



INFORME TECNICO INTERNO

Nº. 73

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA
INMABB (UNS - CONICET)



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina

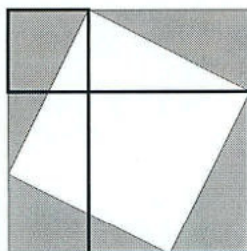
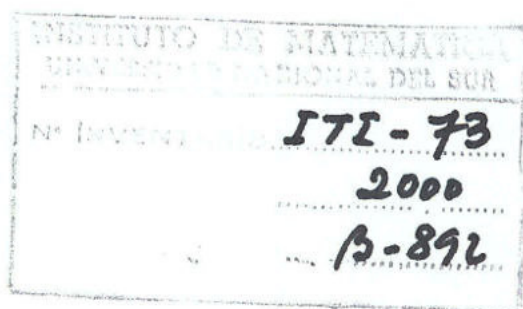


INFORME TÉCNICO INTERNO

Nº 73

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 2000 -





INFORME TÉCNICO INTERNO N° 73

RETICULADOS DISTRIBUTIVOS ACOTADOS CON UN CONJUNTO FINITO DE GENERADORES LIBRES

Luiz F. Monteiro

Universidad Nacional del Sur

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 2000



Reticulados distributivos acotados con un conjunto finito de generadores libres

Luiz F. Monteiro

INMABB-CONICET y DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Universidad Nacional del Sur - Bahía Blanca - Argentina
e-mail: luizmont@criba.edu.ar

Algunos de los resultados de §3 fueron expuestos en la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina (1988), de los cuales solo se publicó un pequeño resumen [23], y los resultados de §3 y §4 fueron expuestos en el Congreso "Lógica 98, International Conference on Mathematical Logic and Applications, in memory of A. Monteiro" realizado en la Universidade de Évora, Portugal, 13 al 17 de julio de 1998 y serán publicados en [26].

INMABB - CONICET - UNS

2.000

Índice General

1	Introducción	1
2	Nociones Previas	5
2.1	Algebras de Clausura	8
3	Reticulados distributivos libres I	10
4	Reticulados distributivos libres II	18
4.1	Prototipo del programa de la Lic. Nancy Ferracutti	29
5	Reticulados distributivos libres III	32
6	Reticulados distributivos libres IV	37
7	Reticulados distributivos libres V	40
7.1	Propiedades de los reticulados distributivos libres	49
BIBLIOGRAFIA		54

1 Introducción

En estas notas siempre consideraremos reticulados distributivos R con primer (0) y último elemento (1), que se suelen denominar reticulados distributivos acotados o $(0, 1)$ -reticulados distributivos.

Quienes fuimos alumnos de Antonio Monteiro recordamos que en sus cursos y seminarios nos planteaba problemas de su autoría y que nos indicaba problemas abiertos por otros matemáticos.

De estos últimos recordamos en particular dos, aún no resueltos, que a ambos nos fascinaron. Ellos son:

- (I) *cuantos órdenes se pueden definir sobre un conjunto finito,*
- (II) *la determinación del número, $N[FD(n)]$, de elementos del reticulado distributivo acotado $FD(n)$ con n generadores libres.*

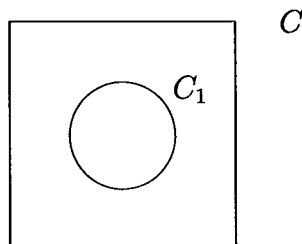
En estas notas nos ocuparemos del tema (II). En particular indicaremos algunos resultados originales de A. Monteiro que fueron expuestos en varios de los cursos [22] que dictara en la Universidad Nacional del Sur entre 1957 y 1966, y que nunca fueron publicados. Para el lector no familiarizado con la noción de reticulado distributivo acotado libre, sugerimos leer en primer lugar el §7.

- (1) La determinación de $N[FD(n)]$ fue propuesta por R. Dedekind [10] en 1897, quien indica la solución para $n = 1, 2, 3, 4$. En su trabajo Dedekind dice “*y si no me equivoco para $n = 4$ la solución es 168.*”
- (2) R. Church [6] en su tesis doctoral de 1935, determina $N[FD(n)]$, para $1 \leq n \leq 5$, y su metodología está esbozado en un trabajo publicado en 1940, de muy pocas páginas.
- (3) M. Ward [31] en 1946 determina $N[FD(6)]$, mediante el uso de una computadora. Este resultado aparece en un resumen de apenas 7 líneas.
- (4) R.D. Agnew [1] en 1960 también indica $N[FD(6)]$. Sólo conocemos los comentarios aparecidos en Math. Reviews y en Zentralblatt für Math.
- (5) R. Church [7] en 1965 determina $N[FD(7)]$ mediante el uso de una computadora. Este resultado aparece indicado en apenas 15 líneas.
- (6) E. Czyzo y A. W. Mostowski [8] en 1968 determinan $N[FD(6)]$, mediante el uso de una computadora, indicando que para ello necesitaron 22 horas de cálculo.
- (7) Los números $N[FD(n)]$, para $1 \leq n \leq 6$, indicados por F. Lunnon [20] en 1969, coinciden con los conocidos hasta esa fecha, pero indica que su cálculo de $N[FD(7)]$ difiere del indicado por R. Church.
- (8) Berman J. Burger A. y Köhler P. [5] en 1975 determinan mediante computadora $N[FD(7)]$. Sus resultados coinciden con los de Church. Para ello utilizan un resultado publicado en [4] y el completo conocimiento de $FD(5)$.

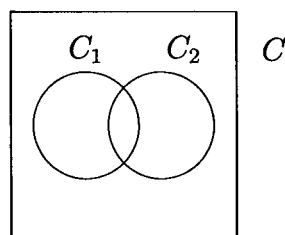
- (9) Berman J., y Köhler P. [4] en 1976 determinan mediante una computadora IBM 370, $N[FD(n)]$ para $1 \leq n \leq 6$, e indican que para $n = 6$, el cálculo se obtuvo mediante 5 minutos de tiempo de CPU. Los autores dicen que $N[FD(n)]$ "es probablemente el problema mas antiguo, no resuelto en la teoría de reticulados."
- (10) S. B. Hu, D. W. Dai y C. C. Liu [13] en 1982 indican que mediante una computadora determinaron $N[FD(7)]$ y que el mismo coincide con el determinado por R. Church. De este trabajo sólo conocemos los comentarios aparecidos en Math. Reviews y en Zentralblatt für Math.
- (11) D. Wiedemann [33] en 1991, determina $N[FD(8)]$ mediante el uso de una computadora y el conocimiento de todos los elementos de $FD(6)$. Necesitó 200 horas para el cálculo.
- (12) Existen varios trabajos en los que se indican cotas superiores del número de elementos de $FD(n)$. Ver por ejemplo [29], [30], [31].
- (12) En diversos trabajos para calcular el número $N[FD(n)]$ se utiliza el conocimiento de la estructura de orden de $FD(n-1)$.
- (14) Al final indicamos una bibliografía relacionada con este problema, pero que en su gran mayoría no se utiliza en el presente trabajo.

En el comentario sobre el trabajo [17] que aparece en Math. Reviews, Ju. Ĵuravlew dice "Some problems in mathematical cybernetics and economics coincide with the problem of "evaluating" a monotone function in the algebra of logic, and the complexity of the algorithms of these problems may be gauged by the complexity of the algorithm for determining the solution set for an arbitrary monotone function in the algebra of logic".

El problema de la determinación de $N[FD(n)]$ se puede plantear del siguiente modo: Dado un conjunto C y n subconjuntos $C_1, C_2, \dots, C_n$ de C , incomparables dos a dos y tales que la intersección de todos ellos es no vacía ¿cuantos subconjuntos de C , incluídos el $\emptyset$ y el C se pueden obtener haciendo intersecciones y uniones de ellos? Por ejemplo: Si $n = 1$ sólo se obtienen los conjuntos $\emptyset, C, C_1$

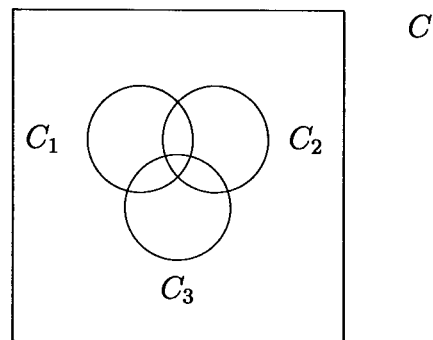


Si $n = 2$

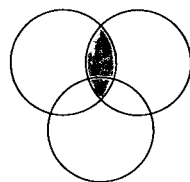


además de $\emptyset$, C , C_1 , C_2 se obtienen: $C_1 \cap C_2$ y $C_1 \cup C_2$.

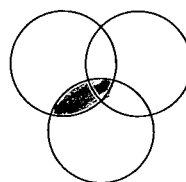
Si $n = 3$



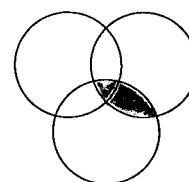
además de $\emptyset$, C , C_1 , C_2 , C_3 se obtienen los siguientes conjuntos:



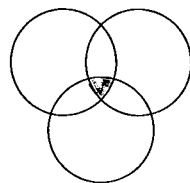
$C_1 \cap C_2$



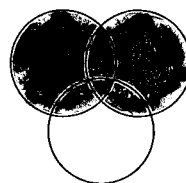
$C_1 \cap C_3$



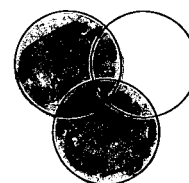
$C_2 \cap C_3$



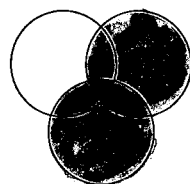
$C_1 \cap C_2 \cap C_3$



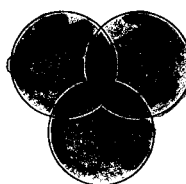
$C_1 \cup C_2$



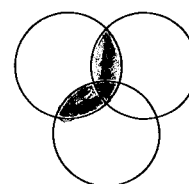
$C_1 \cup C_3$



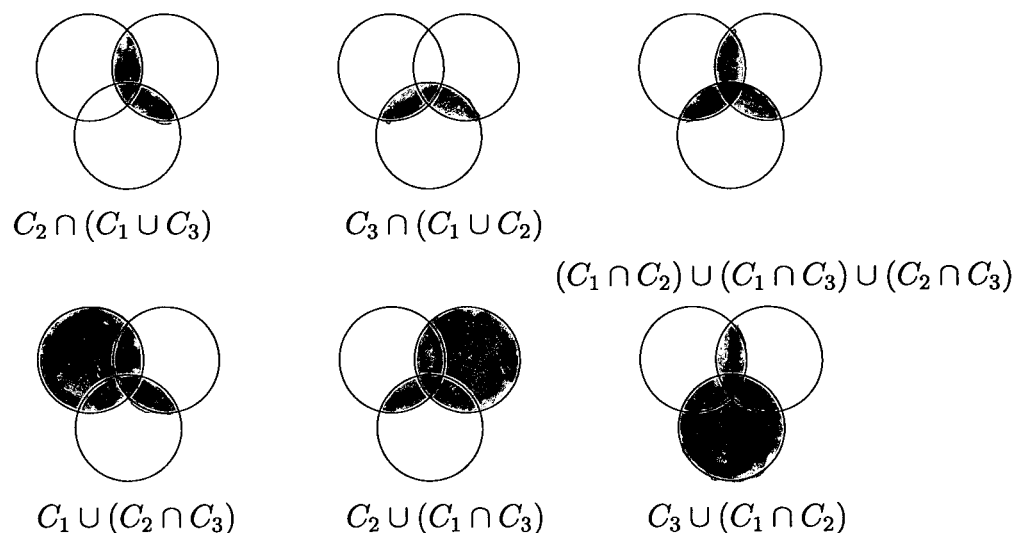
$C_2 \cup C_3$



$C_1 \cup C_2 \cup C_3$



$C_1 \cap (C_2 \cup C_3)$



A continuación indicamos el número de elementos de $FD(n)$, determinados por los autores citados precedentemente.

n	$N[FD(n)]$	Autores	Año
1	3	Dedekind Church	1897 1940
2	6	Dedekind Church	1897 1940
3	20	Dedekind Church	1897 1940
4	168	Dedekind Church	1897 1940
5	7.581	Church	1940
6	7.828.354	Ward Agnew Czyzo y Mostowski Berman, y Köhler	1946 1960 1968 1976
7	2.414.682.040.998	Church Berman, Burger y Köhler Hu, Dai y Liu	1965 1975 1982
8	56.130.437.228.687.557.907.788	Wiedemann	1991

2 Nociones Previas

Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado. Un subconjunto Y de X se denomina una *sección inferior* de X si verifica cualquiera de las condiciones siguientes:

S1) $Y = \emptyset$,

S2) Si $y \in Y$ y $x \in X$ es tal que $x \leq y$ entonces $x \in Y$.

Es claro que para todo $x \in X$, el conjunto $(x] = \{y \in X : y \leq x\}$, es una sección inferior de X que se denomina sección inferior generada por x .

Con $\mathcal{I}(X)$ representaremos el conjunto de todas las secciones inferiores del conjunto ordenado X . Observemos que si X tiene primer elemento 0 , entonces toda sección inferior no vacía contiene al elemento 0 . En efecto si (1) $Z \in \mathcal{I}(X)$ y $Z \neq \emptyset$ entonces existe $z \in Z$, luego como (2) $0 \leq z$ de (1) y (2) resulta por S_2 que $0 \in Z$.

Es bien conocido que todo reticulado distributivo finito R es un reticulado distributivo acotado.

Un elemento $p \in R$ de un reticulado distributivo acotado se dice *primo* ó *sup-irreducible* si: 1) $p \neq 0$ y si 2) Si $p = a \vee b$, donde $a, b \in R$ entonces $p = a$ ó $p = b$. Notaremos con $\Pi(R)$ al conjunto de todos los elementos primos del reticulado R . Claramente a todo reticulado distributivo acotado R , finito y con más de un elemento le corresponde el conjunto ordenado finito $\Pi(R)$.

El siguiente resultado se debe a G. Birkhoff [3].

Teorema 2.1 *Si $(X, \leq)$ es un conjunto ordenado finito, existe un reticulado distributivo finito R tal que el conjunto ordenado $\Pi(R)$ de sus elementos primos es isomorfo a X .*

Dem. Sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de todas las partes del conjunto X . Es bien conocido que $\mathcal{P}(X)$, es un álgebra de Boole con respecto a las operaciones de $\cap$, $\cup$ y de complementación. Además $\emptyset$ y X son el primer y último elemento respectivamente de esta álgebra de Boole. Se prueba sin dificultad que:

1) $\mathcal{I}(X)$ es un subreticulado de $\mathcal{P}(X)$ que contiene al primer y último elemento de $\mathcal{P}(X)$.

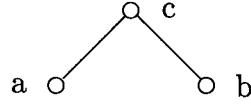
2) $\Pi(\mathcal{I}(X)) = \{(x] : x \in X\}$.

3) $(\Pi(\mathcal{I}(X)), \subseteq)$ y $(X, \leq)$ son conjuntos ordenados isomorfos.

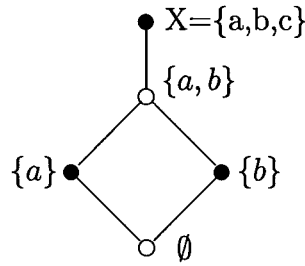
Observemos que el isomorfismo se define del siguiente modo: Si $x \in X$ entonces $\varphi(x) = (x]$. ■

Para referirnos al reticulado distributivo que acabamos de construir usaremos la siguiente notación: $RB(X)$, (*reticulado de Birkhoff determinado por el conjunto ordenado X* .)

Ejemplo 2.1 Sea X el conjunto ordenado cuyo diagrama de Hasse se indica a continuación:



Entonces $RB(X)$ tiene el siguiente diagrama.

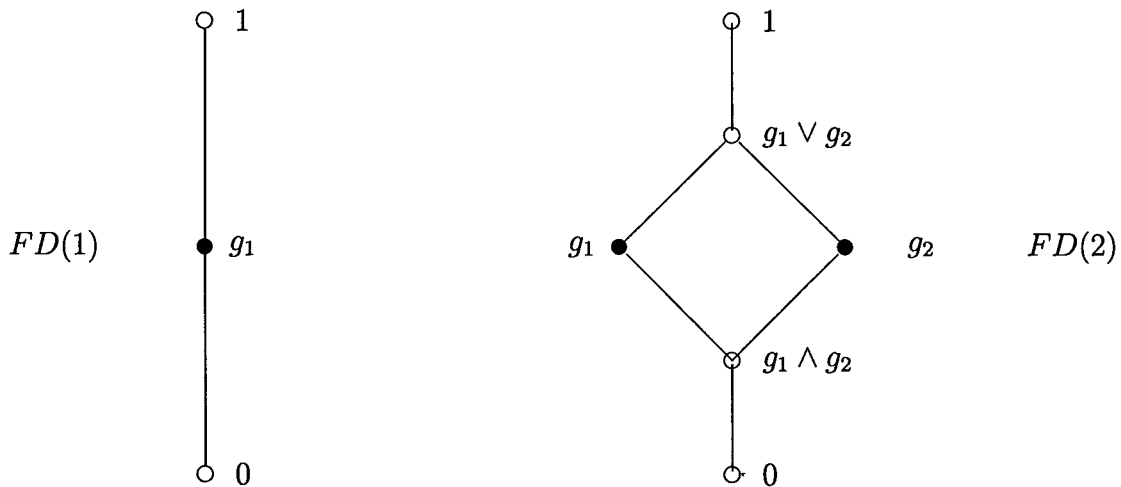


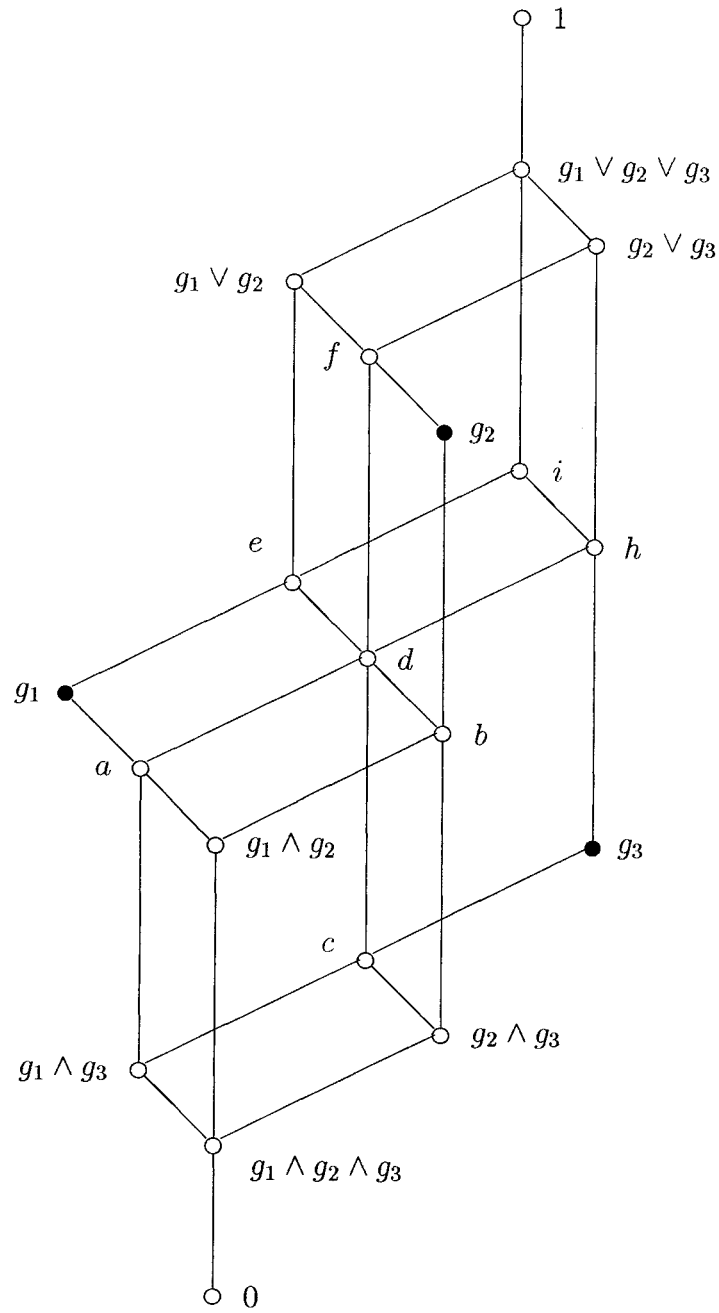
Si X es un conjunto finito, notaremos con $N[X]$ el número de elementos de X y si n es un número natural representaremos con $\mathbf{B}_n$ un álgebra de Boole con n átomos. Si $n = 1$ notaremos también con $\mathbf{2}$ el álgebra de Boole $\mathbf{B}_1$. Es bien conocido que:

Teorema 2.2 $RB(\mathbf{B}_n)$ es el reticulado distributivo acotado con n generadores libres.

Observemos que como $(x]$ es un elemento primo de $RB(\mathbf{B}_n) = FD(n)$, cualquiera que sea $x \in \mathbf{B}_n$, entonces los elementos de $FD(n)$ diferentes del primer elemento, $\emptyset$, se obtienen haciendo uniones de elementos del conjunto $\{(x)\}_{x \in \mathbf{B}_n}$.

A continuación indicaremos los diagramas de $FD(n)$ para $n = 1, 2, 3$.





$FD(3)$

$$a = g_1 \wedge (g_2 \vee g_3), \quad b = g_2 \wedge (g_1 \vee g_3), \quad c = g_3 \wedge (g_1 \vee g_2), \quad d = (g_1 \wedge g_2) \vee (g_1 \wedge g_3) \vee (g_2 \wedge g_3), \\ e = g_1 \vee (g_2 \wedge g_3), \quad f = g_2 \vee (g_1 \wedge g_3), \quad h = g_3 \vee (g_1 \wedge g_2), \quad i = g_1 \vee g_3.$$

2.1 Algebras de Clausura

Recordemos que se denomina **álgebra de clausura** a todo par (A, C) donde A es un álgebra de Boole y C un operador unario, denominado **operador de clausura**, definido sobre A y que verifica: C0) $C0 = 0$; C1) $x \leq Cx$; C2) $C(x \vee y) = Cx \vee Cy$ y C4) $CCx = Cx$. De C1) resulta inmediatamente que C5) $C1 = 1$.

Consideremos el conjunto $K(A) = \{x \in A : Cx = x\}$, esto es $K(A)$ es el conjunto de los elementos de A que son invariantes por el operador C , también se suele decir que $K(A)$ es el conjunto de los **cerrados** de A . Observemos que por C4) $Cx \in K(A)$ cualquiera que sea $x \in A$. Por C1) y C5) tenemos que $0, 1 \in K(A)$. De C2) se deduce inmediatamente que: C6) Si $x \leq y$ entonces $Cx \leq Cy$. Probemos que $K(A)$ es un $(0, 1)$ -subreticulado de A . En efecto si $x, y \in K(A)$ esto es (1) $Cx = x$ y (2) $Cy = y$ entonces por C2) tenemos $C(x \vee y) = C(x) \vee C(y) = x \vee y$ y en consecuencia $x \vee y \in K(A)$. De $x \wedge y \leq x$ y de $x \wedge y \leq y$ se deducen por C6) que $C(x \wedge y) \leq Cx$ y $C(x \wedge y) \leq Cy$, luego $C(x \wedge y) \leq Cx \wedge Cy$, luego por (1) y (2) tenemos que (3) $C(x \wedge y) \leq x \wedge y$. De C1) resulta que (4) $x \wedge y \leq C(x \wedge y)$. De (3) y (4) resulta que $x \wedge y \in K(A)$.

Veamos otra forma de construir $RB(X)$, donde $(X, \leq)$ es un conjunto ordenado finito. (ver por ejemplo [22])

Sobre el conjunto $A = \mathcal{P}(X)$ que es un álgebra de Boole vamos a definir un operador C del siguiente modo:

- 1) $C\emptyset = \emptyset$.
- 2) Si $x \in X$ entonces $C\{x\} = (x]$
- 3) Si Y es un subconjunto no vacío de X entonces $CY = \bigcup_{y \in Y} C\{y\}$.

Lema 2.1 $(\mathcal{P}(X), C)$ es un álgebra de clausura.

Dem.

C0) $C\emptyset = \emptyset$.

Se verifica por definición.

C1) $Y \subseteq X$, cualquiera que sea $Y \in \mathcal{P}(X)$.

Si $Y = \emptyset$ esta condición es obviamente verificada. Si $Y \neq \emptyset$ sea $y \in Y$, luego como $y \in (y]$ tenemos que $y \in C\{y\} \subseteq \bigcup_{z \in Y} C\{z\} = CY$.

C2) $C(Y \cup Z) = CY \cup CZ$, cualesquiera que sean $Y, Z \in \mathcal{P}(X)$.

Es claro que si Y ó Z son iguales al conjunto $\emptyset$ entonces la condición es obviamente verificada. Caso contrario $C(Y \cup Z) = \bigcup_{t \in Y \cup Z} C\{t\} = \bigcup_{t \in Y} C\{t\} \cup \bigcup_{t \in Z} C\{t\} = CY \cup CZ$.

C3) $CCY = CY$ cualquiera que sea $Y \in \mathcal{P}(X)$.

Si $Y = \emptyset$ es obvio que la condición se verifica. Caso contrario por C1) tenemos que $CY \subseteq CCY$. Probemos que $CCY \subseteq CY$. Sea $a \in CCY$ luego existe $b \in CY$ tal que $a \in C\{b\} = (b]$ esto es (1) $a \leq b$. De (1) y la definición de C resulta que existe $c \in Y$ tal que $b \in C\{c\} = (c]$ esto es (2) $b \leq c$. De (1) y (2) tenemos que $a \leq c$, con $c \in Y$ luego $a \in C\{c\} \subseteq CY$.

Acabamos así de probar que $(\mathcal{P}(X), C)$ es un álgebra de clausura ó que lo mismo que el par (X, C) es un espacio topológico. ■

Veamos que (X, C) es un espacio T_0 esto es que verifica: Si $C\{p\} = C\{q\}$ entonces $\{p\} = \{q\}$. En efecto como $p \in C\{p\} = C\{q\}$ entonces $p \leq q$ y como $q \in C\{q\} = C\{p\}$ entonces $q \leq p$.

Consideremos el subconjunto $K = K(\mathcal{P}(X))$, ya sabemos que K es un $(0, 1)$ -subreticulado del álgebra de Boole $\mathcal{P}(X)$, además como X es finito tambien el álgebra de Boole $\mathcal{P}(X)$ es finita y por lo tanto K es un reticulado finito. Probemos ahora que:

P1) $C\{p\} \in \Pi(K)$ cualquiera que sea $p \in X$.

Como $p \in C\{p\}$ entonces $C\{p\} \neq \emptyset$. Supongamos que (1) $C\{p\} = F_1 \vee F_2$ donde $F_1, F_2 \in K$, de $p \in C\{p\}$ resulta que (2) $p \in F_1$ ó (3) $p \in F_2$. Si ocurre (2) entonces $\{p\} \subseteq F_1$ luego por C1) y la hipótesis: (4) $C\{p\} \subseteq CF_1 = F_1$ y por (1) tenemos que (5) $F_1 \subseteq C\{p\}$. De (4) y (5) concluimos $C\{p\} = F_1$. Análogamente se ocurre (3) se demuestra que $C\{p\} = F_2$.

P2) Si $F \in \Pi(K)$ entonces $F = C\{p\}$ para algún $p \in X$.

Si $F \in \Pi(K)$ entonces en particular (1) F es diferente del primer elemento de $\mathcal{P}(X)$ esto es $F \neq \emptyset$ y (2) $F = CF$. Por definición $CF = \bigcup_{f \in F} C\{f\}$ y como F es un subconjunto del conjunto finito X tenemos que $F = \{f_1, f_2, \dots, f_t\}$, luego (3) $F = CF = \bigcup_{i=1}^t C\{f_i\}$ y en consecuencia como F es un elemnto primo de (3) resulta que existe $f_i \in F$, $1 \leq i \leq t$ tal que $F = C\{p_i\}$.

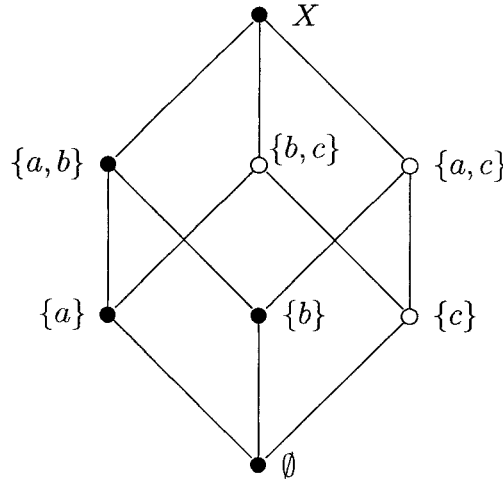
P3) De P1 y P2 resulta que $\Pi(K) = C\{p\} = \{x \in X : x \leq p\}$.

Luego si ponemos por definición $\varphi(x) = C\{x\}$, cualquiera que sea $x \in X$, entonces φ establece un isomorfismo de orden entre $(X, \leq)$ y $(\Pi(K), \subseteq)$.

Ejemplo 2.2 Consideremos el conjunto ordenado X indicado en el Ejemplo 2.1. El operador C definido sobre $\mathcal{P}(X)$ está indicado en la siguiente tabla:

Y	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$	X
CY	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	X	$\{a, b\}$	X	X	X

En el siguiente figura indicamos el diagrama del álgebra de Boole $\mathcal{P}(X)$ y con $\bullet$ indicamos los elementos de K .



3 Reticulados distributivos libres I

Los resultados que se indican en esta sección fueron expuestos en la Reunión Anual de Comunicaciones Científicas de la U.M.A. realizada en 1990, [23].

Designemos con $\mathcal{A}_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ el conjunto de todos los átomos de $\mathbf{B}_n$, y si $x = 0$ notaremos $\mathcal{A}(x) = \{a \in \mathcal{A}_n : a \leq x\}$.

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{I}(\mathbf{B}_n, t) = \{Y \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n) : N[Y \cap \mathcal{A}_n] = t\}, \quad 0 \leq t \leq n,$$

luego

$$N[RB(\mathbf{B}_n)] = \sum_{t=0}^n N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_n, t)],$$

ya que $RB(\mathbf{B}_n)$ es la unión disjunta de los conjuntos $\mathcal{I}(\mathbf{B}_n, t)$ $0 \leq t \leq n$.

Teorema 3.1 (L. Monteiro [23])

- 1) $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_n, 0)] = 2$.
- 2) $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_n, t)] = \binom{n}{t} N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_t, t)], \quad 1 \leq t < n$.

Dem.

- 1) Veamos que $\mathcal{I}(\mathbf{B}_n, 0) = \{\emptyset, \{0\}\}$.

En efecto, por definición $\emptyset \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n, 0)$, y sabemos que $(x] \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n)$ cualquiera que sea $x \in \mathbf{B}_n$, luego en particular $\{0\} = (0] \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n)$ y mas precisamente $(0] \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n, 0)$, luego $\{\emptyset, (0]\} \subseteq \mathcal{I}(\mathbf{B}_n, 0)$.

Supongamos que $Y \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n, 0)$ y que $Y = \emptyset$, luego existe $y \in Y$. Si $y = 0$ entonces $y = a_{i_1} \vee a_{i_2} \vee \dots \vee a_{i_j}$, donde $a_{i_k} \in \mathcal{A}_n$, $1 \leq k \leq j$ y $j \geq 1$. En consecuencia $a_{i_k} \in (y] \subseteq Y$, $1 \leq k \leq j$, lo que contradice que $Y \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n, 0)$ por lo tanto $y = 0$, esto es $Y = \{0\}$.

- 2) Representemos con $S_{n,t}$, $1 \leq t < n$, el conjunto de los elementos de $\mathbf{B}_n$ que son supremo de t átomos de $\mathbf{B}_n$. Es bien conocido que $N[S_{n,t}] = \binom{n}{t}$, $1 \leq t < n$. Pongamos (i) $S_{n,t} = \{s_{t,1}, s_{t,2}, \dots, s_{t,\binom{n}{t}}\}$. Sea $s \in S_{n,t}$, $1 \leq t < n$. Supongamos,

para simplificar las notaciones, que $s = \bigvee_{i=1}^t a_i$, luego $(s]$ es un álgebra de Boole con t átomos, que son precisamente $a_1, a_2, \dots, a_t$, que tiene por primer elemento 0 y por último elemento s . Además si $y \in (s]$, su complemento booleano en $(s]$, que notaremos $\sim y$ es $\sim y = -y \wedge s$.

Observemos que si $x, y \in S_{n,t}$ entonces $(x]$ y $(y]$ son álgebras de Boole isomorfas.

Además si $Y \in \mathcal{I}((s])$, donde $s \in S_{n,t}$ entonces $Y \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n)$ y mas precisamente:

- (ii) Si $Y \in \mathcal{I}((s], t)$ donde $s \in S_{n,t}$ y $0 \leq t < n$ entonces $Y \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n, t)$.

Luego de (i) e (ii):

$$\bigcup_{i=1}^{\binom{n}{t}} \mathcal{I}((s_{t,i}], t) \subseteq \mathcal{I}(\mathbf{B}_n, t).$$

Además (iii) para t fijo, $1 \leq t < n$, si $j = k$, $1 \leq j, k < \binom{n}{t}$ entonces $\mathcal{I}((s_{t,j}], t) \cap \mathcal{I}((s_{t,k}], t) = \emptyset$. En efecto si $X \in \mathcal{I}((s_{t,j}], t) \cap \mathcal{I}((s_{t,k}], t)$ entonces $X \subseteq (s_{t,j}]$, $X \subseteq (s_{t,k}]$ y por lo tanto $X \subseteq (s_{t,j}] \cap (s_{t,k}] = (s_{t,j} \wedge s_{t,k})$.

Como $s_{t,j}, s_{t,k} \in \mathcal{S}_{n,t}$ entonces $s_{t,j} \wedge s_{t,k} < s_{t,j}$ y por lo tanto $\mathcal{A}(s_{t,j} \wedge s_{t,k}) = \mathcal{A}(s_{t,j}) \cap \mathcal{A}(s_{t,k}) \subset \mathcal{A}(s_{t,j})$.

Luego tendríamos $t = N[X \cap \mathcal{A}_n] \leq N[\mathcal{A}(s_{t,j} \wedge s_{t,k})] < N[\mathcal{A}(s_{t,j})] = t$, absurdo.

Veamos que si $X \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n, t)$, donde $1 \leq t < n$, esto es $X \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n)$ y $N[X \cap \mathcal{A}_n] = t$, entonces $X \subseteq (y]$, para algún $y \in \mathcal{S}_{n,t}$.

Para simplificar la notación supongamos que $X \cap \mathcal{A}_n = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$, y sea $s = \bigvee_{i=1}^t a_i$. Probemos que $X \subseteq (s]$. Sea $x \in X$, si $x = 0$ entonces $x = 0 \in (s]$.

Si $x \neq 0$, entonces $x = \bigvee_{i=1}^p w_i$, donde (1) $\{w_1, w_2, \dots, w_p\} \subseteq \mathcal{A}_n$. Como $w_i \leq x$ y $x \in X \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n)$, entonces (2) $w_i \in X$. De (1) y (2) $w_i \in X \cap \mathcal{A}_n = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$, $1 \leq i \leq p$, luego $x = \bigvee_{i=1}^p w_i \leq \bigvee_{i=1}^t a_i = s$ y por lo tanto $x \in (s]$. Luego

$$\mathcal{I}(\mathbf{B}_n, t) = \bigcup_{j=1}^{\binom{n}{t}} \mathcal{I}((s_j], t)$$

y por (iii) se deduce que:

$$N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_n, t)] = \binom{n}{t} N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_t, t)], \quad 1 \leq t < n.$$

■

Por lo tanto la determinación de los números $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_n, n)]$ para todo $n \in \mathbf{N}$ permitiría el conocimiento de $N[FD(n)]$.

Representemos con $\mathcal{D}_n$ el conjunto de los n átomos duales de $\mathbf{B}_n$, esto el conjunto de todos los elementos de $\mathbf{B}_n$ que son supremo de $(n-1)$ átomos de $\mathbf{B}_n$, luego $\mathcal{D}_n = \mathcal{S}_{n,n-1}$.

Sean

$$R_d(n) = \{X \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n, n) : X \cap \mathcal{D}_n = \emptyset\},$$

y

$$R_0(n) = \{X \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n, n) : X \cap \mathcal{D}_n = \emptyset\}.$$

Luego $\mathcal{I}(\mathbf{B}_n, n)$ es la unión disjunta de los conjuntos $R_d(n)$ y $R_0(n)$, y por lo tanto:

Lema 3.1

$$N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_n, n)] = N[R_d(n)] + N[R_0(n)].$$

Sea $C_{n,r} = \{X \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n) : N[X] = r\}$, donde $0 \leq r \leq 2^n$. Si $X \subseteq \mathbf{B}_n$, notaremos $-X = \{-x : x \in X\}$. Consideremos la función $\alpha : \mathcal{P}(\mathbf{B}_n) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{B}_n)$ definida por:

$$\alpha(X) = -\mathbb{C}X = \mathbb{C} - X, \quad \text{cualquiera que sea } X \subseteq \mathbf{B}_n.$$

Lema 3.2 *La función α tiene las siguientes propiedades:*

P1) $\alpha(\alpha(X)) = X.$

P2) $X \subseteq Y \iff \alpha(Y) \subseteq \alpha(X).$

P3) Además α verifica:

- (a) $\alpha(X \cap Y) = \alpha(X) \cup \alpha(Y)$,
- (b) $\alpha(X \cup Y) = \alpha(X) \cap \alpha(Y)$,
- (c) $\alpha(\emptyset) = \mathbf{B}_n$, $\alpha(\mathbf{B}_n) = \emptyset$,
- (d) $\alpha(\mathbb{C}X) = \mathbb{C}\alpha(X)$.

P4) Si $X \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n)$ entonces $\alpha(X) \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n)$.

P5) Si $X \in C_{n,r}$, $0 \leq r \leq 2^n$ entonces $\alpha(X) \in C_{n,2^n-r}$.

P6) Para r fijo, $0 \leq r \leq 2^n$, α establece una biyección entre los conjuntos $C_{n,r}$ y $C_{n,2^n-r}$.

P7) Si $X \subseteq \mathbf{B}_n$ verifica $\alpha(X) = X$ entonces $N[X] = 2^{n-1}$.

P8) (i) Si $X = (-a]$, donde $a \in \mathcal{A}_n$, entonces $\alpha(X) = X$.

(ii) Si $X = [a]$, donde $a \in \mathcal{A}_n$, entonces $\alpha(X) = X$.

P9) Si $X \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n)$ y $\alpha(X) = X$ entonces $X \notin \mathcal{I}(\mathbf{B}_n, t)$, $0 \leq t < n-1$, lo que es equivalente a decir que $X \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n, n-1) \cup \mathcal{I}(\mathbf{B}_n, n)$.

P10) α establece biyección entre $R_d(n)$ y el conjunto

$$\left(\bigcup_{r=0}^{n-1} \mathcal{I}(\mathbf{B}_n, r) \right) \setminus \{(-a_1], (-a_2], \dots, (-a_n)\}.$$

Dem. P1) y P2) son bien conocidas [2], y de ellas resulta que α es una biyección, mas precisamente α es un isomorfismo entre el conjunto ordenado $(\mathcal{P}(\mathbf{B}_n), \subseteq)$ y su dual $(\mathcal{P}(\mathbf{B}_n), \supseteq)$. Para simplificar, notaremos a estos conjuntos ordenados $\mathcal{P}(\mathbf{B}_n)$ y $\mathcal{P}(\mathbf{B}_n^*)$ respectivamente. Observemos que los átomos de $\mathbf{B}_n$ ($\mathcal{P}(\mathbf{B}_n)$) son los átomos duales $\mathbf{B}_n^*$ ($\mathcal{P}(\mathbf{B}_n^*)$) y que los átomos de $\mathbf{B}_n^*$ ($\mathcal{P}(\mathbf{B}_n^*)$) son los átomos duales de $\mathbf{B}_n$ ($\mathcal{P}(\mathbf{B}_n)$).

P3) (a) $\alpha(X \cap Y) = -\mathbb{C}(X \cap Y) = -(\mathbb{C}X \cup \mathbb{C}Y) = -\mathbb{C}X \cup -\mathbb{C}Y = \alpha(X) \cup \alpha(Y)$.

(b) Se demuestra en forma análoga.

(c) $\alpha(\emptyset) = -\mathbb{C}\emptyset = -\mathbf{B}_n = \mathbf{B}_n$. Luego por P1) tenemos $\emptyset = \alpha(\alpha(\emptyset)) = \alpha(\mathbf{B}_n)$.

(d) Es una consecuencia inmediata de (a), (b), y (c).

Por lo tanto α establece un isomorfismo entre las álgebras de Boole $\mathcal{P}(\mathbf{B}_n)$ y $\mathcal{P}(\mathbf{B}_n^*)$.

P4) Sea $z \in \alpha(X) = -\mathbb{C}(X) = \mathbb{C} - X$, e (1) $y \leq z$. Si $y \notin \alpha(X)$ entonces $y \in -X$, y por lo tanto $y = -x$ con $x \in X$. Entonces de (1) resulta $-z \leq -y = x$, y como $x \in X \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n)$ resulta que $-z \in X$ esto es $z \in -X$ y por lo tanto $z \notin \mathbb{C} - X = \alpha(X)$. Absurdo.

P5) Por hipótesis (1) $X \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n)$ y (2) $N[X] = r$, $0 \leq r \leq 2^n$. De (1) resulta por P3) que (3) $\alpha(X) \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n)$ y de (2) que $N[-X] = N[X] = r$. Luego como $X \subseteq \mathbf{B}_n$ tenemos que (4) $N[\alpha(X)] = N[\mathbb{C} - X] = 2^n - r$. De (3) y (4) : $\alpha(X) \in C_{n,2^n-r}$.

- P6) Por P4) ya sabemos que si $X \in C_{n,r}$ entonces $\alpha(X) \in C_{n,2^n-r}$. Si $Y \in C_{n,2^n-r}$ entonces por P4) $X = \alpha(Y) \in C_{n,r}$ y por lo tanto $\alpha(X) = Y$. Tenemos así que la transformación α restringida al conjunto $C_{n,r}$ es una suryección en el conjunto $C_{n,2^n-r}$ y como α es inyectiva la demostración está terminada.
- P7) Si $\alpha(X) = X$, entonces $N[X] = N[\alpha(X)] = N[\mathbb{C} - X] = 2^n - N[X]$, luego $N[X] = 2^{n-1}$.
- P8) (i) Observemos que $-[x] = (-x)$ cualquiera que sea $x \in \mathbf{B}_n$ luego en particular (1) $-[a] = (-a)$ cualquiera que sea $a \in \mathcal{A}_n$. Además si $a \in \mathcal{A}_n$, esto es a es un elemento primo de $\mathbf{B}_n$, se deduce que $[a] \cap (-a) = \emptyset$ y $[a] \cup (-a) = \mathbf{B}_n$ y por lo tanto $[a] = \mathbb{C}(-a)$, esto es (2) $-[a] = -\mathbb{C}(-a) = \alpha((-a))$. De (1) y (2) tenemos $(-a) = \alpha((-a))$.
- (ii) $\alpha([a]) = \mathbb{C} - [a] = (\text{por (2) de (i)}) = \mathbb{C} - \mathbb{C}(-a) = -(-a) = (\text{por (1) de (i)}) = - - [a] = [a]$.
- P9) Como $\alpha(X) \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n)$, entonces por P7) $N[X] = 2^{n-1}$. Como por hipótesis $X \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n)$ entonces $X \notin \mathcal{I}(\mathbf{B}_n, t)$ cualquiera que sea t , $0 \leq t < n-1$, lo que equivale a decir que $X \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n, n-1) \cup \mathcal{I}(\mathbf{B}_n, n)$.
- P10) Sea $X \in R_d(n)$, esto es $X \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n)$, $X \cap \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n$ y $1 \leq N[X \cap \mathcal{D}_n] = r \leq n$. Sabemos que $\alpha(X) \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n)$. Si $\alpha(X) \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n, n)$ entonces $\mathcal{A}_n \subseteq \alpha(X) = -\mathbb{C}X$ y por lo tanto $\mathcal{D}_n = -\mathcal{A}_n \subseteq \mathbb{C}X$ esto es $\mathcal{D}_n \cap X = \emptyset$, absurdo.
- Luego $\alpha(X) \in \bigcup_{r=0}^{n-1} \mathcal{I}(\mathbf{B}_n, r)$. Si $\alpha(X) = (-a)$ para algún $a \in \mathcal{A}_n$ entonces por P1) y P8) (i) tenemos $X = \alpha(\alpha(X)) = \alpha((-a)) = (-a)$ y entonces $a \notin X$ lo que contradice $X \cap \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n$. Sea (1) $Y \in \bigcup_{r=0}^{n-1} \mathcal{I}(\mathbf{B}_n, r) \cap \mathbb{C}\{(-a_1), (-a_2), \dots, (-a_n)\}$, luego $Y \in \bigcup_{r=0}^{n-1} \mathcal{I}(\mathbf{B}_n, r)$, y por lo tanto $Y \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n, r)$ para algún r , $0 \leq r \leq n-1$. Además de (1) resulta que (2) $Y \cap \mathcal{D}_n = \emptyset$ pues los únicos elementos de $\bigcup_{r=0}^{n-1} \mathcal{I}(\mathbf{B}_n, r)$ que contienen átomos duales son precisamente $(-a_1), (-a_2), \dots, (-a_n)$ y que (3) $\mathcal{A}_n \not\subseteq Y$. Sea $Z = \alpha(Y)$ luego $Z \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n)$ y $\alpha(Z) = Y$. De (1) resulta utilizando P3) (a) que $\alpha(Y) \cup \alpha(\mathcal{D}_n) = \alpha(Y \cap \mathcal{D}_n) = \alpha(\emptyset) = \mathbf{B}_n$ esto es $Z \cup \mathbb{C}\mathcal{A}_n = Z \cup (\mathbb{C} - \mathcal{D}_n) = \mathbf{B}_n$, de donde resulta $\mathcal{A}_n \cap Z = \mathbf{B}_n \cap \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n$. Si $\mathcal{D}_n \cap Z = \emptyset$, entonces $\alpha(\mathcal{D}_n) \cup \alpha(Z) = \alpha(\mathcal{D}_n \cap Z) = \alpha(\emptyset) = \mathbf{B}_n$, esto es $\mathbb{C}\mathcal{A}_n \cup Y = (\mathbb{C} - \mathcal{D}_n) \cup Y = \mathbf{B}_n$ y por lo tanto $\mathcal{A}_n \cap Y = \mathcal{A}_n$, lo que contradice (1), luego $\mathcal{D}_n \cap Z \neq \emptyset$.

■

Corolario 3.1

$$(I) \quad N[FD(n)] = 2 \cdot \left(\sum_{r=0}^{2^{n-1}-1} N[C_{n,r}] \right) + N[C_{n,2^{n-1}}],$$

$$(II) \quad N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_n, n)] = \left(\sum_{t=0}^{n-1} N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_n, t)] \right) - n + N[R_0(n)].$$

Dem. De α función inyectiva y P6) se deduce inmediatamente (I). Observemos que este es un resultado conocido [21], pero determinado de modo diferente, ver tambien [6].
 (II) Por el Lema 3.1, $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_n, n)] = N[R_d(n)] + N[R_0(n)]$ y como $(-a_i] \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n, n-1)$ para $i = 1, 2, \dots, n$, por el Lema 3.2, P10) tenemos:

$$N[R_d(n)] = \left(\sum_{t=0}^{n-1} N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_n, t)] \right) - n.$$

■

Por lo tanto el conocimiento del número $N[R_0(n)]$, $n \in \mathbf{N}$, nos permitiría conjuntamente con los resultados del Teorema 3.1 la determinación de $N[FD(n)]$.

A partir de los diagramas de Hasse de las álgebras de Boole $\mathbf{B}_n$, para $1 \leq n \leq 4$, se determina en forma inmediata $N[R_0(n)]$, y por lo tanto:

$n = 1$)

- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_1, 0)] = 2.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_1, 1)] = 1.$

$n = 2$)

- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_2, 0)] = 2.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_2, 1)] = \binom{2}{1} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_1, 1)] = 2.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_2, 2)] = 2.$

$n = 3$)

- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_3, 0)] = 2.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_3, 1)] = \binom{3}{1} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_1, 1)] = 3.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_3, 2)] = \binom{3}{2} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_2, 2)] = 6.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_3, 3)] = (2 + 3 + 6) - 3 + N[R_0(3)] = 8 + 1 = 9.$

$n = 4$)

- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_4, 0)] = 2.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_4, 1)] = \binom{4}{1} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_1, 1)] = 4.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_4, 2)] = \binom{4}{2} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_2, 2)] = 12.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_4, 3)] = \binom{4}{3} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_3, 3)] = 36.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_4, 4)] = (2 + 4 + 12 + 36) - 4 + N[R_0(4)] = 50 + 64 = 114.$

Tenemos así el siguiente cuadro:

	$N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_n, t)]$					
n	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	$N[FD(n)]$
1	2	1	-	-	-	3
2	2	2	2	-	-	6
3	2	3	6	9	-	20
4	2	4	12	36	114	168

Para el caso $n = 5$ tenemos que:

- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_5, 0)] = 2.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_5, 1)] = \binom{5}{1} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_1, 1)] = 5.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_5, 2)] = \binom{5}{2} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_2, 2)] = 20.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_5, 3)] = \binom{5}{3} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_3, 3)] = 90.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_5, 4)] = \binom{5}{4} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_3, 3)] = 570.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_5, 5)] = 682 + N[R_0(5)].$

Observemos que $R_0(n)$ es un reticulado distributivo que tiene por primer elemento $P = \{0\} \cup \mathcal{A}_n$ y último elemento $U = \mathbf{B}_n \setminus (\{1\} \cup \mathcal{D}_n)$ y cuyos elementos primos son las secciones inferiores generadas por elementos de $Y_0(n) = \mathbf{B}_n \setminus (\{0, 1\} \cup \mathcal{A}_n \cup \mathcal{D}_n)$, por lo tanto $N[R_0(n)] = N[RB(Y_0(n))]$.

Veamos como determinamos $N[R_0(5)]$. Sea $Q(i, j)$ el conjunto cuyos elementos son de la forma:

$$\{0\} \cup \mathcal{A}_5 \cup Y \cup Z$$

donde Y es unión de i , $0 \leq i \leq 10$, secciones inferiores generadas por elementos de $S_{5,3}$ y Z es la unión de j , $0 \leq j \leq 10$ secciones inferiores generadas por elementos de $S_{5,2}$, que no pertenecen a Y , luego:

$$R_0(5) = \bigcup \{Q(i, j) : 0 \leq i \leq 10, 0 \leq j \leq 10\}.$$

Dadas i secciones inferiores generadas por elementos de $S_{5,3}$, su unión contiene un cierto número h de elementos del conjunto $S_{5,2}$ y por lo tanto no contiene $j = 10 - h$ elementos de $S_{5,2}$. Pero para cada i fijo el número j varia. Por ejemplo dadas i secciones inferiores generadas por elementos de $S_{5,3}$, su unión contiene un cierto número h de elementos de $S_{5,2}$ y por lo tanto su unión no contiene $j = 10 - h$ elementos de $S_{5,2}$. Dadas dos secciones inferiores generadas por elementos de $S_{5,3}$, dos casos se pueden presentar: (1) su unión no contiene a 4 elementos de $S_{5,2}$ ó (2) su unión no contiene a 5 elementos de $S_{5,2}$. El primer caso ocurre en 15 oportunidades y el segundo en 30, entonces $N[Q(2, 1)] = 15 \cdot \binom{4}{1} + 30 \cdot \binom{5}{1} = 210$.

En 1987, los entonces alumnos de la Licenciatura en Computación Laura y Julián Hernández, determinaron en su PC, en base a consideraciones teóricas que les suministrara, la siguiente tabla donde se indican el número de casos posibles para cada unión de i , $0 \leq i \leq 10$ secciones inferiores generadas por elementos de $S_{5,3}$ y j elementos de $S_{5,2}$ que no pertenecen a esa unión.

$i \setminus j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0
2	0	0	0	0	15	30	0	0	0	0	0
3	0	0	30	70	20	0	0	0	0	0	0
4	15	60	135	0	5	0	0	0	0	0	0
5	30	150	30	0	0	0	0	0	0	0	0
6	140	70	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	110	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Pongamos $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$ si $k \geq j$ y $\binom{k}{j} = 0$ si $k < j$. Luego $N[Q(i, j)] = \sum_{k=0}^{10} N(i, k) \binom{k}{j}$,

para $0 \leq i \leq 10$, $0 \leq j \leq 10$. Entonces:

$$N[Q(0, j)] = \binom{10}{j}, \quad 0 \leq j \leq 10,$$

$$N[Q(i, 0)] = \binom{10}{i}, \quad 0 \leq i \leq 10,$$

$$N[Q(1, j)] = 10 \cdot \binom{7}{j}, \quad 0 \leq j \leq 7,$$

$$N[Q(2, j)] = 15 \cdot \binom{4}{j} + 30 \cdot \binom{5}{j}, \quad 1 \leq j \leq 5,$$

$$N[Q(3, j)] = 30 \cdot \binom{2}{j} + 70 \cdot \binom{3}{j} + 20 \cdot \binom{4}{j}, \quad 1 \leq j \leq 4,$$

$$N[Q(4, j)] = 60 \cdot \binom{1}{j} + 135 \cdot \binom{2}{j} + 5 \cdot \binom{4}{j}, \quad 1 \leq j \leq 4,$$

$$N[Q(5, j)] = 150 \cdot \binom{1}{j} + 30 \cdot \binom{2}{j}, \quad 1 \leq j \leq 2,$$

$$N[Q(6, 1)] = 70,$$

$$N[Q(7, 1)] = 10.$$

Dado i , $0 \leq i \leq 10$, sea $Q(i) = \sum_{j=0}^{10} N[Q(i, j)]$, luego tenemos la siguiente tabla:

$i \setminus j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$Q(i)$
0	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	1.024
1	10	70	210	350	350	210	70	10	0	0	0	1.280
2	45	210	390	360	165	30	0	0	0	0	0	1.200
3	120	350	360	150	20	0	0	0	0	0	0	1.000
4	210	350	165	20	5	0	0	0	0	0	0	750
5	252	210	30	0	0	0	0	0	0	0	0	492
6	210	70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	280
7	120	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	130
8	45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	45
9	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$Q(j)$	1.024	1.280	1.200	1.000	750	492	280	130	45	10	1	6.212

Por lo tanto $N[R_0(5)] = \sum_{i=0}^{10} Q(i) = 6.212$, y $N[FD(5)] = 2+5+20+90+570+682+6.212 = 7.581$.

De acuerdo con los resultados conocidos tenemos que para $n = 6$:

- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_6, 0)] = 2.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_6, 1)] = \binom{6}{1} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_1, 1)] = 6.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_6, 2)] = \binom{6}{2} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_2, 2)] = 30.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_6, 3)] = \binom{6}{3} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_3, 3)] = 180.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_6, 4)] = \binom{6}{4} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_4, 4)] = 1.710.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_6, 5)] = \binom{6}{5} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_5, 5)] = 41.364.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_6, 6)] = (2 + 6 + 30 + 180 + 1.710 + 41.364) - 6 + N[R_0(6)] = 43.286 + R_0(6).$
Luego debe ser $N[R_0(6)] = 7.741.776$ y $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_6, 6)] = 7.785.062.$

$n = 7$)

- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_7, 0)] = 2.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_7, 1)] = \binom{7}{1} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_1, 1)] = 7.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_7, 2)] = \binom{7}{2} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_2, 2)] = 42.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_7, 3)] = \binom{7}{3} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_3, 3)] = 315.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_7, 4)] = \binom{7}{4} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_4, 4)] = 3.990.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_7, 5)] = \binom{7}{5} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_5, 5)] = 144.774.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_7, 6)] = \binom{7}{6} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_6, 6)] = 54.495.434.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_7, 7)] = (2 + 7 + 42 + 315 + 3.990 + 144.774 + 54.495.434) - 7 + N[R_0(7)] = 54.644.557 + N[R_0(7)].$
Luego debe ser $N[R_0(7)] = 2.414.572.751.877$ y $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_7, 7)] = 2.414.627.396.434.$

$n = 8$)

- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_8, 0)] = 2.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_8, 1)] = \binom{8}{1} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_1, 1)] = 8.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_8, 2)] = \binom{8}{2} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_2, 2)] = 56.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_8, 3)] = \binom{8}{3} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_3, 3)] = 504.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_8, 4)] = \binom{8}{4} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_4, 4)] = 7.980.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_8, 5)] = \binom{8}{5} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_5, 5)] = 386.064.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_8, 6)] = \binom{8}{6} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_6, 6)] = 217.981.736.$
- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_8, 7)] = \binom{8}{7} \cdot N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_7, 7)] = 19.317.019.171.472.$

- $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_8, 8)] = (2 + 8 + 56 + 504 + 7.980 + 386.064 + 217.981.736 + 19.317.019.171.472) - 8 + N[R_0(8)] = 19.317.237.547.814 + N[R_0(8)].$

Luego debe ser $N[R_0(8)] = 56.130.437.190.053.082.812.152$

y $N[\mathcal{I}(\mathbf{B}_8, 8)] = 56.130.437.209.370.320.359.966.$

Por el resultado indicado en el Corolario 3.1, (I) sabemos que:

$$N[FD(n)] = 2 \cdot \left(\sum_{r=0}^{2^{n-1}-1} N[C_{n,r}] \right) + N[C_{n,2^{n-1}}].$$

En la siguiente tabla indicamos los números $N[C_{n,r}]$, $1 \leq n \leq 5$, $0 \leq r \leq 2^{n-1}$ que nos permiten calcular $N[FD(n)]$.

	n	1	2	3	4	5
r	0	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1
	2		2	3	4	5
	3			3	6	10
	4			4	10	20
	5				13	35
	6				18	61
	7				19	95
	8				24	155
	9					215
	10					310
	11					387
	12					470
	13					530
	14					580
	15					605
	16					621
	$N[FD(n)]$	3	6	20	168	7.581

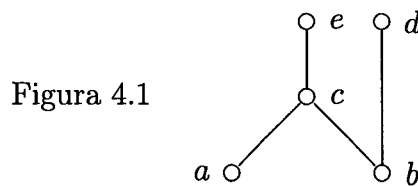
R. Church [6] en su tesis doctoral determinó estos números, por un procedimiento diferente.

4 Reticulados distributivos libres II

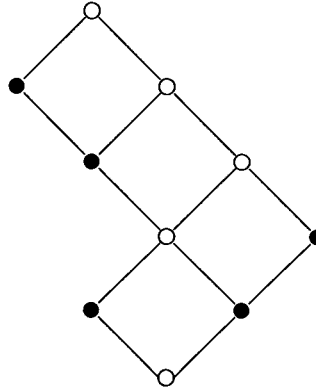
Si X es un conjunto ordenado y $x \in X$ pongamos:

$$\text{Cono}(x) = (x] \cup [x),$$

donde $[x) = \{y \in X : x \leq y\}$. Por ejemplo si X tiene el diagrama que se indica:



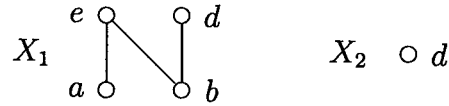
entonces $Cono(c) = \{a, b, c, e\}$ y $RB(X)$ tiene el siguiente diagrama:



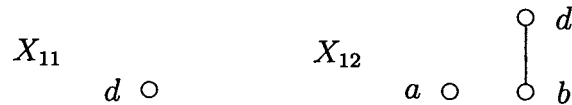
J. Berman and P. Köhler, [4], probaron que si X es un conjunto ordenado finito, entonces cualquiera que sea $x \in X$:

$$N[RB(X)] = N[RB(X - \{x\})] + N[RB(X - Cono(x))].$$

Este resultado nos dá información sobre el número de elementos de $RB(X)$ pero no sobre su estructura. En el ejemplo indicado en la Figura 4.1, si $x = c$ entonces $X_1 = X - \{c\}$, $X_2 = X - Cono(c)$ tienen los diagramas indicados a continuación:



en consecuencia $N[RB(X_2)] = 2$. Dado el elemento $e \in X_1$ entonces los conjuntos ordenados $X_{11} = X_1 \setminus \{e\}$ y $X_{12} = X_1 \setminus \{e\}$ tienen los siguientes diagramas:



y en consecuencia $N[RB(X_{11})] = 2$ y $N[RB(X_{12})] = 2 \times 3$. Por lo tanto $N[RB(X)] = 2 + 2 + 6 = 10$.

Observemos que $N[RB(\emptyset)] = 1$ y que si p es primer elemento del conjunto ordenado X entonces $X - Cono(p) = X - X = \emptyset$ y si u es último elemento de X entonces $X - Cono(u) = X - X = \emptyset$.

Si el conjunto ordenado finito X es la suma cardinal de dos conjuntos ordenados X_1 y X_2 esto es $X = X_1 + X_2$ entonces $RB(X) = RB(X_1) \times RB(X_2)$, y por lo tanto $N[RB(X)] = N[RB(X_1)] \times N[RB(X_2)]$.

Sea X un conjunto no vacío, R un reticulado distributivo acotado y $F(X, R)$ el conjunto de todas las funciones de X en R . Si $f, g \in F(X, R)$, pongamos por definición:

$$\begin{cases} (f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x) \\ (f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x) \end{cases} \quad \forall x \in X$$

entonces $F(X, R)$ es un reticulado distributivo acotado. Además las funciones $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ definidas por $\mathbf{0}(x) = 0$, $\mathbf{1}(x) = 1$ cualquiera que sea $x \in X$, son el primer y último elemento de $F(X, R)$ respectivamente.

Si X es un conjunto ordenado y R^X es el conjunto de todas las funciones isótonas de X en R , entonces $R^X \subseteq F(X, R)$, $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in R^X$ y es claro que si $f, g \in R^X$ entonces $f \wedge g, f \vee g \in R^X$. Por lo tanto R^X es un $(0, 1)$ -subreticulado de $F(X, R)$ y en consecuencia un reticulado distributivo con primer y último elemento.

Sea X un conjunto ordenado finito, luego $\mathbf{2}^X$ es un reticulado distributivo finito ya que es un subreticulado del reticulado distributivo finito $F(X, \mathbf{2})$. Es bien conocido que:

Lema 4.1 $RB(X)$ y $(\mathbf{2}^X)^*$ son reticulados distributivos isomorfos.

Por lo tanto si X es un conjunto ordenado finito, para determinar $N[RB(X)]$ nos basta determinar el número de funciones isótonas de X en $\mathbf{2}$.

En 1990 obtuve los siguientes que fueron expuestos en diversos cursos que dictara en la Universidad Nacional del Sur, y que nunca fueron publicados:

Sea t un elemento fijo de X y

$$F_{t,0} = \{f \in \mathbf{2}^X : f(t) = 0\}, \quad F_{t,1} = \{f \in \mathbf{2}^X : f(t) = 1\},$$

luego

$$F_{t,0} \cup F_{t,1} = \mathbf{2}^X \quad \text{y} \quad F_{t,0} \cap F_{t,1} = \emptyset$$

por lo tanto

$$N[\mathbf{2}^X] = N[F_{t,0}] + N[F_{t,1}].$$

En el último ejemplo indicado tenemos: si $t = c$, $N[\mathbf{2}^X] = 4 + 6$, si $t = b$, $N[\mathbf{2}^X] = 6 + 4$, y si $t = a$, $N[\mathbf{2}^X] = 7 + 3$.

Lema 4.2 1) Si p es primer elemento de X entonces $F_{p,1} = \{\mathbf{1}\}$.

2) Si u es último elemento de X entonces $F_{u,0} = \{\mathbf{0}\}$.

3) p es primer elemento de $X \iff X - [p] = \emptyset$.

4) u es último elemento de $X \iff X - (u] = \emptyset$.

5) t no es primer ni último elemento de $X \iff X - [t] \neq \emptyset$ y $X - (t] \neq \emptyset$

Dem. 1) y 2) se prueban sin dificultad.

3) $\implies$) Como $p \leq x$, $\forall x \in X$ entonces $X = [p]$.

$\impliedby$) Si $X - [p] = \emptyset$ entonces $X \subseteq [p]$ y como $[p] \subseteq X$ entonces $X = [p]$, por lo tanto p es primer elemento de X .

- 4) Se prueba en forma similar a la anterior.
 5) Es una consecuencia inmediata de 3) y 4).

■

Lema 4.3 Si t no es primer ni último elemento de X entonces $N[F_{t,0}] = N[2^{X-(t)}]$ y $N[F_{t,1}] = N[2^{X-(t)}]$.

Dem. Sea $f \in F_{t,0}$, esto es $f \in 2^X$ y $f(t) = 0$ luego:

$$(i) \quad f(x) = 0, \quad \forall x \in (t].$$

Sea $f^* = f|_{X-(t)}$, luego $f^* : X - (t) \rightarrow 2$ y es claro que f^* es isótona, luego $f^* \in 2^{X-(t)}$. Luego si definimos $H(f) = f^*$ tenemos que:

$$H : F_{t,0} \rightarrow 2^{X-(t)}.$$

Sea $f^* \in 2^{X-(t)}$, esto es $f^* : X - (t) \rightarrow 2$ y f^* es isótona. Pongamos por definición:

$$f(x) = \begin{cases} f^*(x), & \text{si } x \in X - (t) \\ 0, & \text{si } x \in (t] \end{cases} \quad x \in X$$

luego $f : X \rightarrow 2$ y por definición $f(t) = 0$.

Probemos que f es isótona. Sean $x, y \in X$ tales que $x \leq y$, entonces no puede ocurrir que $x \in X - (t)$ e $y \in (t]$ pues en este caso $y \leq t$ y como $x \leq y$ entonces tendríamos que $x \leq t$, esto es $x \in (t]$, absurdo. Luego sólo se pueden presentar los siguientes casos:

- a) $x, y \in (t]$.
 Entonces $f(x) = 0 \leq 0 = f(y)$.
 b) $x, y \in X - (t)$.
 $f(x) = f^*(x) \leq f^*(y) = f(y)$.
 c) $x \in (t], y \in X - (t)$.
 $f(x) = 0 \leq f^*(y) = f(y)$.

Ademas es claro que $H(f) = f|_{X-(t)} = f^*$, esto es H es suryectiva.

Vamos a probar que los conjuntos ordenados $F_{t,0}$ y $2^{X-(t)}$ son isomorfos.

Sean $f, g \in F_{t,0}$, tales que $f \leq g$, esto es $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in X$, luego en particular $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in X - (t)$, entonces

$$H(f) = f|_{X-(t)} \leq g|_{X-(t)} = H(g).$$

Recíprocamente si $f, g \in F_{t,0}$ son tales que $f|_{X-(t)} = H(f) \leq H(g) = g|_{X-(t)}$, como $f, g \in F_{t,0}$ esto es $f(x) = g(x) = 0$ para todo $x \in (t]$ entonces $f \leq g$. Acabamos así de probar que los conjuntos $F_{t,0}$ y $2^{X-(t)}$ son isomorfos y por lo tanto coordinables. En forma análoga se demuestra que $F_{t,1}$ y $2^{X-(t)}$ son coordinables.

Observemos que la hipótesis de que t no es primer ni último elemento de X sólo tiene importancia para que $X - (t) \neq \emptyset$ y $X - [t] \neq \emptyset$. ■

Tenemos así que:

- 1) Si t es primer elemento de X entonces $N[2^X] = N[F_{t,0}] + 1$.
- 2) Si t es último elemento de X entonces $N[2^X] = 1 + N[F_{t,1}]$.
- 3) Si t no es primer ni último elemento de X entonces $N[2^X] = N[2^{X-(t)}] + N[2^{X-[t]}]$ y por lo tanto:

$$N[RB(X)] = N[RB(X - (t))] + N[RB(X - [t])].$$

El problema consiste en determinar un elemento $t \in X$ de forma tal que sea fácil calcular $F_{t,0}$ y $F_{t,1}$ ó $2^{X-(t)}$ y $2^{X-[t]}$.

Observemos que el número de funciones isótonas de una cadena C_n con n elementos en una cadena C_m con m elementos es:

$$N[C_m^{C_n}] = \binom{m+n-1}{n}.$$

Luego si $m = 2$, que es el caso que nos interesa tenemos:

$$N[2^{C_n}] = \binom{2+n-1}{n} = n+1.$$

Sabemos que si X, Y, Z son conjuntos ordenados entonces:

$$X^Y \times X^Z \cong X^{Y+Z},$$

luego si ellos son finitos:

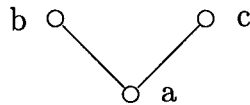
$$N[X^{Y+Z}] = N[X^Y] \cdot N[X^Z],$$

y si $X = 2$ e Y, Z son cadenas finitas tenemos que:

$$N[2^{Y+Z}] = (N[Y] + 1) \cdot (N[Z] + 1).$$

Por lo tanto si mediante la elección de un elemento $t \in X$ obtenemos que $X - (t)$ y $X - [t]$ son cadenas, o suma cardinal de cadenas, el cálculo de $N[2^X]$ es inmediato.

Sea X el conjunto ordenado indicado a continuación:



Si $t = a$)

Entonces $N[2^X] = N[F_{a,0}] + N[F_{a,1}] = N[F_{a,0}] + 1 = N[2^{X-(a)}] + 1$. Como $X - (a)$ tiene el siguiente diagrama, (es suma cardinal de 2 cadenas, cada una con 1 elemento):



entonces $N[RB(X)] = N[2^X] = (2 \times 2) + 1$.

Si $t = b$)

Entonces $X - (b)$ y $X - [b]$ tienen los diagramas que se indican a continuación:



y por lo tanto $N[RB(X)] = N[2^X] = 2 + 3 = 5$.

Si $t = c$)

Entonces $X - (c)$ y $X - [c]$ tienen los diagramas que se indican a continuación:



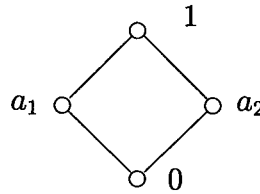
y por lo tanto $N[RB(X)] = N[2^X] = 2 + 3 = 5$.

Nuestro método y el de Berman y Khöler [4] dependen de los sucesivos elementos que se eligen. Creemos que nuestro procedimiento siempre utiliza menos “pasos” que el de estos autores.

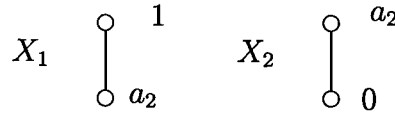
Apliquemos este método para los conjuntos ordenados $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, y $\mathbf{B}_3$.

Para $\mathbf{B}_1 = \{0, 1\}$, entonces $\mathbf{B}_1 \setminus (1] = \emptyset$ y $\mathbf{B}_1 \setminus [1] = \{0\}$, luego $N[FD(1)] = N[RB(\mathbf{B}_1)] = 1 + 2 = 3$.

El álgebra de Boole $\mathbf{B}_2$ tiene el diagrama indicado a continuación:

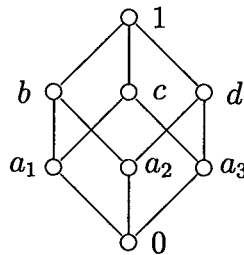


luego $X_1 = \mathbf{B}_2 \setminus (a_1]$ y $X_2 = \mathbf{B}_2 \setminus [a_1]$ tienen los siguientes diagramas.

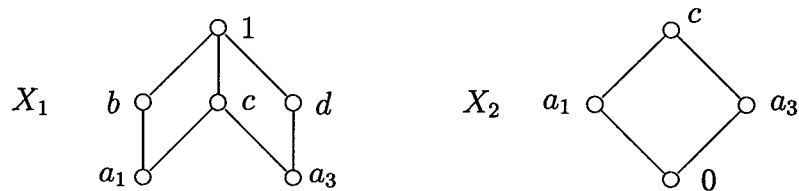


luego $N[FD(2)] = N[RB(\mathbf{B}_2)] = 3 + 3 = 6$.

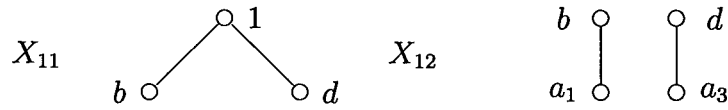
Consideremos ahora el álgebra de Boole $\mathbf{B}_3$, que tiene por diagrama:



entonces los conjuntos $X_1 = \mathbf{B}_3 \setminus (a_2]$ y $X_2 = \mathbf{B}_3 \setminus [a_2]$ tienen los siguientes diagramas:



Por lo tanto $N[RB(X_2)] = 6$. Consideremos el elemento $c \in X_1$, entonces $X_{11} = X_1 \setminus (c]$ y $X_{12} = X_1 \setminus [c)$ tienen los siguientes diagramas:



Entonces $N[RB(X_{12})] = 3 \times 3 = 9$. Consideremos el elemento $b \in X_{11}$. Entonces los conjuntos $X_{111} = X_{11} \setminus (b]$ y $X_{112} = X_{11} \setminus [b)$ tienen los siguientes diagramas:

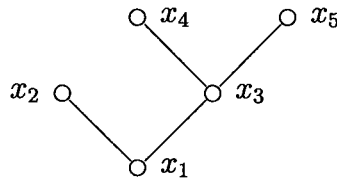


Por lo tanto $N[RB(X_{11})] = N[RB(X_{111})] + N[RB(X_{112})] = 3 + 2 = 5$. En consecuencia $N[RB(\mathbf{B}_3)] = 6 + 9 + 5 = 20$.

Dado un conjunto ordenado finito $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ le podemos asignar una matriz $n \times n$, $MI(X) = (a_{ij})$ denominada matriz de incidencia de X definida del siguiente modo:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \leq x_j \\ 0 & \text{si } x_i \not\leq x_j. \end{cases}$$

Por ejemplo si X es el conjunto indicado a continuación:



entonces

$$MI(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

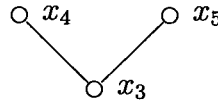
Obviamente esta matriz verifica: M1) $a_{ii} = 1$ cualquiera que sea i , $1 \leq i \leq n$, M2) Si $a_{ij} = 1$ donde $i \neq j$ entonces $a_{ji} = 0$, y M3) Si $a_{ij} = 1$ y $a_{jh} = 1$ entonces $a_{ih} = 1$.

Es bien conocido que existe una correspondencia biyectiva entre conjuntos ordenados, con n elementos y matrices $n \times n$ cuyos elementos son ceros y unos, y que verifican M1), M2) y M3).

En efecto dada el álgebra de Boole $\mathbf{2}$ representemos con $\mathbf{P}(n)$ el producto cartesiano de n álgebras de Boole iguales a $\mathbf{2}$ y con $\mathbf{P}^*(n)$ el álgebra de Boole dual de $\mathbf{P}(n)$. Dado i , $1 \leq i \leq n$, sea x_i el elemento de $\mathbf{P}^*(n)$ cuyas coordenadas son los elementos de la fila i , entonces $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq \mathbf{P}^*(n)$ es un conjunto ordenado y $MI(X) = M$.

Dado un conjunto ordenado $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ si $X_1 = X \setminus (x_h]$ entonces al conjunto ordenado X_1 le corresponde la matriz de incidencia que se obtiene a partir de $MI(X)$ eliminando las filas F_i tales que $a_{ih} = 1$ y si $I(h) = \{i : a_{ih} = 1\} = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ tambien eliminamos las columnas $i_1, i_2, \dots, i_r$. Si $X_2 = X \setminus [x_h)$ entonces al conjunto ordenado X_2 le corresponde la matriz de incidencia que se obtiene a partir de $MI(X)$ eliminando las columnas C_j tales que $a_{hj} = 1$ y si $J(h) = \{j : a_{hj} = 1\} = \{j_1, j_2, \dots, j_s\}$ tambien eliminamos las filas $j_1, j_2, \dots, j_s$.

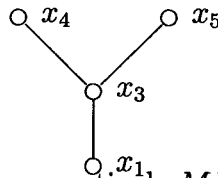
Por ejemplo si X es el conjunto ordenado indicado anteriormente entonces $X_1 \setminus (x_2]$ tiene por diagrama:



y su matriz de incidencia que se obtiene a partir de $MI(X)$ eliminando las filas y columnas 1 y 2 es

$$MI(X_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

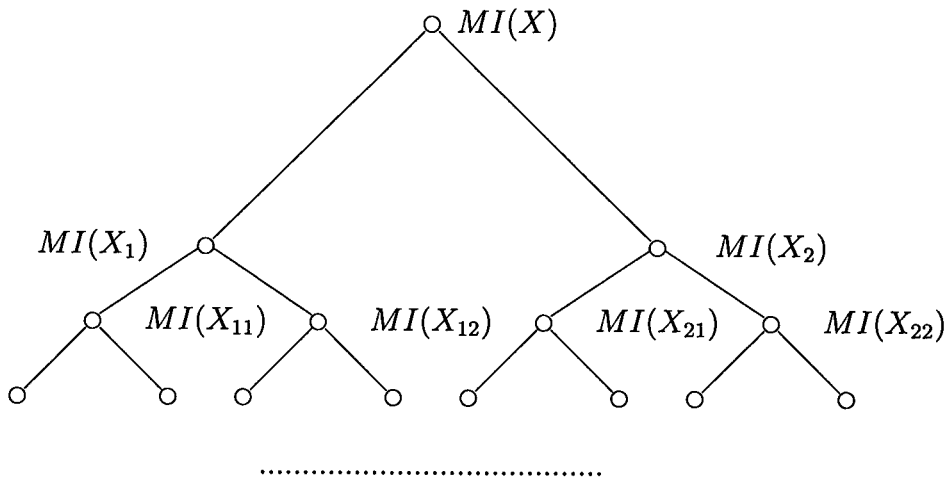
Y el conjunto $X_2 \setminus [x_2)$ tiene por diagrama:



y su matriz de incidencia que se obtiene a partir de $MI(X)$ eliminando la columna 2 y la fila 2 es

$$MI(X_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces dado un conjunto ordenado finito X , siguiendo el procedimiento indicado anteriormente obtenemos el siguiente esquema:



que nos permite, mediante un número finito de pasos, determinar conjuntos ordenados Y para los cuales es inmediato calcular $N[RB(Y)]$.

Vimos que $N[FD(n)]$ para $n = 1, 2, 3, 4$ se calculan inmediatamente a partir de los diagramas de $\mathbf{B}_n$. Por el Lema 3.1 y el Corolario 3.1 sabemos que para calcular $N[FD(n)]$ nos basta determinar $N[R_0(n)]$, donde $R_0(n)$ es el conjunto de las secciones inferiores que contienen los n átomos de $\mathbf{B}_n$ y no contienen ninguno de los átomos duales de $\mathbf{B}_n$. Con $\mathcal{D}_n$ representamos el conjunto de los átomos duales de $\mathbf{B}_n$, entonces $N[R_0(n)]$ es igual a $N[Y_0(n)]$, donde $Y_0(n) = \mathbf{B}_n \setminus (\{0, 1\} \cup \mathcal{A}_n \cup \mathcal{D}_n)$. La matriz de incidencia de $Y_0(n)$ es de orden $2^n - 2(n+1)$ para $n \geq 4$. Para $n = 4$ la matriz de incidencia es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso tomando $x_{11} = 1$ obtenemos dos matrices M_1, M_2 iguales y siguiendo con este procedimiento llegaremos a 16 matrices iguales a

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a las que les corresponden anticadenas Z con 2 elementos, luego $N[Z] = 4$ y por lo tanto en este caso $N[Y_0(4)] = 16 \times 4 = 2^6 = 64$.

Lema 4.4 Si X es un conjunto ordenado finito con primer elemento p entonces

$$N[RB(X \setminus \{p\})] = N[RB(X)] - 1.$$

Dem. Si $N[X] = 1$ y $X = \{p\}$ entonces $X \setminus \{p\} = \emptyset$, luego $N[RB(X \setminus \{p\})] = N[RB(\emptyset)] = 1$ y $N[RB(X)] = 2$. Supongamos que $N[X] \geq 2$ y probemos que

$$N[2^{(X \setminus \{p\})}] = N[2^X] - 1.$$

En efecto si $f \in 2^X$ entonces claramente la restricción f' de f al conjunto $X \setminus \{p\}$, es una función isótoma de $X \setminus \{p\}$ en $\mathbf{2}$. Recíprocamente dado un elemento f' de $2^{(X \setminus \{p\})}$ entonces la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = p \\ f'(x) & \text{si } x \in X \setminus \{p\} \end{cases}$$

es un elemento de 2^X cuya restricción al conjunto $X \setminus \{p\}$ coincide con f' . Consideremos los siguientes elementos de 2^X :

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = p \\ 1 & \text{si } x \in X \setminus \{p\} \end{cases}$$

y

$$f_2(x) = 1, \quad \forall x \in X.$$

Entonces sus restricciones al conjunto $X \setminus \{p\}$ coinciden. Recíprocamente dado el elemento f' de $2^{(X \setminus \{p\})}$ definido por $f'(x) = 1, \forall x \in X \setminus \{p\}$, entonces las siguientes funciones pertenecen a 2^X :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = p \\ f'(x) = 1 & \text{si } x \in X \setminus \{p\} \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = p \\ f'(x) = 1 & \text{si } x \in X \setminus \{p\}. \end{cases}$$

Si $f, g \in 2^X \setminus \{f_1, f_2\}$ son tales que $f \neq g$ entonces sus restricciones son diferentes. ■

Lema 4.5 Si a es un átomo del álgebra de Boole $\mathbf{B}_n$, $n \geq 2$ entonces:

$$N[RB(\mathbf{B}_n)] = (2 \times N[RB(\mathbf{B}_{n-1})]) - 1 + N[RB(\mathbf{B}_n \setminus \{0, a, -a, 1\})].$$

Dem. Observemos que si a es un átomo de $\mathbf{B}_n$ entonces $\mathbf{B}_n \setminus [a] \cong \mathbf{B}_{n-1}$ luego $N[RB(\mathbf{B}_n \setminus [a])] = N[RB(\mathbf{B}_{n-1})]$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} N[RB(\mathbf{B}_n)] &= N[RB(\mathbf{B}_n \setminus [a])] + N[RB(\mathbf{B}_n \setminus (a))] = \\ &= N[RB(\mathbf{B}_{n-1})] + N[RB(\mathbf{B}_n \setminus (a))]. \end{aligned}$$

Pero por resultados indicados anteriormente sabemos que:

$$N[RB(\mathbf{B}_n \setminus (a))] = N[RB(\mathbf{B}_n \setminus \{0, a\})] =$$

$$N[RB((\mathbf{B}_n \setminus (a)) \setminus (-a))] + N[RB((\mathbf{B}_n \setminus (a)) \setminus [-a])].$$

Como $(\mathbf{B}_n \setminus (a)) \setminus (-a) = [a] \setminus \{a\}$ y $[a] \setminus \{a\} \cong \mathbf{B}_{n-1} \setminus \{0\}$ entonces por el Lema 4.4 podemos afirmar que $N[RB((\mathbf{B}_n \setminus (a)) \setminus (-a))] = N[RB(\mathbf{B}_{n-1})] - 1$.

Además $(\mathbf{B}_n \setminus (a)) \setminus [-a] = \mathbf{B}_n \setminus \{0, a, -a, 1\}$, luego:

$$N[RB(\mathbf{B}_n)] = (2 \times N[RB(\mathbf{B}_{n-1})]) - 1 + N[RB(\mathbf{B}_n \setminus \{0, a, -a, 1\})].$$

■

Apliquemos este resultado a $\mathbf{B}_2$, entonces:

$$N[RB(\mathbf{B}_2 \setminus (a_1))] = (2 \times N[RB(\mathbf{B}_1)]) - 1 + N[RB(\emptyset)] = (2 \times 3) - 1 + 1 = 6.$$

Para el álgebra de Boole $\mathbf{B}_3$ tenemos:

$$N[RB(\mathbf{B}_3 \setminus (a_1))] = (2 \times N[RB(\mathbf{B}_2)]) - 1 + N[RB((\mathbf{B}_3 \setminus \{0, a_1, -a_1, 1\}))].$$

Como el conjunto $\mathbf{B}_3 \setminus \{0, a_1, -a_1, 1\}$ tiene por diagrama:



entonces $N[RB((\mathbf{B}_3 \setminus \{0, a_1, -a_1, 1\}))] = 3 \times 3 = 9$, luego $N[RB(\mathbf{B}_3)] = (2 \times 6) - 1 + 9 = 20$.

Teniendo en cuenta el Lema 4.5 una vez determinado $N[RB(\mathbf{B}_{n-1})]$ aplicando, el método indicado anteriormente a la matriz de incidencia del conjunto $\mathbf{B}_n \setminus \{0, a, -a, 1\}$, que es de orden $2^n - 4$ para $n \geq 3$, podemos determinar $N[RB(\mathbf{B}_n)]$.

Lema 4.6 Si a y b son átomos diferentes del álgebra de Boole $\mathbf{B}_n$, donde $n \geq 3$ entonces:

$$N[RB(\mathbf{B}_n)] = (3 \times N[RB(\mathbf{B}_{n-1})]) - N[RB(\mathbf{B}_{n-2})] - 1 + N[RB(\mathbf{B}_n \setminus Y)],$$

donde $Y = \{0, a, -a, b, 1\}$.

Dem. Sabemos que:

$$N[RB(\mathbf{B}_n)] = N[RB(\mathbf{B}_n \setminus [a])] + N[RB(\mathbf{B}_n \setminus (a))]$$

luego

$$N[RB(\mathbf{B}_n \setminus (a))] = N[RB(\mathbf{B}_n)] - N[RB(\mathbf{B}_n \setminus [a])]$$

y como $\mathbf{B}_n \setminus [a] \cong \mathbf{B}_{n-1}$ tenemos que:

$$(1) \quad N[RB(\mathbf{B}_n \setminus (a))] = N[RB(\mathbf{B}_n)] - N[RB(\mathbf{B}_{n-1})].$$

Sea $X = \mathbf{B}_n \setminus \{0, a, -a, 1\}$, luego $b \in X$ e $X \setminus (b) = \mathbf{B}_n \setminus \{0, a, -a, b, 1\} = \mathbf{B}_n \setminus Y$ y por lo tanto:

$$(2) \quad N[RB(X)] = N[RB(X \setminus [b])] + N[RB(X \setminus (b))] = \\ N[RB(X \setminus [b])] + N[RB(\mathbf{B}_n \setminus Y)].$$

Con $\mathcal{A}_n$ representamos el conjunto de todos los átomos de $\mathbf{B}_n$. Como

$$X \setminus [b] = (\bigvee \{x : x \in \mathcal{A}_n, x \neq b\}) \setminus [a] = Z \text{ y } Z \cong \mathbf{B}_{n-1} \setminus (c),$$

donde c es un átomo de $\mathbf{B}_{n-1}$, entonces:

$$(3) \quad N[RB(X)] = N[RB(\mathbf{B}_{n-1} \setminus (c))] + N[RB(\mathbf{B}_n \setminus Y)].$$

Pero por (1) si c es un átomo de $\mathbf{B}_{n-1}$ entonces:

$$(4) \quad N[RB(\mathbf{B}_{n-1} \setminus (c))] = N[RB(\mathbf{B}_{n-1})] - N[RB(\mathbf{B}_{n-2})].$$

Luego de (3) y (4) resulta:

$$(5) \quad N[RB(X)] = N[RB(\mathbf{B}_{n-1})] - N[RB(\mathbf{B}_{n-2})] + N[RB(\mathbf{B}_n \setminus Y)].$$

Por el Lema 4.5 y (5) tenemos finalmente que:

$$N[RB(\mathbf{B}_n)] = (2 \times N[RB(\mathbf{B}_{n-1})]) - 1 + N[RB(X)] = \\ (2 \times N[RB(\mathbf{B}_{n-1})]) - 1 + N[RB(\mathbf{B}_{n-1})] - N[RB(\mathbf{B}_{n-2})] + N[RB(\mathbf{B}_n \setminus Y)] = \\ (3 \times N[RB(\mathbf{B}_{n-1})]) - N[RB(\mathbf{B}_{n-2})] - 1 + N[RB(\mathbf{B}_n \setminus Y)].$$

■

Apliquemos este resultado a $\mathbf{B}_3$. Si $Y = \{0, a_1, -a_1, a_2, 1\}$ entonces:

$$N[RB(\mathbf{B}_3)] = (3 \times N[RB(\mathbf{B}_2)]) - N[RB(\mathbf{B}_1)] - 1 + N[RB(\mathbf{B}_3 \setminus Y)].$$

Como el conjunto $\mathbf{B}_3 \setminus Y$ tiene por diagrama:



entonces $N[RB((\mathbf{B}_3 \setminus Y))] = 2 \times 3 = 6$, luego:

$$N[RB(\mathbf{B}_3)] = (3 \times 6) - 3 - 1 + 6 = 20.$$

Mi estimada ex-alumna, la Licenciada en Ciencias de la Computación Nancy Ferracutti elaboró un prototipo de programa, que describimos en §4.1, que partiendo de las matrices de incidencia correspondientes a las álgebras de Boole $\mathbf{B}_n$, $1 \leq n \leq 7$, calculó $N[FD(n)]$, cuyos resultados coinciden con los conocidos en la literatura. Lamentablemente no pudimos calcular $N[FD(8)]$.

Finalmente observemos que Berman y Köhler con un método, indicado en [4], sólo calculan $N[FD(n)]$, $1 \leq n \leq 6$ y para calcular $N[FD(7)]$ utilizan el conocimiento de todos los elementos de $FD(5)$, [5]. Nuestro método permite calcular directamente $N[FD(7)]$. D. Wiedemann [33] para calcular $N[FD(8)]$ utiliza el completo conocimiento del reticulado $FD(6)$.

4.1 Prototipo del programa de la Lic. Nancy Ferracutti

En primer lugar se genera $\mathbf{B}_n$ mediante la construcción de todas las n -uplas constituídas por ceros y unos. Si $n \leq 3$ se parte de la matriz de incidencia de $\mathbf{B}_n$ y si $n \geq 4$ se parte de la matriz de incidencia de $Y_0(n)$.

El programa está escrito en lenguaje Turbo Pascal 7.0 para DOS, con las consiguientes restricciones de uso de memoria de datos, impuestos por el ambiente.

Tales restricciones ocasionan, entre otras incomodidades, que el proceso recursivo de particionamientos de la matriz de incidencia $T = MI(\mathbf{B}_n)$ en dos matrices T_1 y T_2 deba ser manejado por el programador con una estructura de “pila”, y que dicha estructura resida en disco.

PROGRAM (input,output, salida,pila);

USES

Dos;

CONST

Maxrango= 100;
MaxDimnupla=10;

TYPE

TordenMatriz= 0..Maxrango + 1;
TDimupla= 0..MaxDimupla + 1;
Tbase=INTEGER;
TipoNupla = Array[1..MaxDimnupla]OF Tbase;
TipoMatriz = Array[1..MaxRango] OF INTEGER; {se simulan las
nuplas con enteros}

```

    Tipo Apilado = Record
        matriz: TipoMatriz;
        ordenmatriz: TOrdenMatriz; estipo2:boolean;
    end;
    TipoPila= File of TipoApilado;

```

PROGRAMA PRINCIPAL

BEGIN

```

    Assign (salida,'salida.txt');
    Rewrite (salida);
    numelem :=0;

    LeerDimnupla (n);

    GenerarMatrizInicial (n, matrizt, orden);
    PartirMatriz (n, matrizt, orden, numelem);

    Writeln ('La cantidad de elementos es: ', numelem);

    Close (salida)

```

END.

GENERAR MATRIZ INICIAL

```

PROCEDURE GenerarMatrizInicial (n: TDimnupla; var matrizt: TipoMatriz;
varorden: TOrdenMatriz);
BEGIN

```

```

    (Obtiene 2 elevado a la  $n$ )
    pot := Potencia(n);

    {Genera nupla por nupla la matriz inicial, No genera las siguientes
    nuplas: la nupla cuyos elementos son todos ceros, la nupla cuyos elementos son
    todos unos, las nuplas que tienen un solo cero y las que tienen un solo 1.}

```

```

    orden:=0;
    FOR i:=0 to pot-1 DO

```

BEGIN

```

        IF  $n \leq 4$  THEN

```

```

            BEGIN

```

```

                orden:=orden+1;
                matrizt [orden]:=i;

```

```

            END

```

```

        ELSE

```

```

            IF NOT Descartable (i,n) THEN

```

```

        BEGIN
            orden:=orden+1;
            matrizt [orden]:=i;
        END;

    END;

END;

PARTIR MATRIZ

PROCEDURE PartirMatriz (n: TDimnupla; matrizt: TipoMatriz; orden:
TOrdenMatriz; var numelem: longint);

BEGIN {PartirMatriz}

    Assign (pila, 'pila.dat');
    Rewrite (pila);
    numelem :=0;
    cantelem :=0; cantidad de elementos en la pila

    Apilar (cantelem, matrizt, orden, FALSE); {La matriz no es de tipo t2}

    Cantelem :=1;
    WHILE cantelem > 0 DO
    BEGIN

        {Si el orden de la matriz tope es  $\leq 2$ , se conoce cantidad de elementos}
        IF FOrdenTope (cantelem)  $\leq 2$  THEN
        BEGIN

            Tope (cantelem, matriztope, ordentope);
            numelen := numelen + ContarElem (ordentope, n, matriztope);
            Desapilar (cantelem, desapiladoest2);
            cantelem := cantelem -1;
            WHILE (desapiladoest2) AND (cantelement > 0) DO
            BEGIN

                Desapilar (cantelem, desapiladoest2);
                cantelem := cantelem -1;
            END;
            IF cantelem > 0 THEN
            BEGIN

                Tope (cantelem, matriztope, ordentope)
                GenerarMatrizT2 (matriztope, ordentope, n , matrizt2, orden 2);

                Apilar (cantelem, matrizt2, ordent2, TRUE);
                cantelemen := cantelemem + 1;
            END
        END
    END

```

```

END
ELSE
BEGIN
    Tope(cantelemem, matriztope, ordentope);
    GenerarMatrizT1 (matriztope, ordentope, n , matrizt1, orden 1);
    Apilar (cantelem, matrizt1, ordent1, FALSE);
    cantelemen := cantelemem + 1;
END
END

END

Close(pila);
END; {Partir Matriz}

```

Los resultados obtenidos ejecutando el prototipo en una PC Pentium Full Compatible, Tx Pro II MMX 233 Mhz., de 32 MB Ram, fueron los siguientes:

n	Horas	Minutos	Segundos	$N[FD(n)]$
2			2,48	6
3			1,59	20
4			1,76	168
5			5,99	7.581
6	1	14	9,35	7.828.354
7				2.414.682.040.998

5 Reticulados distributivos libres III

Vamos a comenzar por recordar algunos resultados sobre la determinación de una subálgebra de Boole generada por un conjunto finito. Para las demostraciones de los mismos consultar por ejemplo [24], [25].

Sea B un álgebra de Boole, G un subconjunto finito, no vacío, de B , notaremos con $SB(G)$ la subálgebra booleana de B generada por G . Recordemos si $x, y \in B$ y definimos $x + y = (-x \wedge y) \vee (x \wedge -y)$, entonces $x + 0 = x$ y $x + 1 = -x$.

Sea $\mathbf{P}(B, n) = \{p = (p_1, p_2, \dots, p_n) : p_i \in \{0, 1\} \subseteq B, 1 \leq i \leq n\}$, esto es, el conjunto $\mathbf{P}(B, n)$ está formado por todas las n -uplas de elementos $0, 1 \in B$. $\mathbf{P}(B, n)$ es el producto cartesiano de n álgebras de Boole iguales a $\{0, 1\} \subseteq B$, luego es un álgebra de Boole con n átomos, que son precisamente las n -uplas que tienen una única coordenada igual a 1 y las restantes iguales a 0.

Si $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\} \subseteq B$ y $p \in \mathbf{P}(B, n)$, notaremos con $m_p(G)$ o mas sencillamente m_p al elemento:

$$\bigwedge_{i=1}^n (g_i + p_i).$$

Estos elementos se denominan *combinaciones algebraicas elementales* de G . Observemos que de acuerdo con la definición precedente $g_i + p_i = g_i$ o $g_i + p_i = -g_i$.

Sea $m(G) = \{m_p : p \in \mathbf{P}(B, n)\}$, como $N[\mathbf{P}(B, n)] = 2^n$ entonces $N[m(G)] \leq 2^n$.

Lema 5.1 1) Si $p, q \in \mathbf{P}(B, n)$ y $p \neq q$ entonces $m_p \wedge m_q = 0$.

2) $\bigvee \{m_p : p \in \mathbf{P}(B, n)\} = 1$.

3) Si $p, q \in \mathbf{P}(B, n)$, $p \neq q$ y $m_p \leq m_q$ entonces $m_p = 0$.

4) $g_i = \bigvee \{m_p : p \in \mathbf{P}(B, n), p_i = 0\}$, $1 \leq i \leq n$.

Definición 5.1 Sea $(R, \wedge, \vee, 0, 1)$ un reticulado con primer y último elemento $0, 1$ y $X \subseteq R$, $N[X] = t$, notaremos:

$$S_0(X) = \{0\} \quad ; \quad S_1(X) = X,$$

$$S_j(X) = \{\bigvee y : y \in Y, Y \subseteq X, N[Y] = j\}, \quad 1 < j \leq t,$$

$$S(X) = \bigcup_{j=0}^t S_j(X).$$

$$I_0(X) = \{1\} \quad ; \quad I_1(X) = X,$$

$$I_j(X) = \{\bigwedge y : y \in Y, Y \subseteq X, N[Y] = j\}, \quad 1 < j \leq t,$$

$$I(X) = \bigcup_{j=0}^t I_j(X).$$

Lema 5.2 Si G es un subconjunto finito, con n elementos del álgebra de Boole B , entonces:

1) $SB(G) = S(m(G))$.

2) $\mathcal{A}(SB(G)) = \{m_p : m_p \in m(G), m_p \neq 0\}$.

Como $N[m(G)] \leq 2^n$ por el Lema 5.2, tenemos que $N[\mathcal{A}(SB(G))] \leq 2^n$ y en consecuencia $N[SB(G)] \leq 2^{(2^n)}$.

Sea $FB(n)$ el álgebra de Boole con un conjunto de $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ de generadores libres, y

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(FB(n), n) = \{p = (p_1, p_2, \dots, p_n) : p_i \in \{0, 1\} \subseteq FB(n), 1 \leq i \leq n\}.$$

Representaremos con $\mathbf{0}$ el elemento de $\mathbf{P}(n)$ que tiene todas sus coordenadas iguales a 0 y con $\mathbf{1}$ el elemento de $\mathbf{P}(n)$ que tiene todas sus coordenadas iguales a 1.

Es bien conocido que $N[FB(n)] = 2^{(2^n)}$, y que el conjunto $\mathcal{A}_{2^n}$ de los átomos de $FB(n)$ son precisamente los elementos $m_p = \bigwedge_{i=1}^n (g_i + p_i)$, donde $p \in \mathbf{P}(n)$. Si $x \in FB(n)$, $x \neq 0$ sabemos que $x = \bigvee \{a : a \in \mathcal{A}(x)\}$, donde $\mathcal{A}(x) = \{a \in \mathcal{A}_{2^n} : a \leq x\}$.

Sea $T = \{1, 2, \dots, n\}$. Dado $p \in \mathbf{P}(n)$ sean:

$$T_0(p) = \{t \in T : p_t = 0\}, \quad T_1(p) = \{t \in T : p_t = 1\},$$

entonces $0 \leq N[T_0(p)] = r \leq n$, $0 \leq N[T_1(p)] = s \leq n$, y $r + s = n$.

Vamos a definir un operador unario $\mathbf{C}$ sobre $FB(n)$ del siguiente modo:

- 1) $\mathbf{C}0 = 0$,
- 2) Si $a \in \mathcal{A}_{2^n}$, esto es $a = m_p$ para algún $p \in \mathbf{P}(n)$ entonces:

$$\mathbf{C}a = \mathbf{C}m_p = \bigwedge \{g_i + p_i : p_i = 0\} = \bigwedge \{g_i : i \in T_0(p)\}.$$

- 3) Si $x \in FB(n) \setminus (\{0\} \cup \mathcal{A}_{2^n})$ entonces $\mathbf{C}x = \bigvee \{\mathbf{C}a : a \in \mathcal{A}(x)\}$.

Lema 5.3 $(FB(n), \mathbf{C})$ es un álgebra de clausura.

Dem. Observemos que de acuerdo a la definición anterior $m_0 \leq \mathbf{C}a$ cualquiera que sea $a \in \mathcal{A}_{2^n}$, y como $T_0(\mathbf{1}) = \emptyset$ entonces $\mathbf{C}m_1 = 1$.

- 0) $\mathbf{C}0 = 0$. Por definición.

- 1) $x \leq \mathbf{C}x$.

Si $x = 0$ por definición $\mathbf{C}0 = 0$. Si $x = m_p$ entonces $\mathbf{C}m_p = \bigwedge \{g_i + p_i : p_i = 0\} \geq \bigwedge_{i=1}^n (g_i + p_i) = m_p$ y si $x \in FB(n) \setminus (\{0\} \cup \mathcal{A}_{2^n})$ entonces $\mathbf{C}x = \bigvee \{\mathbf{C}a : a \in \mathcal{A}(x)\} \geq \bigvee \{a : a \in \mathcal{A}(x)\} = x$.

- 2) $\mathbf{C}1 = 1$.

Es una consecuencia inmediata de C1).

- 3) Si $x \leq y$ entonces $\mathbf{C}x \leq \mathbf{C}y$.

Si $x = 0$ la propiedad es obviamente verificada. Si $x \neq 0$ entonces también $y \neq 0$ luego $x = \bigvee \{a : a \in \mathcal{A}(x)\}$, $y = \bigvee \{b : b \in \mathcal{A}(y)\}$ y además $\mathcal{A}(x) \subseteq \mathcal{A}(y)$ luego $\{\mathbf{C}a : a \in \mathcal{A}(x)\} \subseteq \{\mathbf{C}b : b \in \mathcal{A}(y)\}$ y por lo tanto $\mathbf{C}x \leq \mathbf{C}y$.

- 4) $\mathbf{C}(x \vee y) = \mathbf{C}x \vee \mathbf{C}y$.

Si alguno de elementos es igual a 0 ó a 1 la propiedad es obviamente verificada.

$$\mathbf{C}(x \vee y) = \mathbf{C}(\bigvee \{m_p : m_p \leq x\} \vee \bigvee \{m_q : m_q \leq y\}) =$$

$$\mathbf{C}\bigvee \{m_r : m_r \leq x \text{ ó } m_r \leq y\} = \bigvee \{\mathbf{C}m_r : m_r \leq x\} \vee \bigvee \{\mathbf{C}m_r : m_r \leq y\} = \mathbf{C}x \vee \mathbf{C}y.$$

- 5) $\mathbf{C}\mathbf{C}x = \mathbf{C}x$. Sea $a \in \mathcal{A}_{2^n}$. Si $a = m_0$ entonces $\mathbf{C}a = \mathbf{C}m_0 = m_0$ y por lo tanto $\mathbf{C}\mathbf{C}m_0 = \mathbf{C}m_0 = m_0$. Si $a = m_1$ entonces $\mathbf{C}a = \mathbf{C}m_1 = 1$ y como $1 = \bigvee \{a : a \in \mathcal{A}_{2^n}\}$ entonces $\mathbf{C}\mathbf{C}m_1 = \mathbf{C}1 = \bigvee \{\mathbf{C}a : a \in \mathcal{A}_{2^n}\} \geq \mathbf{C}m_1 = 1$.

Por lo tanto $\mathbf{C}\mathbf{C}m_1 = \mathbf{C}m_1$. Supongamos ahora que $a \in \mathcal{A}_{2^n} \setminus \{m_0, m_1\}$, entonces $a = m_p$, donde $T_0(p) \neq \emptyset$ y $T_1(p) \neq \emptyset$, $N[T_0(p)] = r$, $N[T_1(p)] = s$ y $r + s = n$. Además

$\mathbf{C}a = \mathbf{C}m_p = \bigwedge \{g_i + p_i : i \in T_0(p)\}$. Supongamos para simplificar que $\mathbf{C}m_p = \bigwedge_{i=1}^r g_i$,

luego $\mathbf{C}m_p$ es supremo de 2^{n-r} átomos de $FB(n)$. Pongamos:

$$a^{(j)} = \bigwedge_{i=1}^r g_i \wedge \bigwedge_{h=r+1}^{2^{n-r}} (g_h + p_h)$$

donde $p_h \in \{0, 1\}$, $1 \leq h \leq 2^{n-r}$.

Si $a^{(1)} = \bigwedge_{i=1}^r g_i \wedge \bigwedge_{h=r+1}^{2^{n-r}} -g_h$ entonces $\mathbf{C}a^{(1)} = \bigwedge_{i=1}^r g_i$ y $\mathbf{C}a^{(1)} \geq \mathbf{C}a^{(j)}$, $1 \leq j \leq 2^{n-r}$

luego $\mathbf{C}Cm_p = \bigvee_{j=1}^{2^{n-r}} \mathbf{C}a^{(j)} = \mathbf{C}a^{(1)} = Cm_p$.

Supongamos ahora que $x \in FB(n) \setminus (\{0\} \cup \mathcal{A}_{2^n})$, entonces $x = \bigvee \{a : a \in \mathcal{A}(x)\}$ luego $Cx = \bigvee \{\mathbf{C}a : a \in \mathcal{A}(x)\}$ luego teniendo en cuenta 4) y que acabamos de probar que $\mathbf{C}Ca = Ca$ cualquiera que sea $a \in \mathcal{A}_{2^n}$ podemos escribir:

$$\mathbf{C}Cx = \mathbf{C}(\bigvee \{\mathbf{C}a : a \in \mathcal{A}(x)\}) = \bigvee \{\mathbf{C}Ca : a \in \mathcal{A}(x)\} = \bigvee \{Ca : a \in \mathcal{A}(x)\} = Cx.$$

■

Sea $R(n) = \{x \in FB(n) : Cx = x\}$, es bien conocido que $R(n)$ es un $(0, 1)$ -subreticulado de $FB(n)$ que contiene al primer y último elemento de $FB(n)$.

Lema 5.4 $R(n)$ es isomorfo al reticulado $FD(n)$.

Dem.

1) $G \subseteq R(n)$.

Sea $p \in \mathbf{P}(n)$ tal que $p_i = 0$ y $p_j = 1$ para todo $j \neq i$, $1 \leq j \leq n$ entonces $Cm_p = g_i$ y por lo tanto $g_i \in R(n)$.

2) $SR(G) = R(n)$.

Como $G \subseteq R(n)$ y $R(n)$ es un $(0, 1)$ -subreticulado de $FB(n)$ entonces (i) $SR(G) \subseteq R(n)$. Es bien conocido que $SR(G) = S(I(G))$. Sea $r \in R(n)$, si $r \in \{0, 1\}$ entonces $r \in SR(G)$. Si $r \neq 0$ entonces $r = \bigvee \{m_p : m_p \leq r\}$ y por lo tanto

$$r = Cr = \bigvee \{Cm_p : m_p \leq r\}.$$

Pero por la definición de $\mathbf{C}$, $Cm_p \in I(G)$ esto es $r = Cm_{p_1} \vee Cm_{p_2} \dots \vee Cm_{p_t}$, donde $m_{p_j} \in I(G)$, luego $r \in S(I(G)) = SR(G)$. Acabamos así de probar que (ii) $R(n) \subseteq SR(G)$.

3) Sea f' una función de G en un reticulado acotado R' . Si $R' = \{0\}$ entonces $h'(x) = 0$ para todo $x \in R(n)$ es un homomorfismo que extiende a f' . Supongamos que R' no es trivial. Sabemos que R' es isomorfo a un $(0, 1)$ -subreticulado R^* del álgebra de Boole 2^X para un cierto conjunto X . Sea $\alpha : R' \rightarrow R^*$ un tal homomorfismo y $f = \alpha \circ f'$, luego $f : G \rightarrow R^*$. Como $FB(n)$ es un álgebra de Boole libre la función f se puede extender a un homomorfismo booleano $H : FB(n) \rightarrow 2^X$. Sea $h = H|_{R(n)}$ la restricción de H al conjunto $R(n)$, luego h es un homomorfismo de reticulados de $R(n)$ en 2^X . Sea $Y = \{y \in R(n) : h(y) \in R^*\}$. Es claro que $0, 1 \in Y$ pues $h(0) = 0 \in R^*$ y $h(1) = 1 \in R^*$. Además es evidente que Y es un subreticulado de $FB(n)$. Como $h(g) = H(g) = f(g) \in R^*$ cualquiera que sea $g \in G$, entonces $G \subseteq Y$, y en consecuencia $R(n) \subseteq Y$, y por lo tanto si $r \in R(n)$ entonces $r \in Y$ esto es $h(r) \in R^*$. Por lo tanto $h : R(n) \rightarrow R^*$ es un homomorfismo de reticulado que extiende a f . Sea $h' = \alpha^{-1} \circ h$, luego h' es un homomorfismo de $R(n)$ en R' y además $h'(g) = \alpha^{-1}(h(g)) = \alpha^{-1}(f(g)) = \alpha^{-1}(\alpha(f'((g)))) = f'(g)$.

■

Acabamos así de probar que $FD(n) = CFB(n)$, donde $\mathbf{C}$ es el operador de clausura definido anteriormente.

Lema 5.5 $\Pi(R(n)) = \{\mathbf{C}m_p : m_p \in m(G)\}$.

Dem.

1) $\{\mathbf{C}m_p : m_p \in m(G)\} \subseteq \Pi(R(n))$.

Por definición $\mathbf{C}m_p \neq 0$, cualquiera que sea $p \in \mathbf{P}(n)$. Supongamos que $\mathbf{C}m_p = x \vee y$, donde (1) $x, y \in R(n)$, luego $x \leq \mathbf{C}m_p$ e $y \leq \mathbf{C}m_p$. Por (1) tenemos que $\mathbf{C}x = x$, $\mathbf{C}y = y$. Como $m_p \leq \mathbf{C}m_p = x \vee y$, m_p es un átomo de $FB(n)$, $x, y \in FB(n)$ tenemos que $m_p \leq x$ ó $m_p \leq y$ y por lo tanto $\mathbf{C}m_p \leq \mathbf{C}x = x$ ó $\mathbf{C}m_p \leq \mathbf{C}y = y$

2) $\Pi(R(n)) \subseteq \{\mathbf{C}m_p : m_p \in m(G)\}$. Sea (i) $x \in \Pi(R(n)) \subseteq R(n)$, luego $x \neq 0$, por lo tanto $x = \bigvee \{m_p : m_p \leq x\}$. Como $x \in R(n)$ entonces $\mathbf{C}x = x$ y por lo tanto $x = \mathbf{C}x = \bigvee \{\mathbf{C}m_p : m_p \leq x\}$. Como $\mathbf{C}m_p \in R(n)$ y x es un elemento primo de $R(n)$ resulta que $x = \mathbf{C}m_p$ para algún $p \in \mathbf{P}(n)$. ■

Sea $S(n, t)$ el conjunto de todos los elementos de $FB(n)$ que son supremo de t átomos, $0 \leq t \leq 2^n$, y $S^*(n, t) = S(n, t) \cap R(n)$.

Lema 5.6 $N[S^*(n, t)] = N[S^*(n, 2^n - t)]$, para $0 \leq t \leq 2^{n-1}$

Dem. Es claro que:

$$S^*(n, 0) = \{0\}, \quad S^*(n, 2^n) = \{1\},$$

$$S^*(n, 1) = \{\bigwedge_{i=1}^n g_i\}, \quad S^*(n, 2^n - 1) = \{\bigvee_{i=1}^n g_i\}.$$

Observemos que si $x \in FB(n)$ verifica $m_1 \leq x$ entonces $1 = \mathbf{C}m_1 \leq \mathbf{C}x$ y por lo tanto $\mathbf{C}x = 1$. Esto significa que $R(n) \cap [m_1] = \{1\}$. Además como $m_0 \leq \mathbf{C}x$ cualquiera que sea $x \in FB(n) \setminus \{0\}$ entonces si $m_0 \notin \mathcal{A}(x)$ se tiene que $\mathbf{C}x \neq x$.

Sea $\mathbf{D}(n) = \mathbf{P}(n) \setminus \{m_1\}$ luego $N[\mathbf{D}(n)] = 2^n - 1$. Si $x \in S^*(n, t)$, $2 \leq t \leq 2^n - 1$, luego $\mathbf{C}x = x$ y $x = \bigvee \{m_p : p \in X_1(x) \subseteq \mathbf{D}(n)\}$ donde $N[X_1(x)] = t$. Sea $X_2(x) = \{0\} \cup (\mathbf{D}(n) \setminus X_1(x))$, luego $N[X_2(x)] = 1 + (2^n - 1 - t) = 2^n - t$, y (1) $0 \in X_2(x)$. Pongamos por definición $\varphi(x) = \bigvee \{m_p : p \in X_2(x)\}$. Observemos que $X_1(x) \cup X_2(x) = \mathbf{D}(n)$ y $X_1(x) \cap X_2(x) = \{0\}$. Veamos que φ establece una biyección entre $S^*(n, t)$ y $S^*(n, 2^n - t)$. De acuerdo con la definición $\varphi(x) \in S(n, 2^n - t)$. Probemos que $\mathbf{C}\varphi(x) = \varphi(x)$. Para ello es suficiente demostrar que $\mathcal{A}(\mathbf{C}\varphi(x)) \subseteq \mathcal{A}(\varphi(x))$ pues entonces $\mathbf{C}\varphi(x) \leq \varphi(x)$. Sea $a \in \mathcal{A}(\mathbf{C}\varphi(x))$, si $a = m_0$, por (1) sabemos que $a = m_0 \in \mathcal{A}(\varphi(x))$. Supongamos ahora que (2) $a = m_r \in \mathcal{A}(\mathbf{C}\varphi(x))$ donde $r \in \mathbf{D}(n) \setminus \{0\}$. Si (3) $a = m_r \notin \mathcal{A}(\varphi(x))$ entonces $m_r \in \mathcal{A}_{2^n}$ y $r \in X_1(x)$, luego $m_r \in \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\mathbf{C}x)$, por lo tanto $m_r \leq \bigvee \{\mathbf{C}m_p : p \in X_1(x)\}$, luego como m_p es un átomo de $FB(n)$ resulta que (3) $m_r \leq \mathbf{C}m_p$ para algún $p \in X_1(x)$ luego $\mathbf{C}m_p \not\leq \mathbf{C}\varphi(x)$ y por lo tanto $m_r \not\leq \mathbf{C}\varphi(x)$, lo que contradice (2).

Es claro que φ es suryectiva. Sean $x, y \in S^*(n, t)$ luego $x = \bigvee \{m_p : p \in X_1(x) \subseteq \mathbf{D}(n)\}$, $y = \bigvee \{m_q : q \in X_1(y) \subseteq \mathbf{D}(n)\}$ donde $N[X_1(x)] = t = N[X_1(y)] = t$. Supongamos que $x \neq y$, por lo tanto $X_1(x) \neq X_1(y)$ y en consecuencia $X_2(x) = \{0\} \cup (\mathbf{D}(n) \setminus X_1(x)) \neq \{0\} \cup (\mathbf{D}(n) \setminus X_1(y)) = X_2(y)$, luego $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. ■

Observemos que este es el mismo resultado que el indicado en el Lema 3.2, pero demostrado de un modo diferente.

Corolario 5.1 $N[FD(n)] = 2 \cdot \left(\sum_{t=0}^{2^{n-1}-1} N[S^*(n, t)] \right) + N[S^*(n, 2^{n-1})]$.

6 Reticulados distributivos libres IV

Dado un reticulado distributivo acotado, no trivial, R sean

$$P = R \times R \text{ y } \Delta(P) = \{(x, x) : x \in R\}.$$

Es claro que $\Delta(P)$ es un subreticulado del reticulado $R \times R$ que contiene al primer $(0, 0)$ y último $(1, 1)$ elemento de $R \times R$ y que además $\Delta(P)$ es isomorfo a R . Sea S_1 el $(0, 1)$ -subreticulado de $R \times R$ generado por el conjunto $\Delta(P) \cup \{(1, 0)\}$, que notaremos $S_1(P) = SR(\Delta(P), (1, 0))$. Es bien conocido que:

$$S_1(P) = SR(\Delta(P), (1, 0)) = \{d_1 \wedge (d_2 \vee (1, 0)) : d_1, d_2 \in \Delta(P)\}.$$

Como $d_1 = (x, x)$, $d_2 = (y, y)$, donde $x, y \in R$ entonces $d_1 \wedge (d_2 \vee (1, 0)) = (x, x) \wedge ((y, y) \vee (1, 0)) = (x, x \wedge y)$, por lo tanto

$$S_1(P) = SR(\Delta(P), (1, 0)) = \{(x, y) \in P : x \geq y\}.$$

Análogamente si consideramos $S_2(P) = SR(\Delta(P), (0, 1))$ entonces:

$$S_2(P) = SR(\Delta(P), (0, 1)) = \{(x, y) \in P : x \leq y\}.$$

Es claro que $S_1(P) \cap S_2(P) = \Delta(P)$ y que además $\beta : S_1(P) \rightarrow S_2(P)$ definida por $\beta((x, y)) = (y, x)$ establece un isomorfismo entre $S_1(P)$ y $S_2(P)$.

Lema 6.1 Sea $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ un conjunto de generadores de R , esto es $SR(G) = R$, y $G' = \{(g_i, g_i) : 1 \leq i \leq n\}$.

- a) El subconjunto $G'' = G' \cup \{(1, 0)\}$ de $R \times R$ genera al $(0, 1)$ -reticulado $S_1(P)$ de $R \times R$.
- b) Si G es un conjunto de generadores libres de R , esto es $R = FD(n)$, entonces G'' es un conjunto de $n + 1$ generadores libres de

$$S_1(n) = SR(\Delta(P(n)), (1, 0)),$$

donde $P(n) = FD(n) \times FD(n)$.

Dem.

- a) Por definición $G' \subseteq \Delta(P)$, luego como $\Delta(P) \subseteq S_1(P)$ y $(1, 0) \in S_1(P)$, tenemos que $G'' \subseteq S_1(P)$ y en consecuencia $SR(G'') \subseteq S_1(P)$. Como $\Delta(P)$ es un $(0, 1)$ -subreticulado de $P = R \times R$ y $G' \subseteq \Delta(P)$ entonces $SR(G') \subseteq SR(\Delta(P))$, pero como $\Delta(P)$ es un reticulado isomorfo a R y G genera a R entonces $SR(G') = \Delta(P)$. De $G' \subseteq G''$ resulta $SR(G') \subseteq SR(G'')$ y por lo tanto $SR(SR(G'), (1, 0)) \subseteq SR(SR(G''), (1, 0))$, pero como $(1, 0) \in G''$ entonces $SR(SR(G''), (1, 0)) = SR(G'')$. Tenemos así que $S_1(P) = SR(\Delta(P), (1, 0)) = SR(SR(G'), (1, 0)) \subseteq SR(G'')$.
- b) Por a) sabemos que G'' es un conjunto de generadores de $S_1(P(n))$. Sea A un reticulado distributivo acotado arbitrario y $f'' : G'' \rightarrow A$. Si A es trivial es obvio que f se extiende a un homomorfismo de $S_1(n)$ en A . Si A no es trivial entonces

$$\begin{cases} f''((g_i, g_i)) = x_i \in A, & 1 \leq i \leq n \\ f''((1, 0)) = a \in A. \end{cases}$$

Si consideramos la función $f : FD(n) \rightarrow A$ definida por $f(g_i) = x_i$, entonces f se puede extender a un homomorfismo $h : R \rightarrow A$. Vimos que $(x, y) \in S_1 \iff x \geq y$. Consideremos la función $h'' : S_1 \rightarrow A$ definida por:

$$h''((x, y)) = h(x) \wedge (h(y) \vee a).$$

Es claro que $h''((x, x)) = h(x)$ cualquiera que sea $x \in R$, luego en particular $h''((g_i, g_i)) = h(g_i) = f(g_i) = x_i = f''((g_i, g_i))$. Además $h''((1, 0)) = h(1) \wedge (h(0) \vee a) = 1 \wedge (0 \vee a) = a = f''((1, 0))$. Es fácil ver que h'' es un homomorfismo de reticulados.

■

Corolario 6.1 $FD(n+1) = \{(x, y) \in FD(n) \times FD(n) : x \geq y\}$.

Corolario 6.2 Si conocemos $N[[x]]$, cualquiera que sea $x \in FD(n)$, entonces:

$$N[FD(n+1)] = \sum_{x \in FD(n)} N[[x]].$$

En forma análoga se demuestra que:

Lema 6.2 $G'' = \Delta(P(n)) \cup \{0, 1\}$ es un conjunto de $n+1$ generadores libres de $S_2(n) = SR(\Delta(P(n)), (0, 1))$.

Luego:

Corolario 6.3 $FD(n+1) = \{(x, y) \in FD(n) \times FD(n) : x \leq y\}$.

Corolario 6.4 Si conocemos $N[[x]]$, cualquiera que sea $x \in FD(n)$, entonces:

$$N[FD(n+1)] = \sum_{x \in FD(n)} N[[x]].$$

Nuestro corolario 6.3 coincide con el Corolario 1.2 (1) de Berman y Köhler [4], y el corolario 6.4 es análogo a un resultado obtenido por A. Monteiro (ver §7), pero nuestras demostraciones son diferentes.

Si $S_1 = S_1(P)$ y $T_1 = SR(S_1, (0, 1))$. Vamos a probar que $T_1 = R \times R$. En efecto:

$$T_1 = SR(S_1, (0, 1)) \subseteq R \times R$$

y dado $(r_1, r_2) \in R \times R$, entonces $(r_1 \vee r_2, r_2), (r_1, 0) \in S_1$ y por lo tanto:

$$(r_1, r_2) = (r_1 \vee r_2, r_2) \wedge ((r_1, 0) \vee (0, 1)) \in T_1.$$

Si $S_2 = S_2(P)$ y $T_2 = SR(S_2, (1, 0))$ entonces también $T_2 = R \times R$.

Por el Corolario 6.3 sabemos que:

$$FD(n+1) = \{(x, y) \in FD(n) \times FD(n) : x \leq y\},$$

y hemos visto que el conjunto $\mathcal{I}(\mathbf{B}_n)$ es isomorfo a $FD(n)$. Por lo tanto si

$$Q(n) = \mathcal{I}(\mathbf{B}_n) \times \mathcal{I}(\mathbf{B}_n)$$

entonces:

$$FD(n+1) = \{(S, T) \in Q(n) : S \subseteq T\}.$$

Sabemos que $\emptyset \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n)$ luego $(\emptyset, T) \in FD(n+1)$ cualquiera que sea $T \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n)$, y como $\{0\} \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n)$ entonces $(\{0\}, T) \in FD(n+1)$ cualquiera que sea $T \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n) \setminus \{\emptyset\}$, luego

$$N[FD(n+1)] = N[FD(n)] + N[FD(n)] - 1 + N = (2 \times N[FD(n)]) - 1 + N,$$

donde N es un número a determinar. Observemos que este resultado coincide con el que indicamos en 4.5, pero con una demostración diferente.

Como $(S, S) \in FD(n+1)$ cualquiera que sea $S \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n)$, y ya hemos contabilizado $(\emptyset, \emptyset)$ y $(\{0\}, \{0\})$ entonces

$$N[FD(n+1)] = (2 \times N[FD(n)]) - 1 + N[FD(n)] - 2 + N' = 3 \times (N[FD(n)] - 1) + N',$$

donde N' es un número a determinar. Pero además $(S, \mathbf{B}_n) \in FD(n+1)$ cualquiera que sea $S \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n)$, luego como ya hemos contabilizado $(\emptyset, \mathbf{B}_n)$, $(\{0\}, \mathbf{B}_n)$ y $(\mathbf{B}_n, \mathbf{B}_n)$ tenemos que:

$$N[FD(n+1)] = 3 \times (N[FD(n)] - 1) + (N[FD(n)] - 3) + N'' = 4 \times (N[FD(n)] - 1) - 2 + N''$$

donde N'' es un número a determinar.

Observemos que si $n = 1$ entonces $\mathbf{B}_1 \setminus \{1\} = \{0\}$ y si $n > 1$ $\mathbf{B}_1 \setminus \{1\} \supset \{0\}$. Consideremos $n > 1$. Sabemos que $Z = \mathbf{B}_n \setminus \{1\} \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n)$ y que $S \subseteq Z$ cualquiera que sea $S \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n) \setminus \{\mathbf{B}_n\}$, luego $(S, Z) \in FD(n+1)$ cualquiera que sea $S \in \mathcal{I}(\mathbf{B}_n) \setminus \{\mathbf{B}_n\}$, y como ya hemos contabilizado (Z, Z) , $(\{0\}, Z)$ y $(\emptyset, Z)$ tenemos que: para $n > 1$:

$$N[FD(n+1)] = 4 \times (N[FD(n)] - 1) - 2 + N[FD(n) - 1] - 3 + N^* =$$

$$5 \times (N[FD(n)] - 1) - 5 + N^*$$

donde N^* es un número a determinar.

7 Reticulados distributivos libres V

Vamos a reproducir, con sólo algunas pequeñas modificaciones, los conceptos y resultados indicados por A. Monteiro, en su curso de 1962 (ver [22]).

Sea R un reticulado distributivo acotado, 0 y 1 el primer y último elemento de R . Diremos que un subconjunto S de R , es un subreticulado de R si: 1) $0, 1 \in S$ y 2) Si $x, y \in S$ entonces $x \wedge y, x \vee y \in S$. Si $G \subseteq R$ representamos con $SR_R(G)$ ó $SR(G)$ el subreticulado de R generado por G . Si $R = SR(G)$ diremos que G es un conjunto de generadores de R . Es claro que $SR(\emptyset) = \{0, 1\}$. Sea G un subconjunto no vacío de R e

$$i(G) = \left\{ \bigwedge_{f \in F} f : F \subseteq G, F \text{ finito, no vacío} \right\},$$

$$s(G) = \left\{ \bigvee_{f \in F} f : F \subseteq G, F \text{ finito, no vacío} \right\}.$$

Es bien conocido que $SR(G) = s(i(G)) \cup \{0, 1\} = i(s(G)) \cup \{0, 1\}$.

Definición 7.1 *Un subconjunto G de un reticulado distributivo acotado L se dice un conjunto de generadores libres de L si:*

L1) $SR(G) = L$, (esto es G es un conjunto de generadores de L .)

L2) Dada una función f de G en un reticulado distributivo acotado arbitrario A , existe un homomorfismo $h_f : L \rightarrow A$ que extiende a f , esto es $f(g) = h_f(g)$, $\forall g \in G$.

En este caso se suele decir que L es un reticulado distributivo acotado libre o que L es un reticulado distributivo acotado con un conjunto G de generadores libres.

Teorema 7.1 *(de Birkhoff) Para toda “álgebra” definida por igualdades, siempre existe el “álgebra” libre con un conjunto de generadores de cardinal prefijado.*

Lema 7.1 *Sean A, A' reticulados distributivos acotados, $h : A \rightarrow A'$ un homomorfismo de A en A' . Si $G \subseteq A$ es tal que $SR(G) = A$ entonces $SR(h(G)) = h(A)$. (esto es si G genera A entonces $h(G)$ genera el reticulado distributivo acotado $h(A)$.)*

Dem. Sea $A'_1 = SR(h(G))$, luego A'_1 es un subreticulado de A' y en consecuencia $A_1 = h^{-1}(A'_1)$ es un subreticulado de A . Además (1) $G \subseteq A_1$. En efecto si $g \in G$ entonces $h(g) \in h(G) \subseteq A'_1$ y por lo tanto $g \in h^{-1}(A'_1) = A_1$. De (1) resulta que $A = SR(G) \subseteq A_1$ esto es $A_1 = A$, y en consecuencia como h es una función de A sobre $h(A)$:

$$h(A) = h(A_1) = h(h^{-1}(A'_1)) = A'_1 = SR(h(G)).$$

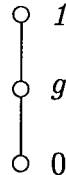
■

Lema 7.2 *Si L es un reticulado distributivo acotado con un conjunto de generadores libres G y A un reticulado distributivo acotado con un conjunto G' de generadores tal que $\text{card}(G) = \text{card}(G')$ entonces A es una imagen homomórfica de L .*

Dem. Como $\text{card}(G) = \text{card}(G')$ existe una biyección $f : G \rightarrow G'$. Luego como L es un reticulado distributivo acotado libre la función f se extiende a un homomorfismo $h_f : L \rightarrow A$ luego (1) $h_f(g) = f(g)$, $\forall g \in G$. Entonces por el lema 7.1 $SR(h_f(G)) = h_f(L)$, pero por (1) $h_f(G) = f(G) = G'$, luego $SR(G') = h_f(L)$ y como $SR(G') = A$ tenemos finalmente que $h_f(L) = A$. ■

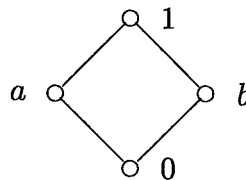
Observación 7.1 Este lema significa que L es el “mayor” reticulado distributivo acotado entre los que contienen un conjunto de generadores de cardinal igual al cardinal de G .

Ejemplo 7.1 a) Consideremos el reticulado distributivo acotado R_1 cuyo diagrama se indica a continuación:



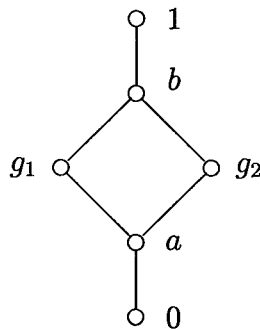
Sea $G = \{g\}$, luego $SR(G) = s(i(G)) \cup \{0, 1\} = \{g\} \cup \{0, 1\} = R_1$. Por lo tanto G es un conjunto de generadores de R_1 . Sea $f : R_1 \rightarrow A$, donde A es un reticulado distributivo acotado, luego $f(g) = a \in A$. Definiendo $h_f(g) = a$, $h_f(1) = 1$ y $h_f(0) = 0$, se comprueba que h_f es un homomorfismo de R_1 en A que extiende a f . Luego R_1 es un reticulado distributivo libre.

b) Consideremos el reticulado distributivo acotado A cuyo diagrama se indica a continuación



Sea $G = \{a, b\}$, entonces $SR(G) = A$. Por lo tanto G es un conjunto de generadores de A . Veamos que G no es un conjunto de generadores libres. Para ello consideremos la aplicación $f : A \rightarrow \mathbf{2} = \{0, 1\}$, donde $\mathbf{2}$ es el reticulado distributivo acotado de dos elementos, definida del siguiente modo: $f(a) = f(b) = 0$. Supongamos que h_f es un homomorfismo que extiende a f , entonces $1 = h_f(a \vee b) = h_f(a) \vee h_f(b) = 0$, absurdo. Por lo tanto no existe ningún homomorfismo de A en $\mathbf{2}$ que extienda a f . En consecuencia G no es un conjunto de generadores libres.

c) Sea R_2 el reticulado distributivo acotado cuyo diagrama es:



Consideremos ahora el conjunto $G = \{g_1, g_2\}$, entonces $s(i(G)) = \{a, g_1, g_2, b\}$ y por lo tanto $SR(G) = R_2$. Sea $f : G \rightarrow A$ donde A es un reticulado distributivo acotado arbitrario, $f(g_1) = a_1 \in A$, $f(g_2) = a_2 \in A$. Pongamos por definición: $h_f(g_1) = a_1$, $h_f(g_2) = a_2$, $h_f(a) = a_1 \wedge a_2$, $h_f(b) = a_1 \vee a_2$, $h_f(1) = 1$, $h_f(0) = 0$. Se verifica sin dificultad que h_f es un homomorfismo de R_2 en A que extiende a f . Luego R_2 es un reticulado distributivo acotado con un conjunto de generadores libres que tiene dos elementos.

Teorema 7.2 Sea G un conjunto de generadores de un reticulado distributivo acotado B y $f : G \rightarrow A$ una función de G en un reticulado distributivo acotado arbitrario A . Si existe un homomorfismo de $B \rightarrow A$ que extiende a f , el es único.

Dem. Sean h', h'' homomorfismos de B en A que extienden a f , esto es:

$$(1) \ h'(g) = f(g) \ \forall g \in G; \quad (2) \ h''(g) = f(g) \ \forall g \in G.$$

Consideremos el conjunto $X = \{x \in B : h'(x) = h''(x)\} \subseteq B$, entonces (1) $G \subseteq X$. En efecto si $g \in G$ entonces $h'(g) = f(g) = h''(g)$ y por lo tanto $g \in X$.

Sean $x, y \in X$ entonces $h'(x \wedge y) = h'(x) \wedge h'(y) = h''(x) \wedge h''(y) = h''(x \wedge y)$ luego $x \wedge y \in X$. Análogamente se prueba que $x \vee y \in X$. Como $h'(1) = h''(1)$ y $h'(0) = h''(0)$, entonces $0, 1 \in X$. Luego (2) X es subreticulado de B . De (1) y (2) resulta $B = SR(G) \subseteq X$ y por lo tanto $B = X$ esto es $h'(x) = h''(x)$, $\forall x \in B$. ■

Teorema 7.3 Si L_1 es un reticulado distributivo acotado con un conjunto de generadores libres G_1 , L_2 un reticulado distributivo acotado con un conjunto de generadores libres G_2 y si existe una biyección $f : G_1 \rightarrow G_2$, entonces $L_1 \cong L_2$.

Dem. Como L_1 es libre y $f : G_1 \rightarrow L_2$, esta función se puede extender a un homomorfismo $h_f : L_1 \rightarrow L_2$.

Como f es una biyección, entonces también $f^{-1} : G_2 \rightarrow G_1$ es una biyección.

Entonces como L_2 es libre y $f^{-1} : G_2 \rightarrow L_1$, esta función se puede extender a un homomorfismo $h_{f^{-1}} : L_2 \rightarrow L_1$.

Consideremos el homomorfismo $h = h_{f^{-1}} \circ h_f : L_1 \rightarrow L_1$, y sea:

$$X = \{x \in L_1 : h(x) = x\} \subseteq L_1.$$

a) $G_1 \subseteq X$.

Sea $g \in G_1$ luego $h(g) = h_{f^{-1}}(h_f(g)) = h_{f^{-1}}(f(g))$ y como $f(g) \in G_2$ tenemos finalmente $h(g) = f^{-1}(f(g)) = g$, luego $g \in X$.

b) X es un subreticulado de L_1 .

su demostración es obvia.

De a) y b) resulta que $L_1 = SR(G_1) \subseteq X$ y por lo tanto $L_1 = X$, y en consecuencia:

c) $h(x) = x$, $\forall x \in L_1$.

d) h_f es inyectiva.

Si $h_f(x) = h_f(y)$ entonces $h_{f^{-1}}(h_f(x)) = h_{f^{-1}}(h_f(y))$ esto es $h(x) = h(y)$ de donde resulta por c) que $x = y$.

e) h_f es suryectiva.

Como $SR(G_1) = L_1$ y $h_f : L_1 \rightarrow L_2$ es un homomorfismo entonces por el lema 7.1:
 $h_f(L_1) = SR(h_f(G_1)) = SR(f(G_1)) = SR(G_2) = L_2$.

■

Esto nos prueba que *el reticulado distributivo acotado con un conjunto de generadores libres G , es único a menos de isomorfismos.*

Dado un número cardinal c vamos a indicar una construcción, debida a A. Monteiro, del reticulado distributivo acotado con un conjunto de generadores libres de cardinal c .

Dado el reticulado distributivo $\mathbf{2}$, sea I un conjunto de cardinal c , y E el conjunto de todas las funciones de I en $\mathbf{2}$. Si $x \in E$ entonces para cada elemento $i \in I$, $x(i) = x_i \in \mathbf{2}$. Notaremos $x = (x_i)_{i \in I}$ o $x = (x_i)$. E es un reticulado distributivo acotado, donde el orden está definido por: Si $f, g \in E$ entonces $f \leq g \iff f(i) \leq g(i), \forall i \in I$. El primer elemento de E es la función definida por $0(i) = 0 \in \mathbf{2}, \forall i \in I$ y el último elemento es la función definida por $1(i) = 1 \in \mathbf{2}, \forall i \in I$.

Sea $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$ la familia de todos los subconjuntos de E , sabemos que $\mathcal{E}$ es un reticulado distributivo acotado, con primer elemento $\emptyset$ y último elemento E .

Si $i \in I$ sea $G_i = \{x \in E : x_i = 1\}$, por lo tanto $G_i \subseteq E, \forall i \in I$ esto es $G_i \in \mathcal{E}, \forall i \in I$. Observemos que el elemento $1 \in E$ pertenece a todos los conjuntos G_i . Luego $G_i \neq \emptyset, \forall i \in I$. Además el elemento 0 claramente no pertenece a ningún G_i , cualquiera que sea $i \in I$.

Tenemos así un subconjunto $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i \in I}$ del reticulado distributivo acotado $\mathcal{E}$ que verifica $\text{pot } \mathcal{G} = c$, lo que equivale a decir que $\text{pot } \mathcal{G} = \text{pot } I$. En efecto si ponemos por definición $\alpha(i) = G_i$, entonces α es una función de I sobre $\mathcal{G}$. Además α es inyectiva, ya que si $i, j \in I, i \neq j$, entonces el elemento $x \in E$ definido por $x(j) = 0$ y $x(k) = 1$ para todo $k \neq j$ verifica $x \notin G_j$ y $x \in G_i$.

Sea $\mathcal{L} = SR_{\mathcal{E}}(\mathcal{G})$, esto es $\mathcal{L}$ es el subreticulado acotado generado en $\mathcal{E}$ por $\mathcal{G}$. Vamos a demostrar que $\mathcal{G}$ es un conjunto de generadores libres de $\mathcal{L}$. Para ello debemos demostrar que dada un reticulado distributivo acotado arbitrario A y una función $f : \mathcal{G} \rightarrow A$, f se puede extender a un homomorfismo $h_f : \mathcal{L} \rightarrow A$.

PRIMER CASO) A tiene un sólo elemento. $A = \{0\}$, entonces si $f : \mathcal{G} \rightarrow A$, tendremos que $f(G_i) = 0, \forall G_i \in \mathcal{G}$ y por lo tanto la función $h_f(x) = 0, \forall x \in \mathcal{L}$ es un homomorfismo que extiende a f .

SEGUNDO CASO) A tiene mas de un elemento. Sea T el conjunto de todos los filtros primos de A , entonces sabemos que A es isomorfo a un subreticulado acotado $\mathcal{A}$ del reticulado distributivo acotado $\mathcal{P}(T)$ de todos los subconjuntos de T .

Sí f es una función de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{A}$ entonces $f(G_i) = H_i$ donde $H_i \in \mathcal{A}$ esto es $H_i \subseteq T$.

Vamos a definir una función $h_f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(T)$ de forma tal que h_f sea un homomorfismo que extienda a f . Una tal función debe hacer corresponder a cada subconjunto X de E un subconjunto de T , esto es

Si $X \subseteq E$ entonces $h_f(X) \subseteq T$.

Para cada $H_i \subseteq T$ consideremos la siguiente función $k_{H_i} : T \rightarrow \mathbf{2} = \{0, 1\}$.

$$k_{H_i}(t) = \begin{cases} 1 \in \mathbf{2} & \text{si } t \in H_i \\ 0 \in \mathbf{2} & \text{si } t \notin H_i \end{cases} \quad t \in T$$

y la función $K : T \rightarrow E$ definida por:

$$K(t) = (k_{H_i}(t))_{i \in I}, \quad t \in T.$$

Luego

$$h_f(X) = K^{-1}(X), \quad \text{donde } X \subseteq E$$

es una función de $\mathcal{P}(E)$ en $\mathcal{P}(T)$, que verifica $h_f(\emptyset) = \emptyset$, $h_f(E) = T$, $h_f(X \cap Y) = h_f(X) \cap h_f(Y)$, $h_f(X \cup Y) = h_f(X) \cup h_f(Y)$. Por lo tanto h_f es un homomorfismo de reticulados de $\mathcal{P}(E)$ en $\mathcal{P}(T)$. Probemos h_f es una extensión de f . Esto es que $h_f(G_j) = f(G_j) = H_j$, $\forall j \in I$, lo que equivale a demostrar que $K^{-1}(G_j) = H_j$, $\forall j \in I$.

En efecto $t \in K^{-1}(G_j) \iff K(t) \in G_j \iff (k_{H_i}(t))_{i \in I} \in G_j \iff k_{H_j}(t) = 1 \iff t \in H_j$.

Veamos finalmente que el homomorfismo h_f toma sus valores en $\mathcal{A}$, esto es que $h_f(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{A}$. Sea $\mathcal{L}' = \{X \in \mathcal{P}(E) : h_f(X) \in \mathcal{A}\}$, entonces:

1) $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{L}'$.

En efecto si $G_i \in \mathcal{G}$, entonces $h_f(G_i) = f(G_i) = H_i \in \mathcal{A}$, luego $G_i \in \mathcal{L}'$ para todo $i \in I$.

2) $\mathcal{L}'$ es un subreticulado acotado de $\mathcal{P}(E)$.

Como $h_f(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$, $h_f(E) = T \in \mathcal{A}$, entonces $\emptyset, E \in \mathcal{A}$. Si $X, Y \in \mathcal{L}'$ entonces $h_f(X), h_f(Y) \in \mathcal{A}$, y como $\mathcal{A}$ es un subreticulado de $\mathcal{P}(T)$ tenemos que $h_f(X) \cap h_f(Y) \in \mathcal{A}$, $h_f(X) \cup h_f(Y) \in \mathcal{A}$.

De 1) y 2) se deduce que (3) $\mathcal{L} = SR_{\mathcal{E}}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{L}'$. Por lo tanto si $Y \in h_f(\mathcal{L})$ esto es (4) $Y = h_f(X)$ donde (5) $X \in \mathcal{L}$. De (5) y (3) resulta $X \in \mathcal{L}'$ y por lo tanto $Y = h_f(X) \in \mathcal{A}$.

El siguiente Lema fué demostrado por A. Monteiro para el caso de reticulados distributivos libres. La demostración que indicamos a continuación, que es mas general y diferente, está inspirada en los resultados de este autor.

Lema 7.3 *Sea R un reticulado distributivo acotado, no trivial, $G \subseteq R$ tal que $SR(G) = R$, y $\mathcal{E}(R)$ el conjunto de todos los filtros primos de R , entonces:*

I) *Si $P \in \mathcal{E}(R)$, $x \in P$, $x \neq 1$, existe un subconjunto finito no vacío G_0 de G tal que $G_0 \subseteq P$ y $\bigwedge \{g : g \in G_0\} \leq x$.*

II) *Si $P \in \mathcal{E}(R)$ tiene mas de un elemento entonces $P \cap G \neq \emptyset$.*

III) *Si $P_1, P_2 \in \mathcal{E}(R)$ son tales que $P_1 \cap G \subseteq P_2 \cap G$ entonces $P_1 \subseteq P_2$.*

IV) *Si $P_1, P_2 \in \mathcal{E}(R)$ son tales que $P_1 \cap G = P_2 \cap G$ entonces $P_1 = P_2$.*

Dem.

I) Como P es un filtro primo y (1) $x \in P$ entonces $x \neq 0$, luego como por hipótesis $x \neq 1$ tenemos que $x \in SR(G) = s(i(G))$, luego:

$$(2) \quad x = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$$

donde (3) $x_j \in i(G)$ para $1 \leq j \leq n$.

Como P es primo de (1) y (2) resulta que existe un j ($1 \leq j \leq n$) tal que (4) $x_j \in P$. Por (3) tenemos que

$$(5) \quad x_j = g_1 \wedge g_2 \wedge \dots \wedge g_h$$

donde $g_s \in G$ para $1 \leq s \leq h$. Luego (6) $G_0 = \{g_1, g_2, \dots, g_h\} \subseteq G$, y G_0 es no vacío y como $x_j \leq g_r$ cualquiera que sea r , $1 \leq r \leq h$, y P es un filtro, de (4) resulta que $g_r \in P$ cualquiera que sea r , $1 \leq r \leq h$, luego $G_0 \subseteq P$. Por (2) $x_j \leq x$, $1 \leq i \leq n$, en particular $\bigwedge \{g : g \in G_0\} = x_j \leq x$.

II) Como P tiene mas de un elemento, existe $x \in P$ tal que $x \neq 1$, luego por I) $P \cap G \neq \emptyset$.

III) Si $P_1 \neq P_2$, existe $x \in P_1$ tal que $x \notin P_2$, luego $x \neq 1$ entonces por I) existe un subconjunto no vacío G_0 de G tal que (1) $G_0 \subseteq P_1$ y (2) $x_0 = \bigwedge \{g : g \in G_0\} \leq x$. Por lo tanto de (1) y la hipótesis resulta (3) $G_0 \subseteq G \cap P_1 \subseteq G \cap P_2 \subseteq P_2$. Como P_2 es un filtro de (3) y (2) resulta $x_0 \in P_2$ y en consecuencia $x \in P_2$, absurdo.

IV) Es una consecuencia inmediata de 3).

■

Corolario 7.1 Si G es un conjunto de generadores de un reticulado distributivo acotado, no trivial, R y P un filtro primo de R que contiene mas de un elemento, entonces P contiene por lo menos uno de los generadores de R .

Dem. Si P contiene mas de un elemento, existe $x \in P$ tal que $x \neq 1$, luego por el Lema 7.3, I) existe un subconjunto, no vacío de G tal que $G_0 \subseteq P$. Luego $G \cap P \neq \emptyset$. ■

Sea $\mathcal{L}$ el reticulado distributivo acotado con un conjunto de generadores de cardinal c y $\Pi_{\mathcal{L}}$ el conjunto de todos los filtros primos de $\mathcal{L}$. Entonces $(\Pi_{\mathcal{L}}, \subseteq)$ es un conjunto ordenado. Sea I un conjunto de cardinal c , y consideremos el conjunto $\mathcal{P}(I)$ de todos los subconjuntos de I , luego $(I, \subseteq)$ tambien es un conjunto ordenado. A. Monteiro en 1962, demostró que $\Pi_{\mathcal{L}}$ e I son conjuntos ordenados isomorfos, y para ello indicó la siguiente demostración (ver [22]):

Dada el álgebra de Boole $\mathbf{2}$, y un conjunto I de cardinal c sea E el conjunto de todas las funciones de I en $\mathbf{2}$. Consideremos la función $\beta : E \rightarrow 2^{\mathcal{L}}$ definida del siguiente modo:

$$\beta(p) = \{X \in \mathcal{L} : p \in X\}, \quad \text{donde } p \in E.$$

Probemos que:

1) β es inyectiva.

En efecto, sean $p, q \in E$ tales que $p \neq q$, luego existe $i \in I$ tal que $p_i \neq q_i$, y como $p_i, q_i \in \mathbf{2}$ entonces (1) $p_i = 1$ y $q_i = 0$ ó (2) $p_i = 0$ y $q_i = 1$. Si ocurre (1) entonces $p \in G_i$ y $q \notin G_i$, esto es existe $i \in I$ tal que $G_i \in \beta(p)$ y $G_i \notin \beta(q)$, luego $\beta(p) \neq \beta(q)$. Si ocurre (2) la demostración es análoga.

2) $\beta(p)$ es un filtro primo de $\mathcal{L}$.

Para ello debemos probar que:

a) $E \in \beta(p)$.

- b) Si $H, K \in \beta(p)$ entonces $H \cap K \in \beta(p)$
- c) Si $H \in \beta(p)$ y $H \subseteq K$, donde $K \subseteq \mathcal{L}$, entonces $K \in \beta(p)$
- d) $\emptyset \notin \beta(p)$.
- e) Si $H, K \in \beta(p)$ entonces $H \cup K \in \beta(p)$

Pero utilizando la definición de β estas condiciones son equivalentes a:

- a) $p \in E$.
- b) Si $p \in H$ y $p \in K$ entonces $p \in H \cap K$
- c) Si $H \subseteq K$ y $p \in H$ entonces $p \in K$
- d) $p \notin \emptyset$.
- e) Si $p \in H \cup K$ entonces $p \in H$ ó $p \in K$

las que son obviamente verificadas.

3) $\beta(\mathbf{0}) = \{E\}$.

Como $\beta(\mathbf{0})$ es un filtro del reticulado $\mathcal{P}(E)$ y E es el último elemento del mismo entonces $E \in \beta(\mathbf{0})$, luego $\{E\} \subseteq \beta(\mathbf{0})$. Como $\beta(\mathbf{0})$ es un filtro primo, en particular es propio, luego el primer elemento del reticulado $\mathcal{P}(E)$ no pertenece a $\beta(\mathbf{0})$, esto es $\emptyset \notin \beta(\mathbf{0})$. Sea (1) $X \in \beta(\mathbf{0})$, y supongamos que $X \neq E$. Como $X \neq \emptyset$ y $X \in \mathcal{L} = \mathbf{s}(\mathbf{i}(\mathcal{G})) \cup \{\emptyset, E\}$ entonces

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_t$$

donde $X_j \in \mathbf{i}(\mathcal{G})$ para $1 \leq j \leq t$.

Como $X \in \beta(\mathbf{0})$ y $\beta(\mathbf{0})$ es un filtro primo entonces existe j , $1 \leq j \leq t$ tal que $X = X_j$. Pero $X_j = G_{h_1} \cap G_{h_2} \cap \dots \cap G_{h_s}$, donde $G_{h_r} \in \mathcal{G}$ para $1 \leq r \leq s$. Por (1) y la definición de β tenemos que $\mathbf{0} \in X$, esto es $\emptyset \in G_{h_r}$, para $1 \leq r \leq s$, absurdo. Luego el único elemento que pertenece al conjunto $\beta(\mathbf{0})$ es E .

4) $\beta(E) = \pi$.

Para ello debemos demostrar que dado un filtro primo P de $\mathcal{L}$ existe un elemento $p \in E$ tal que $\beta(p) = P$.

4a) Primer Caso: $P = \{E\}$. En 3) acabamos de probar que $\beta(\mathbf{0}) = \{E\}$.

4b) Segundo Caso: P tiene mas de un elemento. Entonces por el Corolario 7.1 P contiene alguno de los generadores. Consideremos el elemento $p = (p_i) \in E$ definido del siguiente modo:

$$p_i = \begin{cases} 1 & \text{si } G_i \in P, \\ 0 & \text{si } G_i \notin P. \end{cases}$$

Por lo tanto $G_i \in P \iff p_i = 1 \iff p \in G_i \iff G_i \in \beta(p)$, lo que significa que los filtros primos de $\mathcal{L}$, P y $\beta(p)$ contienen los mismos generadores, esto es $P \cap \mathcal{G} = \beta(p) \cap \mathcal{G}$, luego por el Lema 7.3, IV) $P = \beta(p)$.

5) β es un isomorfismo de orden.

5a) Si $p, q \in E$ y $p \leq q$ entonces $\beta(p) \subseteq \beta(q)$.

Si $p = \mathbf{0}$ entonces $\beta(0) = \{E\} \in \beta(q)$, y como $E \in \beta(q)$ tenemos $\beta(\mathbf{0}) \subseteq \beta(q)$.

Si $p \neq \mathbf{0}$ entonces $\beta(p) \neq \{E\}$, luego existe $X \in \beta(p)$, $X \neq E$, luego por el Lema 7.3, I) existe un subconjunto $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G}$ tal que $\mathcal{G}_0 \subseteq \beta(p)$ y por lo tanto $\mathcal{G} \cap \beta(p) \neq \emptyset$. Sea $Y \in \mathcal{G} \cap \beta(p)$, luego $Y \in \mathcal{L}$, $p \in Y$, $Y = G_i$ para algún $i \in I$. Por hipótesis $(p_i) = p \leq q = (q_i)$, por lo tanto $p(i) = p_i \leq q_i = q(i)$ cualquiera que sea $i \in I$, luego como $p \in G_i$ entonces $1 = p(i) \leq q(i)$ y por lo tanto $q(i) = 1$, esto es $q \in Y$, luego como $Y \in \mathcal{G}$ entonces $q \in \beta(q)$ y como $Y \in \mathcal{L}$ tenemos finalmente que $Y \in \mathcal{G} \cap \beta(q)$. Acabamos así de probar que $\mathcal{G} \cap \beta(p) \subseteq \mathcal{G} \cap \beta(q)$, luego por el Lema 7.3, II) $\beta(p) \subseteq \beta(q)$.

6) Si $p, q \in E$ son tales que $\beta(p) \subseteq \beta(q)$ entonces $p \leq q$.

Si $p \not\leq q$ entonces existe $i \in I$ tal que $p(i) \not\leq q(i)$ y como $p(i), q(i) \in \mathbf{2}$ entonces $p(i) = 1$ y $q(i) = 0$, esto es $p \in G_i$ y $q \notin G_i$, luego $G_i \in \beta(p)$ y $G_i \notin \beta(q)$, absurdo.

Acabamos así de probar que β es un isomorfismo de orden de E en $\mathcal{P}(I)$.

Corolario 7.2 *El conjunto Π_n de los elementos primos del reticulado distributivo acotado $\mathcal{L}_n$ con un número finito n de generadores libres es isomorfo al conjunto de todos los subconjunto de un conjunto con n elementos, que es como sabemos un álgebra de Boole con n átomos.*

Sea X un conjunto ordenado, notamos con $\mathbf{2}^X$ el conjunto de todas las funciones isótonas de X en $\mathbf{2}$, y con X^* el dual de X . Como dijéramos en el §4 (Lema 4.1) es bien conocido que $RB(X)$ y $(\mathbf{2}^X)^*$ son reticulados distributivos isomorfos, luego si $X = \mathbf{B}_n$ tenemos que:

$$\mathcal{L}_n \cong RB(\mathbf{B}_n) \cong (\mathbf{2}^{\mathbf{B}_n})^*$$

pero por una propiedad de conjuntos ordenados:

$$(\mathbf{2}^{\mathbf{B}_n})^* \cong (\mathbf{2}^*)^{\mathbf{B}_n^*}$$

y como $\mathbf{2}^* \cong \mathbf{2}$ y $\mathbf{B}_n^* \cong \mathbf{B}_n$ entonces:

$$\mathcal{L}_n \cong \mathbf{2}^{\mathbf{B}_n},$$

esto es el reticulado distributivo acotado con n generadores libres es isomorfo al reticulado de todas las funciones isótonas de un álgebra de Boole con n átomos en $\mathbf{2}$.

Utilizando este resultado y propiedades de la potencia cardinal de conjuntos ordenados, podemos escribir:

$$\mathcal{L}_{n+1} \cong \mathbf{2}^{\mathbf{B}_{n+1}} \cong \mathbf{2}^{(\mathbf{B}_n \times \mathbf{B}_1)} = \mathbf{2}^{(\mathbf{B}_n \times \mathbf{2})} \cong \left(\mathbf{2}^{\mathbf{B}_n}\right)^{\mathbf{2}} \cong \mathcal{L}_n^{\mathbf{2}},$$

esto es el reticulado distributivo acotado $\mathcal{L}_{n+1}$ con $n+1$ generadores libres es isomorfo al reticulado de todas las funciones isótonas de $\mathbf{2}$ en $\mathcal{L}_n$.

Dado $x \in \mathcal{L}_n$ sea $F_x = \{f \in \mathcal{L}_n^{\mathbf{2}} : f(x) = 1\}$, entonces es claro que $\mathcal{L}_n^{\mathbf{2}} = \bigcup_{x \in \mathcal{L}_n} F_x$ y que si

$x, y \in \mathcal{L}_n$ son tales que $x \neq y$ entonces $F_x \cap F_y = \emptyset$, luego

$$N[\mathcal{L}_{n+1}] = N[\mathcal{L}_n^{\mathbf{2}}] = \sum_{x \in \mathcal{L}_n} N[F_x].$$

Si $x \in \mathcal{L}_n$ sea $(x) = \{y \in \mathcal{L}_n : y \leq x\}$. A los elementos de (x) daremos el nombre de divisores de x .

Si $f \in F_x$ como f es isótona entonces $f(0) \leq f(1) = x$. Pongamos por definición $\varphi(f) = f(0)$, como $f(0) \in (x)$ entonces $\varphi : F_x \rightarrow (x)$. Si $y \in (x)$ esto es $y \leq x$, entonces la función $f : \mathbf{2} \rightarrow \mathcal{L}_n$ definida por $f(0) = y$, $f(1) = x$ es isótona y $\varphi(f) = f(0) = y$. Si $f_1, f_2 \in F_x$ son tales que $f_1 \neq f_2$, como $f_1(1) = x = f_2(1)$ entonces $f_1(0) \neq f_2(0)$. Acabamos así de probar que φ establece una biyección entre F_x y (x) , luego:

$$N[\mathcal{L}_{n+1}] = \sum_{x \in \mathcal{L}_n} N[(x)].$$

Observemos que para calcular $N[\mathcal{L}_{n+1}]$ mediante este método es necesario conocer el diagrama de Hasse de $\mathcal{L}_n$. En forma análoga se demuestra que:

$$N[\mathcal{L}_{n+1}] = \sum_{x \in \mathcal{L}_n} N[[x]].$$

Como $\mathcal{L}_0 = \mathbf{2}$ entonces $N[(1)] = 2$ y $N[(0)] = 1$, luego $N[\mathcal{L}_1] = 3$. Del diagrama de Hasse de $\mathcal{L}_1$ indicado anteriormente se deduce que $N[(1)] = 3$, $N[(g)] = 2$ y $N[(0)] = 1$, luego $N[\mathcal{L}_2] = 6$. Del diagrama de Hasse de $\mathcal{L}_2$ indicado anteriormente se deduce que $N[(1)] = 6$, $N[(g_1 \vee g_2)] = 5$, $N[(g_1)] = 3$, $N[(g_2)] = 3$, $N[(g_1 \wedge g_2)] = 2$ y $N[(0)] = 1$, luego $N[\mathcal{L}_3] = 20$. Análogamente del diagrama de $\mathcal{L}_3$ que fuera indicado anteriormente se concluye que $N[\mathcal{L}_4] = 168$.

Es bien conocido que en todo reticulado distributivo acotado finito, no trivial, R cualquier elemento $x \in R$, $x \neq 0$ admite una única representación como supremo de elementos primos, esto es

$$x = p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_k$$

donde los p_i son elementos primos de R y son incomparables dos a dos. Luego si $x \in \mathcal{L}_n$, $x \neq 0$ entonces x es supremo de un cierto número de elementos de Π_n . Por otro lado dados k elementos $p_1, p_2, \dots, p_k$, incomparables dos a dos, del álgebra de Boole Π_n entonces $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_k$ es la representación de un elemento de $\mathcal{L}_n$. Por lo tanto si exceptuamos el elemento $0 \in \mathcal{L}_n$, existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de $\mathcal{L}_n$ diferentes de 0 y los conjuntos de k elementos de Π_n , incomparables dos a dos.

Sea $I_k(n)$ la familia de todos los conjuntos de k elementos de Π_n incomparables dos a dos, y $N[I_k(n)]$ su número. La familia de los subconjuntos de Π_n tiene 2^{2^n} elementos, algunos de ellos están formados por elementos incomparables dos a dos y otros no. Luego

$$N[\mathcal{L}_n] = \sum_{h=0}^{2^n} N[I_h(n)].$$

Observemos que $I_0(n) = \{0\}$, $N[I_1(n)] = 2^n$, $N[I_{2^n}(n)] = 0$.

Consideremos el conjunto $C_1 = \{(x, y) \in \Pi_n \times \Pi_n : y \leq x\}$. Si $x = 0$ el único elemento $(0, y)$ que pertenece a C_1 es $(0, 0)$ y si a es un átomo de Π_n , los únicos pares que pertenecen a C_1 son (a, a) y $(a, 0)$. En general si x es supremo de k átomos de Π_n existen 2^k pares (x, y) que pertenecen a C_1 y como existen $\binom{n}{k}$ elementos de Π_n que son supremo de k átomos tenemos $\binom{n}{k} \cdot 2^k$ pares que verifican la condición indicada, tenemos que:

$$N[C_1] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k.$$

Análogamente si $C_2 = \{(x, y) \in \Pi_n \times \Pi_n : x \leq y\}$, tambien

$$N[C_2] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k.$$

Pero $(x, x) \in C_1 \cap C_2$ cualquiera que sea $x \in \Pi_n$ y $(x, y) \in C_1 \iff (y, x) \in C_2$, luego:

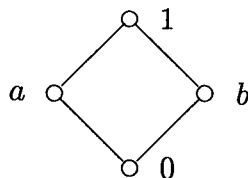
$$N[I_2(n)] = \frac{(2^n)^2 - \left(2 \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k - 2^n\right)}{2} = 2^{2n-1} + 2^{n-1} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k.$$

Por lo tanto $N[I_0(1)] = 1$, $N[I_1(1)] = 2^1$ y $N[I_2(1)] = 0$, luego $N[\mathcal{L}_1] = 3$. Cuando $n = 2$ tenemos $N[I_0(2)] = 1$, $N[I_1(2)] = 2^2 = 4$, $N[I_2(2)] = 1$, y $N[I_k(2)] = 0$, para $k = 3, 4$, luego $N[\mathcal{L}_2] = 6$. Cuando $n = 3$ tenemos $N[I_0(3)] = 1$, $N[I_1(3)] = 2^3 = 8$, $N[I_2(3)] = 9$, $N[I_3(3)] = 2$, y $N[I_k(3)] = 0$, para $4 \leq k \leq 8$, luego $N[\mathcal{L}_3] = 20$.

7.1 Propiedades de los reticulados distributivos libres

Vamos a indicar en primer lugar algunos resultados que obtuvimos y que generalizan los obtenidos por A. Monteiro.

Sea R un reticulado distributivo acotado y S un $(0, 1)$ -subreticulado de R . Dado $f \in R$ consideremos el conjunto $S' = S \wedge f = \{s \wedge f : s \in S\}$. Es fácil ver que $(S', \wedge, \vee, 0, f)$ es un reticulado distributivo acotado con primer elemento 0 y último elemento f . Dado $s \in S$ consideremos la siguiente función: $\alpha(s) = s \wedge f$, $s \in S$. Claramente $\alpha : S \rightarrow S'$ es un homomorfismo suryectivo, que no es necesariamente inyectivo. Por ejemplo consideremos el reticulado distributivo R cuyo diagrama se indica:



entonces $S = \{0, a, 1\}$ es un $(0, 1)$ -subreticulado de R y $S' = S \wedge b = \{0, b\}$ no es isomorfo a S .

Sea $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ un conjunto de generadores de R , esto es $SR(G) = R$, $G' = \{g_1, g_2, \dots, g_{n-1}\}$, $R' = SR(G')$, $R'' = R' \wedge g_n$ y $G'' = \{g''_i = g_i \wedge g_n : 1 \leq i \leq n-1\}$. Luego $G'' \subseteq R''$ y en consecuencia el subreticulado acotado de R'' generado por G'' , que notaremos $SR_{R''}(G'')$, verifica $SR_{R''}(G'') \subseteq R''$.

Si X es un subconjunto no vacío de R , recordemos que con $\mathbf{i}(X)$ notamos el conjunto de todos los elementos que se obtienen haciendo ínfimos de partes finitas, no vacías de X y con $\mathbf{s}(X)$ notamos el conjunto de todos los elementos que se obtienen haciendo supremos de partes finitas, no vacías de X .

Es bien conocido que $R' = SR(G') = \mathbf{s}(\mathbf{i}(G')) \cup \{0, 1\}$. Probemos que $R'' \subseteq SR_{R''}(G'')$. Sea $t \in R''$, luego $t = r' \wedge g_n$ donde $r' \in R'$. Si $r' \in \{0, 1\}$ entonces $t = 0$ ó $t = g_n$, que es el último elemento de R'' , luego en ambos casos $t \in SR_{R''}(G'')$. Si $r' = \bigvee_{j=1}^s x_j$ donde

$x_j \in \mathbf{i}(G')$, $1 \leq j \leq s$, entonces $x_j = \bigwedge_{k=1}^{n_j} y_k^j$ e $y_k^j \in Y \subseteq G'$, $1 \leq k \leq n_j$. Como $y_k^j \in G'$, para todo j, k entonces $y_k^j \wedge g_n \in G'' \subseteq SR_{R''}(G'')$, para todo j, k luego

$$x_j \wedge g_n = \left(\bigwedge_{k=1}^{n_j} y_k^j \right) \wedge g_n = \bigwedge_{k=1}^{n_j} (y_k^j \wedge g_n) \in SR_{R''}(G''), \quad 1 \leq j \leq s$$

y por lo tanto

$$t = r' \wedge g_n = \left(\bigvee_{j=1}^s x_j \right) \wedge g_n = \bigvee_{j=1}^s (x_j \wedge g_n) \in SR_{R''}(G'').$$

Vamos a demostrar que si G es un conjunto de generadores libres de R entonces $G'' = \{g''_i = g_i \wedge g_n : 1 \leq i \leq n-1\}$ es un conjunto de generadores libres de R'' .

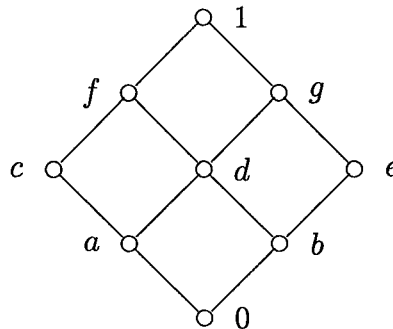
Sea A un reticulado distributivo acotado y $f'' : G'' \rightarrow A$, $f''(g''_i) = a_i \in A$, $1 \leq i \leq n-1$. Consideremos la función $f : G \rightarrow A$ definida por $f(g_i) = f''(g_i) = a_i$ para $1 \leq i \leq n-1$ y $f(g_n) = 1 \in A$. Como G es un conjunto de generadores libres de R , f se extiende en forma única a un homomorfismo $h : R \rightarrow A$. Sea h'' la restricción de h a R'' , luego $h''(0) = h(0) = 0$, $h''(g_n) = h(g_n) = 1$. Si $x, y \in R''$ entonces $x \wedge y \in R''$ y por lo tanto $h''(x \wedge y) = h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y) = h''(x) \wedge h''(y)$. Análogamente se demuestra que $h''(x \vee y) = h''(x) \vee h''(y)$. Luego h'' es un homomorfismo de R'' en A . Además $h''(g''_i) = h(g''_i) = h(g_i \wedge g_n) = h(g_i) \wedge h(g_n) = f(g_i) \wedge 1 = f(g_i) = a_i = f''(g_i)$, $1 \leq i \leq n-1$. Luego h'' es un homomorfismo que extiende a f'' . Observemos además que G'' tiene $n-1$ elementos. En efecto si (1) $g_i \wedge g_n = g_j \wedge g_n$, donde $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n-1$ entonces definiendo la función f de G en un reticulado distributivo acotado arbitrario A , por $f(g_i) = 1$, $f(g_j) = 0$, $f(g_r) = a_r \in A$, para $1 \leq r \leq n-1$, $r \neq i$, $r \neq j$ y $f(g_n) = 1$, f se extiende a un homomorfismo $h : R \rightarrow A$, luego de (1) resulta que:

$$1 = h(g_i) \wedge h(g_n) = h(g_i \wedge g_n) = h(g_j \wedge g_n) = h(g_j) \wedge h(g_n) = 0,$$

absurdo.

Acabamos así de probar que si $R = FD(n)$, $R' = SR(\{g_1, g_2, \dots, g_{n-1}\})$ y $R'' = R' \wedge g_n$ entonces R'' es un reticulado distributivo acotado con un conjunto de $n-1$ generadores libres, esto es $R'' \cong FD(n-1)$. Claramente $R' \cong FD(n-1)$.

Observemos que si S es un $(0,1)$ -subreticulado de un reticulado distributivo acotado y $f \in R$ entonces $S' = S \wedge f \subseteq \langle f \rangle$, pero en general no podemos afirmar que $S \wedge f = \langle f \rangle$. En efecto consideremos el reticulado R indicado a continuación:



Entonces $S = \{0, c, e, 1\}$ es un $(0,1)$ -subreticulado de R y $S \wedge f = \{f, c, b, 0\} \neq \langle f \rangle = \{f, d, b, c, a, 0\}$.

Lema 7.4 Si $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ es un conjunto de generadores del reticulado distributivo acotado R , $R' = SR_R(\{g_1, g_2, \dots, g_{n-1}\})$ y $R'' = R' \wedge g_n$ entonces $R'' = (g_n]$, y si $z \notin R'$ entonces $z = u \vee (v \wedge g_n)$, con $u \in R''$ y $v \in R'$. (L. Monteiro)

Dem. Ya sabemos que: $R'' = R' \wedge g_n \subseteq (g_n]$. Sea $z \in (g_n]$, luego (1) $z = z \wedge g_n$. Si $z \in R'$ entonces por (1) $z \in R''$. Si $z \notin R' = SR(G')$ entonces $z \neq 0, 1$ y como $z \in R = SR(G)$ entonces $z = \bigvee_{j=1}^s x_j$ donde $x_j \in \mathbf{i}(G)$, $1 \leq j \leq s$ y $x_j = \bigwedge_{k=1}^{n_j} y_k^j$ e $y_k^j \in Y \subseteq G$, $1 \leq k \leq n_j$. Si $x_j \in \mathbf{i}(G')$ para todo j , $1 \leq j \leq s$ entonces $z \in R'$, absurdo. Luego existe j , $1 \leq j \leq s$ tal que $x_j = g_n \wedge g_{j_1} \wedge g_{j_2} \wedge \dots \wedge g_{j_k}$ y $g_{j_h} \in G' \subseteq R'$, para $1 \leq h \leq k$ y por lo tanto $\bigwedge_{h=1}^k g_{j_h} \in R'$, luego $x_j \in R''$. Sean $J = \{1, 2, \dots, s\}$, $J'' = \{j'' \in J : x_{j''} = g_n \wedge \dots\}$ y $J' = \{j' : j' \in J \setminus J''\}$. Por lo indicado precedentemente $J'' \neq \emptyset$. Además (2) $x_{j''} \in R''$ para todo $j'' \in J''$ y $x_{j'} \in R'$ para todo $j' \in J'$, luego (3) $x_{j'} \wedge g_n \in R''$ para todo $j' \in J'$. Entonces $z = z \wedge g_n = (\bigvee_{j=1}^s x_j) \wedge g_n = (\bigvee_{j'' \in J''} x_{j''} \vee \bigvee_{j' \in J'} x_{j'}) \wedge g_n = \bigvee_{j'' \in J''} (x_{j''} \wedge g_n) \vee \bigvee_{j' \in J'} (x_{j'} \wedge g_n) = (\bigvee_{j'' \in J''} x_{j''}) \vee \bigvee_{j' \in J'} (x_{j'} \wedge g_n)$. Luego por (2) y (3) resulta que $z \in R''$.
Observemos que $z = (\bigvee_{j'' \in J''} x_{j''}) \vee (\bigvee_{j' \in J'} (x_{j'} \wedge g_n))$ y como $u = \bigvee_{j'' \in J''} x_{j''} \in R''$ y $v = \bigvee_{j' \in J'} x_{j'} \in R'$ tenemos que $z = u \vee (v \wedge g_n)$, con $u \in R''$ y $v \in R'$. ■

Si $a, b \in R = FD(n)$ y $a \leq b$ notaremos:

$$[a, b] = \{c \in R : a \leq c \leq b\},$$

y si $a, b \in R'' = R' \wedge g_n$, donde $R' = SR(\{g_1, g_2, \dots, g_{n-1}\})$, $R'' = R' \wedge g_n$ y $a \leq b$ notaremos

$$[a, b]_{R''} = \{c \in R'' : a \leq c \leq b\}.$$

Dado $f \in R'$, como $f \wedge g_n, g_n \in R''$ y $f \wedge g_n \leq g_n$ entonces $[f \wedge g_n, g_n]_{R''} \subseteq R''$. Además $[f, f \vee g_n] \subseteq R$. Ambos subconjuntos de R son reticulados distributivos acotados, con primer elemento $f \wedge g_n$ y f respectivamente y último elemento g_n y $f \vee g_n$ respectivamente.

Lema 7.5 Dado $f \in R'$, la función $\varphi_f : [f \wedge g_n, g_n]_{R''} \rightarrow [f, f \vee g_n]$ definida por $\varphi_f(x) = f \vee x$, para todo $x \in [f \wedge g_n, g_n]_{R''}$ establece un isomorfismo entre estos dos reticulados. (A. Monteiro)

Dem. Sea $x \in [f \wedge g_n, g_n]_{R''}$ esto es $x \in R''$ y $f \wedge g_n \leq x \leq g_n$ entonces

$$f = f \vee (f \wedge g_n) \leq f \vee x = \varphi_f(x) \leq f \vee g_n.$$

$\varphi_f(f \wedge g_n) = f \vee (f \wedge g_n) = f$, $\varphi_f(g_n) = f \vee g_n$. Si $x, y \in [f \wedge g_n, g_n]_{R''}$ entonces $\varphi_f(x \vee y) = f \vee (x \vee y) = (f \vee x) \vee (f \vee y) = \varphi_f(x) \vee \varphi_f(y)$. Análogamente se demuestra que $\varphi_f(x \wedge y) = \varphi_f(x) \wedge \varphi_f(y)$. Luego φ_f establece un homomorfismo entre los reticulados distributivos acotados $[f \wedge g_n, g_n]_{R''}$ y $[f, f \vee g_n]$.

Sean $x, y \in [f \wedge g_n, g_n]_{R''}$ esto es (1) $f \wedge g_n \leq x \leq g_n$ y (2) $f \wedge g_n \leq y \leq g_n$ y supongamos que $\varphi_f(x) = \varphi_f(y)$ esto es $f \vee x = f \vee y$, luego

$$(f \wedge g_n) \vee (x \wedge g_n) = (f \vee x) \wedge g_n = (f \vee y) \wedge g_n = (f \wedge g_n) \vee (y \wedge g_n),$$

de donde resulta por (1) y (2) que $x = y$.

Veamos que φ_f es suryectiva. Dado $y \in [f, f \vee g_n]$ esto es (3) $f \leq y \leq f \vee g_n$ entonces (3) $f \wedge g_n \leq z = y \wedge g_n \leq g_n$. Como $z \in (g_n]$ resulta por el Lema 7.4 que $z \in R''$. Entonces teniendo en cuenta (3):

$$\varphi_f(z) = f \vee z = f \vee (y \wedge g_n) = (f \vee y) \wedge (f \vee g_n) = y \wedge (f \vee g_n) = y.$$

■

Lema 7.6 Si $x, y \in R' = SR(\{g_1, g_2, \dots, g_{n-1}\})$, $x \neq y$ entonces $[x, x \vee g_n] \cap [y, y \vee g_n] = \emptyset$. (A. Monteiro)

Dem. (Demostración de L. Monteiro). Supongamos que existe $t \in [x, x \vee g_n] \cap [y, y \vee g_n]$ luego

$$x \leq t \leq x \vee g_n \quad \text{e} \quad y \leq t \leq y \vee g_n,$$

luego cualquiera que sea $f : G \rightarrow \{0, 1\}$ donde $f(g_n) = 0$ se extiende a un homomorfismo $h : R = FD(n) \rightarrow \{0, 1\}$. Luego $h(x) \leq h(t) \leq h(x) \vee h(g_n) = h(x)$ y en consecuencia $h(x) = h(t)$. Análogamente $h(y) = h(t)$. Supongamos que $y \in \{0, 1\}$, luego (1) $y = 1$ ó (2) $y = 0$, luego como $x \neq y$ entonces $x = 0$ ó $x = 1$. En el caso (1) tenemos $0 = h(x) = h(t) = h(y) = 1$, absurdo.

Si $y = 0$ y f verifica $f(G') = \{1\}$ entonces $h(t) = h(y) = 0$ y $h(t) = h(x) = 1$, absurdo.

Si $y \notin \{0, 1\}$ por lo visto precedentemente $x \notin \{0, 1\}$, luego $x, y \in R' \setminus \{0, 1\}$. Como $x \neq y$ entonces (3) $x \not\leq y$ ó (4) $y \not\leq x$. Supongamos que ocurre (3) entonces existe un filtro primo P de R tal que $x \in P$ e $y \notin P$. Pero $P = [p]$ con $p \in \pi(R)$, luego $p = 1$ ó p es el ínfimo de un número finito de elementos de G .

Si $p = 1$ entonces $P = \{1\}$ y por lo tanto $x = 1$, absurdo.

Si $p \neq 1$ entonces $p = \bigwedge \{g : g \in A\}$ donde A es un subconjunto no vacío de G . Sea $B = G \setminus A$ y consideremos la función $f : G \rightarrow \{0, 1\}$ definida del siguiente modo: $f(A) = \{1\}$, $f(B) = \{0\}$, $f(g_n) = 0$. Tal función se extiende a un único homomorfismo $h : R \rightarrow \{0, 1\}$.

Como $x \in [p] = P$ esto es $p \leq x$ entonces $h(p) \leq h(x)$, pero $h(p) = h(\bigwedge \{g : g \in A\}) = \bigwedge \{h(g) : g \in A\} = 1$, luego $h(x) = 1$ y en consecuencia (1) $h(t) = h(x) = 1$.

Como $y \neq 0$ entonces existe $q \in \Pi(R)$ tal que $q \leq y$. Si $q \in [p]$ entonces $p \leq q \leq y$ luego $y \in [p] = P$ absurdo. Además $q = \bigwedge \{g : g \in C\}$ donde C es un subconjunto no vacío de G . Si para todo $g \in C$ se verificase que $g \notin B$ entonces $g \in A$ y por lo tanto $p \leq g$, absurdo. Luego existe $g_q \in B$ tal que $g_q \leq y$ y por lo tanto (2) $h(y) = h(g_q) = 0$. Como $h(x) = h(t) = h(y)$ entonces (1) y (2) se contradicen. ■

Sea $R' = SR(G') = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ entonces claramente

$$\bigcup_{i=1}^r [r_i, r_i \vee g_n] \subseteq FD(n) = R.$$

Dado $z \in FD(n)$, si $z \in R'$ entonces $z \in [z, z \vee g_n]$. Si $z \notin R' = SR(G')$ vimos en el Lema 7.4 que $z = u \vee (v \wedge g_n)$ donde $u \in R''$ y $v \in R'$ luego como $u \leq z$ y $z = (u \vee v) \wedge (u \vee g_n) \leq u \vee g_n$ tenemos que $z \in [z, z \vee g_n]$, luego:

$$FD(n) = R = \bigcup_{i=1}^r [r_i, r_i \vee g_n]$$

donde $[r_i, r_i \vee g_n] \cap [r_j, r_j \vee g_n] = \emptyset$ para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq k$, luego:

$$N[FD(n)] = \sum_{i=1}^k N[r_i, r_i \vee g_n].$$

Pero cada segmento $[r_i, r_i \vee g_n]$, $1 \leq i \leq k$ de $FD(n)$ es isomorfo al segmento $[r_i \wedge g_n, g_n]_{R''}$, $1 \leq i \leq k$ luego $N[r_i, r_i \vee g_n] = N[r_i \wedge g_n, g_n]_{R''}$, $1 \leq i \leq k$.

Ahora bien R'' es isomorfo a $R' = FD(n-1)$ vía el isomorfismo $\alpha(r' \wedge g_n) = r'$, donde $r' \in R'$ entonces al segmento $[r' \wedge g_n, g_n]_{R''}$ le corresponde el segmento $[r', 1] = [r']$ de R' luego el conocimiento de los números $N[[r_i]]$, $1 \leq i \leq k$, donde $r_i \in R' = FD(n-1)$ nos permitiría determinar $N[FD(n)]$.

Este resultado de A. Monteiro, es análogo a uno del mismo autor, indicado anteriormente, pero con demostraciones diferentes.

Referencias

- [1] Agnew R. D. , *Minimax functions, configuration functions, and partitions*, J. Indian Math. Soc. 24 (1960), 1-21.
- [2] Bialynicki-Birula A. and Rasiowa H., *On the representation of quasi-boolean algebras*, Bull. Acad. Pol. Sc. , Classe III, 5 (1957), 259-261.
- [3] Birkhoff G., *Lattice Theory*, AMS Colloquium Publ. Vol. 25, Amer. Math. Soc. Providence, 3rd. ed. RI, (1967).
- [4] Berman J. and Köhler P., *Cardinalities of finite distributive lattices*, Mitt. Math. Sem. Gießen 121 (1976), 103-124.
- [5] Berman J., Burger A. and Köhler P., *The free distributive lattice on seven generators*, Notices Amer. Math. Soc. 19 (A), (1975), 238,246.
- [6] Church R., *Numerical analysis of certain free distributive structures*, Duke Math. Journal 6, fasc. 3 (1940), 732-734.
- [7] Church R., *Enumeration by rank of the elements of free distributive lattices with seven generators*, Notices Amer. Math. Soc. 11 (1965), 724.
- [8] Czyzo E. and Mostowski A. W., *An algorithm for generating free distributive lattices*, Bull. de l'Academie Polonaise des Sciences. Serie des Sciences Math., Astr. et Phys. 16 (1968), 593-595.
- [9] Dean R. A., *Component subsets of free lattices on n generators*, Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956) (1961), 220-226.
- [10] Dedekind R., *Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grossten gemeinsamen Teiler*, Festschrift Tech. Hoch. Braunscheiwieg (1897), and Ges. Werke, Vol. 2 (1897), 103-148.
- [11] Gilbert E. N., *Lattice theoretic properties of frontal switching functions*, J. Math. Phys. 33 (1954), 57-67.
- [12] Hansel G., *Sur le nombre des fonctions booléennes monotones de n variables*, C. R. Acad. Sc. Paris 262(1966), 1088-1090.
- [13] Hu, S.B. , Dai D. W. and Liu C.C. , *An algorithm for solving Dedekind's problem by reduction of rank*. Wuhan Daxue Xuebao 2, (1982), 31-36. (Math. Reviews 83j:06012, Zentralblatt für Math 06003, 513, (1984)).
- [14] Kisielewicz A., *A solution of Dedekind's problem on the number of isotone Boolean functions*, J. Reine angew. Math. 386 (1988), 139-144.
- [15] Kleitman D., *On Dedekind's problem: The number of monotone Boolean functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 21 (1969), 677-682.
- [16] Kleitman D. and Markowsky G. *On Dedekind's problem: The number of isotone Boolean functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 213 (1975), 373-390.

- [17] Korobkov V. K., *An estimate of the number of monotone functions of an algebra of logic and the complexity of the algorithm of finding the resolvent set for an arbitrary function of the algebra*, Soviet Math. Dokl. 4 (1963), 753-756.
- [18] Korobkov V. K. and Reznik T. L., *Certain algorithms for the computation of monotone functions in the algebra of logic*, Soviet Math. Dokl. 3 (1962), 1763-1767.
- [19] Kuršunov A. D., *Solution of Dedekind's problem on the number of isotone Boolean functions*, Soviet Math. Dokl. 18 (1977), 442-445.
- [20] Lunnon F., *The IU Function: the size of free distributive lattice*, Combinatorial Math. and Its Applications, Proc. Conf. Oxford 1969 (Academic Press, London 1969), 173-181.
- [21] Markowsky G., *The level polynomials of the free distributive lattices*, Discrete Mathematics 29 (1980), 275-285.
- [22] Monteiro A., *Diversos cursos dictados en la Universidad Nacional del Sur* (1957-1966).
- [23] Monteiro L., *Reticulados distributivos libres*, Revista de la UMA 36 (1990), 221-222.
- [24] Monteiro L., *Algebras de Boole*, Informes Técnicos Internos Nro. 60, INMABB-CONICET-UNS (1998).
- [25] Monteiro L., Abad M., Savini S. and Sewald J., *Notes on free monadic Boolean algebras*, Order 16 (1999), 277-289.
- [26] Monteiro L., *Free bounded distributive lattices on n generators*, Multiple Valued Logic, (2000).
- [27] Quackenbush R., *Dedekind's problem*, Order 2 (1986), 415-417.
- [28] Riviere N. M., *Recursive formulas of free distributive Lattices*, J. of Comb. Theory 5, fasc. 3 (1968), 229-234.
- [29] Yamamoto K., *Note on the order of free distributive lattices*, Sci. Rep. Kanazawa University 2 (1953), 5-6.
- [30] Yamamoto K., *Logarithmic order of free distributive lattices*, J. Math. Soc. Japan 6 (1954), 343-353.
- [31] Ward M., *Note on the order of free distributive lattice*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), 423.
- [32] Whitman H., *Status of word problem for lattices*, Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc. Providence, R.I., (1961), 17-21.
- [33] Wiedemann D., *A computation of eight Dedekind number*, Order 8, (1991), 5-6.

