INFORME TECNICO INTERNO

N°. 6

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina

NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS (*)

N° 13

LECCIONES SOBRE METODOS Y RESULTADOS BASICOS DE LA TEORIA DE STURM-LIOUVILLE Y ALGUNAS DE SUS GENERALIZACIONES, I.

AGNES BENEDEK Y RAFAEL PANZONE

INMABB - CONICET

1985

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

(*) La publicación de este volumen ha sido subsidiada por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.

INDICE TEMATICO.

CAPITULO 0.

NOCIONES AUXILIARES.

CAPITULO 1.

INTRODUCCION.

CAPITULO 2.

FUNCION DE GREEN DEL PROBLEMA.

CAPITULO 3.

EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE UNIDIMENSIONAL.

CAPITULO 4.

PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE CON CONDICIONES DE CONTORNO LINEALMENTE DEPENDIENTES DEL PARAMETRO ESPECTRAL.

CAPITULO 5.

SOLUCIONES REALES, CEROS Y EFECTOS EN LA SOLUCION POR ALTERACION DE LOS COEFICIENTES EN ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN.

CAPITULO 6.

OPERADORES DIFERENCIALES DE ORDEN n, CONDICIONES DE CONTORNO, AUTOFUNCIONES, FUNCIONES ASOCIADAS.

CAPITULO 7.

CASIDERIVADAS. EXPRESIONES AUTOADJUNTAS CASIDIFERENCIALES.

CAPITULO 0

NOCIONES AUXILIARES.

0.1. PREṘREQUISITOS. En lo que sigue nos detendremos lo menos posible en las demostraciones de teoremas de existencia, unicidad, prolongación de soluciones, etc., de ecuaciones diferenciales ordinarias. Esta parte general de la teoría puede verse con provecho en cualquiera de los siguientes excelentes tratados: Hartman [5]; Coddington y Levinson [2]; Hale [4]; Birkhoff y Rota [1]; de Guzmán [3]; aunque enunciaremos precisamente el resultado a usar si éste no es muy elemental. Aplicaciones de la teoría de Sturm-Liouville pueden verse en los textos de Weinberger [12] y Petrovsky [9]. Sin embargo el lector debe tener presente que hay muchos y muy buenos libros que versan sobre ecuaciones diferenciales ordinarias y/o parciales y que no citamos.

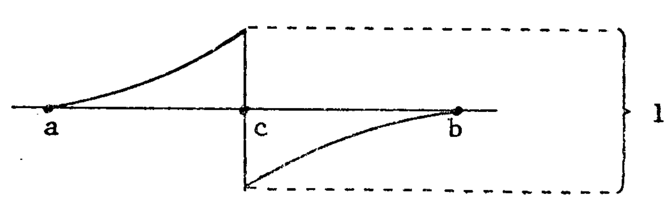
Haremos uso de métodos y resultados del Análisis Funcional que se encuentran en todos los buenos textos sobre el tema, algunos de ellos están citados en la Bibliografía de [8]. Para tener un punto de partida asumimos, al principio, un mímimo de nociones, por ejemplo, el material que constituye los tres primeros capítulos de las notas de curso [8]: elementos de la teoría de espacios de Banach y Hilbert, operadores acotados y no acotados en espacios de Hilbert, operadores completamente continuos y su teorema espectral.

Los parágrafos que siguen a continuación no son necesarios para iniciar la lectura del capítulo 1 y pueden leerse en el momento en que se haga referencia a ellos.

0.2 LEMA. Sea $u \in C^1[a,b]$ y $c \in [a,b]$; entonces existe $M \in R$, $M = M(a,b)$, tal que para todo entero positivo n vale:

$$|u(c)|^2 \leqslant M\{n \int_a^b |u(x)|^2\, dx + \frac{1}{n} \int_a^b |u'(x)|^2\, dx\} .$$

DEMOSTRACION. Dado $c \in [a,b]$, consideremos una función $g(x)$ definida en $[a,b]$ tal que $g(a) = g(b) = 0$ con derivada continua y acotada en $[a,c)$ y en $(c,b]$, y tal que $g(c-0) - g(c+0) = 1$.



Entonces: $\int_a^c (u(x)g(x))'dx = u(x)g(x)\Big|_a^c = u(c)g(c-0)$, pero también $\int_a^c (u(x)g(x))'dx = \int_a^c u'(x)g(x)dx + \int_a^c u(x)g'(x)dx.$

Análogamente:

$$\int_c^b (u(x)g(x))'dx = \int_c^b u'(x)g(x)dx + \int_c^b u(x)g'(x)dx = -u(c)g(c+0).$$

Por lo tanto:

$$\int_a^b u'(x)g(x)dx + \int_a^b u(x)g'(x)dx = u(c)\,[g(c-0)-g(c+0)] = u(c).$$

Luego:

$$\begin{aligned}|u(c)|^2 &= \left|\int_a^b u'(x)g(x)dx + \int_a^b u(x)g'(x)dx\right|^2 \leqslant \\ &\leqslant 2\left\{\left|\int_a^b u'(x)g(x)dx\right|^2 + \left|\int_a^b u(x)g'(x)dx\right|^2\right\} \leqslant \\ &\leqslant 2\left(\int_a^b |u'(x)|^2dx \int_a^b |g(x)|^2dx + \int_a^b |u(x)|^2dx \int_a^b |g'(x)|^2dx\right).\end{aligned}$$

Consideremos ahora:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(b-a)(c-a)^n} & a \leqslant x < c \\[2ex] \dfrac{-(b-x)^{n+1}}{(b-a)(b-c)^n} & c \leqslant x < b \end{cases}$$

en $[a,c)$ y $(c,b]$. Por otra parte:

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{(n+1)(x-a)^n}{(b-a)(c-a)^n} & a \leqslant x < c \\[2ex] \dfrac{(n+1)(b-x)^n}{(b-a)(b-c)^n} & c < x \leqslant b\,, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b |g(x)|^2dx &= \int_a^c \frac{(x-a)^{2n+2}}{(b-a)^2(c-a)^{2n}}\,dx + \int_c^b \frac{(b-x)^{2n+2}}{(b-a)^2(b-c)^{2n}}\,dx = \\ &= \frac{1}{2n+3}\,\frac{(x-a)^{2n+3}}{(b-a)^2(c-a)^{2n}}\Big|_a^c - \frac{1}{2n+3}\,\frac{(b-x)^{2n+3}}{(b-a)^2(b-c)^{2n}}\Big|_c^b = \\ &= \frac{1}{2n+3}\,\frac{(c-a)^3+(b-c)^3}{(b-a)^2} \leqslant \frac{(b-a)^3}{(2n+3)(b-a)^2} = \frac{b-a}{2n+3}\,.\end{aligned}$$

$$\int_a^b |g'(x)|^2 dx = \int_a^c \frac{(n+1)^2 (x-a)^{2n}}{(b-a)^2 (c-a)^{2n}} dx + \int_c^b \frac{(n+1)^2 (b-x)^{2n}}{(b-a)^2 (b-c)^{2n}} dx =$$

$$= \frac{(n+1)^2}{2n+1} \left\{ \frac{(x-a)^{2n+1}}{(b-a)^2 (c-a)^{2n}} \Big|_a^c - \frac{(b-x)^{2n+1}}{(b-a)^2 (b-c)^{2n}} \Big|_c^b \right\} =$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(b-a)^2} (b-a) = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(b-a)} .$$

Por lo tanto:

$$|u(c)|^2 \leqslant 2 \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(b-a)} \int_a^b |u(x)|^2 dx + 2 \frac{(b-a)}{2n+3} \int_a^b |u'(x)|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant M \{ n \int_a^b |u(x)|^2 dx + \frac{1}{n} \int_a^b |u'(x)|^2 dx \}. \qquad \text{QED.}$$

0.3. Vale el siguiente resultado para operadores simétricos definidos en espacios de Hilbert donde $\sigma_p(A)$ es el conjunto de autovalores de A y "#" significa: "número de elementos de".

TEOREMA 1. Sea A un operador simétrico en $\mathcal{D}_A$, siendo $\mathcal{D}_A$ una variedad densa en un espacio de Hilbert H tal que $R(A) \subset \mathcal{D}_A$. Supongamos que A es no trivial y completamente continuo en $\mathcal{D}_A$ (i.e. para todo $\{u_i\} \subset \mathcal{D}_A$, $\{u_i\}$ acotada, existe una subsucesión $\{u_{i_j}\}$ tal que $Au_{i_j} \longrightarrow u \in \mathcal{D}_A$ para $j \longrightarrow \infty$). Valen las siguientes propiedades:

1. $\sigma_p(A) \neq \emptyset$; $\#\sigma_p(A) \leqslant \aleph_0$ y $\sigma_p(A) \subseteq R$.
Los autovalores no nulos λ_j de A pueden ser ordenados de manera que: $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \dots$ con λ_i repetido según su multiplicidad que siempre es finita. Además si $\#\sigma_p(A) = \aleph_0$, $\lambda_j \longrightarrow 0$ si $j \longrightarrow \infty$.

2. Las autofunciones $\varphi_j (\in \mathcal{D}_A)$ asociadas al autovalor λ_j pueden elegirse reales y vale que $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$.

3. $|\lambda_n| = \max\limits_{u \in \mathcal{D}_A} \{ |(Au,u)| : \|u\| = 1, (u,\varphi_i) = 0, i = 1,2,\dots,n-1 \}$.

4. Si $u = Av$ con $v \in \mathcal{D}_A$ entonces $u = Av = \sum (Av,\varphi_j)\varphi_j = \sum (u,\varphi_j)\varphi_j =$
$= \sum (v, A\varphi_j)\varphi_j = \sum \lambda_j (v,\varphi_j)\varphi_j$.

5. Si el rango de A, $A(\mathcal{D}_A)$, es denso en H entonces $\{\varphi_j\}$ es un sistema

ortonormal completo.

EJERCICIO. Demostrar el Teorema 0.3 aplicando el teorema espectral para operadores completamente continuos simétricos a su extensión continua a H. Observar que la extensión no tiene nuevas autofunciones.

NOTA. Sea A un operador en las condiciones del Teorema 1 y supongamos que exista una funcional $[\cdot]$ tal que para todo $u \in \mathcal{D}_A$: $\|u\| \leqslant \alpha[u]$, siendo $\alpha \neq 0$ una constante independiente de u. Si para todo $v \in \mathcal{D}_A$ existe w tal que

$$[w - \sum_1^n (Av,\varphi_j)\varphi_j] \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad n \longrightarrow \infty ,$$

entonces $w = Av$.

En efecto, por hipótesis

$\|w - \sum_1^n (Av,\varphi_j)\varphi_j\| \leqslant \alpha[w - \sum_1^n (Av,\varphi_j)\varphi_j]$ y $\|w - \sum_1^n (Av,\varphi_j)\varphi_j\| \longrightarrow 0$ si $n \to \infty$; pero por el punto 4 del Teorema 1 sabemos que $\sum_1^n (Av,\varphi_j)\varphi_j \longrightarrow Av$ si $n \to \infty$ y entonces $Av = w$.

EJEMPLO. $H = L^2([a,b])$, $[u] = \|u\|_\infty$; y también $[u] = \|u\|_p$, $p > 2$. Aunque en estos casos la unicidad del límite puede deducirse usando la existencia de subsucesiones convergentes casi doquier de sucesiones convergentes en norma.

0.4. OPERADORES ESENCIALMENTE AUTOADJUNTOS. Un operador lineal A en H se dice *esencialmente autoadjunto* si es simétrico ($A \subseteq A^*$) y si $A - iI$ y $A + iI$ aplican $\mathcal{D}(A)$ en subespacios densos en H.

TEOREMA. Si A es un operador simétrico y existe un número real c tal que $A - cI$ tiene inversa acotada con dominio denso en H entonces A es esencialmente autoadjunto.

DEMOSTRACION. Notemos con $R(A)$ el rango de A. Sea z un número no real y supongamos que $\overline{R(A-zI)} \neq H$. Entonces existe $h \neq 0$ tal que $h \perp R(A-zI)$. Por hipótesis existe una sucesión $\{u_n\} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $(A-cI)u_n =$
$= h_n \to h$.

Luego:

$0 = ((A-zI)u_n,h) = ((A-cI)u_n,h) + ((c-z)u_n,h) =$

$= (h_n,h) + (c-z).((A-cI)^{-1}h_n,h).$

Por ser $(A-cI)^{-1}$ acotado resulta $\{u_n\}$ convergente. En consecuencia

(1) $$(h_n,h_n) + (c-z).((A-cI)^{-1}h_n,h_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Por otra parte, como los operadores $A-cI$ y $(A-cI)^{-1}$ tienen dominios densos en $\mathcal{H}$, vale que

(2) $$((A-cI)^*)^{-1} = ((A-cI)^{-1})^* ,$$

y por lo tanto el operador $(A-cI)^{-1}$ es simétrico. Esto garantiza que $((A-cI)^{-1}h_n,h_n)$ sea real. Entonces, teniendo en cuenta que la parte imaginaria de (1) es de la forma

$$y((A-cI)^{-1}h_n,h_n) \quad , \quad y \neq 0 ,$$

tendremos $((A-cI)^{-1}h_n,h_n) \longrightarrow 0$ si $n \to \infty$. Luego, de (1) sigue que $\|h_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; o sea $\|h\| = 0$, contradicción. QED.

0.5. Un operador autoadjunto tiene su espectro contenido en el eje real. Luego es esencialmente autoadjunto, y además cerrado. Veamos la recíproca de esta proposición.

TEOREMA. Todo operador esencialmente autoadjunto y cerrado es autoadjunto.

DEMOSTRACION. Sea A un tal operador. Entonces $A = A^{**}$, y los operadores $A \pm iI$ aplican $\mathcal{D}(A)$ en subespacios densos en $\mathcal{H}$.

Como todo punto no real del plano complejo es punto de tipo regular (+) de un operador simétrico, los puntos $\pm i$ lo son de A. Por lo tanto los operadores $(A \pm iI)^{-1}$ están definidos y son acotados sobre variedades densas en $\mathcal{H}$. Entonces (como en (2) del párrafo precedente):

(+) Sea A un operador lineal cerrado definido en $\mathcal{D}(A)$, denso en $\mathcal{H}$, y a valores en $\mathcal{H}$. Un número complejo λ se llama *punto de tipo regular* de A si existe un número real $K = K(\lambda) > 0$ tal que $\|(A-\lambda I)f\| \geq K\|f\|$, para todo $f \in \mathcal{D}(A)$.
Se sabe que el conjunto de puntos de tipo regular, por definición *el dominio de regularidad de* A, es abierto. Sigue enseguida de la definición que $(A-\lambda I)(\mathcal{D}_A)$ es un subespacio (cerrado) de $\mathcal{H}$ y allí el operador $(A-\lambda I)^{-1}$ es acotado.

(1) $((A \pm iI)^{-1})^* = ((A \pm iI)^*)^{-1} = (A^* \mp iI)^{-1}$,

Repitiendo el proceso:

(2) $((A \pm iI)^{-1})^{**} = (A^{**} \pm iI)^{-1} = (A \pm iI)^{-1}$.

En consecuencia, los operadores $(A \pm iI)^{-1}$ son cerrados, y por ser acotados:

$$\mathcal{D}((A \pm iI)^{-1}) = \mathcal{H}$$

De $A \subset A^*$ y (1) sigue ahora que $A = A^*$, QED.

0.6. EXTENSIONES CERRADAS. Sea B un operador lineal cerrado. Sea $\widetilde{B}$ una extensión lineal donde

(1) $\mathcal{D}(\widetilde{B}) = \mathcal{D}(B)+F$, $F \cap \mathcal{D}(B) = \{0\}$.

TEOREMA. Si $\dim F < \infty$ entonces $\widetilde{B}$ es cerrado.

DEMOSTRACION. (Demostraremos la proposición sin recurrir a un conocido resultado de von Neumann y utilizando sólo métodos elementales).

Sea $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(\widetilde{B})$ tal que $x_n \longrightarrow x$, $\widetilde{B}(x_n) \longrightarrow y$. Debemos probar que $x \in \mathcal{D}(\widetilde{B})$, $\widetilde{B}(x) = y$.

Como $x_n \in \mathcal{D}(\widetilde{B})$, $x_n = d_n + f_n$, $\{d_n\} \subseteq \mathcal{D}(B)$, $\{f_n\} \subset F$.

(a) Si para todo n, $\|f_n\| \leqslant K < \infty$, como F es de dimensión finita existe una subsucesión convergente, $f_{n_j} \longrightarrow f \in F$.

Por otra parte como $\widetilde{B}|_F$ es un operador lineal sobre un espacio de dimensión finita él es acotado; luego $\widetilde{B}(f_{n_j}) \longrightarrow \widetilde{B}(f)$. Además $x_n \longrightarrow x$ $\Rightarrow d_{n_j} = x_{n_j} - f_{n_j} \longrightarrow x-f$ y $B(d_{n_j}) = \widetilde{B}(d_{n_j}) = \widetilde{B}(x_{n_j})-\widetilde{B}(f_{n_j}) \longrightarrow y-\widetilde{B}(f)$.

Por ser B cerrado sigue ahora que $x-f \in \mathcal{D}(B)$ y que $B(x-f) = y-\widetilde{B}(f)$. Entonces: $x = (x-f)+f \in \mathcal{D}(\widetilde{B})$, $\widetilde{B}(x) = y$.

(b) Si $\{f_n\}$ no está acotada, llamemos también $\{f_n\}$ a una subsucesión tal que $\|f_n\| \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Si consideramos la sucesión

$x'_n = \dfrac{x_n}{\|f_n\|} = d'_n + f'_n$, $x_n = d_n+f_n$, se tiene que: $x'_n \longrightarrow 0$,

$\widetilde{B}(x'_n) = \widetilde{B}(x_n)/\|f_n\| \longrightarrow 0$. Como $\{f'_n\}$ es acotada, se puede elegir una subsucesión convergente $\{f'_{n_j}\}$ tal que $f'_{n_j} \longrightarrow f'$, $(\|f'\| = 1)$, y entonces $\widetilde{B}(f'_{n_j}) \longrightarrow \widetilde{B}(f')$.

Por otra parte: $d'_{n_j} + f'_{n_j} \longrightarrow 0 \Rightarrow d'_{n_j} \longrightarrow -f'$, y

$$B(d'_{n_j}) = \tilde{B}(d'_{n_j}) = \tilde{B}(x'_{n_j}) - \tilde{B}(f'_{n_j}) \longrightarrow -\tilde{B}(f').$$

Por ser B cerrado concluímos que $-f' \in \mathcal{D}(B)$. Entonces $f' \in \mathcal{D}(B) \cap F =$ $= 0$ y $\|f'\| = 1$, contradicción. Por lo tanto siempre vale que $\|f_n\| \leqslant K < \infty$ para cierto K, QED.

0.61. Sean D y F variedades lineales de H. Si $D \cap F = \{0\}$ notaremos con $D \dotplus F$ a la suma $D + F$.

PROPOSICION. Si F es de dimensión finita y G es una variedad tal que $G \subset D \dotplus F$ con $G \cap D = \{0\}$, entonces $\dim G \leqslant \dim F$.

DEMOSTRACION. Por hipótesis todo $g \in G$ tiene una representación única de la forma $g = d + f$ con $d \in D$, $f \in F$.
Queda entonces bien definida la transformación lineal: $(G \ni) g \longrightarrow f (\in F)$.
Esta es biunívoca pues $G \cap D = \{0\}$, QED.

COROLARIO. Si F es de dimensión finita y H de dimensión ∞, $H \subset D \dotplus F$, entonces $\dim (H \cap D) = \infty$.

DEMOSTRACION. Sea G una variedad lineal tal que $G \subset H$, $G \cap D = \{0\}$, maximal respecto a estas propiedades. Entonces de la maximalidad de G sigue que todo $h \in H$ es de la forma $h = g + d$ con $g \in G$ y $d \in D \cap H$. O sea, $H = G \dotplus (D \cap H)$. Como $\dim G \leqslant \dim F$, sigue el corolario, QED.

0.62. DEFINICION. Sea D una variedad lineal de H, espacio de Hilbert. Un conjunto M de elementos de H se dirá linealmente independiente módulo D si para toda combinación lineal $\sum c_i m_i$, $m_i \in M$, se verifica

$$\sum c_i m_i \in D \Rightarrow c_i = 0 \text{ para todo } i.$$

Esto equivale a decir que M es linealmente independiente y $[M] \cap D = \{0\}$, donde $[M]$ es la variedad lineal generada por M. Sea $\tilde{D} = [M] \dotplus D$. Entonces por definición: $\dim (\tilde{D}/D) = \dim [M]$, $(\leqslant \infty)$.

0.7. EL ESPECTRO DE OPERADORES CERRADOS. Sea T definido en $\mathcal{D}(T) \subset H$. Supondremos en toda esta sección que el operador lineal T tiene dominio denso en H y que T es cerrado.
Un punto $\lambda \in C$ se dice de *tipo regular* para T si se verifica

(1) $\quad \|(T-\lambda I)f\| \geqslant c\|f\|$ para todo $f \in \mathcal{D}(T)$, $c > 0$.

O sea, $(T-\lambda I)^{-1}$ existe y es acotado en su dominio. Además es un operador cerrado y por lo tanto su dominio es un subespacio. Diremos que λ es un *punto regular* (para T) si es de tipo regular y si

(2) $$(T-\lambda I)(\mathcal{D}(T)) = H.$$

O lo que es lo mismo, un punto regular (para un operador cerrado) es un punto de tipo regular para el cual $(T-\lambda I)(\mathcal{D}(T))$ es denso en H.

Designaremos con $\pi(T)$ a la familia de puntos de tipo regular y con $\sigma(T)$ (*espectro de* T) al complemento de los puntos regulares.

(3) $$\pi(T) \text{ es abierto.}$$

En efecto, si se verifica (1) para cierto λ entonces si $|\lambda-\mu| < \frac{c}{2}$ $\|(T-\mu I)f\| \geq c\|f\| - |\lambda-\mu|\|f\| \geq \frac{c}{2}\|f\|$ y $\pi(T)$ es abierto.

$\sigma(T) \cap \pi(T)$ es la familia de puntos de tipo regular no regulares, $\mathbb{C}\setminus\sigma$ es también llamado conjunto *resolvente*. Con $\sigma_p(T)$ denotamos al *espectro puntual* (conjunto de autovalores de T); con $\sigma_c(T)$ al *espectro continuo*, es decir al conjunto de puntos λ del espectro, no en $\sigma_p(T)$, para los cuales $(T-\lambda I)(\mathcal{D}(T))$ es denso en H; y con $\sigma_r(T)$ al *espectro residual*, por definición, el conjunto de los λ que no son autovalores y para los cuales $(T-\lambda I)(\mathcal{D}(T))$ no es denso en H. Obviamente:

(4) $$\sigma(T) = \sigma_p(T) + \sigma_c(T) + \sigma_r(T).$$

Es fácil ver que $\sigma_c = \{\lambda \in \sigma\setminus(\sigma_p \cup \pi) : \overline{(T-\lambda I)(\mathcal{D}(T))} = H\}$. Como un operador cerrado con dominio H es acotado sigue que

(5) $$\lambda \in \sigma_c(T) \Rightarrow (T-\lambda I)(\mathcal{D}(T)) \neq H.$$

0.71. C(T) designará al *espectro de concentración* (también llamado *espectro límite*): $\lambda \in C(T)$ si y sólo si existe una sucesión acotada $\{f_n\}$ no compacta (i.e. tiene una subsucesión $\{f_n'\}$ tal que ninguna subsucesión de ésta es convergente) tal que

(1) $$\{f_n\} \subset \mathcal{D}(T) \quad , \quad \lim_{n\to\infty} (T-\lambda I)f_n = 0.$$

Una sucesión como la $\{f_n'\}$ se dice *característica* para λ. Siempre podemos suponer que $\|f_n\| = 1$ para todo n pues existe $\varepsilon > 0$ tal que todo elemento de la característica verifica $1/\varepsilon \geq \|f_n'\| \geq \varepsilon$, (aquí $\varepsilon = \varepsilon(\{f_n'\})$).

Obviamente $C(T) \cap \pi(T) = \emptyset$. Por lo tanto $C(T) \subset \sigma(T)$ y C(T) contiene a todo autovalor de multiplicidad infinita.

Es fácil ver de la definición de espectro residual que

(2) $\sigma_r(T)$ = conjugado de $\sigma_p(T^*)\backslash\sigma_p(T)$ = $\{\lambda: \bar{\lambda}$ es autovalor para T^* y λ no lo es para $T\} \supset \sigma(T) \cap \pi(T)$.

Veamos ahora que vale la siguiente relación:

(3) $$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup C(T).$$

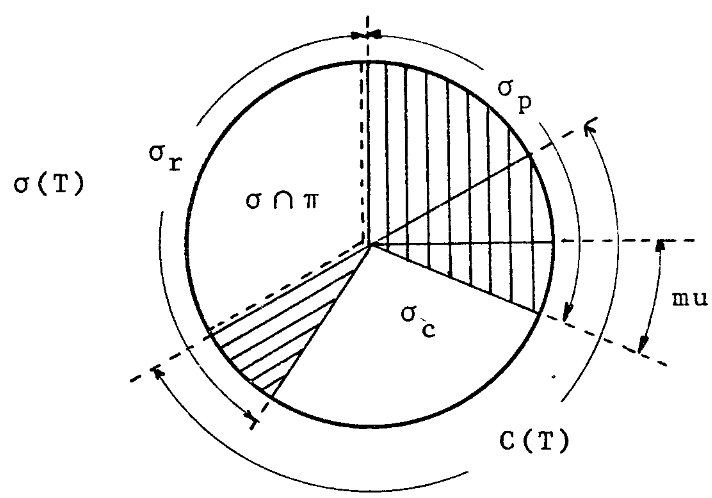
Precisamente, veamos que $\sigma\backslash\pi = C \cup \sigma_p$, (y (3) seguirá de (2)). Sea $\lambda \in \sigma$. Si $\lambda \notin \pi$, existe en $\mathcal{D}(T)$ una sucesión $\{\varphi_n\}$, $\|\varphi_n\| = 1$, tal que

$(T-\lambda I)\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Si una subsucesión $\{\varphi_{n_j}\}$ convergiera a un elemento φ entonces $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ y $(T-\lambda I)\varphi = 0$, pues T es cerrado. O sea, $\lambda \in \sigma_p$. Si tal subsucesión no existiera $\{\varphi_n\}$ no sería compacta y λ pertenecería a $C(T)$, QED.

COROLARIO. $C(T) \supset \sigma_c(T)$.

0.711 . Si imaginamos a $\sigma(T)$ como un disco cerrado los diferentes "espectros" mencionados se encuentran en general, en una relación conjuntista que puede ilustrarse por medio de sectores según el siguiente diagrama:



0.712. Un cálculo directo muestra que

$$\mathcal{R}(T-\lambda I)^{\perp} = \{x \in \mathcal{D}_{T^*}: (T^*-\bar{\lambda}I)x = 0\} =: G^*_{\bar{\lambda}}$$

y la misma fórmula aplicada a T^* muestra que

$$\mathcal{R}(T^*-\bar{\lambda}I)^{\perp} = \{x \in \mathcal{D}_T: (T-\lambda I)x = 0\} =: G_\lambda ,$$

pues para un operador cerrado, $T^{**} = T$.

0.72. Como $\pi(T)$ es abierto su complemento $C(T) \cup \sigma_p$ es un conjunto cerrado y es el llamado *núcleo espectral:*

(1) $$\sigma\backslash\pi = C(T) \cup \sigma_p.$$

LEMA. $\sigma = \bar{\sigma}$.

DEMOSTRACION. Supongamos que $\lambda_o \notin \sigma$. Entonces $B:=(T-\lambda_o I)^{-1}$ es un operador acotado sobre H. Sea $\lambda \in C$ tal que $\|B\|.|\lambda-\lambda_o| < 1$. Escribiendo $T-\lambda I = (T-\lambda_o I)+(\lambda_o-\lambda)I = (T-\lambda_o I)(I+(\lambda_o-\lambda).B) = (I+(\lambda_o-\lambda)B)(T-\lambda_o I)$, vemos que $(T-\lambda I)^{-1} = (T-\lambda_o I)^{-1}(I+(\lambda-\lambda_o)B+(\lambda-\lambda_o)^2B^2+ \ldots)$ es un operador acotado definido en H. O sea $\lambda \notin \sigma$.

Veamos otra demostración. Supongamos $\lambda_n \in \sigma \cap \pi$, $n=1,2,\ldots,\lambda_n \longrightarrow \lambda$. Si $\lambda \notin \sigma_p \cup \sigma_r$ entonces $\lambda \notin \sigma_p(T)$ y $\overline{R(T-\lambda I)} = H$. De 0.712 sigue que $\bar{\lambda} \notin \sigma_p(T^*)$ (y $\overline{R(T^*-\bar{\lambda}I)} = H$). Además sigue que $\bar{\lambda}_n$ es un autovalor para T^*.

Sea z_n, $\|z_n\| = 1$, autovector de T^* correspondiente al autovalor $\bar{\lambda}_n$. Entonces $(T^*-\bar{\lambda}I)z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Y por lo tanto $(T^*-\bar{\lambda}I)^{-1}$ no es acotado en su dominio, el cual entonces necesariamente es distinto de H. Luego, el dominio de $(T-\lambda I)^{-1}$ es distinto de H, y en consecuencia $\lambda \in \sigma$. QED.

0.721. Si el operador T es autoadjunto y completamente continuo, entonces

$$C(T) = \{0\} \quad , \quad \sigma(T) = \sigma_p \cup C(T).$$

0.722. Sea A autoadjunto, no necesariamente acotado. Todo punto no real es regular ($\sigma \subset R$). En efecto, si a y b son números reales y $\lambda = a+ib$:

(1) $$\|(A-(a+ib))x\|^2 = \|(A-a)x\|^2 + b^2\|x\|^2.$$

Entonces $b\neq 0$ implica $\|(A-\lambda I)x\| \geqslant |b|.\|x\|$, y existe $(A-\lambda I)^{-1}$ acotado y cerrado. Por lo tanto de dominio cerrado. Si $\mathcal{D}((A-\lambda I)^{-1}) \neq H$ y $x\neq 0$ es ortogonal a ese dominio tendremos $(A^*-\bar{\lambda}I)x = 0$, es decir, $(A-\bar{\lambda}I)x = 0$. Luego $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A)$. Entonces necesariamente $\lambda = \bar{\lambda}$, contradicción. En consecuencia λ pertenece al conjunto resolvente.

Sea ahora λ real. De lo dicho se ve enseguida que vale la siguiente proposición (cf.0.712):

(2) $$\lambda \in C\backslash\sigma \quad \text{si y sólo si} \quad (A-\lambda I)\mathcal{D}(A) = H.$$

O lo que es lo mismo:

(3) $\lambda \in \sigma$ si y sólo si $\mathcal{R}(A-\lambda I) \neq H$.

También se ve fácilmente que

(4) $\lambda \in \sigma_p(A)$ si y sólo si $\overline{\mathcal{R}(A-\lambda I)} \neq H$.

Veamos que

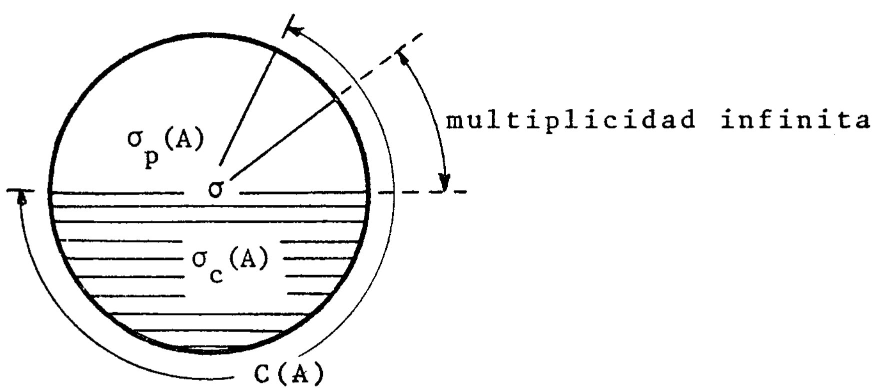
(5) $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A) \Rightarrow \overline{\mathcal{R}(A-\lambda I)} \neq \mathcal{R}(A-\lambda I)$.

En efecto, de (4) sigue que $\mathcal{R}(A-\lambda I)$ es denso en H y de (3) que es distinto de H.

De (2), 0.71, sigue que:

(6) $\sigma_r(A) = \emptyset$

Entonces el espectro de un operador autoadjunto tiene la siguiente sencilla forma esquemática:



0.723. Sea T un operador cerrado con dominio $\mathcal{D}(T) \subset H$.

PROPOSICION. $\lambda \in C(T)$ si y sólo si λ es un autovalor de multiplicidad infinita o $\mathcal{R}(T-\lambda I) \neq \overline{\mathcal{R}(T-\lambda I)}$.

DEMOSTRACION. Si G_λ designa al autoespacio correspondiente a λ entonces $G_\lambda = \overline{G}_\lambda$. Sea $z \in \mathcal{D}(T)$, escribimos $z = x+y$ con $x \in G_\lambda$, $y \perp G_\lambda$. Entonces $y \in \mathcal{D}(T)$ y vale

(1) $\mathcal{D}(T) = G_\lambda \oplus [\mathcal{D}(T) \cap (H \ominus G(\lambda))]$.

Designemos la variedad entre corchetes con $\mathcal{D}(T')$ y definamos T' como la restricción de T a $\mathcal{D}(T')$. T' resulta ser cerrado y

(2) $(T'-\lambda I)\mathcal{D}(T') \longrightarrow \mathcal{R}(T-\lambda I)$

en forma biunívoca. Luego

(3) $$(T'-\lambda I)^{-1}: R(T-\lambda I) \longrightarrow \mathcal{D}(T').$$

Por el teorema del gráfico cerrado, $(T'-\lambda I)^{-1}$ está acotado si y sólo si $R(T-\lambda I) = \overline{R(T-\lambda I)}$.

Supongamos que λ no es un autovalor de multiplicidad ∞. Veremos que $\lambda \notin C(T)$ si y sólo si $(T'-\lambda I)^{-1}$ es acotado.

En efecto, si $\lambda \in C(T)$, sea $\{\varphi_n\}$ una sucesión característica normalizada, tal que $(T-\lambda I)\varphi_n \longrightarrow 0$. Escribiendo $\varphi_n = x_n+y_n$ con $x_n \in G_\lambda$, $y_n \in \mathcal{D}(T')$, vemos que $\{x_n\}$ es compacta; luego $\{y_n\}$ no lo es. Además $(T'-\lambda I)y_n = (T-\lambda I)\varphi_n \longrightarrow 0$, de donde sigue $(T'-\lambda I)^{-1}$ no es acotado. Recíprocamente, si $(T'-\lambda I)^{-1}$ no es acotado, existe $y_n \in \mathcal{D}(T')$ con $\|y_n\| = 1$ tal que $(T'-\lambda I)y_n = (T-\lambda I)y_n \longrightarrow 0$. Esta sucesión no puede ser compacta pues cualquier subsucesión convergente de ella convergería a un elemento de $G_\lambda \cap \mathcal{D}(T')$, o sea a 0. Luego $\lambda \in C(T)$. QED.

0.73. TEOREMA. El espectro de concentración de un operador cerrado es cerrado.

DEMOSTRACION. Veamos que el complemento de $C(T)$ es abierto. Sea $\lambda_o \notin C(T)$. Entonces, con la notación del párrafo anterior

(1) $$\mathcal{D}(T) = G_{\lambda_o} \oplus \mathcal{D}(T')$$

y

(2) $$(T-\lambda_o I)\mathcal{D}(T') \longrightarrow R(T-\lambda_o I) = \overline{R(T-\lambda_o I)}.$$

Luego existe cierta constante positiva k tal que

(3) $$\|(T-\lambda_o I)\varphi\| \geqslant 2k\|\varphi\| \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{D}(T').$$

Si $|\lambda-\lambda_o| < k$ sigue de (3) que

(4) $$\|(T-\lambda I)\varphi\| \geqslant k\|\varphi\| \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{D}(T').$$

de donde se ve que $(T-\lambda I)\mathcal{D}(T')$ es cerrado. Como dim G_{λ_o} es finita y de (1) resulta:

$$(T-\lambda I)\mathcal{D}(T) = R(T-\lambda I) = (T-\lambda I)\mathcal{D}(T') + (T-\lambda I)G_{\lambda_o}$$

sigue que $R(T-\lambda I)$ es cerrado.

De (4) se ve también que $\mathcal{D}(T') \cap G_\lambda = \{0\}$. Usando 0.61 sigue que dim $G_\lambda \leqslant$ dim G_{λ_o}, o sea $\lambda \notin C(T)$. QED.

0.741. De lo visto precedentemente se deduce la siguiente caracterización del espectro de concentración de un operador cerrado sin autovalores de multiplicidad infinita:

$$\lambda \in C(T) \iff (T'-\lambda I)^{-1} \text{ no es acotado} \iff \mathcal{R}(T-\lambda I) \neq \overline{\mathcal{R}(T-\lambda I)}$$

0.742. LEMA. Sea $\hat{T}$ una extensión cerrada de T. Entonces $C(\hat{T}) \supset C(T)$, $\sigma_p(\hat{T}) \supset \sigma_p(T)$ y $\sigma_r(\hat{T}) \subset \sigma_r(T)$.

(La demostración se deja al lector).

0.743. $\hat{T}$ es una extensión finita de T si $\dim (\mathcal{D}(\hat{T}) / \mathcal{D}(T)) < \infty$. Vale el siguiente

LEMA. Si $\hat{T}$ es una extensión finita de T entonces: $C(\hat{T}) = C(T)$.

DEMOSTRACION. $\hat{T}$ es una extensión cerrada de T (cf. 0.6) . Además (0.742) si $\lambda \in C(T)$ entonces $\lambda \in C(\hat{T})$. Supongamos ahora que $\lambda \notin C(T)$. λ no es un autovalor de multiplicidad infinita para $\hat{T}$ como se deduce enseguida del Corolario 0.61.
Como $(T-\lambda I)(\mathcal{D}(T))$ es un subespacio (Teorema 0.723), de la hipótesis: $\dim (\mathcal{D}(\hat{T}) / \mathcal{D}(T)) < \infty$ se deduce que $(\hat{T}-\lambda I)(\mathcal{D}(\hat{T}))$ es la suma directa de aquel subespacio con un subespacio de dimensión finita, y por lo tanto él también es cerrado. La proposición 0.723 implica entonces que $\lambda \notin C(\hat{T})$. Por lo tanto $C(T) = C(\hat{T})$. QED.

0.744. Obsérvese que los resultados sobre operadores cerrados demostrados en los párrafos 0.723 en adelante no exigen que el dominio del operador T sea denso en H. Esta densidad, en general, sólo se solicita para asegurar la existencia del adjunto T*.

0.75. TEOREMA DE H.WEYL. Sea A un operador autoadjunto y K un operador completamente continuo autoadjunto. Entonces

$$C(A) = C(A+K).$$

Hemos visto que si $\tilde{T}$ es una extensión finita del operador cerrado T entonces $C(\tilde{T}) = C(T)$. Este teorema difiere del anterior en que aquí estamos frente a una extensión y allá frente a una perturbación del operador en cuestión.

El teorema de H.Weyl es un caso particular del siguiente resultado.

0.751. TEOREMA. Sea $T = \bar{T}$ (= T^{**}) y K completamente continuo. Entonces

$$C(T+K) = C(T).$$

Para demostrar el teorema recurriremos a la siguiente interesante

PROPOSICION. De toda sucesión acotada no compacta $\{f_n\}$ es posible extraer una subsucesión $\{f_{n_j}\}$ tal que $\{g_j\}$, $g_j := f_{n_{j+1}} - f_{n_j}$, $j=1,2,\ldots$, es una sucesión no compacta.

DEMOSTRACION. Como $\{f_n\}$ no es compacta se deduce del criterio de Hausdorff de ε-redes que existe $\varepsilon > 0$ para el cual $\{f_n\}$ no admite una ε-red finita. Luego, es posible hallar una subsucesión $\{f_n^{(1)}\}$ de $\{f_n\}$ tal que

(1) $$\| f_n^{(1)} - f_m^{(1)} \| > \varepsilon \quad \text{si} \quad m \neq n.$$

Como todo conjunto acotado de un espacio de Hilbert es débilmente secuencialmente precompacto existe una subsucesión $\{f_n^{(2)}\}$ de $\{f_n^{(1)}\}$ débilmente convergente (H es débilmente secuencialmente completo). De aquí sigue que

(2) $$(f_{n+1}^{(2)} - f_n^{(2)}, h) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{para todo } h \in H.$$

Si una subsucesión de $\{f_{n+1}^{(2)} - f_n^{(2)}\}$ fuera fuertemente convergente entonces su límite fuerte coincidiría con su límite débil que es 0. Pero esto es imposible, como se ve de (1). QED.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA. Puesto que T es cerrado y K continuo también T+K es cerrado. El teorema quedará probado si demostramos que:

(3) $$\lambda \in C(T) \Rightarrow \lambda \in C(T+K).$$

$\lambda \in C(T)$ implica la existencia de una sucesión $\{f_n\}$ no compacta normalizada tal que $(T-\lambda I)f_n \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. La subsucesión débilmente convergente $\{f_n^{(2)}\}$ de la proposición precedente es transformada por K en una sucesión fuertemente convergente. Si $\{g_n = f_{n+1}^{(2)} - f_n^{(2)}\}$ es la sucesión no compacta de la proposición entonces

$$Kg_n = Kf_{n+1}^{(2)} - Kf_n^{(2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

En consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} \{(T+K)g_n - \lambda g_n\} = \lim_{n\to\infty} \{Tg_n - \lambda g_n\} = \lim_{n\to\infty} (T-\lambda I)(f_{n+1}^{(2)} - f_n^{(2)}) = 0.$$

O sea, $\lambda \in C(T+K)$. QED.

0.8. ESPECTRO PURAMENTE DISCRETO. Diremos que el espectro de un operador cerrado T es *puramente discreto* si consiste solamente de una cantidad numerable de autovalores de multiplicidad finita con un único punto de acumulación en el infinito.

El principal objetivo de esta sección es demostrar un lema auxiliar y un teorema debido a Rellich que se enuncian a continuación.

LEMA. Sea H un subespacio del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y A_o un operador cerrado tal que $\mathcal{D}(A_o) \subset H$ y $\mathcal{R}(A_o) \subset H$.

Sean A y B extensiones de A_o tales que

(1) $\mathcal{D}(A) \subset H$, $A: \mathcal{D}(A) \longrightarrow H$, $\dim(\mathcal{D}(A) / \mathcal{D}(A_o)) < \infty$,

(2) $\dim(\mathcal{D}(B) / \mathcal{D}(A_o)) < \infty$.

Si A es autoadjunto en H y B lo es en $\mathcal{H}$ entonces el espectro de A es puramente discreto si y sólo si el de B lo es.

TEOREMA. Sea A autoadjunto en $\mathcal{H}$ tal que para todo $f \in \mathcal{D}(A)$ vale $(Af,f) \geqslant \|f\|^2$. Entonces el espectro de A es puramente discreto si y sólo si $E = \{f \in \mathcal{D}(A): (Af,f) \leqslant 1\}$ es relativamente compacto.

0.81. A partir de este momento recurriremos cuando sea preciso al teorema espectral para operadores autoadjuntos acotados y no acotados, y a otros recursos de la teoría necesarios para la demostración del mismo, (cf. por ejemplo F.Riesz et B.Sz.-Nagy, Leçons d'Analyse Fonctionelle, (1953), Ch.VII, VIII, IX; o bien N.I.Achieser and I.M.Glasmann, Theorie der Linearen Operatoren in Hilbert-Raum, (1968), Kap.VI; o bien N.Dunford and J.T.Schwartz, Linear Operators, Part.II: Spectral Theory, Selfadjoint Operators in Hilbert Space, Ch.X, XII; etc.).

0.811. DEMOSTRACION DEL LEMA. Supongamos que $\sigma(A)$ es puramente discreto. Entonces $\sigma_c(A) = \emptyset$ $(= \sigma_r(A))$. Como A no posee autovalores de multiplicidad infinita, si $\lambda_1 \in C(A) \subset \sigma(A)$ entonces de 0.741 sigue que $(A'-\lambda_1 I)^{-1}$ no es acotado. Pero si $f \in \mathcal{D}(A) \cap (H \ominus G_{\lambda_1})$ tenemos

(1) $\quad \|(A'-\lambda_1 I)f\|^2 = \|(A-\lambda_1 I)f\|^2 = \sum_n |\lambda_n-\lambda_1|^2 . \|f_n\|^2$

donde f_n = proyección de f sobre G_{λ_n}. De (1) y $f_1 = 0$ obtenemos

(2) $\quad \|(A'-\lambda_1 I)f\|^2 = \sum_{n>1} |\lambda_n-\lambda_1|^2 . \|f_n\|^2 \geq \varepsilon \|f\|^2 \quad , \ \varepsilon > 0.$

Luego $(A'-\lambda_1 I)^{-1}$ es acotado, contradicción. En consecuencia $C(A) = \emptyset$. De 0.743 sigue ahora que $C(A_o) = \emptyset$. De 0.743 y la hipótesis sobre B sigue que $C(B) = \emptyset$. Como $B=B^*$, $\sigma(B) = \sigma_p(B)$, y los autovalores de $\sigma_p(B)$ no pueden ser de multiplicidad infinita ni acumularse en un punto. Hemos demostrado así que que el espectro de B es puramente discreto.

La misma demostración prueba la recíproca. QED.

0.82. DEMOSTRACION DEL TEOREMA. Si el operador A tiene espectro puramente discreto entonces

(1) $\quad$ para todo $f \in \mathcal{D}(A)$, $Af = \sum \lambda_j (f,e_j)e_j$, $\lambda_j \geq 1$, $Ae_j = \lambda_j e_j$.

Sea $B = A^{-1}$. Por hipótesis para todo $g \in \mathcal{D}(B)$, $(g,Bg) \geq \|Bg\|^2$, y por lo tanto: $\|Bg\| \leq \|g\|$. Es decir, 0 es un punto de tipo regular para A, y por lo tanto regular. Entonces B tiene dominio H, es acotado y autoadjunto. Luego $\{e_j\}$ es un sistema ortonormal completo y vale:

(2) $$Bh = \sum \frac{1}{\lambda_j} (h,e_j)e_j \quad \text{para todo } h \in H.$$

Es decir, B es un operador simétrico completamente continuo pues $\lambda_j = \overline{\lambda}_j$ y $1/\lambda_j \longrightarrow 0$ monótonamente si los λ_j se numeran adecuadamente: $\lambda_j \leq \lambda_{j+1}$. Lo mismo puede decirse de $B^{1/2}$:

(3) $$B^{1/2}h := \sum \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} (h,e_j)e_j .$$

Entonces, si S es la esfera unitaria de H, $B^{1/2}(S)$ es un conjunto relativamente compacto. Por otra parte,

(4) $$A^{1/2}f := \sum \sqrt{\lambda_j}\, (f,e_j)e_j \quad \text{para todo } f \in \mathcal{D}(A),$$

y vale:

(5) $$E = \{f \in \mathcal{D}(A) : \|A^{1/2}f\|^2 \leq 1\}.$$

Luego,

(6) $$F := A^{1/2}(E) \subset S \quad , \quad E = B^{1/2}A^{1/2}(E),$$

y E es también relativamente compacto.

Supongamos ahora esto último y veamos que A tiene espectro puramente discreto.

(7)
$$A = \int_1^\infty \lambda \, dP_\lambda$$

implica que

(8)
$$A^{1/2} := \int_1^\infty \sqrt{\lambda} \, dP_\lambda$$

es un operador autoadjunto tal que $\mathcal{D}(A^{1/2}) \supset \mathcal{D}(A)$, y con $A \supset A^{1/2}.A^{1/2}$. En consecuencia, $A = A^{1/2}.A^{1/2}$, (cf. Riesz-Sz.-Nagy, pgs.344-9).

Sea $g \perp A^{1/2}(\mathcal{D}(A)) = \{\mu h: h \in F, \mu \in C\}$. Como $A^{1/2}$ es semiacotado inferiormente por uno, 0 es un punto regular para él, y por lo tanto existe h tal que $g = A^{1/2}h$. Entonces $(g, A^{1/2}u) = 0$ para $u \in \mathcal{D}(A)$ implica $(h, Au) = 0$ para todo $u \in \mathcal{D}(A)$. Luego h=0 y por lo tanto g=0. Es decir, como $F = S \cap A^{1/2}(\mathcal{D}(A))$ resulta:

(9)
$$\overline{F} = S.$$

Por otra parte, $B = A^{-1}$ es autoadjunto y acotado (con dominio H y espectro contenido en [0,1]), lo mismo que $B^{1/2}$. Entonces $B^{1/2}(F)$ es relativamente compacto si y sólo si $B^{1/2}(S)$ es relativamente compacto. Como $B^{1/2} = A^{-\frac{1}{2}}$ resulta $E = B^{1/2}(F)$. Luego, $B^{1/2}(S)$ es relativamente compacto. En consecuencia, $B^{1/2}$ y B son completamente continuos y autoadjuntos. De las propiedades del espectro de B sigue ahora que $A = B^{-1}$ es de espectro puntual (contenido en $[1,\infty)$), sin punto de acumulación y tal que todo autovalor posee multiplicidad finita. QED.

0.9. MISCELANEA. Sea T un operador lineal simétrico. Si T es autoadjunto y

(1)
$$\sup_{\substack{\|f\|=1, \\ f \in \mathcal{D}_T}} |(Tf,g)| < \infty$$

entonces $|(Tf,g)| \leqslant K.\|f\|$ para todo $f \in \mathcal{D}_T$, K = cte. Por lo tanto existe g* tal que $(Tf,g) = (f,g^*)$ para todo $f \in \mathcal{D}_T$. Como el dominio de T es denso en H, g* es única. Es decir, $g \in \mathcal{D}_{T^*}$, y $T^*g = g^*$. Pero $T^* = T$, de donde sigue que (1) implica $g \in \mathcal{D}_T$. Vale entonces la siguiente caracterización del dominio de un operador autoadjunto.

PROPOSICION. Sea $T \subset T^*$. $T = T^*$ si y sólo si

$$\sup_{\substack{\|f\|=1,\\ f \in \mathcal{D}_T}} |(Tf,g)| < \infty \Rightarrow g \in \mathcal{D}_T.$$

0.91. S designará en este párrafo a un operador lineal acotado en H.

PROPOSICION. $S^*(H) = H \Rightarrow R(S) = \overline{R(S)}$.

DEMOSTRACION. Es suficiente demostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que

(2) $\qquad \|Sf\| \geqslant \varepsilon \|f\|$ para todo $f \in H$.

Veamos esto último. S^* establece una correspondencia biunívoca y bicontinua entre $H \ominus S^{*-1}(0)$ y H. Por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que

(3) $\qquad \varepsilon\|S^*g\| \leqslant \|g\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|S^*g\|$ para todo $g \in H \ominus S^{*-1}(0)$.

Sea $f \in H$, $\|f\| = 1$. Entonces $\|Sf\| = \sup_{\|g\|=1} |(f,S^*g)|$. Si elegimos g de manera que $S^*g = \eta f$ resulta:

$$\|Sf\| \geqslant |\eta| . \|f\|^2 = |\eta| .$$

Por otra parte: $\|g\| = 1 \leqslant \|\eta f\|/\varepsilon$, de donde sigue que $\varepsilon \leqslant |\eta|$. Luego

$$\|Sf\| \geqslant \varepsilon \quad \text{para todo } f \in H, \|f\| = 1. \text{ QED.}$$

REFERENCIAS. [19], [16], [6]; los textos citados en 0.81;
T. Kato, "Perturbation theory for linear operators", (1966);
R. M. Young, "An introduction to nonharmonic Fourier series", (1980).

CAPITULO 1

INTRODUCCION.

1.1. EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE. Consideremos la ecuación diferencial (de Sturm-Liouville):

(1) $(p(x)u'(x))' + (\lambda r(x)-q(x))u(x) = 0 \quad , \quad -\infty < a \leqslant x \leqslant b < \infty ,$

donde $\lambda \in C$ (es decir, es un número complejo), p,r y q son funciones reales continuas en $[a,b]$, lo mismo que $p'(x)$. Supongamos además que $r(x) > 0$ en $[a,b]$ y $p(x) > 0$ en (a,b). Sea ℓ la expresión diferencial:

(2) $$\ell(u) := -(pu')' + qu.$$

Entonces (1) puede escribirse de la siguiente manera:

(3) $$Tu = \lambda u$$

donde T se define así:

(4) $$Tu := \ell(u)/r = \frac{1}{r(x)} (-(pu')'+qu).$$

T aplica linealmente $C^2([a,b])$ en $C([a,b])$. Designaremos con H al espacio de Hilbert de las funciones u medibles Lebesgue definidas en $[a,b]$ tales que:

(5) $$\|u\|_H^2 := \int_a^b |u(x)|^2 . r(x)dx < \infty.$$

Las funciones dos veces continuamente diferenciables nulas en sendos entornos de a y b, son densas en este espacio. Introduzcamos ahora las funcionales de contorno:

(6) $$R_i(u) := \alpha_{i1}u(a) + \alpha_{i2}u'(a) + \beta_{i1}u(b) + \beta_{i2}u'(b) \quad , \quad i=1,2,$$

donde α_{ij} y $\beta_{ij} \in R$, (i.e., son números reales) y tales que la matriz:

(7) $$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$$

tiene rango 2.

Denotemos con $\mathcal{D}_T$ al conjunto:

(8) $$\mathcal{D}_T = \{u \in C^2([a,b]): R_i(u) = 0 \ , \ i=1,2\}.$$

Entonces $T: \mathcal{D}_T \longrightarrow H$ define un operador en H de dominio $\mathcal{D}_T$ denso en H para el cual las funciones no triviales que satisfacen (1) son exacta mente, y por definición, las *autofunciones* correspondientes al autovalor λ:

(9) $$Tu = \lambda u$$

El problema de Sturm-Liouville consistirá para nosotros en el estudio del operador T. Este es un operador *real* pues verifica:

(10) $$u \in \mathcal{D}_T \;\Rightarrow\; \bar{u} \in \mathcal{D}_T \;\text{ y }\; T\bar{u} = \overline{Tu}.$$

Desarrollando el término $(pu')'$ en la ecuación (1) obtenemos

(11) $$p(x).u''(x) + p'(x)u'(x) + (\lambda r(x)-q(x))u = 0 \quad , \quad a \leqslant x \leqslant b \;,$$

y si llamamos D a la expresión diferencial en (a,b):

(12) $$D := \frac{d}{dx^2} + P(x)\,\frac{d}{dx} + Q(x)$$

donde en este caso: $P(x) = p'(x)/p(x)$, $Q(x) = [\lambda r(x)-q(x)]/p(x)$ resulta:

(13) $$Du = u'' + P(x).u' + Q(x)u \quad , \quad a < x < b.$$

Entonces u es solución de la ecuación diferencial (1) en (a,b) si y sólo si $Du = 0$. A su vez esta ecuación es equivalente al sistema:

(14) $$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q & -P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \;, \quad \text{o sea,} \quad \begin{cases} u' = v \\ v' = -P(x)v - Q(x)u \end{cases}$$

1.11. TEOREMA. Dado el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

(1) $$\begin{cases} u_1'(x) = a_{11}(x)u_1(x) + a_{12}(x)u_2(x) + b_1(x) \\ u_2'(x) = a_{21}(x)u_1(x) + a_{22}(x)u_2(x) + b_2(x) \;, \end{cases}$$

donde las funciones a valores complejos $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $1 \leqslant i,j \leqslant 2$, son continuas en $[c,d]$, para todo par de números complejos (c_1,c_2) existe exactamente una solución en ese intervalo tal que $u_1(x_o) = c_1$, $u_2(x_o) = c_2$ cualquiera sea $x_o \in [c,d]$.

Aplicando este resultado al sistema 1.1(14) obtenemos:

COROLARIO. Para todo par de números reales (c_1,c_2) existe una única solución del sistema 1.1(14) tal que $u(x_o) = c_1$, $v(x_o) = c_2$, $x_o \in (a,b)$. Esta solución es real si λ es real.

En efecto, el Corolario sigue del Teorema por prolongación de la solución.

1.12. La proposición precedente dice que la ecuación $Du = 0$ tiene exactamente una solución $u(x)$ tal que si $x_o \in (a,b)$ entonces $u(x_o) = c_1$, $u'(x_o) = c_2$ para todo par de números reales (c_1,c_2). Podemos entonces encontrar soluciones $u_1(x)$, $u_2(x)$ de $Du = 0$ tales que $u_1(x_o) = 1$, $u_1'(x_o) = 0$, $u_2(x_o) = 0$, $u_2'(x_o) = 1$. Tales soluciones son linealmente independientes y forman una base para las soluciones de la ecuación $Du = 0$.

DEFINICION. Un par de soluciones (u_1,u_2) de la ecuación diferencial de segundo orden $Du = 0$ se dice un *sistema fundamental* de soluciones si ellas generan toda otra solución de dicha ecuación, es decir, si para toda solución $u(x)$ es posible determinar constantes C_1 y C_2 tales que $u(x) = C_1u_1(x)+C_2u_2(x)$.

1.2. HIPOTESIS DE REGULARIDAD Y ECUACION CARACTERISTICA.

Consideremos el problema:

(1) $\quad (x^2u')'+\lambda u = 0 \quad , \quad u(1) = 0 \quad , \quad 0 < x \leqslant 1 \quad , \quad \lambda \neq 1/4.$

Salvo por un factor constante, la solución es

$$x^{-\frac{1}{2}} . \operatorname{sen} \left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}} . \lg x\right).$$

Esta función no es acotada en $x=0$ y no podra suponerse una condición de borde allí del tipo 1.1(6) si queremos tener soluciones no triviales para algún λ real. Por eso convendremos en que la función $p(x)$ sea *positiva en todo el intervalo* $[a,b]$, hasta tanto no afirmemos lo contrario.

Volvamos ahora al problema $Tu = \lambda u$ con las condiciones de contorno $R_i(u) = 0$, $i=1,2$. Si $(u_1(x),u_2(x))$ es un sistema fundamental y $u(x)$ es una solución no trivial de la ecuación $Du = 0$ (ahora equivalente a la ecuación $Tu = \lambda u$ en $[a,b]$) para que

$u \in \mathcal{D}_T = \{u \in C^2([a,b]) : R_i(u) = 0 \ , \ i=1,2\}$ debe ser:

$$(2)\qquad \begin{cases} R_1(u) = c_1R_1(u_1) + c_2R_1(u_2) = 0 \\ R_2(u) = c_1R_2(u_1) + c_2R_2(u_2) = 0 \end{cases}$$

El teorema 1.11 asegura ahora que las soluciones de $Tu = \lambda u$ están definidas para todo x, $a \leqslant x \leqslant b$.

Como $|c_1| + |c_2| \neq 0$, el determinante de este sistema debe anularse. Puesto que las soluciones u_i, $i=1,2$, dependen de λ, lo mismo ocurrirá con ese determinante. Si

$$(3)\qquad \Delta(\lambda) := \begin{vmatrix} R_1(u_1) & R_1(u_2) \\ R_2(u_1) & R_2(u_2) \end{vmatrix},$$

tenemos entonces el siguiente:

TEOREMA. λ es autovalor del operador T si y sólo si $\Delta(\lambda) = 0$.

$\Delta(\lambda) = 0$ es la *ecuación característica* para el problema $Tu = \lambda u$, $u \in \mathcal{D}_T$, y sus raíces son los autovalores del problema de contorno.

1.21. Supondremos, salvo indicación en contrario, que el sistema fundamental $(u_1(x,\lambda),\ u_2(x,\lambda))$ utilizado en el cálculo de $\Delta(\lambda)$ satisface condiciones iniciales fijas en un punto de $[a,b]$ cualquiera sea λ. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix}\left(\frac{a+b}{2}, \lambda\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{para todo } \lambda.$$

Si tuviéramos otro sistema fundamental $(v_1(x), v_2(x))$ - para un λ fijo - existiría una matriz no singular C tal que

$$(1)\qquad \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{para todo } x.$$

Por otra parte:

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} R_1(u_1) & R_1(u_2) \\ R_2(u_1) & R_2(u_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1'(a) & u_2'(a) \\ u_1(b) & u_2(b) \\ u_1'(b) & u_2'(b) \end{pmatrix}.$$

Luego:

$$(3) \qquad \begin{pmatrix} R_1(v_1) & R_1(v_2) \\ R_2(v_1) & R_2(v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1(u_1) & R_1(u_2) \\ R_2(u_1) & R_2(u_2) \end{pmatrix} . C^t \ ;$$

$$\Delta(v,\lambda) = \Delta(u,\lambda).\det C.$$

Es decir, los autovalores no cambian al sustituir un sistema fundamental por otro, pero sí lo hace la función característica.

Designemos con $\sigma_p(T)$ al conjunto de los autovalores del operador T.

EJEMPLO. $\qquad Tu = -u'' \quad , \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

α) $u(0)+u(\pi) = 0 \quad , \quad u'(0)-u'(\pi)=0 \Rightarrow \sigma_p(T) = C$,

β) $u(0)+2.u(\pi) = 0 \quad , \quad u'(0)-2.u'(\pi) = 0 \Rightarrow \sigma_p(T) = \emptyset$,

γ) $u(0)-u(\pi) = 0 \quad , \quad u'(0)-u'(\pi) = 0 \Rightarrow \sigma_p(T) = \{4j^2 : j=0,1,2,\ldots\}$,

δ) $\begin{cases} u(0) = 0 \quad , \quad u(\pi) = 0 \Rightarrow \sigma_p(T) = \{j^2 ; j=1,2,\ldots\} , \\ u'(0) = 0 \quad , \quad u'(\pi) = 0 \Rightarrow \sigma_p(T) = \{j^2 ; j=0,1,2,\ldots\} , \end{cases}$

ε) $u(0)+u(\pi) = 0 \quad , \quad u'(0)+u'(\pi) = 0 \Rightarrow \sigma_p(T) = \{(2j-1)^2 ; j=1,2,\ldots\}$.

EJERCICIO. Si $\mu \notin \sigma_p(T)$ existe un sistema fundamental (u_1,u_2) tal que $R_1(u_1) = R_2(u_2) = 0$, $R_1(u_2) = R_2(u_1) = 1$.

1.22. Uno de los objetivos que se persiguen en la teoría de Sturm-Liouville es el de desarrollar funciones u(x) que verifican las condiciones de contorno en serie de autofunciones correspondientes a los autovalores del operador T. Un ejemplo notable se tiene en las series de Fourier y hay casos en que un teorema de desarrollo puede obtenerse recurriendo a esa teoría. Sea $Tu = -u''$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $R_1(u) := u(0) = 0$, $R_2(u) := u(\pi) = 0$. Entonces $\sigma_p(A) = \{j^2 : j=1,2,\ldots\}$ y la familia de autofunciones es

$$(1) \qquad \{\text{sen } jx : j=1,2,3,\ldots\}.$$

Este sistema es ortogonal en $[0,\pi]$ y al ser normalizado da lugar al sistema *ortonormal en* $[0,\pi]$:

$$(2) \qquad \{\varphi_j(x) := \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \text{ sen } jx\}.$$

Sea $v(x)$, $x \in [0,\pi]$, una función real continua de variación acotada tal que $v(0) = v(\pi) = 0$. Podemos definir en $[-\pi,\pi]$ una función impar $u(x)$ de la siguiente manera:

$$u(x) = \begin{cases} v(x) & , \quad x \in [0,\pi] \\ -v(-x) & , \quad x \in [-\pi,0] \end{cases}$$

Por ser $u(x)$ impar admite un desarrollo en serie de Fourier de senos:

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \text{ sen } jx \quad , \quad \text{donde}$$

$$b_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t) \text{ sen } jt \, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t) \text{ sen } jt \, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(t) \text{ sen } jt \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi} v(t).\sqrt{\frac{2}{\pi}}. \text{ sen } jt \, dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi} v(t).\varphi_j(t) \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (v,\varphi_j).$$

Luego, $v(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (v,\varphi_j)\, \varphi_j$, para todo $x \in [0,\pi]$.

1.3. SOLUCIONES DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN $Du = 0$.

Sea $D := \frac{d^2}{dx^2} + P(x). \frac{d}{dx} + Q(x)$ con P y Q reales y continuas en $a \leqslant x \leqslant b$. Dadas las funciones derivables $f(x)$ y $g(x)$ definimos el Wronskiano de f y g como el determinante

$$W(x) = W(f,g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

TEOREMA. Sean $u_1(x)$ y $u_2(x)$ soluciones de $Du = 0$. Entonces $W(u_1,u_2)(x_o) = 0$ implica $W(u_1,u_2)(x) \equiv 0$

DEMOSTRACION. En efecto, por ser u_i, $i=1,2$, soluciones de $Du = 0$ tenemos

$$0 = u_1Du_2 - u_2Du_1 = u_1u_2'' - u_2u_1'' + P(u_1u_2' - u_2u_1')$$

y por lo tanto,

$$\frac{d}{dx} W(u_1,u_2)(x) = -P(x).W(u_1,u_2)(x),$$

cuya solución es:

$$W(x) = W(x_o).e^{-\int_{x_o}^{x} P(t)dt} .$$

Como $e^{-\int_{x_o}^{x} P\,dt} > 0$ para todo x sigue $W(x_o) = 0$ sii $W(x) \equiv 0$, QED.

Aplicando este resultado a 1.1(12) obtenemos:

PROPOSICION. Para la ecuación diferencial de Sturm-Liouville se verifica:

$$W(x).p(x) = W(x_o).p(x_o) \quad \text{para todo } x \in [a,b].$$

DEMOSTRACION. En efecto,

$$\int_{x_o}^{x} P(t)\,dt = \int_{x_o}^{x} \frac{p'(t)}{p(t)}\,dt = \ln\left(\frac{p(x)}{p(x_o)}\right) ,$$

y $W(x) = W(x_o).p(x_o)/p(x)$, QED.

EJERCICIOS. 1) Demostrar que si $(u_1(x),u_2(x))$ es un sistema fundamental para la ecuación $Du = 0$ entonces $W(u_1,u_2) \neq 0$ para todo x. Recíprocamente, $Du_i = 0, i = 1,2$, $W(u_1,u_2) \neq 0 \Rightarrow (u_1,u_2) \in$ Sist. Fundamental.

2) Como los coeficientes P y Q son reales podemos siempre suponer que el sistema fundamental es real.

3) Sea $x \in [-1,1]$, $f(x) = x^3$, $g(x) = |x|^3$. Entonces $W(f,g) \equiv 0$ pero no existe una constante C tal que $f = Cg$.

4) Sean f y $g \in C^2([-1,1])$ y soluciones linealmente independientes de $Du = 0$. Entonces ambas resuelven la ecuación diferencial de 2° orden

$$\begin{vmatrix} f & f' & f'' \\ g & g' & g'' \\ u & u' & u'' \end{vmatrix} = 0 .$$

5) Si f(x) y g(x) son funciones analíticas en [-1,1] entonces son linealmente dependientes si y sólo si $W(f,g) \equiv 0$.

(Sug.: Sea x_o tal que $f(x_o) \neq 0 \neq g(x_o)$. Entonces

$$\begin{vmatrix} f(x_o) & g(x_o) \\ f^{(j)}(x_o) & g^{(j)}(x_o) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{para todo } j).$$

1.31. Dado el sistema fundamental (u_1,u_2) de $Du = 0$ denominaremos *núcleo de Green* a la función:

$$G(x,y) = \frac{u_1(x)u_2(y) - u_2(x)u_1(y)}{W(u_1,u_2)(y)} \tag{1}$$

Sea $h(x) \in C([a,b])$. Toda solución de la ecuación diferencial $D(u) = h$ es de la forma

$$u(x) = c_1u_1 + c_2u_2 + u_I(x) \tag{2}$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias y $u_I(x)$ es una solución particular de $Du = h$ que determinaremos a continuación.

TEOREMA. Sean x_o y $x \in [a,b]$, y

$$u_I(x) = -\int_{x_o}^{x} G(x,y)\ h(y)\ dy. \tag{3}$$

Entonces $Du_I = h$, $u_I(x_o) = u_I'(x_o) = 0$.

DEMOSTRACION. Derivando u_I obtenemos:

$$u_I'(x) = -\int_{x_o}^{x} \frac{u_1'(x)u_2(y) - u_2'(x)u_1(y)}{W(y)}\ h(y)\ dy \quad ,$$

$$u_I''(x) = -\int_{x_o}^{x} \frac{u_1''(x)u_2(y) - u_1(y)u_2''(x)}{W(y)}\ h(y)dy + \frac{W(x)}{W(x)}\ h(x).$$

Luego:

$$u_I'' + P.u_I' + Q.u_I = h(x) - \int_{x_o}^{x} \frac{u_2(y).Du_1(x) - u_1(y).Du_2(x)}{W(y)}\ h(y)dy = h(x), \text{ QED.}$$

1.32. TEOREMA. Sea $\lambda \in C$ y $A = T-\lambda I$ donde T es el operador de Sturm-Liouville definido por 1.1(4) (con $p(x) > 0$ en $[a,b]$) y $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_T$. Entonces:

i) A es biunívoco si y sólo si $\lambda \notin \sigma_p(T)$,

ii) si $\lambda \notin \sigma_p(T)$ entonces $R(A) = C([a,b])$.

DEMOSTRACION. i) sigue de la definición de autovalor.

ii) Dado $u \in \mathcal{D}_T$, obviamente $Au \in C([a,b])$. Sea ahora $f(x)$ continua en

$a \leqslant x \leqslant b$ y D el operador definido en 1.1(12). Entonces, $Au = (T-\lambda I)u = f$ si y sólo si

$$Du = h = -fr/p.$$

Aplicando el teorema 1.31 hallamos la solución general de esta última ecuación:

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + u_I(x).$$

Veamos que pueden encontrarse constantes c_1 y c_2 de manera que $u \in \mathcal{D}_T$. Consideremos el sistema:

$$c_1 R_1(u_1) + c_2 R_1(u_2) = -R_1(u_I) ,$$
$$c_1 R_2(u_1) + c_2 R_2(u_2) = -R_2(u_I).$$

Como $\lambda \notin \sigma_p(T)$ es $\Delta(\lambda) = R_1(u_1)R_2(u_2) - R_1(u_2)R_2(u_1) \neq 0$, y el sistema admite solución única. QED.

1.33. Consideremos la forma diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ con M y N continuas en una región simplemente conexa del plano (x,y). La forma diferencial se dice *exacta* si existe una función continuamente diferenciable u(x,y) tal que $du = Mdx + Ndy$, es decir, $u_x = M$, $u_y = N$.
Llamaremos *factor integrante* de $Mdx + Ndy$ a una función $\mu(x,y)$, continua, no nula, para la cual $\mu(Mdx + Ndy)$ es exacta.
Sean p y q continuas y $\widetilde{P}(x)$ una primitiva de p:

$$\widetilde{P}(x) = \int_{x_o}^{x} p(t)\, dt ,$$

y consideremos la ecuación: $y' = -p(x)y - q(x)$. La forma diferencial (no exacta) $dy + (p(x)y + q(x))dx = 0$ admite como factor integrante a

$$e^{\widetilde{P}(x)} .$$

En efecto:

$$e^{\widetilde{P}(x)}[(dy + yp(x)dx) + q(x)dx] =$$

$$= d(e^{\widetilde{P}(x)}y) + d\left(\int_{x_o}^{x} e^{\widetilde{P}(t)}q(t)dt\right) = d(u(x,y))$$

Luego si

$$u(x,y) = e^{\widetilde{P}(x)}y + \int_{x_o}^{x} e^{\widetilde{P}(t)}q(t)\, dt = C = \text{cte}.$$

Resulta:

(1) $$y(x) = C.e^{-\widetilde{P}(x)} - e^{-\widetilde{P}(x)}.\int_{x_o}^{x} e^{\widetilde{P}(t)}\, q(t)\, dt.$$

$y(x)$ es la solución de $y'+py+q = 0$ en $a \leqslant x_o, x \leqslant b$ tal que en x_o toma el valor $C.\exp(-\widetilde{P}(x_o))$.

Sea ahora $Dy = y'' + P(x)y' + Q(x)y$, P y Q continuas y reales en $[a,b]$. Vale entonces la siguiente:

PROPOSICION. Sea $f(x) > 0$ en $[a,b]$, solución de $Dy = 0$. Entonces

(2) $$g(x) = f(x)\int_a^x e^{-\int_a^t \left(2\frac{f'(y)}{f(y)} + P(y)\right)dy}\, dt$$

es una solución de $Dy = 0$ linealmente independiente de $f(x)$.

DEMOSTRACION. Sabemos que para que f y g sean soluciones linealmente independientes de $Du = 0$ debe ser $W(f,g)(x) \neq 0$, $x \in [a,b]$, y también sabemos que:

$$W(x) = W(a)\, e^{-\int_a^x P(t)dt}.$$

Entonces, en este caso tendremos:

(3) $$W(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = W(a).e^{-\int_a^x P(t)dt}, \text{ o sea}$$

(4) $$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}\, g(x) + \frac{W(a)}{f(x)}\, e^{-\int_a^x P(t)dt}.$$

Resolvamos esta ecuación diferencial para $g(x)$ en el caso $W(a) = 1$.

Aplicando (1) con $p = -f'/f$,

$$q = -(1/f(x)).\exp(-\int_a^x P(t)dt)$$

obtenemos:

$$g(x) = e^{\int_a^x \frac{f'}{f}dt}\left[C + \int_a^x e^{-\ln\left(\frac{f(t)}{f(a)}\right)} \cdot \frac{1}{f(t)} \cdot e^{-\int_a^t P(y)dy}\, dt\right]$$

Tomando $C=0$, y multiplicando por $f^2(a)$, obtenemos:

$$g(x) = f(x).f^2(a)\int_a^x \frac{e^{-\int_a^t P(y)dy}}{f(t)^2}\, dt =$$

$$= f(x).\int_a^x e^{-\int_a^t \left(2\frac{f'(y)}{f(y)} + P(y)\right)dy} dt = f(x).v(x).$$

Como $g = f.v$ resulta:

(5) $$D(g) = v'.(2f'+Pf) + f.v''.$$

Luego, $D(g) = 0$ sii $v'' + (2\frac{f'}{f} + P).v' = 0$, lo cual es cierto; $g(x)$ es linealmente independiente de $f(x)$ pues $g(a) = 0$ y $g(x) \not\equiv 0$. QED.

1.34. Sea $w(x) = u'(x)/u(x)$ y donde

(1) $$D(u) \equiv u'' + Pu' + Qu = 0.$$

$w(x)$ satisface la ecuación de primer orden no lineal:

(2) $$w'(x) + w^2(x) + P(x)w(x) + Q(x) = 0.$$

Esta es la llamada *ecuación de Ricatti* asociada a (1). Recíprocamente, si w es solución de (2) y u satisface la ecuación:

(3) $$u'(x) = w(x).u(x) ,$$

o sea, si $u = C.e^{\int w\,dx}$ entonces u es solución de (1). Así, el problema de resolver la ecuación de segundo orden (1) se reduce a la integración de una ecuación de primer orden no lineal y a una cuadratura.

1.4. TEOREMA DE SEPARACION DE STURM. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial de 2do. orden $Du = 0$. Entonces $f(x)$ se anula estrictamente entre dos ceros consecutivos de $g(x)$.

DEMOSTRACION. En efecto, sean x_1 y x_2 tales que $g(x_1) = 0 = g(x_2)$, $x_1 < x_2$, $g(x) \neq 0$ para todo $x \in (x_1,x_2)$. Por ser $f(x),g(x)$ soluciones linealmente independientes de $Du = 0$, es $W(f,g) \neq 0$. Ahora bien, $W(f,g) = f(x_1).g'(x_1) \neq 0$ implica $f(x_1) \neq 0$, $g'(x_1) \neq 0$. Análogamente, $f(x_2) \neq 0$, $g'(x_2) \neq 0$, y necesariamente $g'(x_1)$ y $g'(x_2)$ tienen signos opuestos pues $g(x) \neq 0$ en (x_1,x_2). Como W mantiene el signo sigue que $f(x_1).f(x_2) < 0$. Luego $\exists\, x_3 \in (x_1,x_2)$ tal que $f(x_3) = 0$, QED.

1.5. TEOREMA DE COMPARACION DE STURM. Sean $f(x), g(x)$ soluciones no triviales de las ecuaciones

(1) $\quad u''+M(x).u = 0 \quad , \quad u''+m(x).u = 0 \quad , \quad M,m \in C([a,b]) \quad ,$

respectivamente, siendo $M(x) \geqslant m(x)$ para todo x. Entonces, o bien $f(x)$ se anula estrictamente entre dos ceros consecutivos de $g(x)$, $x_1 < x_2$, o bien, $M(x) = m(x)$ para todo $x \in (x_1,x_2)$ y allí $f(x) = k.g(x)$.

DEMOSTRACION. Supongamos $g(x_1) = g(x_2) = 0$, $g(x) > 0$ en (x_1,x_2). Si $f(x) \neq 0$ para todo $x \in (x_1,x_2)$, podemos suponer $f(x) > 0$. Entonces: $W(f,g)(x_1) = f(x_1).g'(x_1) \geqslant 0$, $W(f,g)(x_2) = f(x_2).g'(x_2) \leqslant 0$. Además: $\frac{dW}{dx} = f(x).g(x)(M(x)-m(x)) \geqslant 0$. En consecuencia, $W(f,g) = 0$ en $[x_1,x_2]$ y $M(x) = m(x)$ en ese intervalo. Luego f y g son linealmente dependientes en $[x_1,x_2]$, QED.

EJERCICIOS. 1) Si $f'' + (\lambda-q(x))f = 0$, $g'' + (\mu-q(x))g = 0$, q continua y $\lambda > \mu$, entonces f se anula estrictamente entre dos ceros consecutivos de g.

2) Consideremos la ecuación $u''+q(x)u = 0$ con $q \in C([a,b])$, $0 \not\equiv q(x) \leqslant 0$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces toda solución no trivial de esta ecuación tiene a lo sumo un cero en (a,b).

3) Consideremos la ecuación de Bessel:

$$v'' + \left(1 - \frac{4n^2-1}{x^2}\right) v = 0 \quad , \quad 0 < x < +\infty.$$

a) Si n=0 cada intervalo de longitud π contenido en $(0,\infty)$ contiene por lo menos un cero de toda solución de esta ecuación.

b) Si $n > \frac{1}{2}$ cada intervalo de longitud π contenido en $(0,\infty)$ contiene a lo sumo un cero de toda solución no trivial de esta ecuación.

(Sugerencia: en ambos casos comparar con $v''+v = 0$).

1.6. METODO DE NORMALIZACION DE LIOUVILLE. El problema que nos ocupa en esta sección consiste en transformar una ecuación de la forma

(1) $\quad (pu')' + (\lambda r-q)u = 0 \quad , \quad a \leqslant x \leqslant b \quad , \quad \lambda \in C \quad ,$

en otra "equivalente" y de la forma

(2) $\quad v''(y) + (\lambda-Q(y))v(y) = 0 \quad , \quad A \leqslant y \leqslant B \quad ,$

a la cual se denomina *forma normal de Liouville*. Nosotros designaremos con este nombre una clase más amplia: a la de las ecuaciones de la for ma:

(3) $$w''(y) + (\lambda K(y)-Q(y))w(y) = 0.$$

La ecuación (2) es un caso particular de (3) y la denominaremos la *forma estándar* (de Liouville).

1.61. Dada la ecuación diferencial de segundo orden

(1) $$a(X)\,\frac{d^2Z}{dX^2} + b(X)\,\frac{dZ}{dX} + (\lambda - c(X))Z = 0$$

podemos reducirla a la forma

(2) $$\frac{d^2Y}{dx^2} + \beta(x)\,\frac{dY}{dx} + (\lambda - \gamma(x))Y = 0$$

con el cambio de variable independiente

(3) $$x = \int \frac{dX}{\sqrt{a(X)}} \quad ,$$

y donde $Y(x) := Z(X(x))$. Para que esta transformación pueda realizarse basta suponer:

(4) $$0 < a(X) \in C^1 \quad , \quad 1/\sqrt{a(X)} \text{ sumable} \quad , \quad b(X) \text{ y } c(X) \in C.$$

Entonces tendremos:

(5) $$\beta(x) = \frac{b(X) - a'(X)/2}{\sqrt{a(X)}} \quad , \quad \gamma(x) = c(X).$$

(3) define un cambio de variable biyectivo y dos veces continuamente diferenciable. Esto implica que β y γ son funciones continuas.

1.62. La ecuación (2) del párrafo precedente:

$$\frac{d^2Y}{dx^2} + \beta(x)\,\frac{dY}{dx} + (\lambda - \gamma(x))Y = 0$$

puede ser reducida a la forma estándar con el siguiente cambio de variable dependiente:

(1) $$Y(x) = s(x).y(x) \quad , \quad s(x) = e^{-\frac{1}{2}\int \beta(x)\,dx} .$$

En efecto, esto implica que $2s'+\beta s = 0$, lo cual da lugar a:

(2) $$\frac{d^2y}{dx^2} + (\lambda - Q(x))y = 0 \ ,$$

(3) $$Q(x) = \frac{\beta^2(x)}{4} + \frac{\beta'(x)}{2} + \gamma(x) .$$

Para esto es suficiente suponer:

(4) $$\beta \in C^1 \quad , \quad \gamma \in C.$$

Y si partimos de la ecuación (1) del párrafo precedente basta asumir:

(5) $$a \in C^2 \ , \ b \in C^1 \ , \ c \in C \ , \ a > 0 \ , \ 1/\sqrt{a} \ \text{sumable.}$$

De (1), y 1.61(3) y (5) sigue, cuando $b(X) = a'(X)$, que:

(6) $$e^{\frac{1}{2}\int \beta(x)dx} = \sqrt[4]{a(X)} .$$

1.63. Supongamos que $p(x), q(x), r(x)$ y $p'(x)$ sean continuas en $[a,b]$, $p(x)$ y $r(x)$ positivas para todo x y $(p(x).r(x))''$ exista y sea continua en $[a,b]$. Sea $x_o \in [a,b]$. Si

(1) $$y = \int_{x_o}^{x} \left(\frac{r(t)}{p(t)}\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

entonces $y = y(x)$ es una función continuamente diferenciable y estrictamente monótona creciente que varía de A a B mientras x lo hace entre a y b. Sea

(2) $$v(y) = u(x).\sqrt[4]{r(x).p(x)} .$$

Denotaremos con primas las derivadas respecto x: $\frac{dg}{dx} = g'(x)$, y con puntos las respecto y: $\frac{dh}{dy} = \dot{h}(y)$. Pongamos:

(3) $$f(x) = \sqrt[4]{r(x).p(x)} .$$

Sea:

(4) $$Q(y) = \frac{\ddot{f}}{f} + \frac{q}{r} .$$

TEOREMA. $v(y)$ es solución del problema $\ddot{v} + (\lambda - Q(y))v = 0$ en $[A,B]$ si y sólo si u es solución de $(pu')' + (\lambda r - q)u = 0$ en $[a,b]$. Además $v(A) = 0$ $(v(B) = 0)$ si y sólo si $u(a) = 0$ $(u(b) = 0)$.

DEMOSTRACION. Como $v(y(x)) = f(x).u(x)$ tenemos:

$$(5) \qquad \begin{cases} \dot{v} = u' . \sqrt{p/r} . f + u.\dot{f} , \\ \ddot{v} = u''.f.p/r + u'[\frac{d}{dy} (f \sqrt{p/r}) + \dot{f}. \sqrt{p/r}] + u.\ddot{f} \end{cases}$$

Entonces:

$$\ddot{v} + (\lambda-Q)v = u''pf/r + u' [\frac{d}{dy} (f \sqrt{p/r}) + \sqrt{p/r}\ \dot{f}] + (\lambda-q/r)uf.$$

Además:

$$(6) \qquad \frac{d}{dy} (f \sqrt{p/r}) = \frac{d}{dy} (\frac{\sqrt{p}\sqrt{p}}{\sqrt{pr}} f) = \frac{d}{dy} (p/f) = \frac{\dot{p}f - \dot{f}p}{f^2} ,$$

$$\ddot{v} + (\lambda-Q)v = u'' \frac{pf}{r} + u'[\frac{\dot{p}f-\dot{f}p}{f^2} + \frac{p\dot{f}}{\sqrt{pr}}] + (\lambda-\frac{q}{r}) uf =$$

$$= u''\frac{pf}{r} + u'\frac{\dot{p}}{f} + (\lambda-\frac{q}{r})uf = \frac{f}{r}(u''p + u' \frac{r}{f^2} \dot{p} + (\lambda r-q)u).$$

Como $p' = \dot{p}\sqrt{\frac{r}{p}} = \dot{p} \frac{r}{f^2}$ resulta:

$$(7) \qquad \ddot{v} + (\lambda-Q)v = \frac{f}{r}\{(pu')' + (\lambda r-q)u\}$$

y de aquí sigue la tesis. QED.

Esta transformación de coordenadas (x,u) en (y,v) puede facilitar la resolución de algunos problemas de Sturm-Liouville. Por ejemplo, resolver el problema

$$-\frac{1}{r(x)} (\frac{1}{r(x)} u')' = \lambda u \quad , \quad u(a) = u(b) = 0 ,$$

se reduce a resolver el problema $-\ddot{v} = \lambda v$, $v(A) = v(B) = 0$. Y el problema $u'' + \lambda ru = 0$, $r(x) > 0$ en $0 \leqslant x \leqslant 1$, $r \in C^2([0,1])$, $u(0) = u(1) = 0$ - que surge al estudiar una cuerda vibrante sujeta en sus extremos - se reduce a la forma estándar de Liouville:

$$\ddot{v}(y) + (\lambda - r^{-\frac{1}{4}} . \frac{d^2}{dy^2} r^{1/4}) v(y) = 0 \quad , \quad y = \int_0^x r^{\frac{1}{2}} dt ,$$

$$v(0) = 0 = v(B) \quad , \quad B = \int_0^1 r^{\frac{1}{2}} dt .$$

EJERCICIOS. 1) La ecuación de Bessel:

$$(8) \qquad u'' + \frac{u'}{x} + (\ell^2 - \frac{n^2}{x^2})u = 0 \quad , \quad 0 < x < \infty ,$$

es equivalente a

$$(9) \qquad (xu')' + (\ell^2 x - \frac{n^2}{x})u = 0 \quad , \quad 0 < x < \infty \; ,$$

y su forma estándar es

$$(10) \qquad \ddot{v} + (\ell^2 - \frac{n^2 - 1/4}{x^2})v = 0 \quad , \quad 0 < y{=}x < \infty \; .$$

2) La ecuación de Legendre:

$$(11) \qquad (1-X^2)\frac{d^2Z}{dX^2} - 2X\frac{dZ}{dX} + (\lambda - \frac{1}{4} - \frac{m^2}{1-X^2})Z = 0 \quad , \quad -1 < X < 1 \; ,$$

se reduce a

$$(12) \qquad \frac{d^2Y}{dx^2} - \operatorname{tg} x \frac{dY}{dx} + (\lambda - \frac{1}{4} - m^2 \sec^2 x)Y = 0 \quad , \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \; ,$$

por medio de la transformación (cf,1.61):

$$x = \int \frac{dX}{\sqrt{1-X^2}} = \operatorname{arc\,sen} X \quad (\Rightarrow \beta(x) = \frac{-X}{\sqrt{1-X^2}} = -\operatorname{tg} x).$$

Luego (cf.1.62): $\int \beta(x)dx = \ln \cos x$, $s(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$ y si ponemos $Y(x) = y(x)/\sqrt{\cos x}$ obtenemos:

$$(13) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + (\lambda + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{4} - m^2 \sec^2 x)y = 0 \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \; .$$

1.64. Sea $a \leqslant x \leqslant b$; $C(x), C'(x), E(x), F(x)$ y $G(x)$ funciones continuas en ese intervalo. Consideremos la ecuación

$$(1) \qquad C(x).u'' + E(x).u' + F(x).u + \lambda G(x)u = 0 \; ,$$

donde C y G son positivas en $[a,b]$. Si multiplicamos (1) por $\rho(x)$ de manera que $(\rho C)' = \rho E$, por ejemplo, eligiendo:

$$(2) \qquad \rho(x) = e^{\int_a^x \frac{E-C'}{C} dt}$$

entonces (1) es equivalente a:

$$(3) \qquad (pu')' + (\lambda r - q)u = 0$$

donde $p = \rho C$, $q = -F.\rho$, $r = G.\rho$.

REFERENCIAS. [6], [1], [9], [25], [12].

CAPITULO 2

FUNCION DE GREEN DEL PROBLEMA DE CONTORNO.

2.1. EL OPERADOR RESOLVENTE. Dado el operador $Tu = \frac{1}{r(x)}(-(pu')'+qu)$ como en 1.1, sea $\mu \notin \sigma_p(T)$; entonces si u_1, u_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación de 2^{do} orden $Du = 0$,
$D = D_\mu = \frac{d^2}{dx^2} + (\frac{p'}{p}) \frac{d}{dx} + (\frac{\mu r - q}{p})$, resulta $\Delta(\mu) \neq 0$. Consideremos la siguiente función continua en $[a,b] \times [a,b]$:

$$g(x,y,\mu) = \frac{sgn(x-y)}{2p(a)W(a)} \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1(y) & u_2(y) \end{vmatrix}$$

Si las condiciones de contorno del problema son $R_i(u) = \alpha_{i1}.u(a) + \alpha_{i2}.u'(a) + \beta_{i1}.u(b) + \beta_{i2}.u'(b)$, éstas se aplicarán a $g(x,y,\mu)$ respecto de x cuando $y \in (a,b)$, es decir:
$$R_i(g) = \alpha_{i1}.g(a,y,\mu) + \alpha_{i2}.\frac{d}{dx}(g(x,y,\mu))_{x=a} + \beta_{i1}.g(b,y,\mu) + \beta_{i2}.\frac{d}{dx}(g(x,y,\mu))_{x=b}.$$

Definimos entonces *la función de Green para el sistema* (u_1,u_2):

$$G(x,y,\mu) = \frac{1}{\Delta(\mu)} \cdot \begin{vmatrix} g(x,y,\mu) & u_1(x,\mu) & u_2(x,\mu) \\ R_1(g) & R_1(u_1) & R_1(u_2) \\ R_2(g) & R_2(u_1) & R_2(u_2) \end{vmatrix}.$$

donde Δ es la función característica del problema, (cf.1.2 (3)).

TEOREMA. Sea $\mu \notin \sigma_p(T)$, $f \in C([a,b])$. Entonces el operador resolvente $(T-\mu I)^{-1}$ se calcula de la siguiente manera:

$$(T-\mu I)^{-1}f(x) = \int_a^b G(x,y,\mu)f(y)r(y)dy.$$

DEMOSTRACION. En efecto, sea u una solución de la ecuación de 2^{do} orden $Du = -\frac{rf}{p}$.

$$u(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \int_a^x \frac{u_1(x)u_2(y)-u_1(y)u_2(x)}{W(y)} \frac{f(y)r(y)}{p(y)} dy,$$

(cf. 1.31).

Si observamos que $W(y)p(y) = W(a)p(a)$ para todo $y \in [a,b]$ tenemos:

$$u(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \int_a^x \frac{u_1(x)u_2(y)-u_1(y)u_2(x)}{W(a)p(a)} f(y)r(y)\, dy ,$$

pero también es:

$$u(x) = c_1'u_1(x) + c_2'u_2(x) + \int_x^b \frac{u_1(y)u_2(x)-u_1(x)u_2(y)}{W(a)p(a)} f(y)r(y)\, dy ,$$

luego:

$$2u = (c_1+c_1')u_1+(c_2+c_2')u_2 + \int_a^x \frac{u_1(x)u_2(y)-u_1(y)u_2(x)}{W(a)p(a)} f(y)r(y)\, dy -$$

$$- \int_x^b \frac{u_1(x)u_2(y)-u_1(y)u_2(x)}{W(a)p(a)} f(y)r(y)\, dy =$$

$$= (c_1+c_1')u_1+(c_2+c_2')u_2 + \int_a^b \operatorname{sgn}(x-y) \frac{u_1(x)u_2(y)-u_2(x)u_1(y)}{W(a)p(a)} f(y)r(y)dy$$

Entonces:

(1) $$u = c_1''u_1+c_2''u_2 + \int_a^b g(x,y,\mu)\, f(y)\, r(y)\, dy .$$

Observemos que es posible determinar c_1'', c_2'' de manera que $R_i(u) = 0$, $i=1,2$, o sea de manera que $u \in \mathcal{D}_A$; en efecto:

$$R_i(u) = c_1''R_i(u_1)+c_2''R_i(u_2)+R_i(\int_b^a g(x,y,\mu)f(y)r(y)\, dy).$$

Si $R_i(u) = 0$, $i=1,2$, obtenemos el sistema:

$$c_1''R_1(u_1)+c_2''R_1(u_2) = -R_1(\int_a^b g(x,y,\mu)\, f(y)r(y)\, dy)$$

$$c_1''R_2(u_1)+c_2''R_2(u_2) = -R_2(\int_a^b g(x,y,\mu)\, f(y)r(y)\, dy) ,$$

el cual admite solución pues $\mu \notin \sigma_p(A)$ (y entonces $\Delta(\mu) \neq 0$), de donde resulta:

$$c_1'' = \frac{1}{\Delta(\mu)} \begin{vmatrix} -R_1(\int_a^b g(x,y,\mu)f(y)r(y)\, dy) & R_1(u_2) \\ -R_2(\int_a^b g(x,y,\mu)f(y)r(y)\, dy) & R_2(u_2) \end{vmatrix}$$

$$c_2'' = \frac{1}{\Delta(\mu)} \begin{vmatrix} R_1(u_1) & -R_1(\int_a^b g(x,y,\mu)f(y)r(y)\,dy) \\ R_2(u_1) & -R_2(\int_a^b g(x,y,\mu)f(y)r(y)\,dy) \end{vmatrix} .$$

La identidad

$$\int_b^a g(x,y,\mu)f(y)r(y)\,dy = \int_a^x \frac{u_1(x)u_2(y)-u_1(y)u_2(x)}{W(a)p(a)} f(y)r(y)\,dy +$$

$$+ \int_x^b \frac{u_1(y)u_2(x)-u_2(y)u_1(x)}{W(a)p(a)} f(y)r(y)\,dy$$

muestra que el miembro izquierdo es continuamente derivable y que

$$\frac{d}{dx}\int_a^b g(x,y,\mu)f(y)r(y)\,dy = \int_a^x \frac{u_1'(x)u_2(y)-u_1(y)u_2'(x)}{W(a)p(a)} f(y)r(y)\,dy +$$

$$+ \int_x^b \frac{u_1(y)u_2'(x)-u_2(y)u_1'(x)}{W(a)p(a)} f(y)r(y)dy = \int_a^b \frac{d}{dx}\, g(x,y,\mu)f(y)r(y)\,dy,$$

pues las derivadas respecto a los extremos de integración son nulas, y donde $(d/dx)g(x,y,\mu)$ se calculan en $x \neq y \in (a,b)$. Entonces:

$$R_i(\int_a^b g(x,y,\mu)f(y)r(y)dy) = \int_a^b R_i(g(x,y,\mu))f(y)r(y)\,dy.$$

Luego,

$$c_1'' = \frac{1}{\Delta(\mu)} \begin{vmatrix} -\int_a^b R_1(g(x,y,\mu))f(y)r(y)dy & R_1(u_2) \\ -\int_a^b R_2(g(x,y,\mu))f(y)r(y)dy & R_2(u_2) \end{vmatrix}$$

$$c_2'' = \frac{1}{\Delta(\mu)} \begin{vmatrix} R_1(u_1) & -\int_a^b R_1(g(x,y,\mu))f(y)r(y)dy \\ R_2(u_1) & -\int_a^b R_2(g(x,y,\mu))f(y)r(y)dy \end{vmatrix} ,$$

y en consecuencia:

$$u = c_1''u_1+c_2''u_2 + \frac{1}{\Delta(\mu)}\int_a^b \Delta(\mu)\; g(x,y,\mu)\; f(y)\; r(y)\; dy =$$

$$= \frac{1}{\Delta(\mu)}\,[R_1(u_2)\int_a^b R_2(g)f(y)r(y)dy - R_2(u_2)\int_a^b R_1(g)f(y)r(y)dy]u_1(x) +$$

$$+ \frac{1}{\Delta(\mu)} [R_2(u_1)\int_a^b R_1(g)f(y)r(y)dy - R_1(u_1)\int_a^b R_2(g)f(y)r(y)dy]u_2(x) +$$

$$+ \frac{1}{\Delta(\mu)} \int_a^b \Delta(\mu)g(x,y,\mu)f(y)r(y)\ dy =$$

$$= \frac{1}{\Delta(\mu)} \int_a^b [(R_1(u_2)R_2(g)-R_2(u_2)R_1(g))u_1(x)+(R_2(u_1)R_1(g)-R_1(u_1)R_2(g))u_2(x) +$$

$$+ \Delta(\mu)g(x,y,\mu)]f(y)r(y)dy = \frac{1}{\Delta(\mu)} \int_a^b G(x,y,\mu)f(y)r(y)\ dy.$$

Hemos visto que $G.(T-\mu I) = I$ en $\mathcal{D}_T = \mathcal{D}_{T-\mu I}$. Desandando el camino se prueba que $(T-\mu I).G = I$ en $\mathcal{R}(T-\mu I) = C([a,b])$, (cf. 1.32). QED.

2.3. UNICIDAD DE LA FUNCION DE GREEN. Supongamos que $G(x,y,\mu)$, $\hat{G}(x,y,\mu)$ sean funciones de Green para el problema, es decir:

$$(T-\mu I)^{-1}f(x) = \int_a^b G(x,y,\mu)f(y)r(y)dy = \int_a^b \hat{G}(x,y,\mu)f(y)r(y)dy \quad \text{c.d.x}$$

para toda $f \in C([a,b])$ siendo $\hat{G}(x,y,\mu) \in L^1(a \leqslant y \leqslant b)$ c.d.x., medible en (x,y).

Entonces $0 = \int_a^b (G(x,y,\mu)-\hat{G}(x,y,\mu))f(y)r(y)dy = \int_a^b \Delta G.h(y)\ dy$ para toda $h(y) \in C([a,b])$ (por ser $r(x) \in C([a,b])$, $r(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$).

Como $C([a,b])$ es denso en $L^1([a,b])$ resulta $\Delta G = 0$ c.d.y para c.d.x, luego $G(x,y,\mu) = \hat{G}(x,y,\mu)$ c.d.(x,y).

2.4. EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE CON CONDICIONES DE CONTORNO SEPARADAS. Consideremos el operador $Tu = \frac{1}{r(x)}((-p(x)u')'+q(x)u)$ con $p(x)$, $p'(x), r(x), q(x) \in C([a,b])$, $p(x) > 0$, $r(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$, y sean las condiciones de contorno:

$$R_1(u) = a_{11}u(a)+a_{12}u'(a)$$

$$R_2(u) = a_{21}u(b)+a_{22}u'(b)$$

siendo los a_{ij} $(1 \leqslant i,j \leqslant 2)$ tales que $|a_{11}| + |a_{12}| > 0$, $|a_{21}| + |a_{22}| > 0$. Obsérvese que con la notación

$$R_i(u) = \alpha_{i1}u(a)+\alpha_{i2}u'(a)+\beta_{i1}u(b)+\beta_{i2}u'(b)$$

esto es equivalente a pedir que el rango de la matriz de α's y β's sea 2. Tenemos ahora un problema de Sturm-Liouville con condiciones de contorno separadas; el dominio del operador T es

$$\mathcal{D}_T = \{u \in C^2([a,b]) : R_1(u)=0,\ R_2(u)=0\}.$$

Veamos cual es la función de Green para este caso.

TEOREMA. Para $\mu \notin \sigma_p(T)$ sea $\tilde{T} = T-\mu I$; sean $u_1, u_2 \in C^2([a,b])$ soluciones de $\tilde{T}u = 0$ que verifican $R_1(u_1)=0$, $R_2(u_2)=0$, $u_i \not\equiv 0$, $i=1,2$. Entonces la función de Green es:

$$(1) \qquad G(x,y,\mu) = \begin{cases} -\dfrac{u_1(y)u_2(x)}{p(a)W(a)} & a \leqslant y \leqslant x \leqslant b \\[2ex] -\dfrac{u_1(x)u_2(y)}{p(a)W(a)} & a \leqslant x \leqslant y \leqslant b \end{cases}$$

DEMOSTRACION. Observemos que (u_1,u_2) es un sistema fundamental para la ecuación $Du \equiv u'' + (\frac{p'}{p})u' + \frac{1}{p}(\mu r-q)u = 0$; en efecto, si fuera $u_1 = c.u_2$ para algún $c\neq 0$, por ser $R_2(u_2) = 0$ también sería $R_2(u_1) = 0$ y como $R_1(u_1) = 0$, $u_1 \in \mathcal{D}_T$. Entonces u_1 sería autofunción para el autovalor μ, lo que contradice la hipótesis $\mu \notin \sigma_p(T)$.

Queremos determinar el inverso del operador $\tilde{T}$, o sea dada $f \in C[a,b]$ debemos determinar $u \in \mathcal{D}_T$ tal que $\tilde{T}u = f$; como u_1,u_2 es un sistema fundamental para la ecuación de 2^{do} orden $Du = 0$, la solución u buscada será de la forma $u = c_1u_1 + c_2u_2 + u_I$, siendo u_I dada por (cf. 1.31):

$$u_I = \int_a^x \frac{u_1(x)u_2(y)-u_2(x)u_1(y)}{W(a)p(a)} f(y)r(y)\,dy$$

una solución particular de la ecuación $Du = -\frac{r(x)f(x)}{p(x)}$. Como u debe ser un elemento de $\mathcal{D}_T$, debemos determinar las constantes c_1,c_2 de manera que $R_i(u) = 0$ $i=1,2$; pero esto significa que:

$$c_1R_1(u_1) + c_2R_1(u_2) = -R_1\left(\int_a^x \frac{u_1(x)u_2(y)-u_1(y)u_2(x)}{W(a)p(a)} f(y)r(y)\,dy\right)$$

$$c_1R_2(u_1) + c_2R_2(u_2) = -R_2\left(\int_a^x \frac{u_1(x)u_2(y)-u_1(y)u_2(x)}{W(a)p(a)} f(y)r(y)\,dy\right)$$

Si observamos que por ser $\mu \notin \sigma_p(T)$ es $\Delta(\mu) \neq 0$, vemos que el sistema tiene solución. Por otra parte es $R_1(u_1) = 0$ y también es $R_1(u_I) = 0$ mientras $R_1(u_2) \neq 0$; luego debe ser $c_2 = 0$; pero entonces es:

$$c_1 R_2(u_1) = -R_2\left(\int_a^x \frac{u_1(x)u_2(y) - u_1(y)u_2(x)}{W(a)p(a)} f(y)r(y)\, dy\right)$$

siendo $R_2(u_1) \neq 0$. Por lo tanto obtenemos:

$$c_1 = -\frac{1}{R_2(u_1)} R_2\left(\int_a^x \frac{u_1(x)u_2(y) - u_1(y)u_2(x)}{W(a)p(a)} f(y)r(y)\, dy\right) =$$

$$= -\frac{1}{R_2(u_1)} \int_a^b \frac{R_2(u_1(x))u_2(y)}{W(a)p(a)} f(y)r(y)\, dy =$$

$$= -\int_a^b \frac{u_2(y)}{W(a)p(a)} f(y)r(y)\, dy.$$

Entonces:

$$u(x) = c_1 u_1(x) + \int_a^x \frac{u_1(x)u_2(y) - u_2(x)u_1(y)}{W(a)p(a)} f(y)r(y)\, dy =$$

$$= -u_1(x) \int_a^b \frac{u_2(y)}{W(a)p(a)} f(y)r(y) dy + \int_a^x \frac{u_1(x)u_2(y) - u_1(y)u_2(x)}{W(a)p(a)} f(y)r(y) dy =$$

$$= \int_a^x \frac{-u_1(y)u_2(x)}{W(a)p(a)} f(y)r(y)\, dy + \int_x^b \frac{-u_1(x)u_2(y)}{W(a)p(a)} f(y)r(y)\, dy =$$

$$= \int_a^b G(x,y,\mu) f(y)r(y)\, dy.$$

El resultado sigue ahora de la unicidad de la función de Green. QED.

2.5. PROPIEDADES DE LA FUNCION DE GREEN. 1) Sea $\mu \notin \sigma_p(T)$. Por lo demostrado anteriormente sabemos que bajo esta condición existen las funciones de Green:

$$(1) \qquad G(x,y,\mu) = \frac{1}{\Delta(\mu)} \begin{vmatrix} g(x,y,\mu) & u_1(x) & u_2(x) \\ R_1(g) & R_1(u_1) & R_1(u_2) \\ R_2(g) & R_2(u_1) & R_2(u_2) \end{vmatrix}$$

$$(2) \qquad G(x,y,\mu) = \begin{cases} \dfrac{-u_1(y) . u_2(x)}{W(a)p(a)} & a \leqslant y \leqslant x \leqslant b \\[2ex] \dfrac{-u_1(x) . u_2(y)}{W(a)p(a)} & a \leqslant x \leqslant y \leqslant b \end{cases}$$

para los problemas de Sturm-Liouville con condiciones de contorno generales y con condiciones de contorno separadas, respectivamente.

2) De (1) y (2) surge de inmediato la continuidad de ambas funciones en $[a,b]\times[a,b]$. Además en el caso (2) se verifica fácilmente que $G(x,y,\mu) = G(y,x,\mu)$, para todo x,y. Esto no vale en general en el caso (1). Véase 3.1.

3) Si las condiciones de contorno (generales o separadas) se calculan en x, para todo $y \in (a,b)$ entonces $R_iG = 0$, $i=1,2$, lo que se deduce inmediatamente a partir de (1) y (2) teniendo en cuenta que $R_1u_1 = 0$ y $R_2u_2 = 0$ siempre pueden suponerse (Cf. 2-3 y Ej. 1.21).

4) Si $\tilde{T} = T-\mu I$, indicamos con $\tilde{T}_x$ que la expresión diferencial debe aplicarse en x. Entonces, si $x\neq y$, $\tilde{T}_xG(x,y,\mu) = 0$. Esta propiedad se demuestra directamente para ambas $G(x,y,\mu)$ a partir de (1) y (2), observando que $\tilde{T}_xu_i = 0$, $i=1,2$, $\tilde{T}_xg(x,y,\mu) = 0$.

5) Probemos ahora que $\lim\limits_{\substack{x\to y\\ x>y}} G_x(x,y,\mu) - \lim\limits_{\substack{x\to y\\ x<y}} G_x(x,y,\mu) = -\dfrac{1}{p(y)}$, $a<y<b$.

Consideremos en primer lugar la función de Green dada por (2). Entonces:

$$G_x(x,y,\mu) = -\frac{u_1(y).u_2'(x)}{W(a)p(a)} \qquad \text{si} \quad y<x$$

$$G_x(x,y,\mu) = -\frac{u_2(y).u_1'(x)}{W(a)p(a)} \qquad \text{si} \quad x<y$$

Luego,

$$\lim_{\substack{x\to y\\ x>y}} G_x(x,y,\mu) - \lim_{\substack{x\to y\\ x<y}} G_x(x,y,\mu) = \frac{-u_1(y)u_2'(y)+u_2(y)u_1'(y)}{W(a)p(a)} =$$

$$= -\frac{W(y)}{W(a)p(a)} = -\frac{1}{p(y)} \quad \text{por ser } W(y).p(y) = W(a).p(a).$$

Sea ahora G la función de Green (1). Podemos poner $G(x,y,\mu) = $
$= \dfrac{1}{\Delta(\mu)}(\alpha u_1(x) + \beta u_2(x)) + g(x,y,\mu)$ donde

$$\alpha = \begin{vmatrix} R_1(u_2) & R_1(g) \\ R_2(u_2) & R_2(g) \end{vmatrix} \qquad\qquad \beta = \begin{vmatrix} R_1(g) & R_1(u_1) \\ R_2(g) & R_2(u_1) \end{vmatrix}$$

y entonces:

$$\lim_{\substack{x\to y\\ x>y}} G_x(x,y,\mu) - \lim_{\substack{x\to y\\ x<y}} G_x(x,y,\mu) = \lim_{\substack{x\to y\\ x>y}} \frac{1}{\Delta(\mu)}(\alpha u_1'(x) + \beta u_2'(x)) + g_x(x,y,\mu) -$$

$$- \lim_{\substack{x\to y\\ x<y}} \frac{1}{\Delta(\mu)}(\alpha u_1'(x) + \beta u_2'(x)) + g_x(x,y,\mu) = \lim_{\substack{x\to y\\ x>y}} g_x(x,y,\mu) - \lim_{\substack{x\to y\\ x<y}} g_x(x,y,\mu).$$

Ahora bien, si $x < y$:

$$g_x(x,y,\mu) = - \frac{1}{2W(a)p(a)} \begin{vmatrix} u_1'(x) & u_2'(x) \\ u_1(y) & u_2(y) \end{vmatrix}$$

y para $x > y$ es:

$$g_x(x,y,\mu) = \frac{1}{2W(a)p(a)} \begin{vmatrix} u_1'(x) & u_2'(x) \\ u_1(y) & u_2(y) \end{vmatrix}$$

Entonces:

$$\lim_{\substack{x\to y\\ x>y}} g_x(x,y,\mu) - \lim_{\substack{x\to y\\ x<y}} g_x(x,y,\mu) = \lim_{x\to y} \frac{1}{2.W(a).p(a)}(u_1'(x)u_2(y)-u_2'(x)u_1(y)) -$$

$$- \lim_{x\to y} \frac{-1}{2W(a)p(a)}(u_1'(x)u_2(y)-u_2'(x)u_1(y)) = \frac{1}{2W(a)p(a)}2(u_1'(y)u_2(y)-u_2'(y)u_1(y)) =$$

$$= - \frac{1}{p(y)}. \qquad \text{QED.}$$

2.6. IDENTIDAD DE LAGRANGE. SIMETRIA DE T. Sean u y v funciones del dominio de T. Vale entonces la llamada *identidad de Lagrange:*

(1) $$\int_a^b [(-pu')'v-(-pv')'u]\, dx = p.W(u,v)\Big|_a^b$$

pues $[\ldots](x) = (p(uv'-u'v))'(x)$.

Sea $\mu \in C$ y $Tu := \frac{1}{r}(-(pu')'+qu)$. La identidad de Lagrange puede escribirse así:

(2) $$\int_a^b (T-\mu)u.v.r(x)\, dx = \int_a^b u.(T-\mu)v.r\, dx + pW\Big|_a^b .$$

Supongamos ahora μ real, $\mu \notin \sigma_p(T)$. Luego si e y f son funciones reales continuas en $[a,b]$ y $u = (T-\mu I)^{-1}e$, $v = (T-\mu I)^{-1}f$, (2) es equivalente a:

(3) $$\int_a^b e.vr\, dx = \int_a^b u.f.r\, dx + pW\Big|_a^b.$$

De (2) sigue que T es simétrico ($(Tu,v) = (u,Tv)$) si y sólo si:

(4) $$p(a).W(u,v)(a) = p(b).W(u,v)(b) \quad \text{para todo } u,v \in \mathcal{D}(T),$$

pues los coeficientes de T son reales. Esto equivale a que para ese $\mu \notin \sigma_p(T)$, μ real, valga

(5) $$\int_a^b e.v.r\, dx = \int_a^b u.f.r\, dx \quad \text{para todo } u,v \in \mathcal{D}(T).$$

(5) es equivalente a:

(6) $$\int_a^b e(x)r(x)dx \int_a^b G(x,y,\mu)f(y)r(y)dy = \int_a^b f(x)r(x)dx \int_a^b G(x,y,\mu)e(y)r(y)dy.$$

Aplicando el teorema de Fubini (6) es equivalente a:

(7) $$\int_a^b f(y)r(y)dy \int_a^b G(x,y,\mu)e(x)r(x)dx = \int_a^b f(y)r(y)dy \int_a^b G(y,x,\mu)e(x)r(x)dx.$$

O lo que es lo mismo, a:

(8) $$\int_a^b G(x,y,\mu)e(x)r(x)dx = \int_a^b G(y,x,\mu)e(x)r(x)dx.$$

Esta a su vez se dá para todo $e(x) \in C([a,b])$ si y sólo si:

(9) $$G(x,y,\mu) = G(y,x,\mu)$$

En consecuencia, vale el siguiente:

LEMA. T es simétrico (en $\mathcal{D}(T)$) si $G(x,y,\mu)$ es simétrica en (x,y) para algún μ real, $\mu \notin \sigma_p(T)$, y sólo si G es simétrica para todo $\mu \notin \sigma_p$, μ real.

2.7. AUTOVALORES. DEFINICION. Sea μ un autovalor de T; llamaremos *multiplicidad de* λ a la dimensión del autoespacio asociado a λ, o sea a dim $\{x: Tx = \lambda x\}$.

El autovalor λ se dice simple si es de multiplicidad 1, o sea si la dimensión del autoespacio asociado a λ es 1.

LEMA. Para el problema de Sturm-Liouville con condiciones de contorno separadas los autovalores del operador T son simples.

En efecto, sea $\mu \in \sigma_p(T)$ y supongamos que u_1,u_2 son autofunciones para μ linealmente independientes; entonces se verifica: $Tu_i = \mu u_i$, $i=1,2$ y además

$$R_1(u_1) = a_{11}u_1(a) + a_{12}u_1'(a) = 0$$
$$R_1(u_2) = a_{11}u_2(a) + a_{12}u_2'(a) = 0$$

Por ser u_1, u_2 soluciones linealmente independientes es: $W(a) \neq 0$, por lo tanto $a_{11} = a_{12} = 0$. Llegamos entonces a una contradicción. QED.

Si las condiciones de contorno no son separadas el Lema anterior *no es válido*. Consideremos por ejemplo el problema $Tu = -u''$ en $[0,\pi]$ con las condiciones de contorno $u(0) - u(\pi) = 0$, $u'(0) - u'(\pi) = 0$. Hemos visto que $\sigma_p(T) = \{4j^2, j=0,1,2,\ldots\}$; si $j\neq 0$, sen $2jx$, cos $2jy$ son soluciones linealmente independientes para el autovalor $4j^2$ y el autoespacio correspondiente es de dimensión 2, (cf. 1.21).

2.8. CALCULO DE LA FUNCION DE GREEN PARA EL PROBLEMA $Tu = -u''$ EN $[0,1]$ CON LAS CONDICIONES DE CONTORNO $u(0) = 0$, $u(1) = 0$. En este caso $\sigma_p(A) = \{(\pi j)^2, j=1,2,3,\ldots\}$.

Sea $\mu \notin \sigma_p(T)$; si $\mu = 0$, sea $u_1(x)$ tal que $R_1(u_1) = 0$, o sea $u_1(0) = 0$; por lo tanto $u_1(x) = x$ es una solución del problema que verifica una de las condiciones de contorno. La otra solución $u_2(x)$ debe satisfacer $R_2(u_2) = 0$, luego $u_2(x) = 1-x$ es la otra solución buscada. Observemos además que $R_2(u_1) = 1 \neq 0$ y $R_1(u_2) = 1 \neq 0$.

Como $p(x) \equiv 1$ para todo $x \in [0,1]$ y $W(x) = u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x) = -1$ es $p(x).W(x) = -1$, y entonces:

$$G(x,y,0) = \begin{cases} x(1-y) & 0 \leqslant x < y \leqslant 1 \\ y(1-x) & 0 \leqslant y < x \leqslant 1 \end{cases}$$

o bien $G(x,y,0) = -\frac{1}{2}|x-y| + \frac{1}{2}(x+y) - xy$.

Sea ahora $\mu \neq (\pi j)^2$, $j=0,1,2,3,\ldots$, o sea $\mu \notin \sigma_p(T)$, $\mu \neq 0$.

Tomemos $u_1(x) = e^{\sqrt{-\mu}x} - e^{-\sqrt{-\mu}x}$, (entonces $u_1(0) = 0$) y

$$u_2(x) = e^{\sqrt{-\mu}x} - e^{2\sqrt{-\mu}}\, e^{-\sqrt{-\mu}x} \quad \text{(luego } u_2(1) = 0\text{)}.$$

Ahora bien, $u_1(x) = 2$ senh $\sqrt{-\mu}x$, luego $u_1'(x) = 2\sqrt{-\mu}$ cosh $\sqrt{-\mu}x$, y $u_1'(0) = 2\sqrt{-\mu}$. Por otra parte,

$$u_2(x) = e^{\sqrt{-\mu}}(e^{-\sqrt{-\mu}(1-x)} - e^{\sqrt{-\mu}(1-x)}) = -e^{\sqrt{-\mu}}\, 2 \operatorname{senh} \sqrt{-\mu}(1-x).$$

Por lo tanto: $W(0) = 4\sqrt{-\mu}\, e^{\sqrt{-\mu}}$ senh $\sqrt{-\mu}$; luego:

$$\frac{u_1(x).u_2(y)}{W(0)p(0)} = \frac{-\ \operatorname{senh}\sqrt{-\mu}x.\operatorname{senh}\sqrt{-\mu}(1-y)}{\sqrt{-\mu}\ .\ \operatorname{senh}\sqrt{-\mu}} \quad , \quad 0 \leqslant x < y \leqslant 1$$

y entonces:

$$G(x,y,\mu) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{senh}\sqrt{-\mu}x\ .\ \operatorname{senh}\sqrt{-\mu}(1-y)}{\sqrt{-\mu}\ .\ \operatorname{sen}\sqrt{-\mu}} & , \quad 0 \leqslant x < y \leqslant 1 \ , \\ \dfrac{\operatorname{senh}\sqrt{-\mu}y\ .\ \operatorname{senh}\sqrt{-\mu}(1-x)}{\sqrt{-\mu}\ .\ \operatorname{senh}\sqrt{-\mu}} & , \quad 0 \leqslant y < x \leqslant 1 \ . \end{cases}$$

REFERENCIAS. [6].

CAPITULO 3

EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE UNIDIMENSIONAL.

3.1. SIMETRIA. CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES. Consideremos el operador de Sturm-Liouville (cf.1.1):

$$Tu = \frac{1}{r(x)}\,(-(p(x)u')' + q(x)u)$$

definido en $\mathcal{D}_T = \{u \in C^2([a,b]) : R_i u = 0,\ i=1,2\}$ siendo

(1) $\qquad R_i u = \alpha_{i1}u(a)+\alpha_{i2}u'(a)+\alpha_{i3}u(b)+\alpha_{i4}u'(b) \quad , \quad i=1,2 \quad ,$

con la matriz real (α_{ij}) $(1 \leqslant i \leqslant 2\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant 4)$ de rango 2. Indicamos con Δ_{ij} la submatriz formada por las columnas i,j y con $|\Delta_{ij}|$ su determinante.

TEOREMA 1. T es simétrico en $\mathcal{D}_T$ si y sólo si $p(a)|\Delta_{34}| = p(b)|\Delta_{12}|$.

DEMOSTRACION. Supongamos $p(a)|\Delta_{34}| = p(b)|\Delta_{12}|$ y probemos que dados $u,v \in \mathcal{D}_T$ es: $(Tu,v) = (u,Tv)$,

$$(Tu,v) = \int_a^b Tu(x).\overline{v}(x)r(x)\,dx = \int_a^b [(-p(x)u')' + q(x)u]\overline{v}(x)\,dx\ .$$

Como T es real, si $v \in \mathcal{D}_T$ entonces $\overline{v} \in \mathcal{D}_T$ y $\overline{Tv} = T\overline{v}$; luego :

$$(u,Tv) = \int_a^b u(x).T\overline{v}.r(x)\,dx = \int_a^b [-(p(x)\overline{v}'(x))' + q(x)\overline{v}]u\,dx\ .$$

Entonces por la identidad de Lagrange (cf.2.6(1)):

$$(2)\quad (Tu,v)-(u,Tv) = \int_a^b [(-p(x)u')'\overline{v}(x) + ((p\overline{v}')'u(x)]\,dx =$$
$$= p(x)W(u,\overline{v})(x)\Big|_a^b = p(b)W(u,\overline{v})(b) - p(a)W(u,\overline{v})(a).$$

Como $u,\overline{v} \in \mathcal{D}_T$, verifican las condiciones de contorno $R_i u = 0$, $i=1,2$, $R_i\overline{v} = 0$, $i=1,2$. Es decir,

$$\Delta_{12}\begin{pmatrix} u & \overline{v} \\ u' & \overline{v}' \end{pmatrix}(a) = -\Delta_{34}\begin{pmatrix} u & \overline{v} \\ u' & \overline{v}' \end{pmatrix}(b).$$

Calculando los determinantes obtenemos:

(3) $\qquad |\Delta_{12}|W(u,\overline{v})(a) = |\Delta_{34}|\ W(u,\overline{v})(b).$

Ahora bien $p(a)|\Delta_{34}| = p(b)|\Delta_{12}|$ y $p(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$ implican que $|\Delta_{34}| \neq 0$ si y sólo si $|\Delta_{12}| \neq 0$.

En este caso:

$$(4) \qquad \frac{|\Delta_{12}|}{|\Delta_{34}|} = \frac{W(u,\overline{v})\ (b)}{W(u,\overline{v})\ (a)} = \frac{p(a)}{p(b)} .$$

Por lo tanto $W(u,\overline{v})(b).p(b) = W(u,\overline{v})(a).p(a)$ y entonces de (2) sigue: $(Tu,v)-(u,Tv) = 0$.

Por otra parte si $|\Delta_{12}| = 0$ también es $|\Delta_{34}| = 0$; consideremos entonces:

$$0 = \alpha_{24}R_1(u)-\alpha_{14}R_2(u) = u(a)(\alpha_{11}\alpha_{24}-\alpha_{14}\alpha_{21})+u'(a)(\alpha_{12}\alpha_{24}-\alpha_{22}\alpha_{14}) =$$

$$= |\Delta_{14}|u(a) + |\Delta_{24}|u'(a) ,$$

$$0 = \alpha_{24}R_1(\overline{v}) - \alpha_{14}R_2(\overline{v}) = |\Delta_{14}|\overline{v}(a) + |\Delta_{24}|\overline{v}'(a)$$

$$0 = \alpha_{23}R_1(u) - \alpha_{13}R_2(u) = |\Delta_{13}|u(a) + |\Delta_{23}|u'(a)$$

$$0 = \alpha_{23}R_1(\overline{v}) - \alpha_{13}R_2(\overline{v}) = |\Delta_{13}|\overline{v}(a) + |\Delta_{23}|\overline{v}'(a)$$

Tenemos entonces el sistema homogéneo:

$$u(a)|\Delta_{14}| + u'(a)|\Delta_{24}| = 0$$

$$\overline{v}(a)|\Delta_{14}| + \overline{v}'(a)|\Delta_{24}| = 0$$

$$u(a)|\Delta_{13}| + u'(a)|\Delta_{23}| = 0$$

$$\overline{v}(a)|\Delta_{13}| + \overline{v}'(a)|\Delta_{23}| = 0$$

en las incógnitas $|\Delta_{14}|$, $|\Delta_{24}|$, $|\Delta_{13}|$, $|\Delta_{23}|$, que tiene solución no trivial por ser no nulo alguno de estos determinantes, ya que $|\Delta_{12}| = 0 = |\Delta_{34}|$. Pero entonces el determinante del sistema debe ser nulo y como éste es:

$$\begin{vmatrix} u(a) & u'(a) & & \\ \overline{v}(a) & \overline{v}'(a) & & \\ & & u(a) & u'(a) \\ & & \overline{v}(a) & \overline{v}'(a) \end{vmatrix} = (W(u,\overline{v})(a))^2$$

tenemos $W(u,\overline{v})(a) = 0$.

A partir de las igualdades:

$$\alpha_{21}R_1(u) - \alpha_{11}R_2(u) = 0 \qquad \alpha_{21}R_1(\bar{v}) - \alpha_{11}R_2(\bar{v}) = 0$$
$$\alpha_{22}R_1(u) - \alpha_{12}R_2(u) = 0 \qquad \alpha_{22}R_1(\bar{v}) - \alpha_{12}R_2(\bar{v}) = 0$$

y de manera análoga obtenemos: $W(u,\bar{v})(b) = 0$. Pero entonces también es: $p(b)W(u,\bar{v})(b) - p(a)W(u,\bar{v})(a) = 0 = (Tu,v) - (u,Tv)$, (cf. (2)). Resulta entonces T simétrico.

Sea T simétrico. Entonces para todo $u,v \in \mathcal{D}_T$.

(5) $\quad (Tu,v)-(u,Tv) = p(b)W(u,\bar{v})(b) - p(a)W(u,\bar{v})(a) = 0.$

Esta ecuación junto con (3) forma un sistema de dos ecuaciones homogéneas satisfecho por $W(u,\bar{v})(b)$, $W(u,\bar{v})(a)$ y cuyo determinante es $p(a)|\Delta_{34}| - p(b)|\Delta_{12}|$.

Probaremos que ese determinante es cero. Si no lo fuera, debería ser:

(6) $\quad W(u,\bar{v})(b) = W(u,\bar{v})(a) = 0$ para todo $u,v \in \mathcal{D}_T$.

Además $|\Delta_{12}|$, o bien $|\Delta_{34}|$, debería ser no nulo.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $|\Delta_{12}| \neq 0$. Entonces, si $\begin{pmatrix} k \\ l \\ n \\ n \end{pmatrix}$ es un vector no nulo tal que $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

necesariamente $|m| + |n| \neq 0$.Este vector puede suponerse real.

Para un tal vector real y fijo, elijamos una función $v \in C^2[a,b]$ tal que $v(a) = k$, $v'(a) = l$, $v(b) = m$, $v'(b) = n$. (Demostrar su existencia).

Esta v verifica $R_j(v) = 0$, $j=1,2$, y $v \in \mathcal{D}_T$. Entonces, por (6):

(7) $\quad$ Para todo $u \in \mathcal{D}_T$, $\quad u(b)n-mu'(b) = 0, \quad u(a)l-ku'(a) = 0.$

Luego para todo $\begin{pmatrix} K \\ L \\ M \\ N \end{pmatrix}$ tal que $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \\ M \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vale

$\begin{pmatrix} l & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \\ M \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces existe $\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{pmatrix} l & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \\ \alpha_{21} & \cdots & \end{pmatrix}.$$

Luego, como $|n| + |m| \neq 0$ el vector (d_{21},d_{22}) es distinto de cero. Por lo tanto $|\Delta_{12}| = 0$, contradicción, QED.

3.2. DEFINICION. Un operador A se dice *semiacotado por abajo* si A es simétrico y existe $c \in R$ tal que $(Au,u) \geq c(u,u)$ para todo $u \in \mathcal{D}_A$.

TEOREMA. El operador $Tu = \frac{1}{r(x)}((-p(x)u')'+q(x)u)$ es semiacotado por abajo en $\mathcal{D}_T$ si las condiciones de contorno son separadas. Sus autovalores son reales y simples, y no se acumulan en $-\infty$.

DEMOSTRACION. Si las condiciones de contorno son separadas:

$$R_1(u) \equiv a_{11}u(a) + a_{12}u'(a) = 0$$
$$R_2(u) \equiv a_{21}u(b) + a_{22}u'(b) = 0 ,$$

siendo los a_{ij} tales que $|a_{11}| + |a_{12}| \neq 0$; $|a_{21}| + |a_{22}| \neq 0$, la matriz (α_{ij}) es igual a

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

y de rango 2. Como $|\Delta_{12}| = 0$, $|\Delta_{34}| = 0$, por el Teorema 1, resulta que T es un operador simétrico.

Probemos entonces que para todo $u \in \mathcal{D}_T$ existe $c \in R$ tal que $(Tu,u) \geq c(u,u)$.

$$(Tu,u) = \int_a^b ((-p(x)u')' + q(x)u)\bar{u}\,dx =$$
$$= (-p(x)u')\bar{u}\Big|_a^b + \int_a^b (pu')\bar{u}'\,dx + \int_a^b q(x)u\bar{u}\,dx =$$
$$= \int_a^b p(x)|u'|^2\,dx + \int_a^b q(x)|u|^2dx + p(a)u'(a)\bar{u}(a) - p(b)u'(b)\bar{u}(b);$$

Existen entonces constantes h y k, $h = h(a_{ij})$, $k = k(a_{ij})$, tales que:

$$(Tu,u) = \int_a^b p(x)|u'|^2dx + \int_a^b q(x)|u|^2dx + hp(a)|u(a)|^2+kp(b)|u(b)|^2.$$

Sabemos que (cf.0.2) dada $u \in C^1([a,b])$, para todo $c \in [a,b]$ vale:

$$|u(c)|^2 \leq \frac{2(n+1)^2}{(b-a)(2n+1)} \int_a^b |u|^2\,dx + \frac{2(b-a)}{2n+3} \int_a^b |u'|^2\,dx .$$

Llamando $K_n'' = \frac{2(n+1)^2}{(b-a)(2n+1)}$ y $K_n' = \frac{2(b-a)}{2n+3}$ resulta $K_n'' \longrightarrow \infty$ y $K_n' \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Entonces $|u(c)|^2 \leqslant K''_n \int_a^b |u|^2\, dx + K'_n \int_a^b |u'|^2\, dx =$

$$= K''_n \int_a^b \frac{1}{r(x)} |u|^2 r(x)\, dx + K'_n \int_a^b |u'|^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K''_n}{\min r(x)} \|u\|^2 + K'_n \int_a^b |u'|^2\, dx =$$

$$= K_n \|u\|^2 + K'_n \int_a^b |u'|^2\, dx \quad \text{donde} \quad K_n = \frac{K''_n}{\min r(x)} > 0.$$

Pero entonces $(Tu,u) \geqslant \int_a^b p(x)|u'|^2\, dx + \int_a^b q(x)|u|^2\, dx -$

$$- |k|p(b)|u(b)|^2 - |h|p(a)|u(a)|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \int_a^b [p(x) - (|k|.p(b) + |h|.p(a))K'_n].|u'|^2\, dx +$$

$$+ \int_a^b q(x).|u|^2\, dx - (|k|.p(b) + |h|.p(a))K_n \|u\|^2.$$

Sea n tal que $[\ldots] \geqslant 0$. Entonces

$$(Tu,u) \geqslant \inf\left(\frac{q(x)}{r(x)}\right).\int_a^b |u|^2.r(x)\, dx - (|k|p(b) + |h|p(a))K_n.\|u\|^2 ,$$

y existe c tal que:

$$(Tu,u) \geqslant c\ \|u\|^2 = c(u,u).$$

Si φ es una autofunción de $\hat{T}$ correspondiente al autovalor λ entonces de $(T\varphi,\varphi) = (\varphi,T\varphi)$ sigue que λ es real, y que $\lambda \geqslant c$. La simplicidad de λ ya fue demostrada en 2.7. QED.

3.3. TEOREMA FUNDAMENTAL. Consideremos el operador de Sturm-Liouville $Tu = \frac{1}{r(x)}[(-p(x)u')' + q(x)u]$ definido en $\mathcal{D}_T = \{u \in C^2([a,b]) : R_i(u) = 0,\ i=1,2\}$, R_i separadas. Entonces T tiene una cantidad numerable de autofunciones correspondientes a autovalores reales de multiplicidad 1 que pueden ordenarse de manera que

$$(*) \qquad \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots \quad , \quad \lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Las autofunciones pueden suponerse reales, normalizadas en $L^2([a,b];r)$ y forman, en ese espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, un sistema ortogonal $\{\varphi_j\}$ tal que para todo $u \in \mathcal{D}_T$ $\quad u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (u,\varphi_j)\varphi_j(x)$

donde la serie converge absoluta y uniformemente en $a \leqslant x \leqslant b$.

DEMOSTRACION. Ya hemos probado que T es simétrico y semiacotado por abajo. Por ser T semiacotado existe una constante a tal que

(1) $\qquad (Tu,u) \geqslant a \, \|u\|^2 \qquad$ para todo $u \in \mathcal{D}_T$,

y entonces, si $\mu < a$, μ no es autovalor de T. Por lo tanto el operador

$$\widetilde{T} = T-\mu I$$

es inversible. Además $Tu = \lambda u$, $u \neq 0$, equivale a $\widetilde{T}u = (\lambda-\mu)u$. Luego, λ es autovalor de T si y sólo si $\lambda-\mu$ es autovalor de $\widetilde{T}$. Pero como también es $\widetilde{T}^{-1}u = \frac{1}{\lambda-\mu}\, u$, resulta que el problema de determinar los autovalores λ de T, $(\lambda > \mu)$, se reduce a encontrar los autovalores $\frac{1}{\lambda-\mu}$ de $\widetilde{T}^{-1}$.

Ahora bien, $\mathcal{D}_T = \{u \in C^2([a,b]) : R_i u = 0\} = \mathcal{D}_{\widetilde{T}}$ siendo $\mathcal{R}(\widetilde{T}) = C([a,b])$; luego $\widetilde{T}: \mathcal{D}_{\widetilde{T}} \longrightarrow C([a,b])$ y $\widetilde{T}^{-1}: C([a,b]) \longrightarrow \mathcal{D}_{\widetilde{T}} \subseteq C^2([a,b]) \subseteq \mathcal{D}(\widetilde{T}^{-1})$.

$\widetilde{T}^{-1}$ está en las condiciones del Teorema 0.3. En efecto, $\widetilde{T}^{-1}$ es simétrico pues T lo es y μ es real. Además si $G(x,y,\mu)$ es la función de Green para $\widetilde{T}$:

(2) $\qquad (\widetilde{T}^{-1}f)(x) = \int_a^b G(x,y,\mu)f(y)r(y)\, dy \quad , \quad f \in C([a,b])$,

y esto define un operador (completamente continuo, más aún, de Hilbert-Schmidt) simétrico que lleva $\mathcal{R}(\widetilde{T})$ sobre $\mathcal{D}_T$. Como $\mathcal{R}(\widetilde{T}) = \mathcal{D}(\widetilde{T}^{-1}) =$ $= C([a,b]) \supseteq C^2([a,b]) \supseteq \mathcal{D}_T = \mathcal{R}(\widetilde{T}^{-1})$ es suficiente ver que si $\{u_i\}$ es una sucesión de funciones continuas acotada en $\mathcal{H}$, $\{\widetilde{T}^{-1}(u_i)\}$ contiene una subsucesión que converge a una función continua. Pero esto sigue inmediatamente de una aplicación del Teorema de Arzelá-Ascoli. Por lo tanto $\sigma_p(\widetilde{T}^{-1}) \neq \emptyset$, $\sigma_p(\widetilde{T}^{-1}) \subset R$ y $\sigma_p(\widetilde{T}^{-1})$ es un conjunto finito o numerable.

Por otra parte, si $\varphi_j \in \mathcal{D}_T$, $\varphi_j \neq 0$, es autofunción para el autovalor λ_j de T, también φ_j será autofunción de $\widetilde{T}^{-1}$ asociada al autovalor $\Lambda_j = (\lambda_j-\mu)^{-1}$.

Recíprocamente, si ψ_j es tal que $\widetilde{T}^{-1}\psi_j = \Lambda_j\psi_j$ entonces $\psi_j \in C([a,b])$, $\widetilde{T}^{-1}\psi_j \in \mathcal{D}(T)$ y $\Lambda_j^{-1}\psi_j = \widetilde{T}\psi_j$. Tenemos así en correspondencia los autovalores de T y $\widetilde{T}^{-1}$, y también las autofunciones.

Además, si $T\varphi = \lambda\varphi$, $\varphi\neq 0$, también $T\overline{\varphi} = \lambda\overline{\varphi}$, y por lo tanto $\overline{\varphi} = c\varphi$. O sea, $c = e^{i\theta}$ y podemos suponer $\varphi = \overline{\varphi}$.

En consecuencia, $\sigma_p(T) \neq \emptyset$ y $\sigma_p(T) \subseteq R$. Además $\sigma_p(T)$ es infinito numerable. En efecto, si el número de autovalores fuese finito, como todos ellos son de multiplicidad uno, también será finito el número de autofunciones, y como $R(\tilde{T})$ es denso en H, resultaría que H admite un sistema completo finito, lo que es absurdo. Entonces los autovalores pueden ordenarse de manera que $|\Lambda_1| > |\Lambda_2| > \dots$, $\Lambda_j \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Las funciones φ_j normalizadas en H forman un sistema ortonormal allí y si $u = \tilde{T}^{-1}v$, $v \in C([a,b])$, se verifica:

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (u,\varphi_j)\varphi_j \text{ ; o sea, para todo } u \in D_T \text{ es } u = \sum(u,\varphi_j)\varphi_j \text{ en } H.$$

Sea $S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} (u,\varphi_j)\varphi_j(x) = \sum_{j=1}^{n} \Lambda_j(v,\varphi_j)\varphi_j$, y $m < n$.

Tenemos:

$$(3)\quad |S_n(x)-S_m(x)| \leqslant \sum_{m+1}^{n} |(v,\varphi_j)|.|\Lambda_j\varphi_j| \leqslant \sqrt{\sum|(v,\varphi_j)|^2}.\sqrt{\sum|\Lambda_j\varphi_j(x)|^2}$$

Aplicando la desigualdad de Bessel sigue que:

$$(4)\qquad |S_n(x)-S_m(x)| = o(1).\sqrt{\sum_{m+1}^{n}|\Lambda_j\varphi_j|^2(x)}$$

Por otra parte:

$$(5)\quad \sum_{j=1}|\Lambda_j\varphi_j(x)|^2 = \sum|\tilde{T}^{-1}\varphi_j(x)|^2 = \sum\left|\int_a^b G(x,y,\mu)\varphi_j(y)r(y)\,dy\right|^2 =$$

$$= \sum|(G(x,\cdot,\mu),\varphi_j)|^2 \leqslant \int_a^b |G(x,y,\mu)|^2.r(y)\,dy \leqslant M < \infty .$$

De (5) y (4) sigue que $S_n(x)$ converge uniformemente, y por lo tanto lo hace a $u(x)$. Más aún, hemos probado que:

$$(6)\qquad \sum|(u,\varphi_j)|.|\varphi_j(x)|$$

converge uniformemente, QED.

EJERCICIO. Demostrar (*).

3.4. Si las condiciones de contorno del problema no son separadas el teorema fundamental no es más válido en general. Por ejemplo, si Tu = = $-u''$, $u(0)+u(\pi) = 0$, $u'(0)-u'(\pi) = 0$ entonces, como ya sabemos, $\sigma_p(T) = C$, o si $u(0)+2u(\pi) = 0$, $u'(0)-2u'(\pi) = 0$ entonces $\sigma_p(T) = \emptyset$. Pero en estos casos lo que realmente ocurre es que T no es simétrico. En efecto, esto puede verificarse directamente, o indirectamente por medio del siguiente interesante:

TEOREMA. Sea T el operador $Tu = \frac{1}{r(x)}((-pu')'+qu)$ definido en $\mathcal{D}_T = \{u \in C^2([a,b]): R_j(u) = 0,\ j=1,2\}$ donde
$R_j(u) = \alpha_{j1}u(a) + \alpha_{j2}u'(a) + \alpha_{j3}u(b) + \alpha_{j4}u'(b)$, $j=1,2$,
y rango $(\alpha_{ij}) = 2$. Si T es simétrico (o lo que es lo mismo, si $p(a).|\Delta_{34}| = p(b).|\Delta_{12}|$) entonces: $\#\sigma_p(T) = \aleph_o$, los autovalores son reales, de multiplicidad uno o dos, y pueden ordenarse de manera que:

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots , \lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Existe un sistema de autofunciones real, ortonormal y completo en $L^2([a,b];r)$ tal que:
para todo $u \in \mathcal{D}_T$, $u(x) = \sum(u,\varphi_j)\varphi_j(x)$ uniformemente en $[a,b]$.

DEMOSTRACION. La demostración del teorema anterior se basó en la existencia de un μ tal que $\mu=\overline{\mu} \notin \sigma_p(T)$. (La semiacotación sólo se usó para probar este hecho). Luego el teorema quedará demostrado si probamos la siguiente proposición, pues en este caso podrá repetirse la demostración del Teorema fundamental , (cf. 2.6 y 3.1).

PROPOSICION. Si el operador de Sturm-Liouville T es simétrico entonces existe $\alpha \in R$ tal que

$$\lambda < \alpha \Rightarrow \lambda \notin \sigma_p(T).$$

DEMOSTRACION. Sea $\lambda_o < 0 \wedge \frac{q(x)}{r(x)}$ para todo $x \in [a,b]$, y $\lambda \leqslant \lambda_o$. Entonces $q(x)-\lambda.r(x) > 0$ en $[a,b]$. Supongamos que $\varphi(x)$ es una autofunción real de T para λ: $(-p\varphi')'+q\varphi = r\lambda\varphi$. Como $|\varphi'(x)|+|\varphi(x)| \neq 0$:
$0 < p(x)(\varphi'(x))^2 + (q(x)-\lambda r(x))(\varphi(x))^2 = p.\varphi'^2 + (p\varphi')'\varphi = (p\varphi'\varphi)'(x)$.
Resulta entonces que $p\varphi'\varphi$ es una función monótona estrictamente creciente. Luego se anula una vez a lo sumo. Como $p\neq0$, $\varphi'\varphi$ se anula a lo

sumo una vez en $[a,b]$. Supongamos que $\varphi(x_o).\varphi'(x_o) = 0$. x_o no puede ser un cero doble para φ. Tampoco puede serlo para φ' (en caso contrario tendríamos $\varphi''(x_o) = 0$ y por lo tanto $\varphi(x_o) = 0$). Entonces x_o es un cero de $\varphi\varphi'$ que anula a uno sólo de sus factores y en forma simple. Luego, o bien $\varphi\neq 0$ en $[a,b]$, o bien φ se anula en un único punto y la función tiene signos opuestos a izquierda y derecha del mismo, (si $x_o \in (a,b)$).

Supongamos ahora que λ y λ^* son autovalores distintos de T, reales y tales que $\lambda,\lambda^* \leqslant \lambda_o$, y sean φ, φ^* autofunciones reales correspondientes. Como T es simétrico: $(T\varphi,\varphi^*) = (\varphi,T\varphi^*)$ y en consecuencia $\int_a^b \varphi\varphi^*.r\ dx = 0$. De aquí sigue:

i) si T tiene dos autofunciones en estas condiciones una de ellas se anula en (a,b). Si ambas se anularan entonces lo harían en puntos distintos pues si para un x_o, $\varphi(x_o) = \varphi^*(x_o) = 0$ entonces $\varphi\varphi^*$ es no nula y conserva signo en $[a,b] \setminus \{x_o\}$, y por lo tanto $\int_a^b \varphi\varphi^*.r\ dx \neq 0$.

Supongamos ahora que $\lambda_i \leqslant \lambda_o$, $i=1,2,3$, son autovalores, dos a dos distintos, y φ_i autofunciones reales correspondientes. Probaremos que

ii) tres autofunciones en estas condiciones no pueden anularse en $[a,b]$.

Supongamos ii) por un momento. i) e ii) implican que no es posible que haya cuatro autovalores reales que no superen a λ_o. Entonces existe α tal que $\lambda < \alpha \Rightarrow \lambda \notin \sigma_p(T)$.

Veamos ii). Supongamos $\varphi_i(x_i) = 0$, $i=1,2,3$. Entonces los puntos x_i son distintos dos a dos y podemos suponer: $x_1 < x_3 < x_2$, y a φ_1 y φ_2 crecientes. Consideremos:

(1) $$u(x) = \varphi_2(x_3)\varphi_1(x)-\varphi_1(x_3)\varphi_2(x).$$

Entonces $u(x_3) = 0$. Sea $x < x'$. Luego, $u(x) - u(x') =$ $= \varphi_2(x_3)(\varphi_1(x)-\varphi_1(x'))-\varphi_1(x_3)(\varphi_2(x)-\varphi_2(x')) > 0$. Y $u(x)$ es una función que se anula en x_3 y es estrictamente creciente en $[a,b]$. En consecuencia

$$\int_a^b u(x).\varphi_3(x).r(x)\ dx \neq 0$$

Pero de (1) sigue $\int_a^b u\varphi_3\cdot r\ dx = 0$, contradicción, QED.

3.5. PROBLEMAS DE CONTORNO CON EXTREMOS SINGULARES. Consideremos la ecuación

$$(1) \qquad \ell(u) = (-p(x)u')' + q(x)u = \lambda r(x)u$$

en el intervalo finito (a,b) donde p, p', q y r son funciones reales continuas, y p y r son positivas (cf. 1.1 y 1.2, también 4.1). Si estas funciones no pueden extenderse al intervalo $[a,b)$ de manera que sigan verificando las propiedades mencionadas, diremos que <u>$x=a$ es un extremo singular para (1)</u>. Análogamente se define la singularidad en $x=b$.

Un ejemplo importante lo constituye la ecuación de Bessel

$$(2) \qquad (-xu')' + \frac{m^2}{x} - \lambda xu = 0 \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad m \geqslant 0.$$

En esta situación p y r se anulan en $x=0$, y q deviene infinita en ese extremo. El caso particular $m=0$:

$$(3) \qquad -(xu')' = \lambda xu \quad , \quad 0 < x < 1,$$

posee entonces un extremo singular en $x=0$, y será nuestro ejemplo en lo que sigue del capítulo.

Trataremos de mostrar como la información encerrada en la función de Green de un problema singular nos suministra resultados semejantes a los ya vistos en el caso regular estudiado en 3.2 y 3.3. Esta función de Green será la correspondiente a un problema de contorno para la ecuación (1), y en general, podrá construirse con el auxilio de un sistema lineal de dos condiciones de borde. Por ejemplo, $\underset{x \to a}{xu'} \to 0$, $\underset{x \to b}{u(x)} \to 0$.

Supongamos la presencia de un sistema de esta naturaleza, y que exista una función (de Green) $G(x,t)$ continua en $(x,t) \in (a,b) \times (a,b)$ tal que

$$(4) \qquad \int_a^b \int_a^b |G(x,t)|^2 \, r(x) \, r(t) \, dx \, dt < \infty.$$

Esta función actuando como núcleo (de Green) de un operador integral define una aplicación

$$(5) \qquad Aw(x) = \int_a^b G(x,t) \, w(t) \, r(t) \, dt$$

completamente continua de $L^2((a,b);r)$ en $L^2((a,b);r)$.

Supongamos que 0 no sea autovalor de (5) y que $G(x,t) = G(t,x)$ para todo (x,t). Entonces A define un operador autoadjunto con rango denso en $L^2((a,b);r)$.

Supongamos también que toda autofunción de A sea autofunción de $\ell(u) := -(pu')' + qu$ en el sentido que: $Aw = \mu w$ implica $w \in C^2$, $\mu\ell(w) = rw$, w satisface las condiciones de contorno.

Bajo estas hipótesis vale lo siguiente, como el lector comprobará sin mayores dificultades.

PROPOSICION. Existe un sistema $\{u_n\}$ de autofunciones de (1), ortonormal y completo en $L^2((a,b);r)$, cuyos autovalores correspondientes, $\{\lambda_n\}$, tienden a infinito con n, y son reales.

3.51. Cada autovalor es de multiplicidad menor o igual a dos pues ℓ es una expresión diferencial de segundo orden.

Son las condiciones de borde las que forzarán a la multiplicidad a tomar el valor uno (cf. teorema fundamental 3.3), las cuales, por otra parte, son las que intervienen en la construcción de la función de Green.

Designaremos con B un sistema lineal de condiciones de contorno. Consideremos el problema:

(P) $$\ell(u) = \lambda ru \quad , \quad B(u) = 0,$$

del cual supondremos también que satisface las hipótesis mencionadas en 3.5. Vale entonces (verificarlo):

PROPOSICION. Si (P) es tal que cualquiera sea λ, $\ell(u) = \lambda ru$ no implica $B(u) = 0$, entonces todo autovalor es de multiplicidad uno.

3.52. Frecuentemente se encuentra que los autovalores están ubicados en un semieje. Esto puede demostrarse, por ejemplo, utilizando proposiciones como la siguiente.

PROPOSICION. Si existe una función $m(x) \geqslant 0$, $m \neq 0$, tal que para cierto número c real:

(1) $$\int_a^b [\ell(u_k)-cru_k]\, u_k.m\, dx > 0$$

entonces $\lambda_k > c$.

En efecto, en todo intervalo $[c,d] \subset (a,b)$ sólo hay un número finito de de ceros u_k.

3.53. Supongamos que se verifican las hipótesis en 3.5.

Si $v(x) \in L^2(r)$ es real, vale

(1) $$v(x) = \sum_1^\infty c_n\, u_n(x) \quad , \quad c_n = \int_a^b v(x)\, u_n(x).r(x)dx,$$

donde la convergencia es en media. En consecuencia, para cada $x \in (a,b)$, (cf. 3.5(5)),

(2) $$G(x,t) = \sum \frac{u_n(x)}{\lambda_n}\, u_n(t) \quad \text{en} \quad L^2(a < t < b;\ r(t)).$$

La igualdad de Parseval asegura entonces que:

(3) $$\|v\|^2 = \sum_1^\infty c_n^2 \quad ; \quad \int_a^b |G(x,t)|^2.rdt = \sum_1^\infty \left|\frac{u_n(x)}{\lambda_n}\right|^2 .$$

Integrando en x, obtenemos:

(4) $$\infty > \int_a^b \int_a^b |G|^2.r(x)\ r(t)\ dxdt = \sum_1^\infty 1/\lambda_n^2 .$$

Si en lugar de la condición 3.5(4), G cumple condiciones más restrictivas, vale la siguiente proposición.

PROPOSICION. Supongamos que exista C tal que

(5) $$C > \int_a^b |G(x,t)|^2.r(t)dt,$$

y que $\int_a^b r(t)dt < \infty$. Si $h(x) = \int_a^b G(x,t).w(t)\ r(t)dt$, es decir, si h pertenece al rango de A,

(6) $$h = \sum_1^\infty \frac{c_n(w)}{\lambda_n}\ .\ u_n,$$

uniformemente en (a,b), (E. Schmidt).

DEMOSTRACION. En efecto, de (2) sigue que

(7) $$c_n(h) = \int_a^b c_n(G(.,t))\ w(t)\ r(t)\ dt = c_n(w)/\lambda_n .$$

Como $C > \sum_1^\infty |\frac{u_n(x)}{\lambda_n}|^2$, y $\{C_n(w)\} \in \ell^2$, tenemos

$|\sum_M^N c_n(w)\ u_n(x)/\lambda_n| \leq C(\sum_M^N |c_n(w)|^2)^{1/2} = o(1)$, QED.

El sistema $\{u_n(x)\cdot u_m(t): n,m = 1,2,\ldots\}$ es ortonormal y completo en $L^2((a,b) \times (a,b);\ r(x)r(t))$. Los coeficientes de Fourier de G con respecto a este sistema son (cf. (2)):

(8) $$\int_a^b \int_a^b G(x,t)\ u_n(x)\ u_n(t).r(x)\ r(t)\ dxdt = \frac{\delta_{mn}}{\lambda_n}\ .$$

Por lo tanto, en ese espacio vale en media:

(9) $$G(x,t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{u_n(x)\ u_n(t)}{\lambda_n}\ .$$

3.54. Supongamos que valgan las hipótesis de 3.5, y que exista k_o tal que si $k \geq k_o$ entonces $\lambda_k > 0$. En esta situación tenemos la siguiente

PROPOSICION. La convergencia en 3.53(9) es uniforme sobre compactos, (T. Mercer).

DEMOSTRACION. Como las autofunciones son continuas en $x \in (a,b)$, la función

(1) $$G_n(x,y) = G(x,y) - \sum_{i=1}^n u_i(x)\ u_i(y)/\lambda_i$$

es continua en (x,y). Además, si $f \in L^2(r)$ es real:

(2) $$\iint G_n(x,y)\ f(x)\ f(y)\ r(x)\ r(y)\ dxdy = \sum_{n+1}^\infty c_i^2(f)/\lambda_i \geq 0,$$

si $n \geq k_o$. Luego $G_n(x,x) \geq 0$ para todo x. De esto sigue que la serie

$$\sum_1^\infty |u_n(x)|^2/\lambda_n$$

a términos no negativos desde un momento en adelante, converge para todo x y que su suma no supera a $G(x,x)$.

Por otra parte, si $m,s > k_o$:

(3) $$|\sum_m^s u_j(x)\ u_j(y)/\lambda_j|^2 \leq \sum_m^s |u_j(x)|^2/\lambda_j\ .\ \sum_m^s |u_j(y)|^2/\lambda_j \leq$$

$$\leqslant G_{k_o}(y,y) \cdot \sum_m^s |u_j(x)|^2/\lambda_j .$$

Luego, fijado x, $\sum_1^s u_j(x)\, u_j(y)/\lambda_n$ converge uniformemente sobre compactos y define una función B(x,y) continua en y. Sea f(y) continua con soporte compacto en (a,b). Entonces

(4) $$\int_a^b B(x,y)\, f(y)\, r(y)\, dy = \sum_{i=1}^{\infty} c_n(f)\, u_n(x)/\lambda_n = Af(x).$$

En consecuencia, para funciones de ese tipo se verifica,

(5) $$\int_a^b (B(x,y)-G(x,y))\, f(y)\, r(y)\, dy = 0.$$

Esto implica B(x,y) = G(x,y) para todo y para cada x. Luego,

(6) $$G(x,x) = B(x,x) = \sum_1^{\infty} |u_n(x)|^2/\lambda_n .$$

El teorema de convergencia monótona de Dini asegura la convergencia uniforme sobre compactos de la serie en (6). De (3) sigue entonces que

(7) $$G(x,y) \doteq \sum_1^{\infty} u_n(x)\, u_n(y)/\lambda_n ,$$

sobre compactos de (a,b)×(a,b). QED.

3.55. α) Supongamos que valgan las hipótesis de 3.5. y que $q(x) \geqslant 0$.

Sea D una variedad lineal contenida en $L^2((a,b);r) \cap C^1((a,b))$ tal que

i) $u_k \in D$, para todo u_k autofunción de A,

ii) $\phi \in D \Rightarrow 0 \leqslant \int_a^b [p\phi'^2+q\phi^2]\, dx < \infty$.

iii) $\phi \in D \Rightarrow \int_a^b [p\phi' u_k'+q\phi u_k]\, dx = \int_a^b \phi[-(pu_k')'+qu_k]\, dx$.

Supondremos todas las funciones reales, y definimos en D la funcional bilineal:

(1) $$< f,g > = \int_a^b [pf'g'+qfg]\, dx,$$

para la cual se verifican:

(2) $$< u_j,u_k > = \lambda_k \int_a^b u_j\, u_k . r dx = \lambda_k\, \delta_{jk},$$

(3) $$< \phi,u_k > = \lambda_k \int_a^b \phi u_k.rdx = \lambda_k\ c_k(\phi),\ \text{para todo } \phi \in D.$$

Entonces de la hipótesis e ii) sigue que $\lambda_k > 0$ para todo k. Si $\phi \in D$ tenemos:

(4) $$\sum \lambda_k\ c_k^2(\phi) = \sum \frac{< \phi,u_k >^2}{< u_k,u_k >} \leqslant < \phi,\phi > = \int_a^b [p\phi'^2+q\phi^2]\,dx < \infty.$$

ß) Supongamos que valgan las hipótesis de 3.5, y además que todo autovalor λ_k sea positivo.

Sea E una variedad lineal contenida en $L^2((a,b);r)$ y constituida por funciones dos veces continuamente diferenciables tal que

iv) $\phi \in E \Rightarrow \ell(\phi)/r \in L^2((a,b);r)$,

v) $E \supset \{u_k\}$,

vi) $\phi \in D \Rightarrow \int_a^b [(-p\phi')'+q\phi]\ u_j\ dx = \int_a^b \phi[(-pu_j')'+qu_j]\,dx.$

Supongamos como en α) que todas la funciones son reales, y a T definido por: $T(\phi) := \ell(\phi)/r$. Entonces,

(5) $$c_n(T\phi) = (T\phi,u_n) = (\phi,Tu_n) = \lambda_n.c_n(\phi),\ \text{para todo } n.$$

Por lo tanto

(6) $$\sum \lambda_n^2.c_n^2(\phi) < \infty,$$

y esto implica (4).

N.B. De (7) 3.53 sigue que si $w \in L^2((a,b);r)$ entonces $c_n(Aw) =$
$= c_n(w)\backslash\lambda_n$. En nuestro caso ß) tenemos para $\phi \in E$:
$c_n(A(T\phi)) = c_n(T\phi)/\lambda_n =$ (por (5)) $= c_n(\phi)$.

Esto implica que $\phi = A(T\phi)$, y que ϕ pertenece al rango de A.

3.56. Supongamos que valgan las hipótesis de 3.5 y 3.54.

PROPOSICION. Sea $\phi \in L^2((a,b);r)$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n.\ c_n^2(\phi)$ converge. Entonces la serie de Fourier de ϕ

(1) $$\sum_{1}^{\infty} c_n(\phi)\ u_n(x)$$

converge uniformemente sobre compactos de (a,b). Si ϕ es continua y $G(x,x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, vale

(2) $$\frac{\phi(x)}{\sqrt{G(x,x)}} \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(\phi)\ u_n(x)}{\sqrt{G(x,x)}}\ , \quad a < x < b.$$

DEMOSTRACION. En efecto, si $N \geqslant M \geqslant k_o$

$$\left|\sum_{M+1}^{N} c_n(\phi)\ u_n(x)\right| \leqslant \left(\sum_{M+1}^{N} \lambda_n \cdot c_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{M+1}^{N} u_n^2(x)/\lambda_n\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant G(x,x)\ .\ \sum_{M+1}^{N} \lambda_n \cdot c_n^2(\phi)\ , \qquad \text{QED.}$$

3.57. EJEMPLO. Sea $\ell(u) := -(xu')'$, $a = 0$, $b = 1$, $r(x) = x$; las condiciones de contorno B: $u(1) = 0$, $xu'(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$. Entonces,

$$u_1 = 1 \quad , \quad u_2 = \ln x$$

son dos soluciones linealmente independientes de $\ell(u) = 0$ tales que $p(x).W(x) = 1$. Construyendo la función de Green como en 2.4(1) tenemos:

(1) $$G(x,t) = \begin{cases} -\ln x\ , & t \leqslant x, \\ -\ln t\ , & t \geqslant x, \end{cases}$$

la cual verifica 3.53(5) (y por lo tanto 3.53(4)):

(2) $$\int_{o}^{x} |\ln x|^2 . t\ dt + \int_{x}^{1} |\ln t|^2 . t\ dt < C < \infty.$$

Entonces:

(3) $$Af(x) = (\ln \tfrac{1}{x}) \int_{o}^{x} f(t)t\ dt + \int_{x}^{1} (\ln \tfrac{1}{t})\ f(t)\ dt$$

define un operador autoadjunto de tipo Hilbert-Schmidt para el cual vale

(4) $$(-x(Af)')' = \left(\int_{o}^{x} f(t)t\ dt\right)' = x.f(x)\ , \quad 0 < x < 1\ ,$$

donde la última igualdad se verifica en casi todo punto si $f \in L^2((0,1);t)$, y en todo punto si además f es continua. De (3) sigue que $A^{-1}(0) = \{0\}$, y por tanto que el rango de A es denso en $L^2(r)$.

Si f es autofunción de A resulta:

$$-x\mu f' = \int_o^x f(t).t\,dt = o(\|f\|_{2,r}) \text{ para } x \to 0;\ (-x\mu f')' = xf.$$

Luego, $f \in C^2((0,1])$, $f(1) = 0$ y $xf'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. O sea, f es autofunción para ℓ con $\mu = 1/\lambda$. Vale entonces la tesis de la proposición 3.5. Tambien se aplica la proposición 3.51 pues la ecuación $\ell(u) = \lambda xu$ siempre tiene soluciones con $u(1) \neq 0$.

Los autovalores resultan positivos en este ejemplo. En efecto, si u es autofunción de A, u es acotada y verifica las condiciones de borde; por lo tanto

$$\int_o^1 (-xu')'u\,dx = \int_o^1 xu'^2 dx > 0$$

y se aplica la proposición 3.52 con $c = 0$, $m = 1/x$.

También se cumplen las hipótesis de la proposición 3.53, como vimos en (2). Luego, para toda $f \in L^2(r)$, y uniformemente continua en $(0,1]$, vale

$$\text{(5)} \qquad Af(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(f)}{\lambda_n} u_n(x) \quad , \quad (\|u_n\|_{2,r} = 1).$$

Además (cf. proposición 3.54),

$$\text{(6)} \qquad G(x,t) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)\, u_n(t)}{\lambda_n} \quad , \quad (x,t) \in (0,1] \times (0,1].$$

La variedad lineal $D = \{\phi \in C((0,1]) \cap L^\infty(0,1) \cap C^1((0,1)):$ $\phi' \in L^2((0,1);t),\ \phi(1) = 0\}$ cumple con las hipótesis i), ii), iii) de 3.55 α). Como $G(x,x) = \ln 1/x$ vale, para $\phi \in D$,

$$\text{(7)} \qquad \frac{\phi(x)}{\sqrt{\ln 1/x}} \doteq \sum_1^{\infty} c_n(\phi) \left(\frac{u_n(x)}{\sqrt{\ln 1/x}}\right) \quad , \quad 0 < x \leqslant 1.$$

REFERENCIAS. [6], [12]; Riesz et Sz-Nagy, op. cit. Cap. 0.

CAPITULO 4

PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE CON CONDICIONES DE CONTORNO LINEALMENTE DEPENDIENTES DEL PARAMETRO ESPECTRAL.

4.1. NOTACION. Varios modelos de la Física y de la ingeniería que utilizan ecuaciones en derivadas parciales dan lugar, luego de la separación de variables, a ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones de contorno separadas del siguiente tipo:

$$(1)\qquad \begin{cases} Tu: = \frac{1}{r(x)}\,[(-p(x)u')' + q(x)u] = \lambda u, \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ (\lambda\alpha_{11} + \beta_{11})u(a) - (\lambda\alpha_{i2} + \beta_{12})u'(a) = 0, \\ (\lambda\alpha_{21} + \beta_{21})u(b) - (\lambda\alpha_{22} + \beta_{22})u'(b) = 0, \end{cases}$$

donde p, p', q y r son funciones reales continuas y p(x), r(x) son positivas (en $a \leqslant x \leqslant b$); α_{ij}, β_{ij} son números reales tales que $\beta_{i1}^2 + \beta_{i2}^2 > 0$, $i = 1,2$.

Uno de los problemas que más interesa resolver de (1), aparte de la caracterización del espectro y las correspondientes autosoluciones, es el del desarrollo en autofunciones.

Aunque este problema sólo se diferencia del problema de Sturm-Liouville regular en que en las condiciones de borde aparece el parámetro λ, esta diferencia no es insignificante.

4.11. Nosotros estudiaremos el siguiente caso particular

$$(1)\qquad \begin{cases} Tu := \frac{1}{r}((-pu')' + qu) = \lambda u, \\ \beta_{11}u(a) - \beta_{12}u'(a) = 0 \\ (\lambda\alpha_1 + \beta_{21})u(b) - (\lambda\alpha_2 + \beta_{22})u'(b) = 0 \end{cases}$$

con
$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

Más aún, normalizaremos el problema asumiendo

$$(2)\qquad \delta = 1.$$

Esto último no restringe la generalidad de los resultados teóricos relativos a autovalores y desarrollos en autofunciones; sin embargo no es una normalización aconsejable para todas las aplicaciones físicas.

4.12. Usaremos las siguientes abreviaturas:

$$(1)\qquad \begin{cases} (u)_{\alpha b} = \alpha_1 \cdot u(b-0) - \alpha_2 \cdot u'(b-0), \\ (u)_{\beta a} = \beta_{11} \cdot u(a+0) - \beta_{12} \cdot u'(a+0), \\ (u)_{\beta b} = \beta_{21} \cdot u(b-0) - \beta_{22} \cdot u'(b-0). \end{cases}$$

Nuestro problema se presenta ahora de la siguiente manera:

$$(2)\qquad \begin{cases} (-pu')' + (q-\lambda r)u = 0 \quad , \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ (u)_{\beta a} = 0, \\ -(u)_{\beta b} = \lambda(u)_{\alpha b} \,. \end{cases}$$

4.2. DOMINIO DE T. Supongamos por un momento que en el sistema (2) precedente $p \equiv 1$ y que $Q(x) \in L^1(a,b)$ reemplaza a $q-\lambda r$.
La ecuación:

$$(1)\qquad -u'' + Q(x).u = 0 \quad , \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

podrá resolverse si reinterpretamos adecuadamente el concepto de solución (*): por solución de (1) entenderemos una función u absolutamente continua en todo subintervalo cerrado de (a,b) cuya derivada u' satisfaga las mismas propiedades y tal que $-(u')' + Q(x).u = 0$ se satisfaga c.d. en (a,b). u'(x) será entonces derivada de u(x) en todo $x \in (a,b)$, y u''(x) existirá en casi todo punto.

Convendremos en decir que u es localmente absolutamente continua, $u \in AC_{loc}$, si u es absolutamente continua en todo subintervalo compacto.

Análogamente, diremos que u satisface a

$$(2)\qquad -(pu')' + (q-\lambda r)u = 0 \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

si u es localmente absolutamente continua, también $pu' \in AC_{loc}$ y (2) se satisface casi doquier $x \in (a,b)$.

Decir que u es solución de 4.12(2) en este nuevo sentido significa que además existen los límites u(a+0), u'(a+0), u(b-0), u'(b-0) y satisfacen las condiciones de borde $(u)_{\beta a} = 0$, etc.. La existencia de los límites u(a+0), u(b-0) para u es equivalente a decir que u(x) es uniformemente continua en (a,b)

Si además u(a+0) = u(a), u(b-0) = u(b), ¿resultará u absolutamente conti-

(*) CARATHEODORY, C., VORLESUNGEN uber Reelle Funktionen, Chelsea, (1948), p.672.

nua en $[a,b]$?

No es cierto en general pero sí en nuestro caso pues aquí u' es uniformemente continua en (a,b) y por lo tanto integrable en ese intervalo.

Como $p \in C^1([a,b])$, $pu' \in AC_{loc}$ equivale a $u' \in AC_{loc}$ y por lo tanto $(u')' = u''$ existe c.d. $x \in (a,b)$.

Estamos ahora en condiciones de definir un dominio para el operador T de 4.11(1):

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ u: u,u' \in AC_{loc}(a < x < b),\ u' \text{ uniformemente continua en } (a,b), Tu \in L^2((a,b);\, r) \right\}.$$

Las funciones u(x) son a valores complejos. La nomenclatura $\mathcal{D}(T)$ se usó para diferenciar este dominio del designado con $\mathcal{D}_T$ y definido en el capítulo precedente: $\mathcal{D}(T) \supsetneq \mathcal{D}_T$.

$\mathcal{D}(T)$ no es el dominio que más nos interesará pues en él no aparecen las condiciones de contorno. Ese conjunto será un subconjunto de $\mathcal{D}(T)$ y de él nos ocuparemos oportunamente. La idea es definir un dominio sobre el cual T defina un operador autoadjunto. Este objetivo no se persiguió en el caso regular de los capítulos 2 y 3; allí $\mathcal{D}_T \subseteq C^2([a,b])$. Si en lugar de ese T consideramos $\tilde{T} = T-\mu I$ con $\mu \notin \sigma_p(T)$ sabemos que su rango es $C([a,b])$ y existe la resolvente $\tilde{T}^{-1}$. Este operador, completamente continuo sobre $\mathcal{R}(T)$, debería tener dominio $\mathcal{H}$ si T fuera autoadjunto, cosa que no ocurre. Es decir, T sobre $\mathcal{D}_T$ es simétrico pero no autoadjunto.

Una extensión autoadjunta de T requerirá un dominio más extenso. Esto es lo que procuramos en estos momentos: definir desde un comienzo un dominio $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}(T)$ sobre el cual el operador en cuestión sea ya autoadjunto.

Logrado esto, la posibilidad de desarrollar en autofunciones será consecuencia del teorema espectral para operadores autoadjuntos y no necesitaremos conocer de antemano el núcleo de Green.

4.21. NB. 1) $\mathcal{D}(T)$ es en cierto sentido un dominio maximal sobre el cual puede definirse T.

2) Si u(x) es absolutamente continua en (a,b), $u \in AC(a,b)$, entonces es uniformemente continua allí y en consecuencia existen $u(a+0)$, y $u(b-0)$. O sea, $AC(a,b) \subsetneq AC_{loc}(a,b) \cap$ uniformemente continuas.

($\neq$ pues $(x-a).\text{sen}\,\frac{1}{x-a} \notin AC(a,b)$). Podemos entonces definir $\mathcal{D}(T)$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ u \in C^1([a,b]) \;:\; u' \in AC_{loc}(a,b), Tu \in L^2((a,b);r) \right\},$$

y también como:

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ u \in AC(a,b) \;:\; u' \in AC(a,b), u'' \in L^2((a,b);r) \right\},$$

o lo que es lo mismo:

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ u \;:\; u,u' \in AC(a,b), u'' \in L^2(a,b) \right\}.$$

4.3. REALIDAD DE LOS AUTOVALORES. Sean $u_i = u_i(x,\lambda_i)$, $i=1,2$, funciones de $\mathcal{D}(T)$ y soluciones no triviales de

$$(1)\qquad \begin{cases} Tu: = \frac{1}{r}\,((-pu')' + qu) = \lambda u, \\ (u)_{\beta a} = 0, \\ (u)_{\dot{\beta} b} = -\lambda (u)_{\alpha b}, \end{cases}$$

donde $\lambda \in C$. Entonces por ser soluciones de la ecuación:

$$(2)\qquad (p(u_1'u_2 - u_2'u_1))' = (\lambda_2-\lambda_1)ru_1u_2, \text{ c.d.x},$$

y sigue

$$(3)\qquad (\lambda_1-\lambda_2)\int_a^b u_1u_2 r dx = p(u_1u_2'-u_1'u_2)\Big|_a^b =$$

$$= p(b)W(u_1,u_2)(b) - p(a)W(u_1,u_2)(a).$$

Por otra parte tenemos (cf.4.11):

$$W(u,v)(x) = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{\delta} \left| \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} u & -v \\ -u' & v' \end{pmatrix} \right| (x),$$

$$(4)\qquad W(u,v)(b) := \lim_{x\to b} \frac{1}{\delta} \left| \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & -v \\ -u' & v' \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} (u)_{\alpha b} & -(v)_{\alpha b} \\ (u)_{\beta b} & -(v)_{\beta b} \end{vmatrix} = \frac{1}{\delta}\,[(u)_{\beta b}(v)_{\alpha b} - (u)_{\alpha b}(v)_{\beta b}]$$

Resulta entonces de las condiciones de borde y de 4.11(2) que

(5) $$p.W(u_1, u_2)\Big|_a^b = p(b) . W(u_1, u_2)(b) = p(b) [(u_1)_{\beta b}(u_2)_{\alpha b} -$$

$$-(u_2)_{\beta b}(u_1)_{\alpha b}] = (\lambda_2 - \lambda_1)p(b) . (u_1)_{\alpha b}(u_2)_{\alpha b} .$$

O sea,

(6) $$(\lambda_2 - \lambda_1) . \left\{ \int_a^b u_1 u_2 r dx + p(b)(u_1)_{\alpha b}(u_2)_{\alpha b} \right\} = 0$$

Supongamos λ_1 no real. Entonces $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ será también un autovalor (con autofunción $u_2 = \bar{u}_1$) y por lo tanto de (6):

(7) $$\int_a^b |u_1(x)|^2 . r(x) \, dx + p(b) . |(u_1)_{\alpha b}|^2 = 0.$$

En consecuencia, $u_1 \equiv 0$ sobre $[a,b]$; contradicción.

Luego, $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1$. Siendo los autovalores reales podemos asumir, de ahora en adelante, que las autofunciones son también reales.

4.4 ORTOGONALIDAD DE LAS AUTOFUNCIONES. (6) y (7) sugieren la introducción, de una medida positiva, y consecuentemente de un espacio de Hilbert, en el cual las citadas expresiones se traducen como relación de ortogonalidad y cuadrado de la norma de un elemento, respectivamente. Designemos con μ a la medida definida en $[a,b]$ de la siguiente manera:

(1) $$\begin{cases} \mu(M) = \int_M r(x) \, dx , & \text{si } M \subseteq [a,b), \\ \mu(\{b\}) = p(b). \end{cases}$$

Sea $(.,.)$ el producto escalar en el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L^2([a,b];\mu)$.

Si definimos

(2) $$v_i(x) = \begin{cases} u_i(x) & \text{si } x \in [a,b) \\ (u_i)_{\alpha b} & \text{si } x = b \end{cases} , \quad i = 1, 2,$$

y las $u_i(x)$ son como en 4.3, obtenemos:

(3) $$(v_1, v_2) = \int_{[a,b]} v_1 \bar{v}_2 \, d\mu = \int_a^b u_1 u_2 r dx + p(b) . (u_1)_{\alpha b} . (u_2)_{\alpha b} = 0.$$

4.5. EL OPERADOR A. El paso siguiente consiste en definir un operador A en el espacio $\mathcal{H}$ de modo que su problema de autovalores traduzca el problema 4.3(1).

(1) $$\mathcal{D}(A) = \left\{ w \in \mathcal{H};\ u := w\Big|_{(a,b)} \in \mathcal{D}(T),\ (u)_{\beta a} = 0, w(b) = (u)_{\alpha b} \right\}.$$

(2) $$(Aw)(x) := \begin{cases} (Tu)\ (x) & \text{si} \quad x \in (a,b), \\ -(u)_{\beta b} & \text{si} \quad x = b \end{cases}$$

El valor en x=a no necesita definirse pues $\mu(\{a\}) = 0$.

PROPOSICION. i) $\mathcal{D}(A)$ es denso en $\mathcal{H}$;
ii) las funciones v_1, v_2 definidas en 4.4(2) son autofunciones de A correspondientes a los autovalores λ_1, λ_2, y vale $(v_1, v_2) = 0$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

DEMOSTRACION. i) $\mathcal{D}(A)$ contiene todas las funciones dos veces continuamente diferenciables nulas en sendos entornos de a y b ($v(b) = 0$); contiene además funciones v cuya restricción a (a,b) coincide con aquella de una $u \in C^2([a,b])$ tal que $\int_a^b |u(x)|^2 \cdot r(x)dx < \varepsilon$, $u(a) = 0 = u'(a)$,

$\alpha_1 u(b-0) - \alpha_2 . u'(b-0) = k$, cualesquiera sean ε y k.

De aquí sigue que $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$.

ii) $$Av = \lambda v \text{ equivale a } \begin{cases} Tu = \lambda u & \text{sobre } (a,b) \\ (u)_{\beta a} = 0 \\ -(u)_{\beta b} = \lambda (u)_{\alpha b}, \end{cases}$$ QED.

La demostración de esta proposición asegura que el problema de autovalores original se traduce correctamente en el problema de autovalores de A para el cual vale el siguiente resultado.

Pero antes observemos que en lo que sigue cometeremos un abuso de notación, denotando con la misma letra a un elemento de $\mathcal{H}$ y a su restricción a (a,b). Del contexto siempre quedará claro cual interpretación del símbolo es la apropiada.

4.51. TEOREMA. i) A es simétrico;
ii) A es acotado inferiormente,
iii) A no está acotado superiormente: no existe C tal que

$$(Au,u) \leq C(u,u) \text{ para todo } u \in \mathcal{D}(A);$$

iv) A es esencialmente autoadjunto.

DEMOSTRACION. i) Sean u, v $\in \mathcal{D}(A)$. Entonces (cf. 4.3(4)):

$$(Au,v) - (u,Av) = \int (\bar{v}\ Au - u\ \overline{Av})\ d\mu = \int_a^b (\bar{v}\ Tu - u\ T\bar{v})\ rdx +$$

$$+ [(u)_{\alpha b}\ (\bar{v})_{\beta b} - (u)_{\beta b}\ (\bar{v})_{\alpha b}] \cdot p(b) = \int_a^b [p(u\bar{v}' - u'\bar{v})]'\ dx -$$

$$- W(u,\bar{v})(b).p(b) = 0 .$$

ii) $$(Au,u) = \int_a^b \bar{u}\ [(-pu')' + qu]dx - p(b) \cdot (\bar{u})_{\alpha b}(u)_{\beta b} =$$

$$= \int_a^b (p|u'|^2 + q|u|^2) - p(b)[(\bar{u})_{\alpha b}(u)_{\beta b} + \bar{u}(b-0)u'(b-0)] +$$

$$+ p(a).\bar{u}(a+0).u'(a+0),$$

$$(u,u) = \int_a^b |u|^2 rdx + p(b) \cdot |(u)_{\alpha b}|^2 .$$

Debemos probar que existe c tal que

(1) $$\int_a^b (p|u'|^2 + q|u|^2)dx + c \int_a^b |u|^2 rdx + cp(b)\left|(u)_{\alpha b}\right|^2 \geq$$

$$\geq p(b) \cdot \left[(\bar{u})_{\alpha b}\ (u)_{\beta b} + \bar{u}(b-0)\ u'(b-0)\right] - p(a) \cdot \bar{u}(a+0)\ u'(a+0)$$

Supongamos $\alpha_2 = 0$. Entonces:

(2) $$(\bar{u})_{\alpha b}\ (u)_{\beta b} = \alpha_1\ \beta_{21}\left|u(b-0)\right|^2 - \alpha_1\ \beta_{22}\ \bar{u}(b-0)\ u'(b-0),$$

y en consecuencia, usando 4.11(2),

(3) $$p(b) \cdot \left|\bar{u}(b-0)\ u'(b-0) + (\bar{u})_{\alpha b}\ (u)_{\beta b}\right| = p(b).\left|\alpha_1 . \beta_{21}\right| . \left|u(b-0)\right|^2.$$

Por otra parte sabemos que (cf. Cap. 0) para cada $K_2 > 0$ existe un K_1 tal que

(4) $$\left|u(b-0)\right|^2 \leq K_1 \int_a^b |u|^2 dx + \frac{1}{K_2} \int_a^b |u'|^2 dx.$$

De (3) y (4) obtenemos eligiendo K_2 bastante grande:

$$(5)\qquad p(b)\ .\ |\alpha_1\ \beta_{21}|\cdot|u(b-0)|^2 \leqslant p(b)\ .\ |\alpha_1\ \beta_{21}|\ .\ K_1\int_a^b |u|^2dx\ +$$

$$p(b)\ .\ |\alpha_1\ \beta_{21}|\cdot K_2^{-1}\ \int_a^b |u'|^2dx \leqslant p(b)\ .\ |\alpha_1\ \beta_{21}|\ .\ K_1 \int_a^b |u|^2dx\ +$$

$$+\ \frac{1}{2}\ \int_a^b p|u'|^2dx.$$

Tomando un $c > 0$ convenientemente grande resulta que el último miembro es menor o igual a:

$$(6)\qquad \int_a^b q|u|^2dx\ +\ c\ \int_a^b |u|^2rdx\ +\ \frac{1}{2}\int_a^b p|u'|^2dx\ +\ cp(b)\ .\ \left|(u)_{\alpha b}\right|^2$$

Si $\bar{u}(a+0)\ u'(a+0) \neq 0$ entonces $\beta_{12} \neq 0$ y

$$u'(a+0) = \frac{\beta_{11}}{\beta_{12}}\ .\ u(a+0)\ .$$

Usando una fórmula análoga a (4) con b-0 reemplazado por a+0, resulta;

$$(7)\qquad |p(a)|\ .\ \left|\frac{\beta_{11}}{\beta_{12}}\right|.\ |u(a+0)|^2 \leqslant c'.\ \int_a^b |u|^2rdx\ +\ \frac{1}{2}\ \int_a^b p|u'|^2dx.$$

De (3), (5), (6) y (7) sigue ahora (1).

Supongamos ahora $\alpha_2 \neq 0$. Entonces

$$u'(b-0) = \frac{\alpha_1 u(b-0)\ -\ (u)_{\alpha b}}{\alpha_2}\ ,\quad (u)_{\beta b} = \frac{\beta_{22}(u)_{\alpha b}\ -\ u(b-0).}{\alpha_2}$$

Por lo tanto

$$(8)\qquad p(b)\cdot\ |(\bar{u})_{\alpha b}\ (u)_{\beta b}\ +\ \bar{u}(b-0)\ u'(b-0)|\ =$$

$$= p(b)\ .\ \left|\frac{\beta_{22}|(u)_{\alpha b}|^2\ +\ \alpha_1\ |\bar{u}(b-0)|^2\ -\ (\bar{u})_{\alpha b}\ u(b-0)\ -(u)_{\alpha b}\ \bar{u}(b-0)}{\alpha_2}\right| =$$

$$\leqslant p(b)\ \left\{ \left|\frac{\beta_{22}}{\alpha_2}\right|.\ |(u)_{\alpha b}|^2\ +\ \left|\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right|.\ |\bar{u}(b-0)|^2\ +\ \frac{2}{|\alpha_2|}\ |(u)_{\alpha b}|\ .\ |u(b-0)|\ \right\}$$

$$\leqslant\ C_1\ \left(|(u)_{\alpha b}|^2\ +\ |u(b-0)|^2\right)\ ,$$

donde C_1 es una constante adecuada.

El último miembro resulta (usando nuevamente (4)) menor o igual que

$$(9) \qquad \int_a^b (\tfrac{p}{2}|u'|^2 + q|u|^2)dx + c\int_a^b |u|^2 r dx + cp(b)|.\ |(u)_{\alpha b}|^2$$

si c es una constante suficientemente grande.

De (7), (8) y (9) sigue otra vez (1).

iii) Para probar esta proposición construiremos una sucesión $\{\psi_n\}$ de elementos de $\mathcal{D}(A)$ con la propiedad $\|\psi_n\|_{\mathcal{H}} = \|\psi_n\|_2 = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty}(A\psi_n,\psi_n) = \infty$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer a = 0, b = 1. Sea $0 \not\equiv \varphi(x) \in C^\infty(0,\infty)$ con soporte compacto en $(0,1)$. Definiendo $\varphi_n(x) = \varphi(nx)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, resulta $\varphi_n \in \mathcal{D}(A)$ para todo n y

$$(10) \qquad (\tfrac{1}{r}(-p\varphi_n')',\varphi_n) = \int_0^1 p(x)\ .|\varphi_n'|^2 dx = n^2 \int_0^1 p.|\varphi'(nx)|^2 dx$$

$$= n\int_0^1 p(t/n)\ .\ |\varphi'(t)|^2 dt = n.(p(0).\|\varphi'\|_2^2 + o(1)\ ).$$

Además:

$$(11) \qquad \|\varphi_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^1 |\varphi(nx)|^2 .r(x)dx = \frac{1}{n}\int_0^1 |\varphi|^2 .r(t/n)dt =$$

$$= \frac{1}{n}\ (\|\varphi\|_2^2 .r(0) + o(1))\ .$$

En consecuencia llamando $\psi_n = \varphi_n/\|\varphi_n\|_{\mathcal{H}}$:

$$(\tfrac{1}{r}(-p\psi_n')',\psi_n) \sim \alpha.n^2,\ \alpha = \text{cte.} \neq 0.$$

iv) Conocida la simetría de A, bastará probar (cf. Cap. 0) que existe un número real C tal que A-CI tiene inversa acotada con dominio denso en $\mathcal{H}$. Como A es semiacotado inferiormente, existe μ real tal que

$$((A - \mu I)f,f\ ) \geqslant 0 \text{ para todo } f \in \mathcal{D}(A).$$

Si $C < \mu$, C es un punto del campo de regularidad de A, es decir, existe $A_C^{-1} = (A-CI)^{-1}$ y es acotado en su dominio.

Para un operador semiacotado arbitrario no puede asegurarse que además el rango de A_C sea denso en $\mathcal{H}$. Pero en este caso particular en que A_C es un cierto operador diferencial sí podemos demostrar que el rango del mismo es denso en $\mathcal{H}$.

Veamos que $R(A_C) \supseteq F := \left\{ f : f \in \right.$ función uniformemente continua en $\left.(a,b),\ f(b) \text{ arbitrario} \right\}$. Obviamente $\overline{F} = \mathcal{H}$.

Sean entonces f una función uniformemente continua en (a,b) y φ un número dado. Debemos demostrar que hay una u en el dominio de A tal que:

(12) $$(A-CI)u = f \text{ en } (a,b),\ [(A-CI)(u)](b) = \varphi.$$

Sea $F_o = \{f : f \in$ uniformemente continua en $(a,b),\ f(b) = 0\}$.

(13) $$F_o \subseteq R(A_C).$$

En efecto, si $f \in F_o$, debemos probar que existe $u \in \mathcal{D}(A)$ tal que

(14) $$\begin{cases} -(pu')' + (q-Cr)u = f.r \\ \beta_{11}u(a+0) - \beta_{12}u'(a+0) = 0 \\ (\beta_{21} + C\alpha_1)\, u(b-0) - (\beta_{22}+C\alpha_2)\, u'(b-0) = 0. \end{cases}$$

Ahora las condiciones de borde corresponden a las de un problema clásico de Sturm-Liouville (cf. 4.11(2)) y como $(A-CI)u = 0$ sii $u = 0$, este problema diferencial es resoluble utilizando su función de Green. Se tiene entonces que existe $u \in C^2([a,b])$ que resuelve (14).

Redefiniendo: $u(b) = (u)_{\alpha b}$, resulta que la nueva función, que denotaremos con la misma letra, pertenece a $\mathcal{D}(A)$, y (14) se escribe

(15) $$\begin{cases} (T-CI)u = f,\ a < x < b, \\ (u)_{\beta a} = 0,\ u(b) = (u)_{\alpha b}, \\ (A-CI)(u)(b) = -(u)_{\beta b} - C(u)_{\alpha b} = 0 = f(b). \end{cases}$$

Esto prueba (13). Observemos ahora que vale la siguiente proposición:

(16) Existe un polinomio $P(x)$ tal que $P(a-0) = P'(a-0) = 0$

$$-(P)_{\beta b} - C(P)_{\alpha b} = \varphi.$$

Supongamos (16) por un momento.

(17) $$[(A-CI)P]\ (b) = \varphi.$$

Sea $F \in F$, $F(b) = \varphi$. Luego: $\{F-(A-CI)P\}\ (b) = 0$.

Llamando $f = F-(A-CI)P$, resulta $f \in F_o$, y de (13) sigue que existe $u \in \mathcal{D}(A)$ tal que $(A-CI)(u) = f$

O lo que es lo mismo: $F = (A-CI)(u+P)$; entonces

(18) $$\mathcal{R}(A_C) \supseteq F.$$

Veamos ahora (16). Si $P(a) = P'(a) = 0$ entonces necesariamente deberá ser: $P(x) = (x-a)^2 . Q(x)$.

Luego $(P)_{\beta b} + C(P)_{\alpha b} = -\varphi$ si y sólo si

$$(\beta_{21} + C\alpha_1)P(b) - (\beta_{22} + C\alpha_2)P'(b) = -\varphi.$$

Como $|\beta_{21} + C\alpha_1|^2 + |\beta_{22} + C\alpha_2|^2 > 0$ existen γ_1 y γ_2 tales que: $(\beta_{21} + C\alpha_1)\gamma_1 - (\beta_{22} + C\alpha_2)\gamma_2' = -\varphi$. Todo se reduce entonces a encontrar un $Q(x)$ tal que

$$\begin{cases} \gamma_1 = P(b) = (b-a)^2\ Q(b) \\ \gamma_2 = P'(b) = 2(b-a).\ Q(b) + (b-a)^2 .\ Q'(b), \end{cases}$$ QED.

4.6. A es un operador esencialmente autoadjunto. Probar que es autoadjunto equivale a probar que es cerrado.

Para lograr esto último demostraremos que existe un operador cerrado A_0 y un subespacio J de dimensión finita tal que si $K = \mathcal{D}(A_0)$ y $L = \mathcal{D}(A)$ entonces $K \cap J = \{0\}$, $L = K + J$, (cf. 0.6. y 0.61).

Recordemos lo siguiente

DEFINICION. $\dim (L / K) = \dim J.$

Sabemos que esta es una buena definición pues $\dim J$ sólo depende de L y K, y leemos $\dim (L/K)$ como "dimensión de L módulo K".

4.61. A_o es, por definición, la restricción de A a la variedad lineal definida de la siguiente manera:

(1) $\mathcal{D}(A_o) := \{u \in \mathcal{D}(A) : u(a+0) = u'(a+0) = u(b-0) = u'(b-0) = 0\}$

PROPOSICION. A_o es un operador cerrado.

DEMOSTRACION. En efecto,

(2) $$A_o(x) = \begin{cases} Tu & \text{si } a < x < b, \\ 0 & \text{si } x = b. \end{cases}$$

Si $\mathcal{D}(A_o) \ni u_n \to u$ y $Au_n \xrightarrow{\cdot} v$ entonces $u(b) = 0 = v(b)$.

Si designamos también con v la restricción de v al subintervalo (a,b) tenemos $Tu_n \to v$ $(L^2(a,b))$. En consecuencia $(-pu_n')' \to w = vr - qu$ $(L^2(a,b))$.

Luego en $a < x < b$: $-pu_n' \xrightarrow{\cdot} y = \int_a^x w(t)\,dt$ pues $u_n'(a+0) = 0$. De aquí sigue que: $u_n' \xrightarrow{\cdot} -y/p$ en $a < x < b$. Por lo tanto:
$u_n(x) \xrightarrow{\cdot} u(x) = \int_a^x -(y/p)\,dt$ en $a < x < b$. En consecuencia $u(a+0) = u'(a+0) = u(b-0) = u'(b-0) = 0$ y

$$u = -\int_a^x \frac{dt}{p(t)} \int_a^t [r(s).v(s) - q(s).u(s)]ds.$$

Luego $u \in \mathcal{D}(A_o)$ y $Au = v$, QED.

4.62. Sea A_1 el operador definido de la siguiente manera:

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathcal{D}(A_1) = \{u \in \mathcal{D}(A) : u(b-0) = u'(b-0) = 0\}, \\ \\ A_1 u = Au \text{ para todo } u \in \mathcal{D}(A_1). \end{cases}$$

Evidentemente $\mathcal{D}(A_o) \subset \mathcal{D}(A_1)$, A_1 extiende a A_o y ambos son simétricos.

PROPOSICION. $\qquad \dim\ \mathcal{D}(A_1)/\mathcal{D}(A_o) = 1.$

DEMOSTRACION. Sean $g_i(x)$, i=1,2, polinomios que verifican:

$$\begin{cases} g_1(a+0) = 1 \\ g_1'(a+0) = g_1(b-0) = g_1'(b-0) = 0 \end{cases} ; \begin{cases} g_2(a+0) = g_2(b-0) = g_2'(b-0) = 0 \\ g_2'(a+0) = 1 \end{cases}$$

Como elementos de $\mathcal{H}$ supondremos que $g_i(b) := 0$, i=1,2, y por construcción resulta $(g_i)_{\alpha b} = 0$, i=1,2. Además

$$g = \beta_{12} g_1 + \beta_{11} g_2 \in \mathcal{D}(A_1)\backslash\mathcal{D}(A_o).$$

Por otra parte si $u \in \mathcal{D}(A_1)$ entonces $(u)_{\beta a} = 0$. Como $(g)_{\beta a} = 0$ sigue enseguida que existe c tal que $u - cg \in \mathcal{D}(A_o)$, y por lo tanto

$$\mathcal{D}(A_o) = \mathcal{D}(A_1) \dotplus [g] \ , \quad \text{QED.}$$

COROLARIO. $A_1 = \bar{A}_1$.

4.63. PROPOSICION. $\dim [\mathcal{D}(A) / \mathcal{D}(A_1)] = 2.$

DEMOSTRACION. Sean h_i, i=1,2, polinomios tales que

$$\begin{cases} h_1(a+0) = h_1'(a+0) = h_1(b-0) = 0 \\ h_1'(b-0) = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} h_2(a+0) = h_2'(a+0) = h_2'(b-0) = 0 \\ h_2(b-0) = 1 \end{cases}$$

Definiendo $h_i(b) = (h_i)_{\alpha b}$, i=1,2, resulta $h_i \in \mathcal{D}(A) \setminus \mathcal{D}(A_1)$; además los h_i son linealmente independientes módulo $\mathcal{D}(A_1)$. Por otra parte dado $u \in \mathcal{D}(A)$ existen c_1 y c_2 tales que $u-c_1h_1-c_2h_2 \in \mathcal{D}(A_1)$, QED.

Sigue entonces que $A = \bar{A}$ y así el

TEOREMA. $A = A^*$.

4.7. EL CASO CLASICO: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Este caso puede considerarse como la situación límite lograda haciendo $\alpha_1 = \alpha_2 = \varepsilon \longrightarrow 0$. Es más simple repetir los razonamientos contenidos en 4.1 - 4.6 para obtener los resultados correspondientes:

sea $H = L^2([a,b]; r)$ con lo que $\|u\|_H^2 = \int_a^b |u(x)|^2 r(x)dx$; y sea

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ u : u,u' \in AC_{loc}(a,b), u' \text{ unif. continua en } (a,b), Tu \in H \right\}.$$

Definimos

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathcal{D}(A_s) := \left\{ u \in \mathcal{D}(T) : (u)_{\beta a} = 0 = (u)_{\beta b} \right\} \\ A_s u := Tu \quad \text{si} \quad a < x < b. \end{cases}$$

Tendremos entonces el siguiente

TEOREMA. A_s es un operador autoadjunto y semiacotado inferiormente en H.

Obsérvese que la demostración de la simetría de T sobre D_T dada en 3.1 puede repetirse cuando T es reemplazado por A_s y $\mathcal{D}_T$ por $\mathcal{D}(A_s)$.

La constancia de W(x) - p(x) se prueba como en 1.3.

Para esto puede utilizarse el siguiente:

LEMA. Sea $\frac{dW}{dx} = P(x).W$, $P(x) \in L^1_{loc}(a,b)$, W_0 arbitrario. Entonces existe una única solución W(x) absolutamente continua sobre intervalos compactos tal que $W(x_o) = W_0$ y $\frac{dW}{dx}(x) = P(x).W(x)$ c. d. x:

$$W(x) = W_0 . e^{-\int_{x_o}^{x} P(t)dt} .$$

Este es un caso particular de un resultado muy general que demostraremos más adelante.

4.71. Como $\mathcal{D}(A_s)$ contiene las funciones dos veces continuamente diferenciables en $[a,b]$ que satisfacen las condiciones de contorno sabemos del capítulo precedente que existe una sucesión de autovalores reales simples de A_s: $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ tales que la familia de autofunciones (normalizadas) correspondientes es una base ortonormal para H. Tenemos entonces el siguiente resultado (cf. 0.7 f.f.) que es consecuencia inmediata del teorema espectral para operadores autoadjuntos:

TEOREMA. El espectro de A_s es puramente discreto y los autovalores son simples, reales, y se acumulan en $+\infty$. Las autofunciones normalizadas forman una base para H.

4.72. H puede interpretarse como un subespacio de $\mathcal{H}$. Precisamente, es isomorfo al de las funciones con $u(b) = 0$. Análogamente, A_s puede pensarse como un operador con dominio $\mathcal{D}(A_s) \subset H \subset \mathcal{H}$ tal que $R(A_s) \subset H$;

En esta situación el nuevo operador A_s no es autoadjunto pero sí cerrado.

4.73. Sea A_{s1} el operador obtenido de A_s por restricción del dominio a

(1) $$\mathcal{D}(A_{s1}) = \left\{ u \in \mathcal{D}(A_s) \ : u(b-0) = u'(b-0) = 0 \right\}$$

y A_{s0} el obtenido por restricción a

(2) $$\mathcal{D}(A_{s0}) = \left\{ u \in \mathcal{D}(A_s) \ : u(a+0)=u'(a+0) = u(b-0) = u'(b-0) = 0 \right\}.$$

Como en 4.62 obtenemos

(3) $$\dim\left(\mathcal{D}(A_{s1}) / \mathcal{D}(A_{s0})\right) = 1,$$

y también que

(4) $$\dim\left(\mathcal{D}(A_s) / \mathcal{D}(A_{s1})\right) = 1.$$

(En efecto, definamos $h_1(x)$ y $h_2(x)$ así:

$$\begin{cases} h_1(b-0)=1 \\ h_1'(b-0)=h_1(a+0)=h_1'(a+0)=0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} h_2(b-0)=h_2(a+0)=h_2'(a+0)=0 \\ h_2'(b-0)=1 \end{cases}$$

Sea $h = \beta_{22}h_1+\beta_{21}h_2$. Entonces $h \in \mathcal{D}(A_s) \setminus \mathcal{D}(A_{s1})$ y $\mathcal{D}(A_s)=\mathcal{D}(A_{s1}) \dot{+} [h]$.)

Luego

(5) $$\dim (\mathcal{D}(A_s) / \mathcal{D}(A_{s0})) = 2$$

TEOREMA. Entre los dominios del operador autoadjunto A_s y el operador cerrado A_{s0} (cf. 4.61) existe la siguiente relación:

$$\dim (\mathcal{D}(A_s) / \mathcal{D}(A_{s0})) = 2$$

4.8. DESARROLLO EN AUTOFUNCIONES. Recurriendo ahora al lema 0.8 y observando que en él los operadores A y B están en situación semejante a los operadores A_s y A, concluimos que $\sigma(A)$ es puramente discreto. Reuniendo resultados y utilizando, por ejemplo, el teorema espectral, obtenemos la siguiente proposición cuya verificación dejamos al lector.

TEOREMA. El espectro de A consiste de una sucesión no acotada de autovalores reales con un único punto de acumulación en $+\infty$:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots \longrightarrow +\infty.$$

Además cada autovalor es simple. Puede elegirse un sistema de autofunreales $\{\varphi_i\}$ tal que $A\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$ para todo i y

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \int_a^b u(x)\varphi_k(x)\,d\mu$$

para toda $u \in \mathcal{H}$ en el sentido de la convergencia fuerte en $\mathcal{H}$.

4.81. El siguiente teorema aporta información adicional respecto de la relación que establece el teorema 4.8.

TEOREMA. Si $v \in H = L^2((a,b);r)$ y $\tilde{\varphi}_k$ es la restricción de φ_k al intervalo abierto (a,b), se verifica:

(1) $$v = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_k \cdot \int_a^b v\tilde{\varphi}_k r\,dx ,$$

$$(2) \qquad 0 = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k)_{\alpha b} \cdot \tilde{\varphi}_k .$$

En ambos casos las series son fuertemente convergentes en H. Además

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k)^2_{\alpha b} = \frac{1}{p(b)} .$$

DEMOSTRACION. Si $v \in H$ definimos

$$u(x) = \begin{cases} v(x), & a < x < b, \\ 0 \quad , & x = b \quad ; \end{cases}$$

entonces (1) sigue del Teorema 4.8. Por otra parte si

$$u(x) = \begin{cases} 0 \quad , & a < x < b, \\ 1 \quad , & x = b \quad , \end{cases}$$

entonces

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)p(b)\varphi_k(b) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)p(b)(\varphi_k)_{\alpha b} ,$$

pues φ_k es autovector de A. Luego:

$$0 = \lim_{h\to\infty} \|u-\sum_1^{\infty}(\varphi_k)_{\alpha b}p(b).\varphi_k\|^2_{\mathcal{H}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \{ p(b)^2 . \int_a^b [\sum_{k=1}^{n} \tilde{\varphi}_k(x)(\varphi_k)_{\alpha b}]^2 r dx +$$

$$+ p(b)[1 - \sum_{k=1}^{n} (\varphi_k)^2_{\alpha b} . p(b)]^2 \}$$

de donde resultan (2) y (3), QED.

4.82. Nótese que (2) y (3) de 4.81 aseguran que no hay desarrollo único para ningún elemento de H. El sistema $\{\tilde{\varphi}_j\}$ no es ortogonal en $L^2((a,b);r)$.

EJERCICIO. Demostrar la simplicidad de los autovalores afirmada en el T.4.8 (sug. cf. 4.3(1) y 4.5(1)).

N.B. Las series -como en (2)- que convergen en media a 0 y cuyos coeficientes no son todos nulos, se denominan <u>series nulas</u>.

REFERENCIAS. [11], [10].

CAPITULO 5

SOLUCIONES REALES, CEROS Y EFECTOS EN LA SOLUCION POR ALTERACION DE LOS COEFICIENTES EN ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN

5.0. Consideremos la ecuación diferencial

(1) $$\frac{d}{dx}(K(x)u'(x)) - G(x)u(x) = 0 \ , \ -\infty < A \leqslant x \leqslant B < +\infty$$

siendo $K(x)$, $G(x)$ funciones reales: $K(x) \in C([A,B])$, $K(x) > 0$ para todo $x \in [A,B]$; $G(x) \in L^1([A,B])$. Tenemos de esta manera una ecuación "casi diferencial" dado que $G(x) \in L^1([A,B])$. u se dirá solución de (1) si ella es absolutamente continua, si la función $a(x) = K(x).u'(x)$ (c.d.) es absolutamente continua y u satisface (1) casi doquier.

Como se pide que Ku' "sea" absolutamente continua, resulta $\frac{K(x)u'(x)}{K(x)} = {}$ $=: m(x)$ una función continua que coincide con $u'(x)$ c.d. y puede ser tomada como representante de su clase; su primitiva será $u(x)$.

Resulta entonces $u(x)$ derivable en <u>todo</u> punto y $m(x) = \frac{du}{dx}$.

De esta manera podemos asegurar que si $u(x)$ es solución de la ecuación (1), $u' = \frac{du}{dx}$ existe en todo punto y es una función continua. Indiquemos siguiendo la notación de Neumark, $u^{[1]} = K(x)u'$, $u^{[2]} = \frac{d}{dx}(Ku'(x)) - G(x)u(x)$, (cf. 7.1).

Llamaremos <u>Wronskiano casi diferencial</u> a:

(2) $$\mathcal{W}(u_1,u_2) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1^{[1]} & u_2^{[1]} \end{vmatrix} = K(x). \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = K\,W(u_1,u_2)$$

Resulta entonces: $\mathcal{W}(x) \gtreqless 0$ si y sólo si $W(x) \gtreqless 0$.

Observemos además que u es solución de (1) si y sólo si $u^{[2]} = 0$.

5.1. También para estas ecuaciones casi diferenciales vale -como oportunamente veremos- un teorema de condiciones iniciales donde se asegura la existencia y unicidad de la solución en $[A,B]$ dados $u(x_o)$ y $u^{[1]}(x_o)$, $x_o \in [A,B]$. Nótese que aquí solamente se pide $K(x)$ continua y no como en capítulos anteriores $p(x) \in C^1$. Demostraremos también el siguiente teorema (cf. 7.21, 7.22):

i) $W(u_1,u_2)$ con u_i solución de (1), $i = 1,2$, se anula en un punto si lo hace idénticamente, y en este y sólo en este caso u_1 y u_2 son linealmente dependientes;

ii) toda solución de (1) es combinación lineal de dos soluciones linealmente independientes.

Si suponemos que $u(a) = 0$, $u(b) = 0$ siendo $[a,b] \subseteq [A,B]$ sigue que $u'(x) = 0$ para algún $x \in (a,b)$. De aquí resulta que si u tiene infinitos ceros en $[A,B]$, u' también tendrá infinitos ceros en $[A,B]$; por lo tanto existirá $C \in (A,B)$ tal que $u(C) = 0$ y $u'(C) = 0$; pero entonces $u^{[1]}(C) = 0$ y esto implica el siguiente resultado.

TEOREMA. Sea $u(x)$ una solución de la ecuación casi diferencial (1). Si u tiene infinitos ceros en $[A,B]$ es necesariamente $u \equiv 0$.
Dicho de otra forma: soluciones no-triviales de la ecuación (1) se anulan sólamente un número finito de veces en $[A,B]$.

5.11. Demostraremos a continuación el primer teorema de Sturm. Nótese que en este capítulo consideramos solamente soluciones reales de la ecuación (1).

TEOREMA. Los ceros de soluciones linealmente independientes de la ecuación (1) se separan mutuamente. Es decir, si u_1, u_2 son soluciones linealmente independientes de (1) y a,b son ceros consecutivos de u_1 $(a < b)$, entonces existe $C \in (a,b)$ tal que $u_2(C) = 0$, y necesariamente $C \neq a$, $C \neq b$.

DEMOSTRACION. Si u_1 y u_2 son linealmente independientes, como $u_1(a) = 0$, el wronskiano casi-diferencial es igual a $-K(a)u_1'(a)u_2(a)$ y es no nulo. O sea, $u_2(a) \neq 0$. Análogamente $u_2(b) \neq 0$.

Supongamos que $u_2(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Como $\frac{u_1}{u_2}(a) = 0$, $\frac{u_1}{u_2}(b) = 0$,

$(\frac{u_1}{u_2})' = \frac{u_1'u_2 - u_2'u_1}{u_2^2} = \frac{W(u_1,u_2)}{K.u_2^2}$, debe existir $C \in (a,b)$ tal que

$(\frac{u_1}{u_2})'(C) = 0$. Pero entonces $W(C) = 0$. Esto implica que u_1 no es linealmente independiente de u_2, contradicción. QED.

5.2. TEOREMA. Consideremos las ecuaciones:

$$\frac{d}{dx}(K(x)u') - G_1(x)u = 0; \quad \frac{d}{dx}(K(x)u') - G_2(x)u = 0,$$

siendo $\Delta G = G_1 - G_2 > 0$ c.d. (y $0 < \int_B^A \Delta G\, dx < \infty$); entonces las soluciones de la segunda ecuación oscilan más rápidamente que las soluciones de la primera.

Sean u_1, u_2 soluciones de la primera y segunda ecuación respectivamente. Si u_1 tiene varios ceros en $[A,B]$ <u>decir que</u> u_2 <u>oscila más rápidamente que</u> u_1 significa que u_2 tiene al menos un cero estrictamente entre dos ceros consecutivos de u_1 (entendemos que u_1 y u_2 son soluciones no triviales).

DEMOSTRACION. Sean x_1, x_2 dos ceros consecutivos de u_1 y supongamos $u_1(x) > 0$, $u_2(x) > 0$, para todo $x \in (x_1, x_2)$. Por ser:

(2) $$\frac{d}{dx}[K(u_1'u_2 - u_1u_2')] = (G_1 - G_2)u_1u_2$$

resulta:

(3) $$u_1^{[1]}.u_2 - u_2^{[1]}u_1 \Big|_{x_1}^{x_2} =$$

$$= W(x_1) - W(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \Delta G.u_1u_2dx > 0 .$$

Pero $K > 0$, $u_1(x_1) = 0$, $u_1(x_2) = 0$ y $u_i > 0$ en (x_1,x_2) implican $u_1^{[1]}(x_2) \leqslant 0$ y $u_1^{[1]}(x_1) \geqslant 0$; por lo tanto: $(Ku_1'u_2)(x_2) \leqslant 0$, $(Ku_1'u_2)(x_1) \geqslant 0$. De esto sigue una contradicción (cf.(3)). QED.

5.21. NOTAS.

1) En realidad hemos probado que entre dos ceros consecutivos de u_1: x_1, x_2, hay un cero de u_2 si $\int_{x_i}^{x_2} \Delta G\, dx > 0$, $\Delta G \geqslant 0$ c.d. en (x_1,x_2), permaneciendo K invariable.

2) El hecho que $u_1' = \frac{du_1}{dx}$ en todo punto juega un papel importante.

En efecto, concluímos que $(u_1^{[1]}.u_2)(x_2) = K(x_2).u_2(x_2).u_1'(x_2) \leqslant 0$ pues seguramente $u_1'(x_2)$ existe y es $u_1'(x_2) \leqslant 0$.

5.22. Consideremos ahora el caso en que K y G varían simultáneamente; sean las ecuaciones

(1) $u_1^{[2]} \equiv \frac{d}{dx}(K_1u_1') - G_1u_1 = 0 \quad ; \quad u_2^{[2]} \equiv \frac{d}{dx}(K_2u_2') - G_2u_2 = 0,$

siendo $G_1 = G_2 + \Delta G$, $K_1 = K_2 + \Delta K$ con $\Delta G > 0$, $\Delta K > 0$, $K_2 > 0$.

Tenemos ahora

$$\frac{d}{dx}(K_1u_1'u_2) = \frac{d}{dx}(K_1u_1')u_2 + K_1u_1'u_2' = G_1u_1u_2 + K_1u_1'u_2'$$

$$\frac{d}{dx}(K_2u_2'u_1) = G_2u_1u_2 + K_2u_1'u_2'$$

luego

(2) $$\frac{d}{dx}(K_1u_1'u_2 - K_2u_2'u_1) = \Delta G.u_1u_2 + \Delta K.u_1'u_2' \quad ,$$

expresión que difiere de la que aparece en el Teorema anterior (cf. 5.2(2)) en el término $\Delta K\ u_1'u_2'$; para evitar esto consideraremos:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u_1}{u_2}\ (K_1u_1'u_2 - K_2u_2'u_1)\right) = \frac{u_1}{u_2}[\Delta G.u_1u_2 + \Delta K.u_1'u_2'] +$$

$$+ \frac{u_1'u_2 - u_2'u_1}{u_2^2}\ (K_1u_1'u_2 - K_2u_2'u_1) =$$

$$= \Delta G.u_1^2 + K_1(u_1')^2 - 2K_2\ \frac{u_1u_1'u_2'}{u_2} + K_2\ \frac{u_1^2\ u_2'^2}{u_2^2} =$$

$$= \Delta G.u_1^2 + \Delta K.(u_1')^2 + K_2.(u_1' - \frac{u_1u_2'}{u_2})^2 .$$

Hemos obtenido entonces la <u>igualdad de Picone</u>: si $u_2 \neq 0$

(3) $\frac{d}{dx}(\frac{u_1}{u_2}(K_1u_1'u_2 - K_2u_2'u_1)) = \Delta G.u_1^2 + \Delta K.(u_1')^2 + K_2\left[u_1' - \frac{u_1u_2'}{u_2}\right]^2.$

Por lo tanto, si a,b son ceros consecutivos de u_1, siendo $u_1(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ y si también suponemos $u_2(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$:

(4) $$\int_a^b \Delta G\, u_1^2\, dx + \int_a^b \Delta K\, (u_1')^2\, dx + \int_a^b K_2\, [u_1' - \frac{u_1u_2'}{u_2}]^2\, dx =$$

$$= \frac{u_1}{u_2}(K_1u_1'u_2 - K_2u_2'u_1)\Big|_a^b ,$$

y entonces si $u_2(a) \neq 0 \neq u_2(b)$: $\frac{u_1}{u_2}(K_1u_1'u_2 - K_2u_2'u_1)\Big|_a^b > 0$ pues el primer miembro lo es. Pero $u_1(b) = 0 = u_1(a)$, contradicción.

TEOREMA. Si en la ecuación 5.0 (1) K y G disminuyen de manera que las hipótesis hechas sobre ellas se mantienen: $K_1 = K_2 + \Delta K$ con $\Delta K > 0$, $G_1 = G_2 + \Delta G$ con $\Delta G > 0$, entonces aumenta la oscilación de las soluciones en el sentido que estrictamente entre dos ceros consecutivos de una solución no trivial de $u_1^{[2]} = 0$ hay al menos un cero de cada solución no trivial de $u_2^{[2]} = 0$.

DEMOSTRACION. Sean a,b dos ceros consecutivos de u_1; por lo observado anteriormente sólo falta considerar el caso en que, por ejemplo, $u_2(a) = 0$, ya que ahora no podemos usar sin más la igualdad de Picone. Pero si $x \longrightarrow a$ resulta que

$$\frac{u_1(x)}{u_2(x)} \longrightarrow \frac{u_1'(a)}{u_2'(a)} > 0$$

pues los <u>ceros de las soluciones son simples</u> (cf.5.1). El segundo miembro de (4) tiende a

$$\left(\frac{u_1'}{u_2'}\right)(a).\ \lim_{x\to a}(K_1u_1'u_2 - K_2u_2'u_1) = 0.$$

Y nuevamente tenemos contradicción. QED.

5.23. NOTA. Una observación análoga a la Nota 1 de 5.21 es aplicable en este caso para asegurar la existencia de un cero de u_2 entre dos consecutivos, a,b, de u_1. Si suponemos $K_1 \geqslant K_2$, $G_1 \geqslant G_2$ c.d. en $[a,b]$, el miembro izquierdo de 5.22(4), que es igual a

$$(1) \qquad \int_a^b \Delta G . u_1^2 dx + \int_a^b \Delta K \; u_1'^2 dx + \int_a^b K_2 \left(\frac{u_1' u_2 - u_1 u_2'}{u_2} \right)^2 dx$$

es positivo si $\Delta G > 0$ en un conjunto de medida positiva de (a,b). Si esto no ocurre, bastará que $K_1 > K_2$ en un conjunto de medida positiva de todo subintervalo de $[a,b]$ para asegurar que (1) es positivo. En efecto, si así no fuera

$$\int_a^b \Delta K \; . \; u_1'^2 dx = 0 \quad ,$$

de donde seguiría $u_1' \equiv 0$ en $[a,b]$ y por lo tanto $u_1(x) = u_1(a) = 0$. Finalmente, si $G_1 = G_2$ c.d y $K_1 = K_2$ en un intervalo $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, entonces u_1 y u_2 son en $[\alpha,\beta]$ soluciones de la misma ecuación, por lo que (1) = 0 sólo si u_1 y u_2 son linealmente dependientes en $[\alpha,\beta]$.

5.3. TEOREMAS DE COMPARACION.

Consideremos los sistemas:

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} \frac{d}{dx}(K_1 u') - G_1 u = 0 \\ u(a) = \alpha_1 \\ u'(a) = \alpha_1' \end{cases} \qquad\qquad (\mathrm{II}) \begin{cases} \frac{d}{dx}(K_2 u') - G_2 u = 0 \\ u(a) = \alpha_2 \\ u'(a) = \alpha_2' \end{cases}$$

con $|\alpha_i| + |\alpha_i'| \neq 0$, $i = 1,2$, $a \leqslant x \leqslant b$.

Asumiremos las siguientes hipótesis sobre las ecuaciones y las condiciones iniciales:

ECUACIONES

(E)
1) G_i real $\in L^1$, $K_i > 0$ continua, $i = 1,2$.
2) No se verifican simultáneamente $K_1 = K_2$, $G_1 = G_2$ c.d. en algún subintervalo de $[a,b]$.
3) En ningún subintervalo de $[a,b]$ es admisible para ambas ecuaciones la solución $u = \text{cte} \neq 0$.

CONDICIONES INICIALES

(CI) $\left\{ \alpha_1 \neq 0 \Rightarrow \alpha_2 \neq 0 \text{ y } \frac{K_1(a)\alpha_1'}{\alpha_1} \geqslant \frac{K_2(a)\alpha_2'}{\alpha_2} \right.$.

En todo momento supondremos, aunque no lo digamos explícitamente, que K y G satisfacen las relaciones siguientes: $K_1 \geqslant K_2$, $G_1 \geqslant G_2$ c.d..
La hipótesis (E) asegura la validez del Teorema 5.22, es decir, el aumento de oscilación de las soluciones, pues ella implica que 5.23(1) es positiva.

En efecto, sea u_1 solución no trivial de 5.22(1). Si 5.23(1) fuera cero entonces $G_1 = G_2$ c.d. en (a,b). De (E) 2) seguiría entonces $K_1 > K_2$ en $(x_1,x_2) \subset (a,b)$, y por lo tanto $u_1' \equiv 0$ allí. O sea, u_1 = cte en ese intervalo por ser u_1 solución no trivial, $u_1 \neq 0$ en (x_1,x_2). Luego $G_1 = 0$ c.d. allí. Por lo tanto $G_2 = 0$ en casi todo punto de (x_1,x_2). Pero en esta situación (II) admitiría una solución constante no trivial en ese subintervalo, contradiciendo (E) 3).

TEOREMA. (PRIMER TEOREMA DE COMPARACION). Sea u_1 solución del sistema (I) y u_2 solución del sistema (II); entonces u_2 tiene por lo menos tantos ceros en (a,b] como u_1, supuestas las hipótesis (E) y (CI). Más aún, si numeramos los ceros de u_1 en (a,b], $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$, y los de u_2, $x_1' < x_2' < x_3' < \dots$, se tiene que para todo k para el cual existe x_k: $x_k' < x_k$.

DEMOSTRACION. Por lo probado anteriormente sabemos que u_2 tiene un cero entre dos ceros consecutivos de u_1; por lo tanto basta sólo probar que u_2 tiene un cero entre a y x_1. Si $\alpha_1 = u_1(a) = 0$ esto es cierto, a menos que u_1 no se vuelva a anular en (a,b].

Supongamos entonces $\alpha_1 \neq 0$; si $u_2 \neq 0$ en $[a,x_1)$, la fórmula de Picone da lugar a:

$$(1) \qquad A \equiv u_1^2 \left(\frac{K_1u_1'}{u_1} - \frac{K_2u_2'}{u_2}\right)\Bigg|_a^{x_1} =$$

$$= \int_a^{x_1} \Delta G\, u_1^2 dx + \int_a^{x_1} \Delta K\, u_1'^2 dx + \int_a^{x_1} K_2 \left(\frac{u_1' u_2 - u_1 u_2'}{u_2}\right)^2 dx \equiv B$$

siendo $B > 0$ pues valen las hipótesis (E). Más aún, esto mismo vale cualquiera sea α_1, si $u_2 \neq 0$ en (a, x_1), como se ve aplicando (1) a $[a + \varepsilon, x_1)$ y pasando al límite.

Por otra parte:

$$\alpha_1^{-2} A = \frac{u_1^2}{\alpha_1^2} \left(\frac{K_1 u_1'}{u_1} - \frac{K_2 u_2'}{u_2}\right) \Bigg|_a^{x_1} = \frac{K_2 u_2'}{u_2}(a) - \frac{K_1 u_1'}{u_1}(a) \leqslant 0$$

por la hipótesis (CI), contradicción. QED.

5.31. TEOREMA. (SEGUNDO TEOREMA DE COMPARACION). Bajo las mismas hipótesis (E) y (CI), si $u_2(b) \neq 0$ y u_1, u_2 tienen el mismo número de ceros en (a,b) entonces $u_1(b) \neq 0$ y se verifica:

$$\frac{K_1(b)\, u_1'(b)}{u_1(b)} > \frac{K_2(b)\, u_2'(b)}{u_2(b)} \tag{1}$$

DEMOSTRACION. i) Tomemos $x_1 = b$ en 5.3(1) y supongamos $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$ en (a,b); entonces del primer teorema de comparación sigue que $u_1(b) \neq 0$. Además $B > 0$.

Si no fuera $\dfrac{K_1(b)\, u_1'(b)}{u_1(b)} > \dfrac{K_2(b)\, u_2'(b)}{u_2(b)}$, sería $A \leqslant 0$, absurdo.

ii) Supongamos que u_1, u_2 tengan exactamente n ceros en (a,b); entonces: $a < x_1' < x_1 < x_2' < x_2 < \ldots < x_n' < x_n < b$.

El argumento utilizado en la demostración de i) puede repetirse ahora, aplicando 5.3(1) al intervalo (x_n, b) y queda así probada la validez de (1). QED.

5.4. LAS FUNCIONES CARACTERISTICAS Y SUS CEROS. TEOREMA DE OSCILACION DE STURM.

El objetivo perseguido en este párrafo es demostrar un teorema que posibilita indicar las autofunciones de un problema de Sturm-Liouville para la ecuación $\frac{1}{r(x)}(p(x)u')' - (q(x) - \lambda)u = 0$, $a \leqslant x \leqslant b$, con un subíndice que es igual al número de ceros de la misma en el intervalo (a,b). El resultado que sigue es muy general pues permite que tanto las condiciones de contorno como los coeficientes de la ecuación diferencial dependan del parámetro (espectral) λ.

Dado el problema de contorno

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(K(x,\lambda)u'(x)) - G(x,\lambda)u(x) = 0 \ , \ a \leqslant x \leqslant b, \\ \alpha^*(\lambda)u(a) - \alpha(\lambda)u'(a) = 0, \\ \beta^*(\lambda)u(b) + \beta(\lambda)u'(b) = 0, \end{cases}$$

se llamará valor característico del problema, a todo λ para el cual hay una solución no trivial u. Dicha solución se dirá función característica correspondiente a λ, (cf.1.1 a 1.21).

TEOREMA. Sea la ecuación diferencial

(1) $$\frac{d}{dx}(K(x,\lambda)u'(x)) - G(x,\lambda)u(x) = 0$$

donde

(i) $-\infty < a < b < +\infty, \ -\infty \leqslant \Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2 \leqslant +\infty,$

(ii) $K(x,\lambda)$ es real y continua en $[a,b] \times (\Lambda_1,\Lambda_2)$ y existen dos constantes L y M tales que para todo (x,λ): $0 < L < K(x,\lambda) < M < +\infty$,

(iii) $G(x,\lambda) \in L^1([a,b])$ para todo λ y $G(x,\lambda)$ es real y continua en λ para todo $x \in [a,b]$.

Supongamos además que valen las siguientes hipótesis (H_2) y (E) sobre $G(x,\lambda)$ y $K(x,\lambda)$.

(H_2) $$\lim_{\lambda\to\Lambda_2} G(x,\lambda) = -\infty \text{ para todo } x \in [a,b],$$

donde el límite es monótono en casi todo x a partir de un momento en adelante.

(E) Si $\lambda_1 < \lambda_2$ $(\lambda_i \in (\Lambda_1,\Lambda_2), \ i = 1,2)$ entonces $K(x,\lambda_1) \geqslant K(x,\lambda_2)$, $G(x,\lambda_1) \geqslant G(x,\lambda_2)$ c.d. y no se verifican simultáneamente en algún subintervalo: $K(x,\lambda_1) = K(x,\lambda_2)$, $Gx,\lambda_1) = G(x,\lambda_2)$ c.d., mientras que en ningún subintervalo es admisible la solución $u = \text{cte} \neq 0$ para las dos ecuaciones obtenidas de (1) reemplazando λ por λ_1 y λ_2. (*)

(*) Puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que las hipótesis sobre K y G valen en un intervalo $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.

Supongamos también que valen las hipótesis (CI) y (CC) sobre las condiciones de contorno:
(CI) $\alpha(\lambda)$ y $\alpha^*(\lambda)$ son funciones reales continuas tales que

$$(2) \qquad |\alpha(\lambda)| + |\alpha^*(\lambda)| \neq 0 \text{ para todo } \lambda$$

y $\alpha(\lambda) \equiv 0$, o bien $\alpha(\lambda) \neq 0$ para todo λ y en este último caso la función:

(3) $\frac{K(a,\lambda)\alpha^*(\lambda)}{\alpha(\lambda)}$ decrece en sentido lato cuando λ crece de Λ_1 a Λ_2.

(CC) $\beta(\lambda)$ y $\beta^*(\lambda)$ son funciones reales continuas de $\lambda \in (\Lambda_1,\Lambda_2)$, no simultáneamente nulas y tales que $\beta \equiv 0$, o bien $\beta(\lambda) \neq 0$ para todo λ, siendo en este caso $\frac{K(b,\lambda)\beta^*(\lambda)}{\beta(\lambda)}$ decreciente en sentido amplio.
Entonces el problema de valores de contorno:

$$(4) \quad \frac{d}{dx}(Ku') - Gu = 0, \quad \alpha^*u(a) - \alpha u'(a) = 0, \quad \beta^*u(b) + \beta u'(b) = 0$$

posee infinitos valores característicos en (Λ_1,Λ_2): $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$.
Si u_i es función característica correspondiente a λ_i, $i = 0,1,2,\dots$, entonces u_i tiene en (a,b) exactamente $i + s$ ceros, (teorema de oscilación de Sturm), donde s es un entero $\geqslant 0$ que depende del sistema. Estos son <u>todos</u> los valores característicos en (Λ_1,Λ_2).

DEMOSTRACION. i) Comenzaremos aceptando la siguiente <u>proposición</u>: Sea $u = u(x,\lambda)$ la solución real de (1) que satisface las condiciones iniciales: $u(a) = \alpha(\lambda)$, $u'(a) = \alpha^*(\lambda)$. Entonces $u(x,\lambda)$ es continua en (x,λ) lo mismo que $u' = u'_x(x,\lambda)$.

La demostración de este resultado seguirá sin mayor esfuerzo cuando se pruebe la existencia y <u>unicidad</u> de soluciones de ecuaciones casi diferenciales que satisfacen condiciones iniciales dadas, (cf.7.2).

ii) Como $u(h,\lambda) = 0$ implica $u'(h,\lambda) \neq 0$ resulta que los ceros de u: $h = h(\lambda) \in [a,b]$, son funciones continuas de λ.

iii) Cada cero de $u(x,\lambda)$ en $(a,b]$ decrece estrictamente con continuidad cuando λ crece.

Esto sigue del primer teorema de comparación (5.3). En efecto, los sistemas

$$(I)\ \begin{cases} \frac{d}{dx}(K(x,\lambda_1)u') - G(x,\lambda_1)u = 0\,, \\ u(a,\lambda_1) = \alpha(\lambda_1)\,, \\ u'(a,\lambda_1) = \alpha^*(\lambda_1)\,, \end{cases} \qquad (II)\ \begin{cases} \frac{d}{dx}(K(x,\lambda_2)u') - G(x,\lambda_2)u = 0\,, \\ u(a,\lambda_2) = \alpha(\lambda_2)\,, \\ u'(a,\lambda_2) = \alpha^*(\lambda_2)\,, \end{cases}$$

se encuentran, cuando $\lambda_1 < \lambda_2$, en la misma situación que (I) y (II) del teorema 5.3.

iv) Análogamente se prueba que (cf.5.31) si $u(b,\lambda_2) \neq 0$, y $u_1 = u(x,\lambda_1)$ y $u_2 = u(x,\lambda_2)$ tienen el mismo número de ceros en (a,b) entonces $u_1(b) = u(b,\lambda_1) \neq 0$ y vale

$$\frac{K(b,\lambda_1).u'(b,\lambda_1)}{u(b,\lambda_1)} > \frac{K(b,\lambda_2).u'(b,\lambda_2)}{u(b,\lambda_2)}$$

v) Veamos ahora que el número de ceros de $u(x,\lambda)$ en (a,b) aumenta sin límite cuando $\lambda \to \Lambda_2$. (*)

PROPOSICION 1. Sea r entero positivo. Si λ está suficientemente próximo a Λ_2 entonces el sistema (S_2):

$$(S_2) \qquad \begin{cases} \frac{d}{dx}(K(x,\lambda)u') - G(x,\lambda)u = 0\,, \\ u(a) = \alpha(\lambda)\,,\ u'(a) = \alpha^*(\lambda)\,, \end{cases}$$

tiene por lo menos r ceros en (a,b).

DEMOSTRACION. Comparemos (S_2) con el sistema:

$$(S_1) \qquad \begin{cases} \frac{d}{dx}(Mu') - \left[- \frac{(r+1)\ \pi^2.M}{(b-a)^2}\right].u = 0\,, \\ u(a) = 1,\ u'(a) = 0\,. \end{cases}$$

Pongamos: $K_1 = M$, $K_2 = K$, $G_1 = [\ldots]$, $G_2 = G$.

Sea u_1 una solución de (S_1). u_1 tiene r parejas de ceros consecutivos en (a,b).
Sea $u_2 = u(x,\lambda)$ solución de (S_2) y x_1, x_2 una de las parejas mencionadas. El segundo término de 5.3(1) para el intervalo (x_1,x_2) es positivo

(*) Sin pérdida de generalidad puede, cuando sea necesario, suponerse que las hipótesis sobre K y G se verifican en un intervalo $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.

si λ está bastante próximo a Λ_2 (cf.(H_2)).

Luego $u(x,\lambda)$ no puede ser $\neq 0$ en (x_1,x_2) para esos valores del parámetro λ. O sea, si λ es suficientemente grande, $u(x,\lambda)$ tiene r ceros al menos en (a,b), QED.

vi) Veamos para que valores de λ el sistema (4) es compatible, es decir, existe solución $\not\equiv 0$.

PROPOSICION 2. El sistema (4) tiene infinitos números característicos si $\beta \equiv 0$.

DEMOSTRACION. Supongamos que $u(x,\lambda)$ es una solución de (S_2) con m ($\geqslant$0) ceros en (a,b). Si $\lambda \to \Lambda_2$ el número de ceros en (a,b) puede hacerse tan grande como se quiera. Como los ceros se desplazan continuamente hacia la izquierda cuando λ crece, de la única manera en que su número puede aumentar (ya que el primer teorema de comparación asegura que su número en (a,b] no decrece) es que para un primer λ: $\lambda = \mu_m$, un cero del sistema se instale en x = b. Esto se ve usando la continuidad de $u(x,\lambda)$, y la de $u'(x,\lambda)$; en efecto, con ellas se demuestra que si $u(b,\lambda_o) \neq 0$, el número de ceros no varía en un entorno de λ_o. Entonces $u(x,\mu)$ tiene en (a,b), m+1 ceros si $0 < \mu - \mu_m < \varepsilon$. Así encontramos una sucesión:

$$\mu_m < \mu_{m+1} < \dots < \mu_{m+j-1} < \mu_{m+j} < \dots$$

tal que toda solución $u(x,\lambda)$ de (S_2) tiene m + j ceros en (a,b) si $\mu_{m+j} \geqslant \lambda > \mu_{m+j-1}$; y estos son números característicos para el caso $\beta \equiv 0$.

vii) En nuestra situación vale el segundo teorema de comparación 5.31, pues se verifican las hipótesis (E) y (CI). Entonces, si $\mu \in (\mu_m, \mu_{m+1})$ la solución $u(x,\mu)$ de (S_2) tendrá m + 1 ceros en (a,b), y para esos valores de μ la cantidad

$$\frac{K(b,\mu)\ u'(b,\mu)}{u(b,\mu)} \qquad (u(b,\mu) \neq 0)$$

decrecerá estrictamente de $+\infty$ a $-\infty$ al pasar μ de μ_m a μ_{m+1}.

Supongamos $\beta(\lambda) \neq 0$. Como

$$- \frac{K(b,\mu).\beta^*(\mu)}{\beta(\mu)}$$

crece en sentido amplio, existe exactamente un $\lambda \in (\mu_m, \mu_{m+1})$ tal que:

$$\frac{K(b,\lambda).u'(b,\lambda)}{u(b,\lambda)} = - \frac{K(b,\lambda).\beta^*(\lambda)}{\beta(\lambda)} . \tag{5}$$

O sea, $u'(b,\lambda).\beta(\lambda) + u(b,\lambda).\beta^*(\lambda) = 0$

Tenemos entonces la siguiente:

PROPOSICION 3. Si $\beta \neq 0$ existe en cada intervalo (μ_{m+j-1}, μ_{m+j}) un y sólo un valor característico λ_{m+j}. La función característica $u_{m+j} = u(x,\lambda_{m+j})$ posee exactamente m+j ceros en (a,b). Estas soluciones están <u>unívocamente determinadas</u> salvo por un factor constante.

viii) Sea ahora m el menor entero no negativo para el cual existe μ_m. Los argumentos utilizados en vii) también permiten mostrar que al decrecer λ de μ_m a Λ_1, $\frac{K(b,\lambda)\ u'(b,\lambda)}{u(b,\lambda)}$ crece de $-\infty$ a un límite $B \leqslant +\infty$. Por otra parte como sólo sabemos que $-K(b,\lambda)\ \beta^*(\lambda)\ /\ \beta(\lambda)$ crece en sentido amplio de Λ_1 a μ_m, no podemos asegurar que exista $\lambda = \lambda_m$ verificando (5), aunque si existiera sería único.
Concluímos entonces que numerando los valores característicos en sentido creciente y partiendo de cero resultará que al j-ésimo le corresponderá una función característica con j+m ceros en (a,b) para todo j, o bien con j+m+1 ceros en (a,b) para todo j. QED.

5.41. El teorema demostrado deja sin respuesta a dos cuestiones importantes:
1) ¿Cuándo m = 0?
2) Si m = 0 ¿es cierto o no que existe $\lambda_o \leqslant \mu_o$?

EJERCICIO. Demostrar que si $j \to \infty$ entonces $\lambda_j \to \Lambda_2$.

5.42. El caso clásico de Sturm-Liouville queda cubierto por el siguiente teorema.

TEOREMA. Si además de las hipótesis del teorema 5.3 se verifica uniformemente en [a,b]:

(H_1) $$\lim_{\lambda\to\Lambda_1} G(x,\lambda) = +\infty ,$$

entonces $m = 0$ y existe $\lambda_o \leq \mu_o$.

DEMOSTRACION. Consideremos los sistemas diferenciales

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \frac{d}{dx} (K(x,\lambda)u') - G(x,\lambda)u = 0 , \\ u(a) = \alpha(\lambda) \ ; \ u'(a) = \alpha^*(\lambda), \end{cases}$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \frac{d}{dx} (Lu') - LTu = 0 , \\ u(a) = \tilde{\alpha}: = L\alpha(1); \ u'(a) = \alpha': = K(a,1)\alpha^*(1), \end{cases}$$

donde $0 < L < K(x,\lambda)$ para todo (x,λ) y $\lambda \leq 1 < \mu_m$.

$T = T(\lambda)$ se define por $LT: = \inf_x G(x,\lambda)$.

De (H_1) sigue que podemos suponer 1 tan próxima a Λ_1 de manera que si $\lambda < 1$, $T > 0$.

La función siguiente es solución de (II):

$$(1) \qquad u_2(x) = \tilde{\alpha} \cosh \sqrt{T}\ (x-a) + \frac{\alpha'}{\sqrt{T}} \operatorname{senh} \sqrt{T}\ (x-a)$$

Supongamos en primer lugar que $\alpha(\lambda) \neq 0$. De (H_1) sigue que para λ bastante próximo a Λ_1, $u_2(x) \neq 0$ en $[a,b]$. Por otra parte tenemos

$$(2) \qquad L.\frac{\alpha'}{\tilde{\alpha}} = K(a,1)\frac{\alpha^*(1)}{\alpha(1)} \leq K(a,\lambda)\frac{\alpha^*(\lambda)}{\alpha(\lambda)} ,$$

es decir, se satisfacen las hipótesis del primer teorema de comparación 5.3 entre los sistemas (I) y (II). Por lo tanto $u(x,\lambda)$ es distinta de 0 en $(a,b]$. En consecuencia $m = 0$. Como $u(x,\lambda)$ y $u_2(x)$ tienen el mismo número de ceros en (a,b) y es aplicable el segundo teorema de comparación, resulta

$$(3) \qquad K(b,\lambda)\ \frac{u'(b,\lambda)}{u(b,\lambda)} > L\ \frac{u_2'(b)}{u_2(b)} .$$

Como $\lambda \to \Lambda_1$ implica $T(\lambda) \to \infty$ y esto a su vez que $\frac{u_2'(b)}{u_2(b)}$ tiende a $+\infty$, concluímos que el miembro izquierdo de (3) tiende a $+\infty$. Luego existe λ_o. Supongamos ahora $\alpha(\lambda) \equiv 0$. De la misma manera se ve que $u(x,\lambda)$ sólo se anula en $x = a$ y nuevamente $m = 0$. También el mismo argumento precedente prueba que existe λ_o. QED.

COROLARIO. Si $K(x,\lambda)$ y $G(x,\lambda)$ verifican las hipótesis (i), (ii), (iii) del teorema 5.4, (H_2), (E), (CI) y (CC) del mismo teorema y (H_1) del teorema 5.42 entonces el problema de contorno

(5) $\frac{d}{dx}(Ku') - Gu = 0, \quad \alpha^*u(a) - \alpha u'(a) = 0, \quad \beta^*u(b) + \beta u'(b) = 0$

posee infinitos autovalores en (Λ_1,Λ_2):

(6) $$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

Estos son todos y $\lambda_n \to \Lambda_2$ cuando $n \to \infty$. Si u_j es la función característica correspondiente a λ_j entonces u_j posee j ceros en (a,b), j = 0, 1, 2, ...

5.43 N.B. Es fundamental para la validez del corolario que valgan las alternativas:

1) $\alpha(\lambda) \equiv 0$ o bien $\alpha(\lambda) \neq 0$ para todo λ,

2) $\beta(\lambda) \equiv 0$ o bien $\beta(\lambda) \neq 0$ para todo λ.

En efecto, si $\beta(\lambda)$ se anulara en λ_o sin ser idénticamente nula, aun siendo α y α^* constantes y estrictamente decreciente la función $K(b,\lambda)\ \beta^*(\lambda)\ /\ \beta(\lambda)$ a uno y otro lado de λ_o, puede ocurrir que dos autofunciones tengan el mismo número de ceros en (a,b), (cf. 4ª REF.).

5.44. TEOREMA. El problema de contorno definido por (1) y (2):

(1) $y'' - (q-\lambda)y = 0 \quad , \quad -\infty < a \leqslant x \leqslant b < +\infty,$

(2) $\alpha'.u(a) - \alpha.u'(a) = 0 \quad , \quad \beta'.u(b) + \beta.u'(b) = 0,$

donde α, α', β y β' son constantes reales, $|\alpha| + |\alpha'| > 0$, $|\beta| + |\beta'| > 0$, y $q(x)$ es una función de $L^1(a,b)$, posee infinitos valores característicos en $(-\infty,+\infty)$:

(3) $$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots .$$

Estos son todos los valores característicos del problema.
Además $\lambda_j \to +\infty$ y la función característica u_j asociada a λ_j tiene exactamente j ceros en (a,b).

DEMOSTRACION. Este problema satisface las hipótesis del teorema 5.4 con $\Lambda_1 = -\infty$, $\Lambda_2 = +\infty$. Para probar el teorema bastará exhibir una solución u satisfaciendo las condiciones de contorno en x = a sin ceros en (a,b] y tal que $u'(b)\ /\ u(b)$ tienda a $+\infty$ cuando $\lambda \to -\infty$, (cf. T.5.42).

En lugar de α y α' podemos usar sen α y -cos α respectivamente, esta vez con $\alpha \in (0,\pi]$. Con esta normalización de las condiciones y $\lambda \in C$, definimos $\phi(x,\lambda)$ como la solución de (1) tal que

(5) $$\phi(a,\lambda) = \text{sen } \alpha, \qquad \phi'(a,\lambda) = -\cos \alpha.$$

Sea $s = \sigma + it$ y $s^2 = \lambda$. Valen las siguientes aproximaciones asintóticas a ϕ y ϕ', uniformemente en $[a,b]$:

(6) $$\begin{cases} \phi(x,\lambda) = [\cos s(x-a)] \text{ sen } \alpha + O\left\{\dfrac{e^{|t|(x-a)}}{|s|}\right\} & \text{si sen } \alpha \neq 0, \\ \phi(x,\lambda) = \dfrac{-\text{sen } s(x-a)}{s} .\cos \alpha + O\left\{\dfrac{e^{|t|(x-a)}}{|s|^2}\right\} & \text{si sen } \alpha = 0. \end{cases}$$

(7) $$\begin{cases} \phi'(x,\lambda) = -s[\text{sen } s(x-a)] \text{ sen } \alpha + O\left\{e^{|t|(x-a)}\right\}, & \text{sen } \alpha \neq 0, \\ \phi'(x,\lambda) = -[\cos s(x-a)] \cos \alpha + O\left\{\dfrac{e^{|t|(x-a)}}{|s|}\right\}, & \text{sen } \alpha = 0. \end{cases}$$

Estas fórmulas serán demostradas más adelante y pueden verse en [25].

Supongamos que sen $\alpha \neq 0$ y que $\lambda < 0$ con $|\lambda|$ suficientemente grande. Entonces $s = it$ y

$$\cos s(x-a) = \cosh t(x-a), \quad |\phi(x,\lambda)| \geqslant \frac{1}{2} |\text{sen } \alpha| \cosh t(x-a).$$

Sea sen $\alpha = 0$. Si $|\lambda|$ es suficientemente grande y λ es negativo entonces $\phi'(x,\lambda)$ no cambia de signo.

En ambos casos $\phi(x,\lambda)$ no se anula en $(a,b]$.

Las mismas aproximaciones asintóticas permiten demostrar que vale

(8) $$\frac{\phi'(b,\lambda)}{\phi(b,\lambda)} \xrightarrow[\lambda \to -\infty]{} +\infty,$$

y tenemos el teorema. QED.

REFERENCIAS. [18];

M. BÔCHER, "Lecons sur les méthodes de Sturm", (1917); [25];
A. I. BENEDEK and R. PANZONE, "On Sturm-Liouville problems with the square-root of the eigenvalue parameter contained in the boundary conditions", Appendix I, Notas de Algebra y Análisis N° 10, INMABB (UNS - CONICET), (1981).

CAPITULO 6

OPERADORES DIFERENCIALES DE ORDEN n: CONDICIONES DE CONTORNO, AUTOFUNCIONES, FUNCIONES ASOCIADAS, NUCLEO DE GREEN.

6. OPERADORES DIFERENCIALES CON COEFICIENTES DIFERENCIABLES. Sea $l(y)$ la expresión diferencial definida por:

(1) $l(y) = p_o(x)y^{(n)} + \ldots + p_n(x)y \ , \quad a \leqslant x \leqslant b \quad , \quad y = y(x) \ ,$

donde $p_i(x) \in C([a,b])$ y $p_o(x) \neq 0$ en $[a,b]$; $n \geqslant 1$.

Una expresión diferencial define un operador diferencial tan pronto como se defina un dominio de la misma: $\{y(x)\}$. Si $l(y)$, cuando el dominio de definición es $C^{(n)}([a,b])$, es designada con L_1 y con L_o cuando el dominio de definición es $D_o = \{y \in C^{(n)}; y^{(j)}(a) = y^{(j)}(b) = 0 \ ,$ $j = 0,1,\ldots,n-1\}$, entonces $L_1 \supset L_o$, es decir, L_1 extiende a L_o.

Llamando L a l restringida al dominio:

$$D = \{y \in C^n: \ U_i(y) = 0 \ , \ i = 1,2,\ldots,m\}$$

y donde las U_j definen condiciones de contorno lineales y homogéneas

(2) $U_i(y) := \alpha_{i,o}y(a) + \ldots + \alpha_{i,n-1}y^{(n-1)}(a) + \beta_{i,o}y(b) + \ldots + \beta_{i,n-1}y^{(n-1)}(b)$

entonces obviamente L_1 es una extensión de L que a su vez es una extensión de L_o pues $C^{(n)} \supset D \supset D_o$: $L_1 \supset L \supset L_o$.

Obsérvese que no sólo no se ha restringido el orden de la ecuación sino que tampoco se exige que los coeficientes sean reales. Sin embargo, pediremos para agilitar la presentación que los coeficientes de la ecuación sean suficientemente diferenciables.

6.1. El operador L será descripto por la expresión diferencial y el sistema de condiciones de contorno: $L = (l,U_j)$, pues sobreentenderemos que $y \in C^{(n)}$. Sea $U(y)$ la matriz de orden m por n definida por $(U(y))_{ij} =$ $= U_{ij} := U_i(y_j)$ donde $\{y_j\}$ es un sistema de n soluciones linealmente independientes de $L_1(y) = 0$. Siempre existe un tal sistema pues $p_o \neq 0$. Más adelante demostraremos un teorema de existencia y unicidad más general que el necesitado aquí. Si c designa un vector columna de n comnentes, $U(y).c = 0$ tiene tantas soluciones linealmente independientes, S, como la diferencia del orden de la expresión diferencial y el rango de $U(y)$: $S = n-r$, $r = \text{rango } U(y)$. Sea $y = \sum c_k y_k$. Entonces de $U_j(y) = \sum c_k U_j(y_k) = 0$ se ve que el problema de contorno homogéneo $Ly = 0$ tiene exactamente $n-r$ soluciones linealmente independientes. Así:

$m < n \Rightarrow$ siempre hay soluciones no triviales,

$m = n \Rightarrow$ hay soluciones no triviales si y sólo si $\det U = 0$,

$m > n \Rightarrow m-r$ filas de U son linealmente dependientes de las restantes. Como $r \leq n$ este caso se reduce a uno de los dos casos ya discutidos.

Observemos que lo dicho no depende del sistema $\{y_j\}$. En efecto, sea C una matriz de orden n por n con $\det C \neq 0$, y $z_i = \sum C_{ij} y_j$ el nuevo sistema. De $U_h(\sum C_{ij} y_j) = \sum C_{ij} U_h(y_j)$ se vê que $U(z) = U(y).C^t$. En particular tenemos: $\text{rango } U(z) = \text{rango } U(y)$.

6.2. Supongamos ahora que $l(y) = \sum_0^n p_j(x) y^{(n-j)}(x)$ verifica para todo i: $p_i \in C^{(n-i)}([a,b])$. Repetidas integraciones por partes muestran que:

$$(1) \qquad \int_a^b l(y).\bar{z}\, dx = \sum_{\substack{0 \leq j,k \leq n-1 \\ j+k<n}} [A_{jk}(b)\, y^{(j)}(b)\, \bar{z}^{(k)}(b) -$$

$$- A_{jk}(a) y^{(j)}(a) \bar{z}^{(k)}(a)] + \int_a^b y.\overline{l^*(z)}dx = {}^t\xi\, P\, \bar{\eta} + \int_a^b y.\overline{l^*(z)}dx$$

donde

$$(2) \qquad l^*(z) = \sum_{i=0}^{n} (\bar{p}_i . z)^{(n-i)} (-1)^{n-i} ,$$

es la expresión diferencial adjunta a l. ${}^t\xi P \bar{\eta}$ es una funcional bilineal en los vectores (columna) $2n$-dimensionales:

$$\xi = [y(a), y'(a), \ldots, y^{(n-1)}(a), y(b), \ldots, y^{(n-1)}(b)] ,$$

$$\eta = [z(a), z'(a), \ldots, z^{(n-1)}(a), z(b), \ldots, z^{(n-1)}(b)] .$$

Según (1), P es una matriz (P_{ij}) de la forma $\left(\begin{array}{c|c} N & 0 \\ \hline 0 & M \end{array}\right)$. Por otra parte como $j+k \geq n$ implica $A_{kj}(a) = A_{kj}(b) = 0$, tanto M como N tienen ceros debajo de la diagonal secundaria:

$$P = \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} \text{dependen de} \\ \text{a} \quad N \quad 0 \end{array} & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{l} \text{dependen} \\ \text{de b} \quad M \quad 0 \end{array} \end{array}\right) \quad \text{y por lo tanto}$$

$$\det P = \det N \,.\, \det M = \prod_{j=1}^{n} N_{j,n-j+1} \prod_{j=1}^{n} M_{j,n-j+1} .$$

Como cada sumando de $l(y)$ de la forma $p_h\, y^{(n-h)}$ contribuye a la forma bilineal con

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{n-h} (-1)^{k-1}\, y^{(n-h-k)} (p_h\, \overline{z})^{(k-1)} \Big|_a^b$$

y puesto que cada elemento diagonal $N_{j,n-j+1}$ o $M_{j,n-j+1}$ aparece en la forma con un factor $y^{(k)}.\overline{z}^{(h)}$, $k+h = n-1$, resulta que los elementos diagonales mencionados provienen de la integración por partes de $p_o(x)\, y^{(n)}(x)$. De (3) vemos que entonces

$A_{kh}(b) = \pm\, p_o(b)$ si $k+h = n-1$; $A_{kh}(a) = \pm\, p_o(a)$ si $k+h = n-1$ y por lo tanto $\det P \neq 0$.

Reemplazando b por x en (1) y derivando obtenemos, con $A_{ij} \in C^1$:

$$(4) \qquad l(y)\, \overline{z} - y\, \overline{l^*(z)} = \Big(\sum_{\substack{i+j<n \\ 0\le i,j<n}} A_{ij}(x) y^{(i)}(x)\, \overline{z}^{(j)}(x) \Big)' .$$

(1) (o (4)) es conocida como <u>la fórmula de Lagrange</u>.

PROPOSICION. La expresión diferencial l^* está univocamente "determinada por (4)".

DEMOSTRACION. En efecto, si hubiera dos: l_1^*, l_2^*, tendríamos $y(\overline{l_1^*(z)} - \overline{l_2^*(z)}) = (d/dx)(\text{algo})$ para todo $y,z \in C^{(n)}$ Si el segundo miembro no es idénticamente cero debe contener un sumando de la forma $u(x)y^{(h)}(x)$, $u \not\equiv 0$, $h > 0$, para un cierto z fijo. Puesto que $y \in C^{(n)}$, disponemos de suficientes funciones como para mostrar que esto lleva a una contradicción. QED.

La unicidad de la adjunta como aplicación de $C^{(n)}$ en C - garantizada por la satisfacción de (4) - implica que: $(l^*)^* = l$; $l_1^* + l_2^* = (l_1 + l_2)^*$;

$(\lambda\ 1)^* = \bar{\lambda}\ 1^*$.

En particular, cuando

(5) $1(y) \equiv p_o(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y$ con $p_o \in C^2([a,b])$, $p_1 \in C^1$ y $p_2 \in C^o$, resulta

(6) $1^*(z) = (\bar{p}_o z)'' - (\bar{p}_1 z)' + (\bar{p}_2 z)$.

6.21. El próximo objetivo es determinar condiciones de contorno adjuntas que determinen un subespacio D* de manera que el operador L* defido por medio de 1* y D* verifique

(1) $$(Ly,z) = (y,L^*z).$$

Llamemos $\mathcal{L}$ la matriz de orden m por 2n cuya j-ésima fila es:

$$\alpha_{j,0},\ldots,\alpha_{j,n-1} \quad , \quad \beta_{j,0},\ldots,\beta_{j,n-1} \ .$$

Supondremos que estas filas son linealmente independientes. En consecuencia $1 \leqslant m \leqslant 2n$. Designemos con Y a la matriz,de orden 2n por n,cuya k-ésima columna es:

(2) $$[y_k(a),\ldots,y_k^{(n-1)}(a),y_k(b),\ldots,y_k^{(n-1)}(b)] \ .$$

Entonces $\mathcal{L}.Y = U(y)$ es justamente la matriz considerada en 6.1 si las y_j son soluciones linealmente independientes de $L_1(y) = 0$. Sea $y(x) \in C^{(n)} A$ y le está asociado un vector columna definido por (2) que llamaremos ξ. Entonces $\xi \to \mathcal{L}\xi$ define una aplicación de E^{2n} en E^m, $1 \leqslant m \leqslant 2n$. Si $L_1(y) = 0$ entonces las componentes de ξ de índice mayor que n dependen linealmente de las precedentes pues $y = \sum c_i y_i$, lo que permite despejar las c_j como funciones lineales en $y^{(h)}(a)$, $h = 0,1,\ldots,n-1$.

6.22. La intersección del espacio nulo de la aplicación definida por $\mathcal{L}$ con el subespacio de dimensión n de las ξ que provienen de elementos del espacio nulo de L_1 es tal que a cada ξ de esa intersección le corresponde una y sólo una solución de $Ly = 0$. Simbólicamente: $N_{\mathcal{L}} \cap N_{L_1} = N_L$.

6.23. Hasta ahora supusimos $1 \leqslant m \leqslant 2n$ y vimos que si $L(y) = 0$ tiene soluciones no triviales bastan $r < n$ condiciones de contorno para determinar n-r soluciones linealmente independientes, (cf.6.1). Sin embargo si L depende de un parámetro, por ejemplo λ, entonces las m condiciones no podrán, en general, reducirse pues las $r = r(\lambda)$ necesarias cambiarán en cada caso.

6.24. Sea ahora $m < 2n$. Podemos completar el sistema de condiciones de contorno hasta tener 2n condiciones linealmente independientes. Es decir, ampliamos $\mathcal{L}$ de manera de obtener una matriz 2n por 2n de determinante no nulo. Entonces de

$$^t\xi\, P\, \overline{\eta} = \sum P_{ij}\, \xi_i\, \overline{\eta}_j \quad , \quad \xi = [y(a),\ldots,y^{(n-1)}(b)] \ ,$$

$\eta = [z(a),\ldots,z^{(n-1)}(b)]$ resulta $\mathcal{L}\xi = [U_1(y),\ldots,U_{2n}(y)]$ y

$$(1) \qquad ^t\xi P\overline{\eta} = {}^t(\mathcal{L}^{-1}[U_1(y),\ldots]).P.\overline{\eta} = (U_1(y),\ldots).{}^t\mathcal{L}^{-1}P.[\overline{z}(a),\ldots] =$$

$$= (U_1(y),\ldots).[\overline{V_{2n}(z)},\ldots,\overline{V_1(z)}] = \sum_{j=1}^{2n} U_j(y)\,\overline{V_{2n-j+1}(z)} \ .$$

(Hemos utilizado paréntesis para vectores filas y corchetes para vectores columnas).

Luego, si llamamos $\mathcal{L}^*$ a la matriz no singular $\overline{^t\mathcal{L}^{-1}.P}$ (recordar que determinante de $P \neq 0$) convendremos en escribir su fila j como

$$\alpha^*_{j,0},\ldots,\alpha^*_{j,n-1},\beta^*_{j,0},\ldots,\beta^*_{j,n-1} \ .$$

DEFINICION. Las condiciones de contorno adjuntas a las U_j serán las V_k donde $V_k(z)$ = componente 2n-k+1 de $\mathcal{L}^*[z(a),\ldots]$ y precisamente, si originalmente $j \leqslant m$ ($\leqslant 2n$), entonces elegimos las V_k que verifican $1 \leqslant k \leqslant 2n-m$.

En este caso, si $D^* = \{z;\ z \in C^{(n)}, V_j(z) = 0,\ j = 1,\ldots,2n-m\}$ entonces $y \in D$, $z \in D^*$ implican (cf.(1) 6.2 y (1) 6.24):

$$(2) \qquad (Ly,z) = \int_a^b Ly.\overline{z}\,dx = \int_a^b y.\overline{L^*(z)}\,dx = (y,L^*(z)) \ .$$

6.25. EJEMPLO. Sea $l(y) \equiv y'' + p(x)y$, $U_1 \equiv y(a)$, $U_2 \equiv y'(a)$. Completamos condiciones de contorno con $U_3(y) \equiv y(b)$, $U_4(y) \equiv y'(b)$. De 6.2 obtenemos $l^*(z) \equiv z'' + \overline{p}z$. Además:

$$\int_a^b (y'' + py)\,\bar{z}\,dx - \int_a^b y(\overline{z'' + \bar{p}z})\,dx = (y'\bar{z} - \bar{z}'y)\Big|_a^b =$$

$$= y'(b)\bar{z}(b) - y'(a)\bar{z}(a) - \bar{z}'(b)y(b) + \bar{z}'(a)y(a)$$

de donde obtenemos:

$V_1(z) \equiv z(b)$, $V_2(z) \equiv -z'(b)$, $V_3(z) \equiv -z(a)$, $V_4(z) \equiv z'(a)$.

O sea, a las condiciones $y(a) = y'(a) = 0$ le corresponden las condiciones adjuntas $z(b) = z'(b) = 0$. En cambio a $y(a) = y(b) = 0$ les corresponden $z(a) = z(b) = 0$, es decir, las mismas condiciones.

6.3. TEOREMA. $L(y) = 0$ tiene S ($= n-r$) soluciones linealmente independientes si y sólo si $L^*(z) = 0$ tiene $S^* = m + S - n$ soluciones linealmente independientes.

(En el caso más corriente donde $m = n$ es $S = S^*$).

DEMOSTRACION. Sean $y_1,\dots,y_S$ soluciones de $l(y) = 0$, $U_k(y_j) = 0$ $k = 1,2,\dots,m$. Sean $z_1,\dots,z_n$ funciones de $C^{(n)}$ tales que $l^*(z_j) = 0$. Supongamos ambos sistemas linealmente independientes. Entonces vale

(1) $$\sum_{i=m+1}^{2n} \overline{V_{2n-i+1}(z_k)}\, U_i(y_s) = 0 \ , \quad s = 1,\dots,S \ ; \ k = 1,\dots,n \ .$$

Los vectores $u(s) = [U_{m+1}(y_s),\dots,U_{2n}(y_s)]$, $s = 1,\dots,S$, forman un conjunto linealmente independiente. En efecto, si $\sum c_s U_j(y_s) = 0$ para todo $j = m+1,\dots,2n$, entonces $y = \sum c_s y_s$ satisface todas las condiciones de contorno U_i, $i = 1,\dots,2n$, lo cual implica $y=0$ y $c_s = 0$ para todo s. Luego, $\{u(s): s = 1,\dots,S\}$ forma parte del espacio nulo de una transformación T de E^{2n-m} en E^n definida por la matriz n por $(2n-m)$, (cf.(1)): $M_{ki} = \overline{V_{2n-i+1}(z_k)}$. De aquí sigue que: rango aplicación $T \leqslant (2n-m)-S$. Por otra parte si S^* es el número de soluciones linealmente independientes de $L^*(z) = 0$, entonces rango $T = n-S^*$. (cf.6.1). Por lo tanto $n-S^* \leqslant 2n-m-S$, y en consecuencia, $S^* \geqslant m-n+S$. Invirtiendo los papeles de S y S^* obtenemos $S \geqslant (2n-m)-n+S^* = n-m+S^*$. Es decir, $m-n+S \geqslant S^*$. QED.

DEFINICION. Diremos que l es una expresión diferencial autoadjunta si $l(y) = l^*(y)$ para todo $y \in C^{(n)}$, o lo que es lo mismo, si $l \equiv l^*$.

6.31. TEOREMA. El dominio de L^* no depende de las condiciones de contorno U_i, $i = m+1,\dots,2n$.

DEMOSTRACION. $D^* = \{z \in C^{(n)} : V_1(z) = \dots = V_{2n-m}(z) = 0\}$. Consideremos dos sistemas de condiciones de contorno $\{\tilde{U}_i\}$, $\{U_i\}$, que coincidan en las m primeras y de manera que las matrices asociadas $\tilde{\mathcal{L}}$ y $\mathcal{L}$ sean no singulares. Obtendremos entonces dos familias de condiciones de contorno: $\{\tilde{V}_i\}$, $\{V_i\}$.

Es cuestión de verificar que $\tilde{V}_1(z) = \dots = \tilde{V}_{2n-m}(z) = 0$ es implicado por $V_1(z) = \dots = V_{2n-m}(z) = 0$. Sea M no singular tal que $M\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$. (Recordar que $\mathcal{L}^*$ fue definida con las condiciones V_k y la $*$ no significa aquí la traspuesta conjugada).

Por definición: $\mathcal{L}^* = \overline{{}^t\mathcal{L}^{-1}.P}$, (cf.6.24). Entonces:

$${}^t\overline{M}.\mathcal{L}^* = \overline{{}^tM.{}^t\mathcal{L}^{-1}.P} = \overline{{}^t(\mathcal{L}^{-1}.M).P} = \overline{{}^t\tilde{\mathcal{L}}^{-1}.P}.$$

En consecuencia: ${}^t\overline{M}.\mathcal{L}^* = (\tilde{\mathcal{L}})^*$.

Pero M es de la forma:

$$M = \begin{array}{c} \\ m\,\{ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \overbrace{}^{m} \\ \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline A & B \end{array}\right) \end{array} \quad \text{y por lo tanto:} \quad {}^t\overline{M} = \begin{array}{c} \updownarrow m \end{array}\left(\begin{array}{c|c} I & {}^t\overline{A} \\ \hline 0 & {}^t\overline{B} \end{array}\right).$$

Esto muestra que las 2n-m últimas filas de $(\tilde{\mathcal{L}})^*$ son combinaciones lineales de las 2n-m últimas filas de $\mathcal{L}^*$. Como $(\tilde{\mathcal{L}})^*$ define el subespacio $(\tilde{D})^*$, vemos que éste debe contener a D^*. En consecuencia $D^* = (\tilde{D})^*$.

QED.

6.4. Si p es una función real k veces derivable las expresiones diferenciales

(1) $\quad (py^{(k)})^{(k)} \quad , \quad i(py^{(k-1)})^{(k)} + i(py^{(k)})^{(k-1)}$

son autoadjuntas. Más aún, vale el siguiente resultado.

TEOREMA. Toda expresión autoadjunta es suma de expresiones (1).

DEMOSTRACION. En efecto, si $l(y) = p_o y^{(n)} + \dots$, $l^* = (-1)^n(\overline{p}_o z)^{(n)} + \dots$ vemos que $l = l^*$ implica $p_o = (-1)^n.\overline{p}_o$. Supongamos n par. Entonces p_o es real y $l - (p_o y^{(n/2)})^{(n/2)}$ es una expresión autoadjunta de orden n-1 a lo sumo. Si n es impar e igual a 2k-1 tendremos $p_o = -\overline{p}_o$ y p_o es entonces imaginario puro: $p_o = ip$. Entonces

$l = [\,i(py^{(k-1)})^{(k)} + i(py^{(k)})^{(k-1)}]/2$ es una expresión autoadjunta de orden n-1 a lo sumo; repitiendo el proceso tenemos el teorema. QED.

En consecuencia resulta que toda expresión real autoadjunta es de la forma: $\sum\limits_h (p_h y^{(h)})^{(h)}$, p_h real. En particular, si n=2, toda expresión real autoadjunta es de la forma:

(2) $$l(y) \equiv (py')' + q.y = p(x)y'' + p'(x).y' + q.y$$

con p(x) real y dos veces continuamente diferenciable, q(x) continua, (cf.6.2).

6.5. Dado un operador L (como en la sección 6) nos preguntamos si existe $y(x) \neq 0$ tal que para un número λ dado:

(1) $$Ly = \lambda y\ .$$

Es decir, que $y \in D$, $y \not\equiv 0$, verifique $l(y) = \lambda y$. Los números λ para los cuales (1) tiene solución se llaman autovalores del problema diferencial de contorno y las soluciones correspondientes, autofunciones. Si $\{y_1,\dots,y_n\}$ es un sistema linealmente independiente de soluciones de $L_1(y) = \lambda y$, entonces rango $U(y) = \text{rango}(U_i(y_j)) = r(\lambda) =$ $= n - S(\lambda)$ donde $S(\lambda)$ es el número de soluciones linealmente independientes de $(L-\lambda)y = 0$. Por lo tanto: 1) $m < n \Rightarrow$ para todo λ, $r(\lambda) < n$. (Es decir todo λ es autovalor). 2) $m \geq n \Rightarrow \{\lambda$ es autovalor $\Longleftrightarrow$ toda submatriz n por n de U(y) tiene determinante nulo$\}$.

Definimos como multiplicidad del autovalor λ_o la dimensión del espacio de autofunciones correspondiente a ese autovalor. Siempre esa multiplicidad es $\leq n$.

EJEMPLO. Sea $l \equiv -d^2/dx^2$, $\lambda = \omega^2$, $0 \leq x \leq 1$, $U_1(y) \equiv y(0) - y(1)$, $U_2(y) \equiv y'(0) - y'(1)$. La solución general cuando $\omega \neq 0$ es $y = \alpha \cos \omega x + \beta \operatorname{sen} \omega x$. Si $y_1 = \operatorname{sen} \omega x$, $y_2 = \cos \omega x$ entonces

$$\det U_i(y_j) = \begin{vmatrix} -\operatorname{sen}\omega & 1-\cos\omega \\ \omega-\omega\cos\omega & \omega\operatorname{sen}\omega \end{vmatrix} = \Delta(\lambda).$$

La ecuación de autovalores es $\Delta(\lambda) = 0$, es decir, $\omega.(\cos\omega - 1) = 0$. Entonces: $\lambda = 0$, $\lambda = (2\pi)^2$, $\lambda = (2.2\pi)^2,\dots$ y con excepción del pri mero, todos los otros autovalores son de multiplicidad 2, (cf.1.21).

6.51. Se sabe de la teoría general de ecuaciones diferenciales ordinarias que si $y(x,\lambda)$ verifica para cada λ: $y'(x,\lambda) = A(x,\lambda)y(x,\lambda)$, $y(a,\lambda) = y_o$ con A entera en λ para x fijo y continua en (x,λ) entonces $y(x,\lambda)$ es entera en λ para x fijo y continua en (x,λ) en el dominio en cuestión. Este resultado vale aún para sistemas diferenciales $\vec{y}'(x) = A(x,\lambda).\vec{y}(x)$.

En particular, para nuestro sistema:

$$(1) \quad \begin{cases} y'(x) = y_1(x) \\ \vdots \\ y'_{n-2}(x) = y_{n-1}(x) \\ y'_{n-1}(x) = -\dfrac{1}{p_o(x)}[p_1(x)y_{n-1}(x) + \ldots + p_n y - \lambda.y] \end{cases} \qquad y_o = y \quad ,$$

con condiciones iniciales $y_i(a) = c_i$, c_i cte., $i = 0,\ldots,n-1$, obtenemos un vector solución $(y(x,\lambda),\ldots,y^{(n-1)}(x,\lambda)) \in C^n$, analítico en λ. La última ecuación en (1) prueba que y tiene analíticas en λ todas sus derivadas hasta orden n.

En consecuencia, toda solución de $(L_1-\lambda)(y) = 0$ que satisface condiciones iniciales constantes es entera en λ y continua en (x,λ), junto con sus n primeras derivadas. Una generalización de esta proposición se verá en 7.5 y siguientes.

6.52. Sean $y_j(x,\lambda)$ soluciones linealmente independientes de $(L_1-\lambda)(y) = 0$ tales que $y_j^{(k)}(a,\lambda) = \delta_{k,j-1}$, $k = 0,\ldots,n-1$, $j = 1,\ldots,n$. Si excluímos el caso en que para todo λ, $r(\lambda) = \text{rango } (U_i(y_j)) < n$, entonces en toda esfera del plano complejo hay a lo sumo un número finito de autovalores. En efecto, en este caso $m \geqslant n$ y existe una submatriz nxn de determinante no identicamente nulo. Por otra parte, toda submatriz n por n de $(U_i(y_j))$ debe ser de determinante nulo para que λ sea autovalor. Como esas submatrices tienen elementos analíticos también lo son sus determinantes. Esto prueba la proposición.

TEOREMA. Sea m=n. Si λ_o es un autovalor de multiplicidad ν entonces $\Delta(\lambda) = \det.(U_i(y_j))$ tiene un cero en $\lambda = \lambda_o$ de orden por lo menos ν. En particular, si $\Delta(\lambda)$ tiene sólo ceros simples, la multiplicidad de cada autovalor es uno.

DEMOSTRACION. $r(\lambda_o) = n-\nu$ por hipótesis pues $\nu = S(\lambda_o)$. Tenemos que demostrar que $0 = \Delta(\lambda_o) = \ldots = \Delta^{(\nu-1)}(\lambda_o)$. Sea $j \leqslant \nu-1$. $\Delta^{(j)}(\lambda_o)$ es una suma de determinantes con k columnas derivadas y n-k columnas no derivadas donde $k \leqslant \nu-1$. El número de columnas no derivadas es $\geqslant n-\nu+1$. Luego, cualquier submatriz $(n-\nu+1)\times(n-\nu+1)$ formada con esas columnas tiene determinante cero. Esto implica $\Delta^{(j)}(\lambda_o) = 0$. QED.

6.53. Veamos ahora dos <u>ejemplos</u>. En el ejemplo <u>A</u> consideramos un operador para el cual <u>todo λ es autovalor</u>. En el ejemplo <u>B</u> un caso en que Δ tiene en cierto λ_o <u>un cero doble pero tal que</u> λ_o <u>es de multiplicidad uno</u>.

<u>A</u>. $l \equiv -y''$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y(0) = y(1)$, $y'(0) = -y'(1)$. Si $y_1(x) \neq 0$ es solución de $y'' + \lambda y = 0$, también lo es $y_2(x) = y_1(1-x)$, y por lo tanto su suma que es simétrica respecto a $x = 1/2$.

<u>B</u>. La misma ecuación diferencial con las condiciones de contorno $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = 0$. Necesariamente $y(x) = \alpha.\cos\sqrt{\lambda}x$ y la multiplicidad es igual a uno. Por otra parte $\Delta(\lambda) = \Delta'(\lambda) = 0$ si λ es un autovalor no nulo, pues $\Delta(\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\pi-1$ (aquí $y_1 = \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$, $y_2 = \cos\sqrt{\lambda}x$).

6.54. De la definición de expresión diferencial adjunta resulta:

$$(1) \qquad (L-\lambda)^* = L^* - \bar{\lambda} .$$

TEOREMA. Supongamos m=n. i) Si λ_o es autovalor de L de multiplicidad ν entonces $\bar{\lambda}_o$ es autovalor de L^* de multiplicidad ν.
ii) Si y es autofunción de L correspondiente al autovalor λ y z es autofunción de L^* correspondiente al autovalor μ, entonces $\bar{\mu} \neq \lambda$ implica $\int_a^b y\bar{z}\,dx = 0$.

DEMOSTRACION. i) resulta del teorema 6.3. ii) sigue de $\lambda\int y\bar{z}\,dx = = \int l(y)\bar{z}\,dx = \int y\overline{l^*(z)}\,dx = \bar{\mu}\int y\bar{z}\,dx$. QED.

COROLARIO. Supongamos que m=n y que $L=L^*$, es decir, $l \equiv l^*$ y $U_1,\ldots,U_n$

equivalentes a $V_1,\dots,V_n$. En este caso todo autovalor λ es real y las autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.

EJERCICIO. Explicar porqué en el ejemplo 6.5 Δ no es entera en λ, (cf.6.51, 6.52 y 6.53 B).

6.6. FUNCIONES ASOCIADAS. Supongamos ahora m=n y consideremos el problema $l(y) = 0$, $U_i(y) = 0, i = 1,2,\dots,n$. <u>En este párrafo supondremos que los coeficientes de l son continuos en $[a,b] \times C$ y como los de U_j dependen en forma entera de λ, y que $1/p_o > 0$.</u>

Sea $\{y_i(x,\lambda)\}_{i=1}^{n}$ un juego linealmente independiente de soluciones enteras en λ. Como sabemos $\Delta(\lambda) = \det (U_i(y_j))$ se anula en exactamente los autovalores del problema de contorno. Sea λ_o un autovalor, ν su multiplicidad y R el orden del cero λ_o de $\Delta(\lambda)$. Es decir, $R \geqslant \nu \geqslant 1$,
$\Delta(\lambda) = (\lambda-\lambda_o)^R\,\delta(\lambda)$, $\delta(\lambda_o) \neq 0$.
Propiedades sobre la dependencia de λ de la solución y sus derivadas están reseñadas en 7.5 y siguientes.
Antes de seguir adelante veamos un lema sobre matrices que será utilizado en el teorema 6.61.

LEMA. i) Sea $A(\lambda)$ una matriz nxn de elementos analíticos en una región D y supongamos que en $\lambda_o \in D$, $\Delta(\lambda) = \det A(\lambda)$ tiene un cero de orden R. Entonces existe una matriz $C = C(\lambda)$ de elementos analíticos en D tal que para todo λ: $\det C = +1$ ó -1, y para todo i,j: $(A.C)_{ij} = (\lambda-\lambda_o)^{m_j}.\Theta_{ij}$ con $\sum_{j=1}^{n} m_j = R$, $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \dots \geqslant m_n$.
ii) Además, $\#\{j: m_j(A) > 0\} \leqslant \#\{j: m_j(AC) > 0\}$.

DEMOSTRACION. Hipótesis inductiva: supongamos que hemos hallado una matriz C como en la tesis tal que $(A.C)_{ij} = (\lambda-\lambda_o)^{m'_j}\Theta'_{ij}$ con $M = \sum m'_j < R$, $m'_1 \geqslant \dots \geqslant m'_n$, Θ'_{ij} analíticas en D.
Entonces en λ_o, $\det(\Theta'_{ij}) = 0$ y en consecuencia existe un vector $[e_1,\dots,e_n] \neq 0$ tal que

$$(\Theta'_{ij}(\lambda_o))\,[e_1,\dots,e_n] = 0 \,.$$

Supongamos que el primer $e_i \neq 0$ sea e_s, y que $e_s = 1$.
Sea ahora $\tilde{C}$ definida así:

$$
\begin{array}{c}
\qquad\qquad\quad \underbrace{s} \\
\widetilde{C} = \left[\begin{array}{c|c|c}
 & 0 & \\
I & \vdots & 0 \\
 & 0 & \\
0\ldots0 & 1 & 0\;.\;.\;.\;0 \\
 & e_{s+1}(\lambda-\lambda_o)^{m'_s-m'_{s+1}} & \\
0 & \vdots & I \\
 & e_n(\lambda-\lambda_o)^{m'_s-m'_n} &
\end{array}\right] (s
\end{array}
$$

Entonces $\det \widetilde{C} = +1$ y sus elementos son analíticos en D.

$AC.\widetilde{C}$ tiene las mismas columnas que AC de índices distintos de s. Por otra parte, su columna s es tal que: $(AC.\widetilde{C})_{js} = (\lambda-\lambda_o)^{m'_s} \sum_{r=1}^{n} \Theta'_{jr}.e_r =$ $= (\lambda-\lambda_o)^{m'_s+1}.\widetilde{\Theta}'_{js}$, $j = 1,\ldots,n$.

Entonces $A(C\widetilde{C})$, eventualmente multiplicada a derecha por una matriz permutación, verificará la hipótesis inductiva con M+1 reemplazando a M. QED.

6.61. Bajo las hipótesis indicadas al comienzo del párrafo 6.6, sea $y(x,\lambda)$ una solución de $l(y) = 0$ tal que $y(x,\lambda_o) \not\equiv 0$, $U_i(y(.,\lambda_o))=0$ $\forall$ i. Supongamos además que satisface las condiciones iniciales: $y^{(j)}(a,\lambda) =$ $= y^{(j)}(a,\lambda_o)$, $j=0,\ldots,n-1$. Tenemos entonces (cf.75) en $\lambda = \lambda_o$:

$$
(1) \quad \left\{
\begin{array}{l}
l(y) = 0 \\
\left.\begin{array}{l}
(\frac{\partial l}{\partial\lambda})(y) + l(\frac{\partial y}{\partial\lambda}) = 0 \\
(\frac{\partial^2 l}{\partial\lambda^2})(y) + 2(\frac{\partial l}{\partial\lambda})(\frac{\partial y}{\partial\lambda}) + l(\frac{\partial^2 y}{\partial\lambda^2}) = 0 \;; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} m \\
\left.\begin{array}{l}
U_k(y) = 0 \\
(\frac{\partial U_k}{\partial\lambda})(y) + U_k(\frac{\partial y}{\partial\lambda}) = 0 \\
(\frac{\partial^2 U_k}{\partial\lambda^2})(y) + 2(\frac{\partial U_k}{\partial\lambda})(\frac{\partial y}{\partial\lambda}) + U_k(\frac{\partial^2 y}{\partial\lambda^2}) = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} m
\end{array}\right.
$$

donde $m = m(y) \geqslant 1$ es el entero para el cual $U_k(y) = (\lambda-\lambda_o)^m.f_k(\lambda)$, $k = 1,\ldots,n$, y existe k_o tal que $f_{k_o}(\lambda_o) \neq 0$. Aquí las $f_k(\lambda)$ son enteras, y necesariamente $R \geqslant m$. Definamos:

$$\varphi_o(x) = y(x,\lambda_o) \;,\; \varphi_1 = \frac{\partial}{\partial\lambda_o}(y) \;,\; \varphi_2 = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial\lambda_o^2}(y) \;,\; \ldots$$

$, \varphi_j = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j(y)}{\partial\lambda_o^j}$,...,donde $\frac{\partial^j(.)}{\partial\lambda_o^j} = \left.\frac{\partial^j(.)}{\partial\lambda^j}\right|_{\lambda=\lambda_o}$ y $j = 0,1,2,\dots,m-1.$

Estas funciones satisfacen las relaciones siguientes para $k = 1,2,\dots,n$:

$$(2)\quad \begin{cases} l(\varphi_o) = 0 \quad , \quad U_k(\varphi_o) = 0 \ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l(\varphi_j) + \frac{\partial l}{\partial\lambda_o}(\varphi_{j-1}) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 l}{\partial\lambda_o^2}(\varphi_{j-2}) + \dots + \frac{1}{j!}\frac{\partial^j l}{\partial\lambda_o^j}(\varphi_o) = 0 \ , \\ U_k(\varphi_j) + \frac{\partial U_k}{\partial\lambda_o}(\varphi_{j-1}) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 U_k}{\partial\lambda_o^2}(\varphi_{j-2}) + \dots + \frac{1}{j!}\frac{\partial^j U_k}{\partial\lambda_o^j}(\varphi_o) = 0 \ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Las funciones $\varphi_1,\dots,\varphi_j,\dots,\varphi_{m-1}$ se llaman <u>asociadas</u> a la autofunción φ_o <u>correspondiente al autovalor</u> λ_o. Si la multiplicidad de λ_o es ν tendremos un sistema $\varphi_o^{(1)},\dots,\varphi_o^{(\nu)}$, linealmente independiente, de autofunciones y el sistema de asociadas $\varphi_\alpha^{(j)}$, $\alpha = 1,\dots,m_j-1$. Aquí m_j es la <u>multiplicidad de la autofunción</u> $\varphi_o^{(j)}$, que por definición es el valor de m definido arriba para esa autofunción. Definimos el <u>índice</u> de un autovalor de la siguiente forma: índice de $\lambda_o := \sup_j m_j$.

TEOREMA. Bajo las condiciones enunciadas existe un sistema de autofunciones $\tilde{\varphi}_o^{(1)},\dots,\tilde{\varphi}_o^{(\nu)}$ tal que $\sum_1^\nu \tilde{m}_i = R =$ orden de λ_o como cero de $\Delta(\lambda)$, (ν = multiplicidad del autovalor, $\tilde{m}_i$ multiplicidad de $\tilde{\varphi}_o^{(i)}$).

DEMOSTRACION. Como observamos arriba podemos suponer que el sistema $y_1,\dots,y_n$ es tal que $y_j(x,\lambda_o) = \varphi_o^{(j)}(x)$ para $j = 1,2,\dots,\nu$. Por lo tanto: $U_k(y_j) = (\lambda-\lambda_o)^{m_j}.f_{kj}(\lambda)$, $j = 1,2,\dots,\nu$, y si $A_{ij}(\lambda) = U_i(y_j)$, entonces $\Delta(\lambda) = \det A = (\lambda-\lambda_o)^{\sum_1^\nu m_j}.F(\lambda)$. <u>En consecuencia</u>, $\sum_1^\nu m_j \leqslant R$.

Aplicando el lema precedente encontramos $C(\lambda)$ no singular en λ_o tal que $((A.C)(\lambda))_{ij} = (\lambda-\lambda_o)^{\tilde{m}_j}.\Theta_{ij}$, $\sum_1^n \tilde{m}_j = R$.

Además, para cada j, $\sum_{i=1}^n |\Theta_{ij}(\lambda_o)| \neq 0$. Por otra parte $((A.C)(\lambda))_{ij} =$
$= U_i(C_{1j}y_1 + C_{2j}y_2 + \dots) = U_i(\tilde{y}_j)$.

El sistema $\{\tilde{y}_j\}$ es linealmente independiente y tenemos: $(A.C)(\lambda_o) = (U_i(y_s)).C = (U_i(\tilde{y}_j)) = \tilde{A}(\lambda_o)$.
Además: rango $\tilde{A}$ = rango $A = n-\nu$, y por lo tanto habrá ν funciones linealmente independientes que resuelven el problema de contorno. Haciendo $\lambda = \lambda_o$ en $U_i(\tilde{y}_j) = (\lambda-\lambda_o)^{\tilde{m}_j}\,\Theta_{ij}(\lambda)$ tenemos para todo i, $U_i(\tilde{y}_j) = 0$ si $\tilde{m}_j \neq 0$. Luego $\#\{j|\tilde{m}_j > 0\} \leqslant \nu$. Como $(U_i(\tilde{y}_j))$ se obtiene de $(U_i(y_k))$ por el Lema 6.6, de la parte ii) de dicho Lema resulta $\#\{j|\tilde{m}_j > 0\} \geqslant$ $\geqslant \#\{j|m_j > 0\} = \nu$. Entonces necesariamente $\#\{j|\tilde{m}_j > 0\} = \nu$. Estas ν funciones $\tilde{y}_j$ son las $\tilde{\varphi}_o^{(j)}$, $j = 1,2,\ldots,\nu$, buscadas. QED.

6.62. i) Fijado el sistema de n condiciones de contorno $\{U_i\}$ dadas por una matriz nx2n, $\mathcal{L}$, de elementos enteros en λ, es fácil ver que los espacios de autofunciones, sus dimensiones, el conjunto de autovalores y los órdenes de los ceros de la función característica no dependen del sistema fundamental escogido. En efecto, sea $z_1,\ldots,z_n$ otro sistema fundamental y C una matriz no singular con elementos enteros en λ tal que

$$[z_1,\ldots,z_n] = C\,[y_1,\ldots,y_n] \; .$$

Entonces: $\Delta_y(\lambda) = \det\{U_i(y_j)\} = \det U(y) = \det\,[U(z).(C^t)^{-1}]$ implica

(1) $$\Delta_y(\lambda) = \Delta_z(\lambda).(\det C)^{-1} \; .$$

Como el espacio de autofunciones se define sin recurrir a $\{y_j\}$ tenemos demostrada la proposición.

ii) Sea $\mathcal{L}'$ otra matriz como en i). Diremos que las condiciones de contorno $\{U'_j\}$ definidas por ella son <u>equivalentes</u> a las $\{U_i\}$ si existe una matriz nxn, no singular, a coeficientes enteros en λ, M, tal que

(2) $$\mathcal{L}' = M.\mathcal{L}$$

Entonces, si fijamos el sistema fundamental $\{y_j\}$ queda determinada la matriz 2nxn, Y (cf.6.21) ; $\Delta'(\lambda) = \det U'(y) = \det \mathcal{L}'.Y = \det (M.\mathcal{L}Y) = \det M.\det \mathcal{L}Y = \det M.\det U(y)$, o sea,

(3) $$\Delta'(\lambda) = \det M.\Delta(\lambda) \; .$$

De (3) sigue la independencia de la familia de autovalores de $\mathcal{L}$ mientras nos mantengamos en sistemas equivalentes. Lo mismo podemos decir del orden de los ceros de $\Delta(\lambda)$. Como

$$(4) \qquad U'(y) = M.U(y)$$

y recordando que $N_L = N_{\mathcal{L}} \cap N_{L_1}$ (cf.6.22), sigue también que dado un autovalor el autoespacio correspondiente es invariable en la clase de equivalencia de $\mathcal{L}$.

iii) Sea $y = y(x,\lambda)$. Entonces:

$$(5) \qquad U'_k(y) = (\mathcal{L}'.[y(a),y'(a),\dots,y^{(n-1)}(b)])_k = (M.\mathcal{L}.[\dots])_k = \\ = \sum_{s=1}^{n} M_{ks}.U_s(y) .$$

Sigue ahora que en $\lambda = \lambda_o$ (cf.6.61):

$$(6) \qquad U'_k(y) = (\lambda-\lambda_o)^m . \sum_s M_{ks}(\lambda)\, f_s(\lambda).$$

y por lo tanto $m'(y) \geqslant m(y)$. En consecuencia $m' = m$ y se deduce que el sistema de funciones asociadas a φ_o, autofunción correspondiente al autovalor λ_o , es independiente de $\mathcal{L}$, si nos mantenemos en la clase de equivalencia de esta última.

6.7. NUCLEC DE GREEN. Volvamos a las hipótesis de las secciones 6.2 a 6.54. El operador $L: D \longrightarrow C([a,b])$ tiene por rango la variedad lineal $R = L(D)$. Existe un inverso $L^{-1}: R \longrightarrow D$, $L^{-1}.L = I$, si y sólo si $Ly = 0$ implica $y = 0$.

TEOREMA. Si $Ly = 0$ sólo admite la solución trivial, existe un núcleo (llamado <u>núcleo de Green</u>) $G(x,\xi)$ que verifica $((x,\xi) \in [a,b] \times (a,b))$:

i) $\{\frac{\partial^j G}{\partial x^j}\ ;\ j = 0,\dots,n-2\} \subset C([a,b]\times(a,b)) \cap L^\infty([a,b]\times(a,b))$,

ii) $\frac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}(x,\xi)$ y $\frac{\partial^n G}{\partial x^n}(x,\xi)$ son acotadas y continuas en $\{x \neq \xi\}$. Además la primera tiene un salto en $x = \xi$ de magnitud $1/p_o(x)$.

iii) para $\xi \in (a,b)$, $x \neq \xi$, G verifica $l(G(.,\xi)) = 0$, $U_k(G(.,\xi)) = 0$.
Además L^{-1} viene dado por un operador integral de núcleo G.
Precisamente:

(1) $\quad y = L^{-1}(Ly) = \int_a^b (Ly)(\xi)\, G(x,\xi)\, d\xi$, para todo $y \in D$;

(2) $\quad$ para todo $f \in C([a,b])$, $y(x) = \int_a^b f(\xi) G(x,\xi)\, d\xi \in D$, y además

(3) $\quad Ly = f$.

La función G descripta es <u>única</u>, es decir, i), ii), y iii) caracterizan unívocamente a G.

Por "salto en $x = \xi$" entendemos lo siguiente: $\dfrac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}$ es acotada y continua en cada triángulo en que la diagonal $\{(x,x)\}$ divide a $[a,b] \times (a,b)$. Sus prolongaciones a la frontera común de estos triángulos existen y no toman el mismo valor sino difieren en $1/p_o(x)$.-
Precisamente:

$$\frac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}(x+0,x) - \frac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}(x-0,x) = \frac{1}{p_o(x)} \quad , \ (\text{cf.}2.5)$$

Antes de demostrar el teorema veamos un <u>ejemplo</u>.

EJEMPLO. Sea $l(y) = y''$, $U_1(y) \equiv y(0)$, $U_2(y) \equiv y(1)$. La solución general de $Ly = f$ es:

$$y(x) = \int_0^x dt \int_0^t f(s)ds + cx + d \quad , \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Entonces $d=0$ y $c = -\int_0^1 dt \int_0^t f(s)\, ds$. Cambiando el orden de integración en las expresiones de y, y de c, obtenemos:

$$y(x) = \int_0^x f(s)(x-s)\, ds - x \int_0^1 f(s)(1-s)\, ds \text{ , y por lo tanto:}$$

$$y(x) = \int_0^x f(s)(x-1)s\, ds + \int_x^1 f(s)(s-1)x\, ds.$$

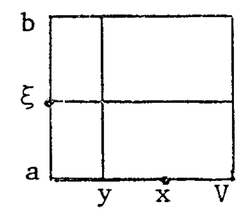
Llamando:

(4) $$G(x,s) := (x-1)s.\chi_{[0,x]}(s) + (s-1)x.\chi_{(x,1]}(s)$$

obtenemos $y(x) = \int_0^1 f(s)\, G(x,s)\, ds$.

En la demostración del teorema precedente tendremos necesidad de usar algún resultado que justifique la conmutación de los signos de integra ción y derivación. Por ejemplo la siguiente (cf.7.5):

PROPOSICION. Sea V un entorno acotado de x y $\varphi(y,\xi)$ una función definida en $V\times(a,b)$, continua allí, tal que para cada ξ, $\varphi(.,\xi)$ es absolutamente continua. Si para cada y ($\in$ V), $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,\xi)$ existe para casi todo $\xi \in (a,b)$ y si $|\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,\xi)| \leqslant M(\xi) \in L^1(a,b)$ casi doquier en $V\times(a,b)$ entonces $\frac{d}{dx}\int_a^b \varphi(x,\xi)\, d\xi = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,\xi)\, d\xi$, c.d.x. En particular, la igualdad vale en todo x donde el miembro derecho es continuo.



DEMOSTRACION DEL TEOREMA. La argumentacion que sigue deja algunos detalles al cuidado del lector.

Sea $f \in C$, $y(x) = \int_a^b G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi$. Entonces si G verifica i), ii), iii) aplicando la proposición tenemos en $a \leqslant x \leqslant b$:

$(dy/dx)(x) = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi$, y procediendo de la misma manera para $j = 2,\ldots,n-1$, obtenemos:

$$\frac{d^j y}{dx^j} = \int_a^b \frac{\partial^j G}{\partial x^j}(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi \quad , \quad j = 0,\ldots,n-1 . \tag{5}$$

Consideremos ahora:

$$y^{(n-1)}(x) = \int_a^x \frac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi + \int_x^b \frac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}\, f\, d\xi . \tag{6}$$

Considerando separadamente los casos $\Delta x > 0$, $\Delta x < 0$, resulta:

$$\frac{y^{(n-1)}(x+\Delta x) - y^{(n-1)}(x)}{\Delta x} = [\, G^{(n-1)}(x+\Delta x,\xi')\, f(\xi')\, \mathrm{sgn}\Delta x -$$

$$- G^{(n-1)}(x,\xi'')\, f(\xi'')\, \mathrm{sgn}\Delta x] + \int_a^{(x+\Delta x)\wedge x} G^{(n)}(x',\xi)\, f(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_{(x+\Delta x)\vee x}^b G^{(n)}(x'',\xi) f(\xi) d\xi,$$ donde ξ' y ξ'', $x' = x'(\xi)$ y $x'' = x''(\xi)$ pertenecen al intervalo definido por x y $x+\Delta x$.

Pasando al límite tenemos para $x \in [a,b]$:

$$y^{(n)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^n G(x,\xi)}{\partial x^n}\, f(\xi)\, d\xi + f(x)\,[\frac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}(x,x-0) -$$

$$- \frac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}(x,x+0)] = \int_a^b G^{(n)}(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi + f(x)/p_o(x).$$

(Esta expresión podría haberse obtenido derivando (6) como función de función). Entonces $l(y) = \int_a^b l(G)\, f\, d\xi + f(x) = f(x)$.
Por otra parte, $U_k(y) = \int_a^b U_k(G(.,\xi))\, f(\xi)\, d\xi = 0$, pues los integrandos son nulos para $a < \xi < b$. Esto prueba (2) y (3), y por lo tanto (1) pues L es biunívoca. Basta entonces mostrar la existencia de una tal G. Sean $y_1(x),\dots,y_n(x)$ soluciones linealmente independientes de $l(y) = 0$. Debemos buscar la función G entre las funciones de la forma

$$(7)\qquad \begin{cases} a_1(t)y_1(x) + \dots + a_n(t)y_n(x), & x \leq t, \\ b_1(t)y_1(x) + \dots + b_n(t)y_n(x), & x \geq t. \end{cases}$$

Debe verificarse:

$$\sum a_i(t)y_i^{(h)}(t) = \sum b_i(t)y_i^{(h)}(t), \quad h = 0,1,\dots,n-2,$$

$\sum (b_i-a_i)(t)y_i^{(n-1)}(t) = 1/p_o(t)$. Como el wronskiano de las y_j es no nulo (cf.1.3, 6.8) quedan unívocamente determinadas las diferencias continuas $(b_i-a_i)(t)$. Es decir, las condiciones de continuidad impuestas a $G(x,\xi)$ determinan las diferencias mencionadas en $a \leq t \leq b$. Las a_j, y en consecuencia las b_j, quedarán determinadas en (a,b) utilizando las condiciones de contorno. Sea

$$(8)\quad G(x,t) = \sum_1^n a_i(t)y_i(x) + H(x,t) \text{ donde } H = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq t \\ \sum_1^n (b_i-a_i)(t)y_i(x), & x \geq t. \end{cases}$$

Entonces: $0 = U_k(G(.,t)) = \sum_1^n a_j(t)U_k(y_j) + U_k(H(.,t))$. La biunivocidad de L implica que $\det(U_k(y_j)) \neq 0$. En consecuencia queda determinado un único sistema $\{a_j\}$ y así el núcleo de Green. En efecto, las a_j y b_j resultan acotadas y continuas en $a < t < b$ lo mismo que las funciones $y_k^{(n)}(x)$, $a \leq x \leq b$. Luego, de (8) sigue que $\partial^n G(x,t)/\partial x^n$ es acotada (en $x \neq t$), verificándose entonces i),ii),iii). La unicidad de G resulta de que $\int_a^b \tilde{G}(x,t)f(t)\, dt = 0$ para toda $f \in C([a,b])$ implica $\tilde{G}(x,t) = 0$ c.d.t para todo x. O sea, $\tilde{G} \equiv 0$. QED.

NOTA. Obsérvese que G se determinó sin usar la diferenciabilidad de los p_j. En la demostración del teorema precedente hubiera bastado suponer que las p_i fueran continuas y $p_o > 0$.

6.8. En este párrafo exhibiremos una expresión ((5)) de la <u>solución general de $l(y) = f$</u> a la cual llegaremos por el <u>método de variación de constantes</u>. A partir de esta expresión determinaremos explícitamente el núcleo de Green del problema de contorno en estudio (m=n).

Sea $f \in C([a,b])$ e $\{y_1,\ldots,y_n\}$ un sistema linealmente independiente de soluciones de $l(y) = 0$. Por comodidad supondremos también que en un punto de $[a,b]$ el wronskiano $W(y_1,\ldots,y_n)$ es conocido; por ejemplo (*) $W(y_1,\ldots,y_n)(a) = I$. Consideremos el sistema de ecuaciones:

$$(1)\qquad \begin{cases} y(x) = \sum_1^n c_i(x)y_i(x) \quad , \quad c_i(x) \in C^1, \\ y'(x) = \sum c_i(x)y_i'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)} = \sum c_i y_i^{(n-1)} \\ y^{(n)}(x) = \sum c_i y_i^{(n)} + \sum c_i' y_i^{(n-1)}. \end{cases}$$

Este sistema <u>es compatible si y sólo si</u>

$$(2)\qquad \begin{cases} \sum c_i' y_i = 0 \\ \vdots \\ \sum c_i' y_i^{(n-2)} = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto de (1) sigue que $l(y) = \sum c_i l(y_i) + p_o \sum c_i' y_i^{(n-1)}$.
Es decir: $l(y) = p_o \sum c_i' y_i^{(n-1)}$; entonces $l(y) = f$ si y sólo si

$$(3)\qquad \sum c_i' . y_i^{(n-1)} = f/p_o .$$

De (2) y (3) obtenemos: $c_i' = f.W_{n,i}/W.p_o$, donde W es el wronskiano de $\{y_j\}$ y $W_{n,i}$ el adjunto del elemento (n,i) de la matriz correspondiente. Luego,

$$c_i(x) = \int_a^x \frac{f.W_{n,i}}{p_o.W}\,dt + \alpha_i = -\int_x^b \frac{f.W_{n,i}}{p_o.W}\,dt + \beta_i .$$ En consecuencia,

$$(4)\qquad c_i(x) = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{f(t)\,W_{n,i}(t)\,\mathrm{sgn}(x-t)}{p_o(t)\,.\,W(t)}\,dt + \gamma_i \quad ,$$

(*) $W'(x) = -(p_1/p_o)W(x) \Rightarrow W(x) = W(x_o)e^{-\int_{x_o}^x (p_1/p_o)dt} \Rightarrow W(x) \equiv 0$ o bien $W(x) \neq 0$ para todo x (demostrarlo).

$$(5)\qquad y(x) = \int_a^b \frac{1}{2}\cdot \frac{f(t).\mathrm{sgn}(x-t)}{p_o(t).W(t)} \cdot \begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1(x) & \dots & y_n(x) \end{vmatrix} dt + \sum_1^n \gamma_i y_i \ .$$

De la definición de las $y_j(x)$ vemos que los coeficientes γ_i son enteramente arbitrarios. Llamaremos $g(x,t)$ al factor de $f(t)$ en (5)

$$(6)\qquad g(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & \dots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1(x) & \dots & y_n(x) \end{vmatrix} . \ \mathrm{sgn}(x-t)}{\begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} . \ 2\, p_o(t)} \qquad \text{donde sgn } 0 = 0.$$

Consideremos ahora el problema $Ly = f$.

Para el cálculo explícito de $G(x,t)$ supondremos como antes que: $Ly = 0 \Rightarrow y=0$. Esto implica que $\det\,(U_i(y_j)) = \Delta \neq 0$, lo cual permitirá resolver en forma única el sistema de ecuaciones (7) que plantearemos a continuación.

De (6), para ξ fijo, $\xi \in (a,b)$, vemos que en $(a,\xi),(\xi,b)$, $g(x,\xi)$ y sus primeras n-1 derivadas respecto a x son continuas en x y acotadas uniformemente en (x,ξ). Además $g(x,\xi)$ y sus n-2 primeras derivadas respecto a x tienen una discontinuidad evitable en $x = \xi$. Por lo tanto son absolutamente continuas para ξ fijo y continuas en (x,ξ). En consecuencia, una aplicación repetida de la proposición 6.7 muestra que:

$$U_j\left(\int_a^b g(.,\xi)\ f(\xi)\ d\xi\right) = \int_a^b U_j\ (g(.,\xi))\ f(\xi)\ d\xi \ .$$

Luego de (5) obtenemos (para y tal que $Ly = f$):

$$(7)\qquad \begin{cases} y = \sum \gamma_i y_i + \displaystyle\int_a^b g(x,\xi)\ f(\xi)\ d\xi\ , \\ U_j(y) = \sum \gamma_i U_j(y_i) + \displaystyle\int_a^b U_j(g(.,\xi))\ f(\xi)\ d\xi \ = 0\ . \end{cases}$$

O sea, un sistema de n+1 ecuaciones en las incógnitas $y(x)$ y $-\gamma_j$. Sigue entonces que $y(x)$ viene dada por:

$$(8) \qquad y(x) = \left|\begin{matrix} \int g\, f\, d\xi & y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \int U_1(g) f d\xi & U_1(y_1) & \dots & U_1(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int U_n(g) f d\xi & U_n(y_1) & \dots & U_n(y_n) \end{matrix}\right| \Bigg/ \left|\begin{matrix} U_1(y_1) & \dots & U_1(y_n) \\ & & \\ \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_1) & \dots & U_n(y_n) \end{matrix}\right| .$$

Luego:

$$(9) \qquad y(x) = \int_a^b \frac{\left|\begin{matrix} g(x,\xi) & y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ U_1(g)(\xi) & U_1(y_1) & \dots & U_1(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(g)(\xi) & U_n(y_1) & \dots & U_n(y_n) \end{matrix}\right|}{\Delta} f(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_a^b \frac{H(x,\xi)}{\Delta} f(\xi)\, d\xi = \int_a^b G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi .$$

Como ahora (9) representa a la solución del problema de contorno no homogéneo $Ly = f$ cualquiera sea $f \in C([a,b])$, debe necesariamente G ser igual al núcleo de Green del problema. En particular, para cada x, $H/\Delta = G$ c.d.ξ.

6.81. Vimos en el § 6.3 que el número de soluciones linealmente independientes - cuando m=n - del problema $L(y) = 0$ es el mismo que el del problema $L^*(y) = 0$. O sea, si L es biunívoco también lo es L^* por lo que podemos construir su núcleo de Green: G^*. Sean $f,g \in C([a,b])$.

$y = \int G\, f\, dt \in D$, $z = \int G^*\, g\, dt \in D^*$ implican

$$(1) \qquad \int Ly.\overline{z}\, dx = \int y.\overline{L^*z}\, dx. \text{ O sea:}$$

$$(2) \qquad \iint \overline{G^*(x,t)\; g(t)}\, f(x)\, dt\, dx = \iint G(x,t)\, f(t)\, \overline{g(x)}\, dt\, dx .$$

En consecuencia

$$(3) \qquad \iint [\overline{G^*(x,t)} - G(t,x)]\, f(x)\overline{g(t)}\, dx\, dt = 0 \quad \forall\ f,g \in C([a,b]).$$

Por lo tanto $G^*(t,x) = \overline{G(x,t)}$.

Recordemos que por definición L es <u>simétrico</u> si L^* coincide con L en D. En este caso $G(x,y) = \overline{G(y,x)} = G^*(x,y)$.

Siempre suponiendo que el espacio nulo de L es $\{0\}$ vemos que resolver $(L-\lambda)y = f \in C$ equivale a resolver la ecuación integral:

(4) $\quad y(x) - \lambda \int_a^b G(x,t)y(t)\,dt = g(x) = \int_a^b f(t)G(x,t)\,dt \quad ,$

donde G es el núcleo de Green del problema con $\lambda = 0$. Por lo tanto el problema $Ly = \lambda . y$ equivale a $0 = y - \lambda \int_a^b G\, y\, dt$. De la teoría de operadores completamente continuos se sabe que esta última ecuación tiene un número numerable de autovalores $\{1/\lambda\}$ pues G es acotada en $(a,b)\times(a,b)$. Esos autovalores son de multiplicidad finita, están acotados y se acumulan a lo más en el origen, el cual no puede ser autovalor. Además si $\frac{1}{\lambda}$ no es autovalor entonces el operador $Ty = y - \lambda \int_a^b G\, y\, dt$ es biunívoco. Para esos λ, $(L-\lambda)y = L_\lambda(y) = f$ admite un núcleo de Green $G_\lambda(x,y) = G(x,y;\lambda)$ pues $f=0$ implica $y=0$. Repitiendo el razonamiento que llevó de la fórmula (1) a la (3) obtenemos:

(5) $$(L^*)_{\bar\lambda} = (L_\lambda)^* \ .$$

En consecuencia

(6) $$G^*(x,t;\lambda) = \overline{G(t,x;\bar\lambda)} \ .$$

6.82. EL NUCLEO DE LA RESOLVENTE. Nuestro próximo objetivo será estudiar un poco más profundamente el núcleo de Green G_λ. Supongamos que:

$$l(y_k) = \lambda y_k \quad , \quad \frac{d^j y_k}{dx^j}(a) = \delta_{j+1,k} \quad , \ k = 1,2,\ldots,n \ ; \quad j = 0,\ldots,n-1.$$

De 6.8 (6) y (8) deducimos que $G(x,\xi;\lambda) = \frac{H(x,\xi;\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ es una función meromorfa en λ para (x,ξ) fijo.

TEOREMA. Sea λ_o autovalor y cero simple de $\Delta(\lambda)$. Entonces:

(1) $$G(x,\xi;\lambda) = \frac{A(x,\xi)}{\lambda-\lambda_o} + G_1(x,\xi;\lambda)$$

con G_1 regular en un entorno V de λ_o para cada $(x,\xi) \in (a,b)\times(a,b)$, y acotada en $(a,b)\times(a,b)\times V$,

(2) $$A(x,\xi) = -\frac{y_o(x).\bar z_o(\xi)}{\int_a^b y_o(t).\bar z_o(t)\,dt} \quad ,$$

donde y_o, z_o son autofunciones: $(L-\lambda_o)y_o = 0$, $(L^*-\bar\lambda_o)z_o = 0$, y con $\int_a^b y_o\, \bar z_o\, dt \neq 0$.

Antes de demostrar el teorema veamos algunas consideraciones de carácter general.

De 6.52, 6.3, 6.54 y la tesis del teorema precedente se concluye que si los ceros de $\Delta(\lambda)$ son simples el sistema de autofunciones de L es biortogonal al sistema de autofunciones de L*.

Veamos ahora que si $\Delta(\lambda_o) = 0$ entonces $G(x,t;\lambda)$ tiene un polo en λ_o en el sentido que para algún $(x,t) \in [a,b]\times[a,b] \setminus \{(x,x): x \in [a,b]\}$, $G(x,t;\lambda)$ tiene un polo en $\lambda = \lambda_o$; sea λ_o un cero de orden m de Δ y el único en $|\lambda-\lambda_o| < 3\varepsilon$. $H(x,t;\lambda)$ es una función entera en λ: $H = \sum A_j(x,t).(\lambda-\lambda_o)^j$, y las A_j están acotadas en (x,t) por $(2\varepsilon)^{-j+1}$, salvo factor constante, pues la H está uniformemente acotada en un entorno de λ_o. Si para todo $(x,t) \in (a,b)\times(a,b)$, $x\neq t$, H/Δ no tiene un polo en λ_o entonces: $A_o = A_1 = \ldots = A_{m-1} = 0$ en ese punto. Luego G_λ es acotada en esa región si $|\lambda-\lambda_o| \leqslant \varepsilon$. Sea y_o una autofunción para el autovalor λ_o. Si $0 < |\lambda-\lambda_o| \leqslant \varepsilon$ de

(3) $$(L-\lambda)y_o = (L-\lambda_o)y_o - (\lambda-\lambda_o) = (\lambda_o-\lambda)y_o$$

se deduce que

(4) $$y_o(x) = (\lambda_o-\lambda)\int_a^b G(x,t;\lambda)y_o(x)\,dt$$

tiende a 0 para $\lambda \longrightarrow \lambda_o$. Contradicción.

En consecuencia: G_λ tiene un polo en λ_o si y sólo si Δ tiene un cero allí. Siempre el orden del polo es menor o igual al orden del cero. En el caso en que $\Delta(\lambda_o) = 0$, $\Delta'(\lambda_o) \neq 0$, el polo es necesariamente de primer orden.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA. Existe, salvo factor, una única autofunción $y_o(x)$ correspondiente al autovalor λ_o.

De lo dicho concluímos ($x\neq t \in (a,b)$):

(5) $$G(x,t;\lambda) = \frac{A(x,t)}{\lambda-\lambda_o} + G_1(x,t;\lambda) .$$

Más precisamente, (cf.6.8(9)),

(6) $$G(x,t;\lambda) = \frac{H(x,t;\lambda)}{\Delta(\lambda)} = g(x,t;\lambda) + \frac{\sum_1^n a_i(t,\lambda).y_i(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} =$$

$$= \frac{\sum_1^n a_i(t,\lambda)y_i(x,\lambda)}{c_1(\lambda-\lambda_o)[1+\ldots]} + g(x,t;\lambda) = \frac{A(x,t)}{\lambda-\lambda_o} + G_1(x,t;\lambda)$$

con $A(x,t) = \sum_1^n a_i(t,\lambda).c_1^{-1}.y_i(x,\lambda)$, $G_1(x,t;\lambda)$ analítica en un entorno V de λ_o y acotada en $(x,t;\lambda)$ si λ pertenece a ese entorno.

De la definición de las $y_i(x,\lambda)$ sigue que para todo $t \in (a,b)$, $A(x,t)$ es solución de $l(y) = \lambda_o y$.

Por otra parte si $\lambda \neq \lambda_o$ pertenece a un entorno V de λ_o entonces $H(x,t;\lambda)$ satisface las condiciones de contorno para todo $t \in (a,b)$. Pasando al límite cuando $\lambda \longrightarrow \lambda_o$, se ve que lo mismo acontece con A. O sea, $L(A) = \lambda_o A$. De aquí sigue que $A(x,t) = h(t).y_o(x)$. Si $h(t) \equiv 0$ entonces G no tiene un polo en $\lambda = \lambda_o$ en contradicción con lo observado más arriba. Podemos escribir entonces

$$(7) \qquad G(x,t;\lambda) = \frac{h(t).y_o(x)}{\lambda-\lambda_o} + G_1(x,t;\lambda) .$$

En consecuencia G* tiene un polo de primer orden en $\overline{\lambda}_o$. Utilizando 6.81(6) se obtiene:

$$(8) \qquad G^*(x,t;\overline{\lambda}) = \overline{G(t,x;\lambda)} = \frac{\overline{A(t,x)}}{\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_o} + \overline{G_1(t,x;\lambda)} =$$

$$= \frac{\overline{h(x)}.\overline{y_o(t)}}{\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_o} + \overline{G}_1 .$$

Sea z_o una autofunción de L* para el autovalor $\overline{\lambda}_o$.

z_o es única salvo factor no nulo. Usando (7) y (8) obtenemos para $\overline{\lambda}$ en un entorno reducido de $\overline{\lambda}_o$ (cf.(4)):

$$z_o(x) = -(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_o) \int_a^b G^*(x,t;\lambda)\, z_o(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b (-\overline{h(x)}.\overline{y_o(t)} + \overline{G}_1.(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_o))z_o(t)\, dt \xrightarrow[\overline{\lambda}\to\overline{\lambda}_o]{} \overline{h}(x) \int_a^b -\overline{y_o(t)}.z_o(t)\, dt.$$

De aquí se deduce que $\overline{h}(x)$ coincide con $z_o(x)$ salvo factor y que necesariamente, $\int_a^b y_o(t).\overline{z_o(t)}\, dt \neq 0$. QED.

REFERENCIAS: [7].

CAPITULO 7

CASIDERIVADAS, EXPRESIONES AUTOADJUNTAS CASIDIFERENCIALES.

7.1. Hemos visto que expresiones diferenciales de la forma:

$$(1) \qquad l(y) := \sum_{j=0}^{n} (-1)^j (p_{n-j} y^{(j)})^{(j)} \quad , \quad p_{n-j} \in C^{(j)}(a,b)), \ p_k \text{ real} ,$$

son autoadjuntas ($l \equiv l^*$) y que toda expresión autoadjunta real es de la forma (1). Eliminando paréntesis tenemos:

$$(2) \qquad l(y) = \sum_{i=0}^{2n} q_i(x).y^{(2n-i)}(x) \quad , \quad a < x < b \ .$$

En lo que sigue nos concentraremos en expresiones diferenciales de orden 2n "de la forma (1)" pero bajo condiciones menos restrictivas sobre los coeficientes p_i, es decir, expresiones tales que, en general, no podrá pasarse de (1) a (2) por diferenciación punto a punto.

HIPOTESIS. $p_1, p_2, \dots, p_n, \frac{1}{p_o}$ son funciones numéricas reales pertenecientes a $L^1_{loc}(a,b)$, y $n \geq 1$.

DEFINICION. i) $l(y)$ se dice <u>regular</u> si $-\infty < a < b < +\infty$ y si

$$(3) \qquad \frac{1}{p_o}, p_1, p_2, \dots, p_n \in L^1(a,b).$$

En caso contrario l se dice <u>singular</u>.

ii) El <u>extremo a</u> se dice <u>regular</u> si $a > -\infty$ y vale (3) en un entorno del punto a. En caso contrario se dice <u>singular</u>.

Es decir, $l \in$ regular si y sólo si $a,b \in$ regular, pues la hipótesis de local integrabilidad de $\{p_i, 1/p_o\}$ asegura la integrabilidad en todo intervalo finito cerrado. Nuestra intención ahora es explicitar una generalización de la expresión $l(y)$. Diremos que g tiene 0 derivadas en (a,b) si $g \in L^1_{loc}$; y si $k \geq 1$, que g <u>tiene k derivadas en</u> (a,b) si las k-1 primeras son localmente absolutamente continuas, y por lo tanto la k-ésima existe casi doquier. Luego $l(y)$ tendrá sentido casi doquier si y verifica la condición α):

α) y tiene n derivadas en (a,b), y para $j = 0,1,\dots,n$, $p_{n-j}y^{(j)}$ tiene j derivadas allí.

Llamaremos a aquél, el <u>sentido clásico</u> de $l(y)$. Sin embargo veremos en un ejemplo que este sentido atribuído a la expresión $l(y)$ no es conveniente, pues la condición α) restringe demasiado el dominio de l,(cf.7.4). Debemos presentar entonces un nuevo concepto: <u>las casiderivadas</u> $y^{[j]}$, $j = 1,2,\ldots,2n$. Por definición:

$$y^{[0]} = y\ ,\ y^{[1]} = \frac{dy}{dx}\ ,\ y^{[2]} = \frac{d^2y}{dx^2}\ ,\ \ldots\ ,\ y^{[n-1]} = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\ ;$$

$$y^{[n]} = p_o \frac{d^ny}{dx^n}\ ;\ y^{[n+1]} = p_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - \frac{d}{dx}(y^{[n]}) = p_1\, y^{[n-1]} - (y^{[n]})',$$

$$y^{[n+2]} = p_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} - \frac{d}{dx}(y^{[n+1]}) = p_2\, y^{[n-2]} - (y^{[n+1]})'$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$y^{[n+k]} = p_k \frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}} - \frac{d}{dx}(y^{[n+k-1]}) = p_k\, y^{[n-k]} - (y^{[n+k-1]})'$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$y^{[2n-2]} = p_{n-2} \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d}{dx}(y^{[2n-3]}) = p_{n-2}\, y^{[2]} - (y^{[2n-3]})'$$

$$y^{[2n-1]} = p_{n-1} \frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx}(y^{[2n-2]}) = p_{n-1}\, y^{[1]} - (y^{[2n-2]})'$$

$$y^{[2n]} = p_n\, y - \frac{d}{dx}(y^{[2n-1]}) = p_n\, y - (y^{[2n-1]})'.$$

Entonces, para y verificando α):

$$(4)\qquad y^{[2n]} = p_n y - \frac{d}{dx}\, y^{[2n-1]} = p_n y - \frac{d}{dx}\left(p_{n-1}\frac{dy}{dx}\right) + \frac{d^2y}{dx^2}\, y^{[2n-2]} =$$

$$= p_n y - \frac{d}{dx}\left(p_{n-1}\frac{dy}{dx}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(p_{n-2}\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \frac{d^3}{dx^3}\, y^{[2n-3]} =$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= p_n y - \frac{d}{dx}\left(p_{n-1}\frac{dy}{dx}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(p_{n-2}\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(p_o\frac{d^ny}{dx^n}\right) =$$

$$= l(y).$$

En efecto, si α) se verifica sigue que:

β) $y^{[j]}$, $j = 0,\ldots,n-1$, tiene $n-j$ derivadas e
$y^{[n+k]}$, $k = 0,\ldots,n-1$, tiene $n-k$ derivadas.

Recíprocamente, si $y^{[j]}$ tiene n-j derivadas para $0 \leqslant j < n$, e $y^{[j]}$ tiene 2n-j derivadas para $n \leqslant j < 2n$, entonces $p_{n-j}\ y^{(j)}$ tiene j derivadas para $0 < j \leqslant n$, e y tiene n derivadas. Es decir, α) es equivalente a β). En esta situación, es decir, cuando vale α), se tiene

(5) $$l(y) = y^{[2n]} \text{ c.d. },$$

pues las operaciones en (4) son ahora legítimas en casi todo punto.

7.11. Sin embargo l(y) puede interpretarse en un dominio más amplio que el de las funciones que satisfacen α).
Convenimos en definir

(1) $$l(y) := y^{[2n]}$$

donde $y^{[2n]} = p_n y - (y^{[2n-1]})'$, y para las funciones y(x) que verifican:

γ) y(x) posee casi derivadas $y^{[j]}$,

$0 \leqslant j \leqslant 2n-1$, absolutamente continuas en todo intervalo finito

$[\alpha,\beta] \subset \{a,b\}$, donde cada llave podrá escribirse como paréntesis o corchetes según que el extremo correspondiente sea singular o regular.

En esta situación $y^{[2n]}$ existe y es finita c.d.. Obsérvese que las operaciones $^{[j]}$ son lineales.

La ecuación no homogénea $l(y) = f$ es ahora

(2) $$y^{[2n]} = f \text{ c.d.}.$$

En el párrafo anterior dimos a $l(y) = y^{[2n]}$ un sentido clásico, precisado en α) o bien en β). La reciente interpretación de l(y) coincide con la clásica si y verifica α).
La recíproca no es cierta si $n > 1$, (cf.nota 4,7.4).

EJEMPLO. Sea n=1, $p_1 = q$. Entonces

(3) $$y^{[0]} = y \quad , \quad y^{[1]} = p_o(x).y' \quad , \quad y^{[2]} = (-p_o y')' + qy \ ,$$

donde se supone que el dominio de definición de $^{[2]}$ es tal que tanto y como $p_o y'$ son localmente absolutamente continuas. Nótese que la condición α) coincide con la γ) en ésta situación.

Las casiderivadas pueden reescribirse así:

$$
(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\, y^{[h-1]} = y^{[h]} \quad , \quad h = 1,2,\ldots,n-1 \ , \\ \dfrac{d}{dx}\, y^{[n-1]} = \dfrac{1}{p_o} \cdot y^{[n]} \quad , \\ \dfrac{d}{dx}\, y^{[2n-h]} = p_{n-h+1} \cdot y^{[h-1]} - y^{[2n-h+1]} \quad , \quad h = 1,2,\ldots,n \ . \end{cases}
$$

Veamos ahora la identidad de Lagrange.

$$
l(y).\bar{z} - y.\overline{l(z)} = y^{[2n]}.\bar{z} - y.\bar{z}^{[2n]} = p_n\, y\, \bar{z} - (\tfrac{d}{dx}\, y^{[2n-1]})\bar{z} - y\, p_n \bar{z} +
$$

$$
+ y.\, \frac{d}{dx}\, (\bar{z}^{[2n-1]}) = \frac{d}{dx}\, [y^{[0]}.\bar{z}^{[2n-1]} - y^{[2n-1]}.\bar{z}^{[0]}] +
$$

$$
+ [-\bar{z}^{[2n-1]} . \frac{dy}{dx} + y^{[2n-1]} . \frac{d\bar{z}}{dx}] = \frac{d}{dx}\, [y^{[0]}.\bar{z}^{[2n-1]} - y^{[2n-1]}.\bar{z}^{[0]}] +
$$

$$
+ \frac{d}{dx}\, [y^{[1]}.\bar{z}^{[2n-2]} - y^{[2n-2]}.\bar{z}^{[1]}] + [y^{[2n-2]} . \frac{d^2\bar{z}}{dx^2} - \bar{z}^{[2n-2]} . \frac{d^2y}{dx^2}] =
$$

$$
= \ldots = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{n} (y^{[k-1]} . \bar{z}^{[2n-k]} - y^{[2n-k]}.\bar{z}^{[k-1]}) .
$$

O sea, la identidad de Lagrange dice que:

$$
(5) \qquad \begin{cases} l(y).\bar{z} - y.\overline{l(z)} = \dfrac{d}{dx}\, [y,z] \quad , \\ [y,z] = \text{paréntesis de Lagrange} = \\ \qquad = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (y^{[k-1]}.\bar{z}^{[2n-k]} - y^{[2n-k]}.\bar{z}^{[k-1]}) . \end{cases}
$$

Integrando obtenemos: $\displaystyle\int_\alpha^\beta (l(y).\bar{z} - y\,\overline{l(z)})\, dx = [y,z]\Big|_\alpha^\beta$.

7.2. Nuestro objetivo es ahora tener a mano - como en la teoría ordinaria - un teorema de existencia y unicidad para el problema de Cauchy de valores iniciales de un sistema de primer orden para aplicarlo luego a $l(y) = f$ y obtener también en ese caso un teorema de existencia y unicidad para valores iniciales.

Sea $f(x) = \{f_1(x),\ldots,f_n(x)\}$, $y(x) = \{y_1(x),\ldots,y_n(x)\}$, y

$$
(1) \qquad \frac{dy}{dx} = A(x).y + f(x)
$$

donde $A(x)$ es una función a valores operadores en R^n - es decir, matrices de orden n - y $x \in (a,b)$.

Por definición $y(x)$ se dirá solución del sistema (1) si en cada $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ es absolutamente continua, es decir, cada componente lo es, y satisface la ecuación diferencial c.d..

TEOREMA. Si $A(x) = (a_{jk}(x))$ y $f(x)$ son medibles en (a,b) y $\|A(x)\|$, $\|f(x)\|$, son localmente sumables, entonces dados $x_o \in (a,b)$, $y_o \in R^n$, existe exactamente una solución $y(x)$ de la ecuación tal que $y(x_o) = y_o$.

DEMOSTRACION. $\|f(x)\| = \sqrt{\sum_1^n |f_i(x)|^2}$ y por lo tanto la local sumabilidad de $\|f\|$ equivale a la local sumabilidad de las $f_i(x)$. $\|A(x)\|$ = norma como operador: la local sumabilidad de ésta implica la de cada $a_{ij}(x)$ (como se ve aplicando $A(x)$ a un vector unitario), y recíprocamente, de $(\sum_{i,j} |a_{ij}(x)|^2)^{1/2} \geqslant \|A(x)\|$, resulta que la local sumabilidad de los a_{ij} implica la de A.

Resolver el problema de Cauchy para (1) equivale a resolver la ecuación integral (2):

$$(2) \qquad y(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} (A(t).y(t) + f(t))\, dt .$$

Apliquemos a (2) el método de aproximaciones sucesivas:

$$(2') \qquad \begin{cases} y_o(x) \equiv y_o \\ \vdots \\ y_{n+1} = y_o + \int_{x_o}^{x} [A(t).y_n(t) + f(t)]\, dt \\ \vdots \end{cases}$$

Supongamos además para fijar ideas que $x > x_o$. Sea

$q(x) = \int_{x_o}^{x} \|A(t)\|\, dt$. Entonces

$$(3) \qquad (y_{n+1} - y_n)(x) = \int_{x_o}^{x} A(t).(y_n(t) - y_{n-1}(t))\, dt .$$

Si $M_o(x) = \int_{x_o}^{x} \|A.y_o + f\|\, dt$, vemos por inducción que:

$$(4) \qquad \|y_{n+1}(t) - y_n(t)\| \leqslant \frac{q^n(t)}{n!} M_o(t) .$$

En efecto,

$$\|y_{n+1} - y_n\|(x) \leqslant \int_{x_o}^{x} \|A(t)\| . M_o(t) \frac{q^{n-1}(t)}{(n-1)!}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_o(x)}{(n-1)!} \int_{x_o}^{x} q^{n-1}.q'\, dt = \frac{M_o(x).q^n(x)}{n!} .$$

Sea $y(x) = y_o + (y_1 - y_o) + (y_2 - y_1) + \ldots$. Esta serie admite la mayorante: $\|y_o\| + M_o + M_o\, q + \ldots + \dfrac{M_o\, q^n}{n!} + \ldots$.

Luego la serie converge (localmente) uniformemente y pasando al límite en la expresión que define y_{n+1} obtenemos (2) para la y así definida.

Si hubiera otra solución z en $x_o < x$, sea $[x_o, \alpha]$ el mayor intervalo de coincidencia, entonces de $y - z = \int_{x_o}^{x} A.(y-z)\, dt$ resulta:

$0 < \sup\limits_{\alpha \le t < x} \|y - z\| = p \leqslant p. \int_{\alpha}^{x} \|A\|\, dt$. Luego para todo $x > \alpha$, $\int_{\alpha}^{x} \|A\| \geqslant 1$, contradicción. QED.

7.21. TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD PARA $l(y) = f$.

Si $f(x) \in L^1_{loc}(a,b)$ y $(c_o, \ldots, c_{2n-1}) \in C^{2n}$, $x_o \in (a,b)$, entonces existe exactamente una función $y(x)$ tal que $y^{[2n]}(x) = f$, c.d., $y^{[k]}(x_o) = c_k$, $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$.

DEMOSTRACION. Consideremos el sistema equivalente a $y^{[2n]} = f$:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy^{[0]}}{dx} = y^{[1]} \\ \vdots \\ \dfrac{dy^{[n-2]}}{dx} = y^{[n-1]} \\ \dfrac{dy^{[n-1]}}{dx} = \dfrac{1}{p_o} \cdot y^{[n]} \\ \dfrac{dy^{[n]}}{dx} = p_1 y^{[n-1]} - y^{[n+1]} \\ \dfrac{dy^{[n+1]}}{dx} = p_2 y^{[n-2]} - y^{[n+2]} \\ \vdots \\ \dfrac{dy^{[2n-1]}}{dx} = p_n . y^{[0]} - f \; . \end{cases}$$

Sea $\tilde{y} = (y^{[0]}, \ldots, y^{[2n-1]})$, $\tilde{f} = (0, 0, \ldots, f)$ y $A(x) \in 2n \times 2n$ definida como sigue:

$$\text{(2)} \qquad A(x) = \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ n) \\ \\ \\ \\ 2n) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & & n & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 \;\cdots\cdots & & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \;\ddots & & \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \;\; 0 & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & 1/p_o & 0 \;\cdots\cdots & 0 \\ 0 & \cdots\cdots & & p_1 & 0 & -1 \;\cdots\cdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & p_{n-1} & & & \vdots & & -1 \\ p_n & \cdots\cdots & & & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{array}\right) \end{array} .$$

Entonces $\frac{d\tilde{y}}{dx} = A(x).\tilde{y} - \tilde{f}$, y A satisface las hipótesis del teorema precedente. Luego, existe $\tilde{y}$ tal que $\tilde{y}(x_o) = \tilde{y}_o = (c_o,\ldots,c_{2n-1})$. QED.

NOTAS. 1) x_o puede ser a si éste es regular y f es sumable en un entorno de a. Y la solución existe en $[a,b]$ si ambos extremos son regulares.

2) Para $l(y) - \lambda y = f$ vale el mismo resultado pues en lugar de p_n debemos poner $p_n - \lambda$, lo que no altera las hipótesis.

3) Cuando los coeficientes y la condición inicial son reales la solución es real, (cf.(2') 7.2).

4) Consideremos: $l(y) \equiv (p_o y'')'' + (p_1 y')' + p_2 y = f$. En su sentido clásico esta expresión significa que (cf.7.1) y tiene dos derivadas, $(p_o y'')$ tiene dos derivadas, $p_1 y'$ tiene una derivada. Supongamos para simplificar que $p_o \equiv 1$, $p_2 \equiv 0$, p_1 continua, positiva y en <u>ninguna</u> parte diferenciable. La expresión se reduce entonces a:

$$\text{(3)} \qquad y^{(iv)} + (p_1 y')' = f .$$

Clásicamente y debe tener cuatro derivadas y $p_1 y'$ una derivada. En particular, y' y $(p_1 y')$ deben ser localmente absolutamente continuas. Si en algún punto x_o, $y'(x_o) \neq 0$, entonces p_1 resultaría absolutamente continua en un entorno de x_o. Luego $y'(x) \equiv 0$ para todas las funciones que verifican α). O sea, clásicamente $\mathfrak{l}(y) = f$ <u>no</u> tiene solución para f tal que $f \neq 0$ en un conjunto de medida > 0. Por otra parte,

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} y^{[0]'} = y^{[1]} \\ y^{[1]'} = y^{[2]} \\ y^{[2]'} = p_1\, y^{[1]} - y^{[3]} \\ y^{[3]'} = -y^{[4]} \end{cases}$$

define las casiderivadas, e $y^{[4]} = f$ <u>tiene solución</u> con $y^{[0]}(x_o),\ldots$
$\ldots, y^{[3]}(x_o)$ arbitrarias si $f \in L^1_{loc}$, pues $p_1 \in L^1_{loc}$.

7.22. PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES DE UNA ECUACION HOMOGENEA: $l(y) = 0$.
Sean y_j, $j = 1,2,\ldots,2n$, soluciones de $l(y) = 0$ y W su wronskiano generalizado:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots\cdots & y_{2n} \\ y_1^{[1]} & \cdots\cdots & y_{2n}^{[1]} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ y_1^{[2n-1]} & \cdots & y_{2n}^{[2n-1]} \end{vmatrix} .$$

TEOREMA. 1) $\{y_j\}$ es linealmente dependiente en $(a,b) \Rightarrow W \equiv 0$.
2) $W(x_o) = 0 \Rightarrow \{y_j\}$ linealmente dependiente.
3) Cada solución de la ecuación homogénea es una combinación lineal de 2n soluciones linealmente independientes de esa ecuación, (sistema <u>fundamental</u>).

DEMOSTRACION. 1) Si $\sum_1^{2n} \alpha_i y_i \equiv 0$ entonces por la linealidad de la operación $^{[k]}$: $\sum_1^{2n} \alpha_i y_i^{[k]} \equiv 0$, por lo tanto $W = 0$ para todo $x \in (a,b)$.
2) Sea $\{\alpha_k\}$ tal que $\sum_{k=1}^{2n} \alpha_k y_k^{[j]}(x_o) = 0$, $j = 0,\ldots,2n-1$, $\sum|\alpha_k| \neq 0$.
Entonces $y = \sum\alpha_k y_k$ es solución de $y^{[2n]} = 0$ y se anula ella y sus casi derivadas hasta orden 2n-1 en x_o. Luego $y \equiv 0$.

3) Un sistema <u>fundamental</u> es un sistema linealmente independiente maximal de soluciones de $l(y) = 0$. 2n soluciones linealmente independientes pueden construirse usando el teorema de existencia y unicidad de manera que: $y_k^{[j]}(x_o) = \delta_{j+1,k}$. Dada otra solución de $y^{[2n]} = 0$, conocemos de ella $y^{[0]}(x_o),\ldots,y^{[2n-1]}(x_o)$. Dado un sistema de 2n soluciones $\{y_j\}$, linealmente independientes, pueden encontrarse constantes $\{\alpha_k\}$ tales que:

$$y^{[j]}(x_o) = \sum \alpha_k\, y_k^{[j]}(x_o) \quad , \quad j = 0,\ldots,2n-1 .$$

Luego: $y \equiv \sum \alpha_k\, y_k$. Esto prueba que los sistemas fundamentales constan de exactamente 2n soluciones y prueba 3) del teorema. QED.
En particular $\{y: l(y) = \lambda y\}$ es de dimensión 2n.

7.23. ECUACION NO HOMOGENEA. SOLUCION POR EL METODO DE VARIACION DE CONSTANTES. Sea $\{y_i\}$ un sistema fundamental e $y(x) = \sum_1^{2n} c_i(x).y_i(x)$ con $\{c_i(x)\}$ tal que:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{2n} c_i'(x).y_i^{[k]}(x) = 0 \ , \quad k = 0,\dots,2n-2 \ .$$

Como $y_j^{[2n]} = 0$ para todo j, el sistema (1) equivale a:

$$(2) \qquad \begin{cases} y^{[h]} = \sum_1^{2n} c_i \ y_i^{[h]} \ , & h = 0,1,\dots,2n-1 \ , \\ y^{[2n]} = -\sum_1^{2n} c_j' \ y_j^{[2n-1]} \ . \end{cases}$$

Como se vé inmediatamente usando 7.11(4). Por ejemplo, la última ecuación resulta de: $y^{[2n]} = -(\sum c_j \ y_j^{[2n-1]})' + p_n \ y^{[0]} =$

$= -\sum c_j' \ y_j^{[2n-1]} + \sum\{p_n c_j y_j^{[0]} - c_j (y_j^{[2n-1]})'\} =$

$= -\sum c_j' \ y_j^{[2n-1]} + \sum c_j y_j^{[2n]} = -\sum c_j'.y_j^{[2n-1]}$.

O sea, existe una colección de $\{c_i\}$ que satisface (1) e $y^{[2n]} = f$ si y sólo si

$$(3) \qquad \begin{cases} \sum_i y_i^{[k]}(x).c_i'(x) = 0 \ , & k = 0,\dots,2n-2 \ , \\ \sum_i y_i^{[2n-1]}(x).c_i'(x) = -f \ . \end{cases}$$

Luego,

$$(4) \qquad c_k' = \left| \begin{array}{ccc} & \overset{k}{\smile} & \\ & 0 & \\ & 0 & \\ \cdots & 0 & \cdots \\ & \vdots & \\ & -f & \end{array} \right| \Bigg/ \left| \begin{array}{ccc} y_1 & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{[2n-1]} & & y_{2n}^{[2n-1]} \end{array} \right| =$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{W(y_1,\dots,y_{k-1},y_{k+1},\dots,y_{2n})}{W(y_1,\dots,y_{2n})} \ f \ ,$$

donde el último numerador es el menor correspondiente al elemento $(2n,k)$.

Escribamos: $c_k'(x) = v_k(x).f(x)$.

Entonces,

$$(5) \qquad c_k(x) = a_k + \int_{x_o}^{x} v_k(t) \ f(t) \ dt$$

y reemplazando en $y = \sum c_k y_k$, obtenemos:

(6) $\quad y(x) = \sum_1^{2n} a_k \cdot y_k + \sum_1^{2n} y_k \cdot \int_{x_o}^{x} v_k\, f\, dt = Y_1 + Y_2$,

donde las a_k son constantes absolutas arbitrarias, y por lo tanto, Y_1 es la solución general de la ecuación homogénea, e Y_2 es una solución particular de la ecuación no homogénea $y^{[2n]} = f$.

Luego, (6) es la solución general de la ecuación no homogénea.

7.3. OPERADORES CASIDIFERENCIALES. La expresión diferencial $l(y) \equiv y^{[2n]}$ define un operador en $H = L^2(a,b)$ con dominio:

$$\{y \in L^2 : y^{[2n]} \in L^2\}.$$

Esto implica que $y^{[0]},\dots,y^{[2n-1]}$ son absolutamente continuas en todo $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ por definición de $y^{[2n]}$. Cuando alguno de los extremos a o b es regular nos interesa que la absoluta continuidad de las $y^{[j]}$, $j < 2n$, alcance ese extremo. Es decir, que también en intervalos de la forma (a,β), si a es regular, esas funciones sean absolutamente continuas (lo cual implica la existencia de límite en a y por lo tanto la absoluta continuidad en $[a,\beta)$). Es decir:

(1) $\quad \mathcal{D} = \mathcal{D}_L = \{y \in L^2 : y^{[2n]} \in L^2;\ y^{[0]},\dots,y^{[2n-1]} \in AC$ en intervalos finitos que son entornos en $[a,b]$ de los puntos regulares$\}$.

Más adelante demostraremos que $\overline{\mathcal{D}} = H$. Definamos ahora $\mathcal{D}_o'$:

(2) $\quad \mathcal{D}_o' = \{y \in \mathcal{D} : y = 0$ fuera de algún intervalo cerrado $\subset (a,b)\}$,

(3) $$L_o' := L \mid \mathcal{D}_o' .$$

Luego, $L_o' \subset L$. Si $y \in \mathcal{D}_o'$, $y = 0$ en $(a,b) - [\alpha,\beta]$, ella y todas sus casiderivadas hasta orden 2n-1 se anulan en α y β (cf.7.11). Luego, de la identidad de Lagrange obtenemos:

(4) $\quad (l(y),z) = (y,l(z))$ para todo $y \in \mathcal{D}_o'$, para todo $z \in \mathcal{D}$.

Es decir,

(5) $\quad y \in \mathcal{D}_o'$, $z \in \mathcal{D} \Rightarrow (L_o'y,z) = (y,Lz)$.

CASO REGULAR. Supongamos a y b regulares, y $\mathcal{D}_o$ definido por

(6) $\quad \mathcal{D}_o = \{y \in L^2 \colon y^{[2n]} \in L^2 \ ; \quad y^{[j]} \in AC \text{ en } [a,b] \text{ para } 0 \leqslant j \leqslant 2n-1,$

$$y^{[k]}(a) = y^{[k]}(b) = 0 \ , \ k = 0,1,\dots,2n-1\}.$$

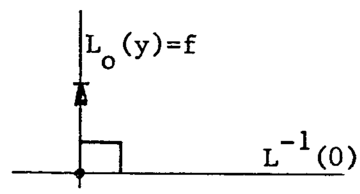
Es decir $\mathcal{D}_o = \{y \in \mathcal{D} \mid y^{[j]}(a) = y^{[j]}(b) = 0 \ , \ 0 \leqslant j < 2n\}$. Definimos el operador L_o como la restricción de L a $\mathcal{D}_o$: $L_o = L \mid \mathcal{D}_o$. Como $\mathcal{D} \supset \mathcal{D}_o \supset \supset \mathcal{D}'_o$ se tiene: $L \supset L_o \supset L''_o$. Tenemos, como antes que:

(7) $$y \in \mathcal{D}_o \quad , \quad z \in \mathcal{D} \quad \Rightarrow \quad (L_o y, z) = (y, Lz) \ .$$

O sea, si $z,y \in \mathcal{D}_o$, $(L_o y, z) = (y, L_o z)$. Por lo tanto, tan pronto demostremos que $\overline{\mathcal{D}'_o} = H$ quedará demostrado que L_o es un operador simétrico.

LEMA. Sea $f \in L^2$. Existe $y \in \mathcal{D}_o$ tal que $l(y) = f$ si y sólo si $f \perp \{y \in \mathcal{D} \mid l(y) = 0\}$. Es decir,

(8) $$L_o(\mathcal{D}_o) \ni f \iff f \perp L^{-1}(0) \ .$$



DEMOSTRACION. Existe un y tal que $y^{[k]}(a) = 0$, $k = 0,\dots,2n-1$, $l(y) = f$. Sea $\{z_1,\dots,z_{2n}\}$ un sistema fundamental de $l(z) = 0$ y tal que: $z_\nu^{[k-1]}(b) = \delta_{\nu k}$. Entonces:

$(f,z_\nu) = (l(y),z_\nu) = (y,l(z_\nu)) + [y,z_\nu]_a^b = [y,z_\nu]_a^b = [y,z_\nu](b)$, por lo tanto:

$$(f,z_\nu) = \sum_{k=1}^{n} (y^{[k-1]}\bar{z}_\nu^{[2n-k]} - y^{[2n-k]}\bar{z}_\nu^{[k-1]})(b) =$$

$$= \begin{cases} -y^{[2n-\nu]}(b) & \text{si } \nu = 1,\dots,n \\ y^{[2n-\nu]}(b) & \text{si } \nu = n+1,\dots,2n \ . \end{cases}$$

Luego, $y^{[k]}(b) = 0$, $k = 0,\dots,2n-1$, si y sólo si $(f,z_\nu) = 0$ para todo ν. O sea, si y sólo si $f \perp \{z\colon l(z) = 0\}$. Por ser b y a regulares, $\{z\colon l(z) = 0\} = \{z\colon L(z) = 0\}$; en efecto, si z es tal que $l(z)$ tiene sentido (cf.7.11) entonces $z \in \mathcal{D}$ equivale a $l(z) \in L^2(a,b)$. QED.

7.31. Hemos visto que el rango de L_o, R_o , es el complemento ortogonal del espacio nulo M de L y por lo tanto $R_o = \overline{R}_o$. Sabemos también que $\dim M = 2n$. Luego, $M = \overline{M}$ y vale

(1) $$H = R_o \oplus M \quad , \quad R_o = L_o(\mathcal{D}_o) \quad , \quad M = L^{-1}(0) \ .$$

LEMA. Sean $\alpha_o,\ldots,\alpha_{2n-1}$, $\beta_o,\ldots,\beta_{2n-1}$ números arbitrarios. Existe $y \in \mathcal{D}$ tal que $y^{[k]}(a) = \alpha_k$, $y^{[k]}(b) = \beta_k$, $k = 0,1,\ldots,2n-1$.

DEMOSTRACION. Sea $\{z_\nu\}$ un sistema fundamental como en el lema 7.3 y $\{s_\nu \mid \nu = 1,\ldots,2n\}$ números arbitrarios. Como el determinante de Gram de $\{z_1,\ldots,z_{2n}\}$ es no nulo, pues el sistema es linealmente independiente, en el espacio generado por esos elementos existe f (única) tal que $(f,z_\nu) = s_\nu$.

El teorema de valores iniciales dice que existe v tal que:

$l(v) = f^{\cdot}$, $v^{[k]}(a) = 0$, $k = 0,\ldots,2n-1$.

De la identidad de Lagrange obtenemos:

$s_\nu = (f,z_\nu) = (l(v),z_\nu) = (v,l(z_\nu)) + [v,z_\nu]_a^b = [v,z_\nu](b) = \pm v^{[2n-\nu]}(b)$.

En consecuencia, existe $v \in \mathcal{D}$ tal que

$$v^{[m]}(b) = \beta_m \quad , \quad m = 0,\ldots,2n-1 \quad , \quad v^{[m]}(a) = 0$$

Análogamente se prueba que existe $w \in D$ tal que $w^{[m]}(b) = 0$, $w^{[m]}(a) = \alpha_m$. Luego $y = v + w$ satisface la tesis. QED.

7.32. LEMA. $\overline{\mathcal{D}_o} = H$.

DEMOSTRACION. Sea $h \perp \mathcal{D}_o$ y $z \in \mathcal{D}$ tal que $l(z) = h$.

Entonces de 7.3(7) sigue que para todo $y \in \mathcal{D}_o$, $(h,y) = 0 = (l(z),y) =$
$= (z,l(y))$. O sea, $z \perp R_o$. Luego, $z \in M$. Es decir, $l(z) = 0 = h$. QED.

7.33. Sea $\Delta = [\alpha,\beta] \subset (a,b)$. Al conjunto de funciones de $\mathcal{D}_o'$ que se anulan fuera de $[\alpha,\beta]$ designémoslo con $\mathcal{D}_\Delta$. Es inmediato que si restringimos las funciones de $\mathcal{D}_\Delta$ a Δ, éstas definirán el espacio $\mathcal{D}_o$ para el intervalo (α,β), como se ve enseguida con un argumento de continuidad. Luego $\overline{\mathcal{D}_\Delta} = H_\Delta$ = conjunto de las funciones de H nulas fuera de $[\alpha,\beta]$. Como $\bigcup_\Delta H_\Delta$ es denso en H resulta el siguiente resultado básico.

LEMA. $\overline{\mathcal{D}_o'} = H$.

7.34. TEOREMA. i) $L = L_o^*$,

ii) $L_o = L^*$,

iii) $L_o \subset L_o^*$, $L_o = \overline{L}_o$ (o sea, L_o es simétrico y cerrado).

DEMOSTRACION. iii) sigue de i) e ii). Veamos i). De 7.3(7) obtenemos $L_o^* \supset L$. Veamos que $L = L_o^*$. Sea $g \in \mathcal{D}_o^*$ = dominio de L_o^*. Para demostrar la tesis debemos ver que $g \in \mathcal{D}$. Existe $z \in \mathcal{D}$ tal que:

$$h = L_o^*(g) = l(z) = L(z) .$$

Entonces para todo $y \in \mathcal{D}_o$:

$(h,y) = (L(z),y) = (z,L_o(y))$, $(h,y) = (L_o^*(g),y) = (g,L_o(y)) \Rightarrow z-g \perp R_o$.
En consecuencia, $z-g = m \in M \subset \mathcal{D}$. Es decir, $g \in \mathcal{D}$.

ii) $L = L_o^* \Rightarrow L^* = L_o^{**} \supset L_o$. Por otra parte: $L_o \subset L \Rightarrow L = L_o^* \supset L^*$.
Sea $z \in \mathcal{D}^*$ = dominio de L^*. Entonces $z \in \mathcal{D}$ y $L^*z = Lz$. Además para todo $y \in \mathcal{D}$ tenemos:

$(L^*z,y) = (z,Ly) \Rightarrow (Lz,y) = (z,Ly)$ para todo $z \in \mathcal{D}^*$, para todo $y \in \mathcal{D}$.
Y de la identidad de Lagrange se deduce que: $[z,y]_a^b = 0$.
Como $y^{[k]}(a)$, $y^{[k]}(b)$, $k = 0,1,\dots,2n-1$, son arbitrarios, necesariamente $z^{[k]}(a) = z^{[k]}(b) = 0$, $k = 0,\dots,2n-1$. O sea, $z \in \mathcal{D}_o$. Es decir: $\mathcal{D}^* \subset \mathcal{D}_o$. Por lo tanto de $L^* \supset L_o$ deducimos que $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}_o$, o sea, $L^* = L_o$.
QED.

7.35. Si bien nosotros estamos considerando solamente operadores provenientes de expresiones autoadjuntas a coeficientes reales: $\sum_h (p_h\, y^{(h)})^{(h)}$, es oportuno observar, aunque más no sea como ejemplo para la teoría general, que un caso particular de la expresión autoadjunta:

$$\frac{1}{2}[(ip\, y^{(\nu-1)})^{(\nu)} + (ip\, y^{(\nu)})^{(\nu-1)}]$$

se obtiene con $\nu=1$, $p \equiv 1$. Y esto da lugar al operador $T = i\, d/dx$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\mathcal{D}_T := \{f \in AC:\ f' \in L^2 ,\ f(0) = f(1) = 0\}$.
Se demuestra que $\mathcal{D}_{T^*} = \{f \in AC:\ f' \in L^2\}$.
$\mathcal{D}_{T_\alpha} := \{f \in AC:\ f' \in L^2,\ f(0) = \alpha . f(1)\}$ es el dominio de una extensión autoadjunta de T si $|\alpha| = 1$. T^* está definido por: $T^*f = i\cdot \frac{df}{dx}$ si $f \in \mathcal{D}_{T^*}$ y se tiene:

$$T \subset T_\alpha \subset T^* \quad , \quad T_\alpha = T^* | \mathcal{D}_{T_\alpha} \quad .$$

7.36. Para finalizar demostraremos que en el caso regular - caso que venimos considerando desde el § 7.3 - L_o es la clausura de L_o'. Este es un resultado importante pues sugiere que cuando (a,b) no sea regular y L_o no sea definible en la forma que lo hicimos, siempre podrá obtenerse un operador - que presumiblemente se comportará como L_o - por medio de la clausura del operador L_o'.

TEOREMA. $\overline{L_o'} = L_o$.

DEMOSTRACION. Sabemos que: $\mathcal{D}_\Delta \subset \mathcal{D}_o' \subset \mathcal{D}_o \subset \mathcal{D}$ $(= \mathcal{D}_L)$. Sea $z \in \mathcal{D}_o'^* =$ dominio de $L_o'^*$, $y \in \mathcal{D}_\Delta$. Entonces: $(L_o'^*z,y) = (z,L_o'y)$.

Por lo tanto:

$$\int_a^b (L_o'^*z)\ \bar{y}\ dx = \int_a^b z.(\overline{L_o'y})\ dx = \int_a^b z.\overline{\chi_\Delta\ L_o'\ y}\ dx = \int_\alpha^\beta (z\ \chi_\Delta).\overline{L_o y}\ dx \ ,$$

donde L_o en la última expresión es el operador correspondiente al intervalo $(\alpha,\beta) = \Delta$. Entonces (cf.7. 34 i)):

$\int_a^b (L_o'^*z)\ \bar{y}\ dx = \int_\alpha^\beta L(z\ \chi_\Delta).\bar{y}\ dx$ implica que en Δ : $L_o'^*(z) =$

$= L(z\ \chi_\Delta) = l(z)$, (completar el argumento).

Como esto sucede para todo $\Delta \subset (a,b)$: $L_o'^*(z) = l(z)$. Entonces de $L_o'^*(z) \in H$, sigue que $z^{[2n]} \in H$; o sea: $z \in \mathcal{D}_o'^* \Rightarrow z \in \mathcal{D}$ (cf.Ej.7.42,6)).

Es decir: $L_o'^* \subset L$.

De $L_o' \subset L_o \subset L$ se deduce $L_o'^* \supset L_o^* = L$. Así $L_o'^* = L$ y $L_o'^{**} = L^* = L_o$, es decir $\overline{L_o'} = L_o$. QED.

7.4. TEOREMAS DE EXISTENCIA Y UNICIDAD PARA CASOS CON EXTREMOS SINGULARES. Queremos en esta sección mejorar y completar algunos resultados de los párrafos 7.2 y 7.21 permitiendo una expresión más general para la ecuación diferencial allí estudiada.

En lo que sigue $y = [y_1,\ldots,y_n]$ representará un vector (columna) o una función vectorial a valores en C^n, munido de la norma $\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}$, e $I = \{a,b\}$ será un intervalo finito o infinito, no necesariamente abierto o cerrado: $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

TEOREMA. Consideremos la ecuación:

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = F(x,y) \quad \text{c.d.} \;,\quad c,x \in I \;,\quad y \in C^n \;,$$

donde $F(x,y)$ es una función medible Lebesgue definida en $I\times C^n$ que verifica las condiciones:

$$(2) \qquad \|F(x,y)\| \leq \psi(x).\|y\| + \eta(x) \qquad \text{c.d.}x \;,$$

$$(3) \qquad \|F(x,y_1) - F(x,y_2)\| \leq \psi(x).\|y_1 - y_2\| \qquad \text{c.d.}x \;,$$

donde tanto $\psi(x)$ como $\eta(x)$ pertenecen a L^1_{loc} y $\eta(x) \geq 0$ c.d.x ,

Si y_0 es un vector arbitrario de C^n entonces existe una única solución $y(x)$ de la ecuación (1), absolutamente continua sobre intervalos compactos, que verifica la condición inicial $y(c) = y_0$. $y(x)$ satisface las siguientes desigualdades:

$$(4) \qquad \|y_0\|.\exp\{-|\int_c^x \psi(s)ds|\} - |\int_c^x \eta(s)ds| \leq \|y(x)\| \leq$$

$$\leq (\|y_0\| + |\int_c^x \eta(s)\, ds|).\exp\{|\int_c^x \psi(s)\, ds|\}$$

con x mayor o menor que c.

DEMOSTRACION. Sea $h(x)$ una función medible Lebesgue definida en I a valores en C^n. Entonces $F(x,h(x))$ es medible Lebesgue. En efecto, supongamos $h(x)$ simple. En general no es cierto que $F(x,h)$ sea medible pues no necesariamente una sección de una función medible Lebesgue lo es. Sin embargo casi toda sección es medible Lebesgue y debido a (3) es cierto que $F(x,h(x))$ es medible. (3) y un pasaje al límite muestran que esto es cierto en general.

Para demostrar la existencia de solución bastará encontrar una $y(x)$ que satisfaga:

$$(5) \qquad y(x) = y_0 + \int_c^x F(s,y(s))\, ds \;.$$

Aplicando el ya conocido método de aproximaciones sucesivas podemos escribir:

$$(6) \qquad \begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_{n+1}(x) = y_0 + \int_c^x F(s,y_n(s))\, ds \;, \quad c,x \in I \;. \end{cases}$$

Supongamos para fijar ideas: $c < x$, y sea:

$$
(7) \qquad \begin{cases} M_o(x) := \sup\limits_{t\in[c,x]} \left\| \int_c^t F(s,y_o)\, ds \right\| , \\ M_n(x) := \sup\limits_{t\in[c,x]} \| y_{n+1}(t) - y_n(t)\| , \quad n \geqslant 0. \end{cases}
$$

Definamos: $\Psi(x) := \left|\int_c^x \psi(t)\, dt\right|$, $H(x) := \left|\int_c^x \eta(t)\, dt\right|$. Entonces

$$
(8) \qquad \begin{cases} M_o(x) \leqslant \|y_o\| . \Psi(x) + H(x) , \\ M_n(x) \leqslant \|y_o\| . \dfrac{(\Psi(x))^{n+1}}{(n+1)!} + H(x) . \dfrac{(\Psi(x))^n}{n!} , \end{cases}
$$

como se vê enseguida por inducción.

Luego, la serie

$$
(9) \qquad y(x) = y_o(x) + (y_1(x)-y_o(x)) + (y_2(x)-y_1(x)) + \dots
$$

está mayorada por

$$
(10) \qquad (\|y_o\| + H(x)).\exp\left|\int_c^x \psi(s)\, ds\right| =
$$

$$
= (\|y_o\| + H(x)).(1+\Psi(x)+(\Psi(x))^2/2! + \dots) ,
$$

y por lo tanto converge uniformemente y absolutamente sobre intervalos compactos. De esto sigue usando (3) que (9) es solución de (5); por lo tanto de (1).

Y supuesta la unicidad se deduce también de (9) y (10) la segunda desigualdad en (4).

Sea $z(t)$ otra solución absolutamente continua sobre intervalos compactos tal que $z(c) = y_o$. Sea $\alpha = \sup \{t \geqslant c: z(s) = y(s)$ para todo $s \in [c,t]\}$ y $p(x) = \sup\limits_{\alpha\leq t\leq x} \|z(t)-y(t)\|$.

Entonces, $(y-z)(x) = \int_c^x (F(s,y(s)) - F(s,z(s))\, ds$, y por lo tanto $p(x) \leqslant p(x) . \int_\alpha^x \psi(s)\, ds$, desigualdad que es contradictoria si existe $x \in I$, $x > \alpha$.

Finalmente, cambiando c por x en la segunda desigualdad (4) obtenemos:

$$
(11) \qquad \|y(c)\| = \|y_o\| \leqslant (\|y(x)\| + \left|\int_c^x \eta ds\right|) e^{\left|\int_c^x \psi(s) ds\right|} ,
$$

y por lo tanto, la primera desigualdad en (4). QED.

7.41. TEOREMA Sea $F(x,y)$ como en el teorema 7.4 y supongamos además que ψ y η son integrables en I.

Sea $y_1 \in C^n$ un vector arbitrario. Entonces

1) la solución $y(x)$ de 7.4(1) (o (5)) posee un límite finito para $x \to b$:

$$y(b) := \lim_{x\to b} y(x)$$

2) dado $y_1 \in C$, existe una y sólo una solución $y(x)$ de (1) que es absolutamente continua sobre compactos y verifica:

$$y_1 = \lim_{x\to b} y(x) .$$

Sea y_o el valor de y en un punto arbitrariamente elegido de I, e incluso $y_o = y(b)$, entonces

(1) $\|y(b)-y(x)\| \leqslant [\|y_o\|+\int_I \eta\, ds].(\exp \int_I \psi(s)\, ds).|\int_x^b \psi(s)\, ds| + |\int_x^b \eta ds|$.

Si $\eta = 0$ entonces $y_1 = 0$ implica $y(x) \equiv 0$.

3) Lo dicho vale para $x \to a$. En (1) basta sustituir a por b.

DEMOSTRACION. De 7.4(5) y (4) obtenemos si $x_1 < x_2$, $x_1,x_2 \in I$:

(2) $$y(x_2)-y(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} F(t,y(t))\, dt ,$$

(3) $$\|y(x_2)-y(x_1)\| \leqslant \int_{x_1}^{x_2} (\|y(c)\|+H(t))e^{|\int_c^t \psi(s)ds|}.\psi(t)\, dt + \int_{x_1}^{x_2} \eta(t)\, dt$$

$$\leqslant (\|y(c)\|+\int_I \eta(s)\, ds)\, e^{\int_I \psi ds} . \int_{x_1}^{x_2} \psi\, ds + \int_{x_1}^{x_2} \eta\, ds .$$

Entonces, $x_1,x_2 \to b$ implica $\|y(x_1)-y(x_2)\| \to 0$, y en consecuencia $y(b)$ existe. Haciendo $x_2 \to b$ en (3) obtenemos:

(4) $$\|y(b)-y(x)\| \leqslant [\|y(c)\|+\int_I \eta(s)ds].(\exp\int_I \psi ds).\int_x^b \psi ds + \int_x^b \eta ds$$

y de aquí sigue (1).

Veamos ahora (2). Sea $t_n \uparrow b$ e $y_n(x)$ la solución de

(5) $$\frac{dy}{dx} = F(x,y) \quad , \quad y(t_n) = y_1 .$$

Entonces si $u < v$ valen:

(6) $$\|y_n(t)\| \leqslant [\|y_1\| + |\int_{t_n}^t \eta ds|].e^{|\int_{t_n}^t \psi ds|} ,$$

(7) $$\|y_n(u)-y_n(v)\| \leqslant \int_u^v \|F(s,y_n(s))\| ds \leqslant \int_u^v (\psi(x).\|y_n(x)\|+\eta(x))\ dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_u^v \psi(x).[\|y_1\|+|\int_{t_n}^x \eta ds|].e^{|\int_{t_n}^x \psi ds|}\ dx + \int_u^v \eta(x)\ dx .$$

En consecuencia, $\{y_n\}$ es una sucesión uniformemente acotada y equicontinua sobre todo compacto $[\alpha,\beta] \subset I$.

Existe entonces una subsucesión, que designaremos también $\{y_n\}$, tal que

$$y_n(x) \longrightarrow y(x)$$

uniformemente sobre compactos. Por otra parte

(8) $$y_n(t) = y_1 + \int_{t_n}^t F(s,y_n)\ ds = y_1 + \int_{t_n}^t F(s,y)\ ds +$$
$$+ \int_{t_n}^t (F(s,y_n) - F(s,y))\ ds .$$

De (6) resulta que $\|y(t)\|$ es acotada, y utilizando 7.4(2) vemos que $\|F(s,y(s))\| \in L^1(I)$. Por lo tanto

(9) $$\int_{t_n}^t F(s,y)\ ds \xrightarrow[t_n\to b]{} \int_b^t F(s,y)\ ds .$$

Además:

(10) $$|\int_{t_n}^t \|F(s,y_n(s))-F(s,y(s))\|\ ds| \leqslant |\int_{t_n}^t \psi(s).\|y_n-y\|\ ds| \leqslant$$
$$|\int_t^c \psi(s).\|y_n(s) - y(s)\|\ ds| +$$
$$+ 2|\int_c^{t_n} \psi(s).[\|y_1\| + |\int_I \eta ds|].e^{|\int_I \psi dx|}\ ds| \leqslant$$
$$\leqslant |\int_t^c \psi.\|y_n-y\|\ ds| + 2.\int_c^b \psi.[\|y_1\| + \int_I \eta\ ds].e^{\int_I \psi dx}\ ds .$$

Dado ε existe $c > t$ tal que el segundo sumando es menor que $\varepsilon/2$. Además, si $n > n_o(\varepsilon)$,

(11) $$\{\sup_{u\varepsilon[t,c]} \|y_n-y\|(u)\}.\int_t^c \psi\ ds < \varepsilon/2 .$$

Entonces, de (8),(9),(10) y (11), resulta que dado $t \in \overset{o}{I}$, si $n>n_1(\varepsilon,t)$,

(12) $$\|y_n(t) - y_1 - \int_b^t F(s,y(s))\ ds\| < 2\varepsilon ,$$

y por lo tanto

(13) $$y(t) = y_1 + \int_b^t F(s,y(s))\, ds ,$$

es decir, $y(t)$ resuelve 7.4(1) con $y(b) = y_1$.

Sea $\tilde{y}(t)$ una solución de 7.4(1) tal que $\tilde{y}(b) = y_1$.

Entonces

(14) $$\tilde{y}(t) = \tilde{y}(c) + \int_c^t F(s,\tilde{y}(s))\, ds .$$

Sabemos que $\|F(s,\tilde{y}(s))\| \in L^1(I)$; haciendo $t \to \infty$ resulta

(15) $$y_1 = \tilde{y}(c) + \int_c^b F(s,\tilde{y}(s))\, ds \quad \text{para todo } c.$$

Es decir, $\tilde{y}(t)$ satisface (13) y vale:

(16) $$\|\tilde{y}(t)-y(t)\| \leqslant \int_t^b \psi(x) . \|\tilde{y}(x)-y(x)\|\, dx .$$

Luego, si $M = \sup_{c \le s \le b} \|\tilde{y}(s)-y(s)\|$, tendremos

(17) $$M \leqslant (\int_c^b \psi(x)\, dx) . M , \quad \text{para todo } c.$$

Pero si c es bastante grande $\int_c^b \psi dx < 1$. En consecuencia $M=0$. Por lo tanto, $\tilde{y}(y) \equiv y(t)$ en (c,b), lo que implica $\tilde{y} = y$. QED.

7.42. EJERCICIOS. 1) Demostrar que el teorema de condiciones iniciales citado en 1.11 es un caso particular del T.7.2.

2) Demostrar que el teorema de condiciones iniciales citado en 5.1 es un caso particular del T.7.21.

3) Demostrar que el teorema de condiciones iniciales mencionado en 6.1 es un caso particular del T.7.2.

4) Demostrar que el T.7.2 es un caso particular del T.7.4.

5) i) Sean a y b finitos, $a < b$. En el T.7.2 puede reemplazarse (a,b) por $[a,b]$ si $\|A(x)\|$ y $\|f(x)\|$ son sumables en $[a,b]$.

ii) Si $f \in L^1(a,b)$ entonces en el T.7.21 puede reemplazarse $[a,b]$ por (a,b) si los extremos a y b son regulares, (cf.7.11 y 7.1).

6) Sean a y b regulares. Si $z^{[2n]}$ está bien definida en (a,b) y pertenece a L^2 entonces $z \in \mathcal{D}_L$, (cf. Ej.5, ii) y 7.3).

7) De (9) 7.4 se obtiene $\|y(x)\| \geqslant \|y_o\| - \|y_1 - y_o\| - \dots$. Usando (8) sigue entonces que

$$2\|y_o\| - (\|y_o\| + |\int_c^x \eta\, ds|).\exp|\int_c^x \psi\, ds| \leqslant \|y(x)\|,$$

puede reemplazar a la primera desigualdad en (4).

7.5. DEPENDENCIA DE PARAMETROS. En esta sección demostraremos algunos resultados sobre la dependencia de parámetros de integrales y de soluciones de una ecuación diferencial. En la proposición que sigue V denotará un abierto acotado de algún espacio métrico que quedará identificado en cada caso. $\phi(\lambda,\xi)$ denotará una función a valores numéricos definida en $V \times W$, y para fijar las ideas supondremos $W = (a,b)$, a y b números reales, $a < b$. Supondremos también que para todo $\lambda \in V$, $\phi(\lambda,\xi)$ es medible en $\xi \in (a,b)$.

PROPOSICION. i) Si para casi todo $\xi \in (a,b)$,

(1) $$\lim_{\lambda\to\lambda_o} \phi(\lambda,\xi) = \phi(\lambda_o,\xi) \quad ,$$

(2) $$|\phi(\lambda,\xi)| \leqslant M(\xi) \in L^1(a,b) \quad , \text{ para todo } \lambda \in V,$$

entonces

(3) $$F(\lambda) = \int_a^b \phi(\lambda,\xi)\, d\xi$$

es continua en $\lambda = \lambda_o$.

ii) Sea $V \subset R^1$, y para casi todo $\xi \in (a,b)$ sea $\phi(\lambda,\xi)$ absolutamente continua en λ. Supongamos que valga (2). Si

(5) $$|\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(\lambda,\xi)| \leqslant M'(\xi) \in L^1(a,b),$$

en casi todo $(\lambda,\xi) \in V \times (a,b)$, entonces $F(\lambda)$ es absolutamente continua en V y

(6) $$\frac{dF}{d\lambda} = \int_a^b \frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(\lambda,\xi)\, d\xi,$$

en casi todo $\lambda \in V$, y en todo λ que sea punto de continuidad del miembro derecho de (6).

iii) Sea $V \subset C$, y para casi todo $\xi \in (a,b)$ sea $\phi(\lambda,\xi)$ analítica en λ. Supongamos que valga (2). Entonces $F(\lambda)$ es analítica en V y

(6') $$\frac{dF}{d\lambda}(\lambda) = \int_a^b \frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(\lambda,\xi)\, d\xi \quad , \text{ para todo } \lambda \in V.$$

DEMOSTRACION. i) es una consecuencia inmediata del teorema de Lebesgue de convergencia dominada.

ii) Observemos que las hipótesis implican que $\phi(\lambda,\xi)$ y $\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(\lambda,\xi)$ son medibles en $V \times (a,b)$, y que

$$\int_a^b [\phi(\lambda,\xi) - \phi(\lambda_o,\xi)]d\xi = \int_a^b d\xi \int_{\lambda_o}^{\lambda} \frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(\lambda,\xi)\, d\lambda.$$

Una aplicación del teorema de Fubini prueba entonces que

$$F(\lambda) - F(\lambda_o) = \int_{\lambda_o}^{\lambda} d\lambda \int_a^b \frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(\lambda,\xi)\, d\xi ,$$

y sigue la proposición ii).

iii) Sea $\lambda_o \in V$ y $\{ \lambda: |\lambda-\lambda_o| < 2\varepsilon\} \subset V$. Entonces, para casi todo $\xi \in (a,b)$ y todo $\lambda \in V' = \{|\lambda-\lambda_o| < \varepsilon\}$, tenemos

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(\lambda,\xi)\right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \max_{|\lambda-\lambda_o|=\varepsilon} |\phi(\lambda,\xi)| \leqslant M(\xi) \;/\; \varepsilon = M'(\xi).$$

Luego, en $V' \times (a,b)$ se verifican (5) y (6). Además, como $\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(\lambda,\xi)$ es continua en $\lambda \in V'$ salvo para los ξ de un conjunto de medida cero, resulta que $\int_a^b \frac{\partial\phi}{\partial\lambda}\, d\xi$ es continua en V'. En consecuencia, iii) sigue de ii) QED.

Consideremos el problema de valores iniciales:

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = A(x,\lambda)y + b(x,\lambda) & , \quad x \in I = (\alpha,\beta), \\ y(c) = \omega & , \quad c \in I , \end{cases}$$

donde $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant \infty$, $A(x,\lambda)$ es una función a valores matrices $n \times n$, mientras que y y b son funciones a valores vectores (columna). El parámetro λ varía en un abierto $\Omega \subset C$ y $\omega \in C^n$. Denotamos en $\|A\|$ a $\left(\sum_{i,j} |A_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

TEOREMA. Si en el problema (7) los elementos de A y b son funciones numéricas medibles en I para cada $\lambda \in \Omega$, analíticas en Ω para casi todo $x \in I$, y se verifica para todo $\lambda \in \Omega$,

(8) $\|A(x,\lambda)\| \leqslant \psi(x), \qquad \|b(x,\lambda)\| \leqslant \eta(x), \qquad$ c.d. $x \in I$,

con ψ,η reales y en $L^1_{loc}(I)$, entonces la solución (única) de (7):

(9) $$y = y(x;\lambda,\omega)$$

es continua en $I \times \Omega \times C^n$. Además, para cada $x \in I$ es analítica en $(\lambda,\omega) \in \Omega \times C^n$. Si D es una derivación respecto de λ o de alguna componente de ω, entonces

(10) $$Y = Dy(x;\lambda,\omega)$$

es una solución de

(11) $$\begin{cases} \dfrac{dY}{dx} = A(x,\lambda)Y + (DA(x,\lambda))y + Db(x,\lambda), \\ Y(c) = D\omega. \end{cases}$$

DEMOSTRACION. El problema (7) verifica uniformemente en $\lambda \in \Omega$ las hipótesis del teorema 7.4 pues en este caso tenemos:

(12) $$F(x,y) = A(x,\lambda)y + b(x,\lambda);$$

(13) $$\|F(x,y)\| \leqslant \|A\|.\|y\| + \|b\| \leqslant \psi(x).\|y\| + \eta(x),$$

(14) $$\|F(x,y_1) - F(x,y_2)\| \leqslant \|A(y_1-y_2)\| \leqslant \psi(x).\|y_1-y_2\|.$$

Repasando la demostración del T.7.4 vemos que $y_n = y_n(x;\lambda,\omega)$ converge a $y(x;\lambda,\omega)$ uniformemente en $(x,\lambda,\omega) \in K \times \Omega \times K'$, cualesquiera sean los compactos K $(\subset I)$ y K' $(\subset C^n)$. Como

(15) $$y_{n+1}(x;\lambda,\omega) = \omega + \int_c^x A(s,\lambda)\, y_n(s;\lambda,\omega)\, ds + \int_c^x b(s,\lambda)\, ds,$$

resulta por inducción que $y_n(x;\lambda,\omega)$ es acotada y continua en $K \times \Omega \times K'$. De esto sigue la continuidad de y. Más aún, usando iii) de la proposición precedente y el teorema de Hartog, se deduce recursivamente que para cada $x \in I$, $y_n(x;\lambda,\omega)$ es analítica en (λ,ω). De esto sigue que $y = y(x;\lambda,\omega)$ es analítica en (λ,ω) para todo $x \in I$. Para demostrar la segunda parte del teorema basta aplicar el operador derivación D, $D = \partial/\partial\omega_j$ o $D = \partial/\partial\lambda$, a

(16) $$y(x;\lambda,\omega) = \omega + \int_c^x [A(t,\lambda)\ y(t;\lambda,\omega) + b(t,\lambda)]\ dt.$$

Para ello observemos que 7.4(4) asegura que c.d. x, $\|y(x;\lambda,\omega)\| \leqslant \mu(x) \in L^{\infty}_{loc}(I)$ en $\Omega \times K'$. Por tanto el integrando en (16) está acotado en casi todo punto x por

$$M(x) = \mu(x).\psi(x) + \eta(x) \in L^1_{loc}(I),$$

si $(\lambda,\omega) \in \Omega \times K'$. Se puede entonces aplicar iii) de la proposición precedente, obteniendo:

(17) $$Dy(x;\lambda,\omega) = D\omega + \int_c^x [(DA)y + A.Dy + Db]\ dt.$$

En consecuencia,

(18) $$\frac{d(Dy)}{dx} = A.Dy + (DA)y + Db\ , \quad Y(c) = D\omega \quad , \qquad \text{QED.}$$

7.51. La igualdad (18) puede escribirse así:

(1) $$\frac{d}{dx}(Dy) = D\left(\frac{dy}{dx}\right) \qquad \text{c.d.x.}$$

Sea $v = Dy$. Entonces v satisface una ecuación diferencial semejante a (7)7.5. En efecto, vale el siguiente resultado:

TEOREMA 1. Las mismas hipótesis y notación que en el teorema 7.5. Sea Ω_1 un abierto acotado con $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$ y Γ_1 un abierto acotado de C^n. Entonces $v(x;\lambda,\omega)$ es continua en $I \times \Omega_1 \times \Gamma_1$ y analítica en (λ,ω). Más aún, v satisface una ecuación diferencial

(2) $$v' = A.v + b_1 \qquad \text{c.d. } x \in I$$

donde $b_1 = 0$ si $D = \partial/\partial\omega_j$, $b_1 = (DA)y + Db$ si $D = \partial/\partial\lambda$.
Existe una función $\eta \in L^1_{loc}(I)$ tal que

(3) $$\|b_1(x,\lambda)\| \leqslant \eta_1(x) \qquad \text{c.d.x} \quad , \text{ para todo } \lambda \in \Omega_1.$$

Las propiedades de v se deducen de la siguiente proposición 1, o bien del teorema 7.5. La acotación (3) sigue de la proposición 2 a continuación y el teorema 7.5.

PROPOSICION 1. Sea $p(x,\lambda)$ continua en $x \in I$, analítica en $\lambda \in \Omega'$ y acotada en $I \times \Omega'$. Entonces p es continua en $(x,\lambda) \in I \times \Omega'$ y analítica en λ, lo mismo que todas sus derivadas respecto de λ.

DEMOSTRACION. De

$$(4) \qquad \frac{\partial^j}{\partial\lambda^j} p(x,\lambda) = \frac{j!}{2\pi i} \int \frac{p(x,z)}{(z-\lambda)^{j+1}}\, dz,$$

y del teorema de convergencia dominada se deduce que el miembro derecho de (4) es continuo en (x,λ), QED.

NB. Si $\Omega' \subset C^{n+1}$ en lugar de C vale un resultado semejante.
De la misma manera se prueba la

PROPOSICION 2. Sea $b(x,\lambda)$ como en el teorema 7.5. Entonces $\frac{\partial b}{\partial\lambda}$ es medible en (x,λ) y $\left\|\frac{\partial b}{\partial\lambda}\right\| \leqslant \eta(x)/\varepsilon$, donde ε se mantiene constante si λ varía en un compacto de Ω.

TEOREMA 2. Las mismas hipótesis y notación del teorema 1. Si además $A(x,\lambda)$ y $b(x,\lambda)$ son continuas en (x,λ) entonces en todo punto de I vale

$$(5) \qquad \frac{d}{dx}(Dy) = A.Dy + b_1 = D\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

para todo $(\lambda,\omega) \in \Omega_1 \times \Gamma_1$. La función $D(y')$ es continua en (x,λ,ω).

DEMOSTRACION. En primer lugar observemos que la relación $y' = Ay + b$ se verifica en todo $x \in I$ pues el segundo miembro es continuo en todas sus variables. De la proposición 1 sigue entonces que Dy y Dy' también son continuas en todas sus variables. En consecuencia, $A.Dy + b_1$ es continua en $(x,\lambda,\omega) \in I \times \Omega_1 \times \Gamma_1$, y por lo tanto $v' = \frac{d}{dx}(Dy) = A.Dy + b_1$ en todo (x,λ,ω). Pero $Dy' = D(Ay + b) = A.Dy + b_1$ en todo (x,λ,ω). Luego: $\qquad Dy' \equiv (Dy)' \qquad$ QED.

7.52. Un caso particular del teorema 7.5 se presenta cuando consideramos la solución de un problema de valores iniciales de una ecuación de orden n:

$$(1)\quad \begin{cases} l(y) := p_o(x,\lambda)\, y^{(n)} + \dots + p_n(x,\lambda)\, y = f(x,\lambda)\,, \\ y(x_o,\lambda) = c_1(\lambda),\ \dots\ ,\ y^{(n-1)}(x_o,\lambda) = c_n(\lambda), \end{cases}$$

donde: $\alpha < x,\ x_o < \beta,\ \lambda \in \Omega \subset C$; $p_o > 0$; $f,\ 1/p_o,\ p_1,\ \dots\ ,\ p_n$, son continuas en (x,λ), y para cada x analíticas en λ lo mismo que las condiciones iniciales c_i. Entonces el vector columna

$$Z = [y(x,\lambda),\ y^{(1)}(x,\lambda),\ \dots\ ,\ y^{(n-1)}(x,\lambda)]\,,$$

satisface en todo x

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dZ}{dx} = A.Z + F\,, \\ Z(x_o) = c = [c_1,\ \dots\ ,\ c_n]\,, \end{cases}$$

donde

$$(3)\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 \\ -p_n/p_o & -p_{n-1}/p_o & . & . & -p_1/p_o \end{bmatrix},\quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f/p_o \end{bmatrix}.$$

Del T.7.5 siguen entonces la continuidad en (x,λ) y analiticidad en λ de $y^{(j)}(x,\lambda)$, $j = 0,1,\ \dots\ ,n-1$. De (1) deducimos las mismas propiedades para $y^{(n)}(x,\lambda)$. Más aún, de la proposición 1, 7.51, concluímos que $\dfrac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\, y^{(k)}(x,\lambda)$ es continua en (x,λ) cualquiera sea j si $k = 0,1,\ \dots\ ,n$.

TEOREMA. Sea $y(x,\lambda)$ solución de (1). Entonces, la función obtenida aplicando a y un monomio diferencial formado por j operadores $\dfrac{\partial}{\partial\lambda}$ y k operadores $\dfrac{d}{dx}$ es idéntica a la función continua $\dfrac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\, y^{(k)}(x,\lambda)$ si $k = 0,1,\ \dots\ ,n$, $j = 0,1,2,\ \dots$.

DEMOSTRACION. Ya hemos comprobado la continuidad de las funciones

$(\partial^j/\partial\lambda^j)\ y^{(k)}(x,\lambda)$. Sea $Y(x;\lambda) = Z(x;\lambda,c(\lambda))$. Entonces, de (2) obtenemos

(4) $\qquad Y' = \Lambda.Y + F \quad , \quad \Lambda = \Lambda(x,\lambda) \quad , \quad F = F(x,\lambda)$

y del teorema 2, 7.51,

(5) $$\frac{d}{dx}\frac{\partial Y}{\partial\lambda} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{dY}{dx} \quad ,$$

que no es otra cosa que

(6) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial Y}{\partial\lambda}\right) = \Lambda.\left(\frac{\partial Y}{\partial\lambda}\right) + F_1 \quad , \qquad F_1 = F_1(x,\lambda) \quad .$$

Pero (6) es una ecuación que satisface todas las propiedades que permitieron deducir (5) de (4). Por lo tanto

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial^2 Y}{\partial\lambda^2} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{d}{dx}\frac{\partial Y}{\partial\lambda} \quad ,$$

y en general vale que

(7) $$\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial^j Y}{\partial\lambda^j} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{d}{dx}\frac{\partial^j Y}{\partial\lambda^j} \quad , \quad j = 0,1,2,\ldots .$$

Como $Y = [y(x,\lambda),\ y^{(1)}(x,\lambda),\ \ldots\ ,\ y^{(n-1)}(x,\lambda)]$ resulta:

(8) $$\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\frac{d^k y}{dx^k} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{d}{dx}\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\frac{d^k y}{dx^k} \quad , \quad \begin{array}{l} j = 0,1,2,\ \ldots\ , \\ k = 0,\ \ldots\ ,n-1. \end{array}$$

Para esos valores de k y j tenemos entonces:

(9) $$\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{d}{dx}\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\frac{d^k y}{dx^k} = \frac{\partial^{j+1}}{\partial\lambda^{j+1}}\frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} \ .$$

Supongamos la hipótesis inductiva: todo monomio diferencial con j operadores $\partial/\partial\lambda$ y m operadores d/dx al aplicarlo a y coincide con $(\partial/\partial\lambda)^j(d/dx)^m y$, cualquiera sea $m = 1,2,\ldots,n$. Esta hipótesis se verifica para $j = 1$, (cf.(8)). Y sigue fácilmente de ella que también vale para $j+1$.

QED.

7.53. Recurriendo a los teoremas de 7.51 y 7.52 es posible probar ahora, sin muchas dificultades, que las derivaciones que dan lugar a (1) 6.61 son legítimas.

REFERENCIAS: [7], [5], [23], [2].

BIBLIOGRAFIA

[1] BIRKHOFF,G. and ROTA,G-C., Ordinary Differential Equations, Wiley, (1978).

[2] CODDINGTON,E.A. and LEVINSON., Theory of Ordinary Differential Equations, Mc Graw-Hill, (1955).

[3] de GUZMAN,M., Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Alhambra, (1975).

[4] HALE,J.K., Ordinary Differential Equations, Wiley, Interscience, (1969).

[5] HARTMAN,P., Ordinary Differential Equations, J.Wiley and Sons, (1973).

[6] HELLWIG,G., Differentialoperatoren der mathematischen Physik, Springer-Verlag, (1964).

[7] NEUMARK,M.A., Lineare Differentialoperatoren, Akademie-Verlag, (1960).

[8] PANZONE,R., Lecciones preliminares de Análisis Funcional, esta colección, N°11.

[9] PETROVSKY,I.G., Lectures on Partial Differential Equations, Interscience, (1957).

[10] ROBLEDO,C., Tesis de Magister, Univ.Nacional del Sur, (1979).

[11] WALTER,J., Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions, Math.Z., 133 (1973), 301-312.

[12] WEINBERGER,H.F., A first course in Partial Differential Equations, Blaisdell, (1965).

BIBLIOGRAFIA ADICIONAL

[13] ATKINSON,F.V., Discrete and Continuous Boundary Problems, Academic Press, (1964).

[14] COURANT,R. and HILBERT,D., Methods of Mathematical Physics, volume I, Interscience, (1953).

[15] DUNFORD,N. and SCHWARTZ,J.T., Linear Operators, Part II: Spectral Theory, Self Adjoint Operators in Hilbert Space, Interscience, (1963).

[16] GLAZMAN,I.M., Direct Methods of Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators, Israel Program for Scientific Translations, (1965).

[17] HOCHSTADT,H., Differential Equations, a modern approach, Dover, (1975).

[18] INCE,E.L., Ordinary Differential Equations, Dover, (1956).

[19] JÖRGENS,K. und RELLICH,F., Eigenwerttheorie gewohnlicher Differentialgleichungen, (Bearbeitet von J. Weidmann), Springer-Verlag, (1976).

[20] LEVITAN,B.M. and SARGSJAN,I.S., Introduction to Spectral Theory, American Mathematical Society, (1975).

[21] MÜLLER-PFEIFFER,E., Spectral Theory of Ordinary Differential Operators, Ellis Horwood Limited, (1981).

[22] PETROVSKY,I.G., Ordinary Differential Equations, Prentice-Hall, (1966).

[23] PIOVAN,L.A., Tesis de Magister, Univ.Nacional del Sur, (1983).

[24] REID,W.T., Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations. (Prepared for publication by J.Burns, T.Herdman and C.Ahlbrandt), Springer-Verlag, (1980).

[25] TITCHMARSH,E.C., Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Equations, Part I, Oxford, (1962).