

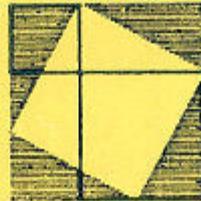
III-64



INFORME TECNICO INTERNO

Nº. 64

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA
INMABB (UNS - CONICET)



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina



INFORME TÉCNICO INTERNO N° 64



PUNTOS DOBLES EN EL CONTORNO DEL CONJUNTO DE LOS FRACCIONARIOS EN LA BASE $-2+i$

María del Carmen Moure

Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 1998





**Puntos dobles en
el contorno del conjunto
de los fraccionarios
en la base $-2+i$**

María del Carmen Moure

1998

Introducción

En un artículo de Shunji Ito de 1989 [5] se aplica un método desarrollado por F.M. Dekking [1], [2] en el estudio de las representaciones de los números complejos en ciertas bases complejas.

En 1994 el Dr. Rafael Panzone me propuso el siguiente problema: "Describir los naturales N para los cuales la base $-N + i$ poseen un conjunto fraccionario cuyo contorno es una curva de Jordan simple (A. Benedek y R. Panzone habían resuelto el caso $N = 1$). Entonces el Dr. R. Panzone me indicó que él conjeturaba que para el caso $N = 2$ el contorno no era simple y me sugirió el estudio del método de Dekking que según observaciones del Dr. Pablo Panzone podría tener errores.

En la Tesis de Magister "Figuras Replicantes Planas obtenidas vía Endomorfismos de Grupos Libres" [6] presentada en diciembre de 1996 y defendida en mayo de 1997 en la UNS se corrigen y completan algunos aspectos del método de Dekking de generación y análisis de curvas fractales por medio de endomorfismos de grupos libres..

En el presente trabajo se demuestra, en el marco del método de Dekking, la conjetura de R. Panzone de que el contorno del conjunto de los fraccionarios en la base $-2+i$ no es simple.

1. Representación de los Números Complejos en una base b .

Los enteros positivos pueden ser representados en cualquier base $b > 1$ usando dígitos $0, 1, \dots, b-1$. El sistema decimal y el binario son los más conocidos de estas representaciones. Esta idea puede ser extendida a los números complejos.

Sean $b \in \mathbb{C}$, $|b| > 1$ y $D = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset \mathbb{C}$; $0 \in D$.

Se definen los enteros del sistema (b, D) como los números del conjunto

$$W = \left\{ \sum_{j=0}^M a_j b^j; a_j \in D \right\}$$

Los fraccionarios del sistema son los del conjunto

$$F = \left\{ \sum_{j=-\infty}^{-1} a_j b^j; a_j \in D \right\}$$

Los números representables en la base forman el conjunto

$$G = \left\{ \sum_{j=-\infty}^M a_j b^j; a_j \in D \right\}$$

y finalmente los racionales del sistema serán aquellos números en G para los cuales $a_j = 0$ si $j < N$, para algún N entero.

A continuación enunciamos, sin demostración algunos teoremas de la teoría de representabilidad.

Teorema 1.1. Sea $b \in \mathbb{C}$, $|b| > 1$ y $D = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset \mathbb{C}$; $0 \in D$. Entonces no todo número complejo admite un desarrollo de la forma $\sum_{j=-\infty}^M c_j b^j$; $c_j \in D$ o algún número tiene más de un desarrollo.

Definición 1.1. (b, D) se dice un Sistema Numérico si todo entero gaussiano, esto es un elemento del conjunto $E = \{p + iq; p, q \in \mathbb{Z}\}$ es representable en él como un entero del sistema.

Teorema 1.2 [Kátai y Szabó]. Sean $b = A + iB$, $|b| > 1$, A y B en \mathbb{Z} y $D = \{0, 1, \dots, |b|^2 - 1\}$. (b, D) es un sistema numérico si y sólo si se verifican

- i) $A = \text{Re}(b) < 0$
- ii) $B = \text{Im}(b) = \pm 1$

Teorema 1.3. Si (b, D) es un sistema numérico entonces todo complejo es representable en el sistema.

2. Representaciones de Endomorfismos de Grupos Libres y Curvas Recurrentes.

Sea G el grupo libre generado por a y b . Consideramos a G como el cociente del semigrupo S^* generado por $S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ por la relación de equivalencia \sim , definida por $V \sim W$ si y sólo si V y W determinan por cancelación la misma palabra llamada *palabra reducida*.

Sea $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homomorfismo, es decir, determinado por $f(a)$ y $f(b)$ y las relaciones

$$f(W^{-1}) = -f(W) \quad \text{y} \quad f(VW) = f(V) + f(W)$$

Dada f se define una aplicación K que asigna poligonales en \mathbb{R}^2 a cada palabra reducida en G de la siguiente manera

$$K[s] = \{\alpha f(s); 0 \leq \alpha \leq 1\} \quad s \in S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$$

Si $s_1 \dots s_m \in G$ y $f(s_1 \dots s_m) \neq (0, 0)$ o $f(s_1 \dots s_m) = (0, 0)$ y $s_1 \neq s_m^{-1}$

$$K[s_1 \dots s_m] = \bigcup_{i=1}^m (K[s_i] + f(s_1 \dots s_{i-1})) \quad (1)$$

Si $W = s_1 \dots s_m \in G$ y $f(s_1 \dots s_m) = (0, 0)$ y $s_1 = s_m^{-1}$ entonces $K[W] = K[V] + f(U)$ donde V y U satisfacen la siguiente condición: V es la palabra de longitud mínima tal que $W = UVU^{-1}$, es decir que $K[V]$ corresponde a la primer definición.

Es fácil ver que $K[W^{-1}] = K[W] - f(W)$.

También que si en el producto de dos palabras UV no se producen cancelaciones, es decir que la última letra de U y la primera de V no son inversas entonces

$$K[UV] = K[U] \cup (K[V] + f(U)) \quad (2)$$

Sea ahora θ un endomorfismo de G , definimos la matriz de θ de la siguiente manera, llamamos p al homomorfismo $p : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $p(a) = e_1$; $p(b) = e_2$, entonces llamaremos m_{ij} a los enteros tales que

$$p(\theta(s_j)) = m_{1j}p(a) + m_{2j}p(b) \quad s_1 = a; s_2 = b$$

Se llamará *matriz de θ* que notaremos M_θ a la matriz $(m_{ij})_{i,j=1}^2$ m_{ij} enteros. Puede verse que entonces

$$f(\theta(s_j)) = m_{1j}f(a) + m_{2j}f(b) \quad s_1 = a; s_2 = b$$

Diremos que un endomorfismo θ tiene *corto rango de cancelación* si para cualquier palabra reducida stu la cancelación no borra todas las letras de ninguna de las subpalabras $\theta(s) \theta(t) \theta(u)$ en $\theta(stu) \in S^*$

Valen los siguientes resultados.

Teorema 2.4. Sea θ un endomorfismo de G tal que

(1) θ tiene corto rango de cancelación,

(2) $|\det M_\theta| > 1$,

(3) Hay una matriz singular $T = (t_{ij})$ tal que $M_\theta = T^{-1}LT$ donde L es una rotación seguida de una multiplicación por un escalar,

(4) No se producen cancelaciones en ninguno de los productos $\theta^n(aba^{-1}b^{-1})$.

Si $K_n := L^{-n}(K[\theta^n(aba^{-1}b^{-1})])$ entonces existen parametrizaciones $\{u^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ y u tales que $u^{(n)}$ es una parametrización de K_n , u es una parametrización de una curva K_θ y

$$u^{(n)} \xrightarrow{\bullet} u$$

Corolario 2.1. $K_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K_\theta$ en la métrica de Hausdorff.

Perfil de la prueba: Sea $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ el homomorfismo tal que

$$f(a) = T(e_1) = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix}; \quad f(b) = T(e_2) = \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{pmatrix}$$

La prueba se basa en la construcción de las parametrizaciones $u^{(n)}$ donde son esenciales el hecho de que L^{-1} es una contracción y que

$$L^n f = f \theta^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3)$$

De las fórmulas (2) y (3) y ya que no se producen cancelaciones en ninguno de los productos $\theta^n(aba^{-1}b^{-1})$ se tiene que

$$\begin{aligned} K_n &= L^{-n}K[\theta^n(a)] \cup \{L^{-n}K[\theta^n(b)] + f(a)\} \cup \\ &\cup \{L^{-n}K[\theta^n(a^{-1})] + f(a) + f(b)\} \cup \{L^{-n}K[\theta^n(b^{-1})] + f(b)\} \end{aligned}$$

A partir de las mismas relaciones fundamentales se tiene que si llamamos $\theta v = s_{v_1}s_{v_2} \dots s_{v_l}$ $s_{v_i} \in S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ $l = \text{long}(\theta v)$ para todo $v \in S$ y $n \in \mathbb{N}$

$$L^{-(n+1)}K[\theta^{n+1}(v)] = L^{-1} \left(\bigcup_{i=1}^l (L^{-n}K[\theta^n(s_{v_i})]) + f(s_{v_1} \dots s_{v_{i-1}}) \right) \quad (4)$$

En base a esta última fórmula, se construyen recursivamente parametrizaciones $u^{(n)}(t)$ para K_n .

Pueden probarse las siguientes propiedades de la geometría de las curvas aproximantes K_n :

1. Los lados de K_n son de la forma $L^{-n}K[v] + w$, $w \in \mathbb{R}^2$.

2. Si llamamos $V^{(n)}(v)$ al conjunto de vértices de $L^{-n}K[\theta^n(v)]$, resulta que

$$V^{(0)}(v) = \{0, f(v)\}$$

$$V^{(n+1)}(v) = L^{-1} \left(\bigcup_{i=1}^l \{V^{(n)}(s_{v_i}) + f(s_{v_1} s_{v_2} \dots s_{v_{i-1}})\} \right)$$

3. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $V^{(n)}(v) \subset V^{(n+1)}(v)$ y además si $u^{(n)}(t) \in V^{(n)}(v)$ entonces $u^{(n+1)}(t) = u^{(n)}(t)$.

4. Dados dos vértices consecutivos de K_n , si el lado que los une es $L^{-n}K[v] + \mathbf{w}$, entonces la poligonal que une esos vértices en K_{n+1} es $L^{-(n+1)}K[\theta v] + \mathbf{w}$.

Se prueba luego que dados $n \in \mathbb{N}$, y $t \in [0, 1]$, siendo $u^{(n)}(t_1)$ y $u^{(n)}(t_2)$ los vértices consecutivos del lado de K_n que contiene a $u^{(n)}(t)$. Si llamamos P a la subpoligonal de K_{n+1} que une los vértices $u^{(n)}(t_1) = u^{(n+1)}(t_1)$ y $u^{(n)}(t_2) = u^{(n+1)}(t_2)$ se prueba que

$$\|u^{(n+1)}(t) - u^{(n)}(t)\| \leq \text{long}(P)$$

pero P es congruente con $L^{-(n+1)}K[\theta v]$ para algún $v \in S$ y $\theta v = s_{v_1} s_{v_2} \dots s_{v_l}$, luego

$$\begin{aligned} \text{long}(P) &= \|L^{-(n+1)}f(s_{v_1})\| + \|L^{-(n+1)}f(s_{v_2})\| + \dots + \|L^{-(n+1)}f(s_{v_l})\| \\ &= \lambda^{-(n+1)} (\|f(s_{v_1})\| + \|f(s_{v_2})\| + \dots + \|f(s_{v_l})\|) \end{aligned}$$

donde λ es el escalar que verifica $L = \lambda R_\varphi$, $\lambda^2 = |\det M_\theta| > 1$. Así, si

$$C = \max \left\{ \sum_{i=1}^{l(\theta v)} \|f(s_{v_i})\| ; v = a, b \right\}$$

se tiene para todo $t \in [0, 1]$

$$\|u^{(n+1)}(t) - u^{(n)}(t)\| \leq |\lambda|^{-(n+1)} C$$

de donde para todo $t \in [0, 1]$ y para todo $p \in \mathbb{N}$

$$\|u^{(n+p)}(t) - u^{(n)}(t)\| \leq \sum_{i=1}^p |\lambda|^{-(n+i)} C < C |\lambda|^{-n} \frac{|\lambda|^{-1}}{1 - |\lambda|^{-1}}$$

Esto prueba que $u^{(n)}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathfrak{C} = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, f \text{ cont.}\}$ (con la métrica del supremo) que es un espacio completo. Por lo tanto existe $u \in \mathfrak{C}$ tal que

$$u^{(n)} \xrightarrow{\bullet} u$$

Si $K_\theta = \{u(t), t \in [0, 1]\}$, se tiene en particular que $K_n \rightarrow K_\theta$ en la métrica de Hausdorff

Este teorema se extiende de la siguiente manera.

Teorema 2.5. Si valen (1), (2) y (3) y

(4) No se producen cancelaciones en ninguno de los productos $\theta^n(aba^{-1}b^{-1})$ o existe un endomorfismo Θ de un nuevo grupo libre generado por tres elementos A, B, C y una aplicación \hat{K} que asigna poligonales en el plano a palabras reducidas en H tal que $L^{-n}(\hat{K}[\Theta^n(ABC)]) = \pi(K_n)$ donde π es una semejanza. Y de manera que no se producen cancelaciones en ninguno de los productos $\Theta^n(ABC)$.

(5) $K[\theta W]$ tiene un lazo si y sólo si $K[W]$ tiene un lazo¹,

Entonces

a) K_n no tiene puntos dobles y converge en la métrica de Hausdorff a una curva K_θ .

b) Sea F_n la clausura del dominio interior de K_n , F_n converge en la métrica de Hausdorff a un conjunto F_θ , compacto y conexo, cuya frontera está contenida en K_θ .

c) Vale que $\text{área } F_n = |\det T|$

d) F_θ es replicante de orden $d = |\det M_\theta|$ y es el único compacto invariante por d transformaciones de semejanza de la forma $L^{-1}(x) + V_i$ $i = 1, \dots, d$

e) F_θ tiene dimensión de Hausdorff coincidente con su razón de semejanza e igual a 2 y su medida plana de Lebesgue $m(F_\theta)$ es mayor o igual a $|\det T|$.

f) Si $m(K_\theta) = 0$ entonces $m(F_\theta) = |\det T|$.

3. La base $-2+i$.

Vayamos a nuestro caso. Sea el endomorfismo θ definido por $\theta(a) = a^5ba^{-7}$
 $\theta(b) = (a^2b^{-1})^2a^{-5}$

La matriz de θ es por lo tanto $M_\theta = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, de determinante 5, cuyos autovalores son: $-2 + i$ y $-2 - i$

$$M_\theta = \sqrt{5} \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \sqrt{5} R_\varphi$$

donde R_φ es la rotación de ángulo φ ; $\cos \varphi = -2/\sqrt{5}$; $\sin \varphi = 1/\sqrt{5}$.

De aquí también se tiene que la matriz de cambio de base T es la identidad y por lo tanto $f(a) = e_1$ y $f(b) = e_2$. Así $L = M_\theta$. Observemos que para $z \in \mathbb{C}$, $L(z) = (-2 + i)z$

Si graficamos $K_1 = L^{-1}(K[\theta(aba^{-1}b^{-1})]) = L^{-1}(K[a^5ba^{-5}b^{-1}])$

vemos que llamando F_i a la clausura del conjunto limitado por K_i

$$\begin{aligned} F_1 &= L^{-1}(F_0) \cup L^{-1}(F_0 + (1, 0)) \cup L^{-1}(F_0 + (2, 0)) \cup \\ &\quad \cup L^{-1}(F_0 + (3, 0)) \cup L^{-1}(F_0 + (4, 0)) = \\ &= L^{-1}(F_0) \cup (L^{-1}(F_0) + b^{-1}) \cup (L^{-1}(F_0) + 2b^{-1}) \cup \\ &\quad \cup (L^{-1}(F_0) + 3b^{-1}) \cup (L^{-1}(F_0) + 4b^{-1}) \end{aligned}$$

¹La hipótesis (5) es la que garantiza que las poligonales aproximantes sean simples. Esta hipótesis puede verificarse en una cantidad finita de pasos tal como está probado en [6]. El Teorema que lo afirma se presenta en el apéndice

puede probarse que

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= L^{-1}(F_n) \cup L^{-1}(F_n + (1, 0)) \cup L^{-1}(F_n + (2, 0)) \cup \\ &\quad \cup L^{-1}(F_n + (3, 0)) \cup L^{-1}(F_n + (4, 0)) = \\ &= L^{-1}(F_n) \cup (L^{-1}(F_n) + b^{-1}) \cup (L^{-1}(F_n) + 2b^{-1}) \cup \\ &\quad \cup (L^{-1}(F_n) + 3b^{-1}) \cup (L^{-1}(F_n) + 4b^{-1}) \end{aligned}$$

y pasando al límite tendremos (ver apéndice de propiedades elementales de la métrica de Hausdorff)

$$\begin{aligned} F_\theta &= L^{-1}(F_\theta) \cup (L^{-1}(F_\theta) + b^{-1}) \cup (L^{-1}(F_\theta) + 2b^{-1}) \\ &\quad \cup (L^{-1}(F_\theta) + 3b^{-1}) \cup (L^{-1}(F_\theta) + 4b^{-1}) \end{aligned}$$

de modo que F_θ es el conjunto de los fraccionarios en la base $b = -2 + i$. (existe un único compacto invariante por una familia de semejanzas contractantes).

Por cuestiones técnicas (el endomorfismo original sufre fuertes cancelaciones) se definirá un nuevo grupo libre H generado con tres elementos A, B, C y un endomorfismo $\Theta : H \rightarrow H$ de modo que la curva límite de $\hat{K}_n := L^{-n}(\hat{K}[\Theta^n(ABC)])$ será semejante a la original $K_\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} L^{-n}(K[\theta^n(aba^{-1}b^{-1})])$, pero en $\Theta^n(ABC)$ no se producen cancelaciones.

Previamente debemos reducir el número de cancelaciones en θ . Para esto definimos un nuevo endomorfismo de G que será de la forma θ_W donde $\theta_W(s) = W\theta(s)W^{-1}$ con $W \in G$. Es fácil probar que para cualquier palabra $V \in G$, tal que $f(V) = (0, 0)$ se tiene

$$K[\theta_W^n(V)] = K[\theta^n(V)] + \sum_{i=0}^{n-1} f(\theta^i(W)) \quad n \in \mathbb{N}$$

En particular para $V = aba^{-1}b^{-1}$

$$K[\theta_W^n(aba^{-1}b^{-1})] = K[\theta^n(aba^{-1}b^{-1})] + \sum_{i=0}^{n-1} f(\theta^i(W))$$

de donde

$$\begin{aligned} L^{-n}K[\theta_W^n(aba^{-1}b^{-1})] &= L^{-n}K[\theta^n(aba^{-1}b^{-1})] + \sum_{i=0}^{n-1} L^{-n}f(\theta^i(W)) = \\ &= K_n + \sum_{i=1}^n L^{-i}f(W) \end{aligned}$$

y ya que L^{-1} es una contracción, se prueba inmediatamente que existe un punto P_W de \mathbb{R}^2 tal que

$$P_W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n L^{-i}f(W)$$

y así, en la métrica de Hausdorff

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L^{-n}(K[\theta_W^n(aba^{-1}b^{-1})]) = \lim_{n \rightarrow \infty} L^{-n}(K[\theta^n(aba^{-1}b^{-1})]) + P_W \quad (5)$$

En nuestro caso será $W = a^{-5}$ y llamaremos $\vartheta := \theta_W$ que resulta

$$\begin{aligned} \vartheta(a) &= ba^{-2} \\ \vartheta(b) &= a^{-3}b^{-1}a^2b^{-1} \end{aligned}$$

El grupo H se relaciona con G por medio del homomorfismo de grupos libres $\Gamma : H \rightarrow G$. En nuestro caso Γ está definido por

$$\begin{aligned} \Gamma(A) &= ba^{-2} \\ \Gamma(B) &= a^{-3}b^{-1} \\ \Gamma(C) &= a^5 \end{aligned}$$

Notar que Γ no tiene cancelaciones en el producto ABC .

Se define entonces el endomorfismo Θ , de manera que $\Gamma \circ \Theta = \vartheta \circ \Gamma$ y por lo tanto $\Gamma \circ \Theta^k = \vartheta^k \circ \Gamma \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Finalmente sea $g = f \circ \Gamma$, de modo que $g \circ \Theta = L \circ g$, con lo que $g \circ \Theta^k = L^k \circ g, \forall k \in \mathbb{N}$.

Podemos representar esto en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{\Gamma} & G & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow \Theta & & \downarrow \vartheta & & \downarrow L \\ H & \xrightarrow{\Gamma} & G & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Aquí será

$$\begin{aligned} \Theta(A) &= BA^{-3} \\ \Theta(B) &= A^{-1}C \\ \Theta(C) &= A^5 \end{aligned}$$

Notemos que aquí $\Gamma(ABC) = \vartheta(aba^{-1}b^{-1})$, por lo tanto

$$\Gamma \circ \Theta^k(ABC) = \vartheta^k \circ \Gamma(ABC) = \vartheta^{k+1}(aba^{-1}b^{-1}) \quad (6)$$

tenemos la siguiente proposición:

Proposición 3.1. $\Theta^k(ABC)$ no sufre cancelaciones y Γ no sufre cancelaciones en $\Theta^k(ABC)$ para ningún $k \in \mathbb{N}$.

Demostración: Es inmediato ver que para el endomorfismo Θ se producen cancelaciones sólo en las palabras que sean de la forma $\dots UV \dots$ donde $UV = (AC)^{\pm 1}$ o $UV = (CB)^{\pm 1}$, pero estas combinaciones no aparecen en ABC , por lo tanto no

hay cancelaciones en $\Theta(ABC)$. Siguiendo, el producto $UV = (AC)^{\pm 1}$ no aparece en ningún $\Theta(S)$, $S \in \{A, B, C\}$, sólo aparece en una palabra $\Theta(W)$, si W es de la forma $\dots ST \dots$ donde $ST = (CB)^{\pm 1}$ y el producto $UV = (CB)^{\pm 1}$ sólo aparece en una palabra $\Theta(W)$, si W es de la forma $\dots ST \dots$ donde $ST = (BA)^{\pm 1}$, finalmente un producto $(BA)^{\pm 1}$ aparece en alguna palabra $\Theta(W)$, sólo si W contiene un producto $(AC)^{\pm 1}$, esto nos da un "circuito cerrado" de productos de pares de letras tales que ninguno de ellos aparece en $\Theta(ABC)$, lo que prueba que no hay cancelaciones en ninguna palabra $\Theta^k(ABC)$ $k \in \mathbb{N}$. Finalmente, ya que Γ sólo sufre cancelaciones en palabras que incluyan los productos $(AC)^{\pm 1}$, $(CB)^{\pm 1}$ o $(BA)^{\pm 1}$ y como se ha visto estos pares no aparecen en ninguna palabra $\Theta^k(ABC)$ $k \in \mathbb{N}$, se tiene que Γ no sufre cancelaciones en $\Theta^k(ABC)$ para ningún $k \in \mathbb{N}$.

Para obtener las mismas poligonales que se generan con ϑ definimos una aplicación \hat{K} que asigna poligonales en \mathbb{R}^2 a palabras reducidas en H como sigue

$$\hat{K}[S_1 S_2 \dots S_n] := K[\Gamma(S_1 S_2 \dots S_n)]$$

de la fórmula (6)

$$L^{-k}(\hat{K}[\Theta^k(ABC)]) = L \left(L^{-(k+1)}(K[\vartheta^{k+1}(aba^{-1}b^{-1})]) \right)$$

y en consecuencia, según (5) (ver también en el Apéndice propiedades elementales de la métrica de Hausdorff)

$$\begin{aligned} \lim L^{-k}(\hat{K}[\Theta^k(ABC)]) &= L \left(\lim_{n \rightarrow \infty} L^{-n}(K[\theta^n(aba^{-1}b^{-1})]) + P_W \right) \\ &= L(K_\theta + P_W) \end{aligned} \quad (7)$$

Se construyen parametrizaciones \hat{u}_n para las poligonales \hat{K}_n valiéndose del hecho de que $\Theta^k(ABC)$ no sufre cancelaciones y Γ no sufre cancelaciones en $\Theta^k(ABC)$ para ningún $k \in \mathbb{N}$ y así

$$\begin{aligned} \hat{K}_n &= L^{-n} \hat{K}[\Theta^n(A)] \cup \{L^{-n} \hat{K}[\Theta^n(B)] + g(A)\} \cup \\ &\cup \{L^{-n} \hat{K}[\Theta^n(C)] + g(A) + g(B)\} \end{aligned}$$

y también si $\Theta V = S_{V_1} S_{V_2} \dots S_{V_l}$ $S_{V_i} \in \hat{S} = \{A^{\pm 1}, B^{\pm 1}, C^{\pm 1}\}$ $l = \text{long}(\Theta V)$ para todo $V \in \hat{S}$ y $n \in \mathbb{N}$

$$L^{-(n+1)} \hat{K}[\Theta^{n+1}(V)] = L^{-1} \left(\bigcup_{i=1}^l (L^{-n} \hat{K}[\Theta^n(S_{V_i})]) + g(S_{V_1} \dots S_{V_{l-1}}) \right)$$

Para el caso sin cancelaciones dijimos que podía probarse que todos los vértices de K_n son vértices de K_{n+1} y que si $u^{(n)}(t) \in V^{(n)}(v)$ entonces $u^{(n+1)}(t) = u^{(n)}(t)$. No ocurre lo mismo para un caso con cancelaciones. No todos los vértices de \hat{K}_n

son vértices de \hat{K}_{n+1} , pero sí un subconjunto de ellos, y que son los extremos de las subpoligonales de la forma $L^{-n}\hat{K}[S] + \mathbf{w}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$, $S \in \hat{S} = \{A^{\pm 1}, B^{\pm 1}, C^{\pm 1}\}$.

Finalmente se tiene también que existe $\hat{u} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua tal que

$$\hat{u}^{(n)} \xrightarrow{\bullet} \hat{u}$$

Si $K_{\Theta} := \{\hat{u}(t), t \in [0, 1]\}$, tenemos en particular que $\hat{K}_n \rightarrow \hat{K}_{\Theta}$ en la métrica de Hausdorff. De la fórmula (7) se sigue que

$$\hat{K}_{\Theta} = \{\hat{u}(t), t \in [0, 1]\} = L(K_{\theta} + P_{\mathbf{w}}) \quad (8)$$

4. Puntos dobles de la frontera del conjunto de fraccionarios los en la base $-2+i$.

Construcción de un punto doble de la curva K_{θ}

Vamos ahora a definir dos sucesiones de vértices en \hat{K}_n que tendrán el mismo punto límite y tales que como se demostrará determinan dos lazos en K_{θ} .

En adelante llamaremos vértice a lo que podría denominarse un vértice esencial (estos son los que permanecen paso a paso) que en cada iteración son los extremos de las subpoligonales de la forma $L^{-n}(\hat{K}[V])$ donde $V = A^{\pm 1}, B^{\pm 1}, C^{\pm 1}$. Este conjunto de vértices para $\hat{K}[ABC]$ es

$$V_0 = \{g(A), g(A) + g(B), g(A) + g(B) + g(C)\}$$

donde $g(A) + g(B) + g(C) = 0$

Los vértices en $L^{-1}(\hat{K}[\Theta(ABC)])$ los podemos escribir como la unión de $V_1^A \cup V_1^B \cup V_1^C$. El primer elemento de la primera sucesión lo tomamos en V_1^A que son los que van de 0 a $g(A) = L^{-1}(g(\Theta A))$ ya que $\Theta(A) = BA^{-3}$ será

$$V_1^A = L^{-1} \left\{ 0, g(B), \underline{g(B) - g(A)}, g(B) - 2g(A), g(B) - 3g(A) \right\}$$

El primer elemento de la segunda sucesión lo tomamos en V_1^C que son los que van de $g(A) + g(B)$ a $g(A) + g(B) + g(C) = 0$ ya que $\Theta(C) = A^5$ será

$$V_1^C = L^{-1} \left\{ 0, g(A), 2g(A), 3g(A), 4g(A), \underline{5g(A)} \right\} + g(A) + g(B)$$

elegimos

$$\begin{aligned} P_1^{(1)} &= L^{-1}(g(B) - g(A)) \\ P_1^{(2)} &= L^{-1}(5g(A)) + g(A) + g(B) = 0 \end{aligned}$$

Así

$$\boxed{P_1^{(2)} - P_1^{(1)} = L^{-1}(g(A) - g(B))}$$

y damos nombre al vértice inmediato anterior en cada caso

$$\begin{aligned}\overleftarrow{P}_1^{(1)} &= L^{-1}(g(B)) \\ \overleftarrow{P}_1^{(2)} &= L^{-1}(4g(A)) + g(A) + g(B)\end{aligned}$$

Ahora será $V_2^{(1)}$ el conjunto de vértices de $L^{-2}(\hat{K}[\Theta^2(ABC)])$ que van de $\overleftarrow{P}_1^{(1)}$ a $P_1^{(1)}$, y ya que $P_1^{(1)} = \overleftarrow{P}_1^{(1)} - L^{-1}(g(A))$, la poligonal que los une es de la forma $L^{-2}(\hat{K}[\Theta A^{-1}])$. Entonces

$$V_2^{(1)} = L^{-2} \{0, g(A), 2g(A), \underline{3g(A)}, 3g(A) - g(B)\} + \overleftarrow{P}_1^{(1)}$$

De manera semejante definimos $V_2^{(2)}$ el conjunto de vértices de $L^{-2}(\hat{K}[\Theta^2(ABC)])$ que van de $\overleftarrow{P}_1^{(2)}$ a $P_1^{(2)}$. Como en este caso $P_1^{(2)} = \overleftarrow{P}_1^{(2)} + L^{-1}(g(A))$, la poligonal que los une es de la forma $L^{-2}(\hat{K}[\Theta A])$. Entonces

$$V_2^{(2)} = L^{-2} \{0, g(B), g(B) - g(A), g(B) - 2g(A), \underline{g(B) - 3g(A)}\} + \overleftarrow{P}_1^{(2)}$$

elegimos

$$\begin{aligned}P_2^{(1)} &= L^{-2}(3g(A)) + \overleftarrow{P}_1^{(1)} \\ P_2^{(2)} &= L^{-2}(g(B) - 3g(A)) + \overleftarrow{P}_1^{(2)}\end{aligned}$$

Observemos que $L^{-2}(g(B) - 3g(A)) = L^{-2}(g(\Theta A)) = L^{-1}(g(A))$, por lo tanto $P_2^{(2)} = P_1^{(2)}$.

$$\begin{aligned}P_2^{(2)} - P_2^{(1)} &= L^{-2}(g(B) - 6g(A)) + \overleftarrow{P}_1^{(2)} - \overleftarrow{P}_1^{(1)} = \\ &= L^{-2}(g(B) - g(A)) - L^{-2}(5g(A)) + \\ &\quad + P_1^{(2)} - P_1^{(1)} - 2L^{-1}(g(A)) = \\ &= L^{-2}(g(B) - g(A)) - L^{-2}(g(\Theta C)) + \\ &\quad + L^{-1}(g(A) - g(B)) - 2L^{-1}(g(A)) = \\ &= L^{-2}(g(B) - g(A)) - L^{-1}(g(C)) + \\ &\quad + L^{-1}(g(A) - g(B)) - L^{-1}(2g(A)) = \\ &= L^{-2}(g(B) - g(A)) - L^{-1}(g(A) + g(B) + g(C))\end{aligned}$$

y ya que $g(A) + g(B) + g(C) = 0$ tenemos

$$\boxed{P_2^{(2)} - P_2^{(1)} = L^{-2}(g(B) - g(A))}$$

Ahora serán

$$\begin{aligned}\overleftarrow{P}_2^{(1)} &= L^{-2}(2g(A)) + \overleftarrow{P}_1^{(1)} = P_2^{(1)} - L^{-2}(g(A)) \\ \overleftarrow{P}_2^{(2)} &= L^{-2}(g(B) - 2g(A)) + \overleftarrow{P}_1^{(2)} = P_2^{(2)} + L^{-2}(g(A))\end{aligned}$$

Antes de generalizar los elementos de las sucesiones vamos a completar un paso más pues la elección de los vértices cambia para los términos pares e impares. Para

elegir los siguientes elementos de nuestras sucesiones escribimos el conjunto de vértices $V_3^{(1)}$ que son los vértices de $L^{-3}(\hat{K}[\Theta^3(ABC)])$ que van de $\overleftarrow{P}_2^{(1)}$ a $P_2^{(1)}$, y el conjunto $V_3^{(2)}$ que son los que van de $\overleftarrow{P}_2^{(2)}$ a $P_2^{(2)}$

$$\begin{aligned} V_3^{(1)} &= L^{-3} \left\{ 0, g(B), g(B) - g(A), g(B) - 2g(A), \underline{g(B) - 3g(A)} \right\} + \overleftarrow{P}_2^{(1)} \\ V_3^{(2)} &= L^{-3} \left\{ 0, g(A), 2g(A), \underline{3g(A)}, 3g(A) - g(B) \right\} + \overleftarrow{P}_2^{(2)} \end{aligned}$$

elegimos

$$\begin{aligned} P_3^{(1)} &= L^{-3}(g(B) - 3g(A)) + \overleftarrow{P}_2^{(1)} \\ P_3^{(2)} &= L^{-3}(3g(A)) + \overleftarrow{P}_2^{(2)} \end{aligned}$$

En este caso observamos que $L^{-3}(g(B) - 3g(A)) = L^{-3}(g(\Theta A)) = L^{-2}(g(A))$, por lo tanto $P_3^{(1)} = P_2^{(1)}$.

$$\begin{aligned} P_3^{(2)} - P_3^{(1)} &= L^{-3}(6g(A) - g(B)) + \overleftarrow{P}_2^{(2)} - \overleftarrow{P}_2^{(1)} = \\ &= L^{-3}(g(A) - g(B)) + L^{-3}(5g(A)) + \\ &\quad + P_2^{(2)} - P_2^{(1)} + 2L^{-2}(g(A)) = \\ &= L^{-3}(g(A) - g(B)) + L^{-3}(g(\Theta C)) + \\ &\quad + L^{-2}(g(B) - g(A)) + 2L^{-2}(g(A)) = \\ &= L^{-3}(g(A) - g(B)) + L^{-2}(g(C)) + \\ &\quad + L^{-2}(g(B) - g(A)) + L^{-2}(2g(A)) = \\ &= L^{-3}(g(A) - g(B)) + L^{-2}(g(A) + g(B) + g(C)) \end{aligned}$$

entonces

$$\boxed{P_3^{(2)} - P_3^{(1)} = L^{-3}(g(A) - g(B))}$$

y siguiendo supongamos llegado al paso n donde:

- Si n es par: $P_n^{(1)}$ es el cuarto vértice de la subpoligonal $L^{-n}(\hat{K}[\Theta A^{-1}]) + \overleftarrow{P}_{n-1}^{(1)}$ y $P_n^{(2)}$ es el quinto y último vértice de la subpoligonal $L^{-n}(\hat{K}[\Theta A]) + \overleftarrow{P}_{n-1}^{(2)}$. Es decir que

$$\begin{aligned} P_n^{(1)} &= L^{-n}(3g(A)) + \overleftarrow{P}_{n-1}^{(1)} \\ P_n^{(2)} &= L^{-n}(g(B) - 3g(A)) + \overleftarrow{P}_{n-1}^{(2)} \end{aligned}$$

- Si n es impar: Se conmuta el orden del caso par. Esto es

$$\begin{aligned} P_n^{(1)} &= L^{-n}(g(B) - 3g(A)) + \overleftarrow{P}_{n-1}^{(1)} \\ P_n^{(2)} &= L^{-n}(3g(A)) + \overleftarrow{P}_{n-1}^{(2)} \end{aligned}$$

y vale que

$$\boxed{P_n^{(2)} - P_n^{(1)} = (-1)^{n+1} L^{-n}(g(A) - g(B))}$$

$\overleftarrow{P}_n^{(1)}$ y $\overleftarrow{P}_n^{(2)}$ son los vértices inmediato anteriores, es decir

Si n es par:

$$\begin{aligned}\overleftarrow{P}_n^{(1)} &= L^{-n}(2g(A)) + \overleftarrow{P}_{n-1}^{(1)} = P_n^{(1)} - L^{-n}(g(A)) \\ \overleftarrow{P}_n^{(2)} &= L^{-n}(g(B) - 2g(A)) + \overleftarrow{P}_{n-1}^{(2)} = P_n^{(2)} + L^{-n}(g(A))\end{aligned}$$

Si n es impar:

$$\begin{aligned}\overleftarrow{P}_n^{(1)} &= L^{-n}(g(B) - 2g(A)) + \overleftarrow{P}_{n-1}^{(1)} = P_n^{(1)} + L^{-n}(g(A)) \\ \overleftarrow{P}_n^{(2)} &= L^{-n}(2g(A)) + \overleftarrow{P}_{n-1}^{(2)} = P_n^{(2)} - L^{-n}(g(A))\end{aligned}$$

$V_{n+1}^{(i)}$ es el conjunto de vértices de $L^{-(n+1)}(\hat{K}[\Theta^{n+1}(ABC)])$ que van de $\overleftarrow{P}_n^{(i)}$ a $P_n^{(i)}$, $i : 1, 2$.

Si n es par:

$$\begin{aligned}V_{n+1}^{(1)} &= L^{-(n+1)} \left\{ 0, g(B), g(B) - g(A), g(B) - 2g(A), \underline{g(B) - 3g(A)} \right\} + \overleftarrow{P}_n^{(1)} \\ V_{n+1}^{(2)} &= L^{-(n+1)} \left\{ 0, g(A), 2g(A), \underline{3g(A)}, 3g(A) - g(B) \right\} + \overleftarrow{P}_n^{(2)} \\ P_{n+1}^{(1)} &= L^{-(n+1)}(g(B) - 3g(A)) + \overleftarrow{P}_n^{(1)} \\ P_{n+1}^{(2)} &= L^{-(n+1)}(3g(A)) + \overleftarrow{P}_n^{(2)}\end{aligned}$$

Si n es impar:

$$\begin{aligned}V_{n+1}^{(1)} &= L^{-(n+1)} \left\{ 0, g(A), 2g(A), \underline{3g(A)}, 3g(A) - g(B) \right\} + \overleftarrow{P}_n^{(1)} \\ V_{n+1}^{(2)} &= L^{-(n+1)} \left\{ 0, g(B), g(B) - g(A), g(B) - 2g(A), \underline{g(B) - 3g(A)} \right\} + \overleftarrow{P}_n^{(2)} \\ P_{n+1}^{(1)} &= L^{-(n+1)}(3g(A)) + \overleftarrow{P}_n^{(1)} \\ P_{n+1}^{(2)} &= L^{-(n+1)}(g(B) - 3g(A)) + \overleftarrow{P}_n^{(2)}\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}P_{n+1}^{(2)} - P_{n+1}^{(1)} &= (-1)^{n+1}L^{-(n+1)}(g(B) - 6g(A)) + \overleftarrow{P}_n^{(2)} - \overleftarrow{P}_n^{(1)} = \\ &= (-1)^{n+1}L^{-(n+1)}(g(B) - g(A)) - (-1)^{n+1}L^{-(n+1)}(5g(A)) + \\ &\quad + P_n^{(2)} - P_n^{(1)} - (-1)^{n+1}2L^{-n}(g(A)) = \\ &= (-1)^{n+1}L^{-(n+1)}(g(B) - g(A)) - (-1)^{n+1}L^{-(n+1)}(g(\Theta C)) + \\ &\quad + (-1)^{n+1}L^{-n}(g(A) - g(B)) - (-1)^{n+1}2L^{-n}(g(A)) = \\ &= (-1)^{n+2}L^{-(n+1)}(g(A) - g(B)) - (-1)^{n+1}L^{-n}(g(C)) + \\ &\quad + (-1)^{n+1}L^{-n}(g(A) - g(B)) - (-1)^{n+1}L^{-n}(2g(A)) = \\ &= (-1)^{n+2} \left(L^{-(n+1)}(g(A) - g(B)) + L^{-n}(g(A) + g(B) + g(C)) \right)\end{aligned}$$

esto es

$$\boxed{P_n^{(2)} - P_n^{(1)} = (-1)^{n+1}L^{-n}(g(A) - g(B))}$$

vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que

$$\|P_n^{(2)} - P_n^{(1)}\| = \lambda^{-n} \|g(A) - g(B)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ahora debemos probar que ambas sucesiones son convergentes. De la construcción de las sucesiones que se ha hecho se deduce rápidamente que si n es par $P_{n+1}^{(1)} = P_n^{(1)}$. Basta entonces estudiar la sucesión $(P_{2k+1}^{(1)})_{k \in \mathbb{N}}$ que es igual a $(P_{2k}^{(1)})_{k \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} P_{2k+1}^{(1)} &= P_{2k}^{(1)} = L^{-2k}(3g(A)) + \overleftarrow{P}_{2k-1}^{(1)} = \\ &= L^{-2k}(3g(A)) + P_{2k-1}^{(1)} + L^{-(2k-1)}(g(A)) \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} P_{2k+1}^{(1)} - P_{2(k-1)+1}^{(1)} &= L^{-2k}(3g(A)) + L^{-2k}(g(\Theta A)) = \\ &= L^{-2k}(3g(A)) + L^{-2k}(g(B) - 3g(A)) = L^{-2k}(g(B)) \end{aligned}$$

Si llamamos $Q_k := P_{2k+1}^{(1)}$ tendremos

$$Q_{k+p} - Q_k = \sum_{j=k+1}^{k+p} Q_j - Q_{j-1} = \sum_{j=k+1}^{k+p} L^{-2j}(g(B))$$

por lo tanto

$$\|Q_{k+p} - Q_k\| \leq \sum_{j=k+1}^{k+p} \|L^{-2j}(g(B))\| = \sum_{j=k+1}^{k+p} \lambda^{-2j} \|g(B)\| \xrightarrow{k,p \rightarrow \infty} 0$$

de donde deducimos que existe

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^{(1)}$$

Ahora

$$\|P_n^{(2)} - P\| \leq \|P_n^{(2)} - P_n^{(1)}\| + \|P_n^{(1)} - P\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Finalmente veamos que efectivamente hay dos lazos de P a P . Escribiremos $V \prec W$ si V se encuentra antes que W en la curva K_θ siguiendo el recorrido inverso al sentido horario y comenzando por el origen. Recordemos que todos los vértices con los que hemos trabajado (vértices esenciales) permanecen para el paso siguiente y por lo tanto todos están en la curva límite K_θ . Entonces

$$0 \prec \overleftarrow{P}_1^{(1)} \prec P_1^{(1)} \prec \dots \prec g(A) \prec \dots \prec g(A) + g(B) \prec \dots \prec \overleftarrow{P}_1^{(2)} \prec P_1^{(2)} = 0$$

Además para cada $n \in \mathbb{N}$ y para $i = 1, 2$ se tiene

$$\overleftarrow{P}_n^{(i)} \prec \overleftarrow{P}_{n+1}^{(i)} \prec P_{n+1}^{(i)} \preceq P_n^{(i)}$$

luego para todo $n \in \mathbb{N}$

$$0 \prec \overleftarrow{P}_1^{(1)} \prec P_n^{(1)} \prec P_1^{(1)} \prec \dots \prec \overleftarrow{P}_1^{(2)} \prec P_n^{(2)} \prec P_1^{(2)} = 0$$

por lo tanto

$$0 \prec \overleftarrow{P}_1^{(1)} \prec P \prec P_1^{(1)} \prec \dots \prec \overleftarrow{P}_1^{(2)} \prec P \prec P_1^{(2)} = 0$$

Puntos dobles en ∂F_θ .

Como se afirma en el teorema 2.5 la frontera del compacto F_θ , que en este caso es el conjunto de los fraccionarios en la base $-2+i$, está contenida en K_θ . Se terminó de ver que esta curva K_θ tiene al menos un punto doble, estrictamente hablando se ha probado para $\hat{K}_\Theta = \{\hat{u}(t), t \in [0, 1]\} = L(K_\theta + P_W)$ que es semejante a K_θ . Pero por el carácter "autosemejante" de esta construcción resulta fácil ver que esta situación se repite en cualquier subconjunto conexo de esta curva como es ∂F_θ . Veámoslo también en este caso para la curva semejante $L(\partial F_\theta + P_W)$.

La idea es que un proceso casi idéntico al presentado de determinar dos sucesiones convergentes a un punto doble puede repetirse en cualquier subpoligonal de la forma $L^{-n}\hat{K}[ABA^{-1}] + \mathbf{w}$.

Consideremos un segmento arbitrario $\{\hat{u}(t); t \in [t_1, t_2]\} \subset L(\partial F_\theta + P_W) \subset L(K_\theta + P_W) = \hat{K}_\Theta$. Sabemos que cada vértice esencial de \hat{K}_n permanece como vértice esencial de \hat{K}_m para $m \geq n$ y por lo tanto pertenece a la curva límite \hat{K}_Θ . Además los vértices esenciales de \hat{K}_n son los extremos de las subpoligonales de la forma $L^{-n}\hat{K}[S] + \mathbf{w}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$, $S \in \hat{S} = \{A^{\pm 1}, B^{\pm 1}, C^{\pm 1}\}$ cuyas longitudes tienden a cero cuando n tiende a infinito. Es claro entonces que para cualquier segmento dado $\{\hat{u}(t); t \in [t_1, t_2]\}$ existe N suficientemente grande tal que los extremos de alguna subpoligonal $L^{-N}\hat{K}[B] + \mathbf{w}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ pertenecen al segmento, pero entonces $L^{-(N+3)}\hat{K}[\Theta^3(B)] + \mathbf{w}$ es la subpoligonal de \hat{K}_{N+3} que une los mismos extremos; siendo

$$\begin{aligned} \Theta^3(B) &= \Theta^2(A^{-1}C) = \Theta(A^3B^{-1}A^5) \\ &= \Theta(A^3)\Theta(B^{-1}A)\Theta(A^4) \\ &= \Theta(A^3)C^{-1}ABA^{-3}\Theta(A^4) \end{aligned}$$

por lo tanto, recordando la fórmula (2) tenemos que $\hat{K}[ABA^{-1}] + g(\Theta(A^3)C^{-1})$ es una subpoligonal de $\hat{K}[\Theta^3(B)]$ y entonces $L^{-(N+3)}\hat{K}[ABA^{-1}] + L^{-(N+3)}g(\Theta(A^3)C^{-1}) + \mathbf{w}$ es una subpoligonal de \hat{K}_{N+3} cuyos vértices esenciales están en el segmento de curva $\{\hat{u}(t); t \in [t_1, t_2]\}$. Llamamos \mathbf{v} al punto de traslación cuyo valor no modifica en nada el siguiente proceso y K a $N + 3$. Los vértices fijos de $L^{-K}\hat{K}[ABA^{-1}] + \mathbf{v}$ son

$$L^{-K}\{0, g(A), g(A) + g(B), g(B)\} + \mathbf{v}$$

tomamos

$$\begin{aligned} V_1^{(1)} &= L^{-K}(g(A)) + \mathbf{v} \\ V_1^{(2)} &= L^{-K}(g(B)) + \mathbf{v} \end{aligned}$$

entonces

$$\boxed{V_1^{(2)} - V_1^{(1)} = L^{-K}(g(B) - g(A))}$$

y damos nombre al vértice inmediato anterior en cada caso

$$\begin{aligned} \overleftarrow{V}_1^{(1)} &= \mathbf{v} \\ \overleftarrow{V}_1^{(2)} &= L^{-K}(g(A) + g(B)) + \mathbf{v} \end{aligned}$$

Ahora veamos el conjunto de vértices esenciales de \hat{K}_{K+1} que van de $\overleftarrow{V}_1^{(1)}$ a $V_1^{(1)}$, ya que $V_1^{(1)} = \overleftarrow{V}_1^{(1)} + L^{-K}(g(A))$, la poligonal que los une es de la forma $L^{-(K+1)}(\hat{K}[\Theta A])$. Entonces los vértices fijos de esta subpoligonal son

$$L^{-(K+1)} \left\{ 0, g(B), g(B) - g(A), g(B) - 2g(A), \underline{g(B) - 3g(A)} \right\} + \overleftarrow{V}_1^{(1)}$$

De manera semejante escribimos el conjunto de vértices de \hat{K}_{K+1} que van de $\overleftarrow{V}_1^{(2)}$ a $V_1^{(2)}$. Como en este caso $V_1^{(2)} = \overleftarrow{V}_1^{(2)} - L^{-K}(g(A))$, la poligonal que los une es de la forma $L^{-(K+1)}(\hat{K}[\Theta A^{-1}])$ y así los vértices esenciales en la subpoligonal son

$$L^{-(K+1)} \left\{ 0, g(A), 2g(A), \underline{3g(A)}, 3g(A) - g(B) \right\} + \overleftarrow{V}_1^{(2)}$$

elegimos

$$\begin{aligned} V_2^{(1)} &= L^{-(K+1)}(g(B) - 3g(A)) + \overleftarrow{V}_1^{(1)} \\ V_2^{(2)} &= L^{-(K+1)}(3g(A)) + \overleftarrow{V}_1^{(2)} \end{aligned}$$

En este caso observamos que

$$L^{-(K+1)}(g(B) - 3g(A)) = L^{-(K+1)}(g(\Theta A)) = L^{-K}(g(A))$$

por lo tanto $V_2^{(1)} = V_1^{(1)}$.

$$\begin{aligned} V_2^{(2)} - V_2^{(1)} &= L^{-(K+1)}(6g(A) - g(B)) + \overleftarrow{V}_1^{(2)} - \overleftarrow{V}_1^{(1)} = \\ &= L^{-(K+1)}(g(A) - g(B)) + L^{-(K+1)}(5g(A)) + \\ &\quad + V_1^{(2)} - V_1^{(1)} + 2L^{-K}(g(A)) = \\ &= L^{-(K+1)}(g(A) - g(B)) + L^{-(K+1)}(g(\Theta C)) + \\ &\quad + L^{-K}(g(B) - g(A)) + 2L^{-K}(g(A)) = \\ &= L^{-(K+1)}(g(A) - g(B)) + L^{-K}(g(C)) + \\ &\quad + L^{-K}(g(B) - g(A)) + L^{-K}(2g(A)) = \\ &= L^{-(K+1)}(g(A) - g(B)) + L^{-K} \underbrace{(g(A) + g(B) + g(C))}_0 \end{aligned}$$

entonces

$$\boxed{V_2^{(2)} - V_2^{(1)} = L^{-(K+1)}(g(A) - g(B))}$$

Ahora serán

$$\begin{aligned}\overleftarrow{V}_2^{(1)} &= L^{-(K+1)}(g(B) - 2g(A)) + \overleftarrow{V}_1^{(1)} = V_2^{(1)} + L^{-(K+1)}(g(A)) \\ \overleftarrow{V}_2^{(2)} &= L^{-(K+1)}(2g(A)) + \overleftarrow{V}_1^{(2)} = V_2^{(2)} - L^{-(K+1)}(g(A))\end{aligned}$$

Ahora ya que $V_2^{(1)} = \overleftarrow{V}_2^{(1)} - L^{-(K+1)}(g(A))$, el conjunto de vértices de \hat{K}_{N+2} que van de $\overleftarrow{V}_2^{(1)}$ a $V_2^{(1)}$, son los de la poligonal que los une, que es de la forma $L^{-(K+2)}(\hat{K}[\Theta A^{-1}])$. Entonces son

$$L^{-(K+2)} \{0, g(A), 2g(A), \underline{3g(A)}, 3g(A) - g(B)\} + \overleftarrow{V}_2^{(1)}$$

De manera semejante escribimos el conjunto de vértices esenciales de \hat{K}_{N+2} que van de $\overleftarrow{V}_2^{(2)}$ a $V_2^{(2)}$. Como en este caso $V_2^{(2)} = \overleftarrow{V}_2^{(2)} + L^{-(K+1)}(g(A))$, la poligonal que los une es de la forma $L^{-(K+2)}(\hat{K}[\Theta A])$. Entonces los vértices son

$$L^{-(K+2)} \left\{ 0, g(B), g(B) - g(A), g(B) - 2g(A), \underline{g(B) - 3g(A)} \right\} + \overleftarrow{V}_2^{(2)}$$

elegimos

$$\begin{aligned}V_3^{(1)} &= L^{-(K+2)}(3g(A)) + \overleftarrow{V}_2^{(1)} \\ V_3^{(2)} &= L^{-(K+2)}(g(B) - 3g(A)) + \overleftarrow{V}_2^{(2)}\end{aligned}$$

Observemos que

$$L^{-(K+2)}(g(B) - 3g(A)) = L^{-(K+2)}(g(\Theta A)) = L^{-(K+1)}(g(A))$$

por lo tanto $V_3^{(2)} = V_2^{(2)}$.

$$\begin{aligned}V_3^{(2)} - V_3^{(1)} &= L^{-(K+2)}(g(B) - 6g(A)) + \overleftarrow{V}_2^{(2)} - \overleftarrow{V}_2^{(1)} = \\ &= L^{-(K+2)}(g(B) - g(A)) - L^{-(K+2)}(5g(A)) + \\ &\quad + V_2^{(2)} - V_2^{(1)} - 2L^{-(K+1)}(g(A)) = \\ &= L^{-(K+2)}(g(B) - g(A)) - L^{-(K+2)}(g(\Theta C)) + \\ &\quad + L^{-(K+1)}(g(A) - g(B)) - 2L^{-(K+1)}(g(A)) = \\ &= L^{-(K+2)}(g(B) - g(A)) - L^{-(K+1)}(g(C)) + \\ &\quad + L^{-(K+1)}(g(A) - g(B)) - L^{-(K+1)}(2g(A)) = \\ &= L^{-(K+2)}(g(B) - g(A)) - L^{-(K+1)}(g(A) + g(B) + g(C))\end{aligned}$$

y ya que $g(A) + g(B) + g(C) = 0$ tenemos

$$\boxed{V_3^{(2)} - V_3^{(1)} = L^{-(K+2)}(g(B) - g(A))}$$

La demostración sigue de manera totalmente análoga a la que muestra que existe un punto doble en K_θ y queda probado que hay puntos dobles en cualquier segmento de esta curva y por lo tanto en cualquier segmento de ∂F_θ .

5. Apéndice.

5.1. Métrica de Hausdorff.

Definición 5.2. Sea $\mathfrak{K}(\mathbb{R}^n)$ la colección de todos los conjuntos compactos no vacíos. La función $\mathfrak{h}:\mathfrak{K}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{K}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\mathfrak{h}(A, B) := \max \left\{ \max_{a \in A} \min_{b \in B} \|a - b\|, \max_{b \in B} \min_{a \in A} \|a - b\| \right\}$$

es fácilmente comprobable que es una métrica en $\mathfrak{K}(\mathbb{R}^n)$. sta es la llamada métrica de Hausdorff.

Esta definición es equivalente a lo que sigue:

Sea $\delta > 0$

$$\begin{aligned} [A]_\delta & : = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \inf_{a \in A} \|a - x\| \leq \delta \right\} \\ \mathfrak{h}(A, B) & : = \inf \{ \delta : A \subset [B]_\delta \text{ y } B \subset [A]_\delta \} \end{aligned}$$

El espacio $(\mathfrak{K}(\mathbb{R}^n), \mathfrak{h})$ es un espacio métrico completo y valen las siguientes propiedades elementales

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función de Lipschitz con constante de Lipschitz s . Entonces para $A, B \in \mathfrak{K}(\mathbb{R}^n)$

$$\mathfrak{h}(f(A), f(B)) \leq s\mathfrak{h}(A, B)$$

2. Sean $\{A_i; i = 1, \dots, k\}$ y $\{B_i; i = 1, \dots, k\}$ colecciones finitas de conjuntos en $\mathfrak{K}(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$\mathfrak{h} \left(\bigcup_{i=1}^k A_i, \bigcup_{i=1}^k B_i \right) \leq \max \{ \mathfrak{h}(A_i, B_i); i = 1, \dots, k \}$$

5.2. Simplicidad de las poligonales aproximantes. La condición (5) de la hipótesis del teorema 2.5 que es la que garantiza que las curvas aproximantes sean simples pide que $\theta(W)$ tiene un lazo si y sólo si W tiene un lazo. Más técnicamente esta hipótesis se enuncia de la siguiente manera:

Si $W \in G$ y $\theta(W) = STU$ con T una palabra no vacía, S, U no ambas vacías, $S \neq U^{-1}$ y $f(T) = (0, 0)$, entonces $W = S'T'U'$ con T' palabra no vacía, S', U' no ambas vacías y $S = \theta(S')$, $T = \theta(T')$, $U = \theta(U')$, (de donde $f(T') = (0, 0)$ y $S' \neq (U')^{-1}$)

En [6] se prueban los siguientes resultados:

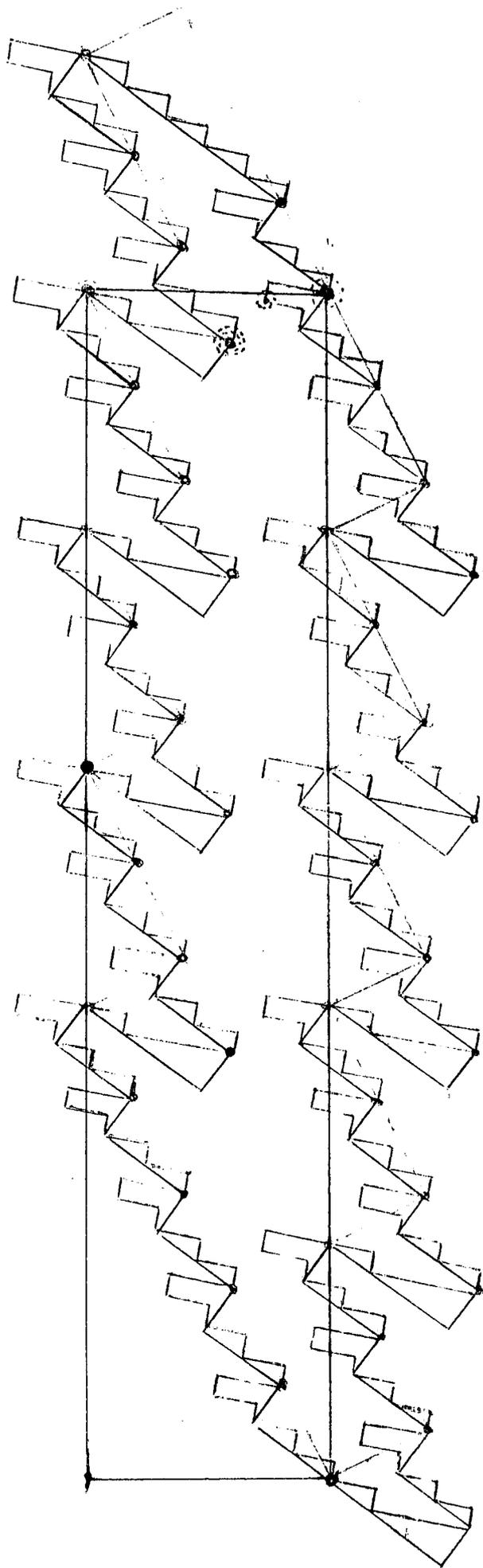
Teorema 5.6. *Sea G^* el subconjunto de G formado por las palabras W que satisfacen la siguiente condición*

$$\begin{cases} f(W) = k_1 f(a) + k_2 f(b) & k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \text{ y } |k_1| + |k_2| \leq \text{long}(W) \leq |k_1| + |k_2| + 4 \\ \sqrt{d} \|f(W)\| \leq 2\sigma \max \{\|f(a)\|, \|f(b)\|\} & \text{siendo } \sigma := \max \{\text{long}(\theta a), \text{long}(\theta b)\} \end{cases}$$

entonces

- i) G^* es finito y contiene a todas las palabras de dos letras.
- ii) Si la condición (5) de la hipótesis del teorema 2.5 se satisface para las palabras en G^* se satisface para toda palabra en G .

Proposición 5.2. *Si vale la condición (5) entonces las poligonales K_n no tienen puntos dobles.*



6. Referencias.

- [1] Dekking, F.M., Replicating superfigures and endomorphisms of free groups. *J. of Combinatorial Theory. Ser. A* 32(1982), 315-320.
- [2] Dekking, F.M., Recurrent Sets. *Advances in Mathematics* 44 (1982), 78-104.
- [3] Edgar, G.A. Measure, Topology and Fractal Geometry, Springer, (1990).
- [4] Panzone, R., Dimensión, Auto semejanza y Fractalidad., *Trabajos de Matemática* #18 Serie B, IMAF, (1993), 1-24.
- [5] Ito, S., On the fractal curves induced from the complex radix expansion, *Tokio J. Math.* 12 (1989), 299-320.
- [6] Moure, M. del C., Figuras replicantes planas obtenidas vía endomorfismos de grupos libres. *Tesis Magister*, UNS (1996)
- [7] Moure, M. del C., Superfiguras Replicantes, INMABB (UNS-CONICET), I.T.I. #40, (1994).
- [8] Kátaí, J. and Szabó, J., Canonical number system for complex integer, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 37 (1975), 255-260.
- [9] Falconer, K.J., The Geometry of fractal sets, Cambridge, (1985)