ tenga exactamente 16 elementos, B debe tener por lo menos 16 elementos. Vamos a indicar un ejemplo de un álgebra de Boole involutiva con exactamente 16 elementos, esto es con 4 átomos, y un elemento de esa álgebra que la genera.

Ejemplo 2.6.4 *Sea (L_1, T) el álgebra de Boole involutiva indicada en la siguiente figura, donde $T(a_1) = a_1$, $T(a_2) = a_3$, $T(a_3) = a_2$, $T(a_4) = a_4$ y sea $x = a_1 \vee a_2$, entonces $-x = a_3 \vee a_4$, $T(x) = T(a_1) \vee T(a_2) = a_1 \vee a_3$ y $-T(x) = a_2 \vee a_4$. Por lo tanto $x \wedge T(x) = a_1$, $x \wedge -T(x) = a_2$, $-x \wedge T(x) = a_3$, $-x \wedge -T(x) = a_4$. Luego el conjunto de todas las combinaciones algebraicas elementales diferentes de 0 coincide con el conjunto de los átomos de B y en consecuencia $SI(\{x\}) = L_1$.*



Observemos que $L_1 \cong S_1 \times S_1 \times S_2$.

Si B es un álgebra de Boole finita con mas de un elemento, y f una biyección de $\mathcal{A}(B)$ en $\mathcal{A}(B)$, entonces la transformación $H_f : B \to B$ definida por $H_f(0) = 0$ y $H_f(x) = \bigvee\{b \in \mathcal{A}(B) : f(b) \leq x\}$ es un automorfismo (ver por ejemplo [23]). Si h es un automorfismo de B entonces h transforma átomos de B en átomos de B. Si $f = h_{|\mathcal{A}(B)}$ entonces $H_f = h$. Además si $f_1, f_2 : \mathcal{A}(B) \to \mathcal{A}(B)$ son tales que $f_1 \neq f_2$ entonces $H_{f_1} \neq H_{f_2}$.
Si (B, T) es un álgebra de Boole involutiva finita con mas de un elemento, como T es un automorfismo de B entonces $T_{|\mathcal{A}(B)} : \mathcal{A}(B) \to \mathcal{A}(B)$ y como $T(T(x)) = x$ entonces si $a \in \mathcal{A}(B)$, $T(a) = a$ ó $T(a) = b \in \mathcal{A}(B)$ con $b \neq a$ y $T(b) = a$, esto es:
(I) T deja invariantes átomos de B ó intercambia pares de átomos.
Por lo tanto dada un álgebra de Boole B finita, con n átomos, $n \in \mathbf{N}$, para tranformarla en un álgebra de Boole involutiva basta indicar una biyección de $\mathcal{A}(B)$ que verifique (I). Sea $I(\mathcal{A}(B)) = \{a \in \mathcal{A}(B) : T(a) = a\}$ y $I'(\mathcal{A}(B)) = \mathcal{A}(B) \setminus I(\mathcal{A}(B)$. Claramente $I'(\mathcal{A}(B))$ tiene un número par de elementos.
Dado un conjunto X con n elementos, $n \in \mathbf{N}$ representemos con Inv (n) el número de todas las biyecciones de X que verifican (I). Pongamos Inv $(0) = 1$. Es obvio que Inv $(1) = 1$. Probemos que Inv $(n) = Inv$ $(n-1) + (n-1) \cdot Inv$ $(n-2)$ para $n \geq 2$. Si $n = 2$ es claro que Inv $(2) = 2 = Inv$ $(1) + 1 \cdot Inv$ (0). Supongamos que la fórmula es válida para un conjunto con $n-1$ elementos y sea $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un conjunto con n elementos. Si T es una involución de X entonces: (i) $T(x_1) = x_1$ ó (ii) $T(x_1) = x_i$, para algún i, $2 \leq i \leq n$. El número de involuciones que verifican (i) es igual al número de involuciones del conjunto $\{x_2, \ldots, x_n\}$ que tiene $n-1$ elementos y este número es $Inv\,(n-1)$. En el caso (ii) el conjunto $X \setminus \{x_1, x_i\}$ tiene $n-2$ elementos y como x_i puede

tomar $n-1$ valores diferentes, el número total de estas involuciones es $(n-1) \cdot Inv\ (n-2)$. Tenemos así:

$$Inv\ (0) = 1,\ Inv\ (1) = 1,\ Inv\ (2) = 2,\ Inv\ (3) = 4,\ Inv\ (4) = 10,$$

$$Inv\ (5) = 26,\ Inv\ (6) = 76.$$

Por lo tanto si B es un álgebra de Boole con n átomos, existen $Inv\ (n)$ formas diferentes de transformarla en un álgebra de Boole involutiva .

2.7 Algebras de Boole Involutivas libres

Definición 2.7.1 *Un subconjunto G de un álgebra de Boole involutiva L se dice un conjunto de generadores libres de L si:*

L1) $SI(G) = L$,

L2) Dada una función f de G en un álgebra de Boole involutiva arbitraria A, existe un homomorfismo $h_f : L \to A$ que extiende a f, esto es $f(g) = h_f(g)$, para todo $g \in G$.

En este caso se suele decir que L es un *álgebra de Boole involutiva libre* ó que L es un álgebra de Boole involutiva con un conjunto G de generadores libres.

Teorema 2.7.1 *(de Birkhoff) Para toda "álgebra" definida por igualdades existe siempre el álgebra libre con un conjunto de generadores de cardinal prefijado.*

Dado $n \in \mathbb{N}$ vamos a indicar una construcción, debida a A. Monteiro, del álgebra de Boole involutiva con un conjunto de generadores libres de cardinal n.
Recordemos que en el álgebra de Boole involutiva L_1 indicada en el Ejemplo 2.6.4:

$$T(a_1) = a_1,\ T(a_2) = a_3,\ T(a_3) = a_2,\ T(a_4) = a_4.$$

Sea $E_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ con la involución indicada precedentemente. Consideremos el conjunto $E_n = \prod_{i=1}^{n} Y_i$, donde $Y_i = E_1$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Luego E_n tiene 4^n elementos.
Definamos sobre E_n:

$$T((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = (T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_n)).$$

Es claro que T es una involución de E_n. Consideremos el álgebra de Boole $L_n = \mathcal{P}(E_n)$ de todos los subconjuntos de E_n. Luego (L_n, T) es un álgebra de Boole involutiva con 4^n átomos y por lo tanto tiene 2^{4^n} elementos.
Sean $G_i = \{x \in E_n : x_i \in \{a_1, a_2\}\}$, donde $1 \leq i \leq n$, luego $G_i \in L_n$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Observemos que los elementos $(a_1, a_1, \ldots, a_1), (a_2, a_2, \ldots, a_2)$ de E_n pertenecen a todos los G_i, $1 \leq i \leq n$. Luego $G_i \neq \emptyset$, $1 \leq i \leq n$.
Tenemos así un subconjunto $G = \{G_i : 1 \leq i \leq n\}$ del álgebra de Boole involutiva L_n que verifica $card\ (G) = n$. En efecto si ponemos por definición $\alpha(i) = G_i$, entonces α es una función de I sobre G. Además α es inyectiva, ya que si $i, j \in I$, $i \neq j$, entonces el elemento $x \in E_n$ definido por $x_j = a_4$ y $x_k = a_1$ para todo $k \neq j$, verifica $x \notin G_j$ y

$x \in G_i$, luego $\alpha(i) = G_i \neq G_j = \alpha(j)$.
El conjunto de los átomos de L_n es $\mathcal{A}(L_n) = \{\{x\}\}_{x \in E_n}$. Si probamos que

$$\mathcal{A}(L_n) \subseteq m(G \cup T(G))$$

entonces:

$$L_n = S(\mathcal{A}(L_n)) \subseteq S(m(G \cup T(G))) = SB(G \cup T(G)) = SI(G),$$

y por lo tanto $SI(G) = L_n$. Si $\{x\} \in \mathcal{A}(L_n)$, entonces $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n$ con $x_i \in E_1$, $1 \leq i \leq n$. Sean $I = \{1, 2, \dots, n\}$ e $I_j(x) = \{i \in I : x_i = a_j\}$ para $j = 1, 2, 3, 4$. Observemos que estos conjuntos pueden ser vacíos, que $I_j(x) \cap I_k(x) = \emptyset$ si $j \neq k$, $1 \leq j, k \leq 4$, y que $\bigcup_{j=1}^{4} I_j(x) = I$.
Pongamos

$$X_i = \begin{cases} \emptyset & si\ x_i \in \{a_1, a_2\} \\ \\ E_n & si\ x_i \notin \{a_1, a_2\} \end{cases} \qquad 1 \leq i \leq n\,,$$

y

$$X_{n+i} = \begin{cases} \emptyset & si\ x_i \in \{a_1, a_3\} \\ \\ E_n & si\ x_i \notin \{a_1, a_3\} \end{cases} \qquad 1 \leq i \leq n\,.$$

Entonces

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_{2n}) \in \underbrace{\{\emptyset, E_n\} \times \{\emptyset, E_n\} \times \dots \times \{\emptyset, E_n\}}_{2n\ veces},$$

y

$$m_X = \bigcap_{i=1}^{n} (G_i + X_i) \cap \bigcap_{i=1}^{n} (T(G_i) + X_{n+i}) = \bigcap_{i=1}^{n} ((G_i + X_i) \cap (T(G_i) + X_{n+i}))\,.$$

Y por lo indicado precedentemente

$$m_X = \bigcap_{j=1}^{4} \left(\bigcap_{i \in I_j(x)} ((G_i + X_i) \cap (T(G_i) + X_{n+i})) \right)$$

para aquellos j, $1 \leq j \leq 4$ tales que $I_j(x) \neq \emptyset$. Probemos que $m_X = \{x\}$.
Observemos que:

1) Si $I_1(x) \neq \emptyset$ e $i \in I_1(x)$ esto es $x_i = a_1$, entonces $X_i = \emptyset$ y $X_{n+i} = \emptyset$, y por lo tanto $(G_i + X_i) \cap (T(G_i) + X_{n+i}) = G_i \cap T(G_i)$, para todo $i \in I_1(x)$.

2) Si $I_2(x) \neq \emptyset$ e $i \in I_2(x)$ esto es $x_i = a_2$, entonces $X_i = \emptyset$ y $X_{n+i} = E_n$, y por lo tanto $(G_i + X_i) \cap (T(G_i) + X_{n+i}) = G_i \cap \complement T(G_i)$, para todo $i \in I_2(x)$.

3) Si $I_3(x) \neq \emptyset$ e $i \in I_3(x)$ esto es $x_i = a_3$, entonces $X_i = E_n$ y $X_{n+i} = \emptyset$, y por lo tanto $(G_i + X_i) \cap (T(G_i) + X_{n+i}) = \complement G_i \cap T(G_i)$, para todo $i \in I_3(x)$.

4) Si $I_4(x) \neq \emptyset$ e $i \in I_4(x)$ esto es $x_i = a_4$, entonces $X_i = E_n$ y $X_{n+i} = E_n$, y por lo tanto $(G_i + X_i) \cap (T(G_i) + X_{n+i}) = \complement G_i \cap \complement T(G_i)$, para todo $i \in I_4(x)$.

Observemos además que cualquiera que sea i, $1 \leq i \leq n$:

$$G_i \cap T(G_i) = \{x \in E_n : x_i \in \{a_1, a_2\}\} \cap \{x \in E_n : x_i \in \{a_1, a_3\}\} = \{x \in E_n : x_i = a_1\},$$

$$G_i \cap \complement T(G_i) = \{x \in E_n : x_i \in \{a_1, a_2\}\} \cap \{x \in E_n : x_i \in \{a_2, a_4\}\} = \{x \in E_n : x_i = a_2\},$$

$$\complement G_i \cap T(G_i) = \{x \in E_n : x_i \in \{a_3, a_4\}\} \cap \{x \in E_n : x_i \in \{a_1, a_3\}\} = \{x \in E_n : x_i = a_3\},$$

$$\complement G_i \cap \complement T(G_i) = \{x \in E_n : x_i \in \{a_3, a_4\}\} \cap \{x \in E_n : x_i \in \{a_2, a_4\}\} = \{x \in E_n : x_i = a_4\}.$$

Probemos que:

A) $\{x\} \subseteq m_X$.
Probar A) equivale a probar que $x \in m_X$, esto es que $x \in (G_i + X_i) \cap (T(G_i) + X_{n+i})$ para $1 \leq i \leq n$.

Por lo indicado precedentemente podemos tener varios casos:

A1) Sólo tres de los subconjuntos $I_j(x)$, $1 \leq j \leq 4$, son vacíos.
Supongamos que $I_1(x) = I$ entonces por 1) $m_X = \bigcap_{i=1}^{n} (G_i \cap T(G_i)) = \{z \in E_n : z_i = a_1\}$, luego $x \in m_X$.
Supongamos que $I_2(x) = I$ entonces por 2) $m_X = \bigcap_{i=1}^{n} (G_i \cap \complement T(G_i)) = \{z \in E_n : z_i = a_2\}$, luego $x \in m_X$.
Supongamos que $I_3(x) = I$ entonces por 3) $m_X = \bigcap_{i=1}^{n} (\complement G_i \cap T(G_i)) = \{z \in E_n : z_i = a_3\}$, luego $x \in m_X$.
Supongamos que $I_4(x) = I$ entonces por 4) $m_X = \bigcap_{i=1}^{n} (\complement G_i \cap \complement T(G_i)) = \{z \in E_n : z_i = a_4\}$, luego $x \in m_X$.

A2) Sólo dos de los subconjuntos $I_j(x)$, $1 \leq j \leq 4$, son vacíos.
Supongamos que $I_1(x) \neq \emptyset$, $I_2(x) \neq \emptyset$, $I_3(x) = \emptyset$ y $I_4(x) = \emptyset$, luego por 1) y 2) $m_X = \bigcap_{i \in I_1(x)} (G_i \cap T(G_i)) \cap \bigcap_{i \in I_2(x)} (G_i \cap \complement T(G_i)) = \{z \in E_n : z_i = a_1,\ i \in I_1(x)\} \cap \{w \in E_n : w_i = a_2,\ i \in I_2(x)\}$ luego $x \in m_X$.
Los otros casos se demuestran en forma análoga.

A3) Sólo uno de los subconjuntos $I_j(x)$, $1 \leq j \leq 4$, es vacío.
Supongamos que $I_1(x) \neq \emptyset$, $I_2(x) \neq \emptyset$, $I_3(x) \neq \emptyset$ y $I_4(x) = \emptyset$, luego por 1), 2) y 3) $m_X = \bigcap_{i \in I_1(x)} (G_i \cap T(G_i)) \cap \bigcap_{i \in I_2(x)} (G_i \cap \complement T(G_i)) \cap \bigcap_{i \in I_3(x)} (\complement G_i \cap T(G_i)) = \{u \in E_n : u_i = a_1,\ i \in I_1(x)\} \cap \{v \in E_n : v_i = a_2,\ i \in I_2(x)\} \cap \{w \in E_n : w_i = a_3,\ i \in I_3(x)\}$, luego $x \in m_X$.

A4) Ninguno de los subconjuntos $I_j(x)$, $1 \leq j \leq 4$, es vacío.
En este caso

$$m_X = \bigcap_{i \in I_1(x)} (G_i \cap T(G_i)) \cap \bigcap_{i \in I_2(x)} (G_i \cap \complement T(G_i)) \cap$$

$$\bigcap_{i \in I_3(x)} (\complement G_i \cap T(G_i)) \cap \bigcap_{i \in I_4(x)} (\complement G_i \cap \complement T(G_i)) =$$

$$\{u \in E_n : u_i = a_1,\ i \in I_1(x)\} \cap \{v \in E_n : v_i = a_2,\ i \in I_2(x)\} \cap$$
$$\{w \in E_n : w_i = a_3,\ i \in I_3(x)\} \cap \{z \in E_n : z_i = a_4,\ i \in I_4(x)\},$$

luego $x \in m_X$.

B) $m_X \subseteq \{x\}$.

Sea $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in m_X = \bigcap_{i=1}^{n} \left((G_i + X_i) \cap (T(G_i) + X_{n+i})\right)$, luego $y \in (G_i + X_i) \cap (T(G_i) + X_{n+i})$, para todo i, $1 \leq i \leq n$.

Si $x_i = a_1$ entonces $X_i = \emptyset$ y $X_{n+i} = \emptyset$ luego $(G_i + X_i) \cap (T(G_i) + X_{n+i}) = G_i \cap T(G_i) = \{u \in E_n : u_i = a_1\}$ y por lo tanto $y_i = a_1 = x_i$.

Si $x_i = a_2$ entonces $X_i = \emptyset$ y $X_{n+i} = E_n$ luego $(G_i + X_i) \cap (T(G_i) + X_{n+i}) = G_i \cap \complement T(G_i) = \{v \in E_n : v_i = a_2\}$ y por lo tanto $y_i = a_2 = x_i$.

Si $x_i = a_3$ entonces $X_i = E_n$ y $X_{n+i} = \emptyset$ luego $(G_i + X_i) \cap (T(G_i) + X_{n+i}) = \complement G_i \cap T(G_i) = \{w \in E_n : w_i = a_3\}$ y por lo tanto $y_i = a_3 = x_i$.

Si $x_i = a_4$ entonces $X_i = E_n$ y $X_{n+i} = E_n$ luego $(G_i + X_i) \cap (T(G_i) + X_{n+i}) = \complement G_i \cap \complement T(G_i) = \{z \in E_n : z_i = a_4\}$ y por lo tanto $y_i = a_4 = x_i$.

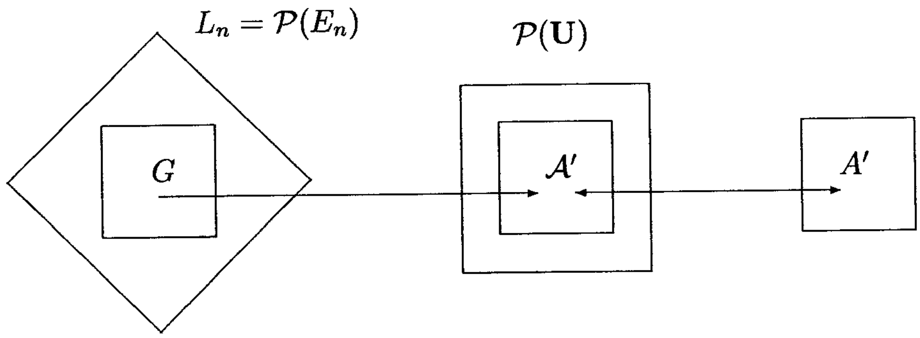
Luego $y = x$.

Vamos a demostrar que G es un conjunto de generadores libres de L_n. Para ello debemos demostrar que dada un álgebra de Boole involutiva (A', T') y una función $f : G \to A'$, f se puede extender a un homomorfismo $h_f : L_n \to A'$.

PRIMER CASO) A' tiene un sólo elemento, $A' = \{0\}$, entonces si $f : G \to A'$, tendremos que $f(G_i) = 0, 1 \leq i \leq n$ para todo $G_i \in G$ y por lo tanto la función $h_f(x) = 0$, para todo $x \in L_n$ es un homomorfismo que extiende a f.

SEGUNDO CASO) A' tiene mas de un elemento. Sea $\mathbf{U}$ el conjunto de todos los ultrafiltros de A', entonces por el Teorema 2.5.1 A' es isomorfa a una subálgebra $\mathcal{A}'$ del álgebra de Boole involutiva $(\mathcal{P}(\mathbf{U}), T')$, donde T' es la involución definida sobre $\mathcal{A}'$.

Si f es una función de G en $\mathcal{A}'$ entonces $f(G_i) = H_i$, $1 \leq i \leq n$ donde $H_i \in \mathcal{A}'$ esto es $H_i \subseteq \mathbf{U}$.



Vamos a definir una función $h_f : L_n \to \mathcal{P}(\mathbf{U})$ de forma tal que h_f sea un homomorfismo que extienda a f. Una tal función debe hacer corresponder a cada subconjunto X de E_n un subconjunto de $\mathbf{U}$, esto es

$$\text{Si } X \subseteq E_n \text{ entonces } h_f(X) \subseteq \mathbf{U}.$$

Para cada $H_i = f(G_i) \subseteq \mathbf{U}$, $1 \leq i \leq n$ consideremos la función $k_{H_i} : \mathbf{U} \to E_1$, tal que para cada $U \in \mathbf{U}$:

$$k_{H_i}(U) = \begin{cases} a_1 \in E_1 & si\ U, T'(U) \in H_i, \\ a_2 \in E_1 & si\ U \in H_i, T'(U) \notin H_i, \\ a_3 \in E_1 & si\ U \notin H_i, T'(U) \in H_i, \\ a_4 \in E_1 & si\ U, T'(U) \notin H_i. \end{cases}$$

Es fácil ver que:

$$k_{H_i}(T'(U)) = T(k_{H_i}(U)) \tag{1}$$

Dado $U \in \mathbf{U}$ consideremos la siguiente función:

$$K(U) = (k_{H_1}(U), k_{H_2}(U), \ldots, k_{H_n}(U)), \tag{2}$$

luego $K : \mathbf{U} \to E_n$. Utilizando (1) se prueba que $K(T'(U)) = T(K(U))$, para todo $U \in \mathbf{U}$ y por lo tanto

$$K(T'(Y)) = T(K(Y)), \text{ para todo } Y \in \mathcal{P}(\mathbf{U}). \tag{3}$$

De (2) resulta que si definimos: $h_f(X) = K^{-1}(X)$, para todo $X \subseteq E_n$ entonces h_f es una función de $L_n = \mathcal{P}(E_n)$ en $\mathcal{P}(\mathbf{U})$, que verifica $h_f(\emptyset) = \emptyset$, $h_f(E_n) = \mathbf{U}$, $h_f(X \cap Y) = h_f(X) \cap h_f(Y)$, $h_f(X \cup Y) = h_f(X) \cup h_f(Y)$.
Probemos que $T'(h_f(X)) = h_f(T(X))$, cualquiera que sea $X \subseteq E_n$, esto es que:

$$T'(K^{-1}(X)) = K^{-1}(T(X)). \tag{4}$$

En efecto si $Y \in T'(K^{-1}(X))$ entonces (i) $Y = T'(Z)$ con $Z \in K^{-1}(X)$ y por lo tanto (ii) $K(Z) \in X$. De (i) resulta $T'(Y) = Z$. Luego teniendo en cuenta (3):

$$T(K(Y)) = K(T'(Y)) \in X \tag{5}$$

y en consecuencia $K(Y) \in T(X)$ luego $Y \in K^{-1}(T(X))$.
Recíprocamente si $Y \in K^{-1}(T(X))$, esto es $K(Y) \in T(X)$ entonces:

$$K(T'(Y)) = T(K(Y)) \in X, \tag{6}$$

luego $Z = T'(Y) \in K^{-1}(X)$ y por lo tanto $Y = T'(Z) \in T'(K^{-1}(X))$.

Por lo tanto h_f es un homomorfismo involutivo de L_n en $\mathcal{P}(\mathbf{U})$. Probemos que h_f es una extensión de f. Esto es que $h_f(G_i) = f(G_i) = H_i$, $1 \leq i \leq n$, lo que equivale a demostrar que $K^{-1}(G_i) = H_i$, $1 \leq i \leq n$.
En efecto:

$$U \in K^{-1}(G_i) \iff K(U) \in G_i \iff (k_{H_1}(U), k_{H_2}(U), \ldots, k_{H_n}(U)) \in G_i \iff$$

$$k_{H_i}(U) \in \{a_1, a_2\} \iff k_{H_i}(U) = a_1 \text{ ó } k_{H_i}(U) = a_2 \iff$$

$$U, T'(U) \in H_i \text{ ó } U \in H_i \text{ y } T'(U) \notin H_i, \iff U \in H_i.$$

Veamos finalmente que el homomorfismo $h_f : L_n \to \mathcal{P}(\mathbf{U})$ toma sus valores en $\mathcal{A}'$, esto es que $h_f(L_n) \subseteq \mathcal{A}'$.
Sea $L' = \{X \in L_n : h_f(X) \in \mathcal{A}'\}$, entonces:

L1) $G \subseteq L'$.
En efecto si $G_i \in G$, entonces $h_f(G_i) = f(G_i) = H_i \in \mathcal{A}'$, luego $G_i \in L'$, $1 \leq i \leq n$.

L2) L' es una subálgebra de L_n.
Como $h_f(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}'$, $h_f(E_n) = \mathbf{U} \in \mathcal{A}'$, entonces $\emptyset, E_n \in \mathcal{A}'$. Si $X, Y \in L'$ entonces $h_f(X), h_f(Y) \in \mathcal{A}'$, y como $\mathcal{A}'$ es una subálgebra de $\mathcal{P}(\mathbf{U})$ tenemos que $h_f(X \cap Y) = h_f(X) \cap h_f(Y) \in \mathcal{A}'$, $h_f(X \cup Y) = h_f(X) \cup h_f(Y) \in \mathcal{A}'$ esto es $X \cap Y, X \cup Y \in L'$. Además como $h_f(X) \in \mathcal{A}'$ y $\mathcal{A}'$ es una subálgebra entonces $h_f(T(X)) = T'((h_f(X)) \in \mathcal{A}'$ luego $T(X) \in L'$.

De L1) y L2) se deduce (iii) $L_n = SI(G) \subseteq L'$. Por lo tanto si $Y \in h_f(L_n)$ entonces (iv) $Y = h_f(X)$ con (v) $X \in L_n$.
De (v) y (iii) resulta $X \in L'$ y por lo tanto $Y = h_f(X) \in \mathcal{A}'$.

Vimos que si A es un álgebra de Boole involutiva finita, con n átomos, $n \in \mathbf{N}$, entonces:

$$A \cong S_2^h \times S_4^k, \text{ con } h \geq 0,\ k \geq 0, \text{ y } h + k = n.$$

Vamos a determinar los números h y k para el caso en que $A = L_n$. Los átomos de L_n son los elementos $\{x\}$ donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_n$. Entonces x es invariante por T si y sólo si $x_i \in \{a_1, a_4\}$ para $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto el número de elementos invariantes es $V'_{n,2} = 2^n$, esto es $h = 2^n$ y en consecuencia:

$$k = \frac{N[\mathcal{A}(L_n)] - h}{2} = \frac{4^n - 2^n}{2}.$$

Luego

$$L_n \cong S_2^{2^n} \times S_4^{\frac{4^n - 2^n}{2}}$$

y

$$N[L_n] = 2^{2^n} \times 4^{\frac{4^n - 2^n}{2}} = 2^{4^n}.$$

Este resultado fué probado de un modo diferente por M. Abad y L. Monteiro, [1].

3 CAPITULO III

3.1 Relación entre las álgebras de Boole Involutivas y las álgebras de Boole monádicas

Gr. Moisil, en su trabajo [12] sobre el cálculo proposicional modal simétrico definió el operador de posibilidad $\exists$. Esto nos conduce a dar en las álgebras de Boole involutivas la siguiente:

Definición 3.1.1 $\exists x = \sim x \rightarrow x = - \sim x \vee x = T(x) \vee x$.

Recordemos:

Definición 3.1.2 *Un sistema $(A, \exists)$ formado por un álgebra de Boole A y una aplicación $\exists$ de A en A se dice un álgebra de Boole monádica si se verifican las siguientes condiciones:*

$\exists 0$) $\exists 0 = 0$,

$\exists 1$) $x \leq \exists x$,

$\exists 2$) $\exists(x \wedge \exists y) = \exists x \wedge \exists y$.

Teorema 3.1.1 *Si A es una álgebra de Boole involutiva y $\exists$ es el operador indicado en la Definición 3.1.1, entonces $(A, \exists)$ es un álgebra de Boole monádica. Además,*

$$(*) \quad \sim x = (x \wedge \exists - x) \vee -\exists x.$$

Dem. Las condiciones $\exists 0$ y $\exists 1$ son de verificación inmediata. Observemos que $T(\exists x) = \exists x$. En efecto, $T(\exists x) = T(T(x) \vee x) = x \vee T(x) = \exists x$. Luego $\exists(x \wedge \exists y) = T(x \wedge \exists y) \vee (x \wedge \exists y) = (T(x) \wedge \exists y) \vee (x \wedge \exists y) = (x \vee T(x)) \wedge \exists y = \exists x \wedge \exists y$.
Es decir, se verifica $\exists 2$, y en consecuencia A es un álgebra de Boole monádica. Verifiquemos la condición $(*)$.
$(x \wedge \exists - x) \vee -\exists x = (x \wedge (T(-x) \vee -x)) \vee -(T(x) \vee x) = (x \wedge -T(x)) \vee (x \wedge -x) \vee -(T(x) \vee x) = (x \wedge -T(x)) \vee (-T(x) \wedge -x) = -T(x) \wedge (x \vee -x) = -T(x) = \sim x$. ■

3.2 Caracterización de las álgebras de Boole Involutivas como álgebras de Boole monádicas especiales

Nos proponemos demostrar que las álgebras de Boole involutivas pueden ser definidas como álgebras de Boole monádicas especiales.

Supondremos conocidas las siguientes reglas de cálculo, válidas en las álgebras de Boole monádicas:

$\exists 3$) $\exists(x \vee y) = \exists x \vee \exists y$,

$\exists 4$) $\exists - \exists x = -\exists x$,

$\exists 5$) $\exists\exists x = \exists x$.

Recordemos que el cuantificador universal $\forall$ se define a partir del cuantificador existencial $\exists$ por la fórmula $\forall x = -\exists - x$, y que tiene todas las propiedades duales de $\exists$.

Lema 3.2.1 *Si en un álgebra de Boole monádica $(A, \exists)$ definimos $\sim x = (x \wedge \exists - x) \vee - \exists x$, entonces se cumplen:*

1) $\sim\sim x = x$,

2) $\exists x = \sim x \rightarrow x$.

Dem.

1) $\sim\sim x = (\sim x \wedge \exists - \sim x) \vee - \exists \sim x =$
$[((x \wedge \exists - x) \vee - \exists x) \wedge \exists - ((x \wedge \exists - x) \vee - \exists x)] \vee - \exists ((x \wedge \exists - x) \vee - \exists x) =$
$[((x \wedge \exists - x) \vee - \exists x) \wedge ((\exists - x \vee - \exists - x) \wedge \exists x)] \vee ((- \exists x \vee - \exists - x) \wedge \exists x) =$
$[((x \wedge \exists - x) \vee - \exists x) \wedge \exists x] \vee (- \exists - x \wedge \exists x) = (x \wedge \exists - x) \vee (\forall x \wedge \exists x) =$
$(x \wedge \exists - x) \vee \forall x = (x \wedge - \forall x) \vee \forall x = x$.

2) $\sim x \rightarrow x = - \sim x \vee x = -((x \wedge \exists - x) \vee - \exists x) \vee x = ((-x \vee - \exists - x) \wedge \exists x) \vee x =$
$((-x \vee \forall x) \wedge \exists x) \vee x = (-x \wedge \exists x) \vee \forall x \vee x = (-x \vee x) \wedge (\exists x \vee x) = 1 \wedge \exists x = \exists x$.

■

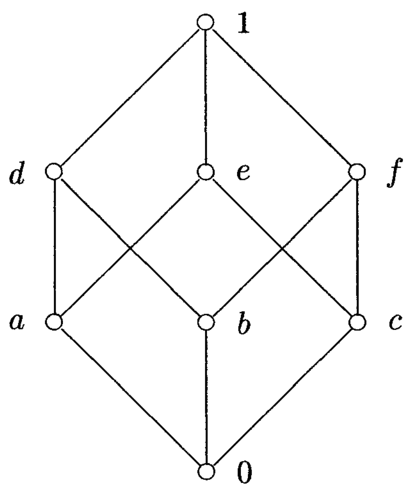
Teorema 3.2.1 *Si en un álgebra de Boole monádica definimos $\sim x = (x \wedge \exists - x) \vee - \exists x$, entonces la condición necesaria y suficiente para que el sistema $(A, \sim)$ sea un álgebra de Boole involutiva es que el cuantificador $\exists$ verifique la condición*

(I) $\quad - \exists (x \wedge y) \vee (x \wedge y \wedge (\exists - x \vee \exists - y)) = - \exists x \vee - \exists y \vee (x \wedge \exists - x) \vee (y \wedge \exists - y).$

Dem. Del lema anterior resulta que la condición necesaria y suficiente para que $(A, \sim)$ sea un álgebra de Boole involutiva es que $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$, o lo que es equivalente, usando la definición del operador negación indicada, que la condición (I) se cumpla. ■

Según estos resultados, vemos que las álgebras de Boole involutivas se pueden definir como álgebras de Boole monádicas en las cuales el operador $\exists$ cumple la condición (I).

Veamos un ejemplo de un álgebra de Boole monádica que no es involutiva, es decir, no verifica (I). Consideremos el álgebra de Boole A indicada en el siguiente diagrama.



Sea $\exists$ el cuantificador caótico definido sobre A, es decir: $\exists 0 = 0$, $\exists x = 1$ para todo $x \neq 0$. La condición (I) no se verifica pues: $-\exists(d \wedge f) \vee (d \wedge f \wedge (\exists - d \vee \exists - f)) = 0 \vee (d \wedge \wedge f \wedge (1 \vee 1)) = b$ y $-\exists d \vee -\exists f) \vee (f \wedge \exists - f) = 0 \vee 0 \vee d \vee f = 1$.

3.3 Identidad entre los filtros monádicos y los sistemas deductivos

P. Halmos demostró (ver por ejemplo [7, 8, 9]) dos importantes teoremas de representación sobre álgebras de Boole monádicas. Se plantea naturalmente el problema de saber qué resultado se tiene en el caso particular de las álgebras de Boole involutivas. Recordemos que:

Definición 3.3.1 *Si $(A, \exists)$ y $(A', \exists)$ son álgebras de Boole monádicas, una aplicación h de A en A' es un homomorfismo si se verifican:*

H1) $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$,

H2) $h(-x) = -h(x)$,

H3) $h(\exists x) = \exists h(x)$.

De estas condiciones se deducen: $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$.

El núcleo de un homomorfismo h, es decir, $D = h^{-1}(1)$, $1 \in A'$, es un filtro monádico, es decir, un filtro que verifica: si $f \in D$, entonces $\forall f \in D$. En el caso particular de las álgebras de Boole involutivas se ve de inmediato que la condición H3 es equivalente a H'3 $h(\sim x) = \sim h(x)$. Para verificarlo, es suficiente usar las fórmulas $\sim x = (x \wedge \exists - x) \vee - \exists x$, y $\exists x = - \sim x \vee x$.

Sabemos que en un álgebra de Boole involutiva A, el núcleo de un homomorfismo h es un sistema deductivo. Por otra parte, si consideramos A como un álgebra de Boole monádica especial, resulta que el núcleo del homomorfismo h es un filtro monádico. En consecuencia, podemos afirmar que:

Teorema 3.3.1 *En un álgebra de Boole involutiva, para que D sea un sistema deductivo es necesario y suficiente que D sea un filtro monádico.*

Corolario 3.3.1 *Para que un sistema deductivo M de un álgebra de Boole involutiva sea maximal es necesario y suficiente que M sea un filtro ultramonádico.*

Recordemos que si en un álgebra de Boole monádica consideramos la implicación débil " $\to$ " definida por $x \to y = \exists - x \vee y$, entonces un filtro monádico se puede caracterizar por las dos condiciones siguientes:

D'1) $1 \in D$.

D'2) Si a, $a \to b \in D$, entonces $b \in D$ (Modus Ponens débil).

El mismo resultado es por lo tanto válido en las álgebra de Boole involutivas. En este caso es: $x \to y = \exists - x \vee y = \sim x \vee - x \vee y$. Luego en las álgebras de Boole involutivas podemos definir un sistema deductivo como una parte del álgebra que verifica las condiciones D'1 y D'2.

Observemos que esta definición es más simple que la indicada en la Definición 2.1.5 indicada en el Capítulo II. Por esta razón sería de interés definir las álgebras de Boole involutivas usando " $\to$ " como uno de los operadores primitivos.

Se pueden verificar fácilmente las siguientes reglas de cálculo:

$x \to x = 1,$

$x \wedge (x \to y) = x \wedge (\sim x \vee y),.$

$(x \to x) \wedge y = y,$

$(x \vee y) \to z = (x \to z) \wedge (y \to z),$

$z \to (x \vee y) = (z \to x) \vee (z \to y),$

$z \to (x \wedge y) = (z \to x) \wedge (z \to y),$

$(x \wedge y) \to z = x \to (y \to z).$

$(x \wedge \sim x) \to y = 1.$

Vamos a recordar algunos resultados que usaremos en el próximo teorema. Si X es un subconjunto de un reticulado distributivo acotado R, notaremos con $F(X)$ el filtro generado por el conjunto X. Si H es un filtro de R y $a \notin H$ notaremos con $F(H, a)$ el filtro generado por el conjunto $H \cup \{a\}$. Sabemos que:

$$F(H, a) = \{t \in R : \text{ existe } h \in H \text{ tal que } a \wedge h \leq t\}.$$

Luego
(i) si $F(H, a) = R$ y en consecuencia $0 \in F(H, a)$ resulta que existe $h \in H$ tal que $a \wedge h = 0$.

Si A es un álgebra de Boole monádica entonces notamos $K(A) = \{x \in A : \exists x = x\}$. Es bien conocido que $K(A) = \exists A$.

(ii) Si U es un ultrafiltro de un álgebra de Boole monádica A entonces $M = F(\exists U)$ es un filtro ultramonádico contenido en U y además es el único filtro ultramonádico contenido en U.

(iii) Si $k \in U$ y $k = \exists k$ entonces $k = \exists k \in \exists U \subseteq F(\exists U) = M$.

(iv) Si M es un filtro ultramonádico y $\forall x \vee y \in M$ entonces $x \in M$ ó $y \in M$.

Del Corolario 3.3.1 y el Teorema 2.3.6, resulta que en un álgebra de Boole involutiva todo filtro ultramonádico está contenido en a lo sumo dos ultrafiltros. Más aún, vamos a demostrar que:

Teorema 3.3.2 *La condición necesaria y suficiente para que en un álgebra de Boole monádica A se verifique (I) es que todo filtro ultramonádico esté contenido en, a lo sumo, dos ultrafiltros.*

Dem. Hemos visto ya que la condición es necesaria.

Supongamos entonces que en el álgebra de Boole monádica $(A, \exists)$ todo ultrafiltro está contenido en a lo sumo dos ultrafiltros distintos y verifiquemos la condición (I), es decir

(I) $-\exists(x \wedge y) \vee (x \wedge y \wedge (\exists - x \vee \exists - y)) = -\exists x \vee -\exists y \vee (x \wedge \exists - x) \vee (y \wedge \exists - y).$

Sean $a = -\exists(x \wedge y) \vee (x \wedge y \wedge (\exists - x \vee \exists - y))$ y $b = -\exists x \vee -\exists y \vee (x \wedge \exists - x) \vee (y \wedge \exists - y)$. Si $x = 1$ entonces $a = -\exists y \vee (y \wedge \exists - y) = b$ y si $y = 1$ entonces $a = -\exists x \vee (x \wedge \exists - x) = b$.

Por lo tanto si $x = 1$ ó $y = 1$ se verifica (I). Supongamos que $x \neq 1$ e $y \neq 1$ y probemos que en este caso $a \neq 0$ y $b \neq 0$. En efecto si $a = 0$ entonces (A) $-\exists(x \wedge y) = 0$ y (B) $x \wedge y \wedge (\exists - x \vee \exists - y) = 0$. (A) equivale a (C) $\exists(x \wedge y) = 1$ y (B) equivale a (D) $x \wedge y \leq -(\exists - x \vee \exists - y) = \forall x \wedge \forall y$ y como (E) $\forall x \wedge \forall y \leq x \wedge y$, de (D) y (E) resulta $\forall x \wedge \forall y = x \wedge y$, esto es $x \wedge y \in K(A)$, luego $\exists(x \wedge y) = x \wedge y$ y teniendo en cuenta (C) resulta que $x \wedge y = 1$, esto es $x = y = 1$, absurdo.
Vamos a demostrar que en el caso en que $x \neq 1$ e $y \neq 1$ entonces los elementos a y b, que son diferentes del primer elemento del álgebra A, son iguales.

Probemos que $a \leq b$.

Supongamos que $a \not\leq b$. Entonces existe un ultrafiltro U_1 tal que

$$a \in U_1, \tag{1}$$

y

$$b \notin U_1. \tag{2}$$

Sea $M = F(\exists U_1)$ el filtro ultramonádico contenido en U_1 y probemos que

$$-\exists(x \wedge y) \in M. \tag{3}$$

Como

$$(x \wedge y) \wedge (\exists - x \vee \exists - y) = (x \wedge y \wedge \exists - x) \vee (x \wedge y \wedge \exists - y) \leq (x \wedge \exists - x) \vee (y \wedge \exists - y) \leq b,$$

entonces por (2), tenemos

$$(x \wedge y) \wedge (\exists - x \vee \exists - y) \notin U_1. \tag{4}$$

Luego de (1) y (4) resulta por ser U_1 un filtro primo que:

$$-\exists(x \wedge y) \in U_1. \tag{5}$$

Como $-\exists(x \wedge y) \in U_1 \cap K(A)$ entonces por (iii) podemos afirmar que $-\exists(x \wedge y) \in M$ y como $-\exists(x \wedge y) = \forall(-x \vee -y) \leq -x \vee -y$, de (3) resulta

$$-x \vee -y \in M. \tag{6}$$

En particular, $-x \vee -y \in U_1$, de donde resulta por ser U_1 un filtro primo que

$$\text{(1A)} \quad -x \in U_1 \qquad \text{ó} \qquad \text{(1B)} \quad -y \in U_1.$$

Consideremos el caso (1A).

Como $-\exists x \leq b$, por (2) podemos afirmar que $-\exists x \notin U_1$, de donde resulta, por ser U_1 un filtro primo que $\exists x \in U_1$, y en consecuencia,

$$\exists x \in M. \tag{7}$$

Análogamente de $-\exists y \leq b$ resulta:

$$\exists y \in M. \tag{8}$$

Probemos ahora que

$$-x \notin M. \tag{9}$$

En efecto, si $-x \in M$, entonces como M es un filtro monádico resulta $-\exists x = \forall - x \in M$, lo que es imposible por (7). Luego de (9) resulta que existe un ultrafiltro U_2 tal que

$$M \subseteq U_2 \tag{10}$$

y

$$-x \notin U_2 \tag{11}$$

De (1A) y (11) resulta $U_1 \neq U_2$. De (6) y (10) se tiene

$$-x \vee -y \in U_2. \tag{12}$$

Entonces, por (11), dado que U_2 es un filtro primo, tenemos

$$-y \in U_2. \tag{13}$$

Como $y \wedge \exists - y \leq b$, de (2), resulta

$$y \wedge \exists - y \notin U_1. \tag{14}$$

Si $y \wedge \exists - y \in U_2$ como $y \wedge \exists - y \leq y$ entonces $y \in U_2$, lo que contradice (13), luego

$$y \wedge \exists - y \notin U_2. \tag{15}$$

Probemos que

$$F(M, y \wedge \exists - y) \neq A. \tag{16}$$

Si suponemos lo contrario, entonces por (i) existe $m \in M$ tal que $m \wedge (y \wedge \exists - y) = 0$. Luego $m \leq -(y \wedge \exists - y) = -y \vee -\exists - y = -y \vee \forall y$. Entonces $-y \vee \forall y \in M$, y en consecuencia como M es un filtro monádico, $\forall(-y \vee \forall y) = \forall - y \vee \forall y = -\exists y \vee \forall y \in M$, de donde resulta por (8), $\exists y \wedge (-\exists y \vee \forall y) = \forall y \in M$. Luego $y \in M$. En particular, $y \in U_2$, lo que contradice (13).

Luego $M \subseteq F(M, y \wedge \exists - y) \subset A$ y por lo tanto podemos afirmar que existe un ultrafiltro U_3 tal que $F(M, y \wedge \exists - y) \subseteq U_3$ luego

$$M \subseteq U_3 \tag{17}$$

y

$$y \wedge \exists - y \in U_3. \tag{18}$$

De (14) y (18) resulta $U_1 \neq U_3$. Análogamente, de (15) y (18), $U_2 \neq U_3$. Es decir hemos probado que el filtro ultramonádico M está contenido en tres ultrafiltros distintos U_1, U_2, U_3, lo que contradice la hipótesis.

Si ocurre (1B) la demostración es análoga. Por tanto acabamos de probar que $a \leq b$.

Supongamos que $a < b$. Entonces existe un ultrafiltro U_4 tal que:

$$b = -\exists x \vee -\exists y \vee (x \wedge \exists - x) \vee (y \wedge \exists - y) \in U_4, \tag{i}$$

y

$$a \notin U_4. \tag{ii}$$

Sea $M = F(\exists U_4)$ el filtro ultramonádico contenido en U_4. Teniendo en cuenta que $\exists(x \wedge y) \leq \exists x \wedge \exists y$ se deduce

$$-\exists x \vee -\exists y \leq -\exists(x \wedge y) \leq a. \tag{iii}$$

Luego, de (ii) y (iii), se tiene

$$-\exists x \vee -\exists y \notin U_4. \tag{iv}$$

Por (i) y (iv) resulta por ser U_4 un filtro primo, que:

$$(x \wedge \exists - x) \vee (y \wedge \exists - y) \in U_4. \tag{v}$$

Y nuevamente teniendo en cuenta que U_4 es un filtro primo:

$$\text{(2A)}\ \ x \wedge \exists - x \in U_4 \qquad \text{ó} \qquad \text{(2B)}\ y \wedge \exists - y \in U_4.$$

Consideremos el caso (2A).

Como $x \wedge \exists - x \leq x$ por (2A) se deduce que

$$x \in U_4. \tag{vi}$$

Como $x \wedge \exists - x \leq \exists - x$ por (2A) se deduce que $\exists - x \in U_4$, luego por (iii)

$$\exists - x \in M. \tag{vii}$$

Probemos que

$$x \wedge \exists - x \notin M. \tag{viii}$$

En efecto, si $x \wedge \exists - x \in M$, entonces como M es un filtro monádico $\forall(x \wedge \exists - x) \in M$. Pero $\forall(x \wedge \exists - x) = \forall x \wedge \exists - x = \forall x \wedge -\forall x = 0$ y entonces $0 \in M$, absurdo. Por (viii) podemos afirmar que existe un ultrafiltro U_5 tal que

$$M \subseteq U_5 \tag{ix}$$

y

$$x \wedge \exists - x \notin U_5. \tag{x}$$

De (2A) y (x) resulta que $U_4 \neq U_5$. Por (vii) y (ix) resulta que $\exists - x \in U_5$ luego si $x \in U_5$, entonces tendríamos que $x \wedge \exists - x \in U_5$, lo que contradice (x), luego

$$x \notin U_5 \tag{xi}$$

Si $\forall x \in M$ entonces de (ix) resulta que $\forall x \in U_5$ y en consecuencia como $\forall x \leq x$ resulta que $x \in U_5$ lo que contradice (11), por lo tanto

$$\forall x \notin M. \tag{xii}$$

Si $x \wedge y \wedge \exists - x \in M$ entonces por (ix) $x \wedge y \wedge \exists - x \in U_5$, luego como $x \wedge y \wedge \exists - x \leq x \wedge \exists - x$ tenemos que $x \wedge \exists - x \in U_5$ lo que contradice (x). Luego $x \wedge y \wedge \exists - x \notin M$.
Probemos ahora que:

$$F(M, x \wedge y \wedge \exists - x) \neq A. \tag{xiii}$$

Caso contrario por (i) existe $m \in M$ tal que $m \wedge (x \wedge y \wedge \exists - x) = 0$, esto es $m \leq -x \vee -y \vee \forall x$, luego $-x \vee -y \vee \forall x \in M$ y como M es un filtro monádico tenemos que $\forall(-x \vee -y \vee \forall x) \in M$, esto es

$$\forall(-x \vee -y) \vee \forall x \in M. \tag{xiv}$$

De (xiv) y (xii) resulta por (iv) que

$$-\exists(x \wedge y) = \forall(-x \vee -y) \in M, \tag{xv}$$

luego por (iii) tenemos que $a \in M$, y como $M \subseteq U_4$ tenemos que $a \in U_4$ lo que contradice (ii). Por lo tanto se verifica (xiii). Luego $M \subseteq F(M, x \wedge y \wedge \exists - x) \subset A$ y por lo tanto podemos afirmar que existe un ultrafiltro U_6 tal que $F(M, x \wedge y \wedge \exists - x) \subseteq U_6$, luego

$$M \subseteq U_6 \tag{xvi}$$

y

$$x \wedge y \wedge \exists - x \in U_6. \tag{xvii}$$

Claramente $x \in U_6$, en consecuencia, teniendo en cuenta (xi), resulta que $U_5 \neq U_6$. Como $x \wedge y \wedge \exists - x \leq a$, por (ii) resulta que $x \wedge y \wedge \exists - x \notin U_4$, es decir, $U_4 \neq U_6$. En consecuencia el filtro ultramonádico está contenido en tres ultrafiltros distintos, lo que contradice la hipótesis.

Si ocurre (2B) la demostración es análoga. Luego podemos afirmar que $a = b$. ∎

En consecuencia, de este resultado se deduce que el teorema de Halmos de representación de álgebras de Boole monádicas por álgebras de equivalencia, en el caso particular de las álgebras de Boole involutivas, se enuncia:

Teorema 3.3.3 *Toda álgebra de Boole involutiva es isomorfa a un álgebra de equivalencia tal que sus clases tienen a lo sumo dos elementos.*

4 CAPITULO IV

4.1 Representación funcional de un álgebra de Boole monádica

En primer lugar vamos a recordar algunas nociones y resultados referentes a la teoría de las álgebras de Boole monádicas. Para ver las demostraciones de los resultados, ver por ejemplo [21].

Teorema 4.1.1 *Toda álgebra de Boole monádica es isomorfa a un álgebra de Boole funcional monádica.* (P. Halmos [7])

Este teorema fué también demostrado, pero de un modo diferente, por A. Monteiro [18], [21]. Recordemos la definición de álgebra de Boole funcional monádica. Sea B un álgebra de Boole, E un conjunto no vacío y $A = B^E$ el conjunto de todas las funciones definidas sobre E y que toman sus valores en B. Algebrizando las funciones punto por punto, sabemos que A es un álgebra de Boole. El primer elemento de A es la función $\mathbf{0}$ definida por $\mathbf{0}(x) = 0$ para todo $x \in E$, y el último elemento de A es la función $\mathbf{1}$ definida por $\mathbf{1}(x) = 1$ para todo $x \in E$.

Si $R(f) = \{f(x) : x \in E\}$, entonces en cualquiera de los siguientes casos: (1) B completa, (2) E finito, (3) $R(f)$ finito, podemos afirmar que existe el supremo (ínfimo) del conjunto $R(f)$, que notamos $\exists f = \bigvee\limits_{x \in E} f(x)$, ($\forall f = \bigwedge\limits_{x \in E} f(x)$).
Si $f \in A$ y existe el supremo (ínfimo) del conjunto $R(f)$ entonces podemos considerar las siguientes funciones de E en B:

$$(\exists f)(x) = \exists f \ \text{ y } \ (\forall f)(x) = \forall f, \ \text{ para todo } x \in E.$$

De acuerdo con esta definición las funciones $\exists$ y $\forall$ son ambas funciones constantes.
Se denomina álgebra de Boole funcional monádica a toda subálgebra booleana S de $A = B^E$ que verifica:

M1) Para toda $f \in S$, existen los elementos $\exists f$ y $\forall f$,

M2) Si $f \in S$, entonces $\exists f, \forall f \in S$.

Se prueba que $(S, \exists)$ es un álgebra de Boole monádica.

Definición 4.1.1 *Un álgebra funcional monádica $\mathcal{F} \subseteq B^E$ se dice rica si dada $f \in \mathcal{F}$, existe un punto x_0 de su campo de definición E, tal que $f(x_0) = \exists f = \bigvee\limits_{x \in E} f(x)$.*

Esto es las álgebras funcionales monádicas ricas son aquellas en que cada elemento del álgebra alcanza su extremo superior, por lo menos en un punto de su campo de definición.

Si B es un álgebra de Boole completa con más de dos elementos y E un conjunto con por lo menos dos puntos, entonces el álgebra funcional monádica $(\mathcal{F} = B^E, \exists)$ no es rica.[21].

Teorema 4.1.2 *Toda álgebra de Boole monádica es isomorfa a un álgebra de Boole funcional monádica rica.* (P. Halmos [9])

Es evidente que el Teorema 4.1.1 es una consecuencia del Teorema 4.1.2. En particular si un álgebra funcional monádica no es rica ella es representable isomórficamente por un álgebra funcional monádica rica.

Si A es un álgebra de Boole monádica, diremos que $K(A) = \{x \in A : \exists x = x\}$, es el conjunto de las constantes de A.

Todo filtro de un álgebra de Boole monádica contiene por lo menos una constante a saber el elemento 1, esta circunstancia sugiere considerar aquellos filtros que son "*tan libres*" de constantes cuanto sea posible.

Un filtro J de un álgebra de Boole monádica A se dice *libre* si contiene solamente la constante 1, esto es si $J \cap K(A) = \{1\}$. Luego todo filtro libre de un álgebra de Boole monádica, con mas de un elemento, es propio visto que $\exists 0 = 0$. Para que un filtro J de A sea libre es necesario y suficiente que si $j \in J$ entonces $\exists j = 1$.

Teorema 4.1.3 *La familia de los filtros libres ordenados por la relación de inclusión es inductiva superiormente.*

Corolario 4.1.1 *Todo filtro libre está contenido en un filtro libre máximo.*

A todo filtro libre máximo daremos el nombre de *filtro ultralibre.*

Dada un álgebra de Boole monádica $(A, \exists)$, supongamos que existe un epimomorfismo booleano $j : A \to K$ que deja invariante los elementos de $K = K(A)$. A tal epimorfismo se denomina un *carácter* del álgebra A. Si $J = Nuc\ (j)$, entonces J es un filtro ultralibre.

Lema 4.1.1 *Si J es un filtro libre entonces en cada clase de equivalencia (mód. J) existe a lo sumo una constante.*

Lema 4.1.2 *Si un álgebra de Boole monádica A es finita, con más de un elemento, y J es un filtro ultralibre de A entonces en cada clase de equivalencia (mód. J) existe una constante.*

Se dice que un filtro ultralibre J de un álgebra de Boole monádica A es *un individuo* de A si cada clase de equivalencia (mód. J) contiene una constante y sólo una.

De los Lemas 4.1.1 y 4.1.2 resulta el siguiente:

Corolario 4.1.2 *Si A es un álgebra de Boole monádica finita, con más de un elemento, entonces todo filtro ultralibre de A es un individuo.*

Lema 4.1.3 *Si A es un álgebra de Boole monádica y J un individuo de A, entonces existe un carácter j tal que $J = Nuc\ (j)$, y por lo tanto las álgebras de Boole A/J y K son isomorfas.*

De acuerdo a esta definición el Lema 4.1.3 puede enunciarse del siguiente modo: *Todo individuo es núcleo de un carácter.*

Del Corolario 4.1.2 y el Lema 4.1.3 resulta el siguiente:

Teorema 4.1.4 *Si A es un álgebra de Boole monádica finita, con más de un elemento, y J un filtro ultralibre entonces existe un carácter ψ que tiene por núcleo a J.*

Teorema 4.1.5 *Si ψ es un carácter de un álgebra de Boole monádica A, su núcleo es un individuo.*

Para obtener una representación de un álgebra de Boole monádica A como un álgebra funcional somos llevados a considerar la familia $\mathcal{I}$ de todos los individuos de A, la dificultad principal consiste en que en general un álgebra de Boole monádica no contiene individuos, esto no ocurre en las álgebras finitas, con mas de un elemento, dado que por el Corolario 4.1.2 todo filtro ultralibre es un individuo.

Si $\mathcal{I}$ es una familia, no es vacía, de individuos, para cada individuo $J \in \mathcal{I}$ representaremos por j el carácter correspondiente, esto es $j : A \longrightarrow K = K(A)$ es un epimorfismo booleano que deja fijos los elementos de K.
Vamos a representar cada elemento $f \in A$ por una función $F : \mathcal{I} \longrightarrow K$ la cual será definida de la siguiente forma:

$$(*) \quad F(J) = j(f) \in K, \quad \text{cualquiera que sea } J \in \mathcal{I}.$$

Sea $\varphi : A \longrightarrow K^{\mathcal{I}}$ definida por:

$$\varphi(f) = F$$

donde F es la función definida en $(*)$, entonces φ es un homomorfismo booleano de A en $K^{\mathcal{I}}$. Sea $\varphi(A) = A' \subseteq K^{\mathcal{I}}$, como A' es una imagen homomórfica del álgebra de Boole A, entonces A' es un álgebra de Boole que es una subálgebra booleana de $K^{\mathcal{I}}$, obtenemos así una representación homomórfica del álgebra de Boole A por un álgebra de funciones.

Lema 4.1.4 *Si $\mathcal{I}$ es una familia, no es vacía, de individuos cuya intersección es igual a $\{1\}$, entonces la transformación φ definida anteriormente es biunívoca.*

Recordemos que si A es un álgebra de Boole, una subálgebra booleana S de A se dice completa en A si existe el ínfimo de cualquier subconjunto de S y ese ínfimo pertenece a S.

Lema 4.1.5 *Si A es un álgebra de Boole monádica tal que el álgebra de Boole $K(A)$ es completa en A, entonces todo filtro ultralibre es un individuo.*

Corolario 4.1.3 *Si en un álgebra de Boole monádica A el conjunto $K(A)$ es un álgebra de Boole completa en A entonces la intersección de todos los individuos es igual al conjunto $\{1\}$.*

Teorema 4.1.6 *Si un álgebra de Boole monádica A es tal que el conjunto $K(A)$ es un álgebra de Boole completa en A, entonces A es isomorfa a un álgebra de Boole funcional monádica rica.*

4.2 Representación funcional de un álgebra de Boole involutiva

Vimos en el Párrafo **3.1** que si (A,T) es un álgebra de Boole involutiva y definimos $\exists x = x \ \vee T(x)$ entonces $(A,\exists)$ es un álgebra de Boole monádica. El cuantificador universal $\forall$ se define por $\forall x = -\exists - x$, luego en este caso $\forall x = -\exists - x = -(-x \ \vee T(-x)) = x \ \wedge -T(-x) = x \ \wedge T(x)$.

Lema 4.2.1 *Si A es un álgebra de Boole involutiva entonces $K(A) = I(A)$.*

Dem. Si $k \in K(A)$, esto es $\exists k = k$ entonces $k \ \vee T(k) = k$ luego $T(k \ \vee T(k)) = T(k)$ y por lo tanto $k = \exists k = T(k) \ \vee k = T(k)$, esto es $k \in I(A)$. Recíprocamente supongamos que $i \in I(A)$ esto es $T(i) = i$ entonces $\exists i = i \ \vee T(i) = i \ \vee i = i$, esto es $i \in K(A)$. ■

Lema 4.2.2 *Si F es un filtro libre de un álgebra de Boole involutiva (A,T) entonces*

a) $F \cap T(F) = \{1\}$,

b) $T(F)$ es un filtro libre,

c) Si F es ultralibre entonces $T(F)$ es ultralibre.

Dem.

a) Como F un filtro libre, esto es $F \cap K(A) = \{1\}$. Si $x \in F \cap T(F)$ esto es (1) $x \in F$ y (2) $x \in T(F)$ luego existe (3) $f \in F$ tal que (4) $x = T(f)$. De (1) y (4) resulta que (5) $T(f) \in F$. De (3) y (5) $\forall f = f \ \wedge T(f) \in F$, luego como F es libre $\forall f = 1$ y como $\forall f \leq f$ tenemos que $f = 1$, luego $x = T(f) = 1$.

b) Sea F un filtro libre. Sabemos que $T(F)$ es un filtro. Sea $x \in T(F)$ luego existe (1) $f \in F$ tal que (2) $x = T(f)$. Luego $\exists x = x \ \vee T(x) = T(f) \ \vee f = \exists f$, y como F es libre $\exists f = 1$ y por lo tanto $\exists x = \exists f = 1$.

c) Si F es ultralibre entonces por b) $T(F)$ es libre. Sea U un filtro ultralibre tal que $T(F) \subseteq U$ luego $F = T(T(F)) \subseteq T(U)$ y como F es ultralibre entonces $F = T(U)$ y por lo tanto $T(F) = U$.

■

Sea B un álgebra de Boole y E un conjunto no vacío sobre el cuál está definida una involución T. Sabemos que el conjunto B^E de todas las funciones definidas sobre E y que toman sus valores en B es un álgebra de Boole. Si $f \in B^E$ definamos $(\mathbf{T}(f))(e) = f(T(e))$, para todo $e \in E$. Entonces $(\mathbf{T}(\mathbf{T}(f)))(e) = (\mathbf{T}(f))(T(e)) = f(T(T(e))) = f(e)$ esto es $\mathbf{T}(\mathbf{T}(f)) = f$. Es fácil ver que $\mathbf{T}$ es un homomorfismo booleano, y por lo tanto $(B^E, \mathbf{T})$ es un álgebra de Boole involutiva .

Sea (A,T) un álgebra de Boole involutiva, que verifica C1) A tiene más de un elemento, C2) $T \neq Id_A$ y C3) la subálgebra booleana $K(A) = I(A)$ es completa en A. Luego por el Corolario 4.1.2 y el Lema 4.1.3 si J es un filtro ultralibre de A entonces $A/J \cong K(A) = I(A)$.

Lema 4.2.3 *Si (A,T) es un álgebra de Boole involutiva, que verifica* C1, C2 y C3, *entonces cualquiera que sea el filtro ultralibre J de A se tiene que $T(J) \neq J$.*

Dem. En efecto si $T(J) = J$ entonces como por el Lema 4.2.2: $T(J) \cap J = \{1\}$, luego $J = \{1\}$ y por lo tanto $A/J \cong A$ y como $A/J \cong K(A) = I(A)$ entonces $A \cong I(A)$ y en consecuencia $T(x) = x$ para todo $x \in A$, lo que contradice C2. ■

Sea (A, T) un álgebra de Boole involutiva, que verifica C1, C2 y C3, E el conjunto de los filtros ultralibres de A, luego $T : E \to E$ es una involución de E. Sea $K = K(A) = I(A)$. Por lo indicado precedentemente $(K^E, \mathbf{T})$ es un álgebra de Boole involutiva . Dado $J \in E$ sea $j : A \to K$ el epimorfismo correspondiente. Como $T(J) \in E$ a $T(J)$ le corresponde un epimorfismo $j^* : A \to K(A)$.
Veamos que $j^*(T(a)) = j(a)$. En efecto si $k \in K$ es tal que $k \equiv a$ (mód. J), esto es existe $n \in J$ tal que $k \wedge n = a \wedge n$. Luego como $k \in K$ esto es $T(k) = k$ entonces $k \wedge T(n) = T(k) \wedge T(n) = T(k \wedge n) = T(a \wedge n) = T(a) \wedge T(n)$, y por lo tanto como $T(n) \in T(J)$ tenemos que $k \equiv T(a)$ (mód. $T(J)$) luego $j^*(T(a)) = k = j(a)$.

Veamos que $\varphi(A)$ es una subálgebra involutiva del álgebra de Boole involutiva K^E, esto es que si $F \in \varphi(A)$ entonces $\mathbf{T}(F) \in \varphi(A)$, o sea que si $F = \varphi(f)$ con $f \in A$ entonces $\mathbf{T}(F) = \varphi(g)$ con $g \in A$.
Sean $g = T(f)$ y $G = \varphi(g)$, luego

$$G(J) = j(g) = j(T(f)) = j^*(T(T(f))) = j^*(f) = F(T(J)) = (\mathbf{T}(F))(J).$$

Luego $\mathbf{T}(F) = G = \varphi(g) = \varphi(T(f))$ y por lo tanto $(\varphi(A), \mathbf{T})$ es una imagen homomórfica del álgebra de Boole involutiva (A, T). Por el Lema 4.2.2 sabemos que $J \cap T(J) = \{1\}$, cualquiera que sea $J \in E$, luego $\bigcap_{J \in E} J = \{1\}$ y en consecuencia tenemos que:

Lema 4.2.4 *φ establece un isomorfismo entre las álgebras de Boole involutivas (A, T) y $(\varphi(A), \mathbf{T})$.*

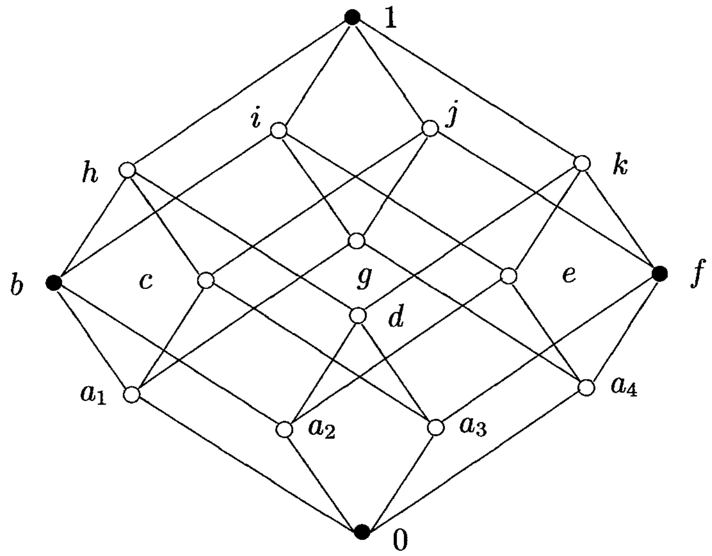
Además por el Teorema 4.1.6, sabemos que el álgebra de Boole funcional monádica K^E es isomorfa a un álgebra de Boole funcional monádica rica.
Además como K es completa, por el Lema 4.1.5 y el Corolario 4.1.3 podemos afirmar que la transformación $\varphi : A \to K^E$ del álgebra de Boole monádica $(A, \exists)$ en el álgebra de Boole monádica K^E es un homomorfismo monádico inyectivo. Por lo tanto las álgebras de Boole monádicas $(A, \exists)$ y $(\varphi(A), \exists)$ son isomorfas.

Lema 4.2.5 *Sea (A, T) un álgebra de Boole involutiva, que verifica* C1, C2 y C3. *Si J_1 es un filtro ultralibre de A y $E' = \{J_1, J_2 = T(J_1)\}$ entonces A es isomorfa a una subálgebra de Boole involutiva de $\mathcal{F} = K^{E'}$.*

Dem. Por el Lema 4.2.3 $J_1 \neq T(J_1)$ y por el Lema 4.2.2, 1) $J_1 \cap J_2 = J_1 \cap T(J_1) = \{1\}$ entonces de modo análogo al indicado en el Lema 4.2.4 se prueba que las álgebras de Boole involutivas (A, T) y $(\varphi(A), \mathbf{T})$ son isomorfas. ■

Acabamos así de probar que toda álgebra de Boole involutiva (A, T) que verifica C1, C2 y C3, se puede representar como un álgebra de Boole involutiva de funciones definidas en un conjunto con dos elementos y que toma sus valores en $K = K(A)$. Pero en general esta representación no es rica como lo muestra el siguiente ejemplo:

Consideremos el álgebra de Boole involutiva cuyo diagrama se indica a continuación y cuyos operadores T y $\exists$ están indicados en la próxima tabla.



x	0	a_1	a_2	a_3	a_4	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	1
$T(x)$	0	a_2	a_1	a_4	a_3	b	e	g	c	f	d	i	h	k	j	1
$\exists x = x \vee T(x)$	0	b	b	f	f	b	1	1	1	f	1	1	1	1	1	1

Luego $K(A) = \{0, b, f, 1\} = I(A)$. Entonces los filtros libres son

$$F(c),\ F(d),\ F(e),\ F(g),\ F(h),\ F(i),\ F(j),\ F(k) \text{ y } F(1)$$

y los ultralibres son

$$J_1 = F(c),\ J_2 = F(d),\ J_3 = F(e) \text{ y } J_4 = F(g),$$

y $T(J_1) = J_3$ y $T(J_2) = J_4$.
Recordemos que si A es un álgebra de Boole y $F = F(u)$ un filtro y notamos con $C_F(x) = \{y \in A : y \equiv x \text{ (mód. } F)\}$ entonces si $x \in (u]$ se tiene que (ver [23]):

$$C_F(x) = [x, x \vee -u] = \{y \in A : x \leq y \leq x \vee -u\}.$$

Por lo indicado precedentemente es claro que para cada J_i, $1 \leq i \leq 4$ el epimorfismo booleano $j_i : A \to K(A) \cong A/J_i$ es el indicado en la tabla siguiente:

x	0	a_1	a_2	a_3	a_4	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	1
$j_1(x)$	0	b	0	f	0	b	1	f	0	f	b	1	b	1	f	1
$j_2(x)$	0	0	b	f	0	b	f	1	b	f	0	1	b	f	1	1
$j_3(x)$	0	0	b	0	f	b	0	b	1	f	f	b	1	f	1	1
$j_4(x)$	0	b	0	0	f	b	b	0	f	f	1	b	1	1	f	1

Luego:

F	$F(J_1)$	$F(J_2)$	$F(J_3)$	$F(J_4)$	$\exists F$	$\exists F$
$\varphi(0) = \mathbf{0}$	0	0	0	0	0	$\mathbf{0}$
$\varphi(a_1) = \mathbf{a}_1$	b	0	0	b	b	$\mathbf{b}$
$\varphi(a_2) = \mathbf{a}_2$	0	b	b	0	b	$\mathbf{b}$
$\varphi(a_3) = \mathbf{a}_3$	f	f	0	0	f	$\mathbf{f}$
$\varphi(a_4) = \mathbf{a}_4$	0	0	f	f	f	$\mathbf{f}$
$\varphi(b) = \mathbf{b}$	b	b	b	b	b	$\mathbf{b}$
$\varphi(c) = \mathbf{c}$	1	f	0	b	1	$\mathbf{1}$
$\varphi(d) = \mathbf{d}$	f	1	b	0	1	$\mathbf{1}$
$\varphi(e) = \mathbf{e}$	0	b	1	f	1	$\mathbf{1}$
$\varphi(f) = \mathbf{f}$	f	f	f	f	f	$\mathbf{f}$
$\varphi(g) = \mathbf{g}$	b	0	f	1	1	$\mathbf{1}$
$\varphi(h) = \mathbf{h}$	1	1	b	b	1	$\mathbf{1}$
$\varphi(i) = \mathbf{i}$	b	b	1	1	1	$\mathbf{1}$
$\varphi(j) = \mathbf{j}$	1	f	f	1	1	$\mathbf{1}$
$\varphi(k) = \mathbf{k}$	f	1	1	f	1	$\mathbf{1}$
$\varphi(1) = \mathbf{1}$	1	1	1	1	1	$\mathbf{1}$

Luego $E = \{J_1, J_2, J_3, J_4\}$ y A es isomorfa al álgebra $\varphi(A)$, que es rica.

Si consideramos cualquiera de los siguientes conjuntos de filtros ultralibres

1) $E_1 = \{J_1, J_3 = T(J_1)\}$,

2) $E_2 = \{J_2, J_4 = T(J_2)\}$,

obtenemos una representación isomorfa de A, pero ninguna de estas álgebras es rica pués:

1) $(\boldsymbol{\exists}\mathbf{d})(J) = \bigvee_{J \in E_1} \mathbf{d}(J) = \mathbf{d}(J_1) \vee \mathbf{d}(J_3) = f \vee b = 1 = \mathbf{1}(J)$, luego $\boldsymbol{\exists}\mathbf{d} = \mathbf{1}$, $\mathbf{d}(J_1) = f \neq 1$ y $\mathbf{d}(J_3) = b \neq 1$.

2) $(\boldsymbol{\exists}\mathbf{e})(J) = \bigvee_{J \in E_2} \mathbf{e}(J) = \mathbf{e}(J_2) \vee \mathbf{e}(J_4) = b \vee f = 1 = \mathbf{1}(J)$, luego $\boldsymbol{\exists}\mathbf{e} = \mathbf{1}$, $\mathbf{e}(J_2) = b \neq 1$ y $\mathbf{e}(J_4) = f \neq 1$.

Referencias

[1] Abad M. and Monteiro L., *Free symmetric Boolean algebras*, Revista de la U.M.A. 27 (1976), 207- 215.

[2] Abad M. and Monteiro L., *Number of epimorphisms between finite symmetric Boolean algebras*, Reports on Mathematical Logic, 10 (1978), 3-7.

[3] Abad M. and Monteiro L., *Monadic symmetric Boolean algebras*, Notas de Lógica Matemática 37 (1989), 30 pág. INMABB-CONICET-UNS.

[4] Bialynicki-Birula A., *Remarks on quasi-boolean algebras* , Bull. Acad. Pol. Sc., classe III, 5 (1957), 615-619.

[5] Bialynicki-Birula A. and Rasiowa H., *On the representation of quasi-boolean algebras*, Bull. Acad. Pol. Sc., classe III, 5 (1957), 259-261.

[6] Jónsson B., *A Boolean algebra without proper automorphism*, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 766-770.

[7] Halmos Paul R., *Algebraic logic I. Monadic Boolean algebras*, Compositio Mathematica, 12 (1955), 217-249.

[8] Halmos Paul R., *The representation of monadic Boolean algebras*, Duke Mathematical Journal, 26 (1959), 447-454.

[9] Halmos P.R., *Algebraic Logic*, Chelsea Pub. Co. New York (1962).

[10] Katetov M., *Remarks on Boolean algebras*, Colleg. Math., 2 (1951), 229-235.

[11] Moisil Gr. C. *Recherches sur l'algèbre de la logique*, Annales Scientifiques de l'Université de Jassy 22 (1935), 1-118.

[12] Moisil Gr. C. *Algebra schemelor en elementi ventil (Algèbre des schèmas a soupape)*, Revista Unibversitatii "C. I. Pahron" si a Politechnicci Bucaresti Seria St. Nat. 4-5 (1954), 9-42. Una traducción de una parte de este artículo figura en *Essais sur les logiques non-chrysipiennes* 820 pags. Bucarest, 1972.

[13] Monteiro A., *Sobre el teorema de Halmos de representación de álgebras monádicas*, Rev. U.M.A. 17 (1955), 149-160.

[14] Monteiro A., *Algebras monádicas*, Atas del Segundo Colóquio Brasileiro de Ciências,(1960), 33-52.

[15] Monteiro A., Notas del curso *Algebras de De Morgan*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1966.

[16] Monteiro A., *Algebras de Boole involutivas*, Revista de la Unión Matemática Argentina, 32 (1966), 39.

[17] Monteiro A., Notas del curso *Algebras de Boole Involutivas*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1969.

[18] Monteiro A., *Algèbres Monadiques*, Notas de Lógica Matemática 7, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, (1974).

[19] Monteiro A., *Algèbres de Boole cycliques*, Revue roumaine de Math. Pures et Appliquées, 23 (1978), 71-76.

[20] Monteiro A., *Sur les algèbres de Heyting symétriques*, Portugaliae Mathematica, 38, Fasc 1-4 (1980), 1-237.

[21] Monteiro A. y Monteiro L., *Algebras de Boole Monádicas,* Informes Técnicos Internos 69, INMABB-CONICET-UNS (1999).

[22] Monteiro A. y Monteiro L., *Algebras de De Morgan,* Informes Técnicos Internos 72, INMABB-CONICET-UNS (2000), 77 páginas.

[23] Monteiro L., *Algebras de Boole,* Informes Técnicos Internos 66, INMABB-CONICET-UNS (1998), versión corregida (2000), 201 páginas.

[24] Rieger L., *Some remarks on authomorphisms of Boolean algebras*, Fund. Math., 38 (1951), 209-216.