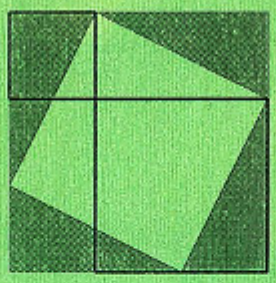
INFORME TÉCNICO INTERNO

N° 44

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 1995 -

INFORME TÉCNICO INTERNO N° 44

Q-álgebras de Tarski Libres

L.F. MONTEIRO - M. ABAD - S. SAVINI - J. SEWALD

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 1995

Q-álgebras de Tarski libres

Luiz F. Monteiro, Manuel Abad, Sonia Savini y Julio Sewald

INMABB-UNS-CONICET y Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur - Bahía Blanca - Argentina

Abstract

L. Iturrioz y A. Monteiro, determinaron las álgebras de Tarski con un número finito de generadores libres [11]. Este resultado fué comunicado en una Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina, realizada en 1965. Los detalles de las demostraciones no habían sido publicados y se encontraban en manuscritos de A. Monteiro. Los autores de este trabajo conjuntamente con R. Cignoli, los redactaron, tomando como base los citados manuscritos. [12].
L. Monteiro [17], generalizó los resultados indicados en [10],(ver [16], pág. 36).
La noción de " álgebra de Tarski monádica " fue introducida por A. Monteiro y L. Iturrioz [10], como una generalización del concepto de álgebra de Boole monádica. Siguiendo a R. Cignoli [3], preferimos denominar a estas álgebras, Q-álgebras de Tarski. A. Figallo [7] determinó la Q-álgebra de Tarski $FQT(n)$, con un número finito de generadores libres y calculó el número de sus elementos. En este trabajo, siguiendo una metodología sugerida por L. Monteiro y utilizando algunos de los resultados que obtuvimos en [19], indicamos una forma mucho más sencilla de calcular el número de elementos de $FQT(n)$, en función de n.
A fin de facilitar la lectura de estas notas vamos a indicar las demostraciones de varios resultados que se encuentran dispersos en la bibliografía indicada.

1 Nociones Previas

Definición 1.1 *Un álgebra* $(A, \rightarrow, 1)$ *del tipo* $(2,0)$ *se dice un álgebra de Tarski si:*

T1) $x \rightarrow (y \rightarrow x) = 1$.

T2) $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1$.

T3) $x \rightarrow 1 = 1$.

T4) Si $x \rightarrow y = 1$ *e* $y \rightarrow x = 1$ *entonces* $x = y$.

T5) $(x \rightarrow y) \rightarrow x = x$.

Recordemos que un álgebra $(A, \rightarrow, 1)$ del tipo $(2, 0)$ que verifica las propiedades T1 a T4 se denomina *un álgebra de Hilbert o un álgebra implicativa.* [1], [2], [4], [5], [13], [14], [15], [16].

La siguiente axiomática se encuentra entre los muchos resultados manuscritos que dejara A. Monteiro sin publicar (ver [15]). A continuación indicaremos las demostraciones en detalle.

Teorema 1.1 *Un álgebra* $(A, \rightarrow, 1)$ *del tipo* $(2, 0)$ *es un álgebra de Tarski si:*

M1) $1 \rightarrow x = x$.

M2) $x \rightarrow x = 1$.

M3) $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)$.

M4) $(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x$.

Dem. Veamos que de T1 a T5 se deducen M1 a M4.

M1) Utilizando sucesivamente T5 y T3 tenemos:
$x = (x \rightarrow 1) \rightarrow x = 1 \rightarrow x$.

M2) Utilizando sucesivamente T1 y M1 tenemos:
$1 = x \rightarrow (1 \rightarrow x) = x \rightarrow x$.

Antes de probar M3 y M4, necesitamos probar algunas reglas de cálculo.

M5) $x \rightarrow (x \rightarrow y) = x \rightarrow y$.
Es una consecuencia de T1, T2, T4, M1 y M2. En efecto:
Por T1 tenemos : (i) $1 = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow y))$.
Por T2 tenemos : (ii) $(x \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow ((x \rightarrow x) \rightarrow (x \rightarrow y)) = 1$. Luego aplicando M2, $(x \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (1 \rightarrow (x \rightarrow y)) = 1$, de donde resulta, teniendo en cuenta M1, que : (ii) $(x \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (x \rightarrow y) = 1$. De (i) e (ii) resulta por T4, que se verifica M5.

M6) Si $y \rightarrow z = 1$, entonces $(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z) = 1$.
Utilizando sucesivamente T2, la hipótesis, T3 y M1 tenemos:
$1 = (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) = (x \rightarrow 1) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) =$
$1 \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) = ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z))$.

M7) Si $x \rightarrow y = 1$ e $y \rightarrow z = 1$ entonces $x \rightarrow z = 1$.
Utilizando sucesivamente T2, las hipótesis, T3 y M1, y M1 tenemos:
$1 = (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) = (x \rightarrow 1) \rightarrow (1 \rightarrow (x \rightarrow z)) =$
$1 \rightarrow (x \rightarrow z) = x \rightarrow z$.

M8) Si $x \to y = 1$ entonces $(y \to z) \to (x \to z) = 1$.
Es una consecuencia de T1, T2, M1 y M7. En efecto :
Por T1, tenemos (i) $(y \to z) \to (x \to (y \to z)) = 1$.
Por T2, $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1$, luego aplicando la hipótesis $(x \to (y \to z)) \to (1 \to (x \to z)) = 1$, luego por M1:
(ii) $(x \to (y \to z)) \to (x \to z) = 1$. De (i) e (ii) resulta, aplicando M7, que se verifica M8.

M9) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$.
Es una consecuencia de T2, T1, M7 , M8 y T4.
Por T2 : (i) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1$.
Por T1 sabemos que : $y \to (x \to y) = 1$. De aquí resulta por M8 que :
(ii) $((x \to y) \to (x \to z)) \to (y \to (x \to z)) = 1$. De (i) e (ii) resulta por M7 que :
(iii) $(x \to (y \to z)) \to (y \to (x \to z)) = 1$.
Luego también se verifica : (iv) $(y \to (x \to z)) \to (x \to (y \to z)) = 1$.
De (iii) y (iv) resulta por T4 la propiedad M9.

M3) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.
Es una consecuencia de T1, T2, T4, M8 y M9.
Por T2, (i) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1$.
En la demostración de M9 vimos que utilizando T1,T2 y M8, resulta:
$((x \to y) \to (x \to z)) \to (y \to (x \to z)) = 1$, luego por M9 tenemos :
(ii) $((x \to y) \to (x \to z)) \to (x \to (y \to z)) = 1$. De (i) e (ii) resulta por T4 la propiedad M3.

M4) $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$.
Utilizando sucesivamente T5, M9, M3, M3, M2 y T3 tenemos:
$((x \to y) \to y) \to ((y \to x) \to x) =$
$[(x \to y) \to ((y \to x) \to y)] \to [(y \to x) \to ((x \to y) \to x)] =$
$[(x \to y) \to ((y \to x) \to y)] \to [(x \to y) \to ((y \to x) \to x)] =$
$(x \to y) \to [((y \to x) \to y) \to ((y \to x) \to x)] =$
$(x \to y) \to ((y \to x) \to (y \to x)) =$
$(x \to y) \to 1 = 1$.
Cambiando x por y en la igualdad anterior tenemos:
$((y \to x) \to x) \to ((x \to y) \to y) = 1$.
Luego aplicando T4, resulta M4.

Veamos ahora que de M1 a M4 se deducen T1 a T5.

T3) Utilizando sucesivamente M2, M3 y M2 tenemos:
$x \to 1 = x \to (x \to x) = (x \to x) \to (x \to x) = 1$.

T4) Supongamos que $x \to y = 1$ e $y \to x = 1$. Por M4 sabemos que
$(y \to x) \to x = (x \to y) \to y$, luego utilizando las hipótesis : $1 \to x = 1 \to y$,
de donde resulta por M1 que $x = y$.

T1) Utilizando sucesivamente M3, M2 y T3 tenemos:
$x \to (y \to x) = (x \to y) \to (x \to x) = (x \to y) \to 1 = 1.$

T2) Utilizando sucesivamente M3 y M2 tenemos:
$(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) =$
$(x \to (y \to z)) \to (x \to (y \to z)) = 1.$

T5) Utilizando sucesivamente M4, M3, M2 , M1 y M2 tenemos:

i) $((x \to y) \to x) \to x = (x \to (x \to y)) \to (x \to y) =$
$((x \to x) \to (x \to y)) \to (x \to y) =$
$(1 \to (x \to y)) \to (x \to y) = (x \to y) \to (x \to y) = 1.$

Utilizando sucesivamente M3, M2, y T3 tenemos:

ii) $x \to ((x \to y) \to x) = (x \to (x \to y)) \to (x \to x) =$
$(x \to (x \to y)) \to 1 = 1.$

Luego de i) y ii) resulta por T4 que se verifica T5. □

Es bien conocido que si $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un álgebra de Boole y ponemos por definición $x \to y = -x \vee y$; $x, y \in A$, entonces $(A, \to, 1)$ es un álgebra de Tarski.

Probemos que en una álgebra de Tarski se verifican:

M10) $((a \to b) \to b) \to a = b \to a.$
Aplicando T5, M9, M3 y T5 obtenemos: $b \to a = b \to ((a \to b) \to a) =$
$(a \to b) \to (b \to a) = ((a \to b) \to b) \to ((a \to b) \to a) = ((a \to b) \to b) \to a$.

M11) $((a \to b) \to b) \to b = a \to b.$
Se deduce de M4 y M10 como sigue: $((a \to b) \to b) \to b = ((b \to a) \to a) \to b =$
$a \to b.$

Dados $x, y \in A$ notaremos $x \leq y$ si $x \to y = 1$, entonces por las propiedades M2, T4, M7 y T3, resulta que A es un conjunto ordenado con último elemento 1.

Vamos a probar que A es un conjunto ordenado reticulado superiormente, más precisamente, probaremos que si $a, b \in A$ el supremo de los elementos a y b , es el elemento : $(a \to b) \to b$.
En efecto, por M9 y M2 tenemos que $a \to ((a \to b) \to b) = (a \to b) \to (a \to b) = 1$ y como por T1 $b \to ((a \to b) \to b) = 1$ entonces : S1) $a \leq (a \to b) \to b$ y $b \leq (a \to b) \to b$.
Sea $s = (a \to b) \to b$ y probemos: S2) Si $a \leq t$ y $b \leq t$ entonces $s \leq t$.
Utilizando sucesivamente M3, una de las hipótesis y T3 se obtiene :

i) $(s \to a) \to (s \to t) = s \to (a \to t) = s \to 1 = 1.$
Además por M10 :

ii) $s \to a = ((a \to b) \to b) \to a = b \to a.$
De i) y ii) obtenemos:

iii) $(b \to a) \to (s \to t) = 1,$
de donde resulta por M8 $((s \to t) \to b) \to ((b \to a) \to b) = 1.$
Por T5 $((s \to t) \to b) \to b = 1$ y por T1 $b \to ((s \to t) \to b) = 1.$ Por lo tanto por T4 obtenemos:

iv) $b = (s \to t) \to b.$
Por M3, una de las hipótesis y T3 resulta:

v) $(s \to b) \to (s \to t) = s \to (b \to t) = s \to 1 = 1.$
Por M11 obtenemos:

vi) $s \to b = ((a \to b) \to b) \to b = a \to b.$
De v), vi) obtenemos:
$(a \to b) \to (s \to t) = 1.$ Por M8 resulta $((s \to t) \to a) \to ((a \to b) \to a) = 1.$
Por T5 $((s \to t) \to a) \to a = 1.$
Por T1 $a \to ((s \to t) \to a) = 1$, luego por T4 obtenemos:

vii) $a = (s \to t) \to a.$

Utilizando v) y vii) en iii) se deduce:
$[((s \to t) \to b) \to ((s \to t) \to a)] \to (s \to t) = 1.$
Por M3 $[(s \to t) \to (b \to a)] \to (s \to t) = 1$, de donde se obtiene por T5 $s \to t = 1$, esto es $s \leq t.$

Acabamos así de probar que : $\boxed{a \vee b = (a \to b) \to b.}$

M12) $(a \to b) \vee (b \to a) = 1.$
Utilizando sucesivamente M3, T5, M10 y M2 deducimos:
$(a \to b) \vee (b \to a) = [(a \to b) \to (b \to a)] \to (b \to a) =$
$[((a \to b) \to b) \to ((a \to b) \to a)] \to (b \to a) =$
$[((a \to b) \to b) \to a] \to (b \to a) = (b \to a) \to (b \to a) = 1.$

M13) $a \to (b \vee c) = (a \to b) \vee (a \to c).$
En efecto, utilizando M3 obtenemos: $(a \to b) \vee (a \to c) =$
$[(a \to b) \to (a \to c)] \to (a \to c) = (a \to (b \to c)) \to (a \to c) =$
$a \to ((b \to c) \to c) = a \to (b \vee c).$

M14) $x \vee (x \to y) = 1.$
Se deduce de la definición de supremo, M3, M1 y M2 .
$x \vee (x \to y) = (x \to (x \to y)) \to (x \to y) = ((x \to x) \to (x \to y)) \to (x \to y) =$
$(1 \to (x \to y)) \to (x \to y) = (x \to y) \to (x \to y) = 1.$

Lema 1.1 *Si un álgebra de Tarski A, tiene primer elemento 0, entonces A es un álgebra de Boole, donde el complemento booleano de* $a \in A$ *es* $-a = a \to 0$ *y el ínfimo de los elementos* a *y* $b \in A$ *es* $a \wedge b = -(b \to -a)$.

Para probar este lema, demostraremos previamente una serie de reglas de cálculo.

M15) $--a = a$.
En la fórmula M10, poniendo $b = 0$ tenemos:
$((a \to 0) \to 0) \to a = 0 \to a$, y como $0 \leq a$ entonces $0 \to a = 1$, luego
(i) $--a \to a = 1$.
Por M9 y M2 tenemos que $a \to ((a \to 0) \to 0) = (a \to 0) \to (a \to 0) = 1$, esto es (ii) $a \to --a = 1$.
De (i) y (ii) resulta por T4 que $a = --a$.

M16) $a \leq b$ sí y sólo sí $-b \leq -a$.
Si $a \leq b$ entonces por M8 $-b = b \to 0 \leq a \to 0 = -a$.
Si $-b \leq -a$ entonces $a = --a \leq --b = b$.

M17) $a \vee -a = 1$.
Aplicando sucesivamente las definiciones de supremo y negación, M3 y M15 tenemos:
$a \vee -a = (a \to -a) \to -a = (a \to (a \to 0)) \to (a \to 0) = a \to ((a \to 0) \to 0) =$
$a \to --a = a \to a = 1$.

M18) $-1 = 0$.
En efecto $-1 = 1 \to 0 = 0$.

Probemos ahora que elemento $-(b \to -a)$ es el ínfimo de los elementos a y b.

I1) $-(b \to -a) \leq a$ y $-(b \to -a) \leq b$
Por T1, $-a \leq b \to -a$, luego por M16, $-(b \to -a) \leq a$.
$b \to -a = b \to (a \to 0) = a \to (b \to 0) = a \to -b$.
Luego como $-b \leq a \to -b = b \to -a$ obtenemos por M16 y M15, que:
$-(b \to -a) \leq b$.

I2) Si (1) $t \leq a$ y (2) $t \leq b$ entonces $t \leq -(b \to -a)$.
De (1) resulta $-a \leq -t$, luego por M6 $b \to -a \leq b \to -t$, y por lo tanto (3)
$-(b \to -t) \leq -(b \to -a)$.
Por aplicación de M9, M3, (2) , M1 y M16 obtenemos
(4) $-(b \to -t) = (b \to (t \to 0)) \to 0 = (t \to (b \to 0)) \to 0 =$
$((t \to b) \to (t \to 0)) \to 0 = (1 \to (t \to 0)) \to 0 = (t \to 0) \to 0 = --t = t$.
De (3) y (4) resulta $t \leq -(b \to -a)$.

Acabamos así de probar que : $\boxed{a \wedge b = -(b \to -a).}$

M19) $-a \wedge a = 0$.
En efecto $-a \wedge a = -(a \to --a) = -(a \to a) = -1 = 0$.

M20) $a \to (a \wedge b) = a \to b$.
Usando sucesivamente M3, M3, M3, M2 , M1 y M13 resulta que:
$a \to (a \wedge b) = a \to -(b \to -a) = a \to [(b \to (a \to 0)) \to 0] =$
$(a \to (b \to (a \to 0))) \to (a \to 0) = [(a \to b) \to (a \to (a \to 0))] \to (a \to 0) =$
$[(a \to b) \to ((a \to a) \to (a \to 0))] \to (a \to 0) =$
$[(a \to b) \to (a \to 0)] \to (a \to 0) =$
$(a \to b) \vee (a \to 0) = a \to (b \vee 0) = a \to b.$

M21) $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$.
De $a \leq a \vee b$ y $b \leq a \vee b$ resulta por M8,

*I*1) $(a \vee b) \to c \leq a \to c$ y $(a \vee b) \to c \leq b \to c$.

*I*2) Si $t \leq a \to c$ y $t \leq b \to c$, entonces $t \leq (a \vee b) \to c$.
Sea $v = (a \vee b) \to c$, $w = a \vee b$ entonces $v = w \to c$. Aplicando M9, la definición de supremo y M13 resulta :
(i) $[(a \to c) \to (w \to c)] \vee [(b \to c) \to (w \to c)] =$
$[w \to ((a \to c) \to c)] \vee [w \to ((b \to c) \to c)] =$
$(w \to (a \vee c)) \vee (w \to (b \vee c)) = w \to (a \vee b \vee c) = (a \vee b) \to (a \vee b \vee c) = 1.$
De (i) resulta, aplicando T3, M13, M3, las hipótesis y M1 que :
$1 = t \to 1 = [t \to ((a \to c) \to (w \to c))] \vee [t \to ((b \to c) \to (w \to c))] =$
$[(t \to (a \to c)) \to (t \to (w \to c))] \vee [(t \to (b \to c)) \to (t \to (w \to c))] =$
$[1 \to (t \to (w \to c))] \vee [1 \to (t \to (w \to c))] =$
$(t \to (w \to c)) \vee (t \to (w \to c)) = t \to (w \to c) = t \to ((a \vee b) \to c).$

M22) $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$.

*I*1) $a \to (b \wedge c) \leq a \to b$ y $a \to (b \wedge c) \leq a \to c$.
De $b \wedge c \leq b$ resulta por M6 que $a \to (b \wedge c) \leq a \to b$; y de $b \wedge c \leq c$ resulta por M6 que $a \to (b \wedge c) \leq a \to c$.

*I*2) Si $t \leq a \to b$ y $t \leq a \to c$ entonces $t \leq a \to (b \wedge c)$.
En efecto, utilizando M3, M3, M3, una hipótesis, M3, M3, la otra hipótesis, M1 y M2, se tiene:
$t \to (a \to (b \wedge c)) = t \to (a \to -(c \to -b)) =$
$t \to (a \to ((c \to (b \to 0)) \to 0)) = t \to [(a \to (c \to (b \to 0))) \to (a \to 0)] =$
$t \to [((a \to c) \to (a \to (b \to 0))) \to (a \to 0)] =$
$[(t \to (a \to c)) \to (t \to (a \to (b \to 0)))] \to (t \to (a \to 0)) =$
$[1 \to (t \to (a \to (b \to 0)))] \to (t \to (a \to 0)) =$
$[t \to ((a \to b) \to (a \to 0))] \to (t \to (a \to 0)) =$
$[(t \to (a \to b)) \to (t \to (a \to 0))] \to (t \to (a \to 0)) =$
$(1 \to (t \to (a \to 0))) \to (t \to (a \to 0)) = (t \to (a \to 0)) \to (t \to (a \to 0)) = 1.$

M23) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
Sabemos que en todo reticulado se verifica la desigualdad $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$.
Sea $i = x \wedge (y \vee z)$, como $i \leq x$ e $i \leq y \vee z$ tenemos que :

a) $i \to x = 1$,

b) $i \to (y \vee z) = 1$.

Probemos que $i \to ((x \wedge y) \vee (x \wedge z)) = 1$.
Utilizando sucesivamente M13, M22, a), M13 y b) tenemos:
$i \to ((x \wedge y) \vee (x \wedge z)) = (i \to (x \wedge y)) \vee (i \to (x \wedge z)) =$
$((i \to x) \wedge (i \to y)) \vee ((i \to x) \wedge (i \to z)) = (1 \wedge (i \to y)) \vee (1 \wedge (i \to z)) =$
$(i \to y) \vee (i \to z) = i \to (y \vee z) = 1$.

Tenemos así que $(A, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ es un reticulado distributivo con primer y último elemento, donde cada elemento tiene un complemento; luego A es un álgebra de Boole. Observemos además que :

M24) $a \to b = -a \vee b$.
En efecto, usando M4, M9, M3 y M15, se tiene
$-a \vee b = (-a \to b) \to b = (b \to -a) \to -a = (b \to (a \to 0)) \to (a \to 0) =$
$(a \to (b \to 0)) \to (a \to 0) = a \to ((b \to 0) \to 0) = a \to - - b = a \to b$.

M25) $(-a \to -b) \to -b = b \to -a$.
Aplicando M9, M14, M20 y M3 se obtiene :
$(-a \to -b) \to -b = (-a \to (b \to 0)) \to -b = (b \to (-a \to 0)) \to -b =$
$(b \to - - a) \to -b = (b \to a) \to -b = (b \to a) \to (b \to 0) = b \to (a \to 0) =$
$b \to -a$.

La propiedad M25 nos dice que :
$-a \vee -b = b \to -a$ luego $-(-a \vee -b) = -(b \to -a) = a \wedge b$.

Definición 1.2 *Una parte no vacía S de un álgebra de Tarski A se dice una subálgebra de Tarski de A si S es invariante por el operador $\to$, es decir, si $x, y \in S$ entonces $x \to y \in S$.*

Lema 1.2 *Si A es un álgebra de Tarski entonces el conjunto $[p) = \{x \in A : p \leq x\}$ es un álgebra de Boole, cualquiera que sea $p \in A$.*

Dem. Probemos que $[p)$ es una subálgebra de Tarski de A, es decir, si $x, y \in [p)$ entonces $x \to y \in [p)$.
Por T1 $y \leq x \to y$, y como $p \leq y$ entonces $x \to y \in [p)$. Luego $([p), \to, 1)$ es un álgebra de Tarski con primer elemento p y por lo tanto es un álgebra de Boole. □

Observemos que si $x \in [p)$ entonces el complemento de x en $[p)$ lo obtenemos calculando $x \to p$, luego el ínfimo de dos elementos $x, y \in [p)$ es $x \wedge y = (y \to (x \to p)) \to p$.
Acabamos así de ver que un álgebra de Tarski A es un conjunto reticulado superiormente con último elemento, en el cual $[p)$ es un álgebra de Boole, cualquiera sea $p \in A$.

Supongamos ahora que R es un conjunto reticulado superiormente con último elemento 1, en el cual $[r) = \{y \in R : r \leq y\}$ es un álgebra de Boole , cualquiera que sea $r \in R$.
J.C. Abbott [1], [2] probó que R es un álgebra de Tarski. Indicaremos una demostración

de este resultado.
Por hipótesis $[r)$ es un álgebra de Boole, para todo $r \in R$. Fijado $r \in R$, si $x \in [r)$ existe el complemento booleano de x en $[r)$. A este elemento lo notaremos $\sim_{[r)} x$, luego : (1) $\sim_{[r)} r = 1$ y (2) $\sim_{[r)} 1 = r$.
Como $x \vee y \in [y)$ entonces existe el complemento booleano de $x \vee y$ en $[y)$.
Pongamos por definición $x \to y = \sim_{[y)} (x \vee y)$; $x, y \in R$, entonces $(*)$ $y \leq x \to y$.

M1) $1 \to x = \sim_{[x)} (1 \vee x) = \sim_{[x)} 1 = x$.

M2) $x \to x = \sim_{[x)} (x \vee x) = \sim_{[x)} x = 1$.

M4) $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x = x \vee y$.
En efecto, por $(*)$ $y \leq x \to y$, luego $(x \to y) \to y = \sim_{[y)} ((x \to y) \vee y) =$
$\sim_{[y)} (x \to y) = \sim_{[y)} (\sim_{[y)} (x \vee y)) = x \vee y$.
Análogamente $(y \to x) \to x = y \vee x$, luego se verifica M4.
Probemos:

I_1) $(a \to b) \to a = a$.
Como por $(*)$ $b \leq \sim_{[b)} (a \vee b)$, entonces $1 = (a \vee b) \vee \sim_{[b)} (a \vee b) =$
$a \vee (b \vee \sim_{[b)} (a \vee b)) = a \vee \sim_{[b)} (a \vee b)$, luego $(a \to b) \to a =$
$\sim_{[a)} ((a \to b) \vee a) = \sim_{[a)} [(\sim_{[b)} (a \vee b)) \vee a] = \sim_{[a)} 1 = a$.

I_2) $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$.
$a \to (b \to c) = \sim_{[b \to c)} (a \vee (b \to c))$. Como $\sim_{[c)} (a \vee (b \to c)) \wedge$
$(a \vee (b \to c)) = c$, $\sim_{[c)} (a \vee (b \to c)) \vee (a \vee (b \to c)) = 1$,
$\alpha = \sim_{[c)} (a \vee (b \to c)) \vee (b \to c) \in [b \to c)$ y $a \vee (b \to c) \in [b \to c)$, entonces :
$\alpha \wedge (a \vee (b \to c)) = [\sim_{[c)} (a \vee (b \to c)) \vee (b \to c)] \wedge (a \vee (b \to c)) =$
$[\sim_{[c)} (a \vee (b \to c)) \wedge (a \vee (b \to c)] \vee [(b \to c) \wedge (a \vee (b \to c))] = c \vee (b \to c) =$
$b \to c$.
$\alpha \vee (a \vee (b \to c)) = \sim_{[c)} (a \vee (b \to c)) \vee (b \to c) \vee (a \vee (b \to c)) = 1 \vee (b \to c) = 1$.
Luego :
$\sim_{[b \to c)} (a \vee (b \to c)) = \sim_{[c)} (a \vee (b \to c)) \vee (b \to c)$, y como $c \leq b \to c$,
esto es, $c \vee (b \to c) = b \to c$ entonces : $a \to (b \to c) =$
$\sim_{[b \to c)} (a \vee (b \to c)) = \sim_{[c)} (a \vee (b \to c)) \vee (b \to c)$. Luego como $a \vee c$,
$b \to c \in [c)$ entonces $a \to (b \to c) = (\sim_{[c)} (a \vee c) \wedge \sim_{[c)} (b \to c)) \vee (b \to c) =$
$((a \to c) \wedge \sim_{[c)} (b \to c)) \vee (b \to c) = ((a \to c) \vee (b \to c)) \wedge 1 =$
$(a \to c) \vee (b \to c)$.
Análogamente $b \to (a \to c) = (b \to c) \vee (a \to c)$, y se verifica I_2).

I_3) $x \to (x \to y) = x \to y$.
Se deduce de I_1 pues:
$x \to (x \to y) = ((x \to y) \to x) \to (x \to y) = x \to y$.

I_4) $(x \to z) \to (y \to z) = (z \to x) \to (y \to x)$.
Se deduce de I_2 y M4 como sigue:
$(x \to z) \to (y \to z) = y \to ((x \to z) \to z) = y \to ((z \to x) \to x) =$
$(z \to x) \to (y \to x)$.

I_5) $((x \to y) \to z) \to z = ((x \to y) \to z) \to (x \to z)$.
A partir de M4, I_3 e I_4 obtenemos:
$((x \to y) \to z) \to z = (z \to (x \to y)) \to (x \to y) =$
$(z \to (x \to y)) \to (x \to (x \to y)) = ((x \to y) \to z) \to (x \to z)$.

I_6) Si $x \leq y$ entonces $x \to y = 1$.
En efecto $x \to y = \sim_{[y)} (x \vee y) = \sim_{[y)} y = 1$.

I_7) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1$
Resulta de aplicar sucesivamente I_2, I_2, M4, I_5 e I_6.
$(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) =$
$(x \to y) \to [(x \to (y \to z)) \to (x \to z)] =$
$(x \to y) \to [(y \to (x \to z)) \to (x \to z)] =$
$(x \to y) \to (((x \to z) \to y) \to y) =$
$(x \to y) \to [(x \to z) \to y) \to (x \to y)] = 1$.

I_8) Si $x \to y = 1$ e $y \to x = 1$ entonces $x = y$.
Por hipótesis $\sim_{[y)} (x \vee y) = 1$, $\sim_{[x)} (y \vee x) = 1$, luego
$x = \sim_{[x)} 1 = y \vee x = x \vee y = \sim_{[y)} 1 = y$

I_9) Si $x \leq y$ entonces $y \to z \leq x \to z$
De $x \leq y$ resulta $x \vee z \leq y \vee z$, entonces $y \to z = \sim_{[z)} (y \vee z) \leq$
$\sim_{[z)} (x \vee z) = x \to z$.

I_{10}) $((x \to y) \to (x \to z)) \to (x \to (y \to z)) = 1$.
De $y \leq x \to y$ resulta por I_9 e I_2 que $(x \to y) \to (x \to z) \leq y \to (x \to z) =$
$x \to (y \to z)$, entonces de I_6 sigue I_{10}.
De I_7, I_{10} e I_8 se deduce :

M3) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.

2 Q-álgebras de Tarski

Definición 2.1 [10] *Un álgebra* $(A, \to, \forall, 1)$ *del tipo (2,1,0) se dice una Q-álgebra de Tarski si* $(A, \to, 1)$ *es un álgebra de Tarski y :*

Q_1) $\forall 1 = 1$.

Q_2) $\forall x \to x = 1$.

Q_3) $\forall((x \to \forall y) \to \forall y) = (\forall x \to \forall y) \to \forall y$.

Q_4) $\forall(x \to y) \to (\forall x \to \forall y) = 1$.

Teniendo en cuenta que $x \vee y = (x \to y) \to y$, entonces Q_3 nos dice que:
$\forall(x \vee \forall y) = \forall x \vee \forall y$.

En una Q-álgebra de Tarski A se verifican las siguientes propiedades:

Q_5) $\forall\forall x = \forall x$.
Se deduce de Q_3 y Q_2 pues : $\forall\forall x = \forall(\forall x \vee \forall x) = \forall\forall x \vee \forall x = \forall x$.

Q_6) Si $x \leq y$ entonces $\forall x \leq \forall y$.
Como $\forall x \leq x \leq y$ entonces por Q_3 se tiene $\forall y = \forall(y \vee \forall x) = \forall y \vee \forall x$, por lo tanto $\forall x \leq \forall y$.

Q_7) Si $x = \forall x$, $y = \forall y$ entonces $x \to y = \forall(x \to y)$.
Por Q_4 (1) $\forall(x \to y) \leq \forall x \to \forall y$. Ahora bien como $y \leq x \to y$ entonces $\forall y \leq \forall(x \to y)$, de donde $\forall x \to \forall y \leq \forall x \to \forall(x \to y)$ por lo tanto $(\forall x \to \forall(x \to y)) \to \forall(x \to y) \leq (\forall x \to \forall y) \to \forall(x \to y)$, lo que implica que $\forall x \vee \forall(x \to y) \leq (\forall x \to \forall y) \to \forall(x \to y)$. Pero $\forall x \vee \forall(x \to y) = \forall(x \to y) \vee \forall\forall x = \forall((x \to y) \vee \forall x) = \forall((x \to y) \vee x) = \forall 1 = 1$, pues se verifica M14. Por lo tanto de aquí resulta $(\forall x \to \forall y) \to \forall(x \to y) = 1$ de donde (2) $\forall x \to \forall y \leq \forall(x \to y)$. De (1) y (2) $x \to y = \forall x \to \forall y = \forall(x \to y)$.

Sea $\forall A = \{\forall x : x \in A\}$, entonces Q_1, Q_5 y Q_7 permiten concluir que $\forall A$ es una subálgebra de Tarski de A. Si A es una Q-álgebra de Tarski con primer elemento, sabemos que A es un álgebra de Boole. Si ponemos por definición $\exists x = -\forall - x$, entonces $(A, \wedge, \vee, -, \exists, 0, 1)$ es un álgebra de Boole monádica. [8], [9], [18]. Por otro lado se tiene que:

Lema 2.1 *Si A es un álgebra de Boole monádica y ponemos $x \to y = -x \vee y$, $\forall x = -\exists -x$ entonces $(A, \to, \forall, 1)$ es una Q-álgebra de Tarski y vale:*

i) $(x \to z) \wedge (y \to z) = (x \vee y) \to z$.

ii) $\exists(x \to k) = \forall x \to k$, *si* $k \in \exists A$.

Dem. Es fácil verificar que A es una Q-álgebra de Tarski. Además,
$(x \to z) \wedge (y \to z) = (-x \vee z) \wedge (-y \vee z) = (-x \wedge -y) \vee z = -(x \vee y) \vee z = (x \vee y) \to z$
y $\exists(x \to k) = \exists(-x \vee k) = \exists - x \vee k = -\forall x \vee k = \forall x \to k$. □

Definición 2.2 *Una parte no vacía S de una Q-álgebra de Tarski A se dice una Q-subálgebra de Tarski de A si S es una subálgebra de Tarski de A y verifica: Si $x \in S$ entonces $\forall x \in S$.*

Si A es un álgebra de Tarski (respectivamente una Q-álgebra de Tarski) y $X \subseteq A$ notaremos con $TS(X)$(respectivamente $QTS(X)$) a la subálgebra de Tarski de A (respectivamente Q-subálgebra de Tarski de A) generada por el conjunto X, esto es, a la intersección de todas las subálgebras de Tarski de A (respectivamente Q-subálgebras de Tarski de A) que contienen a X. Del lema 2.1 se concluye que:

Lema 2.2 *Si A es un álgebra de Boole monádica y $X \subseteq A$ entonces $(x \to z) \wedge (y \to z) \in QTS(X)$, para todo $x, y, z \in QTS(X)$.*

Lema 2.3 *Si A es un álgebra de Boole, $X \subseteq A$ entonces $BS(X) = TS(X \cup \{0\})$, donde con $BS(X)$ notaremos a la subálgebra booleana generada por X .*

Dem. Como A es un álgebra de Boole, también es un álgebra de Tarski. Observemos que como $0 \in BS(X)$ y $X \subseteq BS(X)$ entonces $BS(X)$ es una subálgebra de Boole, luego una subálgebra de Tarski que contiene al conjunto $X \cup \{0\}$, por lo tanto $TS(X \cup \{0\}) \subseteq BS(X)$.
Por otro lado $X \subseteq X \cup \{0\} \subseteq TS(X \cup \{0\})$ y como $TS(X \cup \{0\})$ es un álgebra de Tarski con primer elemento, entonces es un álgebra de Boole. Luego $BS(X) \subseteq ST(X \cup \{0\})$. □

Definición 2.3 *Un subconjunto D de un álgebra de Tarski A se dice un sistema deductivo si:*

$D_1)$ $1 \in D$,

$D_2)$ *Si* x, $x \to y \in D$ *entonces* $y \in D$.

Dada una parte $X \subseteq A$, se denomina sistema deductivo generado por X y se nota $SD(X)$ a la intersección de todos los sistemas deductivos que contienen a X. Es claro que $SD(X)$ es un sistema deductivo, y que es el menor sistema deductivo que contiene a X. Si $X = \{a\}$ notaremos $SD(a)$ en vez de $SD(\{a\})$.

Lema 2.4 *Sea A un álgebra de Tarski , $a \in A$ entonces $SD(a) = \{h \in A : a \leq h\} = \{h \in A : a \to h = 1\} = [a)$.*

Dem.

1) El conjunto $D = \{h \in A : a \leq h\}$ es un sistema deductivo.
   Es claro que $1 \in D$.
   Supongamos que x, $x \to y \in D$ entonces $a \leq x$ y $a \leq x \to y$. Como $1 = a \to (x \to y) = (a \to x) \to (a \to y) = 1 \to (a \to y) = a \to y$ resulta que $a \leq y$ luego $y \in D$.

2) Como $a \in D$, D es un sistema deductivo que contiene al elemento a y entonces $SD(a) \subseteq D$.
   Recíprocamente, sea $h \in D$ entonces $a \leq h$ y por lo tanto $a \to h = 1 \in SD(a)$. Como $a \in SD(a)$ se tiene que $h \in SD(a)$ con lo que $D \subseteq SD(a)$.

□

Definición 2.4 *Un subconjunto D de una Q-álgebra de Tarski A se dice un Q-sistema deductivo si D es un sistema deductivo y se verifica $D_3)$ Si $x \in D$ entonces $\forall x \in D$.*
En forma análoga se define el concepto de Q-sistema deductivo generado por una parte X de A y se nota $QSD(a)$ en vez de $QSD(\{a\})$.

Lema 2.5 *Sea A una Q-álgebra de Tarski y D un Q-sistema deductivo de A, entonces la relación $x \equiv y$ sí y sólo sí $x \to y,\ y \to x \in D$, es una relación de congruencia definida sobre A.*

Dem. Como D es un sistema deductivo es bien conocido que $\equiv$ es una relación de equivalencia compatible con la implicación. Veamos que si $x \equiv y$ entonces $\forall x \equiv \forall y$.
Como $x \equiv y$ entonces $x \to y \in D$ y $y \to x \in D$, y por lo tanto $\forall(x \to y) \in D$ y $\forall(y \to x) \in D$.
Como $\forall(x \to y) \to (\forall x \to \forall y) = 1 \in D$ y $\forall(y \to x) \to (\forall y \to \forall x) = 1 \in D$ entonces $\forall x \to \forall y \in D$ y $\forall y \to \forall x \in D$, en consecuencia $\forall x \equiv \forall y$. □

Luego la importancia de Q_4 radica en el hecho que permite probar que $\equiv$ es una relación de congruencia.

Lema 2.6 *Sea A una Q-álgebra de Tarski. Si $\equiv$ es una relación de congruencia definida sobre A entonces $D(1) = \{x \in A : x \equiv 1\}$ es un Q-sistema deductivo y $x \equiv y$ sí y sólo sí $x \to y,\ y \to x \in D(1)$.*

Dem. Como $1 \equiv 1$ entonces $1 \in D(1)$.
Supongamos que $x,\ x \to y \in D(1)$, entonces $x \equiv 1,\ x \to y \equiv 1$. De $x \equiv 1$ resulta que $x \to y \equiv 1 \to y = y$ y como $x \to y \equiv 1$ tenemos que $y \equiv 1$ y entonces $y \in D(1)$.
Si $x \in D(1)$ entonces $x \equiv 1$ y por lo tanto $\forall x \equiv \forall 1 = 1$ y entonces $\forall x \in D(1)$.
Además si $x \equiv y$ entonces $1 = x \to x \equiv x \to y$ y $y \to x \equiv y \to y = 1$, luego $x \to y,\ y \to x \in D(1)$.
Si $x \to y,\ y \to x \in D(1)$ esto es $x \to y \equiv 1,\ y \to x \equiv 1$ resulta que $x = 1 \to x \equiv (y \to x) \to x = y \vee x = x \vee y = (x \to y) \to y \equiv 1 \to y = y$. □

Lema 2.7 *Sea A una Q-álgebra de Tarski, $a \in A$. Entonces $QSD(a) = SD(\forall a)$.*

Dem.

1) $SD(\forall a)$ es un Q-sistema deductivo.
   En efecto: Si $x \in SD(\forall a)$ entonces $\forall a \leq x$, esto implica que $\forall a = \forall\forall a \leq \forall x$ y entonces $\forall x \in SD(\forall a)$.

2) Como $\forall a \leq a,\ a \in SD(\forall a)$ y por lo tanto $QSD(a) \subseteq SD(\forall a)$. $QSD(a)$ es, en particular, un sistema deductivo que contiene a $\forall a$ y entonces $SD(\forall a) \subseteq QSD(a)$ con lo que el lema queda probado.

□

Definición 2.5 *Dadas dos Q-álgebras de Tarski A y A', un Q-homomorfismo de A en A' es una aplicación $h : A \longrightarrow A'$ que verifica :*

H1) $h(x \to y) = h(x) \to h(y)$.

H2) $h(\forall x) = \forall h(x)$.

Si h es epiyectiva (inyectiva), h se dirá un epimorfismo (monomorfismo). Si h es epimorfismo y monomorfismo diremos que es un isomorfismo y notaremos $A \cong A'$.
Si $h : A \longrightarrow A'$ es un epimorfismo diremos que A' es una imagen homomórfica de A.
Si A es una Q-álgebra de Tarski, D un Q-sistema deductivo de A y $a \in A$, indicaremos con $|a|_D$ ó $|a|$ la clase de equivalencia módulo D determinada por a, e indicaremos con A/D al conjunto de las clases de equivalencia módulo D, algebrizado en forma natural:

1) $|x| \to |y| = |x \to y|$.

2) $|\forall x| = \forall |x|$.

Entonces por métodos habituales se prueba que A/D es una Q-álgebra de Tarski, que tiene último elemento $|1| = D$ y que la aplicación $\varphi(a) = |a|$ de A en A/D es un Q-homomorfismo que verifica $\varphi(A) = A/D$. Al álgebra A/D se la denomina álgebra cociente de A por D.

Definición 2.6 *Sea A una Q-álgebra de Tarski. A se dice simple si:*

1) A tiene más de un elemento.

2) Las únicas imágenes homomórficas de A son isomorfas a A ó a una Q-álgebra de Tarski con un sólo elemento.

Lo anterior es equivalente a decir que A es simple sí y sólo sí los únicos Q-sistemas deductivos de A son A y $\{1\}$.

Lema 2.8 *A es una Q-álgebra de Tarski simple sí y sólo sí A es un álgebra de Boole monádica simple,* [6].

Dem. Dado que la revista citada anteriormente es de poca difusión, indicaremos la demostración de este resultado. La demostración de la condición necesaria difiere de la indicada por A. Figallo en [6].

($\Leftarrow$) A es un álgebra de Boole monádica simple sí y sólo sí $\exists A = \{0,1\} = \forall A$. Luego el álgebra de Tarski $(A, \to, \forall, 1)$ es simple, dado que sus únicos Q-sistemas deductivos son $\{1\}$ y A.
En efecto, $\{1\}$ es un Q-sistema deductivo y si D es un Q-sistema deductivo $D \neq \{1\}$ entonces existe $d \in D$, $d \neq 1$ de donde resulta que $\forall d = 0$ por lo tanto $0 \in D$ y entonces $D = A$.

($\Rightarrow$) Sea A una Q-álgebra de Tarski simple. Como A tiene más de un elemento existe $t \in A$, $t \neq 1$. Luego $x_o = \forall t \in \forall A$ y $x_o \neq 1$ pues $x_o = \forall t \leq t < 1$.
Probemos ahora que si $u, v \in \forall A$, $u \neq 1$, $v \neq 1$ entonces $u = v$.
Como A es simple entonces (1) $QSD(u) = A$ ó (2) $QSD(u) = \{1\}$ y (3) $QSD(v) = A$ ó (4) $QSD(v) = \{1\}$.
Como $QSD(y) = SD(\forall y)$, si se verifica (2), como $\forall u = u$, tenemos que $\{1\} = QSD(u) = SD(u) = \{h \in A : u \leq h\}$. De aquí resulta que $u = 1$.

Absurdo.
Análogamente se prueba que no puede darse (4). Luego $QSD(u) = A = QSD(v)$, de donde (5) $SD(u) = SD(v)$. Se tiene entonces que $\{h \in A: \ u \leq h\} = \{q \in A: \ v \leq q\}$.
Como $u \in SD(u)$, de (5) resulta (6) $v \leq u$. En forma análoga de $v \in SD(v)$ y (5) resulta (7) $u \leq v$, luego $u = v$.
Acabamos de probar que $\forall A = \{1, x_o\}$. Veamos que x_o es el primer elemento de A, esto es $x_o \leq z$ cualquiera se $z \in A$, o lo que es equivalente $x_o \to z = 1$ cualquiera sea $z \in A$.
Como $\forall z \leq z$; entonces $x_o \to \forall z \leq x_o \to z$. Como $\forall z \in \forall A = \{1, x_o\}$ entonces si $\forall z = 1$ tenemos que $x_o \to \forall z = x_o \to 1 = 1$ y en consecuencia $x_o \to z = 1$. Si $\forall z = x_o$ entonces $x_o \to \forall z = x_o \to x_o = 1$ y entonces $x_o \to z = 1$. Luego A tiene primer elemento y en consecuencia A es un álgebra de Boole monádica y como $\forall A$ está constituido por el primer y el último elemento de A, A es un álgebra de Boole monádica simple .

□

3 Determinación del número de elementos de la Q-álgebra de Tarski con n generadores libres

Notaremos con $FMB(n)$ (respectivamente $FQT(n)$) al álgebra de Boole monádica (respectivamente Q-álgebra de Tarski) con n generadores libres .
Sean G^*(respectivamente G), conjuntos con n generadores libres de $FMB(n)$ y $FQT(n)$ respectivamente. Como $FMB(n)$ es, en particular, una Q-álgebra de Tarski, podemos considerar la Q-subálgebra de Tarski generada en $FMB(n)$ por G^*, que notaremos $QTS(G^*)$.

Lema 3.1 $QTS(G^*) \cong FQT(n)$, [6].

Dem. Por las mismas razones expuestas en la demostración del lema 2.8, indicaremos la demostración de este resultado, la cual difiere en algunos aspectos de la indicada por A. Figallo en [6]. Sea $f: G \longrightarrow G^*$ una biyección. Como $FMB(n)$ es, en particular, una Q-álgebra de Tarski, f se puede extender a un único Q-homomorfismo $h: FQT(n) \longrightarrow FMB(n)$. Además $h(FQT(n)) = h(QTS(G)) = QTS(h(G)) = QTS(G^*)$.
Veamos que $A = QTS(G^*)$ es la Q-álgebra de Tarski con n generadores libres. Para ello sea $\alpha: G^* \longrightarrow A'$, A' Q-álgebra de Tarski arbitraria. Si A' tiene un único elemento es claro que α se puede extender a un único Q-homomorfismo h_α.
Si A' es simple entonces A' es un álgebra de Boole monádica simple y como G^* genera libremente a $FMB(n)$, α se extiende a un único homomorfismo monádico $h_\alpha: FMB(n) \longrightarrow A'$. Luego $h': A \longrightarrow A'$, la restricción de h_α a A, es un Q-homomorfismo que extiende a α.
Si A' no es trivial ni simple, entonces por técnicas usuales se prueba que A' es isomorfa

a una Q-subálgebra A'' de $P = \Pi\{A'/M,\ M \in \mathcal{M}\}$, donde $\mathcal{M}$ es el conjunto de los Q-sistemas deductivos maximales de A'. Se tiene además que A'/M es una Q-álgebra de Tarski simple, luego un álgebra de Boole monádica simple, y por lo tanto P es un álgebra de Boole monádica. Si $\beta : A' \longrightarrow A''$ es el isomorfismo en cuestión entonces $\beta(A') = A'' \subseteq P$.
Sea $\gamma = \beta \circ \alpha : G^* \longrightarrow P$, entonces existe un homomorfismo monádico
$h_\gamma : FMB(n) \longrightarrow P$ que extiende a γ. Como $\alpha(G^*) \subseteq A$ entonces $\gamma(G^*) = (\beta \circ \alpha)(G^*) = \beta(\alpha(G^*)) \subseteq \beta(A') = A''$, luego $QS(\gamma(G^*)) \subseteq A''$.
Sea $h : A \longrightarrow P$, la restricción de h_γ a A. h es un Q-homomorfismo que extiende a γ. En efecto, $h(g) = h_\alpha(g) = \gamma(g)$ cualquiera sea $g \in G^*$. Se tiene entonces que :
$h(A) = h(QS(G^*)) = QS(h(G^*)) = QS(h_\gamma(G^*)) = QS(\gamma(G^*)) \subseteq A''$. Luego
$\delta = \beta^{-1} \circ h : A \longrightarrow A'$ es un Q-homomorfismo y además :
$\delta(g) = \beta^{-1}(h(g)) = \beta^{-1}(h_\gamma(g)) = \beta^{-1}(\gamma(g)) = \beta^{-1}(\beta(\alpha(g))) = \alpha(g)$, para todo $g \in G^*$. □

Corolario 3.1 *$FQT(n)$ es finita.*

Dem. Como $QST(G) \subseteq FMB(n)$ y $FMB(n)$ es finita, podemos afirmar que $FQT(n)$ es finita . □

Si X es un conjunto finito notaremos con $N(X)$ al número de sus elementos. Si B es un álgebra de Boole finita, no trivial, con k átomos, notaremos con $\mathcal{A}(B)$ al conjunto de todos sus átomos, y para $x \in B$, con $\mathcal{A}(x)$ al conjunto de todos los átomos de B que preceden a x, entonces es bien conocido que:

Lema 3.2 *1)* $\mathcal{A}(x \vee y) = \mathcal{A}(x) \cup \mathcal{A}(y)$,

2) $\mathcal{A}(x \wedge y) = \mathcal{A}(x) \cap \mathcal{A}(y)$,

3) Si $N[\mathcal{A}(x)] = t$, $1 \leq t \leq k$ *entonces* $N[[x)] = 2^{N[\mathcal{A}(B)]-N[\mathcal{A}(x)]} = 2^{k-t}$.

Recordemos algunos resultados sobre las álgebras de Boole monádicas libres obtenidos en [19] que usaremos más adelante.
Sea $n \in N$ y $FB(2^n - 1)$ el álgebra de Boole con $2^n - 1$ generadores libres y $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_{2^n-1}\}$ un conjunto de generadores libres de $FB(2^n - 1)$.
Sea $\mathcal{P} = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_{2^n}$, donde $E_i = FB(2^n - 1)$, para $1 \leq i \leq 2^n$, luego $\mathcal{P}$ es un álgebra de Boole.
Sea $H = \{1, 2, \ldots, 2^n\}$, luego si $h \in H$, $h = 1 + \sum_{r=1}^{n} h_r 2^{r-1}$, donde $h_r \in \{0, 1\} \subseteq \mathbf{Z}$.
Consideremos $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}^{(i)} : 1 \leq i \leq 2^n\} \subseteq \mathcal{P}$ tal que:

4) $$\mathbf{v}_h^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad h = i \\ 0 & \text{si} \quad h \neq i \end{cases}, \quad 1 \leq h \leq 2^n \ ,$$

y $\mathbf{W} = \{\mathbf{w}^{(i)} : 1 \leq i \leq 2^n\} \subseteq \mathcal{P}$, donde:

$$5) \qquad \mathbf{w}_h^{(i)} = \begin{cases} g_{2^n-(i-h)} & \text{si} \quad h < i \\ 1 & \text{si} \quad h = i \\ g_{h-i} & \text{si} \quad i < h \end{cases} , \quad 1 \leq h \leq 2^n \ ,$$

entonces : 6) $K = BS(\mathbf{W})$ es una subálgebra booleana finita de $\mathcal{P}$, luego condicionalmente completa, y por lo tanto induce un operador existencial $\exists$ sobre $\mathcal{P}$, esto es $(\mathcal{P}, \exists)$ es un álgebra de Boole monádica. [8], [9].
Sea $\mathbf{G} = \{\mathbf{g}^{(i)} : 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathcal{P}$ donde

$$7) \qquad \mathbf{g}_h^{(i)} = \begin{cases} 0 \in FB(2^n - 1) & \text{si} \quad h_i = 0 \in \mathbf{Z} \\ \\ 1 \in FB(2^n - 1) & \text{si} \quad h_i = 1 \in \mathbf{Z} \end{cases} , \quad 1 \leq h \leq 2^n \ .$$

En [19] probamos que $\mathcal{P} = MS(\mathbf{G}) = BS(\mathbf{V} \cup \mathbf{W})$, donde con $MS(\mathbf{G})$ notamos a la subálgebra monádica de $\mathcal{P}$ generada por $\mathbf{G}$, y que $\mathbf{G}$ es un conjunto de generadores libres de $\mathcal{P}$. Luego $\mathcal{P} = FMB(n)$.

Observemos que $N[\mathcal{A}(FMB(n))] = 2^n \times 2^{2^n-1}$.
Además en [19] se demuestra que:

8) Si i es un elemento fijo, $1 \leq i \leq 2^n$, entonces:
$\{\mathbf{w}_h^{(i)} : 1 \leq h \leq 2^n\} = \{1, g_1, g_2, \ldots, g_{2^n-1}\}$.

9) $\exists \mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{w}^{(i)}$, $1 \leq i \leq 2^n$.

Si B es un álgebra de Boole y $t \in \mathbf{N}$, sea $\mathbf{B}(B,t) = \{(b_1, b_2, \ldots, b_t) : b_i \in \{0,1\} \subseteq B\,, 1 \leq i \leq t\}$ y si $x, y \in B$, pongamos $x + y = (-x \wedge y) \vee (x \wedge -y)$. Luego $x + 0 = x$ y $x + 1 = -x$.
Si $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_t\} \subseteq B$ y $b \in \mathbf{B}(B,t)$, notaremos con $m_b(X)$ o más sencillamente m_b al elemento $\bigwedge_{i=1}^{t}(x_i + b_i)$, y $m(X) = \{m_b : b \in \mathbf{B}(B,t)\}$.

En [1] probamos que $m_b \neq 0$, cualquiera sea $b \in \mathbf{B}(FMB(n), n)$ y que $m(\mathbf{G})$ tiene 2^n elementos. Sea $m(\mathbf{G}) = \{m_i : 1 \leq i \leq 2^n\}$.
Además se demostró que si $a \in \mathcal{A}(FMB(n))$ entonces:

$$a = m_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{2^n}(\exists m_i + b_i)\,,$$

donde $b \in \mathbf{B}(FMB(n), 2^n)$ y $b_j = 0$.

Lema 3.3 *Si $a \in \mathcal{A}(FMB(n))$ entonces $\forall \mathbf{g} \vee a \in QTS(\mathbf{G})$, cualquiera sea $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$.*

Dem. De lo expuesto precedentemente,
$\forall \mathbf{g} \vee a = (m_j \vee \forall \mathbf{g}) \wedge (\forall \mathbf{g} \vee \bigwedge_{i=1}^{2^n} (\exists m_i + b_i)) = (m_j \vee \forall \mathbf{g}) \wedge [\bigwedge_{i=1}^{2^n} (\forall \mathbf{g} \vee (\exists m_i + b_i))]$, para algún j, $1 \leq j \leq 2^n$, tal que $b_j = 0$.
Probaremos a continuación que:

a) $m_j \vee \forall \mathbf{g} = x_j \to \forall \mathbf{g}$, con $x_j \in QTS(\mathbf{G})$ y

b) $\forall \mathbf{g} \vee (\exists m_i + b_i) = y_i \to \forall \mathbf{g}$, con $y_i \in QTS(\mathbf{G})$.

Para demostrar a) debemos considerar los siguientes casos:

a_1) Si $m_j = \bigwedge_{i=1}^{n} \mathbf{g}^{(i)}$, del lema 2.1 i) resulta,

$$\begin{aligned} m_j \vee \forall \mathbf{g} &= (\bigwedge_{i=1}^{n} \mathbf{g}^{(i)}) \vee \forall \mathbf{g} = \bigwedge_{i=1}^{n} (\mathbf{g}^{(i)} \vee \forall \mathbf{g}) = \bigwedge_{i=1}^{n} ((\mathbf{g}^{(i)} \to \forall \mathbf{g}) \to \forall \mathbf{g}) = \\ &= (\bigvee_{i=1}^{n} (\mathbf{g}^{(i)} \to \forall \mathbf{g})) \to \forall \mathbf{g} = x_j \to \forall \mathbf{g} \ , \end{aligned}$$

donde $x_j = \bigvee_{i=1}^{n} (\mathbf{g}^{(i)} \to \forall \mathbf{g}) \in QTS(\mathbf{G})$.

a_2) Si $m_j = \bigwedge_{i=1}^{n} -\mathbf{g}^{(i)}$, por el lema 2.1 i), tenemos

$$\begin{aligned} m_j \vee \forall \mathbf{g} &= (\bigwedge_{i=1}^{n} -\mathbf{g}^{(i)}) \vee \forall \mathbf{g} = \bigwedge_{i=1}^{n} (-\mathbf{g}^{(i)} \vee \forall \mathbf{g}) = \bigwedge_{i=1}^{n} (\mathbf{g}^{(i)} \to \forall \mathbf{g}) = \\ &= (\bigvee_{i=1}^{n} \mathbf{g}^{(i)}) \to \forall \mathbf{g} = x_j \to \forall \mathbf{g} \ , \ \text{donde} \ x_j = \bigvee_{i=1}^{n} \mathbf{g}^{(i)} \in QTS(\mathbf{G}). \end{aligned}$$

a_3) Si $m_j = \bigwedge_{s \in S} \mathbf{g}^{(s)} \wedge \bigwedge_{t \in T} -\mathbf{g}^{(t)}$, donde $\{S, T\}$ es una partición de $\{1, 2 \cdots, n\}$, entonces

$$\begin{aligned} m_j \vee \forall \mathbf{g} &= \bigwedge_{s \in S} (\mathbf{g}^{(s)} \vee \forall \mathbf{g}) \wedge \bigwedge_{t \in T} (-\mathbf{g}^{(t)} \vee \forall \mathbf{g}) = \\ &= \bigwedge_{s \in S} ((\mathbf{g}^{(s)} \to \forall \mathbf{g}) \to \forall \mathbf{g}) \wedge \bigwedge_{t \in T} (\mathbf{g}^{(t)} \to \forall \mathbf{g}). \end{aligned}$$

Poniendo $y_s = \mathbf{g}^{(s)} \to \forall \mathbf{g} \in QTS(\mathbf{G})$ e $y_t = \mathbf{g}^{(t)} \in QTS(\mathbf{G})$ y usando el lema 2.1 i) se obtiene

$$\begin{aligned} m_j \vee \forall \mathbf{g} &= \bigwedge_{s \in S} (y_s \to \forall \mathbf{g}) \wedge \bigwedge_{t \in T} (y_t \to \forall \mathbf{g}) = \bigwedge_{i=1}^{n} (y_i \to \forall \mathbf{g}) = \\ &= (\bigvee_{i=1}^{n} y_i) \to \forall \mathbf{g} = x_j \to \forall \mathbf{g} \ , \ \text{donde} \ x_j = \bigvee_{i=1}^{n} y_i \in QTS(\mathbf{G}). \end{aligned}$$

Para probar b) debemos considerar:

b_1) Si $b_i = 0$, por el resultado obtenido en a) y el lema 2.1 ii),
$\forall \mathbf{g} \vee (\exists m_i + b_i) = \forall \mathbf{g} \vee \exists m_i = \exists(m_i \vee \forall \mathbf{g}) = \exists(x_i \to \forall \mathbf{g}) = \forall x_i \to \forall \mathbf{g} = y_i \to \forall \mathbf{g}$,
donde $y_i = \forall x_i \in QTS(\mathbf{G})$.

b_2) Si $b_i = 1$ entonces
$\forall \mathbf{g} \vee (\exists m_i + b_i) = \forall \mathbf{g} \vee -\exists m_i = (-\exists m_i \to \forall \mathbf{g}) \to \forall \mathbf{g} = (\exists m_i \vee \forall \mathbf{g}) \to \forall \mathbf{g} =$
$\exists(m_i \vee \forall \mathbf{g}) \to \forall \mathbf{g} = \exists(x_i \to \forall \mathbf{g}) \to \forall \mathbf{g} = (\forall x_i \to \forall \mathbf{g}) \to \forall \mathbf{g} = y_i \to \forall \mathbf{g}$, donde
$y_i = \forall x_i \to \forall \mathbf{g} \in QTS(\mathbf{G})$.

De a), b) y el lema 2.1 resulta que:
$\forall \mathbf{g} \vee a = (x_j \to \forall \mathbf{g}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{2^n} (y_i \to \forall \mathbf{g}) = (x_j \to \forall \mathbf{g}) \wedge ((\bigvee_{i=1}^{2^n} y_i) \to \forall \mathbf{g}) =$
$(x_j \vee \bigvee_{i=1}^{2^n} y_i) \to \forall \mathbf{g} \in QTS(\mathbf{G})$, pues $x_j \vee \bigvee_{i=1}^{2^n} y_i \in QTS(\mathbf{G})$. □

Lema 3.4 *$QTS(\mathbf{G}) = \bigcup_{i=1}^{n} [\forall \mathbf{g}^{(i)})$, donde $[\forall \mathbf{g}^{(i)}) = \{x \in FMB(n) : \forall \mathbf{g}^{(i)} \leq x\}$.*

Dem. Sea $\mathbf{X} = \bigcup_{i=1}^{n} [\forall \mathbf{g}^{(i)})$.

a) $\mathbf{X}$ es una Q-subálgebra de $\mathcal{P}$.

a1) $1 \in \mathbf{X}$, pues $1 \in [\forall \mathbf{g}^{(i)})$, cualquiera sea i, $1 \leq i \leq n$.

a2) Si $x, y \in \mathbf{X}$ entonces $x \to y \in \mathbf{X}$.
Por hipótesis $\forall \mathbf{g}^{(i)} \leq y$ para algún i, $1 \leq i \leq n$ y como $y \leq x \to y$, tenemos que $x \to y \in \mathbf{X}$.

a3) Si $x \in \mathbf{X}$ entonces $\forall x \in \mathbf{X}$.
Por hipótesis existe i, $1 \leq i \leq n$, tal que $\forall \mathbf{g}^{(i)} \leq x$, luego $\forall \mathbf{g}^{(i)} = \forall \forall \mathbf{g}^{(i)} \leq \forall x$ y por lo tanto $\forall x \in \mathbf{X}$.

b) $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{X}$.
Dado $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$, como $\forall \mathbf{g} \leq \mathbf{g}$ entonces $\mathbf{g} \in [\forall \mathbf{g}) \subseteq \mathbf{X}$.

De a) y b) resulta que $QTS(\mathbf{G}) \subseteq \mathbf{X}$.

Además si $x \in \mathbf{X}$ entonces $\forall \mathbf{g} \leq x$, para algún $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$, de aquí $x = \forall \mathbf{g} \vee x =$
$\forall \mathbf{g} \vee \bigvee \{a : a \in \mathcal{A}(x)\} = \bigvee \{\forall \mathbf{g} \vee a : a \in \mathcal{A}(x)\}$, y por lo visto en el lema 3.3, $x \in QTS(\mathbf{G})$.
□

Lema 3.5 *Si G es un conjunto de generadores libres de $FMB(n)$ y G_1, $G_2 \subseteq G$, son tales que $N[G_1] = N[G_2]$, entonces:*

a) $N[\bigcap_{g \in G_1} [\forall g)] = N[\bigcap_{g \in G_2} [\forall g)]$.

b) $N[\mathcal{A}(\bigwedge_{g\in G_1} \forall g)] = N[\mathcal{A}(\bigwedge_{g\in G_2} \forall g)]$.

Dem. Como $N[G_1] = N[G_2]$, sea $\alpha : G_1 \longrightarrow G_2$ una biyección y $f : G \longrightarrow G$, la aplicación definida por:

$$f(g) = \begin{cases} \alpha(g) & \text{si } g \in G_1 - G_2 \\ \alpha^{-1}(g) & \text{si } g \in G_2 - G_1 \\ g & \text{si } g \notin G_1 \lhd G_2 \end{cases} .$$

Es fácil probar que f es una biyección, que verifica: (i) $f(G_1) = G_2$.
Sea $h_f : FMB(n) \longrightarrow FMB(n)$ el único homomorfismo que extiende a f.

Como $h_f(FMB(n)) = h_f(MS(G)) = MS(h_f(G)) = MS(f(G)) = MS(G) = FMB(n)$, entonces h_f es suryectiva y por ser $FMB(n)$ finita, h_f es biunívoca.

Teniendo en cuenta que h_f extiende a f e (i) resulta: (ii) $h_f(\bigvee_{g\in G_1} \forall g) = \bigvee_{g\in G_2} \forall g$.

En efecto $h_f(\bigvee_{g\in G_1} \forall g) = \bigvee_{g\in G_1} \forall h_f(g) = \bigvee_{g\in G_1} \forall f(g) = \bigvee_{g\in G_2} \forall g$. Análogamente se prueba (iii) $h_f(\bigwedge_{g\in G_1} \forall g) = \bigwedge_{g\in G_2} \forall g$. Observemos que si $a \in \mathcal{A}(FMB(n))$ entonces $a' = h_f(a) \in \mathcal{A}(FMB(n))$.

Probemos que $(*)$ $N[[\bigvee_{g\in G_1} \forall g)] = N[[\bigvee_{g\in G_2} \forall g)]$.

Sea $t \in [\bigvee_{g\in G_1} \forall g)$ entonces $\bigvee_{g\in G_1} \forall g \leq t$ y por lo tanto $h_f(\bigvee_{g\in G_1} \forall g) \leq h_f(t)$. De aquí resulta, teniendo en cuenta (ii) que $\bigvee_{g\in G_2} \forall g \leq h_f(t)$ y entonces $h_f(t) \in [\bigvee_{g\in G_2} \forall g)$.

Sea $z \in [\bigvee_{g\in G_2} \forall g)$, luego (iv) $\bigvee_{g\in G_2} \forall g \leq z = h_f(w)$, con $w \in FMB(n)$. Consideremos el elemento $r = w \vee \bigvee_{g\in G_1} \forall g \in [\bigvee_{g\in G_1} \forall g)$. De (iv) resulta, teniendo en cuenta (ii), que $h_f(r) = h_f(w) \vee h_f(\bigvee_{g\in G_1} \forall g) = z \vee \bigvee_{g\in G_2} \forall g = z$.

Entonces la restricción f' de h_f al conjunto $[\bigvee_{g\in G_1} \forall g)$ establece una biyección entre $[\bigvee_{g\in G_1} \forall g)$ y $[\bigvee_{g\in G_2} \forall g)$, de donde se concluye $(*)$.

Por otro lado, como $[\bigvee_{g\in G_i} \forall g) = \bigcap_{g\in G_i} [\forall g)$, para $i = 1, 2$, resulta la parte a) del lema.

Sea $a \in \mathcal{A}(\bigwedge_{g\in G_1} \forall g)$, entonces $a \leq \bigwedge_{g\in G_1} \forall g$ y $a \in \mathcal{A}(FMB(n))$, por lo tanto, teniendo en cuenta (iii), $a' = h_f(a) \leq h_f(\bigwedge_{g\in G_1} \forall g) = \bigwedge_{g\in G_2} \forall g$ y además $a' \in \mathcal{A}(FMB(n))$. Luego tenemos que $h_f(\mathcal{A}(\bigwedge_{g\in G_1} \forall g)) \subseteq \mathcal{A}(\bigwedge_{g\in G_2} \forall g)$.

Sea $a' \in \mathcal{A}(\bigwedge_{g\in G_2} \forall g)$, como h_f^{-1} es un isomorfismo, $a = h_f^{-1}(a') \in \mathcal{A}(FMB(n))$ y

además $a = h_f^{-1}(a') \leq \bigwedge_{g \in G_2} (\forall h_f^{-1}(g)) = \bigwedge_{g \in G_1} \forall g$, de donde $a \in \mathcal{A}(\bigwedge_{g \in G_1} \forall g)$ y por lo tanto $h_f(\mathcal{A}(\bigwedge_{g \in G_1} \forall g)) = \mathcal{A}(\bigwedge_{g \in G_2} \forall g)$, y como h_f es biunívoca, resulta la parte b) del lema. □

Ahora bien, por el lema 3.4 sabemos que $FQT(n) = QTS(\mathbf{G}) = \bigcup_{i=1}^{n} [\forall \mathbf{g}^{(i)})$.
Usando una fórmula bien conocida de cálculo combinatorio, el lema 3.5, y las propiedades 3), 1) y 2) indicadas en el lema 3.2, obtenemos:

$$N[FQT(n)] = N[\bigcup_{i=1}^{n} [\forall \mathbf{g}^{(i)})] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} N[\bigcap_{r=1}^{j} [\forall \mathbf{g}^{(r)})] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} N[[\bigvee_{r=1}^{j} \forall \mathbf{g}^{(r)})] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} 2^{(2^n \times 2^{2^n - 1}} - N[\mathcal{A}(\bigvee \{\forall \mathbf{g}^{(r)} : 1 \leq r \leq j\})]) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} 2^{(2^n \times 2^{2^n - 1}} - N[\bigcup \{\mathcal{A}(\forall \mathbf{g}^{(r)}) : 1 \leq r \leq j\}]) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} 2^{(2^n \times 2^{2^n - 1}} - \sum_{r=1}^{j} (-1)^{r+1} \binom{j}{r} N[\mathcal{A}(\bigwedge \{\forall \mathbf{g}^{(s)} : 1 \leq s \leq r\})])$$

El problema se reduce entonces, a calcular para cada r, $1 \leq r \leq n$, el número de átomos que precede al ínfimo de r elementos del conjunto $\forall \mathbf{G} = \{\forall \mathbf{g}^{(i)} : 1 \leq i \leq n\}$.
Teniendo en cuenta el lema 3.5, b), podemos tomar por conveniencia el conjunto:
$\{\forall \mathbf{g}^{(n-(s-1))}, 1 \leq s \leq r\} \subseteq \forall \mathbf{G}$.

Dado r, $1 \leq r \leq n$, sea

$$\mathbf{x}^{(r)} = \bigwedge_{s=1}^{r} \mathbf{g}^{(n-(s-1))}.$$

Probaremos que $\mathbf{x}^{(r)}$ tiene sus primeras $2^n - 2^{n-r}$ coordenadas iguales a cero y las últimas 2^{n-r} coordenadas iguales a 1.
Supongamos que existe h, $1 \leq h \leq 2^n - 2^{n-r}$, tal que $\mathbf{x}_h^{(r)} = \bigwedge_{s=1}^{r} \mathbf{g}_h^{(n-(s-1))} = 1$, esto equivale a decir que $\mathbf{g}_h^{(n-(s-1))} = 1$ para todo s, $1 \leq s \leq r$, entonces $h_{n-(s-1)} = 1$ para todo s, $1 \leq s \leq r$.

Ahora bien,

$$h = 1 + \sum_{i=1}^{n} h_i\, 2^{i-1} \geq 1 + \sum_{i=n-(r-1)}^{n} 2^{i-1} = 1 + 2^n - 1 - \sum_{i=1}^{n-r} 2^{i-1} =$$
$$= 2^n - (2^{n-r} - 1) = 2^n - 2^{n-r} + 1 > 2^n - 2^{n-r}. \text{ Absurdo.}$$

Para probar que las últimas 2^{n-r} coordenadas de $\mathbf{x}^{(r)}$ son iguales a 1, es suficiente ver que cualquiera sea s, $1 \leq s \leq n$, $\mathbf{g}^{n-(s-1)}$ tiene las últimas 2^{n-s} coordenadas iguales a 1, lo que equivale a probar que $h_{n-(s-1)} = 1$, cualquiera sea h , $2^n - 2^{n-s} + 1 \leq h \leq 2^n$.

Supongamos que existe h', $2^n - 2^{n-s} + 1 \leq h' \leq 2^n$ tal que $h'_{n-(s-1)} = 0$. Entonces

$$h' = 1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n-(s-1)}}^{n} h'_i\, 2^{i-1} \leq 1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n-(s-1)}}^{n} 2^{i-1} = 1 + 2^n - 1 - 2^{n-s} =$$
$$= 2^n - 2^{n-s} < 2^n - 2^{n-s} + 1. \text{ Absurdo.}$$

De lo anterior, 4) y 9) tenemos:

$$\bigwedge_{s=1}^{r} \forall \mathbf{g}^{(n-(s-1))} = \forall \mathbf{x}^{(r)} = -\exists - \mathbf{x}^{(r)} = -\exists (\bigvee_{i=1}^{2^n - 2^{n-r}} \mathbf{v}^{(i)}) = \bigwedge_{i=1}^{2^n - 2^{n-r}} -\mathbf{w}^{(i)}.$$

La coordenada h-ésima de $\forall \mathbf{x}^{(r)}$ es $\bigwedge_{i=1}^{2^n - 2^{n-r}} -\mathbf{w}_h^{(i)}$, que es igual a cero para todo h, $1 \leq h \leq 2^n - 2^{n-r}$, pues por definición $\mathbf{w}_i^{(i)} = 1$.

Por otro lado, si $h \geq 2^n - 2^{n-r} + 1$, de 8) resulta que la coordenada h-ésima de $\forall \mathbf{x}^{(r)}$ es ínfimo de $2^n - 2^{n-r}$ elementos del conjunto $\{-g_1, -g_2, \ldots, -g_{2^n-1}\} \subseteq FB(2^n - 1)$.

Luego cada una de las últimas 2^{n-r} coordenadas de $\forall \mathbf{x}^{(r)}$ es un polinomio mínimo en las $2^n - 1$ variables $g_1, g_2, \ldots, g_{2^n-1}$, entonces es supremo de $2^{(2^n-1)-(2^n-2^{n-r})} = 2^{2^{n-r}-1}$ átomos de $FB(2^n - 1)$.

Podemos concluir entonces que $\forall \mathbf{x}^{(r)}$ es supremo de $2^{n-r} \times 2^{2^{n-r}-1} = 2^{(2^{n-r}+n-r-1)}$ átomos de $FMB(n)$, y por lo tanto :

$$\boxed{N[FQT(n)] = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} 2^{[2^n \times 2^{2^n-1} - \sum_{r=1}^{j} (-1)^{r+1} \binom{j}{r} 2^{(2^{n-r}+n-r-1)}]}}.$$

Tenemos así que $N[FQT(1)] = 2^3$, $N[FQT(2)] = 2^{25}(2^4 - 1)$,
$$N[FQT(3)] = 2^{939}(3.2^{53} - 3.2^{25} + 1) > 2^{992}.$$

References

[1] Abbott J.C., *Semi-boolean algebras*, Mat. Vesnik, 4 (19), (1967), 177-198.

[2] Abbott J.C., *Implicational algebras*, Bull. Math, R.S. Roumaine, 11 (1967), 3-23.

[3] Cignoli R., *Quantifiers on distributive lattices*, Discrete Mathematics 96 (1991) (3), 183-197.

[4] Diego A., *Sobre álgebras de Hilbert*, Notas de Lógica Matemática, 12 (1965), Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina.

[5] Diego A., *Sur les algébres de Hilbert*, Collection de Logique Mathematique, serie A, 21 , Gauthier-Villars, Paris (1966).

[6] Figallo A., *Algebras de Tarski monádicas*, Facultad de Filosofía, Univ. Nac. de San Juan(1983), San Juan. Argentina.

[7] Figallo A., *Free monadic Tarski algebras*, a publicar en Algebra Universalis.

[8] Halmos P.R., *Finite monadic algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 219-227.

[9] Halmos P.R., *Algebraic Logic*, Chelsea Pub. Co. New York (1962).

[10] Iturrioz L. y Monteiro A., *Representación de álgebras de Tarski monádicas.* Revista de la Unión Matemática Argentina, 5 (1962), 361 .

[11] Iturrioz L. y Monteiro A., *Cálculo proposicional implicativo clásico con n variables proposicionales*, Rev. Un. Mat. Argentina, XXII, 3 (1965), 146.

[12] Iturrioz L. et Monteiro A., *Les algèbres de Tarski avec un nombre fini de générateurs libres.* Informe Técnico N° 37, INMABB-UNS-CONICET, Bahía Blanca, Argentina(1994).

[13] Kalman J.A., *Equational completeness and families of sets closed under substraction*, Ind. Math. 22 (1966), 402-405.

[14] Lyndon R.C., *Identities in two-valued calculi*, Trans. Amer. Math. soc. 71 (1951), 457-465.

[15] Monteiro A., *Algebra de la Lógica II*, cours réalisé à l'Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, (1960).

[16] Monteiro A., *Sur les algèbres de Heyting symétriques*, Portugaliae Mathematica, 39 (1980), 1-237.

[17] Monteiro L., *Construction des algèbres de Tarski libres sur un ensemble ordonné*, Math. Japonica, 23, N° 4 (1978), 433-437.

[18] Monteiro L., *Algèbres de Boole monadiques libres*, Algebra Universalis, 8 (1978), 374-380.

[19] Monteiro L., Abad M., Savini S. y Sewald J., *Sobre álgebras de Boole monádicas libres.* Informe Técnico *N*°36, INMABB-UNS-CONICET, Bahía Blanca, Argentina (1994).