INFORME TECNICO INTERNO

N°. 7

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA
INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA
República Argentina

I. T. I. Nº 7

COMPLEMENTOS DE ANALISIS FUNCIONAL.

I. ECUACIONES INTEGRALES.

por

Rafael Panzone y Susana Orofino de Tolosa

Estas notas redactadas por la Lic. Orofino son parte de un curso dictado por el Dr. Panzone en 1985.

1986

1. ECUACIONES INTEGRALES DE VOLTERRA

Sean $0 \leqslant x \leqslant b$; $f(x)$ y $K(x,t)$ funciones continuas dadas; la ecuación

(1) $$\phi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x K(x,t)\ \phi(t)\ dt$$

se llama ecuación integral de Volterra de segunda especie; $\phi(x)$ es la función incógnita y λ un parámetro numérico. La función $K(x,t)$ se denomina núcleo de la ecuación de Volterra.

Las ecuaciones

(2) $$\phi(x) = \lambda\int_0^x K(x,t)\ \phi(t)\ dt$$

(3) $$\int_0^x K(x,t)\ \phi(t)\ dt = f(x)$$

se denominan ecuación homogénea de Volterra de segunda especie y ecuación integral de Volterra de primera especie respectivamente.

<u>Ejemplos</u>: 1) $$\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t}{1+x^2}\ \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}\ dt$$

2) $$x\ e^x = \text{sen}\ x + 2\int_0^x \cos(x-t)\ t\ e^t\ dt$$

Podemos calcular la integral y llegar al resultado; otro método de verificación es derivar y plantear una ecuación diferencial.

La resolución de una ecuación diferencial de orden n con condiciones iniciales puede reducirse a la resolución de una ecuación integral de Volterra de segunda especie. Veámoslo para n=2.

Sean $a_1(x)$, $a_2(x)$, $F(x)$ funciones continuas; consideremos la ecuación diferencial de segundo orden:

(4) $$y''(x) + a_1(x)\ y'(x) + a_2(x)\ y(x) = F(x)$$

y las condiciones iniciales:

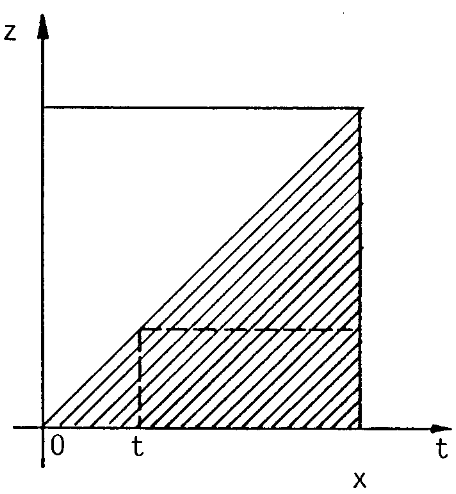
(5) $$y(0) = C_0 \qquad y'(0) = C_1$$

Sea $\phi(x) = y''(x)$; integrando obtenemos

$$y'(x) = \int_0^x \phi(t)\,dt + C_1$$

$$y(x) = \int_0^x (x-t)\,\phi(t)\,dt + C_1\,x + C_0$$

pues $\int_0^x dt \int_0^t \phi(z)\,dz = \int_0^x \phi(z)\,dz \int_z^x dt$



Reemplazando lo obtenido en la ecuación (4)

$$\phi(x) + a_1(x)\,[\int_0^x \phi(t)\,dt + C_1] + a_2(x)\,[\int_0^x (x-t)\,\phi(t)\,dt + C_1\,x + C_0] = F(x)$$

o bien

$$\phi(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)\,(x-t)]\,\phi(t)\,dt = F(x) - C_1\,a_1(x) - C_1\,x\,a_2(x) - C_0\,a_2(x) =:$$

$$=: f(x)$$

Si

$$-\,[a_1(x) + a_2(x)\,(x-t)] = K(x,t) \qquad \text{resulta:}$$

(6) $$\phi(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)\,\phi(t)\,dt$$

La existencia de una solución de (6) resulta de la existencia de solución para el problema (4), (5); recíprocamente, resolviendo la ecuación integral (6) y reemplazando $\phi(x)$ obtenemos $y(x)$ que es la solución de la ecuación (4) que satisface (5). En efecto, $\int_0^x (x-t)\, \phi(t)\, dt$ se anula junto con su derivada en $x = 0$.

Si $a_1(x) = \alpha_1$ y $a_2(x) = \alpha_2$ $\quad K(x,t) = -[\alpha_1 + \alpha_2(x-t)] = k(x-t)$,

(7) $$\phi(x) = f(x) + \int_0^x k(x-t)\, \phi(t)\, dt$$

Es decir una ecuación diferencial con coeficientes constantes y condiciones iniciales se lleva a una ecuación de convolución (7).

Sea el operador $\mathcal{L} = \sum_{j \leqslant k} a_j D^j$, $D = \frac{d}{dx}$, $x \in R$, a_j constantes , $k \geqslant 1$.

Se sabe que existe g perteneciente a $C^\infty(R)$ tal que: $\mathcal{L}g = 0$;

$$g^{(\mu)}(0) = 0 \ , \ \mu = 0, 1, \ .. \ , k-2 \ ; \ g^{(k-1)}(0) = \frac{1}{a_k}$$

Vale entonces el siguiente:

TEOREMA 1.1. Sea $U(x)$ continua en $x > a$, nula en $x \leqslant a$ y acotada en un entorno de $x = 0$. La ecuación $\mathcal{L}Y = U$ tiene solución (en el sentido de las distribuciones):

$$Y(x) = \int_0^x (gH)(x-t)\, U(t)\, dt \ , \ H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases} ,$$

$Y(x)$ pertenece a $C^{(k-1)}(R)$; $Y(0) = \ .. = Y^{(k-1)}(0) = 0$.

$Y(x) = 0$ en $x \leqslant a$ y es la única solución con esa propiedad. Si U es continua en R, Y es solución en el sentido ordinario y tiene k derivadas continuas y vale $Y^{(k)}(0) = 0$. gH es núcleo de Green para el problema de condiciones iniciales.

2. FUNCION GAMMA O INTEGRAL DE EULER DE SEGUNDA ESPECIE

Para Re(z) > 0 definimos la función gamma por la igualdad:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt \tag{1}$$

Integrando por partes en (1) : $\Gamma(z) = \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-t}\, t^{z}\, dz = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$, luego

$$z\,\Gamma(z) = \Gamma(z+1) \tag{2}$$

$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1$; aplicando (2) tenemos

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1\ \Gamma(1) = 1\\
\Gamma(3) &= 2\ \Gamma(2) = 2\\
\Gamma(4) &= 3\ \Gamma(3) = 3 \times 2 = 3!\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Gamma(n) &= (n-1)\ \Gamma(n-1) = (n-1)!
\end{aligned}$$

Para $Re(z) \leqslant 0$ la definición (1) no tiene sentido puesto que la integral diverge. Por prolongación analítica podemos definir $\Gamma(z)$ en todo el plano complejo. Los puntos z = 0, -1, -2, -3, ... serán polos simples de la función $\Gamma(z)$.

Propiedades:

(i) $\Gamma(z)\ \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}$

si $z = \frac{1}{2}$, $\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi$; entonces $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

(ii) $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$; $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(iii) <u>Fórmula de duplicación de Legendre</u>

$$\Gamma(z)\ \Gamma(z + \tfrac{1}{2}) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\ \Gamma(2z)$$

(iv) <u>Fórmula asintótica de Stirling</u>: sea $0 < \delta < \pi$ y $-\pi + \delta \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \pi - \delta$.

Entonces $\Gamma(z) \sim \sqrt{\pi 2}\ z^{z-\frac{1}{2}}\, e^{-z}$.

(v) Definición de Weierstrass

(3) $$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\, e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\}.$$

$\gamma = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m} - \ln m\right) = 0.57721....$ es la constante de Euler.

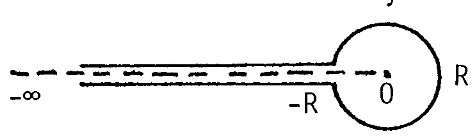
La igualdad (3) define una función entera (de orden 1)

(vi) Si Im $s \neq 0$, $\Gamma(s) = \overline{\Gamma(\overline{s})}$. Vale $|\Gamma(it)|^2 = \dfrac{2\pi}{t(e^{\pi t} - e^{-\pi t})}$.

(vii) De (3) sigue enseguida que

$$\Gamma'(1) = -\gamma.$$

(viii) $$2\pi i\, \Gamma^{-1}(s) = \int z^{-s} e^{z}\, dz \quad \text{(Hankel)}.$$



3. FUNCION BETA O INTEGRAL DE EULER DE PRIMERA ESPECIE.

Para $Re(p) > 0$ y $Re(q) > 0$ definimos la función Beta por

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1 - x)^{q-1}\, dx$$

La relación entre las integrales de Euler de primera y segunda especie está dada por la igualdad

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(q,p)$$

4. PROBLEMA DE ABEL.

Supongamos que un punto material se desliza sin fricción sobre una curva en el plano (ξ,η) bajo la acción de la fuerza de gravedad; que comienza su movimiento sin velocidad inicial en el punto de la curva de ordenada x y tarda un tiempo $t = f_1(x)$ en llegar a $\eta = 0$.

El problema consiste en determinar la curva conociendo la función $f_1(x)$.

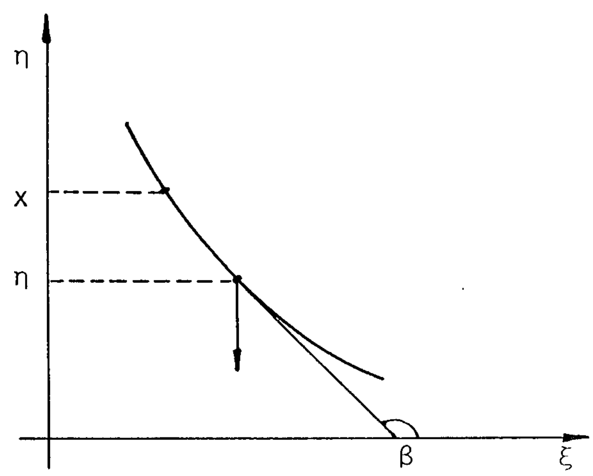


Fig. 4.1

$$\frac{1}{2} v^2(\eta) = g(x - \eta) \qquad\qquad g = \text{aceleración de la gravedad.}$$

Si β es el ángulo que forma la tangente a la curva en el punto de ordenada η

$$\frac{d\eta}{dt} = -v(\eta) \text{ sen } \beta(\eta) = -\sqrt{2g(x - \eta)} \text{ sen } \beta(\eta)$$

Si

(1) $$\phi(\eta) = \frac{1}{\text{sen } \beta(\eta)}$$

entonces,

$$dt = \frac{-\phi(\eta)\, d\eta}{\sqrt{2g(x - \eta)}}$$

integrando

$$f_1(x) = -\int_0^x \frac{\phi(\eta)\, d\eta}{\sqrt{2g(x - \eta)}}$$

luego

$$-\sqrt{2g}\, f_1(x) = \int_0^x \frac{\phi(\eta)\, d\eta}{\sqrt{x - \eta}}$$

Llamando $f(x) := -\sqrt{2g}\, f_1(x)$, tenemos la ecuación de Abel

(1')
$$f(x) = \int_0^x \frac{\phi(\eta)\, d\eta}{\sqrt{x - \eta}}$$

Esta es una ecuación integral de Volterra de primera especie, de convolución, cuyo núcleo no es de cuadrado integrable.
Puesto que $f(x)$ es dato, hallando $\phi(\eta)$ obtenemos la ecuación de la curva. De (1)

$$\eta = \Phi_2(\beta)$$

además:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \text{tg}\ \beta \qquad ; \qquad d\xi = \frac{d\eta}{\text{tg}\ \beta}$$

Luego:

$$\xi = \int^{\beta} \frac{\Phi_2'(s)\, ds}{\text{tg}\ s} = \Phi_1(\beta)$$

En consecuencia obtenemos la que, presumiblemente, es la ecuación paramétrica de la trayectoria descripta por el móvil:

$$\begin{cases} \xi = \Phi_1(\beta) \\ \eta = \Phi_2(\beta) \end{cases}$$

ECUACION GENERALIZADA DE ABEL

Sea $f(x)$ dada y $0 < \alpha < 1$, queremos resolver la ecuación

(2)
$$f(x) = \int_0^x \frac{\phi(t)\, dt}{(x - t)^{\alpha}}$$

Multipliquemos ambos miembros de (2) por $\frac{ds}{(x - s)^{1-\alpha}}$ e integremos respecto de s entre 0 y x

$$(3) \qquad \int_0^x \frac{f(s)\,ds}{(x-s)^{1-\alpha}} = \int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}} \int_0^s \frac{\phi(t)\,dt}{(s-t)^{\alpha}} = \int_0^x \phi(t)\,dt \int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^{\alpha}}$$

Haciendo $s = t + y(x - t)$

$$(4) \quad \int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^{\alpha}} = \int_0^1 y^{-\alpha}(1-y)^{\alpha-1}\,dy = B(1-\alpha,\alpha) = \Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha) =$$

$$= \frac{\pi}{\text{sen}\ \pi\alpha}$$

Reemplazando en (3)

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(s)\,ds}{(x-s)^{1-\alpha}} = \int_0^x \frac{\pi}{\text{sen}\ \alpha\pi}\,\phi(t)\,dt$$

luego

$$\frac{\text{sen}\ \alpha\pi}{\pi}\,F(x) = \int_0^x \phi(t)\,dt$$

entonces

$$\phi(x) = \frac{\text{sen}\ \alpha\pi}{\pi}\,F'(x) = \frac{\text{sen}\ \alpha\pi}{\pi}\left(\int_0^x \frac{f(s)\,ds}{(x-s)^{1-\alpha}}\right)'$$

Integrando por partes obtenemos

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{f(0)\,x^{\alpha}}{\alpha} + \int_0^x f'(s)\,\frac{(x-s)^{\alpha}}{\alpha}\,ds\right) \quad , \ y$$

$$(5) \qquad \phi(x) = \frac{\text{sen}\ \alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(s)\,ds}{(x-s)^{1-\alpha}}\right]$$

Problema de la tautócrona: hallar la curva (ξ,η) (cf. §4) para la cual la partícula alcanza el eje ξ al cabo de un mismo tiempo cualquiera sea la posición inicial. Corresponde a $f_1(x)$ = cte.. O sea, $f(x) \equiv C$ y $\alpha = \frac{1}{2}$ en (2). La solución de este problema de Abel es una cicloide.

De (5)

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{c}{\sqrt{x}}$$

de donde

$$\text{sen } \beta(\eta) = \frac{1}{\phi(\eta)} = \frac{\pi\sqrt{\eta}}{c}$$

entonces

$$\eta = \frac{c^2}{\pi^2}\text{sen}^2\,\beta(\eta) = \frac{c^2}{\pi^2}\frac{1 - \cos 2\beta}{2}$$

$$d\xi = \frac{d\eta}{\text{tg } \beta} = \frac{c^2}{\pi^2}\frac{\text{sen } 2\beta\, d\beta}{\text{tg } \beta} = \frac{c^2}{\pi^2}\,2\cos^2\beta\, d\beta = \frac{c^2}{\pi^2}(1 + \cos 2\beta)d\beta$$

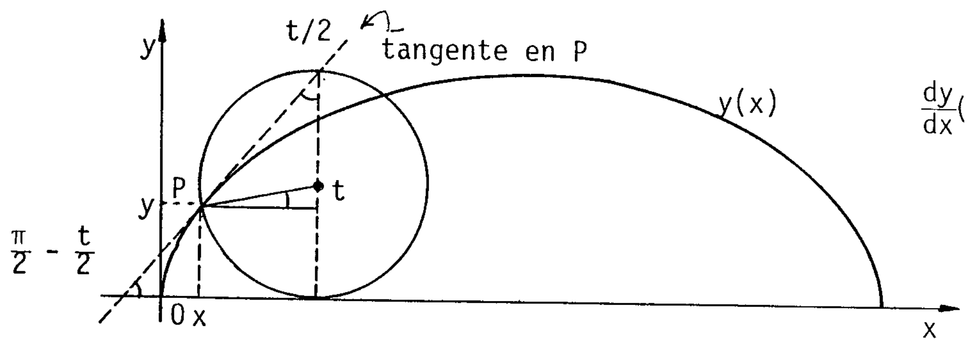
$$\xi = \frac{c^2}{\pi^2}\left(\beta + \frac{\text{sen } 2\beta}{2}\right) + c'$$

La curva obtenida es:

$$(6)\qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{c^2}{2\pi^2}(2\beta + \text{sen } 2\beta) + c' \\[2ex] \eta = \dfrac{c^2}{2\pi^2}(1 - \cos 2\beta) \end{cases}$$

La ecuación paramétrica de la cicloide es:

$$\begin{cases} x = r(t - \text{sen } t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$$



$$\frac{dy}{dx}(x) = \text{cotg } \frac{t}{2} = $$

$$= \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)$$

Fig.4.2.

Consideremos:

$X = x$

$Y = -y + 2r$

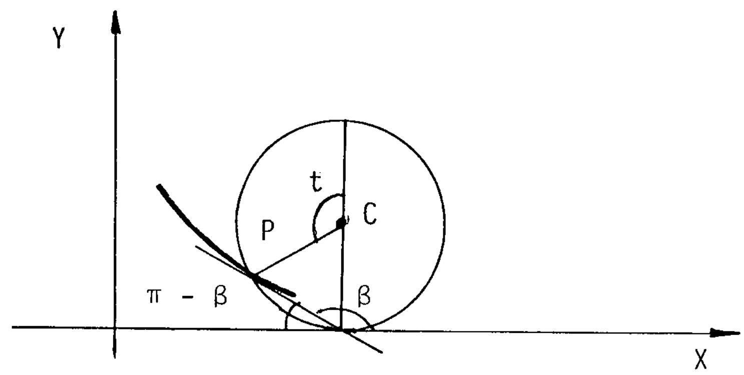


Fig.4.3.

Se vé que $\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{t}{2}$, o sea, $t = 2\beta - \pi$; reemplazando

$$X = r(2\beta + \text{sen } 2\beta) - r\pi$$
$$Y = r(1 - \cos 2\beta)$$

tomando $r = \frac{c^2}{2\pi^2}$, $c' = -r\pi$ obtenemos (6).

Los móviles 1, 2 y 3 tardan el mismo tiempo para llegar a F si son abandonados a la gravedad y en C no hay rozamiento.

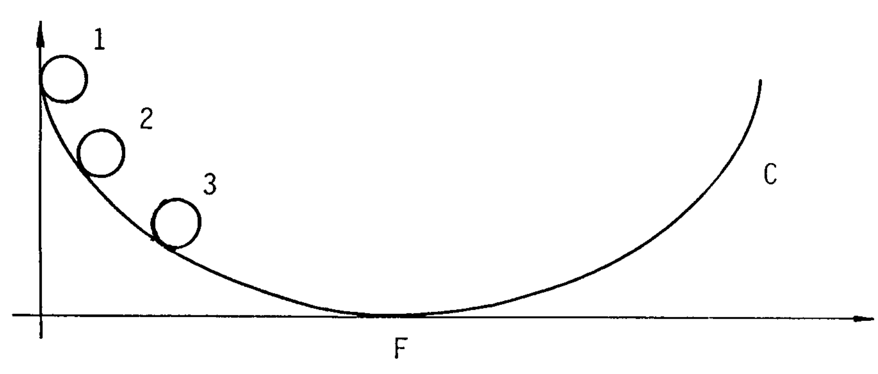


Fig.4.4.

<u>Nota</u>. La cicloide es también <u>braquistócrona</u>, es decir, entre todas las rampas que pueden tenderse entre A y C para el descenso sin rozamiento de un grave es la que exige el tiempo mínimo.

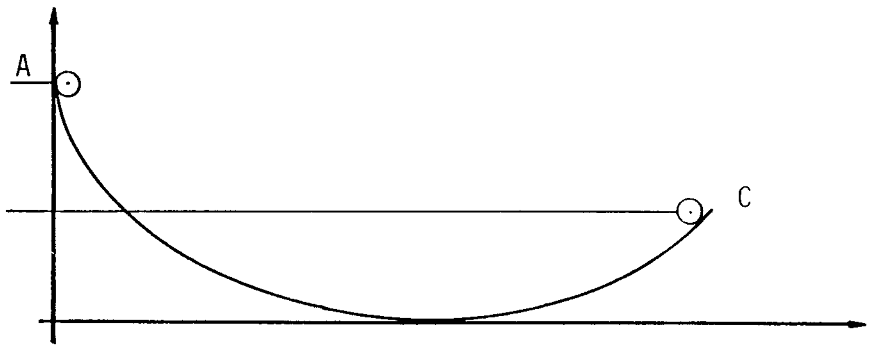


Fig. 4.5.

5. RESOLUCION DE UNA ECUACION INTEGRAL MEDIANTE LA RESOLVENTE

Sea la ecuación integral de Volterra de segunda especie

$$(1) \qquad \phi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x K(x,t)\,\phi(t)\,dt$$

El siguiente teorema da las condiciones que deben verificar las funciones f(x) y K(x,t) para que la ecuación tenga única solución.

TEOREMA 5.1. Si $f(x) \in L^2(0,a)$ y $K(x,t) \in L^2((0,a) \times (0,a))$ la ecuación (1) tiene exactamente una solución en $L^2(0,a)$.

Esta solución viene dada por la fórmula

$$(2) \qquad \phi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x R(x,t,\lambda)\,f(t)\,dt$$

$R(x,t,\lambda)$ es el núcleo resolvente perteneciente a $L^2((0,a) \times (0,a))$ que se obtiene por la serie uniformemente convergente:

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^{\nu} K_{\nu+1}(x,t)$$

$K_{\nu+1}$ es el núcleo iterado definido del siguiente modo:

$$K_1(x,t) = K(x,t) \;,\; K_{\nu+1}(x,t) = \int_t^x K(x,z)\,K_{\nu}(z,t)\,dz \quad \nu = 1, 2, \ldots.$$

Ejemplo:

$$K = K_1(x,t) = 1,\ K_2(x,t) = \int_t^x K(x,z)\, K_1(z,t)\, dt = x - t,\ \dots ,\ K_n = \frac{(x - t)^{n-1}}{(n - 1)!}$$

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1} = \exp \lambda(x - t).$$

Nota 1. El teorema 5.1 implica que el operador definido por un núcleo de tipo Volterra en L^2 tiene su espectro contenido en $\{0\}$. Como debe ser no vacío: $\sigma = \{0\}$. Esto se vé directamente observando que para todo $\phi \in L^2$, $K\phi \in C([0,a])$, o sea, K no es sobre. Además σ no es necesariamente igual a σ_p.

Nota 2. Si $K(x,t) = k(x - t)$ entonces el núcleo resolvente es de la forma:
$$R(x,t,\lambda) = r(x-t,\lambda).$$

El teorema dado nos asegura la unicidad de la solución en el espacio $L^2(0,a)$; a continuación daremos un ejemplo de una ecuación que tiene solución en $L^2(0,a)$ que es única y también tiene "solución" en otro espacio de funciones que contiene al primero.

Sea

$$\phi(x) = \int_0^x K(x,t)\, \phi(t)\, dt \qquad (f(x) \equiv 0 \quad \lambda = 1)$$

Definimos $K(x,t)$ en $[0,1] \times [0,1]$ como sigue:

$$K(x,t) = \begin{cases} t.e^{\frac{1}{x^2} - 1} & 0 \leqslant t \leqslant x.e^{1 - \frac{1}{x^2}} \\ x & x.e^{1 - \frac{1}{x^2}} \leqslant t \leqslant x \\ 0 & t > x \end{cases}$$

$K(x,t)$ es continuo en $0 \leqslant t \leqslant x$ y acotado en $[0,1] \times [0,1]$.

La función $\phi \equiv 0$ es solución de la ecuación y es la única en $L^2(0,a)$.

Consideremos las funciones no sumables en $(0,1)$: $\phi(x) = \frac{C}{x}$; veamos que también son soluciones de la ecuación:

$$\int_0^x K(x,t)\ \phi(t)\ dt = \int_0^{xe^{1-1/x^2}} t\ e^{1/x^2-1}\ \frac{c}{t}\ dt + \int_{xe^{1-1/x^2}}^{x} x\ \frac{c}{t}\ dt =$$

$$= Cx + Cx.\ln\ e^{1/x^2-1} = \frac{c}{x} = \phi(x).$$

6. LA VIGA VIBRANTE

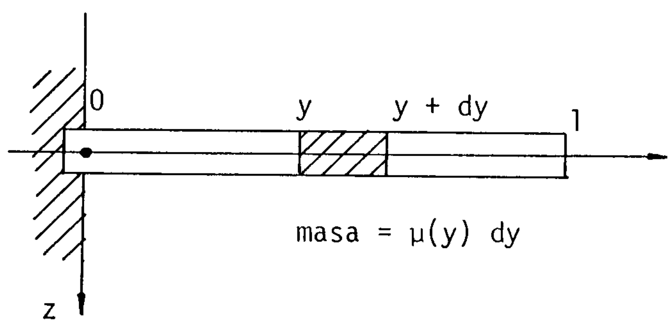


Fig. 6.1.

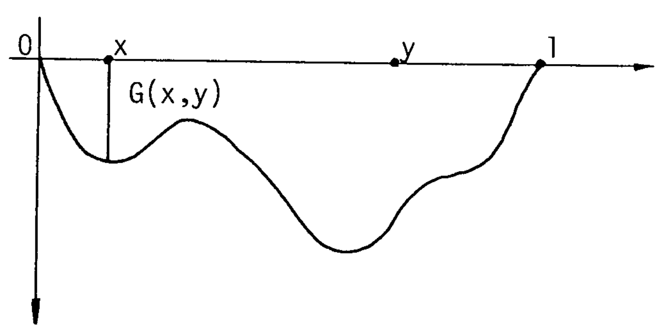


Fig. 6.2.

Consideremos una viga de longitud 1 (Fig. 6.1) y coloquemos en y una carga unitaria que deforme la figa (Fig. 6.2).
Si G(x,y) es la deflexión de la viga en el punto x en la dirección Oz por esa carga en y, entonces

(1) $$z(x) = \int_0^1 G(x,y)\ p(y)\ dy\ ,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

es la deflexión total en x provocada por una carga continua a lo largo de la viga (principio de superposición).
El principio de reciprocidad elástica de Betti-Maxwell asegura que $G(y,x) = G(x,y)$.
Supongamos ahora a la viga en movimiento; la deflexión es ahora función de x y de t.
Entonces

$$(2) \qquad z(x,t) = \int_0^1 G(x,y)\left[p(y) - \mu(y) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(y,t)\right] dy.$$

Aquí $\mu(y)$ es la densidad lineal del material. De la ecuación de equilibrio (1) se pasa a la ecuación dinámica (2) utilizando el principio de D'Alembert que consiste en reemplazar en la primera las fuerzas activas por las correspondientes fuerzas perdidas.

En el caso de vibraciones armónicas: $z(x,t) = Z(x)e^{i\omega t}$, y si suponemos que no hay cargas ($p = 0$), de la ecuación integrodiferencial (2) obtenemos la ecuación de Fredholm, homogénea de segunda especie:

$$(3) \qquad Z(x) - \omega^2 \int_0^1 G(x,y)\, \mu(y)\, Z(y)\, dy = 0$$

Si la densidad es constante estamos en el caso de una viga uniforme, y

$$(4) \qquad Z(x) - \omega^2 \mu \int_0^1 G(x,y)\, Z(y)\, dy = 0$$

Vamos a resolver el problema por otro camino. Consideremos la ecuación diferencial que gobierna el movimiento transversal

$$(5) \qquad \frac{\partial^4 z}{\partial x^2} + \frac{\mu}{E.I} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$$

donde E es la elasticidad; I el momento de inercia; $j = EI$ = rigidez a la flexión.
Las condiciones de contorno correspondientes a una viga empotrada en un extremo son:

$$(6)\qquad \begin{cases} z(0,t) = \dfrac{\partial z}{\partial x}(0,t) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,t) = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}(1,t) = 0 \end{cases}$$

Nos proponemos hallar las frecuencias naturales ν, en este caso el sistema vibrará según un modo normal; por consiguiente

$$z(x,t) = Z(x)e^{i\omega t} \quad , \ \nu = \omega/2\pi .$$

La ecuación (5) y las condiciones (6) se transforman en:

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^4 Z}{dx^4} - k^4 Z(x) = 0 \ ; \ k^4 = \dfrac{\omega^2 \mu}{E.I} = \omega^2 \mu/j \ ; \\[2ex] Z(0) = Z'(0) = 0 \\[1ex] Z''(1) = Z'''(1) = 0. \end{cases}$$

Busquemos la solución más general de la ecuación diferencial (7) que satisfaga:

$$Z(0) = Z'(0) = 0$$

$$Z''(0) = C_2 \ , \ Z'''(0) = C_3.$$

Escribamos la ecuación diferencial en (7) en la forma:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} = k^4 Z$$

Por el teorema 1.1 existe solución

$$W(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} k^4 \, Z(t)\, dt, \text{ con } W(0) = W'(0) = W''(0) = W'''(0).$$

Sea $P(x) = C_2 \frac{x^2}{2!} + C_3 \frac{x^3}{3!}$. Luego $P(0) = P'(0) = 0$, $P''(0) = C_2$, $P'''(0) = C_3$.

Entonces: $\frac{d^4(W + P)}{dx^4} = k^4 Z$, y puesto que la solución de (7) es única:

$$W + P = Z$$

La función Z satisface la ecuación integral de Volterra de segunda especie.

$$Z(x) - k^4 \int_0^x \frac{(x - t)^3}{3!} Z(t)\, dt = C_2 \frac{x^2}{2!} + C_3 \frac{x^3}{3!} \tag{8}$$

que tiene una resolvente de convolución.

En lo que sigue hallaremos la solución de la ecuación diferencial (7) por otro método.
Sean

$$\begin{cases} \Phi_1(x) = \cosh x + \cos x \\ \Phi_2(x) = \operatorname{senh} x + \operatorname{sen} x \\ \Phi_3(x) = \cosh x - \cos x \\ \Phi_4(x) = \operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x \end{cases} \tag{9}$$

Obsérvese que: $\Phi'_1 = \Phi_4$, $\Phi'_4 = \Phi_3$, $\Phi'_3 = \Phi_2$, $\Phi'_2 = \Phi_1$.

Si $Z(x) = \frac{C_2}{2k^2} \Phi_3(kx) + \frac{C_3}{2k^3} \Phi_4(kx)$

se verifica

$$\begin{cases} \frac{d^4 Z}{dx^4} - k^2 Z = 0 \\ Z(0) = Z'(0) = 0 \\ Z''(0) = C_2 \ , \ Z'''(0) = C_3 \end{cases} \tag{10}$$

Queremos que $Z''(1) = Z'''(1) = 0$, y tenemos dos constantes (C_2, C_3) a elegir

$$Z''(x) = \frac{C_2}{2} \Phi_1(kx) + \frac{C_3}{2k} \Phi_2(kx)$$

$$Z'''(x) = \frac{C_2}{2} k\Phi_4(kx) + \frac{C_3}{2} \Phi_1(kx)$$

Si tomamos $x = l$ e igualamos a cero obtenemos el siguiente sistema:

$$(11) \qquad \begin{cases} C_2[\cosh(kl) + \cos(kl)] + \frac{1}{k} C_3[\mathrm{senh}(kl) + \mathrm{sen}(kl)] = 0 \\ \\ k\, C_2[\mathrm{senh}(kl) - \mathrm{sen}(kl)] + C_3[\cosh(kl) + \cos(kl)] = 0 \end{cases}$$

La condición necesaria y suficiente para que exista solución no trivial es que:

$$(12) \qquad 1 + \cosh(kl) \cos kl \equiv 0$$

Los k que satisfacen esta ecuación elevados a la cuarta son los autovalores de la ecuación y de $\nu = \frac{k^2}{2\pi}\sqrt{\frac{j}{\mu}}$ se obtienen las frecuencias de vibración.

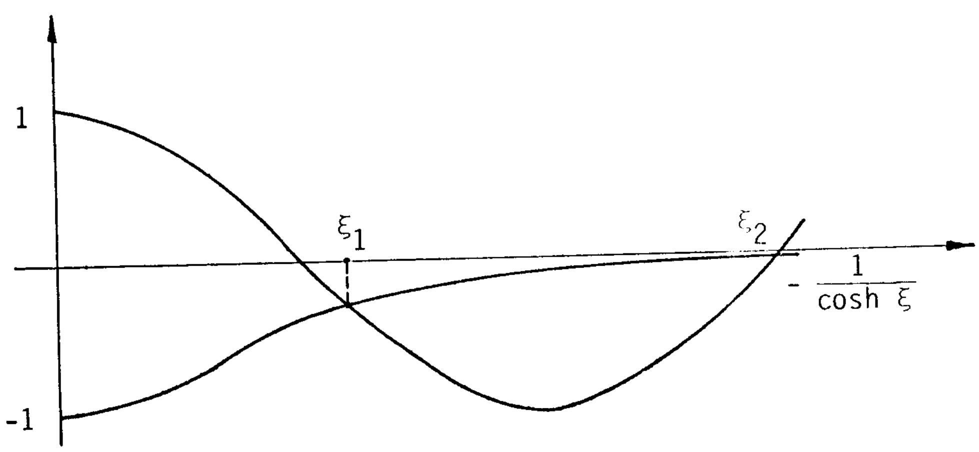


Fig. 6.3.

$$\xi_1 = 1.875$$

$$\xi_2 = 4.694$$

$$\vdots$$

$$\nu_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{j}{\mu}} \cdot \frac{\xi_n^2}{l^2}$$

7. TRASFORMADA DE LAPLACE

Sea $\phi(t)$ una función compleja de la variable real t, localmente sumable, nula en $t < 0$ y tal que $|\phi(t)| \leqslant M(t)e^{s_0 t}$ para casi todo t donde $s_0 \geqslant 0$, $M(t) \in L^1(0,\infty)$. En estas condiciones llamaremos a $\phi(t)$ función objeto; s_0 es un índice de crecimiento de ϕ.

LLamaremos Transformada de Laplace de la función objeto $\phi(t)$ a la función $\Phi(p)$ de la variable compleja $p = s + i\sigma$ definida por la igualdad:

(1) $$\Phi(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\,\phi(t)\,dt$$

$\Phi(p)$ define una función analítica en el semiplano $\operatorname{Re} p > s_0$. Para indicar que $\Phi(p)$ es la Transformada de Laplace de la función $\phi(t)$ escribimos

$$\phi(t) \risingdotseq \Phi(p),$$

o bien: $$\Phi(p) = (\mathcal{L}\phi)(p).$$

Denotaremos con L la clase de las funciones objeto

$$L := \{\phi\colon \phi = 0 \text{ en } t < 0,\ \phi e^{-s_0 t} \in L^1(0,\infty) \text{ donde } s_0 = s_0(\phi)\}$$

TEOREMA 7.1 (de inversión). Sea $\phi \in C^1(a,b) \cap L$, $\Phi = \mathcal{L}\phi$, $c > s_0 = s_0(\phi)$ = un índice de crecimiento de f y $t \in (a,b)$. Entonces

(2) $$\phi(t) = (\mathcal{L}^{-1}\Phi)(t) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{M\to\infty}\int_{c-iM}^{c+iM} \Phi(p)\,e^{pt}\,dp.$$

Es decir, Φ determina a ϕ en (a,b) bajo las hipótesis mencionadas.
Más aún,

TEOREMA 7.2 (de unicidad). Sea $f(t) \in L^1(0,R)$ para todo $R > 0$ y

$\lim\limits_{R\to\infty} \int_0^R e^{-pt} f(t)\, dt \equiv 0$ para todo p tal que $Re(p) > a$. Entonces $f(t) = 0$ c.d..

TEOREMA 7.3. Sea $Re(p) > \alpha$ un semiplano donde $\Phi(p)$ es holomorfa. Supongamos que exista $a > \max(0,\alpha)$ tal que si $Re(p) \geqslant a$ entonces $|\Phi(p)| \leqslant B|p|^{-2}$, $B > 0$. Si calculamos usando (2) $\phi = \mathcal{L}^{-1}\Phi$ sobre $Re(p) = c \geqslant a$ entonces $\phi(t) = 0$ para $t < 0$, $\phi \in L$ y $\mathcal{L}\phi = \Phi$ en $Re(p) \geqslant a$.

TEOREMA 7.4. Sea $\Phi(p) = M(p)/N(p)$, M y N polinomios en p con grado M < grado N. Si $\Phi(p)$ tiene sólo l polos simples, $a_1, \ldots, a_l$, entonces

$$\phi(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{M(a_k)}{N'(a_k)} e^{a_k t} \risingdotseq \frac{M(p)}{N(p)} .$$

Recordamos a continuación algunas fórmulas y relaciones importantes sin precisar las hipótesis bajo las cuales ellas valen, y también una pequeña pero útil tabla de transformadas.

(3) $e^{at} \phi(t) \risingdotseq \Phi(p-a)$.

(4) Si $a > 0$, $\phi(t+a) \risingdotseq e^{ap}(\Phi(p) - \int_0^a e^{-ps} \phi(s)\, ds)$, y

(5) $\phi(at) \risingdotseq \frac{1}{a} \Phi(\frac{p}{a})$, y

(6) $\phi(t-a) \chi_{[a,\infty)} \risingdotseq e^{-ap} \Phi(p)$.

(7) $\frac{\phi(t)}{t} \risingdotseq \int_p^\infty \Phi(s)\, ds$.

(8) $\int_0^\infty e^{-st} y'(t)\, dt = -y(0) + s\int_0^\infty e^{-st} y(t)\, dt$.

(9) $\int_0^\infty e^{-st}\, y''(t)\, dt = -y'(0) - sy(0) + s^2\int_0^\infty e^{-st}\, y(t)\, dt.$

(10) $\int_0^\infty e^{-st} y'''(t)\, dt = -y''(0) - sy'(0) - s^2y(0) + s^3\int_0^\infty e^{-st}\, y(t)\, dt.$

((8) vale, por ejemplo, si $y \in C^1([0,\infty))$, y e y' son $O(e^{ct})$).

$\phi(t)$	$\Phi(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\phi(t)\, dt$	Condiciones
t^{a-1}	$\Gamma(a).p^{-a}$	$a > 0$, $Re(p) > 0$
e^{at}	$(p - a)^{-1}$	$Re\ p > a$
sen at	$\frac{a}{p^2 + a^2}$	$Re\ p > 0$
cos at	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$Re\ p > 0$
sh at	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$Re\ p > \lvert a\rvert$
ch at	$\frac{p}{p^2 - a^2}$	$Re\ p > \lvert a\rvert$
ln t	$\frac{-\gamma + \ln p}{p}$	$Re\ p > 0$, γ = cte. de Euler
$t^\nu \ln t$	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}\left(\frac{\Gamma'(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} + \ln\frac{1}{p}\right)$	$Re\ \nu > -1$, $Re\ p > 0$
$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2 + a^2}}$	$Re\ p > 0$, $a > 0$
$J_0(2\sqrt{at})$	$\frac{1}{p}\, e^{-a/p}$	$Re\ p > 0$, $a > 0$
$t^{\nu/2}\, J_\nu(a\sqrt{t})$	$\frac{a^\nu}{2^\nu}\, \frac{e^{-a^2/4p}}{p^{\nu+1}}$	$Re\ p > 0$, $Re\ \nu > -1$
t sen at	$\frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}$	$Re\ p > 0$

sen at - at cos at	$\dfrac{2a^3}{(p^2+a^2)^2}$	Re $p > 0$

TEOREMA 7.5 (del producto). Supongamos que $f(t)$ y $\phi(t)$ son funciones objeto

$$f(t) \risingdotseq F(p) \text{ y } \phi(t) \risingdotseq \Phi(p)$$

Entonces $F(p)\,\Phi(p) \risingdotseq \int_0^t f(u)\,\phi(t-u)\,du = f(t) * \phi(t)$.

Resolver ecuaciones mediante la aplicación de la Transformada de Laplace tiene sus inconvenientes, veamos el siguiente ejemplo.

Sea la ecuación

$$y'(t) + ay(t) = \phi(t) \ , \ a \text{ constante,}$$

con la condición

$$y(0) = A.$$

Aplicando la transformada de Laplace resulta:

$$-A + sY(p) + aY(p) = \Phi(p)$$

De donde

$$Y(p) = \frac{\Phi(p) + A}{p + a} = \frac{A}{p + a} + \frac{\Phi(p)}{p + a}$$

entonces

$$y(t) = Ae^{-at} + e^{-at} * \phi(t) = e^{at}[A + \int_0^t e^{au}\phi(u)\,du] \tag{11}$$

Se puede verificar por reemplazo que (11) es la solución de $y' + ay = \phi$ que vale A en $t = 0$.

Si $\phi(t) = e^{t^2}$ no podemos aplicar el método pues no existe la Transformada de Laplace de dicha función, pero (11) sigue siendo la solución buscada pues la convolución está bien definida.

Vamos a usar la transformada de Laplace para resolver <u>ecuaciones integrales de Volterra de convolución</u>.

Sea

$$\phi(x) = f(x) + \int_0^x k(x-t)\,\phi(t)\,dt$$

Si

$$f(x) \doteqdot F(p)\ ,\ F(p) \neq 1 \text{ para todo } p,$$

$$\phi(x) \doteqdot \Phi(p)$$

$$k(x) \doteqdot K(p)$$

Entonces

$$\Phi(p) = F(p) + K(p).\Phi(p)$$

de donde

(12) $$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - K(p)}$$

Sabemos por el teorema 5.1 que la ecuación integral de convolución tiene solución dada por:

$$\phi(x) = f(x) + \int_0^x r(x-t,1)\,f(t)\,dt$$

Si

$$r(x) \doteqdot R(p)$$

entonces

$$\Phi(p) = F(p) + R(p).F(p)$$

luego

$$R(p) = \frac{\Phi(p) - F(p)}{F(p)} = \frac{\Phi(p)}{F(p)} - 1 = \frac{1}{1 - K(p)} - 1 = \frac{K(p)}{1 - K(p)}$$

Ejemplo: si $k(x) = \text{sen } x$, $K(p) = \dfrac{1}{1 + p^2}$; entonces $R(p) = \dfrac{1}{p^2}$ y $r(x-t,1) = x - t$.

Resolvamos la ecuación

$$\phi(x) = \text{sen } x + \int_0^x 2\cos(x-t)\,\phi(t)\,dt$$

$$\Phi(p) = \frac{\dfrac{1}{1 + p^2}}{1 - \dfrac{2p}{1 + p^2}} = \frac{1}{(p - 1)^2}$$

en consecuencia

$$\phi(t) = e^t * e^t = te^t$$

Puesto que $\phi(t)$ es una función objeto es correcta la aplicación del método.

RESOLUCION DE ECUACIONES INTEGRODIFERENCIALES MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Supongamos a_0, a_1, a_2 constantes; $f(x)$, $k_i(x-t)$, $i = 0, 1, 2$, funciones conocidas.

Resolveremos usando transformada de Laplace la siguiente ecuación integrodiferencial:

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y + \int_0^x k_0(x-t)y(t)\,dt + \int_0^x k_1(x-t)y'(t)\,dt + \int_0^x k_2(x-t)y''(t)\,dt =$$

$$= f(x)$$

La solución $y(x)$ que buscamos deberá satisfacer las condiciones $y(0) = y'(0) = 0$.
Si

$$f(x) \doteqdot F(p) \;;$$

$$k_i(x) \doteqdot K_i(p) \quad , \; i = 0, 1, 2,$$

$$y(x) \doteqdot Y(p)$$

$$a_2(-y'(0) - py(0) + p^2Y(p)) + a_1(-y(0) + pY(p)) + a_0Y(p) + K_0(p)Y(p) +$$

$$+ K_1(p)(-y(0) + pY(p)) + K_2(p)(-y'(0) - py(0) + p^2Y(p)) = F(p)$$

O sea,

$$Y(p) = \frac{F(p)}{p^2(a_2 + K_2(p)) + p(a_1 + K_1(p)) + (a_0 + K_0(p))}$$

Aplicando la transformada inversa obtenemos $y(x)$.

Ejemplos: 1) $\displaystyle\int_0^x e^{x-t}\phi(t)\,dt = x$

$$\Phi(p).\frac{1}{p-1} = \frac{1}{p^2}$$

ó $$\Phi(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \quad . \text{ Entonces}$$

(13) $$\phi(x) = 1 - x$$

2) $$\int_0^x (x - t)\ \phi(t)\ dt = x$$

$$\Phi(p).\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2}$$

entonces $$\Phi(p) = 1$$

Debemos tener presente al encontrar la solución el campo al cual ella pertenece. La ecuación del ejemplo 2) tiene solución en el campo de las distribuciones pero no en el de las funciones:

(14) $$\phi = \delta = \text{delta de Dirac.}$$

3) $$\int_0^x \ln(x\text{-}t)\ \phi(t)\ dt = f(x)\ ,\ f(0) = 0$$

$$\Phi(p).\left(-\ \frac{\gamma + \ln p}{p}\right) = F(p)$$

de donde

$$\Phi(p) = -\ \frac{pF(p)}{\gamma + \ln p} = -\ \frac{p^2F(p)}{p\gamma + p\ \ln p} = -\ \frac{p^2F(p) - pf(0) - f'(0)}{p(\gamma + \ln p)} - \frac{f'(0)}{p(\gamma + \ln p)}\ .$$

Recordemos que

$$\frac{x^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} \doteqdot \frac{1}{p^{\nu+1}}$$

integrando respecto a ν

$$\int_0^\infty \frac{d\nu}{p^{\nu+1}} = \int_0^\infty d\nu \int_0^\infty e^{-pt}\ \frac{t^\nu}{\Gamma(\nu + 1)}\ dt = \int_0^\infty e^{-pt}\ dt \int_0^\infty \frac{t^\nu}{\Gamma(\nu + 1)}\ d\nu,$$

Como $\int_0^\infty \frac{d\nu}{p^{\nu+1}} = \frac{1}{p \ln p}$, resulta

$$\int_0^\infty \frac{x^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} d\nu \doteqdot \frac{1}{p \ln p}$$

y
$$\int_0^\infty \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} d\nu \doteqdot \frac{a}{ap \ln(ap)} = \frac{1}{p \ln a + p \ln p}$$

Si $a = e^\gamma$:

$$\int_0^\infty \frac{x^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu + 1)} d\nu \doteqdot \frac{1}{p(\gamma + \ln p)}$$

luego

$$\int_0^x f''(t)\left(\int_0^\infty \frac{(x - t)^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu + 1)} d\nu\right) dt \doteqdot \frac{p^2F(p) - f'(0)}{p(\gamma + \ln p)} .$$

De este modo la solución $\phi(x)$ de la ecuación integral tiene la forma:

$$\phi(x) = -\int_0^x f''(t)\left(\int_0^\infty \frac{(x - t)^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu + 1)} d\nu\right)dt - f'(0)\int_0^\infty \frac{x^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu + 1)} d\nu$$

Si $f(x) = x$, $f(0) = 0$, se obtiene

$$\phi(x) = -\int_0^\infty \frac{x^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu + 1)} d\nu. \tag{15}$$

Compárese (15) con (13) y (14).

8. ECUACIONES DE FREDHOLM

Sea $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$; $f(x)$ y $K(x,t)$ funciones dadas; $K(x,t) \in L^2((a,b)\times(a,b))$; $\phi(x)$ es la incógnita y λ el parámetro numérico. La ecuación

$$(1) \qquad \phi(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\,\phi(t)\,dt = f(x)$$

se llama ecuación integral de Fredholm de segunda especie no homogénea. La función $K(x,t)$ se denomina núcleo de la ecuación (1).
Si $f(x) \equiv 0$ la ecuación (1) se llama homogénea.
La ecuación

$$\int_a^b K(x,t)\,\phi(t)\,dt = f(x)$$

se llama ecuación de Fredholm de primera especie.
Veamos que la resolución de una ecuación diferencial con condiciones de contorno se reduce a la resolución de una ecuación integral de Fredholm.
Consideremos la ecuación diferencial

$$(2) \qquad L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_n(x)y(x) = 0$$

con $p_0(x)$, $p_1(x)$, ... , $p_n(x)$, continuas en $[a,b]$ y las condiciones de contorno

$$(3) \qquad V_k(y) \equiv \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)}y'(a) + \dots + \alpha_k^{(n-1)}y^{(n-1)}(a) +$$

$$+ \beta_k y(b) + \beta_k^{(1)}y'(b) + \dots + \beta_k^{(n-1)}y^{(n-1)}(b) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

las formas lineales V_1, ... , V_n, son linealmente independientes.
Se llama función de Green del problema de contorno (2) - (3) a la función $G(x,\xi)$, $a \leqslant x \leqslant b$, $a < \xi < b$, que satisface las propiedades siguientes:

(I) $G(x,\xi)$ es continua y $\dfrac{\partial^j G(x,\xi)}{\partial x^j}$ es continua en $a \leqslant x \leqslant b$ para ξ perteneciente a (a,b), $j = 1, \dots , n-2$,

(II) $\left.\dfrac{\partial^{(n-1)}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x = \xi + 0} - \left.\dfrac{\partial^{(n-1)}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x = \xi - 0} = \dfrac{1}{p_0(\xi)}$,

(III) En cada intervalo $[a,\xi)$ y $(\xi, b]$ la función $G(x,\xi)$ considerada como función de x satisface (2):

$$L[G] = 0$$

(IV) $V_k(G) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots , n)$ para todo $\xi \in (a,b)$.

TEOREMA 8.1. Si $L[y] = 0$, $V_k(y) = 0$, tiene sólo la solución trivial entonces existe una única función de Green.

TEOREMA 8.2. Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y $L[y] = f(x)$ entonces si se satisfacen las hipótesis del teorema 8.1

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi$$

En general los problemas que se presentan tienen la forma

$$(4) \qquad \begin{cases} L[y] = \lambda y + h(x) \\ V_k(y) = 0 \end{cases}$$

Para $h(x) \equiv 0$ se tiene el problema homogéneo

$$(5) \qquad \begin{cases} L[y] = \lambda y \\ V_k(y) = 0 \end{cases}$$

Los λ para los cuales existe para (5) solución no trivial se llaman autovalores (ó valores propios).

TEOREMA 8.3. Si el problema $L[y] = 0$, $V_k(y) = 0$, admite sólo la solución trivial entonces el problema (4) es equivalente al la ecuación integral de Fredholm

$$y(x) = \lambda\int_a^b G(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi + f(x)$$

donde

$$f(x) = \int_a^b G(x,\xi)\ h(\xi)\ d\xi$$

En particular el problema de contorno (5) es equivalente a la ecuación integral homogénea

$$y(x) = \lambda\int_a^b G(x,\xi)\ y(\xi)\ d\xi$$

PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE.

Sea $p(x) \in C^1([a,b])$, $p(x) > 0$; $q(x) \in C[a,b]$, $a \leqslant x \leqslant b$.

$$\begin{cases} L[y] \equiv (p(x)\ y')' + q(x)\ y = 0 \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

Existe una solución y_1 tal que (cf.T.1.1.):

$$L[y_1] = 0,\ y_1(a) = 0,\ y_1'(a) \neq 0.$$

Análogamente existe y_2 solución de:

$$L[y_2] = 0,\ y_2(b) = 0,\ y_2'(b) \neq 0.$$

Supongamos que exista x_0 tal que $W(y_1,y_2)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$, entonces $W(y_1,y_2)(x) \neq 0$ para todo x y esto implica que y_1 e y_2 son linealmente independientes.

Si $y(x)$ satisface $L[y] = 0$ y además $y(a) = y(b) = 0$ entonces

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

$$y(a) = C_1y_1(a) + C_2y_2(a) = C_2y_2(a)$$

Si $y_2(a) = 0$ el wroskiano es cero en a contradicción. En consecuencia, debe ser

$C_2 = 0$; análogamente conluímos que $C_1 = 0$.

La única solución del problema es $y(x) \equiv 0$, entonces existe la función de Green que en este caso es igual a:

$$G(x,\xi) \begin{cases} \dfrac{y_1(x)\, y_2(\xi)}{p(\xi)\, W(\xi)} & a \leqslant x \leqslant \xi \\[2ex] \dfrac{y_1(\xi)\, y_2(x)}{p(\xi)\, W(\xi)} & \xi \leqslant x \leqslant b \end{cases}$$

Ejemplos:

1) $y'' + k^2 y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, k real $\neq 0$.
   $y(0) = y(1) = 0$

   $y_1(x) = \text{sen } kx$

   $y_2(x) = \text{sen } k(x-1)$

Entonces $W(y_1, y_2) = k \text{ sen } k$. Por lo tanto $W(y_1, y_2) = 0$ si y sólo si $k^2 = n^2\pi^2$; $n = 1, 2, \ldots$. La función sen $n\pi x$ es autofunción del problema correspondiente al autovalor $(n\pi)^2$.

Si $k^2 \neq n^2\pi^2$ construímos

$$G(x,\xi) \begin{cases} \dfrac{\text{sen } kx \text{ sen } k(\xi-1)}{k \text{ sen } k} & 0 \leqslant x \leqslant \xi \\[2ex] \dfrac{\text{sen } k\xi \text{ sen } k(x-1)}{k \text{ sen } k} & \xi \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Si tenemos
$$y'' + k^2 y = f(x) \quad 0 < x < 1$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

por el teorema 8.2 la solución es:

$$y(x) = \int_0^1 G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi$$

2) $y'' - k^2 y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, k real $\neq 0$.

$$y(0) = y(1) = 0$$

Las soluciones linealmente independientes son: $y_1(x) = e^{kx}$; $y_2(x) = e^{-kx}$; la solución general es: $y(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}$; para que y(x) satisfaga las condiciones de contorno deben ser $C_1 = C_2 = 0$.

La única solución es la trivial y por tanto existe la función de Green:

$$G(x,\xi) \begin{cases} \dfrac{\operatorname{senh} kx . \operatorname{senh} k(\xi-1)}{k \operatorname{senh} k} & 0 \leqslant x \leqslant \xi \\ \\ \dfrac{\operatorname{senh} k\xi . \operatorname{senh} k(x-1)}{k \operatorname{senh} k} & \xi \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

3) $$y'' = 0 \ , \ 0 < x < 1 \ ,$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

Construyo $y_1(x) = x$; $y_2(x) = x - 1$. Resulta $W(y_1,y_2) = 1$ y

$$G(x,\xi) = \begin{cases} x(\xi - 1) & 0 \leqslant x \leqslant \xi \\ \\ \xi(x - 1) & \xi \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Este caso completa a 1) y 2) anteriores. La ecuación

$$y'' + \lambda y = f \ , \ y(0) = y(1) = 0$$

es equivalente a:

$$y(x) = F(x) - \lambda \int_0^1 G(x,t)\, y(t)\, dt \ ,$$

donde $F = \int G\, f\, d\xi$.

Enunciamos a continuación tres teoremas de Fredholm. Suponemos $\lambda \neq 0$, $K(x,t) \in L^2((a,b) \times (a,b))$, y las funciones (complejas) ϕ, ψ, f, g en $L^2(a,b)$.

TEOREMA 8.1 (de la alternativa). O bien la ecuación

(6) $$\phi(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\,\phi(t)\,dt = f(x)$$

tiene exactamente una solución para toda f, o bien la ecuación homogénea

(7) $$\phi(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\,\phi(t)\,dt = 0$$

tiene una solución distinta de cero.

TEOREMA 8.2. Si para (6) vale el primer caso de la alternativa ésta vale también para la ecuación:

(8) $$\psi(x) - \lambda\int_a^b K(t,x)\,\psi(t)\,dt = g(x).$$

Si $K^*(x,t) := \overline{K(t,x)}$ entonces la ecuación (7) y su ecuación conjugada

(9) $$\psi(x) - \overline{\lambda}\int_a^b K^*(x,t)\,\psi(t)\,dt = 0$$

tienen el mismo número finito de soluciones linealmente independientes.

Definamos: $N = \{\phi\colon \phi - \lambda\int K\phi\,dt = 0\}$, $N^* = \{\psi\colon \psi - \overline{\lambda}\int K^*\psi\,dt = 0\}$.

TEOREMA 8.3. Condición necesaria y suficiente de existencia de solución ϕ_0 de (6) en el segundo caso de la alternativa es la condición de perpendicularidad: existe ϕ_0 sii $f \perp N^*$, es decir, si y sólo si $\int_a^b f(x)\,\overline{\psi}(x)\,dx = 0$ para todo $\psi \in N^*$. En ese caso, todas las funciones en $\phi_0 + N$ resuelven la ecuación.

9. LA ECUACION INTEGRAL POLAR (HILBERT).

Sea $K(x,t)$ un núcleo continuo definido en $(0,1) \times (0,1)$, real y simétrico; sea $p(x)$ una función continua en $0 \leqslant x \leqslant 1$. Supongamos además que el operador

$K : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$, $(Ky)(x) = \int_0^1 K(x,t)\, y(t)\, dt$ es positivo, es decir, $(Ku,u) > 0$ para todo $u \neq 0$. Sabemos que la ecuación $Ky = \mu y$ tiene una familia numerable de autovalores $\{\mu_j\}$ positivos. Además $\{\phi_j\}$, la familia correspondiente de autofunciones (reales), es ortogonal y completa. La supondremos normalizada. Si $p(x) \geqslant 0$ en $[0,1]$, la eucación

(1) $$\psi(x) = \lambda \int_0^1 (K(x,z)\, p(z))\, \psi(z)\, dz$$

es equivalente a la ecuación

(2) $$\Psi(x) = \lambda \int_0^1 \tilde{K}(x,z)\, \Psi(z)\, dz,$$

si ponemos $\Psi = \sqrt{p}\psi$, $\tilde{K}(x,z) = \sqrt{p(x)}\, K(x,z)\, \sqrt{p(z)}$. Este núcleo $\tilde{K}$ tiene las mismas propiedades exigidas a K. Si en lugar de p(z) en (1) se tiene p(x), (1) también se reduce a (2), pero con $\Psi = \psi/\sqrt{p}$, supuesto que $p(x) > 0$ para todo x.
Supongamos ahora que p tenga ceros en $[0,1]$. El estudio del problema de autovalores (1) puede siempre reducirse al de

(3) $$y(x) = \lambda \int_0^1 [K(x,z)\, p(x)]\, y(z)\, dz = p(x).Ky,$$

pues $K.p(x) = (K.p(z))^*$.
Supondremos en lo que sigue que p(x) cambia de signo, y es $\neq 0$ casi doquier. El problema no homogéneo para (3) es entonces

(4) $$y(x) = \lambda \int_0^1 K(x,z)\, p(x)\, y(z)\, dz + f(x).$$

El teorema de Mercer asegura que si $\lambda_n = \mu_n^{-1}$:

(5) $$K(x,z) \doteq \sum \mu_n\, \phi_n(x)\, \phi_n(z) = \sum \frac{1}{\lambda_n}\, \phi_n(x)\, \phi_n(z).$$

Definimos:

(6) $$H(x,z) = \sum \frac{1}{\sqrt{\lambda n}} \phi_n(x)\ \phi_n(z)\ ,\ \text{(c.d.)}$$

Entonces $H(x,z) \in L^2(0 \leqslant z \leqslant 1)$ para todo $x \in [0,1]$. En efecto, $\sum \left(\frac{\phi_n(x)}{\sqrt{\lambda n}}\right)^2 = K(x,x) < \infty$. Más aún, $H(x,z)$ es real, simétrico y $\|H(.,.)\|_2^2 = \sum \frac{1}{\lambda n} = \int_0^1 K(x,x)\ dx < \infty$.

Además

(7) $$K(x,z) = \int_0^1 H(x,u)\ H(z,u)\ du \quad \text{para todo } (x,z).$$

Si $y(x)$ es solución de la ecuación polar (4) entonces

$$Y(v) := \int_0^1 y(x)\ H(x,v)\ dx =$$

$$= \lambda \int_0^1 \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 H(x,u)\ H(z,u)\ du\right) y(z)\ dz\right] H(x,v)\ p(x)\ dx + \int_0^1 f(x)\ H(x,v)\ dx\ .$$

Llamando $F(v)$ al último sumando y definiendo

(8) $$L(u,v) := \int_0^1 H(x,u)\ H(x,v)\ p(x)\ dx = L(v,u)$$

tenemos

(9) $$Y(v) = \lambda \int_0^1 L(u,v)\ Y(u)\ du + F(v)\ ,\ L \in L^2((0,1)^2).$$

En efecto, como $\int |H(x,u)\ H(z,u)|du \leqslant \left(\sum \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda n}\right)^{1/2} \left(\sum \frac{\phi_n^2(z)}{\lambda n}\right)^{1/2} = I$, resulta $\int I.P.\, |H(x,v)|\, dx \leqslant \max|p| . \sqrt{K(z,z)} . \left(\sum \frac{1}{\lambda n}\right)^{1/2} . \left(\sum \frac{\phi_n^2(v)}{\lambda n}\right)^{1/2} = O(1)$.

Luego $\iiint |H(x,u)\ H(z,u)\ H(x,v)| . |y(z)\ p(x)| dx\ du\ dz < \infty$, y puede aplicarse el Teorema de Fubini.

Por otra parte, si $f \in L^2$ y $c_n(f) = \int_0^1 f\phi_n\ dx$ se tiene

(10) $\iint L(u,v)\, f(u)\, f(v)\, du\, dv = \iiint H(x,u)\, H(x,v)\, p(x)\, f(u)\, f(v)\, du\, dv\, dx =$

$$= \int [\int H(x,u)\, f(u)\, du]^2\, p(x)\, dx.$$

Si $0 = \int H(x,u)\, f(u)\, du = \sum \frac{c_n(f)}{\lambda n}\, \phi_n(x)$ entonces $c_n(f) = 0$ para todo n, y en consecuencia f = 0. Luego, del teorema de la alternativa de Fredholm sigue que $\int H(x,u)\, f(u)\, du$ recorre $L^2((0,1))$ cuando f lo hace. Por lo tanto, (10) toma valores positivos y negativos según se elija f. De esto sigue que el operador

$$(11) \qquad Lf = \int_0^1 L(u,v)\, f(v)\, dv$$

tiene autovalores positivos y negativos. En efecto, $\sup\limits_{\|f\|=1} (Lf,f)$ e $\inf\limits_{\|f\|=1} (Lf,f)$ son, respectivamente, el mayor y el menor autovalor de L.

PROPOSICION. Una ecuación integral polar tiene autovalores positivos y negativos.

DEMOSTRACION. Sea Φ autofunción del operador (11) correspondiente al autovalor λ^{-1}, y

$$(12) \qquad \eta(x) = \int_0^1 p(x)\, H(x,u)\, \Phi(u)\, du.$$

Entonces $\eta \neq 0$ y vale (cf.(8)):

$$\eta(x) = \lambda \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 p(x)\, H(x,u) [H(z,u)\, H(z,v)\, p(z)] \Phi(v)\, dz\, dv\, du =$$

$$(\text{por } 7) = \lambda \int_0^1 \int_0^1 K(x,z)\, p(x)\, p(z)\, H(z,v)\, \Phi(v)\, dv\, dz = (\text{por } (12)) =$$

$$= \lambda \int_0^1 K(x,z)\, p(x)\, \eta(z)\, dz. \qquad \text{QED.}$$

Hemos probado en la proposición que todo autovalor no nulo de L lo es de (3), y cuando dedujimos (9), la recíproca. Pero $Lf = 0$ implica

$$\int_0^1 H(x,u)\, dx \int_0^1 p(x)\, H(x,v)\, f(v)\, dv = \int_0^1 H(x,u)\, \eta(x)\, dx = 0.$$

Por lo tanto $\eta = 0$. Luego $f = 0$. Es decir, L no tiene al cero por autovalor, y por lo tanto tampoco el operador P definido a continuación.

TEOREMA 9.1. El operador polar

$$(Py)(x) = \int_0^1 p(x)\, K(x,z)\, y(z)\, dz \tag{13}$$

tiene sus autovalores no nulos, reales, positivos y negativos, y las autofunciones correspondientes $\{\eta_i\}$ forman un sistema completo en $L^2((0,1))$.

DEMOSTRACION. Si $g \perp \{\eta_i\}$ donde $\eta_j = \int_0^1 p(x)\, H(x,u)\, \Phi_j(u)\, du$, Φ_j autofunción de L, entonces: $0 = \int_0^1 g(x)\, p(x)\, dx \int_0^1 H(x,u)\, \Phi_j(u)\, du$. O sea,

$$g.p \perp \{\int_0^1 H(x,u)\, \Phi_i(u)\, du\}_{i=1}^{\infty} .$$

Como la familia de los Φ_j es densa en L^2, lo mismo le ocurre a $\{ \ldots \}$. O sea $g.p = 0$, y de aquí sigue que $g = 0$. QED.