ITI-71

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
INSTITUTO DE MATEMATICA
BAHIA BLANCA

INFORME TECNICO INTERNO

Nº. 71

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA
República Argentina

INFORME TÉCNICO INTERNO

N° 71

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)

ITI -71
Nº 71

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

Año 2001

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
INSTITUTO DE MATEMATICA
BAHIA BLANCA

El estudio del comportamiento puntual de funciones de Sobolev requiere el análisis de ciertos conjuntos excepcionales y la teoría elemental de capacidad de Bessel es la más adecuada para medir estos conjuntos.
Estas notas mejoran resultados exhibidos en mi trabajo de tesis ([Ca] parte IV, 8.1) *en el que se optó por la medida de Lebesgue para mantener la coherencia con el contexto general.*

Marta A. Casamitjana

Diferenciabilidad Puntual de las Funciones de Sobolev

Es evidente que las funciones de Sobolev no poseen propiedades de diferenciabilidad en el sentido clásico usual. Sin embargo si una función u pertenece al espacio de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ entonces ella tiene derivadas de orden k cuando se computan en la métrica inducida por la norma $\mathcal{L}^p$. En efecto, se demostrará que para todo $\mathbf{x}$ en el complemento de un conjunto excepcional, medido en términos de capacidad, las funciones de Sobolev pueden ser aproximadas en norma $\mathcal{L}^p$, por polinomios de Taylor de grado k. Esto significa, según la definición introducida por A. P. Calderón y A. Zygmund , que las funciones de Sobolev son $\mathcal{L}^p$ diferenciables en casi todo punto.

1. Preliminares

Con $\mathbf{\Omega}$ se indica un dominio de $\mathbb{R}^n$, entendiéndose por dominio un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^n$. Puntos de $\mathbb{R}^n$ se notan con $\mathbf{x} = (x_1, ...x_n)$. Las constantes se indican con letras mayúsculas, la misma letra podrá representar constantes distintas.

Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ pertenecen a $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ es el *producto escalar de* $\mathbf{x}$ *por* $\mathbf{y}$. La *norma* de $\mathbf{x}$ se indica $|\mathbf{x}|$. $\overline{\mathbf{E}}$, ${}^c\mathbf{E}$, $(\mathbf{E})^\circ$ indican respectivamente la *clausura,* el *complemento y el interior* de un subconjunto $\mathbf{E}$ de $\mathbb{R}^n$. La *distancia* de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{E}$ y el *diámetro* de $\mathbf{E}$ se notan $d(\mathbf{x}, \mathbf{E})$ y *diam* $(\mathbf{E})$, respectivamente. $\mathbf{B}_r(\mathbf{x})$ y $\overline{\mathbf{B}}_r(\mathbf{x})$ denotan la bola de centro en x y radio r, abierta y cerrada, respectivamente. Cuando el centro es el origen de coordenadas se nota $\mathbf{B}_r$. El *volumen de la bola unitaria* en $\mathbb{R}^n$

se indica con $\boldsymbol{\alpha}(n)$.

Se escribe $\mathbf{E}\subset\subset\boldsymbol{\Omega}$ cuando $\mathbf{E}$ está compactamente contenido en $\boldsymbol{\Omega}$. Esto es, $\overline{\mathbf{E}}$ es un conjunto compacto contenido en $\boldsymbol{\Omega}$.

La *frontera* de $\mathbf{E}$ se denota por $\partial\mathbf{E}$.

Se llama *multíndice* a una *n-upla* de números enteros no negativos. Si $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ es un multíndice, la *longitud de* α, y el *factorial* de α, que se notan $|\alpha|$ y $\alpha!$ respectivamente, se definen como

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i,$$

$$\alpha! = \alpha_1!...\alpha_n!.$$

Para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es

$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}.$$

Para los multíndices $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ se define $\alpha \leq \beta$ si $\alpha_i \leq \beta_i$, $i = 1, ..., n$.

El operador *derivada parcial* se nota con $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$. Con D^α se notan las *derivadas*

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1}...D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$$

Con esta notación el *gradiente* de una cierta función u en $\mathbf{x}$, que se nota $\mathbf{D}u(\mathbf{x})$, es

$$\mathbf{D}u(\mathbf{x}) = (D_1u(\mathbf{x}), ..., D_nu(\mathbf{x})).$$

Espacio de funciones .

$C^0(\boldsymbol{\Omega})$ es el espacio de las funciones continuas sobre $\boldsymbol{\Omega}$. Más generalmente, si k es un entero no negativo, (k puede ser ∞),

$$C^k(\boldsymbol{\Omega}) = \left\{u : \boldsymbol{\Omega} \to \mathbb{R} : D^\alpha u \in C^0(\boldsymbol{\Omega}), 0 \leq |\alpha| \leq k\right\}$$

$$C_0^k(\boldsymbol{\Omega}) = C^k(\boldsymbol{\Omega}) \cap \{u : \textit{spt } u \textit{ es compacto}, \ \textit{spt } u \subset \boldsymbol{\Omega}\}$$

$$\mathcal{C}^k\left(\overline{\mathbf{\Omega}}\right) = \mathcal{C}^k\left(\mathbf{\Omega}\right) \cap \left\{u : D^\alpha u \text{ } \textit{puede extenderse con continuidad a } \overline{\mathbf{\Omega}},\ 0 \le |\alpha| \le k\right\}$$

Definición 1.1 Sea $\mathbf{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{\Omega}$ abierto, $u \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbf{\Omega})$. Una función $v \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbf{\Omega})$ que para cada multíndice α satisface

$$\int_{\mathbf{\Omega}} \varphi(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x} = (-\mathbf{1})^{|\alpha|}\int_{\mathbf{\Omega}} u(\mathbf{x})D^\alpha\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \tag{1.1}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{\Omega})$ se llama la *derivada débil de orden α de u.*

La derivada débil suele llamarse también *derivada generalizada.* La función v está unívocamente determinada a menos de un conjunto de medida cero. Se escribe $v = D^\alpha u$. Se prueba que si existe la derivada de u (en el sentido clásico) ésta coincide con la derivada débil de u. En adelante $D^\alpha u$ indicará la *derivada débil de u.* Si $|\alpha| = 1$, $D^\alpha u$ indica una de las derivadas parciales de u.

Definición 1.2 La función

$$\varphi(\mathbf{x}) := \begin{cases} \mathbf{k}\exp\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2-1}\right), & |\mathbf{x}| < 1 \\ 0, & |\mathbf{x}| \ge 1 \end{cases}$$

donde la constante $\mathbf{k}$ se elige de forma tal que $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1$, pertenece a $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{\Omega})$ y el soporte es la bola cerrada $\overline{\mathbf{B}}_1$.

Sea $\varepsilon > 0$. Para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se define el *regularizador* φ_ε como sigue,

$$\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) := \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)$$

Nótese que φ_ε es no negativa, pertenece a $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{\Omega})$ y $spt\varphi_\varepsilon = \overline{\mathbf{B}}_\varepsilon$.

Definición 1.3 La convolución

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varphi_\varepsilon * u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y})u(\mathbf{y})d\mathbf{y} \tag{1.2}$$

definida para todas las funciones u para las cuales el miembro derecho de (1.2) tiene sentido se llama la *regularizada de u.*

Se necesitará el siguiente resultado estándar, conocido en el contexto de la aproximación de la identidad y cuya demostración puede consultarse en [**WZ**], (p.148), [**Zi**], (p.22).

Teorema 1.4

(i) Si $u \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *entonces para cada* $\varepsilon>0$, $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ *y*

$$D^\alpha(\varphi_\varepsilon * u) = (D^\alpha \varphi_\varepsilon) * u$$

para cada multíndice α.

(ii) Sea $\mathbf{x}$ *un punto de Lebesgue de* u. *Entonces* $u_\varepsilon(\mathbf{x}) \to u(\mathbf{x})$.

En particular, si $u \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbf{\Omega})$, $u_\varepsilon \to u$ *en casi todo punto de* $\mathbf{\Omega}$. *Si* $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$, $u_\varepsilon \to u$ *uniformemente sobre compactos de* $\mathbb{R}^n$.

(iii) Si $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, *entonces* $u_\varepsilon \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $\|u_\varepsilon\|_p \leq \|u\|_p$ *y*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon - u\|_p = 0.$$

($\|\cdot\|_p$ indica la norma en el espacio $\mathcal{L}^p$).

Espacios de Sobolev

Definición 1.5 Sea $p \geq 1$ y k un número entero no negativo. Se define el *espacio de Sobolev* $\mathbf{W}^{k,p}(\mathbf{\Omega})$ como la familia de funciones $u \in \mathcal{L}^p(\mathbf{\Omega})$ tales que existen las derivada $D^\alpha u$ y además $D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\mathbf{\Omega})$ para $0 \leq |\alpha| \leq k$. Es decir,

$$\mathbf{W}^{k,p} = \{u : D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\mathbf{\Omega}),\ 0 \leq |\alpha| \leq k\}$$

En $\mathbf{W}^{k,p}(\mathbf{\Omega})$ se define la *norma*

$$\|u\|_{k,p;\mathbf{\Omega}} = \left(\int_{\mathbf{\Omega}} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^p \, d\mathbf{x} \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty. \tag{1.3}$$

Es decir,

$$\|u\|^p_{k,p;\mathbf{\Omega}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^p_{p;\mathbf{\Omega}}, \tag{1.4}$$

donde $\|\cdot\|_{p;\Omega}$ indica la norma en el espacio $\mathcal{L}^p(\Omega)$.

Para $p = \infty$,

$$\|u\|_{k,\infty} = \sup_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{\infty;\Omega}$$

Con tal norma el espacio $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach . **[Ad]** (p.45).

A continuación se demuestra un teorema de densidad en $\mathbf{W}^{k,p}$.

Teorema 1.6 *Sea* $1 \leq p < \infty$, $u \in \mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$, $u_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * u$. *Entonces*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{k,p;\Omega'} = 0$$

siempre que $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, *entonces*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{k,p} = 0$$

Demostración. La demostración resulta del Teorema 1.4 (*iii*) si se prueba que para $\mathbf{x} \in \Omega'$ y $|\alpha| \leq k$ vale

$$D^\alpha u_\varepsilon(\mathbf{x}) = (D^\alpha u)_\varepsilon(\mathbf{x}) \tag{1.5}$$

y se tiene en cuenta que $D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ para $0 \leq |\alpha| \leq k$.

Se probará entonces (1.5). Como $\overline{\Omega'}$ es un compacto contenido en Ω, existe $\varepsilon_0>0$ tal que la distancia $d(\Omega', \partial\Omega) > \varepsilon_0 > 0$. Sea $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, como

$$\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \varepsilon^{-n}\varphi(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\varepsilon}) \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),$$

$$\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = 0 \qquad si \qquad |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq \varepsilon$$

y

$$u \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega),$$

diferenciando bajo el signo integral y utilizando la definición de derivada, resulta

$$D^\alpha u_\varepsilon(\mathbf{x}) \;=\; D^\alpha(\varphi_\varepsilon * u)(\mathbf{x}) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon^{-n}\int_{\Omega} D^{\alpha}_{\mathbf{x}}(\varphi(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\varepsilon}))\ u(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \\
&= (-1)^{|\alpha|}\varepsilon^{-n}\int_{\Omega} D^{\alpha}_{\mathbf{y}}(\varphi(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\varepsilon}))\ u(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \\
&= \varepsilon^{-n}\int_{\Omega} \varphi(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\varepsilon})\ D^{\alpha}u(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \\
&= \int_{\Omega} \varphi_{\varepsilon}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\ D^{\alpha}u(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \\
&= (D^{\alpha}u)_{\varepsilon}(\mathbf{x}),
\end{aligned}
$$

para cada $\mathbf{x} \in \boldsymbol{\Omega}'$. ■

2. Capacidad y potencial

El estudio del comportamiento puntual de funciones de Sobolev requiere un análisis de ciertos conjuntos excepcionales y estos pueden ser descriptos convenientemente en términos de la teoría elemental de *capacidad de Bessel.* Se enuncian seguidamente las propiedades básicas de esta teoría que serán usadas posteriormente. Un tratamiento más completo de este tema puede verse, entre otros, en los trabajos que se citan: **[GR]** (Cap. III), **[AM]** (p.167-197), **[St]**(p.117; 130), **[Zi]** (cap.2).

Sea $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ un núcleo no negativo definido y semicontinuo sobre $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, (no se excluye el valor $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \infty$). Para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, supóngase que

$$\int_{R^n} K(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y} < \infty.$$

Sea f una función real no negativa y medible sobre $\mathbb{R}^n$. Se define

$$F_K f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y})d\mathbf{y}$$

Nótese que $F_K f(\mathbf{x})$ está bien definida para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pudiendo tomar el valor $+\infty$.
Sea $\mathbf{E} \subset \mathbb{R}^n$ y

$$\mathcal{A}_p := \mathcal{L}^p_+(\mathbf{E}) \cap \{f : F_K f(\mathbf{x}) \geq 1,\ \mathbf{x} \in \mathbf{E}\} \tag{1.6}$$

donde $\mathcal{L}^p_+(\mathbf{E})$ es el conjunto de las funciones positivas $p-$*sumables* en $\mathbf{E}$.

Definición 2.1 La *capacidad* p del conjunto $\mathbf{E}$ relativa al *núcleo* K, $Cap_p(\mathbf{E};K)$, se define como sigue

$$Cap_p(\mathbf{E};K) = \underset{f\in\mathcal{A}_p(K)}{inf} \left\{ \|f\|_p^p \right\} \tag{1.7}$$

Si $\mathcal{A}_p = \emptyset$, se define $Cap_p(\mathbf{E};K) = \infty$.

Potencial y capacidad de Bessel y Riesz

Se define el *núcleo de Riesz,* I_α, $0 < \alpha < n$, como

$$I_\alpha(\mathbf{x}) = \gamma(\alpha)^{-1} |\mathbf{x}|^{\alpha-n} \tag{1.8}$$

donde

$$\gamma(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} 2^\alpha \Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} - \frac{\alpha}{2})}. \tag{1.9}$$

y Γ es la función Gamma.

La convolución

$$I_\alpha(f)(\mathbf{x}) = I_\alpha * f(\mathbf{x}) = \gamma(\alpha)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\mathbf{y})d\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{n-\alpha}}$$

es, por definición, el *potencial de Riesz* para la función f.

Potencial de Bessel

Sea G_α, $0 < \alpha < n$, una función definida sobre $\mathbb{R}^n$ cuya transformada de Fourier está dada por

$$\widehat{G}_\alpha(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(1 + |\mathbf{x}|^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

El núcleo

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

se llama el *núcleo de Bessel de orden* α.

El *potencial de Bessel* de orden α, $0 < \alpha < n$, de una función medible f, $(G_\alpha f)(\mathbf{x})$, se define por

$$G_\alpha f(\mathbf{x}) = G_\alpha * f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \tag{1.10}$$

Sea $\mathbf{E}$ un conjunto de $\mathbb{R}^n$ y notemos con $\mathcal{A}_p\,(G_\alpha)$ el conjunto $\mathcal{A}_p$ definido en (1.6) correspondiente al núcleo de Bessel. Esto es $\mathcal{A}_p\,(G_\alpha)$ es el conjunto de las funciones positivas $\mathcal{L}^p$ – *sumables* con $G_\alpha * f \geq 1$ en $\mathbf{E}$.

La *capacidad* p del conjunto $\mathbf{E}$ relativa al *núcleo de Bessel* G_α se notará con $\mathcal{B}_{\alpha,p}$ y de acuerdo a (1.7) es

$$\mathcal{B}_{\alpha,p}(\mathbf{E}) = \underset{f\in\mathcal{A}_p(G_\alpha)}{inf} \left\{\|f\|_p^p\right\}.$$

En el caso en que $\alpha = 0$ se define $\mathcal{B}_{\alpha,p}$ como la medida de Lebesgue.
La *capacidad de Riesz,* $\mathcal{R}_{\alpha,p}$, se define en forma similar reemplazando G_α por I_α y $\mathcal{A}_p\,(G_\alpha)$ por $\mathcal{A}_p\,(I_\alpha)$.
Nótese que $G_\alpha\,(\mathbf{x}) \leq I_\alpha\,(\mathbf{x})\,,\ \mathbf{x} \in\mathbb{R}^n$. Entonces de la definición sigue que para $0 < \alpha < n$, $1 < p < n$, existe una constante $C = C(\alpha, n)$ tal que, si $\mathbf{E} \subset\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{R}_{\alpha,p}(\mathbf{E}) \leq C\mathcal{B}_{\alpha,p}(\mathbf{E}) \tag{1.11}$$

Más aún,

$$\mathcal{R}_{\alpha,p}(\mathbf{E}) = 0 \textit{ si y sólo si } \mathcal{B}_{\alpha,p}(\mathbf{E}) = 0 \tag{1.12}$$

Del lema siguiente, que se demuestra con técnicas bien conocidas, se deduce que $\mathcal{B}_{\alpha,p}$ es una medida exterior.

Lema 2.2 *Para $0 \leq \alpha < n$ y $1 < p < \infty$, valen las siguientes afirmaciones*
(i) $\mathcal{B}_{\alpha,p}(\emptyset) = 0$
(ii) Si $\mathbf{E}_1 \subset \mathbf{E}_2$ entonces $\mathcal{B}_{\alpha,p}(\mathbf{E}_1) \leq \mathcal{B}_{\alpha,p}(\mathbf{E}_2)$.
(iii) Si $\mathbf{E}_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, ..., n$, entonces $\mathcal{B}_{\alpha,p}\left(\bigcup_1^\infty \mathbf{E}_i\right) \leq \sum_1^\infty \mathcal{B}_{\alpha,p}(\mathbf{E}_i)$

Un hecho interesante relacionado con los *potenciales de Bessel* es que pueden ser utilizados para caracterizar *los espacios de Sobolev* $\mathbf{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ (Teorema 2.3 que se enuncia más adelante). Tal caracterización permite hacer un estudio detallado del comportamiento puntual de funciones de Sobolev como lo muestran, por ejemplo, los trabajos de N. Aronszajn y K.T. Smith [**AS**(1)], [**AS**(2)] **y** de N. Meyers [**Me1**].

Sea $\mathcal{L}_\alpha^p(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de todas las funciones reales u definidas sobre $\mathbb{R}^n$ que admiten la representación

$$u(\mathbf{x}) = G_\alpha * v(\mathbf{x}) \tag{1.13}$$

para cierto $v \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha > 0$.

En $\mathcal{L}^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ se introduce una norma: si u admite una representación como en (1.13), donde $v \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, se define

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p_\alpha} = \|v\|_{\mathcal{L}^p} \tag{1.14}$$

Si existe una representación de u como en (1.13) ésta es única. Basta mostrar que si $v \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, la condición $\mathbf{G}_\alpha * v = 0$ implica $v = 0$.

Para ello se considera el espacio $\mathcal{S}$ de las funciones $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ cuyas derivadas multiplicadas por polinomios se mantienen acotadas y se prueba que

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0$$

para toda $\psi \in \mathcal{S}$. Nótese primero el operador G_α aplica S sobre S ya que si $\psi \in \mathcal{S}$, tomando

$$\widehat{\varphi}(\mathbf{x}) = \widehat{\psi}(\mathbf{x})(2\pi)^{\frac{n}{2}}(1 + |\mathbf{x}|^2)^{\frac{\alpha}{2}}$$

se tiene que $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$ (pues $\widehat{\psi} \in \mathcal{S}$), luego $\varphi \in \mathcal{S}$.

Como

$$\widehat{\psi}(\mathbf{x}) = \widehat{\varphi}(\mathbf{x}).(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(1 + |\mathbf{x}|^2)^{-\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \widehat{\varphi}(\mathbf{x})\,\widehat{G_\alpha}(\mathbf{x}) = (\varphi * G_\alpha)^\wedge(\mathbf{x})$$

entonces

$$\psi = \varphi * G_\alpha = G_\alpha(\varphi).$$

Por otra parte, si $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(v)\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int\int G_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y})v(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}d\mathbf{y} =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(\mathbf{x})G_\alpha(\varphi)d\mathbf{x},$$

donde la última igualdad sigue del Teorema de Fubini. Entonces, si v es tal que $G_\alpha(v) = 0$, el primer miembro de la igualdad anterior es nulo. Por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(\mathbf{x})G_\alpha(\varphi)d\mathbf{x} = 0$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}$ y de lo observado anteriormente se deduce que

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0$$

para toda $\psi \in \mathcal{S}$. Luego $v = 0$ en casi todo punto. ∎

La unicidad de la representación muestra que la norma (1.14) está bien definida. El espacio $\mathcal{L}^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$, con esta norma, es un espacio de Banach.

Se enuncia ahora el teorema mencionado anteriormente sobre una caracterización de los espacios de Sobolev.

Teorema 2.3 *Si k es un entero positivo y $1 < p < \infty$, el espacio $\mathbf{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ coincide con el espacio $\mathcal{L}^p_k(\mathbb{R}^n)$ en el siguiente sentido: $u \in \mathbf{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ si y solamente si $u \in \mathcal{L}^p_k(\mathbb{R}^n)$ y las normas definidas en cada uno de los espacios son equivalentes.* **[St]** (p.136).

La equivalencia entre los espacios $\mathbf{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{L}^p_k(\mathbb{R}^n)$ no se da si $p = 1$ ó $p = \infty$. Una descripción de las posibles relaciones de inclusión entre los mismos, para distintos valores de n, puede verse en el texto de E.M. Stein (**[St]**, p.160).

3. Promedio integral para una función de Sobolev

La idea de que una función integrable tiene una representativa que puede ser expresada como límite de su promedio integral se origina con H. Lebesgue. Puede consultarse en ese sentido su trabajo *Sur l 'integration des fonctions discontinues,* (Ann. Ecole Norm., **27** (1910), p. 361). El conjunto excepcional aquí obtenido es de medida de Lebesgue cero. Varios autores, como N.Aronszajn y K. T. Smith **[AS1]**, W. Fleming **[Fl]**, y B. Fuglede **[Fu]** eran concientes de que los conjuntos excepcionales asociados con las funciones de Sobolev o potenciales de Riesz eran mucho más chicos que conjuntos de medida cero. Sin embargo H. Federer y W. Ziemer [**FZ**], T. Bagby y W. Ziemer [**BZ**], N. Meyers [**Me2**], entre otros, muestran resultados óptimos para el conjunto excepcional en términos de capacidad.

En lo que sigue la notación

$$p\int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})} f(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \frac{1}{|\mathbf{B}_r|}\int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})} f(\mathbf{y})d\mathbf{y}$$

denota el *promedio integral* de f sobre la bola de centro $\mathbf{x}$ y radio r siempre que la integral sobre la derecha esté definida.

Se demostrará que las funciones de Sobolev pueden ser definidas en todo punto, excepto en un conjunto de capacidad de Bessel nula, en términos de su promedio integral (Teorema 3.4).

Se comenzará asumiendo los siguientes resultados (ver [**Zi**]). El primero de ellos establece una relación entre el *promedio integral de una función de Sobolev u sobre dos bolas concéntricas en términos de la integral del gradiente de u.*

Lema 3.1 *Sea* $u\in \mathbf{W}^{1,p}(\mathbf{B}_r(\mathbf{x}_0))$, $p\geq 1$, $\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^n$ *y* $r>0$. *Sea* $0<\delta<r$. *Entonces*

$$r^{-n}\int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x}_0)} u(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} - \delta^{-n}\int_{\mathbf{B}_\delta(\mathbf{x}_0)} u(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \frac{1}{n}r^{-n}\int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x}_0)} [\mathbf{D}u(\mathbf{y})\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}_0)]\,d\mathbf{y}$$

$$-\frac{1}{n}\delta^{-n}\int_{\mathbf{B}_\delta(\mathbf{x}_0)} [\mathbf{D}u(\mathbf{y})\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}_0)]\,d\mathbf{y} - \frac{1}{n}\int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x}_0)-\mathbf{B}_\delta(\mathbf{x}_0)} |\mathbf{y}-\mathbf{x}_0|^{-n}[\mathbf{D}u(\mathbf{y})\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}_0)]\,d\mathbf{y}$$

Lema 3.2 *Sea* l *un número positivo tal que* $lp<n$, $p\geq 1$, *y sea* $u\in\mathbf{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. *Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{y}-\mathbf{x}|^{l-n}|u(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y} \leq \frac{1}{l}\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{y}-\mathbf{x}|^{l-n+1}|\mathbf{D}u(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y},$$

para *todo* $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$.

Lema 3.3 *Sea* l *un número positivo y* k *un entero positivo tal que* $(k+l-1)p<n$. *Entonces existe una constante* $C=C(n,k,l)$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{y}-\mathbf{x}|^{l-n}|u(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y} \leq C\sum_{|\alpha|=k}\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{y}-\mathbf{x}|^{l-n+1}|\mathbf{D}^\alpha u(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *y toda* $u \in \mathbf{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.4 (Existencia del límite del promedio integral para una función de Sobolev) *Sea* k *un entero positivo tal que* $kp < n$, $p > 1$, $\mathbf{\Omega}$ *un conjunto medible no vacío de* $\mathbb{R}^n$ *y* $u \in \mathbf{W}^{k,p}(\mathbf{\Omega})$. *Entonces existe un subconjunto* $\mathbf{E}$ *de* $\mathbf{\Omega}$ *tal que*

(i) $\mathcal{B}_{k,p}(\mathbf{E}) = 0$

(ii) para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{\Omega} - \mathbf{E}$, *existe el*

$$\lim_{\delta \to 0^+} p \int_{\mathbf{B}_\delta(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Demostración. Se hará para el caso $\mathbf{\Omega} = \mathbb{R}^n$. A partir de él, el caso general ($\mathbf{\Omega}$ subconjunto de $\mathbb{R}^n$) se demuestra considerando una sucesión creciente de funciones no negativas $\varphi_j \in \mathbf{C}_o(\mathbb{R}^n)$, con soporte compacto contenido en $\mathbf{\Omega}$ para todo j y tal que

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad y \quad \varphi_j(\mathbf{x}) = 1\}^\circ \to \mathbf{\Omega} \quad , \quad (j \to \infty),$$

se define la función

$$u_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} \varphi_j(\mathbf{x}) \cdot u(\mathbf{x}) & , \quad \mathbf{x} \in \mathbf{\Omega} \\ 0 & , \quad \mathbf{x} \notin \mathbf{\Omega} \end{cases},$$

y se aplica lo demostrado para el caso $\mathbf{\Omega} = \mathbb{R}^n$.

Sea entonces $\mathbf{\Omega} = \mathbb{R}^n$ y $u \in \mathbf{W}^{k,p}(\mathbf{\Omega})$. Se define la función

$$g(\mathbf{y}) = \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u(\mathbf{y})| \tag{1.15}$$

para $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Claramente $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Sea

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{I}_k * g)(\mathbf{x}) = \infty\}. \tag{1.16}$$

Entonces, de la definición de capacidad de Riesz, se tiene que

$$\mathcal{R}_{k,p}(\mathbf{E}) = 0,$$

y luego de (1.12),

$$\mathcal{B}_{k,p}(\mathbf{E}) = 0.$$

Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{E}$. ($(\mathbf{I}_k * g)(\mathbf{x}) < \infty$). De acuerdo al Lema 3.1, si $0 < \delta < 1$,

$$\int_{\mathbf{B}_1(\mathbf{x})} u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} - \delta^{-n} \int_{\mathbf{B}_\delta(\mathbf{x})} u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \frac{1}{n} \int_{\mathbf{B}_1(\mathbf{x})} [\mathbf{D}u(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})]\, d\mathbf{y}$$

$$-\frac{1}{n}\delta^{-n} \int_{\mathbf{B}_\delta(\mathbf{x})} [\mathbf{D}u(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})]\, d\mathbf{y} - \frac{1}{n} \int_{\delta < |\mathbf{y}-\mathbf{x}| < 1} |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{-n} [\mathbf{D}u(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})]\, d\mathbf{y}. \qquad (1.17)$$

Cuando $k = 1$, sigue de (1.15) y de $(\mathbf{I}_k * g)(\mathbf{x}) < \infty$ que

$$\int_{\mathbf{B}_1(\mathbf{x})} |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{1-n} |\mathbf{D}u(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y} < \infty \qquad (1.18)$$

Para $k > 1$, se considera el Lema 3.1 con $l = 1$ y $k - 1$ en lugar de k y se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{1-n} |D_i u(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y} \leq C \sum_{|\alpha| = k-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{k-n} |\mathbf{D}^\alpha [D_i u(\mathbf{y})]|\, d\mathbf{y},$$

lo cual, por (1.15) y (1.16), es finito. Esto muestra que (1.18) es válida aún en el caso $k > 1$. Por lo tanto existe el límite

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_{\delta < |\mathbf{y} - \mathbf{x}| < 1} |\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|^{-n} [\mathbf{D}u(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})]\, d\mathbf{y}. \qquad (1.19)$$

También sigue de (1.18) que

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_{\mathbf{B}_\delta(\mathbf{x})} |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{1-n} |\mathbf{D}u(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y} = 0,$$

por consiguiente

$$\delta^{-n} \int_{\mathbf{B}_\delta(\mathbf{x})} [\mathbf{D}u(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})]\, d\mathbf{y} \to 0, \qquad \delta \to 0^+. \qquad (1.20)$$

Los resultados (1.17), (1.19) y (1.20) prueban la tesis. ■

4. Puntos de Lebesgue

La existencia de puntos de Lebesgue para un función $u \in \mathbf{W}^{k,p}(\boldsymbol{\Omega})$ en el caso $k = 1$, fue demostrada por H. Federer y W. Ziemer {**FZ**]. T. Bagby y W. Ziemer [**BZ**], N. Meyers [**Me2**] y C. Calderón, E. Fabes y N. Riviere [**CFR**] obtienen demostraciones para el caso general. Sus trabajos pueden ser consultados para completar lo que sigue.

Se asumen los siguientes resultados que permitirán demostrar el teorema de existencia de puntos de Lebesgue.

Lema 4.1 *Sea k un entero no negativo y λ, p números reales tales que $p > 1$, $kp < n$, y $k < \lambda < \frac{n}{p}$. Si*

$$u \in \mathbf{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n),$$

entonces

$$\delta^{\lambda-k} p \int_{\mathbf{B}_\delta(\mathbf{x})} u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \to 0$$

cuando $\delta \to 0^+$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ excepto para un conjunto $\mathbf{E}$ con $\mathcal{B}_{\lambda,p}(\mathbf{E}) = 0$.

Nótese que el Teorema 3.4 asegura la existencia del límite finito del promedio integral en todos los puntos del complemento de un conjunto de medida $\mathcal{B}_{k,p}$ nula, mientras que la conclusión del Lema 4.1 establece una pequeña diferencia : cuando se multiplica el promedio integral por el factor $\delta^{\lambda-k}$ este producto tiende a cero en todos los puntos del complemento de un conjunto de medida $\mathcal{B}_{\lambda,p}$ nula.

Lema 4.2 *Sean l, k enteros tal que $k \geq 1$, $0 \leq k \leq l$ y $lp < n$, $p > 1$. Sea*

$$u \in \mathbf{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n).$$

Para para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ se define

$$u_{\mathbf{x},r} = p \int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})} u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}.$$

Entonces

$$r^{(l-k)p} p \int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})} |u(\mathbf{y}) - u_{\mathbf{x},r}|\, d\mathbf{y} \to 0$$

para $r \to 0^+$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ excepto para un conjunto $\mathbf{E}$ con $\mathcal{B}_{l,p}(\mathbf{E}) = 0$.

Teorema 4.3 (Existencia de puntos de Lebesgue para funciones de Sobolev). *Sea k un entero* *positivo tal que $kp < n$, $p > 1$, $\mathbf{\Omega}$ un conjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $u \in \mathbf{W}^{k,p}(\mathbf{\Omega})$. Entonces*

$$\lim_{r\to 0^+} \left\{ p \int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})} |u(\mathbf{y})-u(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{y} \right\} = 0 \tag{1.21}$$

para todo punto $\mathbf{x} \in \mathbf{\Omega}$ excepto para un conjunto $\mathbf{E}$ con $\mathcal{B}_{k,p}(\mathbf{E})$ =0.

Demostración. (i) Si $\mathbf{\Omega}$ =$\mathbb{R}^n$ (1.21) sigue del Teorema 3.4 y del Lema 4.2 anterior.

(ii) Si $\mathbf{\Omega}$ es arbitrario el teorema se deduce a partir de (i) con técnicas estándares como se indicó en el recién citado Teorema 3.4. ■

Corolario 4.3.1 *Sea k un entero positivo tal que $kp < n$, $p > 1$, $\mathbf{\Omega}$ un conjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $u \in \mathbf{W}^{k,p}(\mathbf{\Omega})$. Entonces existe el límite*

$$\lim_{r\to 0^+} p \int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})} |u(\mathbf{y})|^p \, d\mathbf{y} = |u(\mathbf{x})|^p \tag{1.22}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{\Omega}$, excepto para un conjunto $\mathbf{E}$ con $\mathcal{B}_{k,p}(\mathbf{E})$ =0.

5. Derivadas en el sentido $\mathcal{L}^p$ de funciones de Sobolev

El concepto de derivadas $\mathcal{L}^p$-derivadas es introducido por A. P. Calderón y A. Zygmund en el trabajo citado al comienzode estas notas.

Polinomios de Taylor

Se probará que las funciones de Sobolev admiten un desarrollo en serie de Taylor tal que el promedio integral del resto tiende a cero en el complemento de un cierto conjunto excepcional, medido en términos de capacidad.

Sean k, m enteros positivos tales que $0 \leq m \leq k$, $p > 1$, $(k-m)p < n$, , y $u \in \mathbf{W}^{k,p}(\mathbf{\Omega})$. Del Teorema 3.4 sigue que existe un subconjunto $\mathbf{E} \subset\mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathcal{B}_{k-m,p}(\mathbf{E}) = 0 \tag{1.23}$$

y

$$\lim_{r\to 0^+} p \int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})} D^\alpha u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \tag{1.24}$$

existe para todo $\mathbf{x} \notin \mathbf{E}$ y para cada multíndice α tal que $0 \leq |\alpha| \leq m$.

Esto muestra que también las derivadas de orden α de una función de Sobolev pueden ser definidas en todo punto del complemento de un conjunto de capacidad de Bessel nula, en términos de sus respectivos promedios integrales. En lo que sigue, la notación $D^{\alpha}u(\mathbf{x})$ se referirá al límite (1.24) cada vez que este exista.

Por lo visto, para todo $\mathbf{x}$ que verifica (1.24) es posible definir el *polinomio de Taylor* $P_{\mathbf{x}}^{(m)}$ en el sentido usual, esto es

$$P_{\mathbf{x}}^{(m)}(\mathbf{y}) \equiv \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha}u(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\alpha} \tag{1.25}$$

Recuérdese que si las derivadas $D^{\alpha}u$, $0 \leq |\alpha| \leq m$, pertenecen al espacio $C^{m}(\mathbb{R}^{n})$ el *teorema de Taylor* clásico puede ser expresado en la forma

$$u(\mathbf{y}) = P_{\mathbf{x}}^{(m-1)}(\mathbf{y}) + m \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \left[\int_{0}^{1} (1-t)^{m-1} D^{\alpha}u((1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y})\, dt \right] (\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\alpha}. \tag{1.26}$$

Teorema 5.1 *Sean k, m enteros positivos tal que $1 \leq m \leq k$, $(k-m)p < n$ y $u \in \mathbf{W}^{k,p}(\mathbb{R}^{n})$. Entonces para todo $\mathbf{x} \notin \mathbf{E}'$*

$$\left(\int_{\mathbf{B}_{r}(\mathbf{x})} |u(\mathbf{y}) - P_{\mathbf{x}}^{m}(\mathbf{y})|^{p}\, d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq r^{m} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m}{\alpha!} \int_{0}^{1} (1-t)^{m-1} \left(t^{-n} \int_{\mathbf{B}_{tr}(\mathbf{x})} |D^{\alpha}u(\mathbf{y}) - D^{\alpha}u(\mathbf{x})|^{p}\, d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} dt \tag{1.27}$$

y

$$\left(\int_{\mathbf{B}_{r}(\mathbf{x})} |u(\mathbf{y}) - P_{\mathbf{x}}^{m-1}(\mathbf{y})|^{p}\, d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq r^{m} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m}{\alpha!} \int_{0}^{1} (1-t)^{m-1} \left(p \int_{\mathbf{B}_{tr}(\mathbf{x})} |D^{\alpha}u(\mathbf{y})|^{p}\, d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} dt$$

donde $\mathbf{E}' \supset \mathbf{E}$ con $\mathcal{B}_{k-m,p}(\mathbf{E}') = 0$, siendo $\mathbf{E}$ el conjunto descripto en (1.23) y (1.24).

Demostración. Supóngase que $u \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, escribiendo

$$P_{\mathbf{x}}^{(m)}(\mathbf{y}) = P_{\mathbf{x}}^{(m-1)}(\mathbf{y}) + \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x})^\alpha,$$

de (1.26) sigue que

$$u(\mathbf{y}) - P_{\mathbf{x}}^{(m)}(\mathbf{y}) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m}{\alpha!} \left[\int_0^1 (1-t)^{m-1} D^\alpha u((1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y})\, dt\right] (\mathbf{y}-\mathbf{x})^\alpha -$$

$$- \sum_{|\alpha|=m} \frac{m}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} D^\alpha u(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x})^\alpha dt =$$

$$= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m}{\alpha!} \left[\int_0^1 (1-t)^{m-1} \{D^\alpha u((1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y}) - D^\alpha u(\mathbf{x})\}\, dt\right] (\mathbf{y}-\mathbf{x})^\alpha . \tag{1.28}$$

Sea $r > 0$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_r(\mathbf{x})$ y φ una función de $\mathcal{L}^q(\mathbf{B})$ con $\|\varphi\|_q \leq 1$ donde q es el conjugado de p. De (1.28)

$$\left|\int_{\mathbf{B}} \left[u(\mathbf{y}) - P_{\mathbf{x}}^{(m)}(\mathbf{y})\right] \varphi(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}\right| \leq$$

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{m}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \left[\int_{\mathbf{B}} |D^\alpha u((1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y}) - D^\alpha u(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x})^\alpha \varphi(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y}\right] dt.$$

Entonces, por la desigualdad de Hölder (aplicada a la integral interior),

$$\left|\int_{\mathbf{B}} \left[u(\mathbf{y}) - P_{\mathbf{x}}^{(m)}(\mathbf{y})\right] \varphi(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}\right| \leq$$

$$r^m \sum_{|\alpha|=m} \frac{m}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \left[\int_{\mathbf{B}} |D^\alpha u((1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y}) - D^\alpha u(\mathbf{x})|^p\, d\mathbf{y}\right]^{\frac{1}{p}} dt$$

Haciendo en esta última integral la sustitución $\mathbf{z} = (1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y}$ y tomando el supremo sobre todas las φ tal que $\|\varphi\|_q \leq 1$, se obtiene la tesis para el caso $u \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$.

Si u es una función arbitraria de $\mathbf{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ la demostración se obtiene considerando una sucesión de regularizadores $\{\varphi_\varepsilon\}$, $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, poniendo $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon$ y teniendo en cuenta que las funciones u_ε pertenecientes a $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ verifican la primera desigualdad de la tesis. La demostración completa y en detalle puede verse en el libro de W.P. Ziemer **[Zi]**, (p.128).

Teorema 5.2 (Existencia de $\mathcal{L}^p-$ derivadas) *Sean k, m enteros positivos tal que $0 \leq m \leq k$, $(k-m)\,p < n$ y $u \in \mathbf{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

$$\left(p \int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})} |u(\mathbf{y}) - P_{\mathbf{x}}^m(\mathbf{y})|^p \, d\mathbf{y}\right)^{\frac{1}{p}} = o(r^m)$$

cuando $r \to 0^+$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ excepto para un conjunto $\mathbf{F}$ con $\mathcal{B}_{k-m,p}(\mathbf{F}) = 0$.

Demostración. Si $m = 0$ el teorema sigue del Teorema 4.3.

Sea $m \geq 1$. Por el Teorema 4.3 recién citado

$$p \int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})} |D^\alpha u(\mathbf{y}) - D^\alpha u(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{y} \to \mathbf{0}$$

cuando $r \to 0^+$, para todo α tal que $|\alpha| = m$ y para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{F}$, donde $\mathbf{F} \subset \mathbb{R}^n$ es cierto conjunto tal que

$$\mathcal{B}_{k-m,p}(\mathbf{F}) = 0.$$

Para $\mathbf{x} \notin \mathbf{F}$ y α con $|\alpha| = m$ se define la función $\eta(r)$, $r > 0$, como sigue

$$\eta(r) = \left(r^{-n} \int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})} |D^\alpha u(\mathbf{y}) - D^\alpha u(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{y}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.29}$$

Es claro que $\eta(r) \to 0$ si $r \to 0^+$.

Por otra parte, si $r \to 0^+$ la integral

$$\int_0^1 (1-t)^{m-1} \eta(tr) \, dt \to 0. \tag{1.30}$$

En efecto. Como $r \to 0^+$ implica $\eta(r) \to 0$, para cada $\varepsilon > 0$ existe r_0 tal que si $0 < r < r_0$ es $\eta(tr) < \varepsilon$, para todo t, $0 \leq t \leq 1$.

Por lo tanto, para $0 < r < r_0$

$$\left|\int_0^1 (1-t)^{m-1} \eta(tr) \, dt\right| \leq \varepsilon \left|\int_0^1 (1-t)^{m-1} \, dt\right| = \frac{\varepsilon}{m}.$$

Del Teorema 5.1-(1.27) y de (1.30), sigue que si $r \to 0^+$

$$r^{-m}\left(p\int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})}|u(\mathbf{y})-P_{\mathbf{x}}^m(\mathbf{y})|^p\,d\mathbf{y}\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \sum_{|\alpha|=m}\frac{m}{\alpha!}\int_0^1(1-t)^{m-1}\eta(tr)\,dt \to 0.$$

■

Los espacios $T^{k,p}$ y $t^{k,p}$

Definición 5.3 Para $1 \leq p \leq \infty$, k entero no negativo y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, se denota por $T^{k,p}(\mathbf{x})$ al conjunto de funciones $u \in \mathcal{L}^p$ para las cuales existe un polinomio $P_{\mathbf{x}}(\cdot)$ de grado menor que k y una constante $M = M(\mathbf{x},u)$ tal que para $0 < r < \infty$

$$\left[p\int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})}|u(\mathbf{y})-P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})|^p\,d\mathbf{y}\right]^{\frac{1}{p}} \leq Mr^k = O\left(r^k\right) \tag{1.31}$$

Para $p = \infty$ el miembro izquierdo de (1.31) se interpreta como el supremo esencial

$$\operatorname*{sup\,ess}_{\mathbf{y}\in\mathbf{B}_r(\mathbf{x})}\{|u(\mathbf{y})-P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})|\}.$$

Definición 5.4 Una función $u \in T^{k,p}(\mathbf{x})$ pertenece al espacio $t^{k,p}(\mathbf{x})$ si existe un polinomio $P_{\mathbf{x}}(\cdot)$ de grado menor ó igual que k tal que, para $r \to 0$

$$\left[p\int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})}|u(\mathbf{y})-P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})|^p\,d\mathbf{y}\right]^{\frac{1}{p}} = o\left(r^k\right). \tag{1.32}$$

Lema 5.5 *Si $u \in T^{k,p}(\mathbf{x})$, el polinomio $P_{\mathbf{x}}$ está unívocamente determinado.*

Demostración. Si $u \in T^{k,p}(\mathbf{x})$, existe $P_{\mathbf{x}}(\cdot)$ tal que

$$u(\mathbf{y}) = P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) + R_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \sum_{0\leq|\alpha|\leq k-1}\frac{p_\alpha(\mathbf{x})}{\alpha!}(\mathbf{y}-\mathbf{x})^\alpha + R_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$$

con

$$\left(p \int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})} |R_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \leq Mr^k. \tag{1.33}$$

Suponiendo que exista un polinomio $Q_{\mathbf{x}}(\cdot)$ distinto de $P_{\mathbf{x}}$ tal que

$$u(\mathbf{y}) = Q_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) + \widetilde{R}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k-1} \frac{q_\alpha(\mathbf{x})}{\alpha!} (\mathbf{y} - \mathbf{x})^\alpha + \widetilde{R}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$$

con

$$\left(p \int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})} \left|\widetilde{R}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\right|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \widetilde{M}r^k, \tag{1.34}$$

entonces existe al menos un α tal que los correspondientes coeficientes $p_\alpha(\mathbf{x})$, $q_\alpha(\mathbf{x})$ de $P_{\mathbf{x}}$ y $Q_{\mathbf{x}}$ son distintos.

Sean

$$c_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{p_\alpha(\mathbf{x}) - q_\alpha(\mathbf{x})}{\alpha!} \quad y \quad m' = mín\,|\alpha| \;\; tal\ que \;\; c_\alpha(\mathbf{x}) \neq 0$$

y

$$S_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) - Q_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \sum_{|\alpha| = m'} c_\alpha(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})^\alpha + \sum_{m' < |\alpha| \leq k-1} c_\alpha(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})^\alpha,$$

Para probar que la suposición $P_{\mathbf{x}} \neq Q_{\mathbf{x}}$ implica una contradicción se probará que el polinomio

$$L_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := \sum_{|\alpha| = m'} c_\alpha(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})^\alpha$$

es el polinomio nulo.

Para $1 < p < \infty$ y q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, por la desigualdad de Hölder, (1.33) y (1.34)

$$p \int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})} |S_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} = p \int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})} \left| R_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) - \widetilde{R}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \right| d\mathbf{y} \leq$$

$$\leq p \int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})} |R_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} + p \int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})} \left| \widetilde{R}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \right| d\mathbf{y} \leq$$

$$\leq \left(p \int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})} |R_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})|^p \, d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} \left(p \int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})} d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+\left(p\int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})}\left|\widetilde{R}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} d\mathbf{y}\left(p\int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})} d\mathbf{y}\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \mathbf{C}r^k, \tag{1.35}$$

$0 < r < \infty$.

Se obtiene la misma acotación para $p\int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})}|S_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y}$ en el caso en que $p = 1$, teniendo en cuenta (1.33) y (1.34) con $p = 1$. Para $p = \infty$ se obtiene una desigualdad análoga considerando el supremo esencial.

Sea

$$M_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := \sum_{m'<|\alpha|\leq k-1} c_\alpha(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x})^\alpha .$$

Observando que si $0 < r < 1$ y $m' + 1 \leq |\alpha| \leq k - 1$ es $r^{m'+1} \geq r^{|\alpha|} \geq r^{k-1}$, se tiene

$$p\int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})}|M_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y} \leq p\int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})}\sum_{m'+1\leq|\alpha|\leq k-1}|c_\alpha(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x})^\alpha|\,d\mathbf{y} \leq$$

$$\leq p\int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})}\sum_{m'+1\leq|\alpha|\leq k-1} r^{|\alpha|}|c_\alpha(\mathbf{x})|\,d\mathbf{y} \leq C' r^{m'+1}, \tag{1.36}$$

para cierto $C' = C'(\mathbf{x}) > 0$ suficientemente grande.

Por otra parte, como $L_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = S_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) + M_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ resulta $|L_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})| \leq |S_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})| + |M_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})|$, luego de (1.35) y (1.36) sigue que

$$p\int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})}|L_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y} \leq p\int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})}|S_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y} + p\int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})}|M_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y} \leq$$

$$\leq \mathbf{C}r^k + \mathbf{C}' r^{m'+1}, \tag{1.37}$$

siempre que $0 < r < 1$.

Obsérvese que $L_{\mathbf{x}}$ tiene la siguiente propiedad : para cada $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$L_{\mathbf{x}}(\lambda\mathbf{y} + \mathbf{x}) = \lambda^{m'} L_{\mathbf{x}}(\mathbf{y} + \mathbf{x}) .$$

Entonces, haciendo la sustitución $\mathbf{y} = \mathbf{x}+r\mathbf{v}$, con $|\mathbf{v}| \leq 1$

$$p\int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})} |L_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y} =$$

$$= p\int_{\mathbf{B}_1(\mathbf{0})} |L_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}+r\mathbf{v})|\, d\mathbf{v} =$$

$$= r^{m'} p\int_{\mathbf{B}_1(\mathbf{0})} |L_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}+\mathbf{v})|\, d\mathbf{v} =$$

$$= r^{m'} p\int_{\mathbf{B}_1(\mathbf{x})} |L_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y}.$$

De esta igualdad y (1.37) sigue que

$$r^{m'} p\int_{\mathbf{B}_1(\mathbf{x})} |L_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y} = p\int_{\mathbf{B}_r(\mathbf{x})} |L_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y} \leq \mathbf{C}r^k + \mathbf{C}' r^{m'+1} \tag{1.38}$$

Dividiendo por $r^{m'}$,

$$p\int_{\mathbf{B}_1(\mathbf{x})} |L_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y} \leq \mathbf{C}r\left(r^{k-m'-1}+1\right)$$

donde $\mathbf{C}$ es una constante positiva independiente de r. Luego, si $r \to 0$

$$p\int_{\mathbf{B}_1(\mathbf{x})} |L_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y} = 0,$$

lo que implica

$$L_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \equiv \sum_{|\alpha|=m'} c_\alpha(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x})^\alpha$$

es el polinomio nulo. ■

La unicidad de $P_{\mathbf{x}}$ para el caso en que $u \in t^{k,p}$ sigue inmediatamente.

Definición 5.6 Si $u \in t^{k,p}(\mathbf{x})$, k entero no negativo, se dice que u es *$\mathcal{L}^p$-diferenciable* ó bien, que posee *derivadas en el sentido $\mathcal{L}^p$.*

Nota. De la existencia de puntos de Lebesgue para funciones de Sobolev sigue que para cada una de ellas es posible definir el polinomio de Taylor en el sentido usual. Se ha demostrado que *las funciones de Sobolev pueden ser aproximadas en norma $\mathcal{L}^p$ por un polinomio $P_{\mathbf{x}}$ de grado k*

tal que para todos los puntos $\mathbf{x}$ *en el complemento de un cierto conjunto excepcional, la norma* L^p *del promedio integral del resto sobre la bola* $B_{\mathbf{x}}(r)$ *es un* $o(r^k)$ (Teorema 5.2). Esto significa que si $u \in \mathbf{W}^{k,p}(\mathbf{\Omega})$ entonces u tiene en casi todo punto, *derivadas de orden* k *en el sentido* $\mathcal{L}^p$ y *son* $\mathcal{L}^p$ *diferenciables* según la Definición 5.6. ■

Referencias

[Ad] Adams, R. A. *Sobolev Spaces,* Ac. Press (1975).

[AM] Adams, D. R. - Meyers, N., *Thinness and Wiener criteria for nonlinear potentials,* Indiana Univ.Math.(1972)

[AS1] Aronszajn, N. - Smith, K. T., *Functional spaces and functional completion,* Ann.Inst.Fourier (Grenoble) (1956).

[AS2] Aronszajn, N. - Smith, K. T., *Theory of Bessel potentials I, Studies in eigenvalue problems,* Technical Report Nro.22, University of Kansas, (1959).

[BZ] Brothers, J. - Ziemer, W. ,*Minimal rearrangements of Sobolev functions,* J. Fur die Reine und Angewandte Math. (1988).

[Ca] Casamitjana, M. A.,*Un Teorema de Rademacher. Diferenciabilidad Puntual y L^p de Funciones de Sobolev,*Tesis de Magister en Matemática. UNS (1999).

[CZ] Calderón, A.P. - Zygmund, A. *Local properties of solutions of elliptic partial differential equations,* Studia Math. (1961).

[FZ] Federer, H. - Ziemer, W., *The Lebesgue set of a function whose distribution derivatives are p-th power summable,* Ind. Univ. Math. J. (1972).

[GR] Gol'dshtein, V. M. - Reshetnyak, Yu. G.,*Quasiconformal Mappings and Sobolev Spaces,* Kluwer Acad. Pub. (1983).

[Me1] Meyers, N. , *A theory of capacities for potentials of functions in Lebesgue spaces,* Math. Scand. (1970).

[Me2] Meyers, N. ,*Taylor expansion of Bessel potentials,* Ind. U. Math. J. (1974).

[St] Stein, E. M. *Singulars Integrals and Differentiability Properties of Functions,* Princeton Univ. Press (1970)

[Zi] Ziemer, W. P. *Weakly Differentiable Functions,* Springer-Verlag (1989).