INFORME TECNICO INTERNO

N°. 75

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina

INFORME TÉCNICO INTERNO

N° 75

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 2002 -

INFORME TÉCNICO INTERNO N° 75

Q–reticulado libre sobre una cadena con n elementos

Luiz Monteiro, Manuel Abad y Marta Zander

Universidad Nacional del Sur

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 2002

Q-reticulado libre sobre una cadena con n elementos

Luiz Monteiro, Manuel Abad y Marta Zander
INMABB-CONICET y Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur

luizmont@criba.edu.ar - imabad@criba.edu.ar - mzander@criba.edu.ar

Resumen

La noción de Q-reticulado fué introducida por R. Cignoli [2] quien posteriormente indicó una construcción del Q-reticulado libre sobre un conjunto arbitrario [3]. En [1], M. Abad y J. Díaz Varela indicaron una construcción del Q-reticulado distributivo libre, $FQ(I)$, sobre un conjunto ordenado I. En particular, probaron que $FQ(\mathbf{n}) \cong \mathbf{2}^{[\mathbf{2}^{[\mathbf{2}\times\mathbf{n}]}]}$, donde $\mathbf{n}$ es una cadena con n elementos. En estas notas indicamos una construcción de $FQ(\mathbf{n})$, diferente de las indicadas en [3] y [1], determinamos su número de elementos y construimos el conjunto ordenado de sus elementos primos. Probamos además que $FQ(\mathbf{n})$ es un álgebra de Kleene.

1 Nociones preliminares

En estas notas siempre consideraremos reticulados distributivos acotados no triviales. Un elemento p de un reticulado distributivo acotado R se dice primo si $p \neq 0$ y si $p = x \vee y$ donde $x, y \in R$ entonces $p = x$ ó $p = y$. Notaremos con $\Pi(R)$ el conjunto de todos los elementos primos de R. Por un conocido resultado de G. Birkhoff sabemos que todo reticulado distributivo R finito está univocamente determinado por el conjunto $\Pi(R)$.
En los cursos dictados en la Universidad Nacional del Sur, Antonio Monteiro (ver por ejemplo [6], [11]) indicó el siguiente resultado:

Lema 1.1 *Si R es un reticulado distributivo finito y $p \in R \setminus \{0\}$, entonces $p \in \Pi(R)$ si y sólo si el conjunto $I(p) = \{x \in R : x < p\}$ tiene último elemento.*

Si R es un reticulado distributivo finito y $x \in R \setminus \{0\}$ notaremos $\Pi_x = \{p \in \Pi(R) : p \leq x\}$. Es bien conocido que:

Lema 1.2 *Si $x \in R \setminus \{0\}$ entonces $x = \bigvee\{p : p \in \Pi_x\}$.*

Si $n \in \mathbb{N}$ notaremos $\mathbf{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$ con su orden natural. Si X es un conjunto ordenado notaremos con X^* el conjunto ordenado dual y con $\mathbf{2}^{[X]}$ al conjunto de todas las funciones isótonas de X en $\mathbf{2}$, este conjunto es un reticulado distributivo acotado (ver por ejemplo [5]). Un subconjunto Y de X se denomina una sección inferior de X si verifica "si $b \in Y$ y $a \leq b$ entonces $a \in Y$". Si $x \in X$ entonces es claro que el subconjunto $(x] = \{y \in X : y \leq x\}$ es una sección inferior que se denomina sección principal.
Es bien conocido que si X es un conjunto ordenado finito entonces el reticulado $\mathbf{2}^{[X]}$ es isomorfo al reticulado distributivo $\mathcal{S}(X)$ de todas las secciones inferiores del conjunto X y que

$$\Pi(\mathcal{S}(X)) = \{(x] : x \in X\}.$$

Lema 1.3 *Para todo conjunto ordenado finito X, $\Pi\left(\mathbf{2}^{[X]}\right) \cong X^*$ y recíprocamente cualquiera que sea el reticulado distributivo finito R, $R \cong \mathbf{2}^{[(\Pi(R))^*]}$. Además si el conjunto ordenado finito verifica $X \cong X^*$ entonces $\mathbf{2}^{[X]}$ es un reticulado distributivo acotado autodual tal que $\Pi\left(\left(\mathbf{2}^{[X]}\right)\right) \cong X$.*

Si X es un conjunto finito representemos con $N[X]$ su número de elementos. Si R es un reticulado distributivo acotado y $X \subseteq R$ notaremos con $SL(X)$ el $(0,1)$-subreticulado de R generado por X. Representemos con $FD(G)$ el reticulado distributivo acotado con un conjunto G de generadores libres, entonces aplicando un resultado de B. Jónsson, [5]:

Lema 1.4 $FD(\mathbf{2} \times \mathbf{n}) \cong \mathbf{2}^{\left[\mathbf{2}^{[\mathbf{2}\times\mathbf{n}]}\right]}$.

2 Una construcción de $\Pi(FD(\mathbf{2} \times \mathbf{n}))$

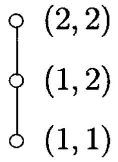
Indiquemos cómo construir el diagrama de Hasse de $\mathbf{2}^{[\mathbf{2}\times\mathbf{n}]}$.

Sea $V(n) = \{(x, y) \in (\mathbf{n}+\mathbf{1}) \times (\mathbf{n}+\mathbf{1}) : \ x \leq y\}$. Es claro que $V(n)$ es un $(0,1)$-subreticulado de $(\mathbf{n}+\mathbf{1}) \times (\mathbf{n}+\mathbf{1})$ y por lo tanto $V(n)$ es un reticulado distributivo acotado. Observemos que $V(n)$ es autodual y que:

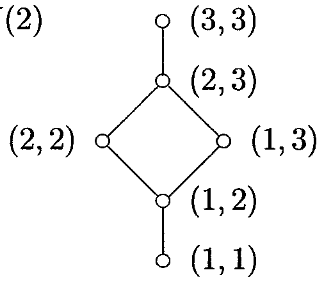
$$N[V(n)] = (n+1) + n + \ldots 2 + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Los diagramas de Hasse de $V(n)$ para $n = 1, 2$ son los siguientes:

$V(1)$

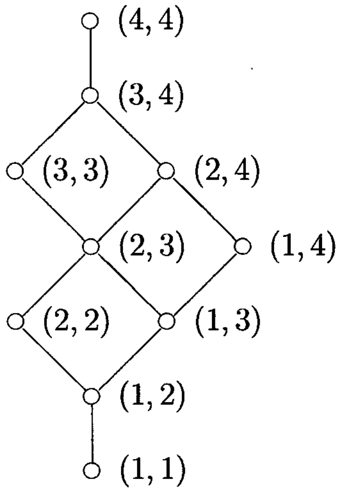


$V(2)$

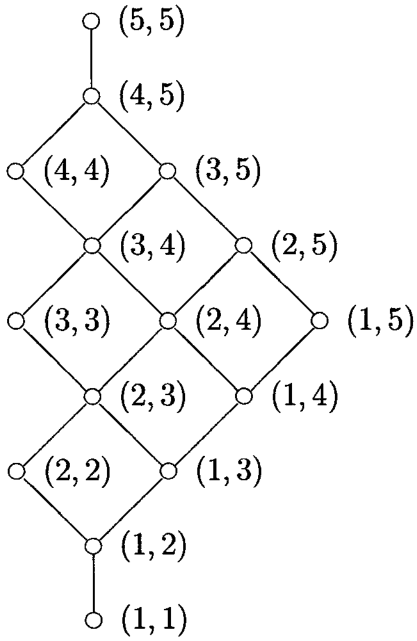


y para $n = 3, 4$ son:

$V(3)$



$V(4)$



Vamos a probar que el conjunto $\Pi(V(n))$ es isomorfo al conjunto ordenado $\mathbf{2} \times \mathbf{n}$. Como $I((1,j)) = ((1, j-1)]$ cualquiera que sea j, $2 \leq j \leq n+1$, entonces, por el Lema 1.1, resulta que $(1,j) \in \Pi(V(n))$ para $2 \leq j \leq n+1$. Si $i \geq 2$ entonces $I((i,i)) = ((i-1,i)]$. Luego, por el Lema 1.1, $(i,i) \in \Pi(V(n))$ para $i \geq 2$. Claramente ningún otro elemento de $V(n)$ es primo, pues $(i,j) = (i,i) \vee (1,j)$. Luego

$$\Pi(V(n)) = \bigcup_{j=2}^{n+1} \{(1,j)\} \cup \bigcup_{i=2}^{n+1} \{(i,i)\}$$

y es claro que los conjuntos ordenados $\Pi(V(n))$ y $\mathbf{2} \times \mathbf{n}$ son isomorfos, entonces los reticulados distributivos $V(n)$ y $\mathbf{2}^{[\mathbf{2}\times\mathbf{n}]}$ son isomorfos. Pero por el Lema 1.4, $FD(\mathbf{2} \times \mathbf{n}) \cong \mathbf{2}^{[\mathbf{2}^{[\mathbf{2}\times\mathbf{n}]}]}$. Luego:

$$FD(\mathbf{2} \times \mathbf{n}) \cong \mathbf{2}^{[V(n)]}.$$

Veamos ahora que $N\left[\mathbf{2}^{[V(n)]}\right] = 2^{n+1}$, cualquiera que sea $n \in \mathbf{N}$. Usaremos el siguiente resultado demostrado por L. Monteiro [12]:

Lema 2.1 *Si X es un conjunto ordenado finito y f un elemento de X que no es ni primer ni último elemento de X entonces*

$$N\left[\mathbf{2}^{[X]}\right] = N\left[\mathbf{2}^{[X\setminus(f]]}\right] + N\left[\mathbf{2}^{[X\setminus[f)]}\right].$$

En efecto, si $n = 1$, entonces por el Lema 2.1:

$$N\left[\mathbf{2}^{[V(1)]}\right] = N\left[\mathbf{2}^{[V(1)\setminus((1,2)]]}\right] + N\left[\mathbf{2}^{[V(1)\setminus[(1,2))]}\right] = 2 + 2 = 2^{1+1}.$$

Supongamos que $N\left[\mathbf{2}^{[V(n-1)]}\right] = 2^n$, si $n \geq 2$. Entonces por el Lema 2.1:

$$N\left[\mathbf{2}^{[V(n)]}\right] = N\left[\mathbf{2}^{[V(n)\setminus((1,n+1)]]}\right] + N\left[\mathbf{2}^{[V(n)\setminus[(1,n+1))]}\right]$$

Pero $V(n) \setminus ((1, n+1)]$ y $V(n) \setminus [(1, n+1))$ son conjuntos ordenados isomorfos a $V(n-1)$.

Luego

$$N\left[\mathbf{2}^{[V(n)]}\right] = 2 \times N\left[\mathbf{2}^{[V(n-1)]}\right] = (\text{por hipótesis}) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}.$$

3 Q-reticulado libre sobre una cadena con n elementos

Recordemos la siguiente definición introducida por R. Cignoli [2]: un Q-reticulado es un álgebra $(A, \wedge, \vee, 0, 1, \nabla)$ del tipo $(2, 2, 0, 0, 1)$ tal que $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un reticulado distributivo acotado y $\nabla 0 = 0$, $x \leq \nabla x$, $\nabla(x \wedge \nabla y) = \nabla x \wedge \nabla y$, $\nabla(x \vee y) = \nabla x \vee \nabla y$.
Definiremos en esta sección un operador ∇ en $\mathcal{S}(V(n))$, de modo que $(\mathcal{S}(V(n)), \nabla)$ sea isomorfo al Q-reticulado libre sobre una cadena con n elementos.

Sea $m : V(n) \to V(n)$ la aplicación definida por: $m((i, j)) = (i, n+1)$.
Luego m es un homomorfismo del reticulado $V(n)$ en $V(n)$ que verifica $x \leq m(x)$ y $m(m(x)) = m(x)$.

Definamos ahora el operador ∇ en $\mathcal{S}(V(n))$. Si $X \in \mathcal{S}(V(n))$, sea

$$\nabla X = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } X = \emptyset \\ \bigcup\limits_{x \in X} (m(x)], & \text{si } X \in \mathcal{S}(V(n)) \setminus \{\emptyset\}. \end{cases}$$

Probemos que $(\mathcal{S}(V(n)), \nabla)$ es un Q-reticulado. En efecto por definición $\nabla 0)$ $\nabla\emptyset = \emptyset$.

Como $x \leq m(x)$ entonces $\nabla 1)$ $\nabla X = \bigcup\limits_{x \in X} (m(x)] \supseteq \bigcup\limits_{x \in X} (x] = X$.

$\nabla 3)$ $\nabla(X \cup Y) = \bigcup\limits_{z \in X \cup Y} (m(z)] = \bigcup\limits_{z \in X} (m(z)] \cup \bigcup\limits_{z \in Y} (m(z)] = \nabla X \cup \nabla Y$.

Probemos ahora $\nabla 2)$ $\nabla(X \cap \nabla Y) = \nabla X \cap \nabla Y$. Sea $t \in \nabla(X \cap \nabla Y)$ luego (1) $t \leq m(w)$ con $w \in X \cap \nabla Y$, luego (2) $w \in X$ y (3) $w \in \nabla Y$. De (1) y (2) resulta (4) $t \in \nabla X$. De (3) resulta (5) $w \leq m(y)$ con (6) $y \in Y$. De (5) se deduce (7) $m(w) \leq m(m(y)) = m(y)$. De (1) y (7) se concluye $t \leq m(y)$ y como $y \in Y$ tenemos que $t \in \nabla Y$.
Sea (8) $t \in \nabla X \cap \nabla Y$ luego (9) $t \leq m(x)$ con $x \in X$ y (10) $t \leq m(y)$ con $y \in Y$. Como $x \wedge y \leq x$,

$x \wedge y \leq y$ $x \in X$, $y \in Y$ y X e Y son secciones inferiores tenemos que $x \wedge y \in X$ y $x \wedge y \in Y$ luego (11) $x \wedge y \in X \cap Y \subseteq X \cap \nabla Y$. De (9) y (10) resulta que $z \leq m(x) \wedge m(y) = m(x \wedge y)$ luego (12) $m(z) \leq m(m(x \wedge y)) = m(x \wedge y)$. De (8) y (12) se concluye (13) $t \leq m(x \wedge y)$. De (11) y (13) resulta que $t \in \nabla(X \cap \nabla Y)$.

Vamos a demostrar que $(\mathcal{S}(V(n)), \nabla)$ es el Q-reticulado libre sobre $\mathbf{n}$. En efecto, probaremos que $(\mathcal{S}(V(n)), \nabla)$ está generado (libremente) por la cadena

$$G = \{g_i = ((i,i)] : 1 \leq i \leq n\}.$$

Observemos que:

$$\nabla g_j = \nabla((j,j)] = \bigcup_{x \in ((j,j)]} (m(x)] = (m((j,j)] = ((j, n+1)],\ 1 \leq j \leq n.$$

Luego

$$G \cup \nabla G = \{((i,i)] : 1 \leq i \leq n\} \cup \{((i, n+1)] : 1 \leq i \leq n\}.$$

Si $((i,j)] \in \mathcal{S}(V(n)) \setminus (G \cup \nabla G)$ y $(i,j) = (n+1, n+1)$ entonces $1 \leq i < j < n+1$ y $(i,j) = (j,j) \wedge (i, n+1)$. Luego

$$((i,j)] = ((j,j)] \cap ((i, n+1)] = g_j \cap \nabla g_i \text{ para } 2 \leq i \leq n+1,\ i \leq j \leq n+1.$$

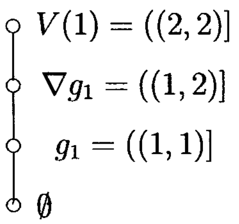
Es decir, toda sección principal de $V(n)$ es ínfimo de elementos de $G \cup \nabla G$. Como todo elemento de $\mathcal{S}(V(n))$ diferente de $\emptyset$ es supremo de secciones principales de $V(n)$, resulta que cualquier elemento de $\mathcal{S}(V(n))$ diferente de $\emptyset$ es supremo de ínfimos de elementos de $G \cup \nabla G$, esto es

$$SL(G \cup \nabla G) = \mathcal{S}(V(n)).$$

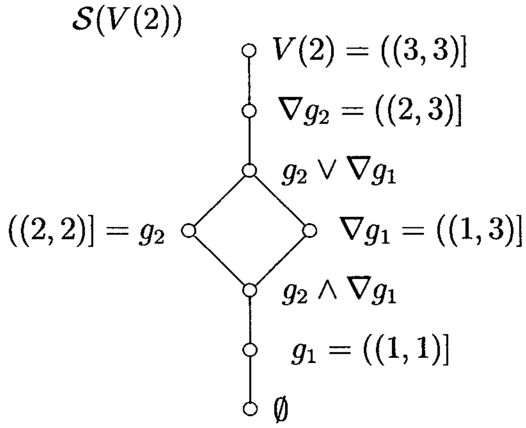
Probemos ahora que $\mathcal{S}(V(n))$ es el Q-reticulado libre sobre la cadena $\mathbf{n}$. Sea $f : \mathbf{n} \to \mathcal{S}(V(n))$ la aplicación definida por $f(i) = g_i$, $1 \leq i \leq n$. Luego f se extiende a un Q-homomorfismo $H : FQ(\mathbf{n}) \to \mathcal{S}(V(n))$. Ahora bien: $H(FQ(\mathbf{n}))$ es un Q-subreticulado de $\mathcal{S}(V(n))$ tal que $G \subseteq H(FQ(n))$ y como $\mathcal{S}(V(n))$ es el Q-reticulado generado por G, se tiene $H(FQ(\mathbf{n})) = \mathcal{S}(V(n))$. Luego H es un Q-epimorfismo y como los conjuntos $FQ(\mathbf{n})$ y $\mathcal{S}(V(n))$ son finitos y con el mismo número de elementos, entonces H es biunívoca, lo que muestra que H es un isomorfismo.

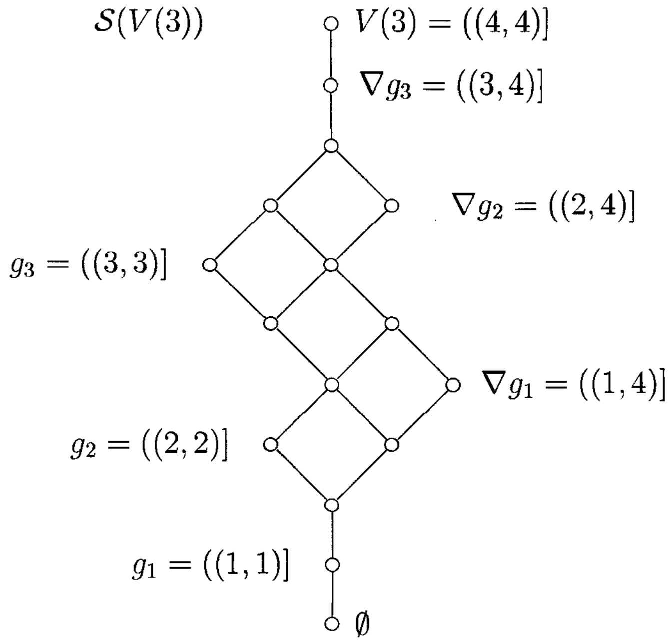
Ejemplos

$\mathcal{S}(V(1))$



$\mathcal{S}(V(2))$





4 Relación con las álgebras de De Morgan

Como $V(n)$ es autodual, puede definirse sobre $\mathcal{S}(V(n))$ una operación de De Morgan. En efecto, sea $\varphi : V(n) \to V(n)$ definida del siguiente modo

$$\varphi(x, y) = (n + 2 - y, n + 2 - x).$$

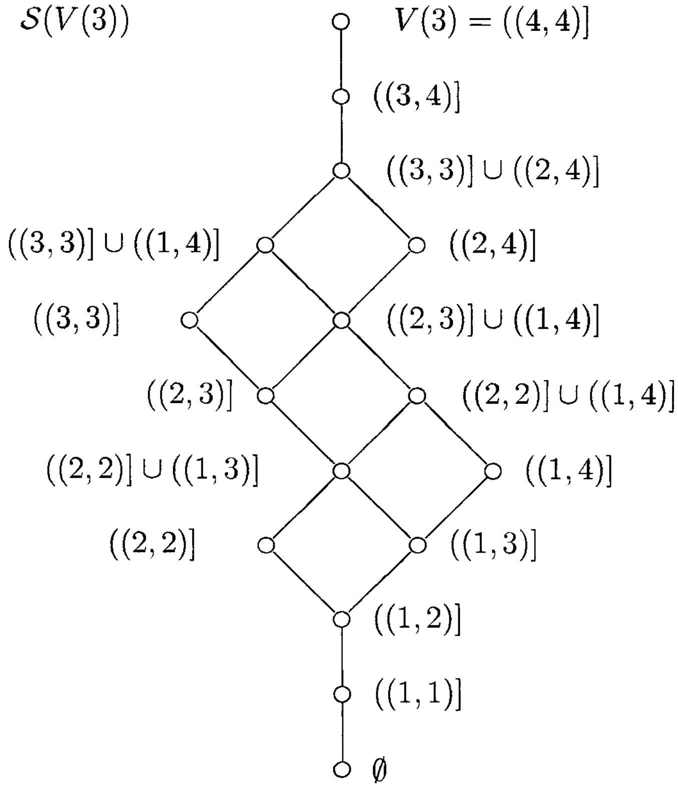
Es claro que φ es un antiisomorfismo de período 2. En el caso $n = 3$ tenemos:

x	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(3,3)	(3,4)	(4,4)
$\varphi(x)$	(4,4)	(3,4)	(2,4)	(1,4)	(3,3)	(2,3)	(1,3)	(2,2)	(1,2)	(1,1)

Sobre el conjunto $\mathcal{S}(V(n))$ de todas las secciones inferiores de $V(n)$ podemos definir la negación $\sim$ asociada a φ del modo usual [9]: si $Y \in \mathcal{S}(V(n))$ entonces:

$$\sim Y = \bigcup_{\substack{p \in V(n) \\ p \notin Y}} (\varphi(p)].$$

Luego



Y	$\sim Y$	Y	$\sim Y$
$\emptyset$	V(3)	V(3)	$\emptyset$
$((1,1)]$	$((3,4)]$	$((3,4)]$	$((1,1)]$
$((1,2)]$	$((3,3)] \cup ((2,4)]$	$((3,3)] \cup ((2,4)]$	$((1,2)]$
$((2,2)]$	$((2,4)]$	$((2,4)]$	$((2,2)]$
$((1,3)]$	$((3,3)] \cup ((1,4)]$	$((3,3)] \cup ((1,4)]$	$((1,3)]$
$((2,2)] \cup ((1,3)]$	$((2,3)] \cup ((1,4)]$	$((2,3)] \cup ((1,4)]$	$((2,2)] \cup ((1,3)]$
$((2,3)]$	$((2,2)] \cup ((1,4)]$	$((2,2)] \cup ((1,4)]$	$((2,3)]$
$((1,4)]$	$((3,3)]$	$((3,3)]$	$((1,4)]$

Veamos que:

(4.1) $$\sim g_j = \nabla g_{n+1-j}, \text{ para } 1 \leq j \leq n.$$

Recordemos primero que $\varphi((p]) = [\varphi(p))$ y $\varphi([p)) = (\varphi(p)]$ para todo $p \in V(n)$. Entonces

$$\sim g_j = \sim ((j,j)] = \bigcup_{\substack{p \in V(n) \\ p \notin ((j,j)]}} (\varphi(p)] = \bigcup_{\substack{p \in V(n) \\ p \notin ((j,j)]}} \varphi([p)) =$$

$$\varphi\Big(\bigcup_{\substack{p \in V(n) \\ p \notin ((j,j)]}} [p) \Big) = \varphi([(1,j+1))) = (\varphi((1,j+1))] = ((n+1-j, n+1)] = \nabla g_{n+1-j}.$$

Si A es un álgebra de De Morgan y $X \subseteq A$ notemos $SM(X)$ a la subálgebra de De Morgan de A generada por X. Es bien conocido que $SM(X) = SL(X \cup \sim X)$. Luego, como $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subseteq \mathcal{S}(V(n))$ entonces por (4.1) tenemos que $SM(G) = SL(G \cup \nabla G) = \mathcal{S}(V(n))$. Luego el álgebra de De Morgan $\mathcal{S}(V(n))$ está generada por una cadena con n elementos y por lo tanto es imagen homomórfica del álgebra de De Morgan libre sobre una cadena con n elementos, la cual es un álgebra de Kleene [4]. Luego $(\mathcal{S}(V(n)), \sim)$ es un álgebra de Kleene.

Si M es el álgebra de De Morgan libre sobre una cadena con n elementos, indiquemos una familia de filtros primos de M que determina el epimorfismo sobre $\mathcal{S}(V(n))$. Es sabido que el sistema determinante [10] de M es $((\mathbf{n+1}) \times (\mathbf{n+1}), \varphi)$, donde $\varphi(x,y) = (n+2-y, n+2-x)$, [4]. Sea $P = \{(x,y) \in (\mathbf{n+1}) \times (\mathbf{n+1}) : x \leq y\}$ luego $P = V(n)$ y si $p \in P$ entonces $\varphi(p) \in P$. Sea $\mathcal{P}$ el siguiente conjunto de filtros primos de M: $\mathcal{P} = \{[p) : p \in P\}$, luego como $\varphi([p)) = [\varphi(p))$, el conjunto $\mathcal{P}$ es cerrado por φ. Como el conjunto ordenado $(\mathcal{P}, \subseteq)$ es isomorfo a $V(n)^*$, $V(n)^*$ es isomorfo a $V(n)$ y $V(n)$ es isomorfo a $\Pi(\mathcal{S}(V(n)))$ entonces el álgebra cociente $M/\mathcal{P}$ es isomorfa a $\mathcal{S}(V(n))$.

5 Relación entre $\mathcal{S}(V(n))$ y $\mathcal{S}(V(n-1))$

Observemos que si $n \geq 2$ entonces la sección inferior $(g_n]$ de $\mathcal{S}(V(n))$ y la sección superior $[\nabla g_1)$ de $\mathcal{S}(V(n))$ son conjuntos ordenados isomorfos a $\mathcal{S}(V(n-1))$.
Como $\sim$ es un antiisomorfismo de orden de $\mathcal{S}(V(n))$ en $\mathcal{S}(V(n))$, y

$$x \in (g_n] \iff x \leq g_n \iff \nabla g_1 = \sim g_n \leq \sim x.$$

entonces (i) $(g_n] \cong ([\nabla g_1))^*$. Probemos ahora $\Pi((g_n]) \cong V(n-1)$ de donde resultará que (ii) $(g_n] \cong \mathcal{S}(V(n-1))$.
En primer lugar observemos que $\Pi((g_n]) = \Pi(\mathcal{S}(V(n))) \cap (g_n]$. Definamos la siguiente función de $V(n-1)$ en $\Pi((g_n])$:

$$\gamma((x,y)) = ((x,y)], \quad \text{donde } (x,y) \in V(n-1)$$

Claramente γ es un isomorfismo de orden, luego un isomorfismo de reticulado.
Sabemos que (iii) $\mathcal{S}(V(n-1)) \cong (\mathcal{S}(V(n-1)))^*$. Luego de (i),(ii) y (iii) tenemos que

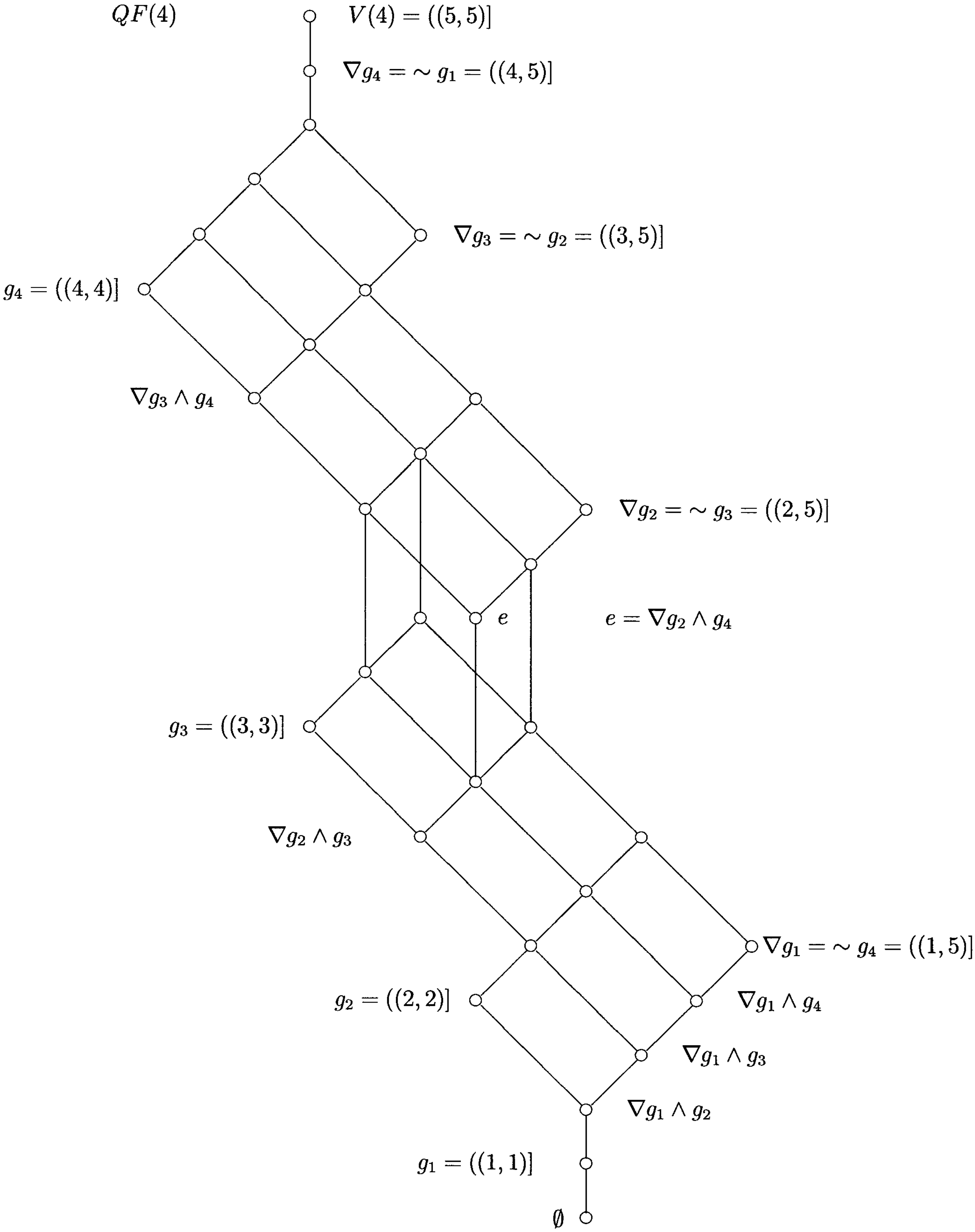
$$([\nabla g_1))^* \cong (g_n] \cong \mathcal{S}(V(n-1)) \cong (\mathcal{S}(V(n-1)))^*$$

y por lo tanto

$$([\nabla g_1))^* \cong (\mathcal{S}(V(n-1)))^*$$

luego

$$[\nabla g_1) \cong \mathcal{S}(V(n-1)) \cong (g_n].$$



$QF(4)$
$V(4) = ((5,5)]$
$\nabla g_4 = \sim g_1 = ((4,5)]$
$\nabla g_3 = \sim g_2 = ((3,5)]$
$g_4 = ((4,4)]$
$\nabla g_3 \wedge g_4$
$\nabla g_2 = \sim g_3 = ((2,5)]$
e
$e = \nabla g_2 \wedge g_4$
$g_3 = ((3,3)]$
$\nabla g_2 \wedge g_3$
$\nabla g_1 = \sim g_4 = ((1,5)]$
$g_2 = ((2,2)]$
$\nabla g_1 \wedge g_4$
$\nabla g_1 \wedge g_3$
$\nabla g_1 \wedge g_2$
$g_1 = ((1,1)]$
$\emptyset$

Referencias

[1] Abad M. and Díaz Varela J. P., *Free Q-distributive lattices from meet semilattices*, Discrete Math. 224 (2000) 1-14.

[2] Cignoli R., *Quantifiers on distributive lattices*, Discrete Math. 96 (1991) 183-197.

[3] Cignoli R., *Free Q-distributive lattices*, Studia Logica 56 (1996) 23-29.

[4] Figallo A. et Monteiro L., *Système determinant de l'algèbre de Morgan libre sur un ensemble ordonné fini*, Port. Math. 40, Fasc. 2 (1981), 129-135.

[5] Jónsson B., *Arithmetic of ordered sets*, Ordered sets, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, I. Rival (Ed.), (1982), 3 -41.

[6] Monteiro A., *Notas del curso Algebra de la Lógica I*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur (1959).

[7] Monteiro A., *Matrices de Morgan caractéristiques pour le calcul propositionnel classique*, Anais da Academia Brasileira de Ciências (1960), 1-7, Notas de Lógica Matemática 6-7, INMABB-CONICET-UNS, Bahía Blanca (1974), 39 pag.

[8] Monteiro A., *Notas del curso Algebras de De Morgan*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur (1966).

[9] Monteiro A., *Sur les algèbres de Heyting symétriques*, Portugaliae Mathematica, 39, 1-4 (1980), 1-237.

[10] Monteiro L., *Une construction des algèbres de Morgan libres sur un ensemble ordonné*, Reports Math. Logic, 3 (1974), 31-36.

[11] Monteiro L., *Algebras de Boole*, Informe Técnico Interno 66 (2000), 197 pág. INMABB-CONICET-Universidad Nacional del Sur.

[12] Monteiro L., *Free bounded distributive lattices on n generators,* Multi. Val. Logic, 6 Nr. 1-2 (2001) 175-192.