

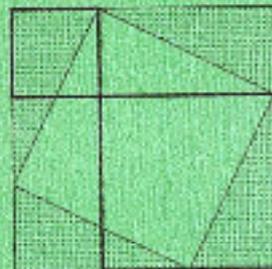


INFORME TÉCNICO INTERNO

N° 55

INSTITUTO DE MATEMÁTICA DE BAHÍA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHÍA BLANCA

- 1996 -

INFORME TÉCNICO INTERNO N° 55

TEMAS DE LA TEORIA DE GRAFOS III TRANSITABILIDAD II

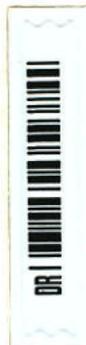
RAUL A. CHIAPPA

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 1996

| | |
|--------------------------------------|-----------------------|
| UNS-CONICET | |
| INSTITUTO DE MATEMÁTICA | |
| BIBLIOTECA "DR. ALBERTO J. GONZALEZ" | |
| LIBRO No | INF. TEL. INT. |
| VOL. | 55 |
| EJ. | - |



En lo que sigue supondremos conocidas la terminología y notaciones de :

- Temas de la Teoría de Grafos -I- Nociones Básicas - Informe Técnico Interno Nro. 29 -INMABB- 1991
- Temas de la Teoría de Grafos -II- Transitabilidad -I- Informe Técnico Interno Nro. 48 -INMABB- 1995

Las numeraciones de las referencias bibliográficas que se citen extenderán a las de dichos informes internos.

CAPITULO 3

TRANSITABILIDAD

En este trabajo completaremos lo iniciado en el citado Informe Nro.48, donde hemos desarrollado los parágrafos 3.1 a 3.7 del presente capítulo.

3.8 CADENAS Y CICLOS

En la definición de camino se hace uso explícito de la orientación de sus arcos, los cuales sólo pueden ser "recorridos en un único sentido". Antes de definir la noción similar para el caso no dirigido recordemos que si bien las "nociones no dirigidas" están ligadas al concepto de arista, y no al de arco, suele ser conveniente definir las también con referencia a configuraciones dirigidas, pues recurriendo a la relación biyectiva entre arcos de un multidigrafo y aristas de su sostén es posible reencontrar todas las propiedades que son deducibles en multigrafos y además obtener otras no expresables dentro del contexto no dirigido.

En particular, en nuestro caso podremos, o no, admitir recorrer un mismo arco (una misma arista) en ambas direcciones y esto nos lleva a introducir dos conceptos.

Dado un multidigrafo (o un multigrafo) $G = (V,U)$ diremos cadena de longitud L a toda sucesión $C : x_1, u_1, x_2, u_2, \dots, x_L, u_L, x_{L+1}$ de vértices y de arcos (de vértices y aristas), no necesariamente $u_i \neq u_j$; tal que u_i tiene por extremos los vértices x_i, x_{i+1} ;

eventualmente $x_i = x_{i+1}$. Si además, se exige que cuando $u_i = u_j$ entonces $x_i = x_j$, $x_{i+1} = x_{j+1}$; C es cadena orientable. Las cadenas de longitud L , también se dirán L -cadenas. Cada vértice será admitido como cadena nula (o de longitud cero)

Nuestras nociones de "cadena" y "cadena orientable" corresponden, respectivamente, a las de "pseudochaine" y "chaine" de Roy (R 1), pero no suelen ser distinguidas por otros autores

Diremos, de manera informal, que en las cadenas orientables sus aristas se recorren siempre en el mismo sentido.

Si G es un multidigrafo y $C : x_1, u_1, x_2, \dots, x_L, u_L, x_{L+1}$ es una de sus cadenas orientables, podemos clasificar sus aristas distintas de bucles en "arcos adelante" ("arcos atrás") si son de la forma (x_i, x_{i+1}) ((x_{i+1}, x_i)). Los bucles pueden incluirse en cualesquiera de esas clases.

Obviamente dicha clasificación carece de sentido en cadenas definidas directamente sobre multigrafos.

Una cadena $C : x_1, u_1, x_2, \dots, x_L, u_L, x_{L+1}$ es simple si $u_i \neq u_j$ y elemental si $x_i \neq x_j$ cualesquiera sean $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, L+1\}$ excepto, eventualmente, $x_1 = x_{L+1}$.

De otra forma, una cadena no nula es simple si cada una de sus aristas ocurre una única vez en la sucesión que lo define y elemental si en cada uno de sus vértices inciden a lo sumo dos elementos de dicha sucesión.

Si $C : x_1, u_1, x_2, \dots, x_L, u_L, x_{L+1}$ es no nula, $x_1 = a$ y $x_{L+1} = b$ diremos que C tiene extremos a, b o también que a, b están conectados por C . Si $a \neq b$ la cadena es abierta caso contrario es cerrada (en a).

Ocasionalmente, haciendo referencia implícita a la sucesión que la define, también diremos que C está recorrida desde a hacia b .

Las cadenas elementales abiertas (cerradas) con n vértices suelen notarse P_n (C_n).

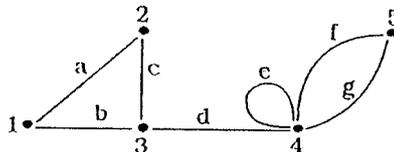
A cada arista $u = [a,b]$, $a \neq b$, pueden asociarse las cadenas elementales abiertas : a,u,b ; b,u,a y las elementales cerradas, no orientables : a,u,b,u,a ; b,u,a,u,b .

En forma similar a lo convenido para el caso dirigido convendremos que las cadenas nulas son simples y elementales, pero no les asignaremos carácter de abiertas o cerradas. Además, supuesto no haya lugar a confusión al referirnos a cadenas omitiremos explicar sus vértices y su longitud.

Nótese que, sólo si G carece de aristas paralelas una cadena está bien definida por la sucesión de vértices en los que incide.

Ejemplo

Dado el multigrafo G



| | |
|-----------------------------|--|
| $1, a, 2, a, 1, b, 3$ | cadena no orientable, abierta, $L=3$. |
| $4, g, 5, f, 4, g, 5$ | " orientable, abierta, $L=3$. |
| $1, b, 3, d, 4, e, 4, f, 5$ | " simple, no elemental, $L=4$. |
| $1, a, 2, c, 3$ | " simple, elemental, abierta $L=2$. |
| $4, f, 5, g, 4$ | " cerrada, simple y elemental. |
| $4, e, 4, g, 5, f, 4$ | " cerrada, simple no elemental. |
| $1, b, 3, b, 1$ | " cerrada, elemental no orientable. |

Se deja al lector verificar:

- 1- Toda cadena simple es orientable.
- 2- Todo vértice no aislado pertenece a infinitas cadenas cerradas, de longitud par.
- 3- La longitud de cada cadena simple coincide con el número de sus aristas.
- 4- En cada vértice de una cadena elemental cerrada de longitud $L \geq 3$ inciden exactamente dos aristas distintas.
- 5- Toda cadena elemental abierta es simple y orientable.
- 6- Las cadenas elementales cerradas, excepto si son de la forma x', u, x'' , u, x' con $x' \neq x''$ (devienen de recorrer en sentidos opuestos la arista u), son simples y orientables.

Una cadena de G es euleriana (hamiltoniana) si es simple y contiene todas las aristas (si es elemental y contiene todos los vértices) de G . Si admite una tal cadena cerrada G es euleriano (hamiltoniano); si solo es abierta G se dice débilmente euleriano (débilmente hamiltoniano).

Es claro que toda exposición cuyo esquema determine un multigrafo euleriano podrá ser recorrida, transitando una única vez por cada uno de sus corredores.

Por otra parte, recurriendo a la relación entre cada multigrafo y su simetrizado y como consecuencia de resultados conocidos, (Prop. 3.9.1 y 3.9.2) resultará que cualquiera sea el esquema de la exposición, podrá recorrérsela totalmente transitando exactamente dos veces, y en direcciones opuestas, cada uno de sus pasillos.

Uno de los primeros teoremas en teoría de grafos es el siguiente:
 - Cualquier grafo completo, de orden $n \geq 3$, admite cadenas hamiltonianas cerradas.

Si $C : a=x_1, u_1, \dots, u_L, x_{L+1}=b$, invirtiendo el sentido de la sucesión se construye la cadena $\check{C} : b=x_{L+1}, u_L, \dots, u_1, x_1=a$ que se dirá opuesta de C .

En particular, cada arista distinta de bucle da lugar a dos cadenas respectivamente opuestas. Ellas no serán distinguibles si omitimos explicitar sus vértices.

Es claro que C y \check{C} contienen los mismos elementos y cada uno de ellos con igual multiplicidad. Además, es fácil ver que si son de longitud L :

$$C = \check{C} \text{ si y sólomente si } x_i = x_{L+2-i} ; u_i = u_{L+1-i}.$$

En particular y como los vértices interiores de cadenas elementales son distintos entre sí resulta :

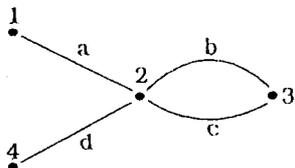
7- Las únicas cadenas elementales C tales que $C = \check{C}$ son los bucles y las de longitud dos que resultan de recorrer una misma arista en ambos sentidos.

Es claro que si una cadena es no elemental, modificando la secuencia en que se toman sus elementos (forma en que se la re-

recorre) se pueden determinar otras cadenas.

Así por ejemplo :

Dado



utilizando dos veces el vértice 2 y una única vez cada uno de los otros elementos se construyen las siguientes cadenas eulerianas.

$C_1: a, b, c, d$; $C_2: a, c, b, d$; $C_3 = \check{C}_1: d, c, b, a$; $C_4 = \check{C}_2: d, b, c, a$

Creemos oportuno hacer la siguiente observación análoga de otra dada para el caso dirigido.

Las cadenas están dadas por sucesiones y deben diferenciarse de los conjuntos de aristas y de vértices que las componen.

No deberían considerarse subgrafos. No obstante, esta identificación es muy frecuente.

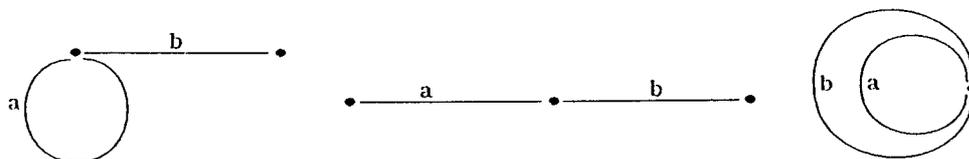
Con el fin de enfatizar tal situación y en forma similar a la indicada para el caso dirigido podríamos decir s-cadena (como apócope de subgrafo cadena) al multiconjunto de los elementos que la componen, independientemente del orden y de la multiplicidad que tienen en ella.

Pero, por razones similares a las dadas para el caso dirigido, por comodidad y aceptando lo que es habitual, usaremos el vocablo "cadena" también en el sentido de "s-cadena".

Este abuso de lenguaje lleva a identificar las cadenas opuestas y permite afirmar :

C coincide con su opuesta sólo si es cerrada.

Tal el caso de las cadenas a, b, b, a en cualesquiera de los siguientes esquemas



En forma similar a lo dicho para el caso dirigido, notemos que el libro de Busacker-Saaty (B 1) es, de los consultados, donde más énfasis se pone sobre la confusión a que puede llevar el abuso de notación precedente. Alguna mayor precisión al respecto puede verse en 3.15.

Omitiremos las definiciones precisas de subcadena y concatenación de cadenas, pues se corresponden en forma natural con las análogas del caso dirigido.

Razonando en forma similar a la usada para demostrar 3.1.1.a) se tiene la

Proposición 3.8.1.a)

Toda cadena de extremos a, b (eventualmente $a=b$) contiene subcadenas elementales arista disjuntas dos a dos que permiten construir, concatenándolas, una cadena elemental de extremos a, b .

Los argumentos ya indicados hacen que por abuso de lenguaje, la reformulemos como

Proposición 3.8.1.b)

Toda cadena de extremos a, b (eventualmente $a=b$) contiene una cadena elemental de extremos a, b .

De 3.8.1.b) es claro que una cadena es elemental si y sólo si no contiene propiamente otra de iguales extremos; es decir, si sólo si minimal en sentido conjuntista.

Véase que distintas cadenas elementales que conecten los mismos vértices pueden tener longitudes distintas.

Con argumentos similares a los del caso dirigido resulta la

Proposición 3.8.2.

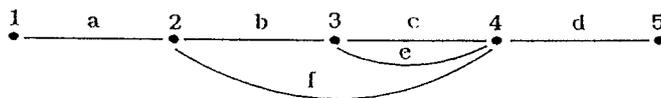
- a) Toda cadena C de extremos a, b (eventualmente $a=b$) puede descomponerse en una cadena elemental C' de extremos a, b , y en un conjunto de cadenas cerradas.
- b) Si C es simple las cadenas cerradas son disjuntas entre sí y con C' .

Corolario

Toda cadena cerrada simple resulta de concatenar cadenas cerradas elementales, arista disjuntas dos a dos.

Como para el caso dirigido la descomposición a que se hace referencia no está, en general, unívocamente determinada.

Ejemplo



La cadena $C : 1, a, 2, b, 3, c, 4, e, 3, b, 2, f, 4, d, 5$ se descompone en la elemental $1, a, 2, f, 4, d, 5$ y la cerrada $2, b, 3, c, 4, e, 3, b, 2$ que a su vez resulta de concatenar en 3 las elementales y cerradas $2, b, 3, b, 2 ; 3, c, 4, e, 3$.

La misma cadena C puede también descomponerse en las elementales $1, a, 2, b, 3, c, 4, d, 5 ; 4, e, 3, b, 2, f, 4$.

Si C es una cadena cerrada (no nula) orientable, diremos ciclo (generado por C) a la clase de equivalencia de todas las cadenas que pueden obtenerse a partir de C por permutación circular de sus elementos.

Un multigrafo que carece de ciclos se dice acíclico.

Notemos que si se admitiera que las cadenas nulas son cerradas todo vértice constituiría un ciclo y que si no se pidiera a las cadenas que los generan ser orientables las que resultan de recorrer una arista en ambos sentidos generarían ciclos y en este caso sólo los grafos discretos serían acíclicos.

Clasificaremos los ciclos en : simples, elementales, eulerianos, hamiltonianos, opuestos, etc., si lo son, respectivamente, las cadenas que los generan.

En particular, con cada par de aristas paralelas a, b , de extremos $x, y, x \neq y$, se determinan las 4 cadenas elementales cerradas orientables de longitud dos $x, a, y, b, x ; y, b, x, a, y ; x, b, y, a, x ; y, a, x, b, y$. Ellas generan pares de ciclos opuestos entre sí.

De acuerdo con referencias leídas, un libro de lectura recomendable para los interesados en ciclos es el de Voss (V 2), mientras que en (Ch. 5) se dan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de ciclos, y en (B 12) una extensa recopilación de resultados sobre circuitos y ciclos, así como comparaciones entre problemas relativos a dichas nociones.

Si la cadena cerrada C es de longitud L y minimal, en el sentido

de no ser obtenido por concatenación reiterada de alguna subcadena propia, el ciclo C que ella genera se dirá de longitud L . Si L es par (impar) diremos que C es ciclo par (ciclo impar).

La paridad de los ciclos está presente en numerosos resultados. Varios de éstos serán citados en 3.14.

De momento sólo puntualizaremos :

- a) que G contiene ciclos impares si y sólo si tiene ciclos elementales impares. Véase que no cabe substituir impar por par.
- b) que en (B 17) se dan condiciones suficientes para la existencia de ciclos pares.
- c) que según veremos, en Prop.3.9.4, la paridad de ciclos lleva a enunciar una caracterización de los multigrafos bipartidos.

La concatenación de ciclos se entenderá definida en forma similar a la concatenación de circuitos y como para el caso dirigido, sugiriendo una univocidad sólo válida en casos particulares si C_3 es obtenido por concatenación de C_1 con C_2 es frecuente decir " C_3 es unión de C_1 y C_2 ",

Razones similares a las del caso dirigido llevan a designar con el vocablo "ciclo", también a las cadenas cerradas y al subgrafo que determinan sus elementos. Tal haremos, supuesto que del contexto resulte claro en que sentido se usa el término.

Notemos que la distinción entre dichas nociones es fundamental, en particular en cuestiones de recuento. La identificación de referencia se utiliza explícitamente al referirse a la dualidad entre ciclos simples y "cociclos", como así también al considerar los correspondientes vectores asociados.

Obviamente, las tres cadenas cerradas : a,b,c ; b,c,a ; c,a,b ; definen un mismo ciclo de longitud tres; las respectivas opuestas generan el ciclo opuesto y que ambos están constituidos por los elementos de un mismo "triángulo".

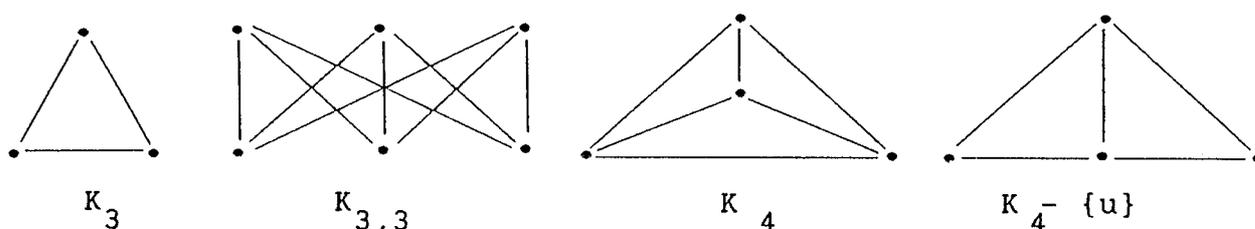
La identificación de cada ciclo con el correspondiente conjunto de sus elementos lleva a no distinguir entre ciclos opuestos y permite afirmar:

- Existen grafos unicíclicos.
- Un ciclo es elemental si y sólo si es minimal en sentido conjuntista.

- Un ciclo elemental es un grafo regular de grado 2.
- Todo ciclo es unión de ciclos elementales
- Todo ciclo simple es unión de ciclos elementales sin aristas comunes entre sí, no siempre determinados unívocamente.

En forma similar a lo observado para el caso dirigido, notemos que según la terminología de (T 1) las cadenas simples abiertas (cerradas) se dirían cadenas (ciclos) y que el calificativo de elemental se substituiría por el de simple.

Digamos de paso que Mateti-Deo (M 18), (M 19) al comparar la eficacia de diferentes algoritmos para determinar ciclos (circuitos) elementales observan que los únicos "grafos reducidos"; (es decir, sin vértices aislados, sin bucles, sin aristas pendientes y tales que para cualquier vértice de grado 2, sus adyacentes son a su vez adyacentes entre sí) que además carecen de ciclos elementales arista disjuntos entre sí son :



En Bollobás (B. 18 Ch.3) se extiende el resultado anterior al caso de multigrafos, en (T.11) se da una nueva demostración del mismo.

Un grafo de orden n se dice completamente cíclico ("pancyclic") si contiene ciclos elementales de longitud k , cualquiera sea k , con $3 \leq k \leq n$.

Esta noción fue introducida por Bondy, quien en (B 19) conjeturó : Toda condición no trivial que implica G es hamiltoniano también implica G es completamente cíclico, excepto en casos particulares bien determinados, y da ejemplos que apoyan esta conjetura. La misma fue reconsiderada en (M 20), donde se propone además una conjetura similar, pero restringida al caso de grafos bipartidos de orden par, y a ciclos de cualquier longitud par entre 4 y el orden del grafo ("bipancyclic graphs").

En 3.14 y a continuación de Prop. 3.9.4 daremos referencias de

otros trabajos en los cuales se considera esta temática.

Si en G hay al menos una cadena de extremos a, b la distancia $d(a,b)$ entre ellos es la menor de las longitudes de las cadenas que los conectan. Caso contrario, se conviene que la distancia que los separa es infinita.

Es claro que $d(a,b) \geq 0$; que $d(a,b) = 0$ si y sólo si $a = b$; y que vale la propiedad triangular $d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$.

Algoritmo para determinar las distancias a cierto vértice x prefijado, arbitrario..

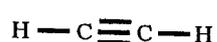
- 1) Se marca con 0 el vértice x , y se aplica 2), para $m = 0$.
- 2) Si S_m $m \geq 0$ es el conjunto de los vértices marcados, se marca S_{m+1} cada vértice no marcado, adyacente de los de S_m y se reitera 2), aplicándolo a S_{m+1} .

Las marcas asignadas a los vértices, conectados con x , dan su distancia al mismo.

En 3.13, y como consecuencia de resultados vinculados a potencias de matrices será indicada otra forma de determinar las distancias entre vértices,

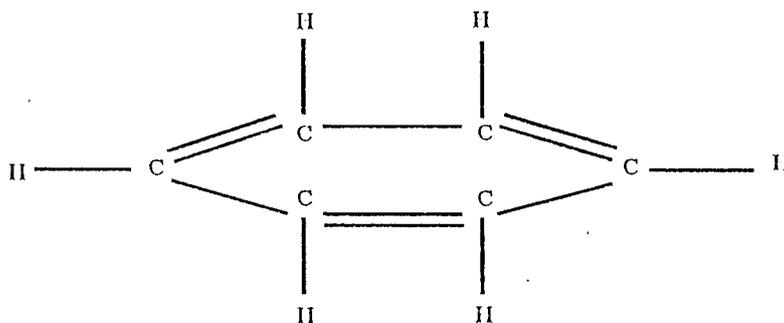
Señalemos que las nociones de estructura acíclica, en Teoría de Grafos y en Química no son coincidentes.

En efecto, cada par de aristas paralelas determina un ciclo y por lo tanto todo multigrafo propiamente dicho contiene ciclos, pero la molécula de acetileno, representada habitualmente por

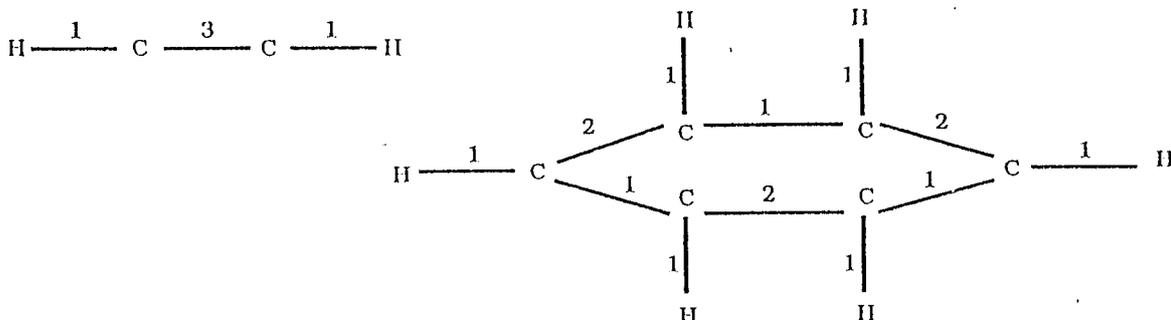


se incluye entre las acíclicas.

En cambio, se considera cíclica la del benzeno $C_6 H_6$, que se esquematiza



Nótese que utilizando grafos valuados se las representaría, respectivamente, por



3.9 CONEXIDAD

Es fácil ver que cualquiera sea el multigrafo $G = (V, U)$ la relación R definida por :

$x \in R(a)$ si y sólo si, $x = a$, o x está conectado con a , es una relación de equivalencia en V .

Los submultigrafos de G inducidos por los vértices de cada una de las clases de la partición que determina R son las componentes conexas de G .

Más precisamente, el submultigrafo de G inducido por x_i y los vértices conectados con x_i , constituyen la componente conexa G_i (generada desde x_i)

Para determinar la componente conexa que contiene a cierto vértice a pueden aplicarse cualesquiera de los métodos para hallar cadenas con un extremo en a que daremos en 3.10, y en particular, aplicar a partir de a , tanto como sea posible la regla R^* (ver 3.10). También podríamos emplear operaciones matriciales (ver 3.13). Otra forma más eficiente la da el siguiente

Algoritmo para determinar las componentes conexas de un multigrafo finito.

En cada paso los vértices se clasificarán en : no marcados, marcados no explorados, marcados y explorados. Inicialmente todo vértice es no marcado.

- 1) Si existen vértices no marcados se elige uno de ellos; se lo marca y se pasa a 2). Caso contrario, todas las componentes conexas fueron determinadas.
- 2) Se elige un vértice x , marcado no explorado, y se marcan sus adyacentes aún no marcados. Ahora x se considera explorado y se pasa a 3).
- 3) Si es factible se reitera 2). Caso contrario, se ha determinado la componente conexa que induce el vértice marcado inicialmente, al aplicar 1), y se vuelve al paso 1).

Visto que la descomposición de G en componentes conexas G_i está unívocamente determinada y como todo elemento de G pertenece a una única de ellas, a diferencia de lo señalado al estudiar las componentes fuertemente conexas, se tiene que :

Cualquiera sea el multigrafo G puede ponerse $G = \bigcup G_i$ (donde la unión se supone extendida al conjunto de todas las componentes conexas G_i).

Resumiendo :

G es conexo (o simplemente conexo) si está constituido por una única componente conexa ; o sea, si es trivial o bien cada vértice está conectado con todos los restantes. Caso contrario G es desconexo.

De otra forma : Un multigrafo no trivial es conexo si y sólo si todos sus pares de vértices están a distancia finita.

Según veremos, para el análisis de numerosas cuestiones bastará limitarse a los conexos.

Usando la mencionada correspondencia entre las nociones dirigidas de G y las no dirigidas de su sostén G^* se tienen :

- Un multigrafo es conexo si y sólo si lo es su sostén.
 - Si G es fuertemente conexo, es conexo. La recíproca es falsa.
- Se deja al lector ver que :
- Todo multigrafo conexo de orden n tiene al menos $(n-1)$ aristas.
 - Si G es grafo sin bucles de orden n y tiene al menos $1 + \binom{n-1}{2}$ aristas, es conexo.
 - G y $G - \{u\}$ tienen el mismo número de componentes conexas si y sólo si la arista u pertenece a un ciclo de G .

Ahora estamos en condiciones de enunciar dos importantes y conocidos resultados cuya demostración omitiremos.

Proposición 3.9.1

Un multigrafo admite ciclo euleriano si y sólo si, eliminados sus eventuales vértices aislados es conexo, y todos sus vértices tienen grado par.

Corolario : G es débilmente euleriano si y sólo si, eliminados sus eventuales vértices aislados es conexo y tiene exactamente dos vértices de grado impar.

Proposición 3.9.2

Un multidigrafo sin vértices aislados admite circuito euleriano si y sólo si es conexo y balanceado (es decir, en todo vértice x se tiene que $d_x^- = d_x^+$).

Corolario : G es débilmente euleriano, si y sólo si carece de vértices aislados, es conexo y es balanceado excepto en dos vértices a, b ; en los cuales se tiene

$$d_a^+ = d_a^- + 1 \quad ; \quad d_b^+ = d_b^- - 1.$$

Destaquemos que pese a la similitud, entre las nociones de trayecto euleriano / hamiltoniano ambos problemas presentan grados de dificultad completamente diferentes. En particular, para estudiar la existencia de ciclos (circuitos) hamiltonianos no se han encontrado condiciones necesarias y suficientes tan generales, y sencillas, como las formuladas previamente para el caso euleriano. Para el problema hamiltoniano, a excepción de casos particulares, sólo se han dado, condiciones suficientes, y condiciones necesarias. Algunas serán indicadas en 3.14.

Si G es conexo, la eliminación de uno o más de sus vértices puede llevar a la determinación de un $G' \subseteq G$, no conexo o bien conexo pero trivial.

El mínimo número de vértices que es necesario eliminar para lograrlo, se denomina *conexidad* de G y se lo nota $\kappa(G)$.

Si $\kappa(G) \geq h$ el conexo G se dice *h-conexo*.

Véase que todo conexo sin ciclos no trivial, es 1-conexo y que el completo de orden n , con $n \geq 2$, es $(n-1)$ -conexo.

Por otra parte, si G es un grafo conexo sin bucles, $\kappa(G)$ no es mayor que el máximo grado de sus vértices.

La siguiente es una noción sumamente importante sobre la cual volveremos oportunamente.

Se dice árbol a todo grafo conexo sin ciclos.

En particular : todos los vértices aislados y todas las cadenas elementales abiertas son árboles.

Nótese que la admisión de las cadenas nulas o de las cadenas no orientables como generadoras de ciclos obligaría a modificar el concepto de árbol.

Para algunos autores, en particular en (B 3), la noción árbol presupone la existencia de al menos dos vértices.

La noción análoga para el caso dirigido será denominada arborescencia (o árbol con raíz).

A veces y fundamentalmente en la bibliografía dedicada a la informática, los "árboles" y los "árboles con raíz" se dicen respectivamente, "árboles libres" y "árboles".

Se deja al lector demostrar la

Proposición 3.9.3.

Si T es de orden n , $n \geq 2$, cualesquiera de las siguientes afirmaciones permiten asegurar que T es árbol (de orden n).

- 1- T es conexo sin ciclos.
- 2- Cada par de vértices de T está conectado por una única cadena
- 3- T es conexo y tiene exactamente $(n-1)$ aristas.
- 4- T carece de ciclos y tiene exactamente $(n-1)$ aristas.
- 5- T es conexo minimal (quitándole una arista deja de serlo).
- 6- T es acíclico maximal (agregando una arista se crea un ciclo)

Así entonces, cualesquiera dos de las tres afirmaciones siguientes permiten afirmar que G es árbol de orden n :

- G es conexo de orden n ,
- G es acíclico de orden n ,
- G tiene exactamente $(n-1)$ aristas.

Se dice árbol cubriente de G , a todo subgrafo cubriente que además es árbol.

Es fácil ver que :

Un multigrafo es conexo si y sólo si contiene un árbol cubriente.

A continuación daremos dos interesantes resultados.

Proposición 3.9.4

Un multigrafo G es bipartido (o bicromático) si y sólo si carece de ciclos de longitud impar.

Demostración

Es inmediato que si G es bipartido, todos sus ciclos (si existen) son de longitud par.

Para verificar la afirmación recíproca supondremos, sin pérdida de generalidad, que G es conexo y luego de colorear "rojo" un vértice x , arbitrario, aplicaremos tanto como sea posible la siguiente regla

| Si y está coloreado de rojo (azul) colorearemos de azul
| (rojo) todos sus adyacentes no coloreados previamente.

Del procedimiento indicado resulta que cualquiera sea la sucesión elegida para colorear a partir de x los vértices de G , se tiene que el vértice x (coloreado de rojo) constituye con cada uno de los pintados rojo (azul) un par de vértices extremos de una cadena elemental de longitud par (impar).

Por ello y ya que no existen ciclos de longitud impar, el color asignado a los vértices, a partir del rojo x , es independiente del orden en que se los colorea.

Así entonces, aplicando la regla anterior se determina, en el conjunto de vértices, una partición con dos clases bien definidas, a saber : la de los rojos y la de los azules. Además, si hubiera pares de vértices de igual color adyacentes existirían ciclos de longitud impar, en contradicción con lo supuesto. Por lo tanto, G es bipartido.

Otra forma habitual de demostrar el resultado anterior hace uso de la noción distancia, que permite clasificar los vértices de los grafos conexos en términos de la paridad de su distancia a uno prefijado.

De la Prop. 3.9.4 resulta que ningún bipartido es completamente cíclico. Pero cabe estudiar la noción análoga que resulta limitándose a considerar los ciclos de longitud par. En particular, en (E 10) se dan condiciones suficientes para que los bipartidos con p vértices en cada clase admitan ciclos de longitud $2k$, cualquiera sea $2 \leq k \leq p$.

Esta temática también fue estudiada en (S 10) y (S 11).

Proposición 3.9.5.

Si G es un grafo conexo sin bucles de orden $n \geq 3$, tal que cada par de vértices está conectado por una única cadena de longitud dos, en G existe un único vértice que es adyacente de todos los otros.

De la proposición anterior, habitualmente denominada "teorema de la amistad" cabe la siguiente reformulación :

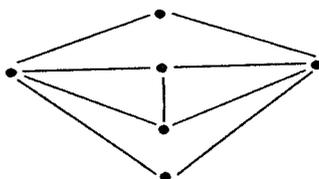
Si en una reunión cada par de asistentes tiene exactamente un amigo común hay en la reunión un único asistente que es amigo de todos los presentes.

Demostraciones del resultado anterior fueron dadas por Erdos , Rényi y Sós (E 11), Higman (H 23), Longyear-Parsons (L 8), Wilf (W 8), Lucchesi (L 9).

Wilf lo demuestra por reducción al absurdo viendo que la configuración correspondiente sería un plano proyectivo imposible de construir. En (E 11) se lo obtiene luego de un análisis exhaustivo de posibilidades y de cierto resultado de geometría proyectiva. En (L 8) se recurre a argumentos de recuento y en (L 9) a una sucesión de lemas que llevan a una contradicción.

Corolario: G tiene $n = 2m + 1$ vértices y está formado por m triángulos, todos con un mismo y único vértice común

Del esquema siguiente resulta que lo afirmado en la Prop. 3.9.5 no puede extenderse al caso en que cada par de vértices tiene, al menos, un adyacente común.



En (B 20) se obtienen resultados acerca de la paridad del número

ro de cadenas y de ciclos en grafos todos cuyos vértices tienen igual paridad y se demuestra que los "grafos de amistad generalizados" respecto de los cuales Kotzig conjeturó que no existen, debieran ser de orden impar. La conjetura indicada fue estudiada en (B 21).

3.10 ALGUNOS ALGORITMOS PARA DETERMINAR CADENAS

3.10.1 *Algoritmo para determinar cadenas abiertas elementales con uno de sus extremos en un vértice a , prefijado, arbitrario.*

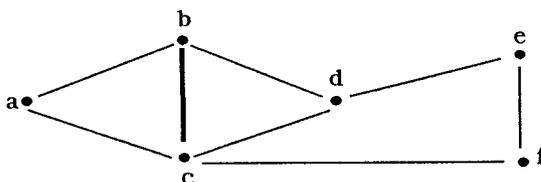
- 1) Marcar el vértice a con 0 y sus adyacentes con $(1, a)$. Pasar a 2) y reiterarla tanto como sea posible.
- 2) Para cada $i \geq 1$, si x está marcado (i, z) se marcan $(i+1, x)$ los adyacentes de x que aún no están marcados.

Las aristas que conectan a con sus adyacentes y aquellas cuyos extremos fueron marcados, respectivamente, (i, z) ; $(i+1, x)$ determinan cadenas abiertas elementales con un extremo en a .

Más precisamente, si w está marcado (j, s) se ha determinado una cadena elemental de longitud j con extremos a, w . Las aristas que la componen quedan fijadas, en "forma regresiva", comenzando por w merced a las segundas componentes de las marcas. En particular, la arista de dicha cadena con extremo w es $[s, w]$.

Las marcas que se ponen por aplicación de la regla 2) no están, en general, unívocamente determinadas. Variándolas se obtienen otras de las cadenas buscadas.

Ejemplo
Dado



algunas de las marcas que pueden asignarse a los vértices aplicando las reglas anteriores, están indicadas en las columnas M_1, M_2, M_3 de la tabla que sigue.

| | M_1 | M_2 | M_3 | M_4 | M_5 |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| a | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| b | (1,a) | (1,a) | (1,a) | (1,a) | (1,a) |
| c | (1,a) | (1,a) | (1,a) | (2,b) | (2,b) |
| d | (2,b) | (2,c) | (2,b) | (2,b) | (3,c) |
| e | (3,d) | (3,f) | (3,d) | (3,d) | (4,f) |
| f | (2,c) | (2,c) | (4,e) | (4,e) | (3,c) |

Las cadenas maximales definidas por M_1 son : a,b,d,e ; a,c,f ; las que fija M_2 son : a,b ; a,c,d ; a,c,f,e y las que determina M_3 son a,c ; a,b,d,e,f .

Si modificamos el algoritmo y permitimos marcar solamente algunos de los vértices adyacentes a los ya marcados, pueden obtenerse, entre otras, las columnas M_4 y M_5 .

M_4 da las cadenas a,b,c; a,b,d,e,f y M_5 a,b,c,f,e; a,b,c,d.

Por otra parte, la correspondencia biyectiva entre las cadenas (cadenas elementales) de un multigrafo G con los caminos (caminos elementales) de su simetrizado G^S (Prop. 3.11.1) permite hallar cadenas (cadenas elementales), adaptando lo visto en 3.4 y en 3.6.

A continuación veremos algunos resultados que pueden deducirse por aplicación reiterada de la siguiente regla R^* , cuya implementación es simple.

Regla R^* :

No recorrer una misma arista dos veces en el mismo sentido y si se está en un vértice x no tomar la arista que nos ha conducido a x por primera vez excepto no haya otra posibilidad.

Veamos que :

Si G es conexo, su aplicación reiterada tantas veces como sea posible, a partir de un vértice arbitrario a, termina cuando se está en el vértice a y todas las aristas de G han sido recorridas una vez en cada sentido.

En efecto, cada vez que se llega a un vértice $x \neq \underline{a}$ las aristas de U_x han sido recorridas $(k+1)$ veces "hacia x " y k veces "desde x ".^x Luego, si $x \neq \underline{a}$ es posible aplicarla al menos otra vez. En cambio, si $x = \underline{a}$ y alguna de las aristas incidentes en \underline{a} aún no fue recorrida, R^* puede reiterarse al menos dos veces. En consecuencia la posibilidad de reiterar R^* sólo queda agotada cuando se está en \underline{a} y todas las aristas allí incidentes fueron recorridas dos veces.

Para ver que toda arista de G será recorrida exactamente en dos oportunidades, una vez en cada sentido, supongamos que tras varias aplicaciones de la regla R^* se obtuvo la sucesión $\underline{a} = a_0, a_1, \dots, a_k \neq \underline{a}$ donde supondremos que a_i designa al i -ésimo de los vértices "alcanzado por primera vez".

Un razonamiento similar al hecho para el caso $x = \underline{a}$ permite deducir que si no fuera factible reiterar R^* , toda arista incidente en a_k , y en particular la que permitió alcanzarlo por primera vez^k fue recorrida en ambos sentidos. Caso contrario se habría operado sin respetar la regla R^* , y con esto finaliza la demostración.

Nótese que aplicando reiteradamente la regla R^* se alcanza todo vértice adyacente de otro ya alcanzado. Por lo tanto :

- Reiterando tanto como sea posible la aplicación de la regla R^* a partir de cierto vértice \underline{a} , se determina la componente conexa que contiene \underline{a} .

El algoritmo precedente da un método para recorrer toda exposición transitando cada corredor, una vez en cada sentido, y también para resolver el problema del laberinto (ver 3.12).

Además da lugar al siguiente :

3.10.5 *Algoritmo de Tarry (T 12) para constatar si existen cadenas de extremos \underline{a} , \underline{b} , y en tal caso determinar una elemental.*

- Comenzando en \underline{a} y en tanto no se incida en \underline{b} , aplicar reiteradamente la precedente regla R^* .
- Indicar para cada vértice distinto de \underline{a} cual es la arista que permitió alcanzarlo por primera vez.

Una vez alcanzado b , las marcas hechas permitirán determinar, a partir de b , una cadena elemental de extremos a, b .

Parece oportuno notar la existencia de ciertas semejanzas entre el Algoritmo de Tarry (para cadenas elementales) con el de Tremaux (para caminos simples dado en 3.4.1). Ambos permiten constatar la existencia de las configuraciones buscadas y hallarlas considerando cada arista (arco), ninguna, una o dos veces y en este último caso, una vez en cada sentido. Además, ambos son "algoritmos locales", en el sentido de que para aplicarlos no es necesario recurrir en cada etapa al conocimiento de todo el grafo (digrafo); basta solamente con el del "entorno de cada vértice".

La aplicación reiterada de la Regla R^* , base del Algoritmo de Tarry permite, dado un multigrafo conexo G , recorrer todas sus aristas en exactamente dos ocasiones, una vez en cada sentido y volver al punto inicial, o equivalentemente, determinar un circuito euleriano de su simetrizado.

Fraenkel (F 4) propone un algoritmo, basado en el de Tarry, que permite volver al punto inicial, recorriendo cada arista al menos una vez, y algunas a lo sumo una vez en cada dirección.

3.11 ALGUNAS RELACIONES ENTRE CAMINOS Y CADENAS

Una manera de vincular los conceptos camino y cadena es la que resulta de asociar a cada multidigrafo (multigrafo) su sostén (su simetrizado).

Recordemos al respecto que :

I) dado un multidigrafo G diremos sostén de G al multigrafo G^{\sim} que se obtiene substituyendo cada arco (a,b) de G por una arista $[a,b]$ de G^{\sim}

En tales casos, por comodidad, y sobreentendiendo que cada arco (a,b) se ha substituído por la arista $[a,b]$ es habitual referir la noción a G , omitiendo mencionar explícitamente al sostén.

Así por ejemplo diremos *cadena del multidigrafo G* a toda cadena de su sostén G^{\sim} .

La convención indicada permite afirmar:

1- Todo camino de un multidigrafo G es cadena orientable de G .

Para ver que la recíproca es falsa basta tomar por G al digrafo constituido por dos arcos con un mismo vértice final.

2- Dado el digrafo $G = (V, \Gamma)$, si $x_{i+1} \in \Gamma(x_i) \cup \Gamma^{-1}(x_i)$ la sucesión de vértices $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ define una cadena de G

II) dado un multigrafo G , conservando sus vértices, y sus bucles, pero substituyendo cada arista $u = [x, y]$ (con $x \neq y$) por un par de arcos opuestos $u = (x, y)$; $\check{u} = (y, x)$ se obtiene un multidigrafo simétrico G^S , que diremos simetrizado de G .

Por razones de comodidad y sin afectar lo precedente convendremos en considerar a cada bucle como opuesto de si mismo ($u = \check{u}$).

Nótese que :

- 1) si G tiene aristas, $G \neq (G^S)^\sim$.
- 2) a cada arista de G distinta de bucle corresponde en G^S un par de arcos opuestos. El circuito, de longitud 2, que generan no tiene correlativo en G .

Algunos autores, entre otros (D 1), (H 2), (H 5) proponen, para cuando se estudian nociones no dirigidas, en configuraciones dirigidas, designarlas anteponiéndoles el prefijo *semi* al vocablo de la correspondiente noción dirigida. Así por ejemplo, designan *semipath* a toda cadena generada a partir de un camino (*path*) y *semicircuit* a todo ciclo sostenido de un circuito.

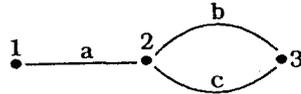
El carácter involutivo de la relación "ser arco opuesto" permitiría ver que la ambigüedad existente en la asignación de los nombres u, \check{u} a los arcos de G^S correspondientes de la arista u no será, en lo que sigue, fuente de problemas.

Una vez fijada dicha designación, dada en el no orientado G la cadena $C : p = x_1, u_1, \dots, u_L, x_{L+1} = q$ (eventualmente $p = q$) y substituyendo en la sucesión que la define la ocurrencia u_i de la arista u por aquel de los arcos u, \check{u} de la forma (x_i, x_{i+1}) que le corresponde, se obtiene en G^S un camino $C_1 : p \Rightarrow q$, de longitud L .

Procediendo análogamente con la sucesión que define la cadena \check{C} se obtiene un camino $C : q \Rightarrow p$ cuyo j -ésimo arco es opuesto del $(L+1-j)$ -ésimo arco 2 de C_1 . Lo resumiremos poniendo $C_2 = \check{C}_1$

Véase que $C_1 = C_2$ en G^S si y sólo si $C = \check{C}$ en G .

Nótese que aún cuando C y \check{C} sean distintas puede suceder que cierto i -ésimo arco de C_1 coincida con el i -ésimo de $C_2 = \check{C}_1$. En efecto, dado



y si convenimos en designar los arcos de G^S de forma que sean : $a=(1,2)$; $b=(2,3)$; $c=(2,3)$; la cadena $C : 1,a,2,b,3,c,2,a,1$ es distinta de $\check{C}:1,a,2,c,3,b,2,a,1$ pero $C_1 : a,b,\check{C},\check{a}$; $C_2 : a,c,\check{b},\check{a}$.

De la correspondencia dada poco más arriba resultan :

- 1) C_1 (C_2) carece de pares de arcos opuestos si y sólo si C es orientable.
- 2) C_1 (C_2) es elemental si y sólo si C es elemental.
- 3) Si C es simple, también lo son C_1 y C_2 .
- 4) Si C_1 (C_2) es simple y carece de pares de arcos opuestos, C es simple, y por ende orientable.

De donde la

Proposición 3.11.1

Existe una correspondencia biyectiva natural que respeta longitudes y extremos entre las cadenas (las cadenas elementales) de G y los caminos (los caminos elementales) de su simetrizado.

Recordemos, que a diferencia de la indicada correspondencia biyectiva entre las cadenas de G , y los caminos de G^S , sólo puede afirmarse que cada camino de un digrafo determina una cadena en su sostén.

El número de caminos elementales cerrados de longitud dos en G^S

coincide con la suma del doble de aristas distintas de bucle en G más el de las cadenas elementales, cerradas de longitud dos, generadas por pares de aristas paralelas (son 4 por cada par). Así entonces, si notamos c_g este último conjunto y G contiene m aristas distintas de bucles, el número de 2-caminos cerrados en G^S es $|c_{gs}| = 2.m + |c_g|$.

Visto que exactamente dos (cuatro) elementos de $c_{gs}(c_g)$ contienen los mismos arcos (aristas) puede afirmarse la

Proposición 3.11.2

Si G tiene m aristas distintas de bucle y c_g^* subgrafos ciclos elementales de longitud dos, el número de subdigrafos circuitos elementales en G^S es $c_{gs}^* = m + 2.c_g^*$.

3.12 CAMINOS Y CADENAS - ALGUNAS APLICACIONES.

Seguidamente ejemplificaremos algunas aplicaciones de los conceptos que nos ocuparon. Otras, más interesantes, son las relativas a caminos y cadenas extremales, en configuraciones valuadas. La diversidad de problemas que pueden abordarse con estos conceptos, es motivo de la gran cantidad de algoritmos propuestos al efecto.

Todo juego unipersonal puede reducirse a un proceso por etapas y estudiarse mediante un digrafo en el cual los vértices representen posiciones permitidas (estados alcanzados) y en los que hay arco (x,y) cuando las reglas del juego permiten que se pueda pasar de x a y , efectuando una sola jugada. Si toda jugada es reversible, el juego podrá representarse por un grafo.

Un ejemplo de lo dicho es el conocido juego "salir del laberinto", practicado ya en la Mitología Griega por Teseo, luego de matar al Minotauro, en el palacio de Knossos.

Es bien sabido, que un laberinto esta constituido por pasillos, que conectan entre sí encrucijadas o llevan a puntos de retorno obligado y que hay dos puntos distinguidos : entrada y salida.

Cada laberinto puede ser asociado a un grafo planar en el cual las aristas representan los pasillos y los vértices a sus res-

pectivos extremos.

En las figuras que siguen (reproducción de las dadas en (0 2)) esquemizamos el laberinto de los jardines del Hampton Court y su correspondiente grafo.

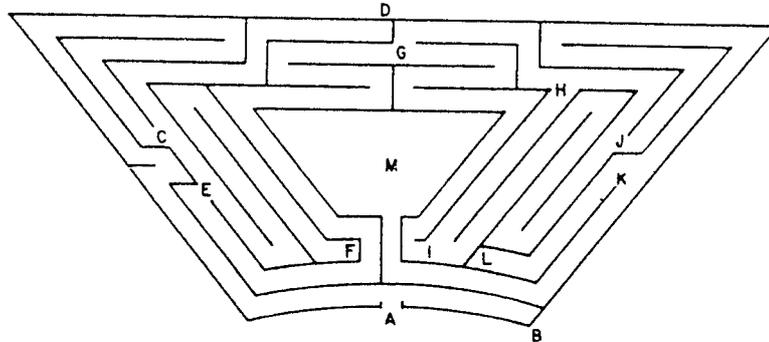
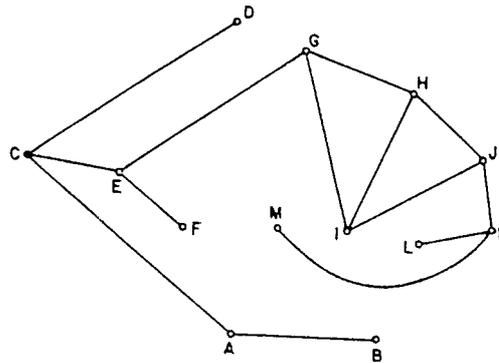


Figure 3.3.1a.



Recorrer exitosamente un laberinto equivale a determinar, en el grafo asociado, una cadena con extremos en su entrada y en su salida.

Según Ore (0 2) el primer procedimiento sistemático para resolver el problema parece ser el de Wiener (W 9), dado en 1873. Otros que lo mejoran, son los que resultan de aplicar los algoritmos de Tarry, Tremaux, y Trakhtenbrot (T 13). Aplicándolos, un caminante puede salir del laberinto, supuesto que convenga en :

- indicar en cada encrucijada cual es el corredor que lo llevó a ella por primera vez,
- marcar cada corredor utilizado cada vez que lo hace
- emplear cada corredor a lo sumo dos veces y tomarlo por segunda vez sólo si no tiene otra opción.

Por otra parte, tomando como base el algoritmo de Tarry, Fraenkel (F 4) propuso otro, que lo mejora, pues permite recorrer un grafo conexo y volver al punto imicial empleando todas las aristas una vez y algunas de ellas, eventualmente todas, una vez en cada sentido.

Para considerar el problema del laberinto y algunos otros propios de la teoría de grafos, Rosenstiehl (R 18),(R 19) adoptó un enfoque algebraico que le permitió reencontrar el algoritmo de Tarry-Tremaux y proponer otro que motiva el del "arco nuevo" de Rosenstiehl-Bermond (ver (B 4 Ch.4))

Los métodos precedentes llevan a emplear, eventualmente, todas las aristas del grafo, pero esto no parece ser apropiado pues la "distancia" entre la entrada y la salida es, en general, menor que el número de aristas. Por ello Ore (O 2),(O 3) propone un método de "cubrimiento progresivo", que si bien es de formalización compleja parece haberse mostrado eficiente cuando fue empleado.

El método, que podría aplicarse aún en grafos infinitos consiste en "visitar" los vértices que distan $D+1$ de la entrada, sólo después de haber "visitado" todos los que están a distancia D .

Todo laberinto en el cual desde cada posición alcanzada hay a lo sumo ocho opciones posibles puede ser representado por una matriz cuadrada de 0 y 1. En (H 24 Ch.3) se enuncia un algoritmo para abordar tal situación.

Por otra parte, el grafo asociado a cada laberinto es plano, y si conserva este carácter aún después de agregarle la arista de extremos coincidentes con su entrada y su salida, puede optarse por el siguiente método : al llegar a cada encrucijada elegir, para salir de ella, el corredor que se encuentra más a la derecha (ver (B 3), (B 4)).

Para mayores referencias relativas al problema en cuestión pueden consultarse, Konig (K 1 Ch.1),Lucas (L 7),Rouse-Ball (R 20)

También el juego de ajedrez y el de damas podrían analizarse en un digrafo, cuyos vértices correspondieran a cada una de las posibles conformaciones del tablero y con arcos (p,q) cuando mediante una sola jugada se pudiera pasar de la configuración re-

presentada por p , a la correspondiente de q .

En este caso cada partida quedaría representada por un camino con uno de sus extremos en el vértice posición inicial. No obstante, por la magnitud del número de conformaciones posibles este método carece de aplicabilidad..

Otros entretenimientos muy antiguos y conocidos que pueden encararse en términos de caminos o de cadenas son los siguientes. En ellos el número de situaciones posibles es pequeño y la pregunta podría resolverse mentalmente. Veamos como hacerlo utilizando conceptos de la teoría de grafos.

A) A la orilla de un río se encuentran un lobo, un repollo y una oveja al cuidado de un pastor que debe trasladarlos a la otra ribera.

Será posible efectuar el cruce, si sólo se dispone de un bote en el cual el pastor puede trasportar, por vez, a lo sumo uno de los objetos : repollo, oveja, lobo ?

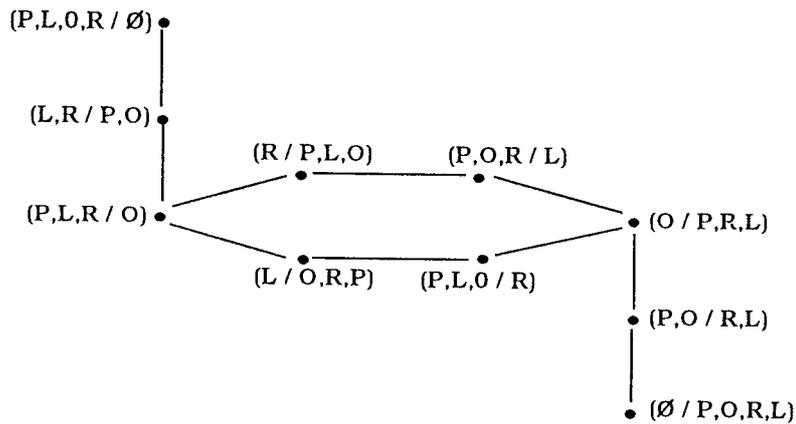
A los efectos del análisis y para determinar los estados posibles notemos que el bote, sólo puede ser remado por el pastor y que no pueden dejarse sin vigilancia cercana, los pares constituidos por el lobo y la oveja o el repollo y la oveja. Estas prohibiciones implican que en la ribera opuesta no tengan cabida los pares : pastor y repollo; pastor y lobo. Tampoco podrá estar el pastor alejado simultáneamente de los tres objetos a cruzar.

Observemos además que no hay diferencia esencial entre las situaciones que se presentan con "el bote en medio del río" o "el bote en la orilla opuesta".

Para indicar que en la margen izquierda se encuentran el lobo y el repollo mientras que en la restante (o viajando en el bote) están el pastor y la oveja pondremos $(L,R/P,O)$. En forma similar indicaremos los distintos estados que pueden presentarse.

De los "a priori" 16 estados posibles las restricciones indicadas sólo dejan 10. Ellos son : $(P,L,O,R / \emptyset)$; $(\emptyset / P,L,O,R)$; $(P,L,O / R)$; $(P,O,R / L)$; $(P,L,R / O)$; $(P,O / L,R)$; $(L,R / P,O)$; $(L / P,O,R)$; $(O / P,L,R)$; $(R / P,L,O)$.

Las transiciones de un estado a otro son reversibles y llevan al siguiente grafo.

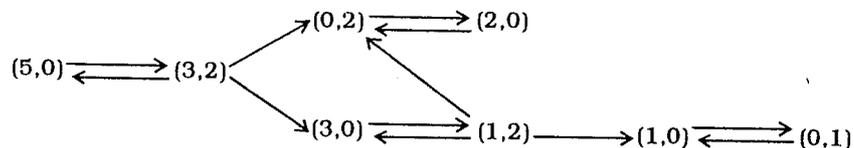


Las dos cadenas que representan a las dos soluciones óptimas, implican 7 cruces del río. En una de ellas el bote será ocupado, sucesivamente, por: P,O ; P ; P,L ; P,O ; P,R ; P ; P,O.

- B) Se tiene una jarra de 5 litros llena de agua y otra de 2 litros vacía. Será posible mediante trasvasamientos y vaciados totales, quedar con dos litros en una de ellas y ninguno en la otra ? Idem, con un único litro en alguna de ellas ? Cuántas soluciones hay ,cuál es el menor número de operaciones necesarias ?

Para construir el digrafo asociado al problema llamemos A (B) al recipiente con capacidad de 5 (2) litros e indiquemos con (a,b) que en ellos hay, respectivamente, a (b) litros. Obviamente, a, b enteros tales que : $0 \leq a \leq 5$; $0 \leq b \leq 2$; $0 \leq a+b \leq 5$.

Las operaciones admitidas permiten pasar de una alcanzada configuración (a,b), a cualesquiera de las siguientes: (a,0); (0,b); (a+b,0); (0,a+b) si $a+b \leq 2$ y (a-(2-b),2) caso contrario. Excluido el vértice (0,0), el digrafo a considerar es



Del digrafo resulta que, evitando trasvasamientos innecesarios, hay dos formas de llegar al estado (0,2) empleando, respectiva-

mente, 2 o 4 trasvasamientos y una única manera de alcanzar los estados $(1,0);(0,1)$

- C) Se tienen tres jarras, con capacidades de 8, 5 y 3 litros, respectivamente. La primera está llena y las dos restantes vacías. Será posible colocar exactamente 4 litros en dos de ellas, sin utilizar otras mediciones que las que permiten las jarras ? De cuántas formas ?

Como los sucesivos trasvasamientos sólo permitirán alcanzar valores enteros, "a priori" hay exactamente 24 formas de repartir los 8 litros en los recipientes dados, pero por las restricciones del problema sólo hay 16 ternas aceptables.

En el digrafo en cuestión, y evitando volver a estados anteriores hay 16 soluciones factibles, y todas ellas requieren de al menos 7 trasvasamientos.

- D), Dos maridos celosos y sus respectivas esposas deben atravesar un río en un bote que sólo admite dos personas. Puede efectuarse el traslado cuidando que nunca queden solas parejas que no son matrimonios? Cuáles son las soluciones óptimas?

Véase que serán necesarios al menos 5 cruces del río.

- E) Dos caníbales y dos misioneros deben atravesar un río en un bote que solamente admite dos personas por vez Si los cuatro pueden remar pero el número de caníbales no puede superar al de los misioneros presentes en el mismo lugar, excepto si no los hay, puede efectuarse el cruce? Cuantos cruces del río son necesarios como mínimo?

Las restricciones del problema llevan a la construcción de un grafo con 10 vértices. Las cuatro soluciones óptimas implican cinco cruces del río.

Si se impone la restricción suplementaria de que nunca queden ambos caníbales solos, el problema admite una única solución.

La variación en el número de misioneros, o de caníbales o de la capacidad del bote, llevan a otros problemas similares. Un análisis de estas generalizaciones puede verse en Bellman, Cooke y Locked (B 22 Chap.7)

3.13 EVALUACIONES MATRICIALES

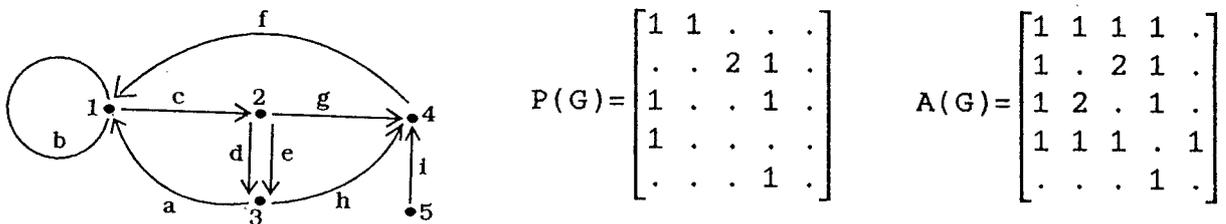
Hasta aquí hemos puesto énfasis en las representaciones topológicas y hecho sólo breves referencias a las dadas por tablas o por matrices.

Veamos ahora algunas de las consecuencias que resultan del uso de la matriz precedencia, o de la matriz adyacencia, y de aplicarles "operaciones reales" o bien "operaciones booleanas".

Sobreentendiendo el uso de la conocida relación entre un multidigrafo y su multigrafo sostén, recordemos que dado un multidigrafo $G = (V, U)$ con sus vértices etiquetados $1, 2, 3, \dots, n$ ($n \geq 1$) su matriz de precedencia $P(G) = (p_{i,j})$ y su matriz de adyacencia $A(G) = (a_{i,j})$ son definidas, respectivamente, por :

$$\begin{cases} p_{i,j} = \text{número de arcos de la forma } (i,j), \text{ eventualmente } i=j, \\ a_{i,j} = \text{" aristas " } [i,j], \text{ " " " " } \end{cases}$$

Ejemplo 3.12.1



Puede verificarse que para las matrices anteriores se tiene :

$$P^2(G) = (p_{i,j}^{(2)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & . \\ 3 & . & . & 2 & . \\ 2 & 1 & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . \end{bmatrix} \quad A^2(G) = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & . \\ 1 & 1 & 1 & . & 1 \end{bmatrix}$$

En este caso $p_{2,1}^{(2)} = 3$ cuenta los tres caminos de longitud dos que llevan desde el vértice 2 al vértice 1, a saber : d,a; e,a; g,f .

A su vez $a_{1,1}^{(2)} = 4$ indica que hay cuatro cadenas de longitud dos con ambos extremos en el vértice 1, a saber : 1,a,3,a,1 ; 1,b,1,b,1 ; 1,c,2,c,1 ; 1,f,4,f,1 .

Proposición 3.13.1

- a) Si P es la matriz precedencia de G , la componente $p_{i,j}^{(r)}$ de P^r da el número de caminos $i \Rightarrow j$ de longitud r .
- b) Si A es la matriz adyacencia de G , la componente $a_{i,j}^{(r)}$ de A^r da el número de r -cadenas con extremos i, j .

Demostración

Consideremos el caso de la matriz de precedencia, razonemos por inducción. Un proceso análogo permitiría demostrar b).

La validez de lo afirmado es inmediata para $r = 1$ (también para $r = 0$, identificando vértices con un camino de longitud nula y P^0 con la matriz identidad I).

Por otra parte, por hipótesis inductiva, $p_{i,k} \cdot p_{k,j}^{(r-1)}$ da el número de r -caminos $i \Rightarrow j$, incidentes en k .

De esto, visto que todo r -camino $i \Rightarrow j$ se obtiene concatenando un arco (i,x) con un $(r-1)$ -camino $x \Rightarrow j$; cualquiera sea x , y puesto que dos r -caminos $i \Rightarrow j$ son distintos si y sólo si se diferencian en sus respectivos arcos iniciales o en sus sub-caminos finales de longitud $r-1$, se infiere la validez de a).

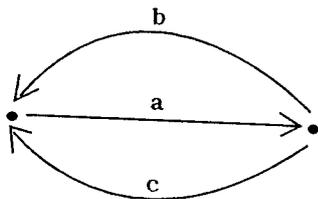
Corolarios:

- 1) j es accesible desde i (j está conectado con i) si y sólo si existe algún r para el cual $p_{i,j}^{(r)} \neq 0$ ($a_{i,j}^{(r)} \neq 0$).
- 2) el vértice i es extremo de un camino cerrado (cadena cerrada) de longitud r , si y sólo si $p_{i,i}^{(r)} \neq 0$ ($a_{i,i}^{(r)} \neq 0$).
- 3) si la distancia entre i, j es finita, ésta coincide con el menor entero r para el cual $a_{i,j}^{(r)} \neq 0$, $i \neq j$.
- 4) si el vértice i no es aislado, $a_{i,i}^{(2k)} \neq 0$, cualquiera sea k .
- 5) si G contiene al menos una arista, la matriz A^r es distinta de la matriz nula, cualquiera sea $r \geq 0$.

- 6) si G carece de caminos cerrados de longitud $L \leq r$; $p_{i,j}^{(h)}$ da el número de h -caminos elementales $i \Rightarrow j$, cualquiera sea $1 \leq h \leq r+1$.
- 7) G carece de caminos cerrados si y sólo si existe un k_0 tal que cualquiera sea $k \geq k_0$, P^k es la matriz nula; es decir si y sólo si P es nilpotente.
- 8) G carece de caminos cerrados si y sólo si para todo r ($1 \leq r \leq n$) y cualquier i ($1 \leq i \leq n$) se tiene que $p_{i,i}^{(r)} = 0$.
- 9) Si $Q = \sum_h P^h$, $1 \leq h \leq L$; $q_{i,j}$ da el número de caminos no nulos, de longitud menor o igual que L , que llevan desde i hasta j .
- 10) Si G es digrafo de orden n y en $Q = \sum_h P^h$, $1 \leq h \leq n$, se sustituyen los $q_{i,j}$ no nulos por $q_{i,j} = 1$ y se conservan los nulos, se tiene la matriz precedencia de su digrafo clausura transitiva G^* .

Para hallar la clausura reflexivo-transitiva bastaría sustituir los $q_{i,i} = 0$ por $q_{i,i} = 1$ (o poner $p_{i,i} = 1$ y calcular las potencias P^h , para $1 \leq h \leq n-1$)

Del ejemplo que sigue (donde $r=1$) resulta que la cota indicada en 6) no se puede mejorar. En efecto, dado G



$$P^3(G) = \begin{bmatrix} . & 4 \\ 2 & . \end{bmatrix}$$

y puede verificarse que el 4 de $P^3(G)$ representa tanto a los caminos simples (no elementales) b,a,c ; c,a,b como a los caminos no simples b,a,b y c,a,c .

Obviamente, del Corol. 3 resulta un método alternativo del dado en 3.8 para evaluar distancias entre vértices.

Para muchos problemas en grafos, y en particular cuando sóloamente interesa conocer si existen caminos $i \Rightarrow j$ (cadenas de extremos i, j) pero no su cantidad, en lugar de operar en "modo real" puede recurrirse al "modo booleano".

Para ello, a cada multidigrafo G con vértices $1, 2, 3, \dots, n$ se asocia su matriz de precedencia booleana $\underline{P} = (p_{i,j})$ y su matriz de adyacencia booleana $\underline{A} = (a_{i,j})$ tales que

$$p_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si existen arcos } (i,j) \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si hay aristas } [i,j] \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Además, las operaciones habituales de suma y producto se substituyen, respectivamente, por las de disjunción lógica (o supremo \vee) y de conjunción lógica (o ínfimo \wedge), definidas por:

$$\begin{array}{c|cc} \vee & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \wedge & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Nótese que la implementación de las "operaciones booleanas" es más fácil que la de las "operaciones reales" pero que con ellas no es factible contar.

Ahora, el producto de composición habitual $C = A \circ B$ definido por $c_{i,j} = \sum_k a_{i,k} \cdot b_{k,j}$ se reemplaza por el

producto de composición booleano $\underline{C} = \underline{A} \circ \underline{B}$ definido por

$$c_{i,j} = \bigvee_k a_{i,k} \wedge b_{k,j}$$

El producto en cuestión es asociativo pero no conmutativo.

Como es natural, la "potencia booleana" de una matriz cuadrada M se define por : $M^{[0]} = I$; $M^{[h]} = M \circ M^{[h-1]}$, para $h \geq 1$.

Operando al modo booleano en el ejemplo 3.12.1 tendremos :

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & 1 & . \\ 1 & . & . & 1 & . \\ 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . \end{bmatrix} \quad \underline{P}^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . \\ 1 & . & . & 1 & . \\ 1 & 1 & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . \end{bmatrix} \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . \\ 1 & . & 1 & 1 & . \\ 1 & 1 & . & 1 & . \\ 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ . & . & . & 1 & . \end{bmatrix} \quad \underline{A}^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & . \\ 1 & 1 & 1 & . & 1 \end{bmatrix}$$

Puede verse que ahora se tiene un 1 en "los mismos lugares" que antes había valores no nulos.

Aplicando operaciones booleanas y razonando como para el caso de la Prop.3.13.1 se demuestra la

Proposición 3.13.2

- a) Si \underline{P} es la matriz precedencia booleana de G , $\underline{p}_{i,j}^{[r]} = 1$ si y sólo si existe al menos un r -camino de longitud $i \Rightarrow j$.
- b) Si \underline{A} es la matriz de adyacencia booleana de G , entonces en G hay al menos una cadena de longitud r , de extremos i, j , si y sólo si $\underline{a}_{i,j}^{[r]} = 1$.

La proposición anterior admite corolarios similares a los de la Prop. 3.13.1 que no involucran recuento. Si G tiene n vértices pueden enunciarse además los siguientes :

- a) La matriz precedencia de su clausura transitiva es $\bigvee_i \underline{P}^{[i]}$, $1 \leq i \leq n$ y la de su clausura reflexivo-transitiva $T = I \vee \bigvee_i \underline{P}^{[i]} = \bigvee_i (\underline{P} \vee \underline{I})^i = (\underline{P} \vee \underline{I})^{[n-1]}$; $0 \leq i \leq n-1$
 T suele decirse *matriz de accesibilidad* de G .
- b) Los elementos no nulos de la i -ésima fila (j -ésima columna) de $T \wedge T^t$ dan los vértices de los circuitos que contienen al vértice i (j).
- c) Las filas (columnas) idénticas de $\underline{A\#} = \bigvee \underline{A}^{[i]}$, $0 \leq i \leq n$; dan las componentes conexas de G . En particular, G es conexo si y sólo si todas las componentes de $\underline{A\#}$ son 1.

La validez de a) (ver (H 16), (T 7), (T 8)) es consecuencia directa de lo siguiente :

- si M es una matriz de 0 y 1 con todas las entradas de su diagonal principal 1, entonces $M^{[2]} = M^{[2]} \vee M \vee I$ y en general $M^{[h]} = \bigvee_i M^{[i]}$; $0 \leq i \leq h$.

La matriz de accesibilidad permite detectar fácilmente la eventual existencia de puntos no alcanzables desde algún otro prefijado, o los errores ocultos en la matriz \underline{P} supuesto que la relación considerada sea de precedencia estricta.

De las proposiciones 3.13.1 y 3.13.2 resulta que una forma de decidir sobre la carencia de circuitos es verificar si alguna potencia (booleana o real) de la correspondiente matriz de precedencia es nula. Otras maneras, mucho más eficientes, pues no presuponen multiplicar matrices fueron dadas en 3.3.

En especial, de Prop. 3.13.1 Corol. 7 y del hecho que toda matriz cuadrada de enteros no negativos puede considerarse matriz de precedencia de algún multidigrafo se deduce la siguiente Prop. 3.13.3 propia de la teoría de matrices. Ella, que es una reformulación de 3.3.2 fue dado en (M 16), (M 17) y propone un método eficiente para evaluar si una cierta matriz es nilpotente.

Proposición 3.13.3

Una matriz cuadrada de enteros no negativos es nilpotente si y sólo si cualquier submatriz principal tiene al menos una fila o una columna de ceros.

En (M 16) se demuestra la

Proposición 3.13.4

Si $G = (V, \Gamma)$ es de orden n , carece de circuitos y \underline{P} es su matriz de precedencia booleana, la reducción transitiva de G tiene matriz $\underline{P} - \bigvee_i \underline{P}^{[i]}$; con $2 \leq i \leq n$

El método anterior no es aplicable si existen caminos cerrados pues éstos están presentes en todas las potencias de \underline{P} .

En (M 16) se indica que la idea subyacente en la Prop. 3.13.4 justifica la próxima Prop. 3.13.5 para cuya formulación necesitaremos el concepto que sigue.

Se dice que el digrafo $G = (V, U)$ es k -ésima potencia del digrafo $H = (V, U')$ cuando $(x, y) \in U$, si y sólo si en H existen caminos $x \Rightarrow y$ de longitud menor o igual que k .

En tal caso, H suele decirse k -ésima raíz de G .

Así entonces, si $|V| = n$, la n -ésima potencia de H coincide con su clausura transitiva.

Proposición 3.13.5

Si G carece de circuitos y su matriz de precedencia booleana P satisface $P = \sum Q^{[i]}$; $1 \leq i \leq h$; entonces G es h -ésima potencia del digrafo cuya matriz de precedencia es Q .

En 3.2 y 3.5 hemos considerado algunos métodos para determinar las componentes fuertemente conexas de un digrafo.

Otros dos son los siguientes :

A) El asignado a Foulkes ((K 5), (K 14)) que puede resumirse en lo siguiente :

Hallar la matriz T de accesibilidad y calcular $N = T \wedge T^t$.
 Los vértices de las distintas componentes buscadas están determinadas por las filas (columnas) de N que son idénticas.

En realidad, y según indicamos en 3.5, la existencia de un uno en todas las componentes de su diagonal principal permite razonar directamente sobre T , sin necesidad de calcular N , pues si la i -ésima y la j -ésima fila (columna) de T coinciden entonces los vértices x_i, x_j están en una misma componente fuerte, y recíprocamente.

Notemos que si la i -ésima fila (columna) y la j -ésima fila (columna) de $T \vee T^t$ coinciden, i, j están en una misma componente conexa. Para ver que la recíproca es falsa basta considerar el digrafo de arcos $(a, b), (a, c)$.

B) La propuesta por Maghout (M 6) que hace uso de la siguiente operación.

Se dice producto puntual (o de Hadamard) de las $(p \times q)$ -matrices A, B a la matriz $C = A \times B$ tal que $c_{i,j} = a_{i,j} \cdot b_{i,j}$.

Obviamente, este producto es asociativo y conmutativo. Además, aplicado a una matriz de 0 y 1 es idempotente.

De lo deducido en Prop. 3.13.2 resulta la validez de la

Proposición 3.13.6

Si \hat{P} es la matriz de la clausura transitiva del digrafo G ; \hat{P}^t su traspuesta y $B = \hat{P} \times \hat{P}^t$, existe un circuito que contiene los vértices i, j si y sólo si $b_{i,j} = \hat{p}_{i,j} \cdot \hat{p}_{j,i} = 1$.

Corolarios

- 1) G carece de circuitos si y sólo si $\hat{P} \times \hat{P}^t$ es una matriz nula.
- 2) Dado un vértice i , los restantes vértices de la componente fuertemente conexa que lo contiene son aquellos vértices tales $b_{i,j} = 1$.

Nótese que en la Prop. 3.13.4 puede substituirse $\hat{P} - \bigvee_i \hat{P}^{[i]}$ por $\hat{P} \times Q$, con Q matriz complemento de $\bigvee_i \hat{P}^{[i]}$.

3.14 RESULTADOS VARIOS

De la lectura, de los respectivos comentarios, en Mathematical Reviews y en Zentralblatt fur Mathematik nos permitimos agregar, a título informativo, los siguientes resultados.

En (Z 4) se determina, para digrafos sin circuitos, con m aristas y de orden arbitrario, una relación de recurrencia tipo Fibonacci para hallar el número máximo de caminos entre un par de vértices y en (Ch 6) se demuestra por inducción que todo digrafo de orden n con $d_x^+ \geq k$ contiene un circuito de longitud $L \leq 2500 + (n/k)$.

Erdos observó que todo multigrafo G sin bucles contiene un subgrafo bipartido cubriente H tal que $d_x(H) \geq d_x(G)/2$. De dicho resultado se deduce (T 14 Th 6.2) que todo digrafo de orden n , con al menos $4n$ arcos contiene un ciclo tal que cada par de

arcos consecutivos tienen direcciones respectivamente opuestas.

En (B 23), (B 24) y (B 25) se obtienen expresiones relativas al número asintótico de ciertas configuraciones etiquetadas. Una temática similar fue estudiada en (R 21).

En (B 26) se dan condiciones suficientes para que un digrafo admita caminos de longitud prefijada y en (S 12) se demuestra que si un digrafo fuertemente conexo de orden $n = 2r + 3 \geq 7$, con $d^+ \geq r$; $d^- \geq r$ tiene al menos $3r^2 + 6r + 3$ arcos, admite circuitos de longitud $L \geq n-1$, confirmando así una conjetura de (H 25), donde se estudia, para digrafos fuertemente conexos, la existencia de circuitos de longitud determinada, en función del número de vértices y de arcos.

Si G es 2-conexo de orden $n \geq 2k$ y sus vértices tienen grado $d \geq k$, entonces G tiene ciclos elementales de longitud $L \geq 2k$. El resultado anterior fue obtenido por Dirac (D 7). En (B 27) se da una nueva demostración del mismo y se reencuentran algunas de sus generalizaciones. También en (B 28) se estudia la existencia de ciclos con longitudes acotadas inferiormente.

Thomassen muestra, en (T 15), que decidir si un arco pertenece a un circuito par (impar) es arduo, y que si bien es fácil determinar si un digrafo contiene circuitos de longitud impar, es difícil decidir sobre la existencia de los de longitud par. Ve también que para todo natural k existen digrafos con $d_x^+ \geq k$ que no contienen circuitos de longitud par. En (T 16) ve que todo digrafo fuertemente conexo con $d_x^- \geq 3$ y $d_x^+ \geq 3$ contiene circuitos de longitud par.

En (T 17) se estudian digrafos 2-conexos que no admiten pares de circuitos disjuntos y en (T 18) se prueba que para todo número natural k existe otro, $f(k)$, tal que si $d_x^+ \geq f(k)$ el digrafo tiene al menos k circuitos disjuntos, y verifica, para el caso $k=2$, una conjetura hecha en (B 12), y según la cual $f(k) = 2k-1$.

En (E 12) y como consecuencia de resultados dados en (T 17) se dan condiciones suficientes para que exista un vértice perteneciente a todo circuito. Los fuertemente conexos con esta propiedad fueron estudiados en (Z 5). Cuestiones análogas, para el caso no dirigido fue considerada en (M 21).

Otros dos resultados que tienen en cuenta la paridad de los ciclos son :

- A excepción de tres grafos, cualquier 2-conexo no bipartido con grado $r \geq 3$ contiene ciclos pares e impares, con dos o más diagonales (V 2).
- Si G es 2-conexo, no bipartido, con al menos $2r+1$ vértices que tienen grado $r \geq 3$, G contiene un ciclo impar (par) de longitud $L \geq 2r-1$ ($L \geq 2r$) (V 3).

En (M 22), (M 23), (M 24) Monien estudia la complejidad de determinar los ciclos pares (impares) más cortos en grafos y en grafos valuados, dando algoritmos para hallarlos

Dentro de la problemática anterior, pero para el caso dirigido, Marcu estudia en (M 25) los circuitos de longitud par en digrafos conexos y en (M 26) da una condición necesaria y suficiente para que todo circuito elemental de un digrafo sea de longitud par y otras dos para el caso de digrafos fuertemente conexos.

Se sabe que un multigrafo admite ciclo euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

Para la existencia de ciclos hamiltonianos no se conocen condiciones necesarias y suficientes igualmente generales. Solamente se han dado condiciones necesarias y condiciones suficientes. Entre éstas, la conocida de Ore (0 4) :

Si el grafo G es de orden n, carece de bucles, y cualesquiera sean los vértices no adyacentes u, v, la suma de sus respectivos grados es mayor o igual que n, G admite ciclo hamiltoniano.

En particular, si cada vértice es adyacente de al menos la mitad de los vértices de G, entonces G es hamiltoniano.

Es obvio que los grafos completamente cíclicos son hamiltonianos y es fácil ver que la recíproca es falsa. No obstante varios resultados apoyan las conjeturas de Bondy (B 19) y Mitchem-Schmeichel (M 20), ya citadas en 3.8.

En particular, en (B 29) se demuestra que si G es grafo hamiltoniano sin bucles, de orden $n \geq 2$, con al menos $n^2/4$ aristas,

es completamente cíclico, o bien es el bipartido completo $K_{p,p}$ con $p = n/2$, y se observa que la antedicha condición suficiente de Ore implica que si G es de orden n tiene al menos $n^2/4$ aristas.

Por otra parte, Bauer-Schmeichel (B 30) recurren a un resultado de (S 13) para mostrar que las tres condiciones de suficiencia tipo Ore, para la existencia de ciclos hamiltonianos, dadas por Fan, Chvatál y Bondy, respectivamente, pueden extenderse, e implican que el grafo es completamente cíclico, o pertenece a una clase especial bien determinadas.

La conexión entre los grafos hamiltonianos, y los completamente cíclicos también fue estudiada en (A 6), (B 31), (B 32), (B 33), (B 34), (B 35), (B 36), (H 26), (S 10) y (S 13).

Para el caso dirigido Meyniel (M 27) demostró

Un digrafo sin bucles fuertemente conexo de orden $n \geq 3$, tal que cualesquiera sean los vértices no adyacentes x , y se tiene : $d_x^+ + d_x^- + d_y^+ + d_y^- \geq 2n-1$ es hamiltoniano.

Como corolario de lo precedente obtiene las condiciones de suficiencia de Camion (C 7), Ghouila-Houri (G 20), Woodall (W 10) y la ya citada de Ore (O 4). Al respecto ver (B 37), (D 8).

Benhocine (B 38) mejora el resultado anterior, así como otros dados en (O 5), (T 19).

Se dice *cincha* (circunferencia) de G a la longitud del más corto (más largo) de sus ciclos elementales.

Erdos y Gallai (E 13) demostraron que si c es natural mayor que uno y G es grafo de orden n , con más de $(n-1)c/2$ aristas distintas de bucles, la circunferencia de G es mayor que c .

Otra prueba del mismo resultado puede verse en Woodall (W 10) donde además se dan condiciones suficientes para la existencia de circuitos y de ciclos hamiltonianos, o de ciclos que tienen su longitud acotada inferiormente.

Lewin (L 10) dedujo para digrafos sin bucles una propiedad similar, pero de enunciación mas compleja, y dió una nueva demostración del resultado anterior.

Por otra parte, se sabe (B 39) que dados los naturales c y k es posible construir grafos k -regulares con cincha c y que :

a) si $k \geq 3$ y $c = 2.r \geq 4$ ellos son de orden $n \geq n_{rc}$ con $n_{rc} \geq 2 \{1+(k-1)+(k-1)^2 + \dots + (k-1)^{r-1}\} = 2((k-1)^r - 1) / (k-2)$

Se conocen pocos para los cuales vale la igualdad anterior. Para ellos $c \in \{4,6,8,12\}$ y los minimales que la satisfacen para $c=4$ son los bipartidos K_{kk} .

b) si $k \geq 3$; $c = 2.r + 1 \geq 5$ ellos son de orden $n \geq n_{rc}$ con $n_{rc} \geq 1 + (((k-1)^r - 1) \cdot (k / (k-2)))$

En (B 40),(D 9) se demostró que la igualdad sólo puede darse si $c = 5$ y $k \in \{3,7,57\}$.

Interesantes resultados que toman en cuenta el "exceso" $n - n_{rc}$ fueron obtenidos (B 39),(B 41),(B 42).

3.15 TERMINOLOGIA FRECUENTE

En la lista que sigue damos los nombres más frecuentes con que los autores de lengua inglesa o francesa, designan a las nociones que hemos introducido en este capítulo e indicamos alguna bibliografía en donde se los utiliza.

| | | |
|----------|-----------------|------------------------|
| camino : | chemin | B3 / B4 / K5 / K7 / R1 |
| | directed walk | B5 / H2 / S2 |
| | " path | S1 |
| | " sequence | O2 |
| | " edge " | M1 |
| | arc sequence | Ch2 / W2 |
| | arc progression | B1 |

```

camino simple : chemin simple      B3 / B4 / K5 / K7 / R1
                directed walk      D1
                "    trail          B5 / H2 / S2
                "    path           O2 / M1 / W2 / Ch2
                path progression (si es abierto) ] B1
                cycle    "         (si es cerrado) ]
camino elemental : chemin élémentaire B3 / B4 / K5 / K7 / R1
                  directed path (o path) H5
                  "    way          M1
                  simple path (si es abierto) | Ch2
                  "    cycle (si es cerrado) |
                  "    directed path S1
                  directed path (si es abierto) | D1 / S2
                  "    circuit (si es cerrado) |
                  "    path (si es abierto) | H2 / B5
                  "    cycle (si es cerrado) |
                  simple path progression (si es abierto) | B1
                  "    cycle    "         (si es cerrado) |

```

```

cadena : chaine      B3 / B4 / K5 / K7
         pseudo-chaine | R1
         chaine (si es orientable) |
         walk          B5 / H2 / S2
         path          S1
         edge sequence Ch2 / M1 / O2
         " progression B1

```

```

cadena simple : chaine simple      B3 / B4 / K5 / K7 / R1
                walk                D1
                trail                B5 / H2 / S2
                path                 O2 / M1 / W2
                chain progression (si es abierta) | B1
                circuit progression (si es cerrada) |
                chain (si es abierta) | Ch2
                circuit (si es cerrada) |

```

```

cadena elemental : chaine élémentaire B3 / B4 / K5 / K7 / R1
                  simple path          S1
                  chain                 W2
                  path (si es abierta) | D1 / S2
                  circuit (si es cerrada) |

```

| | | | | |
|--------------------------|---------------------|-----------------|---------|----|
| path | (si es abierta) | | B5 / H2 | |
| cycle | (si es cerrada) | | | |
| simple chain progression | (si es abierta) | | | B1 |
| " | circuit progression | (si es cerrada) | | |
| arc (o simple path) | (si es abierta) | | O2 | |
| circuit | (si es cerrada) | | | |

En (B 1) se conviene en eliminar el termino "progression" al referirse al conjunto de arcos (aristas) que componen un camino (una cadena).

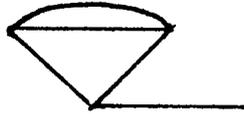
Asi por ejemplo, el conjunto de las aristas de una "simple chain progression" constituyen un "simple chain".

Las cadenas cerradas se dicen "pseudo-cycles" en (B 4), pero "cycles" en (B 3). En (B 4) se reserva el nombre de "cycle" para las cadenas cerradas simples y el de "circuit" para los caminos cerrados simples.

En Luchessi (L 9) las cadenas se dicen "passeio" y las simples "trilha". A su vez las elementales abiertas (cerradas) se denominan "caminho"("circular").

Ejercicios

3-1) Dado el multigrafo



- determine algunas de sus cadenas de longitud $L = 1, 2, 3$.
Cuales de ellas son orientables, simples, elementales?
- determine sus cadenas cerradas de longitud 2,3
- determine sus ciclos de longitud 2,3.

3-2) Demuestre que:

- toda cadena de extremos a, b contiene subcadenas con los cuales puede construirse otra elemental, también de extremos a, b .
- G contiene una cadena de extremos a, b si y sólo si contiene una cadena elemental de extremos a, b .
- si cualquiera sea el vértice x se tiene $d_x^+ \leq 1$ y $d_x^- \leq 1$ toda cadena del sostén de G determina un camino de G .

3-3) Pruebe la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- toda cadena simple es orientable
- " " " es elemental
- " " elemental abierta es simple.
- " " " cerrada, de longitud $L \neq 2$, es simple.
- " " " " y simple genera ciclo.
- " " " " genera ciclo.

3-4) Vea que G carece de bucles y de aristas paralelas si y sólo si todo ciclo tiene al menos tres aristas.

3-5) Demuestre que si G es un grafo sin bucles y el grado de sus vértices satisface $d_x \geq h \geq 1$; entonces es posible :

- construir en G al menos una cadena elemental abierta de longitud $L \geq h$.
- " " " " cerrada de longitud $L \geq h + 1$.

Vea que las cotas dadas no son mejorables y que la afirmación anterior no es válida si G admite bucles o es multigrafo propiamente dicho.

- 3-6) Muestre que si dos ciclos de G incluyen una misma arista e , entonces G contiene un ciclo que no contiene e . Puede además elegírselo elemental ?
- 3-7) Sean p, q, r tres vértices de un grafo y $C_1: p = x_1, \dots, x_h = q$; $C_2: p = y_1, \dots, y_k = r$ cadenas de longitud mínima entre p, q y p, r , respectivamente. Vea que si a, b son vértices que pertenecen a C_1 y C_2 entonces $a = x_i$; $b = x_j$ con $i < j$ si y sólo si $a = y_l$; $b = y_m$ con $l < m$.
- 3-8) a) Vea que en K_n , $n \geq 2$, cualesquiera sean los vértices x, y , $x \neq y$, existen cadenas de longitud $L = 1, 2, 3, \dots, n-1$ que los tienen por extremos.
 b) Construya, para $r > 3$ un grafo de orden r , distinto de K_r que contenga al menos dos vértices extremos de cadenas de longitud $L = 1, 2, \dots, r-1$.
- 3-9) Escriba la matriz adyacencia del multigrafo de 3.1 y calcule sus segunda y tercera potencia. Vea que para cada par i, j los valores obtenidos coinciden con el número de sus cadenas de extremos i, j .
- 3-10) Vea que si $A(G)$ es la matriz adyacencia de un multigrafo G , cada componente $q_{i,j}$ de $A^r(G)$ da el número de sus cadenas de extremos i, j , de longitud r . Deduzca, de lo precedente una forma de calcular las distancias entre vértices.
- 3-11) Sea G un grafo y A su matriz de adyacencia. Vea que :
 - $(A^2)_{i,j}$ es el número de vértices adyacentes al par de vértices i, j .
 - $(A^2)_{i,i}$ es el grado del vértice i menos el número de bucles con soporte i .
 Valen afirmaciones similares para el caso de multigrafos propiamente dichos?
- 3-12) Vea que si G es grafo de orden n , entonces:
 - si es conexo tiene al menos $(n-1)$ aristas, distintas de bucles.
 - si tiene $m \geq n$ aristas, G contiene al menos una cadena cerrada.
 - si carece de bucles y tiene al menos $1 + \binom{n-1}{2}$ aristas, es conexo.
 - si carece de bucles y cualquiera sea x , $d_x \geq (n-1) / 2$, es conexo.
 Cuales de las afirmaciones anteriores pueden extenderse al caso de multigrafos?

- 3-13) Demuestre :
- que en todo multigrafo conexo cualesquiera dos de sus cadenas elementales de longitud máxima tienen por lo menos un vértice común. Podría afirmar que también tienen una arista común?
 - que si G contiene exactamente dos vértices de grado impar, ambos están en una misma componente conexa.
- 3-14) Supuesto que G es un grafo sin bucles, de orden n , con m aristas, determine la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
- si $m \geq n$, G es conexo.
 - si $m \geq n$, G contiene ciclos.
 - si $m \leq n - 1$, G es desconexo.
 - si $m \leq n - 2$, G es acíclico.
 - si $m = n - 2$, G tiene al menos dos componentes conexas no triviales.
 - si $m = n + 1$, G tiene al menos dos ciclos.
- Cuáles de las precedentes son válidas también si G admite bucles ?
- 3-15) Demuestre :
- Un multigrafo G es conexo si y sólo si, para toda partición de su conjunto de vértices en dos clases disjuntas no vacías, A, B ; existen aristas de G con extremos en ambos conjuntos A, B .
 - Todo conexo no trivial contiene al menos un vértice que no es de corte (recordemos que x , se dice de corte, si y sólo si $G - x$ contiene mas componentes conexas que G).
- 3-16) Vea que todo conexo no trivial contiene al menos un vértice que no es de corte.
- 3-17) Vea que, supuesto $n \geq 2$, las siguientes afirmaciones son equivalentes
- T es conexo sin ciclos.
 - Cada par de vértices de T esta conectado por una única cadena.
 - T es conexo y tiene exactamente $(n-1)$ aristas.
 - T es acíclico y tiene exactamente $(n-1)$ aristas.
 - T es conexo minimal (quitándole una arista deja de ser conexo).
 - T es acíclico maximal (agregándole una arista se crea un ciclo).

3-18) Vea que si G es conexo, $G - u$ es conexo si y sólo si, u pertenece a por lo menos un ciclo de G .

Vale una afirmación análoga si se substituyen, respectivamente, conexo, arista y ciclo, por fuertemente conexo, arco y circuito?

3-19) Vea que el menor número de aristas necesarias para que en un grafo de orden n todo par de vértices, y cada uno consigo mismo, esté conectado por cadenas de longitud dos es $2n - 1$.

3-20) Vea :

a) que si un multigrafo conexo tiene $2k > 0$ vértices de grado impar, para cubrir sus aristas son necesarias al menos k cadenas simples, abiertas, arista disjuntas dos a dos.

b) que si en el multidigrafo conexo $G = (V, U)$ se verifican ;

$$d_x^- = d_x^+ \quad \text{cualquiera sea } x \in V - \{a, b\}$$

$$d_a^- - d_a^+ = d_b^+ - d_b^- = k$$

G puede ser cubierto por k caminos $a \rightarrow b$, arco disjuntos dos a dos.

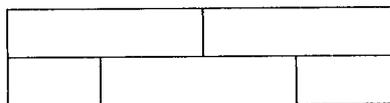
3-21) Pruebe que un grafo es euleriano si y sólo si sus aristas se pueden orientar de manera que el digrafo resultante sea euleriano.

3-22) Vea que cualquiera sea el multigrafo G , con el agregado de a lo sumo un vértice y un número adecuado de aristas se obtiene un multigrafo euleriano que contiene G .

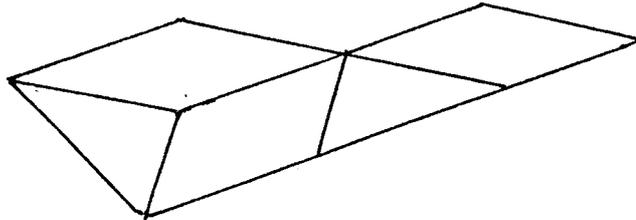
3-23) Suponga tener un patio rectangular con baldosas negras y baldosas blancas.

Puede dar alguna condición de suficiencia que le permita asegurar que será posible, partiendo de una baldosa blanca, retornar a la misma, pasando de una a otra de sus adyacentes (es decir, con un lado común), empleando solamente baldosas blancas y a lo sumo una vez cada una de ellas.

3-24) Recorra a la construcción de un multigrafo adecuado y al teorema de Euler para demostrar que no es posible trazar una curva continua que corte exactamente una vez cada uno de los 16 segmentos de la siguiente figura.



- 3-25) Un grafo euleriano G se dice *aleatoriamente euleriano desde x* si toda cadena simple con extremo inicial x puede extenderse a una cadena euleriana cerrada. Pruebe que G es aleatoriamente euleriano si y sólo si todo ciclo de G incide en x .
- 3-26) Determine, aplicando el algoritmo dado, las distancias del vértice A a todos los restantes del siguiente grafo.



Verifique el resultado recurriendo a la correspondiente matriz de adyacencia.

- 3-27) Se dice *diámetro* de G a la mayor de las distancias que separan sus pares de vértices. Muestre que si G tiene diámetro mayor que tres, su complemento tiene diámetro menor que tres.
- 3-28) Vea que el número mínimo de cadenas simples, sin aristas comunes, necesarias para cubrir todas las aristas de un grafo cúbico de orden n , es $n/2$.
- 3-29) Vea que las veintiocho fichas del dominó pueden colocarse una tras respetando las reglas del juego; es decir, de forma que las mitades contiguas contengan igual cantidad de puntos.
Si se retiran las siete fichas que contienen en una de sus mitades seis puntos, también será posible colocar las restantes fichas respetando la regla precedente?
- 3-30) Resuelva, con conceptos de la teoría de grafos, los siguientes entretenimientos
- Tres misioneros y dos caníbales deben cruzar un río en un bote que puede llevar, a lo sumo, a dos personas. Como debe organizarse el traslado de manera que en ningún momento ni lugar los caníbales superen en número a los misioneros, excepto si el número de éstos presentes es nulo.

- Usando su carro, un granjero tiene que llevar a la ciudad dos toros y tres ovejas. El camino hacia la ciudad es barranca abajo y en ese sentido puede transportar hasta dos animales por vez; en el sentido contrario sólo puede llevar un animal. Se supone que si el granjero no está presente el número de ovejas debe ser nulo o bien superior al de toros. Vea que es posible efectuar el traslado a la ciudad, pero que no sería posible hacerlo hacia la granja.

BIBLIOGRAFIA

A

- A-6 **Arditti, J.C.** : *Hamiltonisme et pancyclisme dans les graphes de comparabilité d'arbres orientés.*
Cahier Centre Etudes Rech. Opér. 15 Nro.3 (1973), 265/284. Zb.268 # 05119.

B

- B-1 **Busacker, R.G. and Saaty, T.L.** : *Finite graphs and networks. An introduction with applications.*
Mc. Graw Hill Co. (1965). M.R. 35 # 79. Zb. 146 pg.201
- B-3 **Berge, C.** : *Théorie des graphes et ses applications.* Dunod (1958-63-67). M.R.21 # 1608.
The theory of graphs and its applications. Methuen Co. (1962). M.R. 24A # 2381.
Teoría de las redes y sus aplicaciones. C.E.C.S.A. (1967))
- B-4 **Berge, C.** : *Graphes et Hypergraphes.* Dunod. (1970-73). M.R. 50 # 9639/41. Zb. 213 pg. 257.
Graphs and hypergraphs. North Holland (1973-76). M.R. 50 # 9640. Zb. 254 # 05101.
- B-5 **Bondy, J.A. and Murty, U.S.R.** : *Graph theory with applications.* Amer. Elsevier (1976).
M.R. 54 # 117.
- B-12 **Bermond, J.C. and Thomassen, C.** : *Cycles in digraphs, a survey.* J. Graph Theory 5
(1981), 1/43. M.R. 82k # 05053. Zb. 458 # 05035.
- B-17 **Bondy, J.A. and Simonovitz, M** : *Cycles of even length in graphs.* J. Comb. Th. B-16 (1974),
97/105. Zb. 283 # 05108.
- B-18 **Bollobás, R.**: *Extremal graph theory.* Academic Press (1978). M.R. 80a # 05120. Zb.419 # 05031
- B-19 **Bondy, J.A.** : *Pancyclic graphs.* Proc. Second Louisiana Conference on Combinatorics, Graph
Theory and Computing (1971), 167/172. M.R. 48 # 3805.
- B-20 **Bondy, J.A. and Halberstam, F.Y.** : *Parity theorems for paths and cycles in graphs.*
J. Graph Theory 10 (1986), 107/115. M.R. 87f # 05097. Zb. 594 # 05041.
- B-21 **Bondy, J.A.** : *Kotzig's conjecture on generalized friendship graphs, a survey.* Cycles in graphs.
Proc.Simon Frazer Univ 1982. Ann. Discrete Math 27 (1985), 351/366. Zb. 553 # 05036.
- B-22 **Bellman, R., Cooke, K. and Lockett, J.** : *Algoritms, graphs and computers.* Acad. Press. 1970.
- B-23 **Bender, E.A. , Richmond, L.B. , Robinson, R.W. and Wormald, N.C.** : *The asymptotic number
of acyclic digraphs I.* Combinatorica 6 (1986) 15/22. M.R. 87m # 05102 Zb. 601 # 05025
- B-24 **Bender, E.A. and Robinson, R.W.** : *The asymptotic number of acyclic digraphs II.*
J. Comb. Th. Ser. B 44 (1988), 363/369. M.R.90a 05098. Zb. 654 # 05035.
- B-25 **Bender, E.A. , Canfield, E.R. and Mc Kay, B.D.** : *The asymptotic number of labelled weakly-
connected digraphs with a given number of vertices and edges.*
Australas J. Combin. 6 (1992), 119/124. M.R. 93h # 05091. Zb. 771 # 05087.

- B-26 **Bermond, J.C. , Sotteau, D. , Germa, A. et Heydemann, M.C. :** *Chemins et circuits dans les graphes orientés.* Ann. Discrete Math. 8 (1980), 293/309. M.R. 82g # 05056.
Zb. 453 # 05053.
- B-27 **Bondy, J.A. , Hartman, I.B. and Locke, S.C. :** *A new proof of a theorem of Dirac.*
Congr. Numer. 32 (1981), 131/136. M.R. 84c # 05055. Zb. 498 # 05043.
- B-28 **Bondy, J.A. :** *Large cycles in graphs.* Discrete Math. 1 (1971), 121/132.
M.R. 44 # 3903. Zb. 224 # 05120.
- B-29 **Bondy, J.A. :** *Pancyclic graphs I.* J. Comb. Theory Ser. B 11 (1971), 80/84.
M.R. 44 # 2642. Zb. 183 pg. 523.
- B-30 **Bauer, D and Schmeichel, E. :** *Hamiltonian degree conditions which imply a graph is pancyclic.*
J. Comb. Th. Ser. B 48 (1990), 111/116. M.R. 91m # 05126. Zb. 698 # 05047.
- B-31 **Bondy, J.A. :** *Cycles in graphs.* Comb. Struc. Appl. Calgary Inst. Conf. 1969 (1970), 15/18.
Zb. 253 # 05140.
- B-32 **Bermond, J.C. et Rosenstiehl, P. :** *Pancyclisme du carré du graphe aux arêtes d'un graphe.*
Cahiers Centre Etudes Rech. Opérat. 15-3 (1973), 285/286.
- B-33 **Bondy, J.A. :** *Pancyclic graphs, recent results.* Infinite-finite sets. Colloq. Math. Soc. J. Bolyai
10 (1975), 181/188. Zb. 324 # 05115.
- B-34 **Bondy, J.A. and Ingleton, A.V. :** *Pancyclic graphs II.* J. Comb. Th. Ser. B 20 (1976), 21/46.
Zb. 294 # 05121.
- B-35 **Benhocine, A and Wojda, A.P. :** *The Geng-Hua Fan conditions for pancyclic or Hamilton connected graphs.* J. Comb. Th. Ser. B 42 (1987), 167/180. Zb. 613 # 05038.
- B-36 **Bauer, D and Schmeichel, E. :** *Sufficient conditions for a graph to be pancyclic.* Congr.
Numerantium 64 (1988), 211/214. Zb. 675 # 05043.
- B-37 **Bondy, J.A. and Thomassen, C. :** *A short proof of Meyniel's theorem.* Discrete Math. 19 (1977),
195/197. Zb. 368 # 05029.
- B-38 **Benhocine, A. :** *Pancyclism and Meyniel's conditions.* Discrete Math. 58 (1986), 113/120.
M.R. 87g 05136. Zb. 585 # 05008.
- B-39 **Biggs, N.L. and Itoh, T. :** *Graphs with even girth and small excess.* Math. Proc. Cambridge
Philos. Soc. 88 (1980), 1/10. M.R. 82b # 05079. Zb. 441 # 05043.
- B-40 **Bannai, E. and Ito, T. :** *On finite Moore graphs.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA
Math. 20 (1973), 191/208. M.R. 48 # 1971. Zb. 275 # 05121
- B-41 **Biggs, N.L. :** *Girth, valency and excess.*
Linear Algebra Appl. 31 (1980), 55/59. M.R. 82b # 05071. Zb. 442 # 05037.
- B-42 **Biggs, N.L. :** *Excess in vertex-transitive graphs.* Bull. London Math. Soc. 14 (1982), 52/54.
Zb. 484 # 05039.

C

- C-7 **Camion, P.** : *Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets.*
C. R. Acad. Sci. Paris 249 (1959), 2151/52.

CII

- Ch-2 **Chachra, V. ; Ghare, P. and Morre, J. M.** : *Applications of graph theory. Algorithms.*
North Holland (1979).
- Ch-5 **Charatonik, J.J. and Miklos, S.** : *A characterisation of cyclic graphs.* Bull. Acad. Polon. Sci.
Sér. Sci. Math. 30 (1982), 453/455. M.R. 85a # 05052. Zb. 509 # 54038.
- Ch-6 **Chvátal, V. and Szemerédi, E.** : *Short cycles in directed graphs.* J. Comb. Th. Ser. B 35
(1983), 323/327. M.R. 85f # 05065. Zb. 545 # 05038.

D

- D-1 **Deo, N.** : *Graph theory with applications to engineering and computer sciences.*
Prentice Hall (1974). M.R. 50 # 12772. Zb. 285 # 05102.
- D-7 **Dirac, G.A.** : *Some theorems on abstract graphs.* Proc. London Math. Soc. 3 (1952), 69/81.
M.R. 13 pg. 856.
- D-8 **Darbinyan, S. Kh.** : *Pancyclicity of digraphs with the Meyniel condition.*
Studia Sci. Math. Hungar. 20 (1985), 95/117. M.R. 88b # 05088. Zb. 614 # 05025.
- D-9 **Damerell, R.M.** : *On Moore graphs.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 74 (1973), 227/236.
M.R. 47 # 6553. Zb. 262 # 05132.

E

- E-10 **Entringer, R.C. and Schmeichel, E.F.** : *Edge conditions and cycle structure in bipartite graphs.*
Ars Combin. 26 (1988), 229/232. M.R. 89m # 05069. Zb. 676 # 05052.
- E-11 **Erdős, P. ; Rényi, A. and Sós, V.T.** : *On a problem of graph theory.*
Studia Sci. Math. Hungar. 1 (1966), 215/235. M.R. 36 # 6310. Zb. 144 pag. 233.
- E-12 **Esik, Z.** : *On cycles of directed graphs.* Period. Math. Hungar. 19 (1988), 19/23.
M.R. 89e # 05098. Zb. 651 # 05044.
- E-13 **Erdős, P. and Gallai, T.** : *On maximal paths and circuits of graphs.*
Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 10 (1959), 337/356. Zb. 90 pg. 394.

F

- F-4 **Fraenkel, A.S.** : *Economic traversal of labyrinths.* Math. Magazine 43, 3 (1970), 125/130.
Zb. 204 pg. 246.

G

- G-20 **Ghouila-Houri, A.** : *Une condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien.*
C. R. Acad. Sci. Paris 251 (1960), 495/497. M.R. 22A # 5590.

H

- H-2 **Harary, F.**: *Graph theory.* Addison Wesley (1969/72). M.R. 41 # 1566. Zb. 182 pg 577.
- H-5 **Harary, F.; Norman, R.Z. and Cartwright D.**: *Structural models. An introduction to the theory of directed graphs.* J. Wiley & Sons Inc. (1965). M.R. 32 # 2345. Zb. 139 pg. 415.
Modèles structuraux. Introduction à la théorie des graphes orientés. Dunod (1968).
Zb. 176 pg. 225.
- H-16 **Hammer, P.L. et Rudeanu, S.** *Boolean methods in operations research and related areas.*
Springer-Verlag (1968). M.R. 38 # 4132. Zb. 155 pg. 280.
Méthodes booléennes en recherche opérationnelle. Dunod (1970). M.R. 41 #05035.
Zb. 214 pg.186.
- H-23 **Higman, G.** : *Simple groups and combinatorial theory.* (Charla dada en Conf. on Combinatorial Mathematics). Math. Inst. Oxford Univ. July 1969.
- H-24 **Horowitz, E. and Sahni, S.** : *Fundamentals of data structure.* Computer Science Press Inc. (1976)
- H-25 **Heydemann, M.C. and Solteau, D.** : *Numbers of arcs and cycles in digraphs.*
Discrete Math. 52 (1984), 199/207. M.R. 86e # 05048. Zb. 548 # 05030.
- H-26 **Hendry, G.R.T.** : *An Ore-type sufficient condition for a bipancyclic ordering.* Discrete Math. 102 (1992), 47/49. M.R. 93g # 05080. Zb. 766 # 05042.

K

- K-1 **König, D.** : *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.* Akad. Verlagsgesellschaft-Leipzig (1936). M.R. 12 pg. 195. Zb. 13 pg. 2
Reimpreso por Chelsea (1950), y por Teubner-Verlagsgesellschaft-Leipzig(1986).
Theory of finite and infinite graphs. Birkhäuser-Boston (1977). M.R. 91f # 01026.
- K-5 **Kaufmann, A.** : *Introduction à la combinatoire en vue des applications.*
Dunod (1968). M.R. 51 # 10109. Zb. 169 pág. 18.
Graphs, dynamic programming and finite games. Acad. Press (1967).
Introducción a la combinatoria y sus aplicaciones. C.E.C.S.A. (1971).
- K-7 **Kaufmann, A.** : *Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle. (Tomes 1,2,3).*
Dunod (1962/64/67). M.R. 34 # 2332; 57 # 18752. Zb. 128 pg 395; 324 # 90001.
Métodos y modelos de la Programación Dinámica. (trad. Tomo 2). C.E.C.S.A.(1966).

- K-14 **Kaufmann, A. et Pichat, E.** : *Méthodes mathématiques non numériques et leurs algorithmes.*
(Vol. I-II). Masson (1977). M.R. 56 # 17190.

L

- L-7 **Lucas, E.** : *Récréations Mathématiques.* (1921). nueva edición A. Blanchart, Paris , 1960.
L-8 **Longyear, J.Q. and Parsons, T.D.** : *The friendship theorem.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc.
Ser. A 75 = Indag. Math.34 (1972), 257/262. M.R. 46 # 5169. Zb. 243 # 05006.
L-9 **Lucchesi, C.L.** : *Introdução à teoria dos grafos.* Inst. Mat. Pura e Aplicada-Brasil (1979)
L-10 **Lewin, M.** : *On maximal circuits in directed graphs.* J. Comb. Th. Ser. B 18 (1975),
175/179. Zb. 297 # 05119.

M

- M-1 **Marshall, C.W.** : *Applied graph theory.* J. Wiley (1971). M.R. 48 # 1951. Zb. 226 # 05101.
M-6 **Maghout, K.**: *Applications de l'algèbre de Boole à la théorie des graphes et aux programmes
linéaires et quadratiques.* Cahiers Centre Etudes Rech. Opérat. Vol.5, Nro. 1-2
(1963), 21/99. M.R. 28 # 1985. Zb. 114 pg. 121.
M-16 **Marimont, R.B.** : *Applications of graphs and boolean matrices to computer programming.*
SIAM Review 2 (1960) 259/268.
M-17 **Marimont, R.B.**: *A new method of checking the consistency of precedence matrices.*
J. Assoc. Comput. Mach. 6-2 (1959), 164/171.
M-18 **Mateti, P. and Deo, N.** : *On algorithms for finding all circuits of a graph.* UIUCDCS-R- 73-585,
Urbana, Univ of Illinois, Dept. of Computer Science (1973), 1/36. Zb. 297 # 05136.
M-19 **Mateti, P. and Deo, N.** : *On algorithms for enumerating all circuits of a graph.* SIAM J.
Comput. 5 (1976), 90/99. M.R. 52 # 16106. Zb. 331 # 05115.
M-20 **Mitchem, J and Schmeichel, E.** : *Pancyclic and bipancyclic graphs. A survey.* Graphs and
applications. Proc. First Symp. Boulden. 1982 (Edit. F. Harary- J.S. Maybee).
J. Wiley (1985), 271/278. M.R. 86c # 05085. Zb. 566 # 05043.
M-21 **Manvel, B. and Weinstein, J.M.** : *Nearly acyclic graph are reconstructible.*
J. Graph Theory 2 (1978), 25/39. M.R. 58 # 5407. Zb. 379 # 05043.
M-22 **Monien, B.** : *The complexity of determining a shortest cycle of even length.* Proc. 8th. Conf.
Neunkirchen (1982), 195/208. Zb. 549 # 68065.
M-23 **Monien, B.** : *The complexity of determining a paths of length k.* Proc. Workshop Osnabrück
(1983), 241/251. Zb. 549 #6806.
M-24 **Monien, B.** : *The complexity of determining a shortest cycle of even length.* Computing 31
(1983), 355/369. Zb. 516 #68041.

- M-25 **Marcu, D.** : *Some results concerning the even cycles of a connected digraph.*
 Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 26 (1981), 24/28. Zb. 479 # 05032.
- M-26 **Marcu, D.** : *On the even elementary circuits and cycles of a digraph.*
 Bul. Inst. Politech. Bucur. 44 (1982), 21/26. Zb. 509 # 05049.
- M-27 **Meyniel, M.** : *Une condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien dans un graphe orienté.* J. Comb. Th. Ser. B 14 (1973), 137/147. Zb. 259 # 05114.

O

- O-2 **Ore, O.** : *Theory of graphs.* Amer. Math. Soc. Colloquium Publications. Vol. 38 (1962).
 M.R. 27 pg. 740. Zb. 105 pg 354.
- O-3 **Ore, O.** : *An excursion into labyrinths.* Mathematics Teacher 52 (1959), 367/370.
- O-4 **Ore, O.** : *Note on hamilton circuits.* Amer. Math. Monthly 67 (1960), 55 .
 M.R. 22 # 9454. Zb. 89 pg. 395.
- O-5 **Overbeck-Larisch, M.** : *A theorem on pancyclic-oriented graphs.*
 J. Comb. Theory Ser. B 23 (1977), 168/173. M.R. 57 # 2976. Zb. 395 # 05041.

R

- R-1 **Roy, B.** : *Algèbre moderne et théorie des graphes. Vol I -II.* Dunod (1969/70).
 M.R. 40 # 4159, 41 # 5039 Zb. 238 # 90072/73.
- R-18 **Rosenstichl, P.:** *Labyrinthologie mathématique.* Math. Sci. Humaines Nro. 33 (1971), 5/32.
 M.R. 47 # 4826. Zb. 228 #05127.
- R-19 **Rosenstichl, P.:** *Les mots de labyrinthe.* Cahiers Centre Etudes Rech. Opérat. 15 Nro.3, (1973),
 245/252. M.R. 50 # 4384. Zb. 273 # 05128.
- R-20 **Rouse-Ball, W.W. (revisado por Coxeter H.S.M.) :** *Mathematical recreations and problems.*
 London, 1892. entre otras ediciones posteriores Mc. Millan (1963).
- R-21 **Rodionov, V.I.** : *On the number of labeled acyclic digraphs.*
 Discrete Math. 105 (1992), 319/321. M.R. 93h # 05094. Zb. 761 # 05050.

S

- S-1 **Sahni, S.** : *Concepts in discrete mathematics.* The Camelot Publishing (1981).
- S-2 **Swamy, M.N.S. and Thulasiraman, K.:** *Graphs, networks and algorithms.* J.Wiley (1981/92).
 M.R. 82j # 94030; 93f # 05002. Zb. 528 # 94034.
- S-10 **Schmeichel, E. F. and Hakimi, S.L. :** *Pancyclic graphs and a conjecture of Bondy and Chvátal.*
 J. Comb. Th. Ser. B 17 (1974), 22/34. M.R. 55 # 10323. Zb. 268 # 05120.

- S-11 **Schmeichel, E. F. and Mitchem, J.** : *Bipartite graphs with cycles of all even lengths.*
 J. Graph Theory 6 (1982), 429/439. M.R. 84j # 05072. Zb. 502 # 05036.
- S-12 **Song, Z.M.** : *Number of arcs and longest cycles in digraphs.* J. Southeast Univ. 19 (1989),
 74/80. M.R. 91a # 05050. Zb. 706 # 05024.
- S-13 **Schmeichel, E. F. and Hakimi, S.L.** : *A cycle structure theorem for Hamiltonian graphs.*
 J. Combinat. Theory Ser. B 45 (1988), 99/107. M.R. 89j # 05051. Zb. 639 # 05035.

T

- T-1 **Toranzos, F. A.** : *Introduction a la Teoría de Grafos.*
 Monografías O.E.A. Serie de Matemática, Nro. 15. (1976).
- T-7 **Tomescu, I.** : *Sur l'algorithme matriciel de B. Roy .* Rev. Franc. Inform. Rech. Opérat.
 2ème. Nro.7 (1968), 87/91. M.R. 38 # 1041. Zb. 179 pág. 293.
- T-8 **Tomescu, I.** : *Méthode pour la détermination de la fermeture transitive d'un graphe fini.*
 Rev. Franc. Inform. Rech. Opérat. 1er-Nro.4 (1967), 33/37. M.R. 36 # 05020.
 Zb. 179 pág. 293.
- T-11 **Tsuchiya, M.** : *Another proof of Béla Bollobás' theorem on edge disjoint cycles.*
 Proc. Fac. Sci. Tokai Univ. 18 (1983) 29/40. M.R. 85e # 05109. Zb. 543 # 05039.
- T-12 **Tarry, G.** : *Le problème des labyrinthes.* Nouvelles Annales de Mathématiques, XIV, (1895)
- T-13 **Trakhtenbrot, B. A.** : *Algorithmes et machines à calculer.* Monographies Dunod (1963).
Algorithms and automatic computing machines. Heath (1966).
- T-14 **Thomassen, C.** : *Paths, circuits and subdivisions.* Selected Topics in Graph Theory.3
 (Edit. Beineke, L.W. and Wilson, R.J.). Acad. Press (1988), 97/131. Zb. 659 # 05062.
- T-15 **Thomassen, C.** : *Even cycles in directed graphs.* European J. Combin. 6 (1985), 85/89.
 M.R. 86i # 05098. Zb. 606 # 05039.
- T-16 **Thomassen, C.** : *The even cycle problem for directed graphs.*
 J. Amer. Math. Soc. 5 (1992), 217/229. M.R. 93b # 05064. Zb. 760 # 05051.
- T-17 **Thomassen, C.** : *On digraphs with no two disjoint directed cycles.*
 Combinatorica 7 (1987), 145/150. M.R. 88g # 05067. Zb. 628 # 05034.
- T-18 **Thomassen, C.** : *Disjoint cycles in digraphs.* Combinatorica 3 (1983), 393/396.
 M.R. 85e # 05087. Zb. 527 # 05036.
- T-19 **Thomassen, C.** : *An Ore-type condition implying a digraph to be pancyclic.*
 Discrete Math. 19 (1977), 85/92. Zb. 361 # 05034.

V

- V-2 **Voss, H.J.** : *Cycles and bridges in graphs.* Kluwer Acad. Publ. (1991).
 M.R. 92m # 05118. Zb. 731 # 05031.

V-3 **Voss, H.J.** : *On longest cycles in graph with minimum degree.* Graphentheorie und ihre Anwendungen. Pad. Hochsch., Dresden (1988), 65/68. M.R. 90d # 05147.

W

W-2 **Wilson, R. J. and Beineke, L. W.** (Edit) : *Applications of graph theory.* Acad. Press (1979).
M.R. 81h # 05050. Zb. 426 # 00006.

W-8 **Wilf, H. S.** : *The friendship theorem.* Combinatorial Mathematics and its applications.
(Edit. D.J.A. Welsh). Acad. Press. (1971), 307/309. M.R. 44 # 91. Zb.226 # 05002.

W-9 **Wiener, C.** : *Uber eine Aufgabe aus der Geometria situs.* Math. Ann. 6 (1873), 29/30.

W-10 **Woodall, D.R.** : *Sufficient conditions for circuits in graphs.* Proc. London Math. Soc.
Third Series Vol. XXIV, (1972), 739/755. Zb. 233 # 90004.

Z

Z-4 **Zikan, K. and Schmeichel, E.** : *A path counting problem in digraphs.*

Fibonacci Quart. 23 (1985), 3/6. M.R. 86e # 05053. Zb. 551 # 05042.

Z-5 **Zelinka, B.** : *Nearly acyclic digraphs.* Czechoslovak Math. J. 33 -108- (1983), 164/165.

M.R. 85e # 05088. Zb. 515 # 05034.