# INFORME TÉCNICO INTERNO

## N° 53

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 1996 -

# INFORME TÉCNICO INTERNO N° 53

# Conjuntos de generadores libres finitos

L. MONTEIRO, M. ABAD, S.SAVINI y J. SEWALD



INMABB

CONICET - UNS

AÑO 1996

# Conjuntos de generadores libres finitos

Luiz F. Monteiro, Manuel Abad, Sonia Savini y Julio Sewald

INMABB-UNS-CONICET y Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur - Bahía Blanca - Argentina

**Abstract**

En este trabajo determinamos el número de conjuntos de generadores libres con $q$ elementos para álgebras libres en las variedades de las álgebras de Boole, álgebras de Łukasiewicz trivalentes, $(0,1)-$reticulados distributivos y álgebras de De Morgan. Para las variedades de las álgebras de Boole, álgebras de Łukasiewicz trivalentes y álgebras de Post damos una construcción explícita de un conjunto de generadores libres finito.

## 1 Introducción

En esta sección fijamos las notaciones y demostramos algunos resultados que serán necesarios más adelante.
Si $X$ es un conjunto finito con $n$ elementos, notaremos $N[X] = n$.

Sea $(L, \wedge, \vee, 0)$ un reticulado con primer elemento 0, $X \subseteq L$ y $N[X] = t$, definimos:

$$\mathrm{s}_0(X) = \{0\}\ , \qquad \mathrm{s}_1(X) = X,$$

$$\mathrm{s}_j(X) = \{\bigvee y : y \in Y,\ \ Y \subseteq X, N[Y] = j\},\ \ 1 < j \leq t,$$

$$\mathrm{s}(X) = \bigcup_{j=0}^{t} \mathrm{s}_j(X).$$

Si $x \in L$, notaremos $F(x) = \{y \in L : x \leq y\}$ e $I(x) = \{z \in L : z \leq x\}$, que son, respectivamente, un filtro y un ideal de L.

Un álgebra $(B, \{f_t\}_{t \in T})$ se notará, para abreviar, simplemente $B$. En estas notas, salvo indicación en contrario, sólo consideraremos *álgebras finitas no triviales*, esto es finitas y con más de un elemento. Si $B$ es un álgebra de Boole, notaremos con $\mathcal{A}(B)$ al conjunto de todos los átomos de $B$. Si $x \in B$, $x \neq 0$, sea $\mathcal{A}(x) = \{a \in \mathcal{A}(B) : a \leq x\}$, es bien conocido que $x = \bigvee\{a : a \in \mathcal{A}(x)\}$.

**Lema 1.1** *Si $B$ es un álgebra de Boole finita no trivial, $\mathcal{A}(B) = \{a_0, a_1, \ldots, a_s\}$ entonces:*

*1) $B - F(a) = I(-a)$, cualquiera que sea $a \in \mathcal{A}(B)$.*

*2) $F(x) \cap F(y) = F(x \vee y)$, cualesquiera sean $x, y \in B$.*

*3)* $I(x) \cap I(y) = I(x \wedge y)$*, cualesquiera sean* $x, y \in B$.

*4) Si* $\{V, W\}$ *es una bipartición del conjunto* $\{0, 1, \dots, s\}$ *entonces* $\bigcap_{v \in V} F(a_v) \cap \bigcap_{w \in W} (B - F(a_w)) = \{\bigvee_{v \in V} a_v\}$.

**Dem.** Las propiedades 1), 2) y 3) son bien conocidas. Como $\{V, W\}$ es una bipartición de $\{0, 1, \dots, s\}$ entonces (i) $-\bigvee_{w \in W} a_w = \bigvee_{v \in V} a_v$. Aplicando sucesivamente 2) y 1), 3) e (i) podemos escribir $\bigcap_{v \in V} F(a_v) \cap \bigcap_{w \in W} (B - F(a_w)) = F(\bigvee_{v \in V} a_v) \cap \bigcap_{w \in W} I(-a_w) = F(\bigvee_{v \in V} a_v)$ $\cap I(\bigwedge_{w \in W} -a_w) = F(\bigvee_{v \in V} a_v) \cap I(-\bigvee_{w \in W} a_w) = F(\bigvee_{v \in V} a_v) \cap I(\bigvee_{v \in V} a_v) = \{\bigvee_{v \in V} a_v\}$. $\square$

Sea $\mathbf{N}$ el conjunto de los números naturales y $\mathbf{Z}$ el conjunto de los números enteros. Si $q \in \mathbf{N}$, con $C_q$ notamos al conjunto $\{0, 1, \dots, q-1\} \subseteq \mathbf{Z}$ con el orden inducido por $\mathbf{Z}$. $C_q$ es un reticulado distributivo, y $C_2$ es un álgebra de Boole que notaremos $\mathbf{2}$.

Si $B$ es un álgebra de Boole finita no trivial, sea $B^{C_q}$ el álgebra de Boole de todas las funciones de $C_q$ en $B$. Si $f \in B^{C_q}$ entonces $f = (f_0, f_1, \dots, f_{q-1})$, donde $f_i = f(i) \in B$, $i \in C_q$.

Las operaciones de ínfimo, supremo y negación en $B^{C_q}$ están definidas coordenada a coordenada y las funciones $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ definidas por $\mathbf{0}(i) = 0 \in B$ y $\mathbf{1}(i) = 1 \in B$, para todo $i$ son, respectivamente, el primer y el último elemento. Los átomos de $B^{C_q}$ son las funciones definidas como sigue:

$$f(i) = \begin{cases} a \in \mathcal{A}(B) & \text{si } i = i_0 \\ 0 & \text{si } i \neq i_0 \end{cases}.$$

Entonces $N[\mathcal{A}(B^{C_q})] = N[C_q] \times N[\mathcal{A}(B)] = q \times N[\mathcal{A}(B)]$.

Sea $\mathbf{P}(B, q) = \{(b_0, b_1, \dots, b_{q-1}) : b_i \in \{0, 1\} \subseteq B,\ 0 \leq i \leq q-1\}$. $\mathbf{P}(B, q)$ es un álgebra de Boole isomorfa a $\mathbf{2}^{C_q}$ y $N[\mathcal{A}(\mathbf{P}(B, q))] = q$.

Si $x, y \in B$, pongamos $x + y = (-x \wedge y) \vee (x \wedge -y)$. Es claro que $x + 0 = x$ y $x + 1 = -x$.

Si $G = \{g_1, g_2, \dots, g_q\} \subseteq B$ y $b \in \mathbf{P}(B, q)$ notaremos con $m_b(G)$ o más sencillamente $m_b$ al elemento

$$\bigwedge_{i=1}^{q} (g_i + b_{i-1}).$$

Observemos que de acuerdo con la definición precedente $g_i + b_{i-1} = g_i$ o $g_i + b_{i-1} = -g_i$.

**Observación 1.1** *Si* $b \in \mathbf{P}(B, q)$, *sean* $Q_0(b) = \{h \in C_q : b_h = 0\}$ *y* $Q_1(b) = C_q - Q_0(b)$, *luego si* $N[Q_0(b)] = k$, *donde* $0 \leq k \leq q$, *entonces* $N[Q_1(b)] = q - k$.

*Observemos que si* $Q_0(b) = \emptyset$ *entonces* $b = \mathbf{1}$, *luego* $m_b = \bigwedge_{i=1}^{q} -g_i$. *Si* $Q_1(b) = \emptyset$ *entonces* $b = \mathbf{0}$ *y* $m_b = \bigwedge_{i=1}^{q} g_i$. *Si* $Q_0(b) \neq \emptyset$ *y* $Q_1(b) \neq \emptyset$, *entonces* $m_b = \bigwedge\{g_i : i \in Q_0(b)\} \wedge \bigwedge\{-g_i : i \in Q_1(b)\}$.

Sea $m(G) = \{m_b : b \in \mathbf{P}(B, q)\}$, como $N[\mathbf{P}(B, q)] = 2^q$ entonces $N[m(G)] \leq 2^q$.

**Lema 1.2** *1) Si* $b, c \in \mathbf{P}(B, q)$ *y* $b \neq c$ *entonces* $m_b \wedge m_c = 0$.

*2)* $\bigvee\{m_b : b \in \mathbf{P}(B,q)\} = 1$ .

*3) Si* $b, c \in \mathbf{P}(B,q)$, $b \neq c$ *y* $m_b \leq m_c$ *entonces* $m_b = 0$. [9]

Si $G$ es un subconjunto del álgebra de Boole $B$, notaremos con $BS(G)$ la subálgebra booleana de $B$ generada por $G$. Es claro que $BS(\emptyset) = \{0, 1\}$.

**Lema 1.3** *Si $G$ es un subconjunto con $q$ elementos de un álgebra de Boole $B$, entonces:*

*a)* $BS(G) = \mathrm{s}(m(G))$.

*b)* $\mathcal{A}(BS(G)) = \{m_b : m_b \in m(G), m_b \neq 0\}$.

Luego $N[\mathcal{A}(BS(G))] \leq N[m(G)] \leq 2^q$ y por lo tanto $N[BS(G)] \leq 2^{2^q}$.

**Observación 1.2** *Si $B$ es un álgebra de Boole con un conjunto $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_q\}$ de generadores libres, entonces $m_b \neq 0$, para todo $m_b \in m(G)$, ya que $B$ tiene $2^q$ átomos.*

**Lema 1.4** *Si $B$ es un álgebra de Boole y $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_q\} \subseteq B$ entonces $BS(G) = BS(m(G))$.*

# 2 Algebras libres finitas

Sea $\mathcal{K}$ la clase de álgebras tal que existe y es finita el álgebra $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{K}}(q)$ con un conjunto $G$ de generadores libres, $N[G] = q$. Sea $Aut(\mathcal{F})$ el conjunto de todos los automorfismos de $\mathcal{F}$. Si $X$ es un subconjunto de un álgebra $A \in \mathcal{K}$, notaremos con $S(X)$ la subálgebra de $A$ generada por $X$.

**Lema 2.1** *Si $A, A'$ son álgebras, $h : A \longrightarrow A'$ un homomorfismo, $G \subseteq A$ tal que $S(G) = A$ entonces $S(h(G)) = h(A)$.*

Sea $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_q\}$ un conjunto fijo de generadores libres de $\mathcal{F}$.

**Lema 2.2** *Si $\alpha \in Aut(\mathcal{F})$, entonces $\alpha(G)$ es un conjunto de generadores libres de $\mathcal{F}$.*

**Dem.** Como $\alpha$ es una función biyectiva, $\alpha(G)$ tiene $q$ elementos. Además teniendo en cuenta el lema 2.1 tenemos $\mathcal{F} = \alpha(\mathcal{F}) = S(\alpha(G))$, luego $\alpha(G)$ es un conjunto de generadores de $\mathcal{F}$.

Si $X$ es un álgebra de $\mathcal{K}$ y $f$ una función de $\alpha(G)$ en $X$, $s = f \circ \alpha$ es una función de $G$ en $X$. Luego existe un único homomorfismo $H_s : \mathcal{F} \longrightarrow X$, tal que $H_s(g) = s(g)$, para todo $g \in G$. Como $\alpha^{-1} \in Aut(\mathcal{F})$ entonces $H_s \circ \alpha^{-1}$ es un homomorfismo de $\mathcal{F}$ en $X$ tal que $(H_s \circ \alpha^{-1})(\alpha(g)) = H_s(\alpha^{-1}(\alpha(g))) = H_s(g) = s(g) = (f \circ \alpha)(g) = f(\alpha(g))$, para todo $g \in G$ y por lo tanto $\alpha(G)$ es un conjunto de generadores libres de $\mathcal{F}$. $\square$

**Lema 2.3** *Si $Y$ es un subconjunto de $\mathcal{F}$ con $q$ elementos, tal que $S(Y) = \mathcal{F}$, entonces $Y$ es un conjunto de generadores libres de $\mathcal{F}$ y existe $\alpha \in Aut(\mathcal{F})$ tal que $\alpha(Y) = G$.*

**Dem.** Por hipótesis existe una función biyectiva $f : G \longrightarrow Y$, luego existe un único homomorfismo $H_f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ tal que $H_f(g) = f(g)$, para todo $g \in G$.

Como $H_f(\mathcal{F}) = S(H_f(G)) = S(f(G)) = S(Y) = \mathcal{F}$, entonces $H_f$ es una función suryectiva y como $\mathcal{F}$ es finita, es biyectiva, luego $H_f \in Aut(\mathcal{F})$ y $H_f(G) = Y$, entonces por el lema 2.2, $Y$ es un conjunto de generadores libres de $\mathcal{F}$. Además $\alpha = H_f^{-1} \in Aut(\mathcal{F})$ y $\alpha(Y) = H_f^{-1}(Y) = f^{-1}(Y) = G$. □

Sean

$$\mathcal{U}(G) = \{\alpha(G) : \alpha \in Aut(\mathcal{F})\}$$

y

$$\mathcal{V}(q) = \{V : V \subseteq \mathcal{F}, N[V] = q \text{ y } S(V) = \mathcal{F}\}.$$

Por los lemas 2.2, 2.3 tenemos:

$$\mathcal{U}(G) = \mathcal{V}(q).$$

Sea $\mathcal{V}(q) = \{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$ y $W_i = \{\alpha \in Aut(\mathcal{F}) : \alpha(G) = V_i\}$, $1 \leq i \leq r$.

Sea $V_i \in \mathcal{V}(q), 1 \leq i \leq r$. Existen $q!$ funciones biyectivas de $G \longrightarrow V_i$ y por lo tanto $q!$ automorfismos $\alpha_i$ de $\mathcal{F}$ tales que $\alpha_i(G) = V_i$.

Cada función biyectiva $f : G \longrightarrow V_i$ se puede extender a un automorfismo $H_f$ de $\mathcal{F}$ y si $f_1, f_2$ son biyecciones diferentes de $G$ sobre $V_i$, entonces $H_{f_1}, H_{f_2} \in Aut(\mathcal{F})$ también son diferentes. Además si $\alpha \in W_i$ entonces $f$, la restricción de $\alpha$ a $G$, es una biyección de $G$ sobre $V_i$ y $H_f = \alpha$. Luego

$$N[W_i] = q!\,.$$

Observemos que $\{W_i : 1 \leq i \leq r\}$ es una partición del conjunto $Aut(\mathcal{F}$. En efecto, todos los subconjuntos $W_i$ son no vacíos. Si $\alpha \in W_i \cap W_j$, donde $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq r$, resulta $V_i = V_j$, con $i \neq j$, contradicción. Como $W_i \subseteq Aut(\mathcal{F})$, $1 \leq i \leq r$, entonces $\bigcup_{i=1}^{r} W_i \subseteq Aut(\mathcal{F})$. Si $\alpha \in Aut(\mathcal{F})$ entonces $\alpha(G)$ es un subconjunto de $\mathcal{F}$ con $q$ elementos tal que $S(\alpha(G)) = \mathcal{F}$, luego $\alpha(G) = V_i$, para algún $i, 1 \leq i \leq r$, entonces $Aut(\mathcal{F}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} W_i$.
Luego tenemos :

$$N[Aut(\mathcal{F})] = \sum_{i=1}^{r} N[W_i] = \sum_{i=1}^{r} q! = r.q!$$

y por lo tanto

**Teorema 2.1** *El número de conjuntos de generadores libres para $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{K}}(q)$ es*

$$r = \frac{N[Aut(\mathcal{F})]}{q!}.$$

# 3 Algebras de Boole libres

Notaremos con $FB(q)$ el álgebra de Boole con un conjunto $G$ de generadores libres, tal que $N[G] = q$ y con $Aut(FB(q))$ el conjunto de todos los automorfismos de $FB(q)$.

Es bien conocido que $N[Aut(FB(q))] = (2^q)!$, luego el número de subconjuntos de $FB(q)$ que generan libremente a $FB(q)$ es

$$\frac{(2^q)!}{q!}.$$

En esta sección indicaremos una construcción de un conjunto de generadores libres para $FB(q)$. En [2], pag. 176, se indica como obtener $FB(q)$ y un conjunto de generadores libres de $FB(q)$. Nuestro método es diferente.

Todo elemento $x \in C_{2^q}$ se puede escribir como $x = \sum_{i=0}^{q-1} x_i \cdot 2^i$, donde $x_i \in \{0,1\} \subset \mathbf{Z}$. Si $x, y \in C_{2^q}$, pongamos por definición :

$$x \sqcap y = \sum_{i=0}^{q-1} (min\{x_i, y_i\}) \cdot 2^i$$

$$x \sqcup y = \sum_{i=0}^{q-1} (max\{x_i, y_i\}) \cdot 2^i$$

$$\sim x = (2^q - 1) - x.$$

Si $f \in \mathbf{2}^{C_q}$, entonces :

$$n_q(f) = \sum_{i=0}^{q-1} f_i \cdot 2^i,$$

define una función biyectiva de $\mathbf{2}^{C_q}$ en $C_{2^q}$. Observemos que :

$$n_q(\mathbf{0}) = 0 \qquad ; \qquad n_q(\mathbf{1}) = 2^q - 1,$$

$$n_q(f \wedge h) = \sum_{i=0}^{q-1} (min\{f_i, h_i\}) \cdot 2^i = n_q(f) \sqcap n_q(h).$$

$$n_q(f \vee h) = \sum_{i=0}^{q-1} (max\{f_i, h_i\}) \cdot 2^i = n_q(f) \sqcup n_q(h)$$

Además si $f \in \mathbf{2}^{C_q}$ las coordenadas del complemento booleano $f'$, de $f$ verifican $f_i + f'_i = 1$, luego $n_q(f) + n_q(f') = \sum_{i=0}^{q-1} f_i \cdot 2^i + \sum_{i=0}^{q-1} f'_i \cdot 2^i = \sum_{i=0}^{q-1} (f_i + f'_i) \cdot 2^i = \sum_{i=0}^{q-1} 2^i = 2^q - 1$ y por lo tanto:

$$n_q(f') = (2^q - 1) - n_q(f) = \sim n_q(f),$$

luego $(C_{2^q}, \sqcap, \sqcup, \sim, 0, 2^q - 1)$ es un álgebra de Boole isomorfa a $(\mathbf{2}^{C_q}, \wedge, \vee, -, \mathbf{0}, \mathbf{1})$.
Designemos con $\sqsubseteq$ a la nueva relación de orden en $C_{2^q}$, esto es: Si $x, y \in C_{2^q}$, $x \sqsubseteq y$ sí y solamente sí $x_i \leq y_i$, para todo $i$, $0 \leq i \leq q-1$. Como tenemos dos relaciones de orden definidas sobre el conjunto $C_{2^q}$, $\leq$ y $\sqsubseteq$, para evitar una excesiva notación convengamos que $\leq$ será adoptado sólo en caso de ser necesario. Observemos que $x \sqsubseteq y$ implica que $x \leq y$, pero que la recíproca no siempre vale.
Los átomos de $(C_{2^q}, \sqsubseteq)$ son los elementos de la forma $2^i$, $0 \leq i \leq q-1$.

El álgebra de Boole $\mathcal{F}(q) = \mathbf{2}^{C_q}$, de todas las funciones de $C_{2^q}$ en $\mathbf{2}$, tiene $2^q$ átomos y por lo tanto es el álgebra de Boole con $q$ generadores libres.
Consideremos los siguientes elementos de $\mathcal{F}(q)$. Para $x \in (C_{2^q}, \sqsubseteq)$,

$$g_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in F(2^{i-1}) \\ 0 & \text{si } x \notin F(2^{i-1}) \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq q.$$

donde $F(2^{i-1}) = \{y \in C_{2^q} : 2^{i-1} \sqsubseteq y\}$.

**Teorema 3.1** *El conjunto $G = \{g_i : 1 \leq i \leq q\}$, es un conjunto de generadores libres de $\mathcal{F}(q)$.*

**Dem.** Sea $\mathbf{P}(\mathcal{F}(q), q) = \{(b_0, b_1, \ldots, b_{q-1}\} : b_i \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}, 0 \leq i \leq q-1\}$.
Designemos con $\mathbf{\Phi}$ y $\mathbf{\Gamma}$ el primer y último elemento del álgebra de Boole $\mathbf{P}(\mathcal{F}(q), q)$.
Sea $b \in \mathbf{P}(\mathcal{F}(q), q)$. Si $b = \mathbf{\Phi}$, por la observación 1.1, $m_{\mathbf{\Phi}} = \bigwedge_{i=1}^{q} g_i$, luego $m_{\mathbf{\Phi}}(0) = 0$, $m_{\mathbf{\Phi}}(2^q - 1) = \bigwedge_{i=1}^{q} g_i(2^q - 1) = 1$ y si $x \neq 0$, $2^q - 1$ existe por lo menos un átomo $2^{i-1}$, donde $1 \leq i \leq q$, de $(C_{2^q}, \sqsubseteq)$ tal que $2^{i-1} \not\sqsubseteq x$, luego $g_i(x) = 0$ y por lo tanto $m_{\mathbf{\Phi}}(x) = 0$.
Si $b = \mathbf{\Gamma}$, entonces $m_{\mathbf{\Gamma}} = \bigwedge_{i=1}^{q} -g_i$, luego $m_{\mathbf{\Gamma}}(0) = \bigwedge_{i=1}^{q} -g_i(0) = -\bigvee_{i=1}^{q} g_i(0) = -0 = 1$ y si $x \neq 0$, existe por lo menos un átomo $2^{i-1}$, donde $1 \leq i \leq q$, de $(C_{2^q}, \sqsubseteq)$ tal que $2^{i-1} \sqsubseteq x$, es decir, $g_i(x) = 1$ y por lo tanto $m_{\mathbf{\Gamma}}(x) = 0$.
Si $b \in \mathbf{P}(\mathcal{F}(q), q) - \{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Phi}\}$, $m_b = \bigwedge\{g_{i+1} : i \in Q_0(b)\} \wedge \bigwedge\{-g_{i+1} : i \in Q_1(b)\}$, luego las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $m_b(x) = \bigwedge\{g_{i+1}(x) : i \in Q_0(b)\} \wedge \bigwedge\{-g_{i+1}(x) : i \in Q_1(b)\} = 1$.

(2) $\bigwedge\{g_{i+1}(x) : i \in Q_0(b)\} = 1$ y $\bigwedge\{-g_{i+1}(x) : i \in Q_1(b)\} = 1$.

(3) $g_{i+1}(x) = 1$ para todo $i \in Q_0(b)$ y $-g_{i+1}(x) = 1$ para todo $i \in Q_1(b)$.

(4) $x \in F(2^i)$ para todo $i \in Q_0(b)$ y $x \notin F(2^i)$ para todo $i \in Q_1(b)$.

Como

$$\bigcap_{i \in Q_0(b)} F(2^i) \cap \bigcap_{i \in Q_1(b)} (C_{2^q} - F(2^i)) = \{\bigsqcup_{i \in Q_0(b)} 2^i\} = \{\sum_{i \in Q_0(b)} 2^i\},$$

entonces $m_b(x) = 0$, para todo $x \neq \bigsqcup_{i \in Q_0(b)} 2^i$. Acabamos así de probar que $m(G) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F}(q))$.
Recíprocamente, para $a \in \mathcal{A}(\mathcal{F}(q))$, y $x \in (C_{2^q}, \sqsubseteq)$

$$a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = t \\ 0 & \text{si } x \neq t \end{cases}.$$

Sea $b = (b_0, b_1, \ldots, b_{q-1})$, donde $b_i = -g_{i+1}(t)$, para $0 \leq i \leq q-1$, entonces $m_b = \bigwedge_{i=1}^{q}(g_i + b_{i-1}) = \bigwedge_{i=1}^{q}(g_i + (-g_i(t)))$, luego $m_b(x) = \bigwedge_{i=1}^{q}(g_i(x) + (-g_i(t)))$ y por lo tanto $m_b(t) = \bigwedge_{i=1}^{q}(g_i(t) + (-g_i(t))) = 1$ y si $x \neq t$, como $x = \sum_{i=0}^{q-1} x_i \cdot 2^i$, $t = \sum_{i=0}^{q-1} t_i \cdot 2^i$, entonces existe $h$, $0 \leq h \leq q-1$, tal que $x_h \neq t_h$, luego (1) $x_h = 0$ y $t_h = 1$ o (2) $x_h = 1$ y $t_h = 0$. Por lo tanto $x_h + t_h = 0 + (-1) = 0 + 0 = 0$ o $x_h + t_h = 1 + (-0) = 1 + 1 = -1 = 0$. Luego si $x \neq t$, $m_b(x) = 0$ y en consecuencia $a = m_b$. Acabamos así de probar que $m(G) = \mathcal{A}(\mathcal{F}(q))$ y por el lema 1.4, $BS(G) = \mathcal{F}(q)$ y como $N[G] = q$, $G$ es un conjunto de generadores libres de $\mathcal{F}(q)$. □

# 4 Algebras de Łukasiewicz trivalentes libres

En esta sección damos el número de conjuntos de generadores libres del álgebra de Łukasiewicz trivalente con $q$ generadores libres. También exhibimos explícitamente un conjunto de generadores libres para esta álgebra.
Para un álgebra de Łukasiewicz trivalente $L$, con $Aut(L)$ notamos al conjunto de todos los automorfismos de $L$ y con $B(L)$ al conjunto de todos los elementos booleanos de $L$. Escribiremos $\mathcal{L} = FL(q)$ para notar al álgebra de Łukasiewicz trivalente con $q$ generadores libres.
Un eje de un álgebra de Łukasiewicz es un elemento $e$ de $L$ con las propiedades: (E1) $\Delta e = 0$ y (E2) $\nabla x \leq \Delta x \vee \nabla e$, para todo $x$ de $L$, [[4], [5], [8]]. Observemos que (E2) es equivalente a $x \leq \Delta x \vee \nabla e$, para todo $x$ de $L$.
A. Monteiro, en un trabajo no publicado, demostró que $\mathcal{L}$ es isomorfa al álgebra $B^{2^q} \times T^{3^q - 2^q}$, de donde se deduce que $B(\mathcal{L})$ es isomorfa al álgebra de Boole $B^{3^q}$. Como $\mathcal{L}$ es finita, tiene eje $e$.

**Proposición 4.1** *Si $L$ es un álgebra de Łukasiewicz trivalente con eje $e$, entonces existe una correspondencia biunívoca del conjunto $Aut(L)$ sobre el conjunto $F$ de todos los automorfismos booleanos $\beta$ de $B(L)$ tales que $\beta(\nabla e) = \nabla e$.*

**Dem.** Si $\alpha \in Aut(L)$ entonces $\alpha(e) = e$, luego $\alpha(\nabla e) = \nabla\alpha(e) = \nabla e$ y es claro que $\beta = \alpha_{|B(L)} \in F$.
Recíprocamente, si $\beta \in F$, definimos para cada $x \in L$:

$$\alpha(x) = (\beta(\Delta x) \vee e) \wedge \beta(\nabla x).$$

Utilizando los resultados indicados en [[7], p. 194] se prueba que $\alpha$ es un homomorfismo de $L$ en $L$.
Si $\alpha(x) = \alpha(y)$ para $x, y \in L$, entonces $\Delta\alpha(x) = \Delta\alpha(y)$ y como $\Delta e = 0$, se obtiene $\beta(\Delta x) \wedge \beta(\nabla x) = \beta(\Delta y) \wedge \beta(\nabla y)$, es decir, $\beta(\Delta x) = \beta(\Delta y)$ y por ser $\beta$ inyectiva resulta (1) $\Delta x = \Delta y$.
Por otro lado $\nabla\alpha(x) = \nabla\alpha(x)$, esto es, $(\beta(\Delta x) \vee \nabla e) \wedge \beta(\nabla x) = (\beta(\Delta y) \vee \nabla e) \wedge \beta(\nabla y)$ y como $\beta(\nabla e) = \nabla e$ entonces $\beta((\Delta x \vee \nabla e) \wedge \nabla x) = \beta((\Delta y \vee \nabla e) \wedge \nabla y)$ y por lo tanto $\beta(\nabla x) = \beta(\nabla y)$, luego (2) $\nabla x = \nabla y$.
De (1) y (2), usando el principio de determinación de Moisil, resulta $x = y$ y $\alpha$ es inyectiva.
Dado $x \in L$, como $\Delta x$, $\nabla x \in B(L)$ y $\beta$ es suryectiva, existen $a$, $b \in B(L)$ tales que $\beta(a) = \Delta x$ y $\beta(b) = \nabla x$ . Observemos que $\beta(a \wedge b) = \Delta x = \beta(a)$, de donde resulta $a \wedge b = a$, esto es, $a \leq b$.
Sea $y = (a \vee e) \wedge b$, luego $\Delta y = a \wedge b = a$, por lo tanto $\beta(\Delta y) = \beta(a) = \Delta x$. Por otra parte $\nabla y = (a \vee \nabla e) \wedge b$, lo que implica que $\beta(\nabla y) = (\Delta x \vee \nabla e) \wedge \nabla x = \nabla x$.
Luego $\alpha(y) = (\beta(\Delta y) \vee e) \wedge \beta(\nabla y) = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x = x$, por lo tanto $\alpha$ es suryectiva.

Acabamos así de probar que $\alpha \in Aut(L)$.
Además si $b \in B(L)$, $\alpha(b) = (\beta(\Delta b) \vee e) \wedge \beta(\nabla b) = (\beta(b) \vee e) \wedge \beta(b) = \beta(b)$, es decir, $\alpha_{|B(L)} = \beta$.
Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in Aut(L)$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, entonces existe $x_0 \in L$ tal que $\alpha_1(x_0) \neq \alpha_2(x_0)$, es claro que $x_0 \neq e$, $\nabla e$, $0$, $1$, luego $\Delta\alpha_1(x_0) \neq \Delta\alpha_2(x_0)$ o $\nabla\alpha_1(x_0) \neq \nabla\alpha_2(x_0)$, es decir, $\alpha_1(\Delta x_0) \neq \alpha_2(\Delta x_0)$ o $\alpha_1(\nabla x_0) \neq \alpha_2(\nabla x_0)$ y como $\Delta x_0$, $\nabla x_0 \in B(L)$ resulta que $\alpha_{1|B(L)} \neq \alpha_{2|B(L)}$.
En particular, si $L$ es finita, $N[Aut(L)] = N[F]$. □

**Corolario 4.1** *El número de conjuntos de generadores libres de $\mathcal{L}$ es*

$$\frac{(3^q - 2^q)!\, 2^q!}{q!}$$

**Dem.** L. Monteiro, en [8], probó que $N[\{a \in \mathcal{A}(B(L)) \ : \ a \leq \nabla e\}] = 3^q - 2^q$, luego $N[F] = (3^q - 2^q)!\, 2^q!$. Entonces de la proposición anterior , $N[Aut(\mathcal{L}] = (3^q - 2^q)!\, 2^q!$.
Aplicando el Teorema 2.1 se concluye el resultado indicado. □
Ahora mostraremos explícitamente un conjunto de generadores libres para $\mathcal{L}$.
Sea $\mathbf{3} = \{0, 1, 2\}$ el álgebra de Łukasiewicz centrada con tres elementos: $0 < 1 < 2$, $\sim 0 = 2$, $\sim 1 = 1$, $\nabla 1 = \nabla 2 = 2$ y $\nabla 0 = 0$. Si $q \in N$, todo elemento $x \in C_{3^q}$ se puede escribir como $x = \sum\limits_{i=0}^{q-1} x_i \cdot 3^i$, donde $0 \leq x_i \leq 2$.

Si $x$, $y \in C_{3^q}$, entonces $x = \sum\limits_{i=0}^{q-1} x_i \cdot 3^i$, $y = \sum\limits_{i=0}^{q-1} y_i \cdot 3^i$. Definimos

$$x \sqcap y = \sum_{i=0}^{q-1} (min\{x_i, y_i\}) \cdot 3^i$$

$$x \sqcup y = \sum_{i=0}^{q-1} (max\{x_i, y_i\}) \cdot 3^i$$

$$\approx x = (3^q - 1) - x$$

$$\boldsymbol{\nabla} x = \sum_{i=0}^{q-1} \nabla x_i \cdot 3^i$$

El conjunto $\mathbf{3}^{C_q}$ de todas las funciones de $C_q$ en $\mathbf{3}$, es un álgebra de Łukasiewicz trivalente cuando se definen las operaciones punto a punto.
Si $f \in \mathbf{3}^{C_q}$ entonces $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{q-1})$, donde $f_i = f(i)$, $0 \leq i \leq q-1$. Definimos $n_q : \mathbf{3}^{C_q} \longrightarrow C_{3^q}$, como sigue:

$$n_q(f) = \sum_{i=0}^{q-1} f_i \cdot 3^i.$$

Es fácil ver que $n_q$ es un isomorfismo. Luego $(C_{3^q}, \sqcap, \sqcup, \approx, \boldsymbol{\nabla}, 0, 3^q - 1)$ es un álgebra de Łukasiewicz trivalente isomorfa a $\mathbf{3}^{C_q}$. La relación de orden en $C_{3^q}$ esta dada por: $x \sqsubseteq y$ si y solo si $x_i \leq y_i$, para todo $i$, $0 \leq i \leq q-1$.
Además, $x \in B(C_{3^q})$ si y solo si $\boldsymbol{\nabla} x = x$, esto es, $\boldsymbol{\nabla}(\sum\limits_{i=0}^{q-1} x_i \cdot 3^i) = \sum\limits_{i=0}^{q-1} \nabla x_i \cdot 3^i = \sum\limits_{i=0}^{q-1} x_i \cdot 3^i$, lo que equivale a decir que $\nabla x_i = x_i$, para todo $i$, $0 \leq i \leq q-1$, es decir, $x_i = 0$ ó $x_i = 2$,

para todo $i$, $0 \leq i \leq q-1$.

Si $R(q) = C_{3^q} - B(C_{3^q})$, entonces $\mathbf{3}^{R(q)}$ es un álgebra de Łukasiewicz trivalente centrada. Consideremos los elementos $t_i \in \mathbf{3}^{R(q)}$, $1 \leq i \leq q$, definidos por:

$$t_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in I(\approx \nabla 3^{i-1}) \\ 1 & \text{si } x \in [3^{i-1}, \approx 3^{i-1}] \\ 2 & \text{si } x \in F(\nabla 3^{i-1}) \end{cases} \quad , \quad x \in R(q).$$

**Lema 4.1** $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_q\}$ *es un conjunto de generadores libres para* $\mathbf{3}^{R(q)}$.

**Dem.** Dado $b \in R(q)$, se tiene que $b = \sum\limits_{i=0}^{q-1} b_i \cdot 3^i$, donde $b_i \in \{0,1,2\}$ y existe al menos un $j$, $0 \leq j \leq q-1$, tal que $b_j = 1$, pues caso contrario $b \in B(C_{3^q})$.
Sea $I_j(b) = \{i : 0 \leq i \leq q-1,\ b_i = j\}$, $0 \leq j \leq 2$. Observemos $I_1(b) \neq \emptyset$, para todo $b \in R(q)$. Sea $M_b = \bigwedge\limits_{j \in I_0(b)} \Delta t_{j+1} \wedge \bigwedge\limits_{h \in I_1(b)} (t_{h+1} \wedge \sim t_{h+1}) \wedge \bigwedge\limits_{k \in I_2(b)} \Delta \sim t_{k+1}$. Luego $M_b \in \mathbf{3}^{R(q)}$, cualquiera sea $b \in R(q)$.
Si $b \in R(q)$, $M_b(x) \in \{0,1\}$, para todo $x \in R(q)$, pues si $M_b(x) = 2$ para algún $x \in R(q)$, entonces en particular $\bigwedge\limits_{h \in I_1(b)} (t_{h+1} \wedge \sim t_{h+1}) = 2$, luego $t_{h+1}(x) \wedge \sim t_{h+1}(x) = 2$, para todo $h \in I_1(b)$, $x \in R(q)$, es decir, $t_{h+1}(x) = \sim t_{h+1}(x) = 2$, absurdo.
Si $x \in R(q)$, como $\bigwedge\limits_{j \in I_0(b)} \Delta t_{j+1}(x)$, $\bigwedge\limits_{k \in I_2(b)} \Delta \sim t_{k+1}(x) \in \{0,2\}$ entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $M_b(x) = 1$.

ii) $\bigwedge\limits_{j \in I_0(b)} \Delta t_{j+1}(x) = 2$, $\bigwedge\limits_{k \in I_2(b)} \Delta \sim t_{k+1}(x) = 2$ y $\bigwedge\limits_{h \in I_1(b)} (t_{h+1}(x) \wedge \sim t_{h+1}(x)) = 1$.

iii) $t_{j+1}(x) = 2$ para todo $j \in I_0(b)$, $t_{k+1}(x) = 0$ para todo $k \in I_2(b)$ y $t_{h+1}(x) = 1$ para todo $h \in I_1(b)$.

iv) $2 \cdot 3^j = \nabla 3^j \sqsubseteq x$ para todo $j \in I_0(b)$, $x \sqsubseteq \approx \nabla 3^k = \approx 2 \cdot 3^k$ para todo $k \in I_2(b)$ y $1 \cdot 3^h \sqsubseteq x \sqsubseteq \approx 3^h$ para todo $h \in I_1(b)$.

v) $x_j = 2$ para todo $j \in I_0(b)$, $x_k = 0$ para todo $k \in I_2(b)$ y $x_h = 1$ para todo $h \in I_1(b)$ .

vi) $x = \approx b$.

Luego

$$M_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \approx b \\ 0 & \text{si } x \neq \approx b \end{cases}$$

y por lo tanto

$$\nabla M_b(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = \approx b \\ 0 & \text{si } x \neq \approx b \end{cases}.$$

El conjunto $\mathcal{P}$ de todos los elementos primos de $\mathbf{3}^{R(q)}$ está formado por los elementos

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_0 \\ 0 & \text{si } x \neq x_0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad r(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = x_0 \\ 0 & \text{si } x \neq x_0 \end{cases} , \quad x_0 \in R(q),$$

entonces $\mathcal{P} = \{M_b, \nabla M_b\}_{b\in R(q)} \subseteq SL(\{t_1, t_2, \dots, t_q\})$.
Por lo tanto $SL(\{t_1, t_2, \dots, t_q\}) = \mathbf{3}^{R(q)}$, esto es, $\{t_1, t_2, \dots, t_q\}$ es un conjunto de generadores de $\mathbf{3}^{R(q)}$. □

Sean $G^* = \{g_i : 1 \leq i \leq q\}$ un conjunto de generadores del álgebra de Boole con $q$ generadores libres $B^{2^q}$, y $\mathcal{L} = B^{2^q} \times \mathbf{3}^{R(q)}$.

**Teorema 4.1** *$G = \{(g_i, t_i) : g_i \in G^*, t_i \in T,\ 1 \leq i \leq q\}$ es un conjunto de generadores libres para $\mathcal{L}$.*

**Dem.** Mostremos que $SL(G)$ contiene los elementos primos de $\mathcal{L}$, de donde resultará, en forma inmediata, que $SL(G) = \mathcal{L}$. En efecto, los elementos primos de $\mathcal{L}$ son de la forma $(0, M_b)$, $(0, \nabla M_b)$, $b \in R(q)$ ó de la forma $(m_c, 0)$, donde $m_c = \bigwedge_{i\in I} g_i \wedge \bigwedge_{j\in J} -g_j$, $\{I,\ J\}$ es una bipartición del conjunto $\{1, 2, \dots, q\}$.

Como $\bigwedge_{i\in I}(g_i, t_i) \wedge \bigwedge_{i\in I} \Delta(g_i, \sim t_i) \wedge \bigwedge_{j\in J} \Delta \sim (g_j, t_j) = \bigwedge_{i\in I}(g_i, t_i \wedge \Delta \sim t_i) \wedge \bigwedge_{j\in J}(-g_j, \Delta \sim t_j) = (\bigwedge_{i\in I} g_i, \bigwedge_{i\in I}(t_i \wedge \Delta \sim t_i)) \wedge (\bigwedge_{j\in J} -g_j, \bigwedge_{j\in J} \Delta \sim t_j) = (\bigwedge_{i\in I} g_i \wedge \bigwedge_{j\in J} -g_j, 0) = (m_c, 0)$, entonces $(m_c, 0) \in SL(G)$.

Por otro lado

$\bigwedge_{j\in I_0(b)} \Delta(g_{j+1}, t_{j+1}) \wedge \bigwedge_{h\in I_1(b)} (g_{h+1}, t_{h+1}) \wedge \bigwedge_{h\in I_1(b)} \sim (g_{h+1}, t_{h+1}) \wedge \bigwedge_{k\in I_2(b)} \Delta \sim (g_{k+1}, t_{k+1}) =$
$(\bigwedge_{j\in I_0(b)} g_{j+1}, \bigwedge_{j\in I_0(b)} \Delta t_{j+1}) \wedge (\bigwedge_{h\in I_1(b)} (g_{h+1} \wedge -g_{h+1}), \bigwedge_{h\in I_1(b)} (t_{h+1} \wedge \sim t_{h+1}))$
$\wedge (\bigwedge_{k\in I_2(b)} -g_{k+1}, \bigwedge_{k\in I_2(b)} \Delta \sim t_{k+1}) = (0, \bigwedge_{j\in I_0(b)} \Delta t_{j+1} \wedge \bigwedge_{h\in I_1(b)} (t_{h+1} \wedge \sim t_{h+1}) \wedge \bigwedge_{k\in I_2(b)} \Delta \sim t_{k+1}) =$
$(0, M_b)$, entonces $(0, M_b) \in SL(G)$ y por lo tanto $(0, \nabla M_b) = \nabla(0, M_b) \in SL(G)$. Luego $SL(G) = \mathcal{L}$. □

En forma análoga a la indicada precedentemente es fácil ver que si $q \in N$ entonces $\mathbf{3}^{C_{3^q}}$ es el álgebra de Post trivalente con $q$ generadores libres y que

$$g_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in I(\approx 3^{i-1}) \\ 1 & \text{si } x \in [3^{i-1}, \approx 3^{i-1}] \\ 2 & \text{si } x \in F(3^{i-1}) \end{cases} \quad , \quad x \in C_{3^q}$$

son generadores libres de $\mathbf{3}^{C_{3^q}}$.

# 5 (0,1)-Reticulados Distributivos libres.

En esta sección con $F = FD(q)$ notaremos al (0,1)-reticulado distributivo con $q$ generadores libres y con $P = P(F)$ al conjunto de todos los elementos primos (join− irreducibles) de $F$.

**Lema 5.1** *Existe una correspondencia biunívoca entre del conjunto L-Aut($F$) de todos los (0,1)-automorfismos de $F$ sobre el conjunto O-Aut($P$) de todos los automorfismos de orden de $P$.*

**Dem.** Sea $f \in$ O-Aut$(P)$ y pongamos por definición, donde $x \in F$,

$$E_f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \bigvee\{f(p) : p \in P_x\} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}.$$

Se demuestra sin dificultad que $E_f$ es un isomorfismo de orden de $F$ y por lo tanto $E_f \in$ L-Aut(F), además $E_f(p) = f(p)$, cualquiera que sea $p \in P$.
Si $f_1, f_2 \in$ O-Aut$(P)$, $f_1 \neq f_2$, entonces existe $p' \in P$ tal que $f_1(p') \neq f_2(p')$ y como $E_{f_1}(p) = f_1(p)$, $E_{f_2}(p) = f_2(p)$, para todo $p \in P$, entonces $E_{f_1} \neq E_{f_2}$.
Sea $\alpha \in$ L-Aut$(F)$ y $f = \alpha_{|P}$. Es fácil ver que $f \in$ O-Aut$(P)$. Veamos que $E_f = \alpha$. En efecto, $E_f(0) = 0 = \alpha(0)$ y si $x \neq 0$ entonces $\alpha(x) = \alpha(\bigvee\{p : p \in P_x\}) = \bigvee\{\alpha(p) : p \in P_x\} = \bigvee\{f(p) : p \in P_x\} = E_f(x)$.
Es bien conocido que $P$ es isomorfo al álgebra de Boole con $q-1$ átomos $B^{C_{q-1}}$ y que O-Aut$(B^{C_{q-1}})$ = B-Aut$(B^{C_{q-1}})$, luego $N$[L-Aut$(F)$] = $N$[O-Aut$(P)$] = $N$[B-Aut$(B^{C_{q-1}})$] = $q!$. □

En consecuencia

**Proposición 5.1** *El número de conjuntos de generadores libres de $F$ es*

$$\frac{N[L\text{-}Aut(F)]}{q!} = \frac{q!}{q!} = 1.$$

Esto es el conjunto de generadores libres de $FD(q)$ es único. En [1], pag. 89 se indica otra forma de probar el resultado precedente.

# 6 Algebras de De Morgan libres.

Representaremos con $M = FM(q)$ el álgebra de De Morgan con $q$ generadores libres, con M-Aut$(M)$ el conjunto de todos los automorfismos de De Morgan de $M$. Si $G$ es un conjunto de $q$ generadores libres de $M$, notaremos $M = FM(G)$, es bien conocido que $FM(G) \simeq FD(G \cup \sim G)$.

**Lema 6.1** *El número de conjuntos de generadores libres de $FM(q)$ es $2^q$.*

**Dem.** A cada $X \subseteq G$ le asociamos un conjunto de generadores libres con $q$ elementos como sigue: Si $X \subseteq G$ consideremos $Y = X \cup \sim (G - X)$. Entonces $FM(Y) \simeq FD(Y \cup \sim Y)$. Como $\sim (A \cup B) = \sim A \cup \sim B$. Entonces $Y \cup \sim Y = X \cup \sim (G - X) \cup \sim (X \cup \sim (G - X)) = X \cup \sim (G - X) \cup \sim X \cup (G - X) = X \cup (G - X) \cup \sim X \cup \sim (G - X) = G \cup \sim (X \cup (G - X)) = G \cup \sim G$.
Luego $FM(Y) = FM(X \cup \sim (G - X)) = FD(G \cup \sim G) = FM(G)$.
Si $X_1, X_2 \subseteq G$ y $X_1 \neq X_2$ entonces $Y_1 = X_1 \cup \sim (G - X_1) \neq X_2 \cup \sim (G - X_2) = Y_2$.
Supongamos que $X$ es un conjunto de generadores libres de $M$, con $q$ elementos, luego $FD(G \cup \sim G) = M = FM(X) = FD(X \cup \sim X)$ y por lo tanto $G \cup \sim G = X \cup \sim X$, y en consecuencia $(X \cap G) \cup (X \cap \sim G) = X \cap (G \cup \sim G) = X \cap (X \cup \sim X) = X$. Como $X$ es un conjunto de generadores libres entonces $\sim X \cap X = \emptyset$. En efecto si $\sim X \cap X \neq \emptyset$, entonces existe $y \in \sim X \cap X$, luego $y = x_1$, $y = \sim x_2$, donde $x_1, x_2 \in X$. Sea $A$ un álgebra de De Morgan arbitraria con más de un elemento, y sea $f : X \to A$, tal que $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

$f$ se puede extender a un M-homomorfismo $H_f$ de $M$ en $A$, luego de $x_1 = \sim x_2$ resulta que $1 = \sim 0 = \sim f(x_2) = \sim H_f(x_2) = H_f(\sim x_2) = H_f(x_1) = f(x_1) = 0$, absurdo.
Como se verifica $\sim (A \cap B) = \sim A \cap \sim B$, entonces $\sim (X \cap \sim G) \cup (X \cap G) =$ $(\sim X \cap G) \cup (X \cap G) = (\sim X \cap X) \cap G = (\sim G \cap G) \cap G = G$, y $\sim (X \cap \sim G) \cap (X \cap G) =$ $(\sim X \cap G) \cap (X \cap G) = \sim X \cap X \cap G = \emptyset \cap G = \emptyset$, tenemos que $\sim (X \cap \sim G) = G - (X \cap G)$, entonces $X \cap \sim G = \sim (G - (X \cap G))$. □

**Corolario 6.1**

$$N[M\text{-}Aut(FM(q))] = 2^q \,.\, q!$$

**Dem.** Es una consecuencia inmediata del lema anterior y el Teorema 2.1. □

# References


[1] Balbes R. and Dwinger P., *Distributive Lattices*, Univ. of Missouri Press, Columbia, 1974.

[2] Cohn P.M., *Universal Algebra*, Harper's series in Modern Mathematics, 1965.

[3] Figallo A., Monteiro L. and Ziliani A., *Free three-valued Łukasiewicz, Post and Moisil algebras over a poset*, Proc. of the Twentieth International Symposium on Multiple valued Logic, Charlotte, North Carolina, USA, May 23-25, 1990, p. 433-435.

[4] Moisil Gr. C., *Recherches sur les logiques non chrysippiennes*, Annales Scientifiques de l'Université de Jassy, 26(1940), p. 431-466.

[5] Moisil Gr. C., *Sur les anneaux de caractéristique 2 ou 3 et leurs applications*, Bulletin de l'Ecole Polytechnique de Bucarest, 12(1941), p. 66-90.

[6] Monteiro A., *Sur les algèbres de Moisil trivalentes libres avec n généérateurs libres*,(unpublished manuscript), 1978.

[7] Monteiro L., *Extension d'homomorphismes dans les algèbres de Łukasiewicz trivalentes.*, International Logic Review, 2(1970), 193-200.

[8] Monteiro L., *Algebras de Łukasiewicz trivalentes monádicas*, Notas de Lógica Matemática 32,(1974), Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina.

[9] Monteiro L., Abad M., Savini S. y Sewald J., *Sobre álgebras de Boole monádicas libres*, Informes Técnicos Internos 36, (1994), 1-17, INMABB-CONICET, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina.