INFORME TECNICO INTERNO

N°. 33

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina

I.T.I. N° 33

ESTUDIO DE LAS DIMENSIONES TOPOLÓGICAS DE POINCARE-BROUWER, DE CECH Y DE LEBESGUE

Edgardo L. Fernández Stacco

INMABB

UNS - CONICET

1993

INDICE

§ 1. INTRODUCCION.

Henri Poincaré, en un artículo publicado en la revista "Revue de métaphisique et de morale", página 486, dice:

"De todos los teoremas del Analisis Situs, el más importante es el que mencionaremos diciendo que el espacio tiene tres dimensiones. Es esta proposición que vamos a considerar, y vamos a expresarla en estos términos: ¿Cuándo decimos que el espacio tiene tres dimensiones, que queremos significar?

"...Si para dividir un continuo es suficiente considerar como cortes un cierto número de elementos distinguibles el uno del otro, decimos que este continuo es de una dimensión; si, por el contrario, para dividir un continuo es necesario considerar como cortes un sistema de elementos que a su vez forman uno o varios continuos, decimos que este continuo es de varias dimensiones".

"Si para dividir un continuo C, es suficiente considerar cortes que forman uno a varios continuos de una dimensión, decimos que C es un continuo de dos dimensiones; si es suficiente tomar cortes que forman uno o varios continuos de dos dimensiones, decimos que C es un continuo de tres dimensiones, y así siguiendo".

"Para justificar esta definición es necesario observar que hacen usualmente los geómetras, para introducir la noción de tres dimensiones".

"Comienzan definiendo superficies como las fronteras de sólidos o partes del espacio; curvas como fronteras de superficies, puntos como fronteras de curvas, y afirman que este procedimiento no puede continuarse".

"Esta es justamente la idea: para dividir el espacio, son necesarios cortes, que denominamos superficies; para dividir superficies, son necesarios cortes, que denominamos curvas; para dividir curvas, son necesarios cortes, que denominamos puntos; y no podemos avanzar más en el razonamiento, ya que un punto no puede ser dividido: un punto no es un continuo".

"Entonces, curvas, que pueden dividirse por cortes que no forman un continuo, serán un continuo de una dimensión;las superficies, que pueden dividirse por cortes continuos de una dimensión, serán continuos de dos dimensiones; y finalmente, el espacio, que puede ser dividido por cortes de continuos de dos dimensiones, será un continuo de tres dimensiones".

Poincaré tuvo así el mérito de poner en evidencia la naturaleza inductiva del significado geométrico de dimensión y la posibilidad de desconectar el espacio utilizando subconjuntos de menor dimensión.

Un año más tarde F. Brouwer [1] dió, siguiendo estas ideas, una definición precisa y topológicamente invariante de dimensión, la que para espacios métricos separables, localmente conexos, es la que se utiliza actualmente.

Parte I

§ 2. DIMENSION CERO.

Vamos a considerar, en lo que sigue, espacios métricos separables.

DEFINICION 1. *Un subconjunto de un espacio métrico se dice CLOPEN si es a la vez abierto y cerrado.*

DEFINICION 2. *Diremos que un espacio métrico S tiene DIMENSION TOPOLOGICA CERO si y sólo si existe una base formada por clopens.*

Esto es equivalente a decir que S es de dimensión cero si todo punto de S tiene un sistema fundamental de entornos cuya frontera es vacía.

Observemos que a un subconjunto $A \subset S$, le corresponden dos conjuntos: $\overline{A}$, la clausura y $\overset{\circ}{A}$, el interior. La frontera de A, ∂A, es la diferencia

$$\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}.$$

∂A es un conjunto cerrado, que coincide también con la frontera del complementario de A: $\complement A$. Si la frontera es vacía, es decir que $\overline{A} = \overset{\circ}{A}$, y para ello es necesario y suficiente que A sea abierto y cerrado a la vez.

La condición de ser cero-dimensional es una propiedad topológica. Si los espacios métricos S y T son homeomorfos y uno de ellos tiene dimensión cero, el otro también tiene dimensión cero.

EJEMPLOS.

1) Todo $S \neq \phi$, métrico, finito o numerable es 0-dimensional. En efecto, sea U un entorno de un punto $p \in S$ cualquiera y $r > 0$, tal que $B_r(p) \subset U$. Si $S = \{x_1, x_2, \ldots\}$ y $d(x_i,p)$ es la distancia de x_i al punto p, existe un número real $r' > 0$, $(r' < r)$, $r' \neq d(x_i,p)$ para todo i. En estas condiciones:

$$B_{r'}(p) \subset U \quad \text{y} \quad \partial(B_{r'}(p)) = \phi.$$

Por lo tanto, S es 0-dimensional.

2) El conjunto Q de los números racionales es 0-dimensional.

3) Para el conjunto de los números irracionales I, dimensión de $I = 0$.

En efecto, sea $p \in I$ y U un entorno cualquiera. Existen números racionales α, β tales que $\alpha < p < \beta$ y de forma tal que el conjunto V de los números irracionales entre α y β esté contenido en U. V es abierto en I y $\partial V = \phi$ ya que todo punto irracional que es punto de acumulación de V está entre α y β y por lo tanto, está en V.

Veamos ahora que la recta R no tiene dimensión cero.

TEOREMA 1. *Los únicos clopens en el espacio R son ϕ y R. Por lo tanto, R no es 0-dimensional.*

Demostración. Sea $A \subseteq R$, $A \neq \phi$ y $A \neq R$. Probaremos que A no es clopen ó, lo que es equivalente, $\partial A \neq \phi$.

Para ello definimos recursivamente dos sucesiones $\{z_n\}$ e $\{y_n\}$. Podemos tomar $x_o \in A$ ($A \neq \phi$) y un punto $y_o \notin A$ ya que $A \neq R$). Después de haber definido x_n e y_n, con $x_n \in A$, $y_n \notin A$, definimos x_{n+1} e y_{n+1} de la siguiente forma. Sea $z_n = (x_n+y_n)/2$.

Si $z_n \in A$, definimos $x_{n+1} = z_n$, $y_{n+1} = y_n$;

Si $z_n \notin A$, definimos $x_{n+1} = x_n$, $y_{n+1} = z_n$.

Se tiene en cualquier caso que

$x_{n+1} \in A$, $y_{n+1} \notin A$,

y además:

$$|x_{n+1} - y_{n+1}| = |x_n - y_n|/2.$$

Por inducción,

$$|x_n - y_n| = |x_o - y_o| /2^n.$$

Por lo tanto, $|x_n - y_n| \to 0$ para $n \to \infty$. Tenemos además que

$|x_{n+1} - x_n| \leqslant |x_n - y_n| = |x_0 - y_0|/2^n \Rightarrow \{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Sea $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Como $|x_n - y_n| \to 0$, se tiene que $y_n \to x$. Por lo tanto, x es punto frontera de A, y A no es clopen.

Siguiendo el mismo razonamiento, se puede probar el corolario que sigue, que es muy útil.

COROLARIO 1. *Sea $a < b$. Los únicos clopens de $[a,b]$ son ϕ y $[a,b]$. Por lo tanto, $[a,b]$ no es 0-dimensional.*

EJEMPLO 4. Cualquier conjunto de números reales que no contenga un intervalo es de dimensión cero.

Veamos que el triádico de Cantor C tiene dimensión cero. Sabemos que

$$C = \bigcap_{k\in N} C_k, \text{ donde cada } C_k = \bigcup_{j=1}^{2^k} I_{kj},$$

es decir, cada C_k está compuesto por 2^k intervalos cerrados disjuntos de longitud 3^{-k}.

EJEMPLO 5. (Está dado por la siguiente proposición).

PROPOSICION 1. *Los conjuntos $M_{kj} = C \cap I_{kj}$ $(k=0,1,\ldots,2^k)$, forman una base para los abiertos de C. Estos conjuntos son clopens en C por lo que el triádico de Cantor tiene dimensión cero.*

Demostración. El intervalo I_{kj} tiene longitud 3^{-k} y la distancia de I_{kj} a cualquier otro intervalo I_{kj} es por lo menos 3^{-k}. Por lo tanto, si $I_{kj} = [a,b]$, entonces

$$M_{kj} = C \cap [a,b]$$

es cerrado en C ya que $[a,b]$ es cerrado en R; por otra parte

$$M_{kj} = C \cap (a - 3^{-k}, b + 3^{-k})$$

es abierto en C ya que $(a - 3^{-k}, b + 3^{-k})$ es abierto en R.

Sea $x \in C$ y $\varepsilon > 0$. Elegimos k tal que $3^{-k} < \varepsilon$ y j tal que $x \in I_{kj}$. Entonces:

$$C \cap B_\varepsilon(x) \supseteq M_{kj}.$$

Esto prueba que la familia $\{M_{kj}\}$ es una base para los abiertos de C.

<u>EJEMPLO 6</u>. Consideremos el cubo de Hilbert I^ω. Es el conjunto formado por todos los puntos p con una infinidad numerable de coordenadas: $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ tales que

$$|x_n| \leqslant 1/n.$$

Definimos una distancia en I^ω entre puntos p y p', $p' = (x_1', x_2', \ldots, x_n', \ldots)$ por medio de

$$d(p,p') = d(p',p) = \sqrt{\sum_1^\infty (x_n - x_n')^2}$$

$d(p,p') = 0$ si p y p' coinciden. Es finita, ya que $(x_n - x_n')^2 \leqslant 4/n^2$, y la serie bajo el radical es convergente.

El conjunto Q'_ω de puntos en el cubo de Hilbert cuyas coordenadas son todas racionales es 0-dimensional.

Supongamos que $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ es un punto arbitrario de I^ω y sea U un entorno de a en I^ω. Tomando un n suficientemente grande y p_i, q_i suficientemente próximos a a_i, $p_i < a_i < q_i$, $i=1,2,\ldots,n$ obtenemos un entorno de a contenido en U. Este entorno está formado por todos los puntos $x \in I^\omega$, $x = (x_i, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ cuyas primeras coordenadas verifican

1) $$p_i < x_i < q_i$$

(y cuyas otras coordenadas tienen como única restricción

2) $$|x_i| \leqslant 1/i).$$

Veamos que para cada $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un entero n y un número real δ tal que si $q_i - p_i < \delta$ para $i \leqslant n$, entonces todo x satisfaciendo 1) y 2) verifica:

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_i-a_i)^2} < \varepsilon .$$

Para ello, elegimos n tal que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/i^2 < \varepsilon^2/8$ y δ tal

$$n\ \delta^2 < \frac{1}{2}\ \varepsilon^2 .$$

Si $q_i - p_i < \delta$ para $i \leqslant n$, tenemos, para todo x satisfaciendo 1) y 2) que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_i-a_i)^2 < n\delta^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (2/i)^2 < \frac{1}{2}\ \varepsilon^2 + \frac{1}{2}\ \varepsilon^2 = \varepsilon^2 .$$

Sea $a \in Q_\omega'$. Tomando p_i, q_i irracionales, obtenemos un entorno V de a cuyos puntos frontera en I^ω tienen por lo menos una coordenada irracional. Por lo tanto, V tiene frontera vacía en Q_ω' y esto prueba que Q_ω' es de dimensión cero.

<u>EJEMPLO 7</u>. El conjunto I_ω' de puntos en el cubo de Hilbert cuyas coordenadas son todas irracionales es de dimensión cero. La demostración es similar a la anterior.

<u>EJEMPLO 8</u>. Con E^ω indicamos el espacio de Hilbert formado por todas las sucesiones cuadrado sumables; es decir, sucesiones reales $x_1, x_2, \ldots$ para las cuales

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty ,$$

con la métrica

$$d(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_i-y_i)^2} .$$

El conjunto Q_ω de puntos en el espacio de Hilbert cuyas coordenadas son racionales <u>no es 0-dimensional</u>. Para demostrarlo, veamos que cualquier entorno U aco tado del origen de Q_ω tiene frontera no vacía.

Consideremos la recta $-\infty < x_1 < \infty$, $0 = x_2 = \ldots.$ Esta contiene puntos de U y de $Q_\omega \setminus U$. Podemos entonces encontrar un número racional a_1 tal que el punto

$$p^1 = (a_1, 0, 0, \ldots.)$$

pertenece a U y está a una distancia menor que 1 de $Q_\omega \setminus U$.

De la misma forma, si consideramos la recta $x_1 = a_1$, $-\infty < x_2 < \infty$, $0 = x_3 = x_4 = \ldots.$ podemos determinar un punto

$$p^2 = (a_1, a_2, 0, \ldots),$$

con a_2 racional de forma tal que $p^2 \varepsilon U$ y $d(p^2, Q_\omega \setminus U) < 1/2$.

Continuando el procedimiento, construímos la sucesión $\{p^n\}$,

$$p^n = (a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, \ldots.),$$

donde los a_i son racionales, $p^n \varepsilon U$ para todo n, y

$$d(p^n, Q_\omega \setminus U) < 1/n.$$

El punto $p = (a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots)$ pertenece a ∂U.

Observe que $p \varepsilon Q_\omega$, ya que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_i^2 < d^2$, $n=1,2,\ldots$ donde d = diámetro de U, y por lo tanto la serie converge.

Esta demostración se debe a P. Erdös [2].

PROPOSICION 2. *Un subconjunto no vacío de un espacio de dimensión cero es cero-dimensional.*

Demostración. Sea x un punto perteneciente a un subconjunto $T \subset S$, donde S tiene dimensión cero. Sea U' un entorno de x en T. Existe entonces un entorno U en S de x tal que

$$U' = U \cap T.$$

Como S es 0-dimensional, existe un V clopen en S tal que

$$x \varepsilon V \subset U.$$

Sea $$V' = V \cap T.$$

Entonces V' es clopen en T, $x \in V' \subset U'$ y T es cero-dimensional.

PROPOSICION 3. *Sea C es triádico de Cantor. No es posible definir una función continua del intervalo* $[0,1]$ *sobre C.*

Demostración. Supongamos $h: [0,1] \to C$ surjectiva y M_{11} un subconjunto clopen de C. M_{11} y su complemento, $C \setminus M_{11}$ son no vacíos. Por lo tanto,

$$h^{-1}[M_{11}] \neq \phi, \qquad h^{-1}[C \setminus M_{11}] \neq \phi.$$

Teniendo en cuenta el Corolario 1 no pueden ser ambos abiertos. Por un teorema que caracteriza a las funciones continuas, h no es continua.

DEFINICION 3. *Un espacio métrico S tiene dimensión inductiva pequeña 1 (ind S = 1) si no es cero dimensional y tiene una base para los abiertos formada por conjuntos cuya frontera es cero-dimensional.*

NOTACION. ind(S). También se la denomina dimensión inductiva débil.

TEOREMA 2. Para la recta, ind(R) = 1.

Demostración. Una base en la recta está dada por las "esferas", $B_r(x) = (x-r,x+r)$. Tenemos $\partial(B_r(x)) = \{x-r,x+r\}$, que es cero dimensional. Por el teorema 1, R no tiene dimensión cero, por lo tanto ind(R) = 1.

En general, la dimensión inductiva débil para espacios métricos se define en forma inductiva.

A cada espacio métrico S se le asigna una dimensión, que indicamos con ind(S), que será un número entero $\{-1,0,1,2,3,\ldots\} \cup \{\infty\}$:

1) El espacio métrico ϕ tiene $\mathrm{ind}(\phi) = -1$.
2) Si k es un entero no negativo, diremos que $\mathrm{ind}(S) \leqslant k$,

si y sólo si existe una base para los abiertos de S formada por subconjuntos U con ind(∂U) $\leqslant$ k-1.

Diremos que ind (S) = k $\Leftrightarrow$ ind (S) $\leqslant$ k pero ind (S) $\nleqslant$ k-1.

Si ind (S) = k es falsa para todo k, diremos que ind(S)=∞.

<u>TEOREMA 3</u>. *La dimensión inductiva débil es una propiedad topológica: si S y T son homeomorfos, entonces*

$$ind\ (S) = ind\ (T).$$

<u>Demostración</u>. La prueba se hace por inducción.

1) Sin ind (S) = -1 $\Rightarrow$ S = ϕ y siendo T homeomorfo a S, T = ϕ, y se tiene ind (T) = -1.

2) Supongamos que hemos probado el teorema para espacios S con ind (S) $\leqslant$ k y sea S tal que ind (S) = k+1. Sea h: S $\to$ T un homeomorfismo. Existe una base $\mathcal{B}$ = { } de S tal que

$$\text{ind } (\partial U) \leqslant k.$$

Como los homeomorfismos llevan bases en bases, contornos en contornos,

$$\mathcal{B}_T = \{h(U) \mid U \in \mathcal{B}\}$$

es una base para T y ∂(h(U)) = h(∂U). Usando la hipótesis inductiva

$$\text{ind } \partial(h(U)) = \text{ind } h(\partial(U)) = \text{ind } \partial(U) \leqslant k \Rightarrow \text{ind } T \leqslant k+1.$$

Si ind (T) $\leqslant$ k de la hipótesis de inducción resultaría que ind (S) $\leqslant$ k, que es falsa. Por lo tanto, ind (T) = k+1.

3) Si ind (S) = ∞, entonces ind (T) = k es falsa para todo entero k, y por lo tanto, ind (T) = ∞.

<u>TEOREMA 4</u>. *Sea S un espacio métrico y T $\subseteq$ S. Se tiene*

$$ind\ (T) \leqslant ind\ (S).$$

<u>Demostración</u>. Supongamos que ind (S) < ∞. Procedemos por inducción.

1) Si ind (S) = -1 $\Rightarrow$ S = ϕ $\Rightarrow$ T = ϕ $\Rightarrow$ind (T) = -1.

2) Supongamos que vale para todos los pares T,S con T $\subseteq$ S, ind (S) $\leqslant$ k. Consideremos ahora el par T,S, con T $\subseteq$ S e ind (S) = k+1.

Sea $x \in T$ y V abierto en T con $x \in V$. Tenemos que encontrar un abierto en T, U, con $x \in U \subseteq V$, ind $\partial_T(U) \leqslant k$.

Existe un abierto $\tilde{V}$ en S tal que $V = \tilde{V} \cap T$. Como

$$\text{ind }(S) \leqslant k+1 \text{ y } x \in \tilde{V},$$

existe un abierto $\tilde{U}$ en S con $x \in \tilde{U} \subseteq \tilde{V}$, ind $\partial_S(\tilde{U}) \leqslant k$.

Sea $U = \tilde{U} \cap T$. U es abierto en T y $x \in U \subseteq V$.

Pero $\partial_T(U) \subset \partial_S(\tilde{U})$ y por la hipótesis de inducción se tiene entonces:

$$\text{ind } \partial_T(U) \leqslant \text{ind } \partial_S(\tilde{U}) \leqslant k.$$

Esto nos dice que existe una base para los abiertos de T formada por conjuntos U con $\partial_T(U) \leqslant k$. Por lo tanto

$$\text{ind }(T) \leqslant k+1.$$

De aquí, por inducción, el teorema vale para todos los valores de ind (S).

Si ind $(S) = \infty$, el resultado es obvio.

Observemos que la definición "global" de la dimensión inductiva pequeña de página 9, es equivalente a la siguiente

DEFINICION 4. *El conjunto vacío y solamente él tiene dimensión -1.*
Un conjunto S tiene dimensión $\leqslant n$ $(n \geqslant 0)$ en un punto p, si p tiene entornos arbitrariamente pequeños cuyas fronteras tienen dimensión $\leqslant n-1$.
S tiene dimensión $\leqslant n$, ind $(S) \leqslant n$, si S tiene dimensión $\leqslant n$ en cada uno de sus puntos.
S tiene dimensión n en el punto p si es cierto que S tiene dimensión $\leqslant n$ en p y es falso que S tiene dimensión $\leqslant n-1$ en p.
S tiene dimensión n si ind $(S) \leqslant n$ es verdadera e ind $(S) \leqslant n-1$ es falsa.
ind $(S) = \infty$ si ind $(S) \leqslant n$ es falsa para cada n.

NOTA. La dimensión no es un invariante para transformaciones continuas. La proyección del plano sobre una recta disminuye la dimensión y la "curva de Peano", de un intervalo sobre todo el cuadrado es un ejemplo de una transformación continua que la aumenta.

Los siguientes lemas serán de utilidad.

LEMA 1. *Sea ind $S = n$ finito. Entonces S contiene un subconjunto m dimensional para todo $m \leqslant n$.*

Demostración. Para n=0 coinciden las definiciones 2 y 4.

Como ind $S > n-1$, existe un punto $p_0 \in S$ y un entorno U_0 de p_0 con la siguiente propiedad:

"Si V es un abierto tal que $p_0 \in V \subset U_0$ entonces ind $\partial(V) \geqslant n-1$".

Por otra parte, como ind $S \leqslant n$, existe un abierto V_0 tal que $p_0 \in V_0 \subset U_0$ e ind $\partial(V_0) \leqslant n-1$.

Por lo tanto, V_0 es un subconjunto de S tal que ind $V_0 = n-1$.

NOTA. Este resultado no es válido si ind $S = \infty$. Un ejemplo está dado por W. Hurewicz: "Une remarque sur l'hypothèse du continu", Fund. Math. 19 (1932), páginas 8 y 9.
Allí se describe un espacio métrico separble H (Hilbert), tal que ind $H = \infty$, cuyos únicos subconjuntos finito dimensionales son conjuntos numerables y por lo tanto de dimensión inductiva débil nula. La demostración prueba que la hipótesis del continuo equivale a ese resultado.

LEMA 2. *El espacio métrico S tiene dimensión $\leqslant n$ si y sólo si todo punto p puede separarse (ver definición página 18) por un conjunto cerrado de dimensión $\leqslant n-1$ de cualquier cerrado C que no contiene a p.*

Demostración. Supongamos que ind $(S) \leqslant n$. $S \setminus C$ es un entorno de p y, por la regularidad de S, existe un entorno V de p, tal que $\overline{V} \subset S \setminus C$. Existe entonces un entorno W de p tal que

$$W \subset V$$

$$\text{ind } \partial(W) \leqslant n-1.$$

Es claro que $\partial(W)$ separa p de C.

Por otra parte, sea U un entorno de p. $S \setminus U$ es cerrado y no contiene a p y, por lo tanto, no puede ser separado de p por un conjunto cerrado B tal que ind $(B) \leqslant n-1$.

Tenemos entonces:

$$S \setminus B = U' \cup V', \; p \in U', \quad S \setminus U \subset V', \quad U' \cap V' = \phi$$

con U', V' abiertos en $S \setminus B$ y como $\partial U' \subset B$, ind $\partial(U') \leqslant n-1$.

Al considerar la dimensión de un subconjunto T de un conjunto S es útil dar la dimensión de T utilizando entornos pero referidos estos al conjunto S. Para ello, se tiene el siguiente:

LEMA 3. *Sea S métrico, $T \subset S$. Entonces, ind $(T) \leqslant n$ si y sólo si todo punto de T tiene entornos (en S) arbitrariamente pequeños cuyas fronteras tienen intersecciones con T de dimensión $\leqslant n-1$.*

Demostración. Supongamos que T satisface las condiciones del lema. Sea $p \in U' \subset T$. Existe un entorno U de p en S tal que $U' = U \cap T$. Por lo tanto, existe un V abierto en S tal que $p \in V \subset U$,

$$\text{ind } (T \cap \partial V) \leqslant n-1.$$

Sea $V' = V \cap T$. V' es abierto en T, $p \in V' \subset U'$. Haciendo $B = \partial_S V$, $B' = \partial_T V'$, $B' \subseteq B \cap T$. Por lo tanto

$$\text{ind}(B') \leqslant n-1 \;\Rightarrow\; \text{ind } (T) \leqslant n.$$

Recíprocamente, supongamos que ind $(T) \leqslant n$. Sea p un punto arbitrario de T y U un entorno de S en p. Entonces

$U' = U \cap T$ es un entorno de p en T. Existe por lo tanto un entorno V' en T de p tal que

$$p \in V' \subset U' \text{ e } \operatorname{ind}(B') \leqslant n-1 \qquad (\text{donde } B' = \partial_T V').$$

Siendo S métrico (*), existe un abierto W (en S), tal que:

$$V' \subset W, \qquad \overline{W} \cap (T \setminus \overline{V'}) = \phi.$$

(Observe que ninguno de los conjunto V' y $T \setminus \overline{V'}$, disjuntos, contienen un punto límite del otro).

Podemos suponer que $W \subset U$ (reemplazando si fuera necesario W por $W \cap U$).

El conjunto $\overline{W} \setminus W = \partial W$, no contiene puntos de $T \setminus \overline{V'}$ ni de V'. Por lo tanto, la intersección

$$T \cap \partial W \subset B' = \partial_T V',$$

de donde resulta que

$$\operatorname{ind}(T \cap \partial W) \leqslant n-1.$$

La definición dada para conjuntos cero-dimensionales es equivalente a la siguiente (Lema 2, página 15, n = 0).

<u>DEFINICION 5</u>. *Sea $S \neq \phi$. S tiene dimensión cero si y sólo si todo punto x y todo conjunto cerrado C que no contiene a x, pueden separarse por una partición.*

En efecto, si S es cero-dimensional en el sentido de la definición 1, $S \setminus C$ es un entorno de x y existe un V tal que

$$x \in V \subset S \setminus C, \qquad \text{con } V \text{ clopen.}$$

Como resultado se tiene que un espacio 0-dimensional conexo debe contener un único punto, ya que si existen dos $x \neq y$, la definición 5 asegura que pueden separarse y S es disconexo.

(*) En todo espacio métrico, todo par de conjuntos A y B satisfaciendo $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \phi$ pueden separarse (Teo. 6,pág. 16).

Por lo tanto: Un espacio $S \neq \phi$ 0-dimensional es totalmente disconexo.

§ 3. DIMENSION INDUCTIVA GRANDE. (Ind S).

También se la conoce con el nombre de dimensión inductiva fuerte ó dimensión de Čech.

Vamos a dar algunos resultados de topología, sobre separación de conjuntos, que incluyen demostraciones de afirmaciones de la parte final de § 2.

TEOREMA 5. *Sean A y B cerrados disjuntos en un espacio métrico S. Existen abiertos disjuntos U y V en S tales que $U \supseteq A$, $V \supseteq B$.*

Demostración. Sea $U = \{x \in S \mid d(x,A) < d(x,B)\}$.

Usando la desigualdad triangular es inmediato que:

$$|d(x,A) - d(y,B)| \leqslant \rho(x,y)$$

y $d(x,A)$ es una función continua de x. (También lo es $d(x,B)$).

U es abierto y siendo A cerrado,

$$d(x,A) = 0 \Leftrightarrow x \in A.$$

Entonces, si $x \in A \Rightarrow d(x,A) = 0 < d(x,B) \Rightarrow A \subseteq U$.

Sea $V = \{x \in S \mid d(x,A) > d(x,B)\}$.

Como antes, V es abierto y $B \subseteq V$. Es claro que

$$U \cap V = \phi.$$

COROLARIO 2. *Sea F cerrado y U abierto. Si $F \subseteq U$, existe un abierto V tal que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

COROLARIO 3. *Sean A y B dos subconjuntos cerrados disjuntos de un espacio métrico S. Existen abiertos U y V en S tales que $U \supseteq A$, $V \supseteq B$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \phi$. ($S$ es normal).*

TEOREMA 6. *Sean A y B dos subconjuntos de un espacio métrico S. Supongamos que $\overline{A} \cap B = \phi = A \cap \overline{B}$. Existen abiertos disjuntos U y V en S con $U \supseteq A$, $V \supseteq B$ y $U \cap V = \phi$.*

Demostración. Siguiendo las ideas del teorema 5, sea

$$U = \{x \in S \mid d(x,A) - d(x,B) < 0\}.$$

U es abierto y $U \supset A$, ya que para $x \in A$. $d(x,A) = 0$ y como $x \notin B$, $d(x,B) > 0$. Además,

$$V = \{x \in S \mid d(x,A) - d(x,B) > 0\}$$

es un abierto que contiene B, $V \supset B$ y $U \cap V = \phi$.

TEOREMA 7. *Sean A y B dos subconjuntos cerrados disjuntos de un espacio métrico separable S. Supongamos que ind $S=\phi$. Existe entonces un clopen U en S con $U \supset A$ y $U \cap B = \phi$.*

Demostración. Como ind S = 0, existe una base $\mathcal{B}$ para los abiertos formada por clopens.

Para cada $x \in S$, sea $U(x) \in \mathcal{B}$ con $x \in U(x)$ y tal que

$$U(x) \cap A = \phi \quad \text{ó} \quad U(x) \cap B = \phi.$$

Esto es factible, ya que si $x \notin A$, entonces $S \setminus A$ es un abierto que contiene x; si $x \notin B$ entonces $S \setminus B$ es un abierto que contiene x; y todo $x \in S$ satisface alguna de estas afirmaciones.

Por lo tanto, $\{U(x) \; ; \; x \in S\}$ es un cubrimiento abierto de S. Siendo S separable, existe un subcubrimiento numerable

$$\{U(x_1), U(x_2), \ldots\ldots\}.$$

Sea $V_1 = U(x_1)$ y recursivamente

$$V_n = U(x_n) \setminus (V_1 \cap \ldots \cap V_{n-1}).$$

Estos conjuntos V_n son clopens, y

$$\bigcup_{n \in N} V_n = \bigcup_{n \in N} U(x_n) = S.$$

Tenemos que, cada uno de los conjuntos V_n es disjunto con A ó con B.

Sea

$$U = \cup \{V_n \mid V_n \cap B = \phi\}.$$

Entonces U es abierto y $U \cap B = \phi$. Pero el complemento de U es

$$V = S \setminus U = \cup \{V_n \mid V_n \cap B \neq \phi\}.$$

Se tiene que V es abierto, U es cerrado. Entonces,

$$V \cap A = \phi \Rightarrow U \supseteq A.$$

Veamos como estas consideraciones sobre separación de conjuntos se utilizan para definir el concepto de dimensión inductiva grande.

Sean A y B subconjuntos disjuntos de un espacio métrico S.

Diremos que un conjunto $L \subseteq S$ <u>SEPARA</u> A y B si y sólo si existen abiertos U y V con $U \cap V = \phi$, $U \supseteq A$, $V \supseteq B$ y

$$L = S \setminus (U \cup V).$$

Si $L = \phi$, se dice que A y B están separados por una partición.

La dimensión inductiva grande es una dimensión topológica estrechamente relacionada con la dimensión inductiva pequeña.

<u>NOTA</u>. El teorema 7 nos dice que en un espacio 0-dimensional S, los conjuntos cerrados disjuntos están separados por el conjunto vacío.

<u>DEFINICION 6</u>. *A cada espacio métrico S le asignamos un elemento del conjunto* $\{-1,0,1,2,\ldots\} \cup \{\infty\}$ *que denominamos la dimensión inductiva grande, Ind S, de la siguiente forma:*

1) *Ind* $\phi = -1$;
2) *Si k es un entero no negativo, diremos que Ind S* $\leqslant k$ *si y sólo si dos conjuntos cerrados disjuntos en S pueden ser separados por un conjunto L con Ind L* $\leqslant k-1$.

3) *Escribimos* $\text{Ind } S = k$ *si y sólo si* $\text{Ind } S \leqslant k$ *pero* $\text{Ind } S \leqslant k\text{-}1$.

4) $\text{Ind } S = \infty$ *si y sólo si* $\text{Ind } S \leqslant k$ *es falsa para todo entero* k.

En espacios métricos generales, Ind S e ind S no necesariamente son iguales. Pero coinciden para ESPACIOS METRICOS SEPARABLES.

Daremos algunos resultados, que necesitaremos para probar esta afirmación.

PROPOSICION 4. *Sean* A *y* B *cerrados disjuntos en un espacio métrico* S *y* $T \subsetneq S$.

a) Sean U *y* V *abiertos con* $U \supseteq A$, $V \supseteq B$ *y* $\overline{U} \cap \overline{V} = \phi$. *Si* $L' \subsetneq T$ *separa (en* T*) los conjuntos* $T \cap \overline{U}$ *y* $T \cap \overline{V}$, *existe un conjunto* L, $L \subsetneq S$ *que separa* A *y* B *en* S *con* $L \cap T \subsetneq L'$.

b) Supongamos, además, que T *es cerrado. Entonces, para cualquier conjunto* $L' \subsetneq T$ *que separa* $T \cap A$ *y* $T \cap B$ *en* T, *existe* $L \subsetneq S$ *separando* A *y* B *en* S *con* $L \cap T \subsetneq L'$.

Demostración. a) Como por hipótesis, L' separa $T \cap \overline{U}$ y $T \cap \overline{V}$

$$T \setminus L' = U' \cup V'$$

con U' y V' abiertos en T, $T \cap \overline{U} \subset U'$ y $T \cap \overline{V} \subset V'$.

Veamos que $A \cap \overline{V'} = \phi$.

Observemos que:

$$U \cap V' = T \cap U \cap V' \subsetneq U' \cap V' = \phi \text{ y } U \text{ es abierto } \Rightarrow$$

$U \cap \overline{V'} = \phi$, y $A \cap \overline{V'} = \phi$.

Se tiene también que $B \cap \overline{U'} = \phi$.

U' y V' son abiertos disjuntos en T, por lo tanto,

$$U' \cap \overline{V'} = \phi \quad \text{y} \quad \overline{U'} \cap V' = \phi.$$

De aquí se sigue que:

$$(A \cup U') \cap (\overline{B \cup V'}) = (A \cup U') \cap (\overline{B} \cup \overline{V'})$$

$$= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{V'}) \cup (U' \cap \overline{B}) \cup (U' \cap \overline{V'})$$

$$= \phi.$$

Análogamente se tiene que

$$(\overline{A \cup U'}) \cap (B \cup V') = \phi.$$

Del teorema 6, se sigue que existen abiertos disjuntos U'' y V'' con $A \cup U' \subseteq U''$ y $B \cup V' \subseteq V''$. Pongamos

$$L = S \setminus (U'' \cup V'').$$

L separa A y B y

$$T \cap L = T \setminus (U'' \cup V'')$$

$$\subseteq T \setminus (U' \cup V')$$

$$= L'.$$

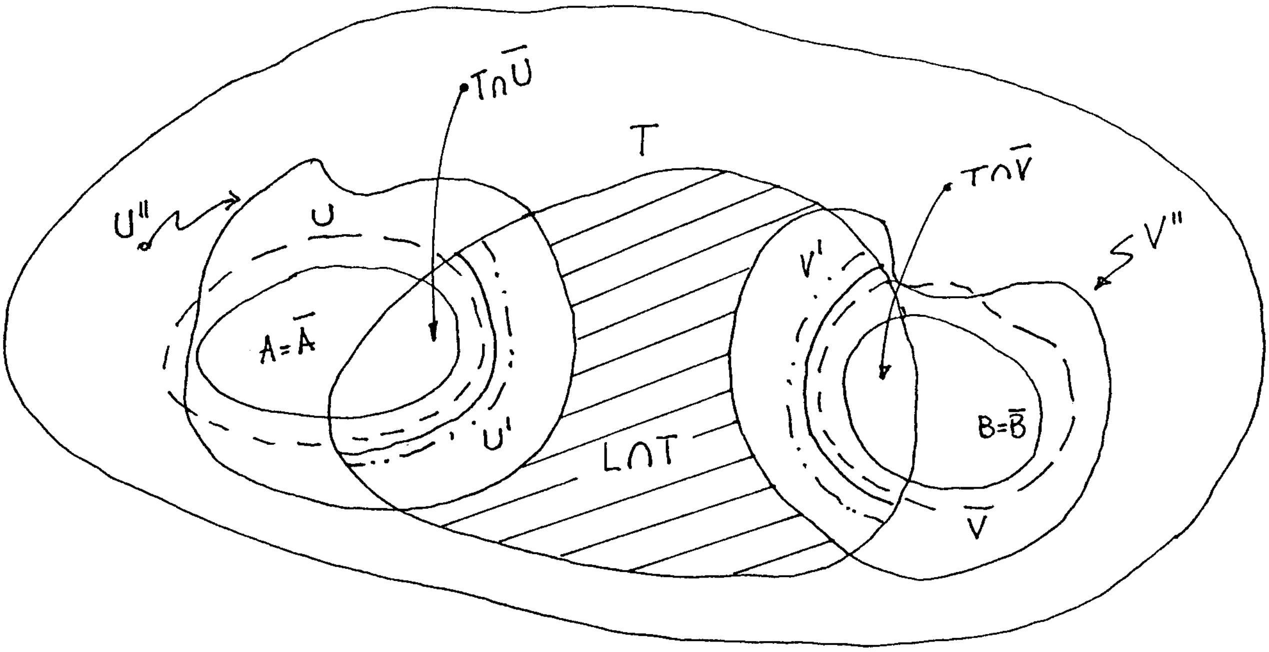

Figura 1.

b) Como L' separa $T \cap A$ y $T \cap B$ existen abiertos disjuntos U' y V' con

$$T \cap A \subseteq U', \quad T \cap B \subseteq V' \text{ y } \quad T \setminus (U' \cup V') = L'.$$

Los conjuntos A y $(T \setminus U') \cup B$ son disjuntos y cerrados, y por lo tanto existe un abierto U'' tal que

$$A \subseteq U'' \subseteq \overline{U''} \subseteq S \setminus ((T \setminus U') \cup B).$$

De la misma forma B y $(T \setminus V') \cup \overline{U''}$ son disjuntos y cerrados en S y existe un abierto V'' tal que

$$B \subseteq V'' \subseteq \overline{V''} \subseteq S \setminus ((T \setminus V') \cup \overline{U''}).$$

Por lo tanto,

$$A \subseteq U'', \quad B \subseteq V'' \quad \text{y} \quad \overline{U''} \cap \overline{V''} = \phi.$$

Ahora estamos en condiciones de aplicar la parte a).

<u>TEOREMA 8</u>. *Sea S un espacio métrico separable y A y B conjuntos cerrados disjuntos en S. Sea $T \subseteq S$ tal que $\operatorname{ind} T = 0$. Existe un conjunto L que separa A y B en S tal que $L \cap T = \phi$.*

<u>Demostración</u>. Podemos encontrar (Corolario 3) abiertos U y V con $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \phi$. Los conjuntos $\overline{U} \cap T$ y $\overline{V} \cap T$ son disjuntos y cerrados en T, que tiene $\operatorname{ind} T = 0$ y podemos separarlos por $L' = \phi$ (por el Teorema 7).

Aplicando la proposición 4, obtenemos un conjunto L que separa A y B con

$$L \cap T \subseteq L' = \phi.$$

<u>COROLARIO 4</u>. *Si S es un espacio métrico separable, entonces*

$$\operatorname{ind} S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ind} S = 0.$$

<u>Demostración</u>. Resulta del teorema 8 y de que

$$\operatorname{ind} \phi = \operatorname{Ind} \phi = -1.$$

Veamos ahora algunos resultados sobre la dimensión de la unión e intersección de conjuntos respecto de la dimensión de cada uno de ellos

Observemos que en el caso de conjuntos cuya dimensión cero, no vale que ind $(A \cup B) = \text{ind } A + \text{ind } B$.

En efecto, vimos que el conjunto de los números racionales y el de los números irracionales en la recta R tienen ambos ind Q = ind $I = 0$, pero ind $R = 1$.

Para conjuntos cerrados de dimensión cero vale el siguiente:

TEOREMA 9. *Sea S un espacio métrico y supongamos que $T_n \subseteq S$, los T_n son cerrados e Ind $T_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Entonces*

$$\text{Ind } \Big(\bigcup_{n \in N} T_n \Big) = 0.$$

Demostración. Sea $T = \bigcup_{n \in N} T_n$, E y F cerrados en T, $E \cap F = \phi$.

Debemos encontrar un clopen U con $E \subseteq U$ y $F \subseteq U = \phi$.

Como Ind $T_1 = 0$, existe un A_1 clopen en T_1 tal que

$$T_1 \cap E \subseteq A_1 \quad \text{y} \quad T_1 \cap F \subseteq T_1 \setminus A_1.$$

Se tiene

$$(E \cup A_1) \quad \cap \quad (F \cup (T_1 \setminus A_1)) = \phi$$

y son cerrados.

Existen entonces abiertos U_1 y V_1 en S con

$$E \cup A_1 \subseteq U_1 \ , \quad E \cup (T_1 \setminus A_1) \subseteq V_1 \ , \quad \overline{U}_1 \cap \overline{V}_1 = \phi.$$

Consideremos ahora T_2. Como Ind $T_2 = 0$, existe A_2, clopen en T_2, con

$$T_2 \cap \overline{U_1} \subseteq A_2 \quad \text{y } T_2 \cap \overline{V_1} \subseteq T_2 \setminus A_2.$$

De aquí

$$(\bar{U}_1 \cap A_2) \cap (\bar{V}_1 \cup (T_2 \setminus A_2)) = \phi$$

y ambos son cerrados.

Existen entonces abiertos U_2 y V_2 en S con

$$\overline{U_1} \cup A_2 \subseteq U_2 \ , \quad \overline{V_1} \cup (T_2 \setminus A_2) \subseteq V_2 \ ; \quad \overline{U_2} \cap \overline{V_2} = \phi.$$

Continuando el procedimiento, obtenemos dos sucesiones $\{U_n\}$, $\{V_n\}$ .. Sea $U = \bigcup_{n\varepsilon N} U_n$ y $V = \bigcup_{n\varepsilon N} V_n$. Entonces $U \cap V = \phi$ y son abiertos, con $U \supseteq E$, $V \supseteq F$. Además,

$$U \cup V \supseteq \bigcup_{n\varepsilon N} T_n = T,$$

y $U \cap T$ y $V \cap T$ son clopens en T.

El mismo resultado vale para la dimensión inductiva pequeña, ind S, en un espacio separable, teniendo en cuenta el Corolario 4 del teorema 8. Por lo tanto, se tiene:

<u>COROLARIO 5</u>. *Sea S un espacio métrico separable y $T_n \subseteq S$, T_n cerrados con ind $T_n = 0$, $n = 1,2,\ldots\ldots$ Entonces*

$$ind\ (\bigcup_{n\varepsilon N} T_n) = 0.$$

Para comjuntos que no son cerrados y de dimensiones diferentes de 0, se tiene para la dimensión inductiva pequeña:

<u>TEOREMA 10</u>. *Sea S un espacio métrico separable, A, B $\subseteq$ S. Entonces*

$$ind\ (A \cup B) \leqslant 1 + ind\ A + ind\ B.$$

<u>Demostración</u>.

1) Si ind A = ind B = -1, es inmediata, ya que A y B son vacíos, $A \cup B = \phi$ y

$$ind\ (A \cup B) = -1 = 1 + (-1) + (-1).$$

2) Supongamos que ind A = m, ind B = n y que vale para

a) ind $A \leqslant m$, ind $B \leqslant n-1$ y

b) ind $A \leqslant m-1$, ind $B \leqslant n$.

Sea $x \in A \cup B$. Para simplificar, tomemos $x \in A$. Sea U un entorno de x en S. Existe un entorno abierto V tal que (cf. Lema 3),

$$x \in V \subset U$$
$$\text{ind } (\partial_S V \cap A) \leqslant m-1.$$

Pero $\partial_S V \cap B$ como subconjunto de B satisface

$$\text{ind } (\partial_S V \cap B) \leqslant n.$$

Por las hipótesis a) y b) de inducción

$$\text{ind } (\partial_S V \cap (A \cup B)) \leqslant m+n.$$

De aquí se sigue (Lema 3), que

$$\text{ind } (A \cup B) \leqslant m+n+1.$$

<u>COROLARIO 6</u>. *La unión de (n + 1) conjuntos arbitrarios de dimensión inductiva débil cero en un espacio métrico separable S tiene dimensión inductiva pequeña* $\leqslant n$.

Recordemos el siguiente teorema:

<u>TEOREMA 11</u>. *Las siguientes afirmaciones para espacios métricos son equivalentes*

1) S es separable. (Existe un conjunto numerable D denso en S);

2) Existe una base numerable para los abiertos de S (= S satisface el 2° axioma de la numerabilidad)

3) Todo cubrimiento abierto de S tiene un subcubrimiento numerable (= S tiene la propiedad de Lindelöff).

<u>Demostración</u>.

1) $\Rightarrow$ 2). Sea S separable y $\mathcal{B} = \{B_{1/n}(a),\ a \in D,\ n \in N\}$.

Veamos que $\mathcal{B}$ es una base para los abiertos de S.

Sea U un abierto cualquiera de S y $x \in U$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Elegimos n de forma tal que $2/n < \varepsilon$. Como D es denso en S, $x \in \bar{D}$. Por lo tanto

$$\text{existe } a \in B_{1/n}(x) \cap D.$$

Entonces, $B_{1/n}(a) \in \mathcal{B}$ y se tiene:

$$x \in B_{1/n}(a) \subseteq B_{2/n}(x) \subseteq U.$$

Es así que $\mathcal{B}$ es una base numerable para los abiertos de S.

2) $\Rightarrow$ 3). Sea $\mathcal{B}$ la base numerable para los abiertos de S y $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de S.
Para cada $x \in S$, elegimos $U_x \in \mathcal{U}$ con $x \in U_x$.
Elegimos un básico $D_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in D_x \subseteq U_x$.
El conjunto

$$\{D_x \;;\; x \in S\}$$

es una subfamilia de $\mathcal{B}$ y por lo tanto numerable.

Tiene la forma

$$\{D_x ; x \in S\} = \{D_{x_n} \;;\; n \in N\} .$$

Sea $\mathcal{V} = \{U_{x_n} \;;\; n \in N\}$. Esta es una familia numerable extraída de $\mathcal{U}$. Si $x \in S$, $D_x = D_{x_n}$ para algún n y por lo tanto

$$x \in D_{x_n} \subseteq U_{x_n},$$

y $\mathcal{V}$ es un subcubrimiento numerable.

3) $\Rightarrow$ 1). Supongamos que S tiene la propiedad de Lindelöff. Para $n \in N$ la familia

$$\mathcal{B}_n = \{B_{1/n}(x) \;;\; x \in S\} .$$

forma un cubrimiento abierto de S. Por lo tanto, hay un subcubrimiento numerable

$$A_n = \{B_{1/n}(y) \; ; \; y \in Y_n\}$$

donde Y_n es numerable. Pongamos: $D = \bigcup_{n \in N} Y_n$.

D es numerable, y si $x \in S$, $\varepsilon > 0$, y elegimos n tal que $1/n < \varepsilon$, se tiene (siendo A_n un cubrimiento de S) que

$$\text{existe } y \in Y_n \subseteq D \quad \text{con } x \in B_{1/n}(y).$$

Por lo tanto,

$$y \in B_{1/n}(x) \subseteq B_\varepsilon(x) \quad \Rightarrow \quad D \text{ es denso en } S.$$

Es claro que un subcubrimiento de A es un refinamiento de A.

Por otra parte, es inmediato que S es un espacio métrico compacto si y sólo si cada cubrimiento por abiertos admite algún refinamiento finito.

Para dimensiones mayores se tiene:

TEOREMA 12. *Sea S un espacio métrico separable y $\{T_n\}$ subconjuntos cerrados de S tales que ind $T_n \leqslant k$, para $n = 1, 2, \ldots$ Entonces*

$$\mathit{ind} \; (\bigcup_{n \in N} T_n) \leqslant k.$$

Demostración. Sea $T = \bigcup_{n \in N} T_n$. La afirmación del teorema es cierta para $k = \infty$.

Supongamos entonces $k < \infty$. La prueba es por inducción sobre k.

1) Para $k = 0$ ya lo hemos probado.

2) Supongamos $k \geqslant 1$ y que vale para valores menores de k.

Para cada n, sea $\mathcal{B}_n$ una base para los abiertos de T_n formada por conjuntos tales que la dimensión de la frontera es $< k$.

Siendo S métrico separable, de todo cubrimiento abierto de S se puede extraer un subcubrimiento numerable (Propiedad de Lindeloff). Usando este resultado se deduce que podemos suponer que las bases $\mathcal{B}_n$ son numerables.

Para todo n y todo $U \in \mathcal{B}_n$, tenemos $\operatorname{ind}_{T_n} U \leq k-1$.

Por la hipótesis de inducción, la unión numerable

$$Y = \bigcup_{n \in N} \bigcup_{U \in \mathcal{B}_n} (\partial_{T_n} U)$$

tiene también $\operatorname{ind} Y \leq k-1$.

Consideremos ahora $Z_n = T_n \setminus Y$. Estos Z_n tienen como base para los abiertos $\{U \setminus Y : U \in \mathcal{B}_n\}$.
y los $U \setminus Y$ son clopens en Z_n. Por lo tanto $\operatorname{ind} Z_n \leq 0$.

Sea

$$Z = \bigcup_{n \in N} Z_n .$$

Siendo cada $Z_n = T_n \setminus Y = T_n \cap Z$ cerrado en Z tenemos

$$\operatorname{ind} Z \leq 0.$$

Por lo tanto, (Teorema 10),

$$\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} (Y \cup Z) \leq 1 + (k-1) + 0 = k.$$

COROLARIO 7. *Sea S un espacio métrico separable con ind $S = k < \infty$. Entonces S es unión de $k+1$ conjuntos de dimensión cero y también unión de dos conjuntos, uno de dimensión inductiva débil nula y otro de dimensión igual a $k-1$.*

Demostración. Del teorema anterior se sigue que todo conjunto T tal que $\operatorname{ind} T \leq k$ se puede poner como suma de un conjunto de dimensión $\leq (k-1)$ y uno de dimensión ≤ 0 (k finito).

La demostración resulta aplicando sucesivamente este resultado y el corolario 6.

PROPOSICION AUXILIAR. *Sea S un espacio métrico verificando el 2° axioma de la numerabilidad. Si S posee una base $\mathcal{B}$ tal que las fronteras de sus elementos tienen ind $S < k$ entonces existe una base $\overline{\mathcal{B}}$ numerable con esa propiedad.*

Demostración. Vimos, teorema 11, que para espacios métricos vale: S separable $\Leftrightarrow$ S satisface el 2°axioma de la numerabilidad $\Leftrightarrow$ S tiene la propiedad de Lindelöff.

Supongamos que tenemos un abierto $V_{q,n}$ con $q \in D$ numerable denso en S y $n \in N$ tal que

$$B_{1/n}(q) \subset V_{q,n} \subset B_{2/n}(q).$$

Entonces $\{V_{q,n}\}$ es una base numerable de S.

En efecto, cada $B_{2/n}(q)$ es unión de conjuntos abiertos de la base $\mathcal{B}$. Consideremos de estos conjuntos aquellos que intersectan $B_{1/n}(q)$.

Usando la propiedad de Lindelöff extraigo una subfamilia numerable $C(q,n)$ que cubre a $B_{1/n}(q)$. Sea su unión $V_{q,n}$.

Definimos

$$\overline{\mathcal{B}} = \cup \ C(q,n).$$

Se tiene $\# \ \overline{\mathcal{B}} \leqslant \aleph_0$, y $\overline{\mathcal{B}}$ es una base con la propiedad buscada.

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 9. El conjunto I_2 de puntos en el plano cuyas coordenadas son ambas irracionales es cero-dimensional.

En efecto, cada punto de I_2 está contenido en un entorno rectangular suficientemente pequeño acotado por rectas con intersección racional con los ejes coordenados y que se cortan entre ellas perpendicularmente, y las fronteras de estos rectángulos no se intersectan con I_2.

EJEMPLO 10. El conjunto R_1^2 de puntos en el plano, exactamente una de cuyas coordenadas es racional es cero-dimensional.

Es claro que un punto en estas condiciones puede encerrarse en rectángulos arbitrariamente pequeños acotados por rectas con intersecciones racionales con los ejes coordenados y que la intersección entre ellas es a 45°. Los bordes de estos rectángulos no cortan a R_1^2.

EJEMPLO 11. El conjunto Q^n de puntos del espacio euclídeo R^n cuyas coordenadas son todas racionales es cero-dimensional. (Es numerable).

EJEMPLO 12. El conjunto I^n de puntos de R^n cuyas coordenadas son todas irracionales es cero-dimensional.

EJEMPLO 13. Sea $0 \leqslant m \leqslant n$. Con Q_m^n indicamos el conjunto de puntos de R^n de los cuales m de sus coordenadas son racionales.

Vimos que $Q_n^n = Q^n$ y $Q_0^n = I^n$ son cero-dimensionales.

Es cierto que Q_m^n es cero-dimensional para cada m y n pero la demostración depende del teorema de la suma para conjuntos cero-dimensionales y la demostración simple del ejemplo 10 no puede generalizarse.

Para cada elección de m índices $i_1, i_2, \ldots, i_m$ dentro del rango i,2,...,n, y cada elección de números racionales $r_1, r_2, \ldots, r_m$, se tiene la variedad lineal (n-m)-dimensional de R^n determinada por las ecuaciones:

(1) $\quad x_{i_1} = r_1, \quad x_{i_2} = r_2, \quad \ldots\ldots, \quad x_{i_m} = r_m.$

Al subconjunto de (1) formado por los puntos tales que ninguna coordenada es racional lo indicamos con C_i. Cada C_i

es congruente con I^{n-m} y por lo tanto, (ejemplo 12), es cero-dimensional.

Cada C_i es cerrado en Q^n_m y la suma de los C_i es Q^n_m. Siendo la familia de los C_i numerable, el teorema de la suma para conjuntos cero-dimensionales nos dice que

$$\text{ind } (Q^n_m) = 0.$$

EJEMPLO 14. Consideremos en R^3 los subconjuntos:

$S_o = \{x \in R^3$, cuyas tres coordenadas son irracionales$\}$.

$S_1 = \{x \in R^3$, una coordenada racional y dos irracionales$\}$.

$S_2 = \{x \in R^3$, dos coordenadas racionales y una irracional$\}$.

$S_3 = \{x \in R^3$, cuyas tres coordenadas son racionales$\}$.

Vamos a probar que $\text{ind}(R^3) = 3$. En este caso se tiene:

$$R^3 = S_o \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

y para cada i, $\text{ind}(S_i) = 0$, y no se comprueba el corolario 7.

Continuamos ahora con resultados sobre separación de conjuntos, con una generalización del teorema 8.

TEOREMA 13. *Sea S un espacio métrico separable, A, B cerrados disjuntos. Sea $k \geqslant 0$ un entero y $T \subseteq S$ con*

$$\text{ind } T = k.$$

Existe un conjunto L separando A y B con

$$\text{ind } (T \cap L) \leqslant k-1.$$

Demostración. El caso $k = 0$ está demostrado (Teorema 8).

Supongamos $k \geq 1$. El corolario 7 nos dice que podemos escribir $T = Y \cup Z$, con ind $Y = k-1$ e ind $Z = 0$. Usando el Teorema 8 existe un conjunto L que separa A y B con

$$L \cap Z = \phi.$$

Entonces:

$$L \cap T \subset Y \quad \Rightarrow \quad \text{ind } (L \cap T) \leq \text{ind } Y \leq k-1.$$

Veamos ahora un resultado importante.

TEOREMA 14. *Si S es un espacio métrico separable, entonces*

$$\textit{ind } S = \textit{Ind } S.$$

Demostración. Recordemos que:

1) ind $S = -1$ si $S = \phi$; 2) ind $S \leq n$ si para todo punto $x \in S$ y todo abierto U conteniendo x existe un abierto V tal que

$$x \in V \subset U$$

$$\text{ind } (\partial V) \leq n-1.$$

1) Ind $S = -1$ si $S = \phi$; 2) Ind $S \leq n$ si para todo conjunto cerrado $F \subset S$ y abierto U conteniendo F existe un abierto V con

$$F \subset V \subset U$$

$$\text{Ind } (\partial V) \leq n-1.$$

Se prueba inductivamente directamente de la definición que ind $S \leq$ Ind S.

Veamos que Ind $S \leq$ ind S.

Si ind $S = \infty$ es evidente. Por lo tanto, supongamos que ind $S < \infty$.

a) $k = 0$. Corolario 4 del Teorema 8 nos dice que si S es separable, ind $S = 0 \Leftrightarrow$ Ind $S = 0$.

b) Supongamos que $k \geq 1$ y que el resultado es cierto para valo res menores de la dimensión. Sean A y B cerrados disjuntos en S. Por el teorema anterior, A y B pueden separarse por un conjunto L con ind L $\leqslant$ k-1. Pero por la hipótesis de inducción ind L $\leqslant$ k-1. Por lo tanto Ind S $\leqslant$ k.

Podemos generalizar el Teorema 13 de la siguiente forma:

TEOREMA 15. *Sea S un espacio métrico separable con ind $S \leqslant n-1$. Sean $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_n, B_n$, $2n$ conjuntos cerrados en S con $A_i \cap B_i = \phi$ para todo i. Existen conjuntos $L_1, L_2, \ldots, L_n$ tales que L_i separa A_i de B_i para todo i, y la intersección*

$$\bigcap_{i=1}^{n} L_i = \phi.$$

Demostración. Sea L_1 que separa A_1 y B_1, con ind $L_1 \leqslant n-2$.

Aplicando el Teorema 13 con T = L_1 obtenemos L_2 que separa A_2 y B_2 con ind $(L_1 \cap L_2) \leqslant n-3$. Continuando el razonamiento, obtenemos $L_1, L_2, \ldots, L_n$ con

$$\text{ind } (L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_n) \leqslant n-1,$$

y, por lo tanto,

$$\bigcap_{i=1}^{n} L_i = \phi.$$

OBSERVACIONES.

1) Sea S un espacio métrico. Veamos una extensión a Ind del teorema 4, página 10.

TEOREMA 16. *Si $F \subseteq S$, F cerrado, entonces Ind $F \leqslant$ Ind S.*

Demostración. La haremos por inducción sobre la dimensión de S.

a) Si Ind S = -1 $\Rightarrow$ S = ϕ $\Rightarrow$ F = ϕ $\Rightarrow$ Ind F = -1.

b) Supongamos que vale el teorema para S con Ind S $\leqslant$ n-1.
Si Ind S $\leqslant$ n, tenemos para G y H disjuntos cerrados de F que

existe un abierto $U \subset S$ tal que

$$G \subset U \subset S \setminus H$$

$$\text{Ind } (\partial U) \leqslant n-1,$$

ya que G y H son también cerrados en S.

Entonces, $V = U \cap F$ es abierto en F y satisface

$$G \subset V \subset F \setminus H$$

$$\partial_F(V) \subset \partial(U)$$

($\partial_F(V)$ es la frontera de V en el subespacio F). Por lo tanto

$$\text{Ind } \partial_F(U) \leqslant n-1$$

se sigue de $\partial(U) \leqslant n-1$ y de la hipótesis inductiva.

De aquí resulta:

$$\text{Ind } F \leqslant n.$$

2) El siguiente resultado es una extensión del Toerema 10, página 23.

<u>TEOREMA 17</u>. *Sean A y B subconjuntos de S tales que $A \cup B = S$, $\text{Ind } A \leqslant n$, $\text{Ind } B \leqslant 0$. Entonces*

$$\mathit{Ind}\ S \leqslant n+1.$$

<u>Demostración</u>. Sean F y G disjuntos cerrados en S. Siendo S normal, existen abiertos V y W tales que

$$F \subset V, \quad G \subset W, \quad \overline{V} \cap \overline{W} = \phi.$$

Como $\text{Ind } B \leqslant 0$ podemos encontrar un clopen U del subconjunto B tal que

$$\overline{V} \cap B \subset U \subset B \setminus (\overline{W} \cap B).$$

Como $F \cup U$ y $G \cup (B \setminus U)$ satisfacen la condición del Teorema 6, página 16, podemos encontrar conjuntos abiertos M y N tales que:

$$F \cup U \subset M, \qquad G \cup (B \setminus U) \subset N, \qquad M \cap N = \phi.$$

Como $\partial(M) \subset A$ (de acuerdo con la condición de N y de que U es clopen en B). Por lo tanto

$$\text{Ind } \partial(M) \leqslant \text{Ind } A \leqslant n \qquad \text{(Del Teorema 16).}$$

Siendo M abierto y satisfaciendo $F \subset M \subset S \setminus G$, se tiene:

$$\text{Ind } S \leqslant n+1.$$

§ 4. ESPACIO CERO-DIMENSIONAL UNIVERSAL.

Sea S tal que $\operatorname{ind} S = \operatorname{Ind} S = 0$ y $\{O_n\}$ una base formada por conjuntos abiertos y cerrados.

A todo punto $p \in S$ le hacemos corresponder un punto $x \in L \subset C$ (C = conjunto de Cantor), cuya abscisa es:

$$x = x(p) = \sum_1^\infty a_n/3^n \,, \qquad a_n = 0 \text{ ó } 2,\ n=1,2,\ldots$$

donde

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{si } p \in O_n \\ 0 & \text{si } p \notin O_n. \end{cases}$$

Observemos que esta correspondencia es biunívoca. En efecto, si $p,q \in S$, existe un conjunto O_n que contiene a p y no contiene a q, y tendremos $a_n = 2$ para p y $a_n = 0$ para q, de tal forma que

$$x(p) \neq x(q) \,, \qquad \text{si } p \neq q.$$

Con $\{O_{n_k}\}$, $k = 1,2,\ldots$ indicamos la sucesión de conjuntos de la base que contienen p; sea P_k la unión de los conjuntos de la base que no pertenecen a la sucesión precedente y cuyo índice es inferior a n_k. P_k es abierto y cerrado.

El conjunto

$$\left(\bigcap_1^k O_{n_i} \right) \cap \complement P_k$$

es abierto y contiene a p. Si q pertenece a este conjunto las n_k primeras cifras de $x(p)$ y $x(q)$ coinciden y, por lo tanto,

$$|x(p) - x(q)| \leqslant 2 \sum_{n_k+1}^\infty 2/3^n \leqslant 4 \sum_{k+1}^\infty 1/3^n = 2/3^k.$$

Este valor se puede hacer tan pequeño como uno quiera tomando k suficientemente grande. Por lo tanto, la función x(p) es continua.

Veamos que su inversa también es continua.

Dado un abierto de la base, O_n, sí $p \in O_n$ se tiene:

$a_n = 2$ para p; $\qquad a_n = 0$ para $q \in \complement O$.

Entonces:

$$|x(p) - x(q)| \geqslant 1/3^k.$$

En efecto, si

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/3^n \qquad y \qquad x' = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n/3^n$$

pertenecen a C, vale

$$|x - x'| = \left| \sum_{1}^{\infty} \frac{(a_n - a'_n)}{3^n} \right| \qquad \text{con } a_n - a'_n = 0, 2, \text{ ó } -2.$$

Si k es el primer índice para el cual $a_k - a'_k = \pm 2$, se tiene:

$$|x - x'| \geqslant \frac{2}{3^k} - 2\left(\frac{1}{3^{k+1}} + \ldots\ldots \right) = 1/3^k \geqslant 1/3^n.$$

O sea, la distancia de x(p) a la imagen de $\complement O$ es al menos $1/3^n$, y esto implica que $x(O_n)$ es abierto.

Entonces, S y C son homeomorfos. Como sabemos que C es cero-dimensional, podemos afirmar lo siguiente:

"*Todo conjunto 0-dimensional es homeomorfo a un subconjunto del triádico de Cantor, que juega así el papel de conjunto 0-dimensional universal en el que se puede "sumergir" todo otro espacio 0-dimensional*".

§ 5. DIMENSION POR CUBRIMIENTOS.

Vamos a introducir una nueva definición de dimensión, la dimensión por cubrimientos, que indicaremos con dim S. Esta definición es debida a H. Lebesgue.

Para espacios métricos separables probaremos que vale

$$\text{ind } S = \text{Ind } S = \dim S.$$

En el caso de espacios métricos arbitrarios, Katetov [4], demostró que

$$\text{Ind } S = \dim S.$$

La pregunta planteada por P. Alexandrov [5], si

$$\text{ind } S = \dim S$$

para espacios métricos arbitrarios fue resuelta por la negativa por P. Roy [6], en 1962, quien probó el siguiente teorema: "Existe un espacio métrico completo S tal que

$$\text{ind } S = 0 \text{ , } \dim S = 1\text{"}.$$

Antes de continuar, daremos algunas definiciones y fijaremos la notación. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos cubrimientos de S.

DEFINICION 7. *Diremos que* $\mathcal{B}$ *es un refinamiento de* $\mathcal{A}$ *,* $(\mathcal{B} \ll \mathcal{A})$ *si cualquiera que sea* $B \in \mathcal{B}$*, existe* $A \in \mathcal{A}$ *tal que* $B \subseteq A$*.*

Sea S un espacio métrico.

DEFINICION 8. *Diremos que una familia* $\mathcal{U}$ *de subconjuntos de* S *es un cubrimiento de un conjunto* A *si y sólo si*

$$A \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Si el cubrimiento está formado por un número finito (numerable) de conjuntos, diremos que el cubrimiento es finito (numerable).

Un cubrimiento abierto de A *es un cubrimiento*

constituido únicamente por conjuntos abiertos.
Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de A, un subcubrimiento de A es una subfamilia de $\mathcal{U}$ que es un cubrimiento de A.

DEFINICION 9. *Diremos que el ORDEN de una familia $\mathcal{A}$ de conjuntos es $\leqslant n$ si $(n+2)$ subconjuntos de la familia tienen intersección vacía.*
$\mathcal{A}$ tiene orden n si y sólo si tiene orden $\leqslant n$ pero no tiene orden $\leqslant n$ 1.

EJEMPLO 15. Una familia $\mathcal{A}$ de conjuntos no vacios es disjunta si y sólo si es de orden 0.

La familia $\mathcal{A}$ tiene orden $-1 \Leftrightarrow \mathcal{A} = \{\phi\}$.

El cubrimiento de R por intervalos; $R = \bigcup_{n\in N} (n-1,n+1)$ es de orden 1.

Sea S un espacio métrico y $n \geqslant -1$, entero.

DEFINICION 10. *Diremos que S tiene dimensión por cubrimientos $\leqslant n$ ($\dim S \leqslant n$) si y sólo si todo cubrimiento abierto finito de S tiene un refinamiento abierto de orden $\leqslant n$.*
$\dim S = n$ si y sólo si $\dim S \leqslant n$ y $\dim S \not\leqslant n-1$.
Si $\dim S \leqslant n$ para ningun n, $\dim S = \infty$.

Observemos que si $\dim S = -1$, el cubrimiento abierto $\{S\}$ tiene un refinamiento, el cubrimiento de orden -1, que necesariamente es $\{\phi\}$; y este es un cubrimiento únicamente si $S = \phi$. Por lo tanto, $\dim S = -1 \Leftrightarrow S = \phi$.

TEOREMA 18. *Sea S un espacio métrico y n un entero no negativo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*
1) $\dim S \leqslant n$;
2) Si $\{U_1,\dots,U_k\}$ es un cubrimiento abierto finito

de S, existen conjuntos abiertos $B_i \subseteq U_i$, $i \leqslant i \leqslant k$ *tal que* $\{B_i\}_{i=1}^k$ *es un cubrimiento abierto de S de orden* $\leqslant n$;

3) *Si* $\{U_i\}_{i=1}^{n+2}$ *es un cubrimiento abierto de S, existen abiertos* $B_i \subseteq U_i$, $1 \leqslant i \leqslant n+2$ *tales que*

$$\bigcup_{i=1}^{n+2} B_i = S \qquad y \qquad \bigcap_{i=1}^{n+2} B_i = \phi;$$

4) *Si* $\{U_i\}_{i=1}^{n+2}$ *es un cubrimiento abierto de S, existen conjuntos cerrados* F_i, $F_i \subseteq U_i$, $1 \leqslant i \leqslant n+2$ *tales que*

$$\bigcup_{i=1}^{n+2} F_i = S \quad , \quad \bigcap_{i=1}^{n+2} F_i = \phi.$$

Demostración.

1) ⇒ 2). Supongamos que dim S $\leqslant$ n. Entonces el cubrimiento $\{U_i\}_{i=1}^k$ abierto, admite un refinamiento $\mathcal{W}$ de orden $\leqslant$ n.

Para cada W ε $\mathcal{W}$ existe por lo menos un i, tal que $W \subseteq U_i$; elegimos uno de ellos, y lo indicamos con i(W).

Para cada i, sea

$$B_i = \cup \{W \varepsilon \mathcal{W} \mid i(W) = i\}.$$

Es claro que los B_i son abiertos y

$$\bigcup_i B_i = \bigcup_{W \varepsilon \mathcal{W}} W = S.$$

Si x ε S, como $\mathcal{W}$ tiene orden $\leqslant$ n, x pertenece a lo sumo a (n+1) de los conjuntos W. Pero como xε B_i solamente si x ε W para algun W con $i(W) = i$ esto implica que x pertenece a lo sumo a (n+1) de los conjuntos B_i.

2)⇒ 3). Es inmediato de la definición de orden.

3)⇒ 2). Supongamos que S está en las condiciones de 3). Sea $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ un cubrimiento abierto de S. Si $k \leq n+1$ este cubrimiento tiene orden $\leq n$.

Supongamos que $k \geq n+2$. Podemos suponer que:

$$W_1 = U_1,\ W_2 = U_2, \ldots, W_{n+1} = U_{n+1},\ W_{n+2} = \bigcup_{i=n+2}^{k} U_i .$$

Estos conjuntos cubren S. Por la hipótesis 3) existen abiertos $V_i \subset W_i$ con

$$\bigcup_{i=1}^{n+2} V_i = S \qquad y \qquad \bigcap_{i=1}^{n+2} V_i = \phi .$$

Sean $B_i = V_i$ para $i \leq n+1$ y $B_i = V_{n+2} \cap U_i$ para $i \geq n+2$. Entonces $\{B_i\}$ es un cubrimiento abierto de S con

$$\operatorname{ord} \{B_i\} \leq n.$$

2) ⇒ 1). Por definición de dimensión.

Tenemos ahora probado que 1) ⇒ 2) ⇒ 3) ⇒ 2) ⇒ 1).

Veamos ahora que:

3) ⇒ 4). Por hipótesis, existen $B_i \subseteq U_i$ tales que $\bigcup_{i=1}^{n+2} B_i = S$ e $\bigcap_{i=1}^{n+2} B_i = \phi$. $S \setminus B_1 \subset \bigcap_{i=2}^{n+2} B_i$.

Usando el Corolario 2, página 16, podemos afirmar que existe un abierto V_1 con

$$S \setminus B_1 \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i .$$

Sea $F_1 = S \setminus V_1$. $F_1 \subseteq B_1$, $\quad F_1 \cup \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i = S$.

En efecto, sea $x \notin F_1 \cup \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i$. Entonces $x \notin F_1$ y $x \notin \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i$. Si $x \notin \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i \Rightarrow x \notin V_1 \subseteq \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i \Rightarrow \quad x \in S \setminus V_1 = F_1$, absurdo.

Sea ahora V_2 abierto con

$$S \setminus B_2 \subseteq V_2 \subseteq \overline{V_2} \subseteq (S \setminus \overline{V_1}) \cup \bigcup_{i=3}^{n+2} B_i, \quad y$$

$$F_2 = S \setminus V_2 \quad \Rightarrow \quad F_2 \subseteq B_2,\ F_1 \cup F_2 \cup \bigcup_{i=3}^{n+2} B_i = S.$$

Continuando el procedimiento, obtenemos $\{F_i\}_{i=1}^{n+2}$ cerrados con $\quad \bigcup_{i=1}^{n+2} F_i = S \quad$ e $\quad \bigcap_{i=1}^{n+2} F_i = \phi$.

4) $\Rightarrow$ 3). Supongamos que valga 4). El conjunto cerrado F_1 es un subconjunto del conjunto abierto

$$U_1 \cap (S \setminus \bigcap_{i=2}^{n+2} F_i).$$

Existe un abierto B_1 tal que

$$F_1 \subseteq B_1 \subseteq \overline{B_1} \subseteq U_1 \cap (S \setminus \bigcap_{i=1}^{n+2} F_i).$$

Por lo tanto, $\overline{B_1} \subseteq U_1$ y $\overline{B_1} \cap (\bigcap_{i=2}^{n+2} F_i) = \phi$.

En efecto , supongamos que

$$x \in \overline{B_1} \cap \left(\bigcap_{i=2}^{n+2} F_i \right).$$

Entonces:

$$x \in \overline{B_1} \quad y \quad x \in \bigcap_{i=2}^{n+2} F_i \qquad x \notin F_1 \text{ ya que } \bigcap_{i=1}^{n+2} F_i = \phi.$$

$$\Rightarrow F_1 \not\subseteq \overline{B_1}.$$

Existe un abierto B_2 tal que

$$F_2 \subseteq B_2 \subseteq \overline{B_2} \subseteq U_2 \quad \cap \quad (S \setminus (\overline{B_1} \cap \bigcap_{i=3}^{n+2} F_i)).$$

De aquí

$$\overline{B_2} \subset U_2 \qquad y \qquad \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \left(\bigcap_{i=3}^{n+2} F_i \right) = \phi.$$

Continuando el procedimiento se obtiene la familia buscada.

TEOREMA 19. *Sea S un espacio métrico. Entonces.*

$$\dim S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ind} S = 0.$$

Demostración.

a) Ind $S = 0 \Rightarrow \dim S = 0$.

Sea Ind $S = 0$. Supongo $S \neq \phi$ y U_1, U_2 abiertos tales que $U_1 \cup U_2 = S$. Sus complementarios $F_1 = S \setminus U_1$, $F_2 = S \setminus U_2$ son cerrados y disjuntos. Por lo tanto, existe un clopen V con

$$F_1 \subseteq V \quad y \quad F_2 \cap V = \phi.$$

Entonces, $B_1 = S \setminus V$ y $B_2 = V$ satisfacen $B_i \subseteq U_i$, $B_1 \cup B_2 = S$ y $B_1 \cap B_2 = \phi$. Por el teorema anterior, $\dim S \leqslant 0$. Pero siendo $S \neq \phi$, $\dim S = 0$.

b) $\dim S = 0 \Rightarrow$ Ind $S = 0$.

Sea dim $S = 0$, F_1 y F_2 cerrados, $F_1 \cap F_2 = \phi$. Los complementos $U_1 = S \setminus F_1$, $U_2 = S \setminus F_2$ forman un cubrimiento abierto de S. Por el teorema anterior, existen abiertos $B_1 \subset U_1$, $B_2 \subset U_2$, $B_1 \cup B_2 = S$ y $B_1 \cap B_2 = \phi$. Entonces, $V = B_2$ es clopen, $V \supseteq F_1$, y $V \cap F_2 = \phi$. De aquí se sigue que Ind $S = 0$.

DEFINICION 11. *Sea S un espacio y $\mathcal{U}$ un cubrimiento de S.*

Diremos que el cubrimiento es PUNTUALMENTE FINITO si todo punto de S es cubierto únicamente por un número finito de los $U \in \mathcal{U}$.

Diremos que el cubrimiento es LOCALMENTE FINITO (NUMERABLE), si todo punto $p \in S$ tiene un entorno $U(p)$ que intersecta solamente un número finito (numerable) de miembros de $\mathcal{U}$.

Si todo miembro U de $\mathcal{U}$ intersecta solamente un número finito de miembros de $\mathcal{U}$, diremos que $\mathcal{U}$ es FUERTEMENTE ESTRELLADA.

Si para toda subfamilia $\mathcal{B}$ de $\mathcal{U}$

$$\overline{\cup \{U \mid U \in \mathcal{B}\}} = \cup \{\overline{U} \mid U \in \mathcal{B}\}$$

diremos que $\mathcal{U}$ PRESERVA LA CLAUSURA.

NOTA. Toda familia localmente finita preserva la clausura.

Si $\mathcal{U}$ puede descomponerse así $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i$ donde las familias $\mathcal{U}_i$ son localmente finitas (finitamente estrelladas), $\mathcal{U}$ se dice σ-LOCALMENTE FINITA (σ-LOCALMENTE ESTRELLADA).

Si $\mathcal{U}$ es una familia de subconjuntos de S y $p \in S$, el ORDEN PUNTUAL DE $\mathcal{U}$ EN p es el número de miembros de $\mathcal{U}$ que contienen p. Lo indicamos con $ORD_p\ \mathcal{U}$.

$ORD_p \mathcal{U} = \infty$ si hay una infinidad de tales $U \in \mathcal{U}$.

El orden puntual de $\mathcal{U}$ *es el supremo de* $ORD_p\,\mathcal{U}$,

$$ORD\ \mathcal{U} = \sup\ \{ORD_p\,\mathcal{U} \mid p \in S\}.$$

<u>DEFINICION 12</u>. *Si para cualquier cubrimiento finito abierto* $\mathcal{U}$ *de* S *existe un cubrimiento abierto* $\mathcal{B}$ *tal que*

$$\mathcal{B} \leqslant \mathcal{U}\quad ,\ ORD\ \mathcal{B} \leqslant n + 1$$

diremos que S *tiene dimensión por cubrimientos* $\leqslant n$, $\dim S \leqslant n$.

S *tiene dimensión por cubrimientos* n, $\dim S = n$, *si* $\dim S \leqslant n$ *y es falso que* $\dim S \leqslant n-1$.

Si $\dim S \leqslant n$ *es falsa para todo* n, $\dim S = \infty$.

Por definición, $\dim \phi = -1$.

<u>OBSERVACION</u>. Ver la definición de dimensión por cubrimientos de página 38, definición 10. Esta definición coincide con la dada anteriormente y el teorema de Katetov-Morita asegura, como veremos, que

$$\dim S = \mathrm{Ind}\ S.$$

§ 6. PARACOMPACIDAD.-

La noción de paracompacidad fué introducida por J. Dieudonné [8], en 1944.

DEFINICION 13. *Un espacio S se dice PARACOMPACTO si es Hausdorff y todo cubrimiento abierto de S tiene un refinamiento abierto localmente finito.*

NOTA. Observar que la paracompacidad es un invariante topológico. En otras palabras, un homeomorfismo transforma un espacio paracompacto en otro paracompacto.
Es claro que un espacio de Hausdorff compacto es paracompacto.
El recíproco no es cierto. Pero valen los siguientes teoremas que son de utilidad.

TEOREMA 20. *Todo espacio S paracompacto es regular.*

Demostración. Sea $p \in S$ y C cerrado, $p \notin C$. Para todo $x \in C$ existen abiertos U_x, V_x con $p \in U_x$, $x \in V_x$, $U_x \cap V_x = \phi$. Consideremos el cubrimiento de S formado por $S \setminus C$ y los conjuntos V_x, $x \in C$. Por la paracompacidad, existe un refinamiento localmente finito abierto $\{V_\alpha\}$ de este cubrimiento.

Sea $V = \bigcup_{\substack{\alpha \\ V_\alpha \cap C \neq \phi}} V_\alpha$, es decir un abierto que contiene a C. Por hipótesis, existe un conjunto W abierto de S que contiene a p y corta solamente un número finito de los $\{V_\alpha\}$, $V_1, V_2, \ldots V_n$. Cada uno de estos V_i que corta a C debe estar contenido en V_{x_i}, $x_i \in C$. Tomando la intersección

$$W \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i} \right) = U$$

de W con los conjuntos U_{x_i} correspondientes a los puntos x_i, obtenemos un conjunto U que contiene a p y no corta a los V_{x_i} y, por lo tanto, tampoco corta a V.

TEOREMA 21. *Todo espacio S paracompacto es normal.*

Demostración. Sean A y B cerrados disjuntos. Para todo punto $x \varepsilon A$, existen conjuntos abiertos disjuntos U_x y V_x tales que $x \varepsilon U_x$ y B está contenido en V_x. (Teorema 20).

Tomemos como cubrimiento abierto de S el formado por el conjunto $S \setminus A$ y los U_x, $x \varepsilon A$. La paracompacidad nos da un refinamiento $\{U_\alpha\}$ de este cubrimiento, localmente finito y abierto. Sea

$$U = \bigcup_{U_\alpha \cap A \neq \phi} U_\alpha .$$

U es abierto y $U \supseteq A$. Para todo $y \varepsilon B$, existe un abierto W(y) que intersecta sólo un número finito

$$U_1(y),\ U_2(y), \ldots\ldots, U_{n(y)}(y)$$

de los elementos de $\{U_\alpha\}$.

Cada uno de los conjuntos $U_i(y)$ está contenido en algún U_{x_i}. Sea

$$X_y = W(y) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n(y)} V_{x_i} \right) \qquad \text{(número finito).}$$

X_y es abierto y contiene al punto y, y no corta a U. Sea

$$V = \bigcup_{y \varepsilon B} X_y .$$

Obtenemos así un conjunto abierto, que contiene a B y

$$V \cap U = \phi .$$

Nuestro objetivo es demostrar que Ind S = dim S para para espacios métricos generales.

Veamos algo más de notación.

Sean $\mathcal{U}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{U}_\alpha$ familias de conjuntos de un espacio R. Se tiene:

$$\mathcal{U} = \{U \mid U \in \mathcal{U}\}$$

$$\partial(\mathcal{U}) = \{\partial(U) \mid U \in \mathcal{U}\} \qquad (\partial = \text{frontera})$$

$$\mathcal{U} \wedge \mathcal{B} = \{U \cap V \mid U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{B}\}.$$

$$\wedge \{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in A\} = \{ \cap \{U_\alpha \mid \alpha \in A\} \mid U_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha \text{ para cada } \alpha \in A\}.$$

Si $\mathcal{U}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{U}_\alpha$ son cubrimientos, $\mathcal{U}$, $\mathcal{U} \wedge \mathcal{B}$ y $\wedge\{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$, también lo son.

Con p, P y $\mathcal{U}$ indicamos un punto, un conjunto y una familia de subconjuntos. Notaciones:

$S(p,\mathcal{U}) = S^1(p,\mathcal{U}) = \cup\{U \mid p \in U \in \mathcal{U}\}$. (Estrella de p)

$S(P,\mathcal{U}) = S^1(P,\mathcal{U}) = \cup\{U \mid U \in \mathcal{U},\ U \cap P \neq \phi\}$(Estrella de P respecto de $\mathcal{U}$).

$$S^n(p,\mathcal{U}) = S(S^{n-1}(p,\mathcal{U}),\mathcal{U}) \ ; \ S^\infty(p,\mathcal{U}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n(p,\mathcal{U})$$

$$S^n(P,\mathcal{U}) = S(S^{n-1}(P,\mathcal{U}),\mathcal{U}) \ ; \ S^\infty(P,\mathcal{U}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n(P,\mathcal{U})$$

$$\mathcal{U}^\triangle = \{ S(p,\mathcal{U}) \mid p \in R\},$$

$$\mathcal{U}^\star = \{ S(U,\mathcal{U}) \mid U \in \mathcal{U}\}.$$

Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento, entonces $\mathcal{U}^{\triangle}$ y $\mathcal{U}^{\star}$ son también cubrimientos. Se tiene:

$$\mathcal{U} \leqslant \mathcal{U}^{\triangle} \leqslant \mathcal{U}^{\star}.$$

<u>DEFINICION 14</u>. *Sea S un espacio T_1. Si para todo cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de S existe un cubrimiento abierto $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{B}^{\star} \leqslant \mathcal{U}$, diremos que S es un espacio completamente normal.*

Podemos ahora enunciar el siguiente:

<u>TEOREMA 22</u>. *(A. H. Stone [4]). Un espacio S que sea T_2 es completamente normal si y sólo si es paracompacto.*

Todo espacio métrico es completamente normal, pues se tiene:

<u>TEOREMA 23</u>. *Todo espacio métrico es paracompacto.*

<u>Demostración</u>. La más breve y elegante se debe a Mary E. Rudin, [16]. La incluimos aquí, para que el trabajo resulte lo más autocontenido posible.

Sea S un espacio métrico y $\{C_\alpha\}$ un cubrimiento abierto de S indexado por ordinales. Sea ρ la métrica de S y S(x,r) la esfera abierta con centro x y radio r. Para cada entero positivo n definimos $D_{\alpha n}$ (por inducción sobre n) como la unión de todas las esferas $S(x,2^{-n})$ tales que:

1) α es el menor ordinal con $x \in C_\alpha$,

2) $x \notin D_{\beta j}$, si $j < n$,

3) $S(x,3.2^{-n}) \subset C_\alpha$.

Entonces, $\{D_{\alpha n}\}$ es un cubrimiento localmente finito de $\{C_\alpha\}$ que cubre S y de aquí S es paracompacto.

a) Es inmediato que $\{D_{\alpha n}\}$ es un refinamiento de $\{C_\alpha\}$.

Para ver de $\{D_{\alpha n}\}$ cubre S basta observar que, para $x \in S$, existe un ordinal más chico α tal que $x \in C_\alpha$ y un n suficientemente grande para que valga 3).

Por lo tanto, usando 2), $x \in D_{\beta j}$ para algun $j \leq n$.

b) Para ver que $\{D_{\alpha n}\}$ es localmente finito, supongamos que $x \in S$ y sea α el menor ordinal tal que $x \in D_{\alpha n}$ para algun n y elijamos $j > 0$ de tal forma que $S(x,2^{-j}) \subset D_{\alpha n}$.

La prueba consiste en demostrar que:

I) Si $i \geq n+j$, $S(x,2^{-n-j})$ no intersecta a ningun $D_{\beta i}$.

II) Si $i < n+j$, $S(x,2^{-n-j})$ intersecta $D_{\beta i}$, a lo sumo para un β.

PRUEBA DE I). Como $i > n$, de 2), cada una de las esferas de radio 2^{-i} utilizadas en la definición de $D_{\beta i}$ tienen su centro y fuera de $D_{\alpha n}$. Y como $S(x,2^{-j}) \subset D_{\alpha n}$,

$$\rho(x,y) \geq 2^{-j}.$$

Siendo $i \geq j+1$, $n+j \geq j+1$,

$$S(x,2^{-n-j}) \cap S(y,2^{-i}) = \phi.$$

PRUEBA DE II). Supongamos que $p \in D_{\beta i}$, $q \in D_{\gamma i}$ y $\beta < \gamma$.

Queremos probar que

$$\rho(x,y) > 2^{-n-j+1}.$$

Existen puntos y,z tales que $p \in S(y,2^{-i}) \subset D_{\beta i}$, $q \in S(z,2^{-i}) \subset D_{\gamma i}$; por 3)

$$S(y, 3.2^{-i}) \subset C_\beta$$

pero, por 2) $z \notin C_\beta$. Por lo tanto,

$$\rho(x,z) \geqslant 3.2^{-i} \qquad y \qquad \rho(p,q) > 2^{-i} \geqslant 2^{-n-j+1}.$$

Vamos a enunciar dos resultados sobre metrización, que son utilizados en la teoría de la dimensión para espacios métricos generales.

<u>TEOREMA 24</u>. *(P. Alexandroff, P. Urysohn [8]). Un espacio T_1, R es metrizable si y sólo si existe una sucesión*

$$\mathcal{U}_1 \geqslant \mathcal{U}_2^\star \geqslant \mathcal{U}_2 \geqslant \mathcal{U}_3^\star \geqslant \ldots\ldots$$

de cubrimientos abiertos $\mathcal{U}_i$ tales que

$$\{S(p, \mathcal{U}_i) \mid i = 1, 2, \ldots.\}$$

es una base de entornos para cada punto $p \in R$.

Recordemos que una familia abierta $\mathcal{U}$ en un espacio topológico S se dice una base de abiertos si para todo entorno V(p) de todo punto $p \in S$ existe un elemento $U \in \mathcal{U}$ tal que

$$p \in U \subset V(p).$$

En espacios métricos, las bases de abiertos σ-localmente finitas juegan un papel muy importante.

<u>TEOREMA 25</u>. *(J. Nagata, Yu. Smirnov [9]). Un espacio de Hausdorff regular S es metrizable si y sólo si existe una base de abiertos σ-localmente finita de S.*

<u>NOTA</u>. Una demostración de este teorema puede verse en J. Dugundji [17], página 194.

LA METRIZABILIDAD ES UN CONCEPTO TOPOLOGICO.

Veamos ahora un resultado que usaremos en el siguiente teorema. Tiene que ver con la caracterización de la normalidad por cubrimientos.

Los espacios normales están caracterizados por la propiedad de que es posible obtener un refinamiento "más fino" en el siguiente sentido.

TEOREMA 26. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1) S es normal.

2) Si $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ es un cubrimiento puntualmente finito abierto de S, existe un cubrimiento abierto $\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ de S tal que $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$ para cada $\alpha \in A$, y $V_\alpha \neq \phi$ cuando $U_\alpha \neq \phi$.

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2). Sean el conjunto de índices A y $P(S)$, el conjunto de partes de S bien ordenados. Definimos una función:

$$\varphi : A \to P(S)$$

por medio de una construcción transfinita de forma tal que $\varphi(\alpha) = V_\alpha$ es un abierto para cada α, y

a) $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$, $V_\alpha \neq \phi$ cuando $U_\alpha \neq \phi$;

b) $\{V_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\} \cup \{U_\gamma \mid \gamma > \alpha\}$ es un cubrimiento de S.

Supongamos que $\varphi(\beta)$ está definido para todo $\beta < \alpha$ y consideremos

$$F = S \setminus [\bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta \cup \bigcup_{\gamma>\alpha} U_\gamma].$$

Este conjunto es cerrado y, por la hipótesis inductiva los conjuntos entre corchetes junto con U_α forman un cubrimiento de S; por lo tanto

$$F \subset U_\alpha.$$

Siendo S normal, existe un abierto V tal que

$$F \subset V \subset \overline{V} \subset U_\alpha .$$

(Si $F \neq \phi$, reemplazar F por un punto en U_α).

Haciendo $\varphi(\alpha) = V_\alpha$ el primero de tales V en el buen orden de $P(S)$, satisfacen las condiciones a) y b) para la nueva familia.

Existe entonces (Dugundji, J.: [17], cap. II, 5.2), una función unívocamente definida φ: $A \rightarrow P(S)$, con $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$ para cada $\alpha \in A$. Falta probar que $\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ es un cubrimiento de S. Sea $y \in S$; existen a lo sumo un número finito de conjuntos $U_{\alpha 1},\ldots,U_{\alpha n}$ conteniendo y; si $\alpha = \sup \alpha_i$, entonces

$$y \notin \cup \{U_\gamma \mid \gamma > \alpha\}$$

y en razón de b), y debe pertenecer a algun V_β (con $\beta \leqslant \alpha$).

<u>2) ⇒ 1)</u>. Sean A y B cerrados disjuntos de S. Entonces

$$\{S \setminus A, S \setminus B\}$$

es un cubrimiento puntualmente finito de S y por lo tanto podemos encontrar

$$\overline{V_1} \subset S \setminus A,\ \overline{V_2} \subset S \setminus B,\ \complement\overline{V_1},\quad \complement\overline{V_2}$$

entonces de A y B respectivamente, tales que

$$\complement\overline{V_1} \cap \complement\overline{V_2} = \complement(\overline{V_1} \cup \overline{V_2}) = \complement S = \phi.$$

Por lo tanto, S es normal.

<u>NOTA</u>. Recordemos que una familia $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ de subconjuntos en un espacio S se dice localmente finita si cada punto de S tiene un entorno V tal que $V \cap U_\alpha \neq \phi$ a lo sumo para un número finito de índices α.

Una familia $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ puede ser localmente finita, aunque cada U_α intersecta una infinidad de U_β. En R , tomando la familia $\{A_n \mid n \in N\}$ con $A_n = \{ x \mid x > n\}$.

La familia $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ puede no ser localmente finita, aunque ningun U_α intersecta cualquier otro U_β. En R , tomar la familia $\{U_x \mid x \in R\}$, donde $U_x = \{x\}$.

SI ES LOCALMENTE FINITA ES PUNTUALMENTE FINITA.

TEOREMA 27. *Sea S un espacio métrico. Si $\operatorname{Ind} S \leqslant n$, existe una base $\mathcal{B}$ de abiertos σ-localmente finita de S tal que*

$$\operatorname{Ind} \partial(V) \leqslant n-1, \text{ para todo } V \in \mathcal{B}.$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema de Nagata-Smirnov, existe una base de abiertos σ-localmente finita

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i$$

de S, donde podemos suponer que cada $\mathcal{U}_i$ es un cubrimiento abierto de S localmente finito tal que

$$\lim_{n \to \infty} (\text{norma de } \mathcal{U}_i) = 0.$$

(Si $|U|$ = diámetro de U, la norma de $\mathcal{U} = \sup \{|U| , U \in \mathcal{U}\}$.

En efecto, (S,d) siendo métrico es paracompacto y por lo tanto regular. Para cada n = 1,2,... sea $\{U_{n,\alpha}\}$ un refinamiento localmente finito del cubrimiento abierto

$$\{B_\alpha(y,1/n), \ y \in S\}.$$

La familia de todos los abiertos $\{U_{n,\alpha}\}$ es:

1) Localmente finita para cada n;
2) Constituye una base para S. Si U es un abierto cualquiera, $y_0 \in U$ elegimos n_0 suficientemente grande para que

$$1/n_o < \frac{1}{2}\, d(y_o, S \setminus U);$$

entonces, cualquier $U_{n_o,\alpha}$ conteniendo y_o, satisface

$$y_o \in U_{n_o,\alpha} \subset U$$

ya que está contenido en alguna bola $1/n_o$ conteniendo y_o esta bola está contenida completamente en U.

Sea ahora, retomando la demostración

$$\mathcal{U}_i = \{U_\alpha \mid \alpha \in A_i\}.$$

Sabemos, teorema 26, que existe un cubrimiento abierto $\mathcal{W}_i = \{W_\alpha \mid \alpha \in A_i\}$ satisfaciendo $\overline{W_\alpha} \subset U_\alpha$.

Como Ind $S \leqslant n$, existen abiertos V_α para $\alpha \in A_i$ tales que

$$\overline{W_\alpha} \subset V_\alpha \subset U_\alpha$$

$$\text{Ind } \partial(V_\alpha) \leqslant n - 1.$$

Haciendo

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i \qquad\qquad \mathcal{B}_i = \{V_\alpha \mid \alpha \in A_i\}$$

obtenemos la base buscada.

TEOREMA 28. *Si S tiene una base abierta $\mathcal{B}$, σ-localmente finita tal que $\partial(V) = \phi$ para todo $V \in \mathcal{B}$, entonces*

$$\text{Ind } S \leqslant 0.$$

Demostración. Sea

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i,$$

para familias $\mathcal{B}_i$ abiertas localmente finitas. Sean F y G cerrados disjuntos en S. Para todo i

$$U_i = S \setminus \cup \{V \mid V \in \bigcup_{j=1}^{i} B_j,\ V \cap F = \phi\}.$$

es un conjunto abierto y cerrado que contiene F porque $\bigcup_{j=1}^{i} B_j$ es una familia localmente finita de clopens V.

Obtenemos así una sucesión $\{U_i \mid i=1,2,\ldots\}$ de clopens tales que

$$U_1 \supset U_2 \supset \ldots\ldots \supset F\ , \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = F.$$

De forma análoga podemos construir una sucesión

$$\{W_i \mid i=1,2,\ldots\}$$

de clopens tales que

$$W_1 \supset W_2 \supset \ldots\ldots \supset G\ , \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i = G.$$

El conjunto:

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} (U_i \setminus W_i)$$

es un clopen que satisface $F \subset U \subset S \setminus G$. De aquí

$$\text{Ind } S \leqslant 0.$$

<u>COROLARIO 8</u>. *Sea* $A \subseteq S$. *Ind* $S \leqslant 0 \Rightarrow$ *Ind* $A \leqslant 0$.

<u>Demostración</u>. Inmediata, observando los dos últimos teoremas.

<u>TEOREMA 29</u>. *Sea* $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ *un cubrimiento cerrado de un espacio* S *tal que Ind* $F_i \leqslant 0$, $i = 1,2,\ldots$ *Entonces,*

$$\text{Ind } S \leqslant 0.$$

<u>Demostración</u>. Ver Teorema 9, página 22.

<u>TEOREMA 30</u>. *Sea* $\{F_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ *un cubrimiento cerrado localmente finito de un espacio métrico* S *tal que*

$$Ind\ F_\gamma \leqslant 0, \qquad para\ todo\ \gamma \in \Gamma.$$

Entonces

$$Ind\ S \leqslant 0.$$

<u>Demostración.</u> Siendo S métrico es paracompacto y podemos, para cada entero positivo i, considerar un cubrimiento abierto localmente finito

$$\mathcal{U}_i = \{U_\delta \mid \delta \in \Delta_i\}$$

tal que norma $\mathcal{U}_i < 1/i$, y tal que $\overline{U_\delta}$ de cada elemento de $\mathcal{U}_i$ intersecta solamente un número finito de elementos de $\{F_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ (Ver Teoremas 26 y 27). Entonces:

$$\text{Ind } (\overline{U_\delta}) \leqslant 0 \qquad (1)$$

se sigue del teorema anterior.

Usando nuevamente la normalidad de S y el Teorema 26, existe un cubrimiento abierto

$$\mathcal{B}_i = \{V_\delta \mid \delta \in \Delta_i\}$$

con

$$\overline{V_\delta} \subset U_\delta, \qquad \text{para todo } \delta \in \Delta_i.$$

De (1) podemos encontrar un clopen W_δ de $\overline{U_\delta}$ tal que

$$\overline{V_\delta} \subset W_\delta \subset \overline{U_\delta} \setminus (S \setminus U_\delta).$$

Pero esto nos dice que $W_\delta \subset U_\delta$ y de aquí W_δ es también clopen en S. Haciendo

$$\mathcal{D}_i = \{W_\delta \mid \delta \in \Delta_i\}$$

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}_i.$$

obtenemos una base abierta σ-localmente finita formada por clopens. Por lo tanto

$$\text{Ind } S \leqslant 0. \qquad \text{(Teorema 28)}$$

¶ TEOREMAS DE LA SUMA.

TEOREMA 31. *Sea* $\{F_i \mid i=1,2,\ldots\}$ *un cubrimiento cerrado del espacio* S *tal que*

$$\operatorname{Ind} F_i \leqslant n, \qquad i = 1,2,\ldots$$

Entonces $\operatorname{Ind} S \leqslant n.$

TEOREMA 32. *Sea* $\{F_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ *un cubrimiento cerrado localmente finito del espacio* S *tal que*

$$\operatorname{Ind} F_\gamma \leqslant n \qquad \text{para todo } \gamma \in \Gamma$$

Entonces $\operatorname{Ind} S \leqslant n.$

Demostración. La validez de ambos teoremas es clara para $n = -1$ y 0. Supongamos que valen ambospara $n = m - 1$ $(m > 0)$.

Probaremos simultanea e inductivamente las proposiciones comenznado por el teorema 31 para $n = m$.

Como $\operatorname{Ind} F_i \leqslant m$, por el teorema 27, existe una base abierta σ-localmente finita

$$\mathcal{B}_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_{i,k}$$

del subespacio F_i tal que

(1) $$\operatorname{Ind} \partial_{F_i}(V) \leqslant m-1, \qquad \text{para } V \in \mathcal{B}_i.$$

Siendo cada $\mathcal{B}_i$ σ-localmente finita, se tiene que también es σ-localmente finita

$$\mathcal{B}_i' = \{\partial_{F_i}(V) \mid V \in \mathcal{B}_i\}$$

y de aquí la familia $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i'$

es también σ-localmente finita.

Sea

$$H_i = \bigcup_{V \in \mathcal{B}_i} \partial_{F_i}(V).$$

Entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}'_i$ es un cubrimiento cerrado σ-localmente finito de $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$.

Por lo tanto, de (1) y de la hipótesis de inducción: $\operatorname{Ind} H_i \leqslant m-1$, y

$$(2) \qquad \operatorname{Ind}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i\right) \leqslant m-1.$$

Por otra parte, $\mathcal{B}_i$ restrigida a $F_i \setminus H_i$ da una base abierta de $F_i \setminus H_i$, cuyos elementos tienen frontera vacía, o sea, satisfaciendo las condiciones del teorema 28. Por lo tanto:

$$\operatorname{Ind}(F_i \setminus H_i) \leqslant 0.$$

Definamos

$$G_i = F_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j.$$

Del Corolario 8, $\operatorname{Ind} G_i \leqslant 0$.

Siendo cada G_i cerrado en $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$,

$$(3) \qquad \operatorname{Ind}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right) \leqslant 0,$$

(teniendo en cuenta el Teorema 29).

Como

$$S = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i\right)$$

se tiene (Teorema 17) y de (2) y (3)

$$\text{Ind } S \leqslant (m-1) + 1 = m.$$

Esto prueba el teorema 31 parà n=m.

El teorema 32 para n=m sigue ahora del teorema 17, teorema 27, teorema 28, corolario 8, teorema 30.

TEOREMA DE LA SUMA 33.[10] . *Sea S métrico y $\{F_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ un cubrimiento cerrado localmente numerable del espacio S tal que $\text{Ind } F_\gamma \leqslant n$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Entonces*

$$\text{Ind } S \leqslant n.$$

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ un cubrimiento abierto cuyos elementos tienen intersección no vacía a lo sumo con una cantidad numerable de elementos de $\{F_\gamma \mid \gamma\varepsilon\Gamma\}$. Siendo S paracompacto, podemos encontrar un cubrimiento abierto localmente finito $\mathcal{U}$ tal que

$$\overline{\mathcal{U}} \ll \mathcal{B}.$$

Supongamos

$$\mathcal{U} = \{U_\delta \mid \delta \varepsilon \Delta\}.$$

Por la hipótesis, cada $\overline{U_\delta}$ corta a lo sumo una cantidad numerable de miembros de $\{F_\gamma \mid \gamma\varepsilon\Gamma\}$; se tiene de $\text{Ind } F_\gamma \leqslant n$ y teorema 16

$$\text{Ind } (F_\gamma \cap \overline{U_\delta}) \leqslant n.$$

Del teorema 31

$$\text{Ind } (\overline{U_\delta}) \leqslant n.$$

Y entonces, teorema 32, por ser $\{U_\delta\}$ localmente finita

$$\text{Ind } S \leqslant n.$$

TEOREMA 34. *Sea $n \geqslant 0$. $\text{Ind } S \leqslant n \Leftrightarrow$ existe $\mathcal{B}$ base abierta σ-localmente finita tal que*

$$\text{Ind } \partial(V) \leqslant n-1, \qquad \text{para todo } V \in \mathcal{B}.$$

Demostración. Sabemos que $\text{Ind } S \leqslant n \Rightarrow$ existe una base $\mathcal{B}$ en estas condiciones (Teorema 27).

Recíprocamente, para n=0 es el teorema 28. Veamos en general el caso para $n \geqslant 0$. Sea

$$A = \cup \{\partial(V) \mid V \in \mathcal{B}\}$$

$$B = S \setminus A.$$

Como $\{\partial(V) \mid V \in \mathcal{B}\}$ es una familia cerrada σ-localmente finita, del teorema de la suma y de

$$\text{Ind } \partial(V) \leqslant n-1 \qquad \text{para } V \in \mathcal{B}$$

concluímos que

$$\text{Ind } A \leqslant n-1.$$

Como $\mathcal{B}$ restringida a B es una base de abiertos de B satisfaciendo las hipótesis del teorema 28

$$\text{Ind } B \leqslant 0.$$

Por lo tanto (teorema 17)

$$\text{Ind } S = \text{Ind } (A \cup B) \leqslant n.$$

TEOREMA 35. *Para todo subconjunto $A \subseteq S$*

$$\text{Ind } A \leqslant \text{Ind } S.$$

Demostración. Es consecuencia inmediata del teorema anterior y el corolario 8, por inducción.

El teorema que sigue es muy importante.

TEOREMA 36. (De descomposición). *Ind* $S \leqslant n$ *si y sólo si*

$$S = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$$

para $(n+1)$ *conjuntos* A_i *con* $\text{Ind } A_i \leqslant 0,\ i=1,\dots(n+1)$.

Demostración. Del teorema 34 se sigue que S puede descomponerse en dos subconjuntos A_1 y B_1 tales que

$$\text{Ind } A_1 \leqslant 0 \quad , \quad \text{Ind } B_1 \leqslant n-1$$

Descomponemos entonces B_1 en dos subconjuntos A_2 y B_2 tales que

$$\text{Ind } A_2 \leqslant 0 \quad , \quad \text{Ind } B_2 \leqslant n-2.$$

Repitiendo el proceso, S puede descomponerse en (n+1) conjuntos 0-dimensionales $A_1,\dots,A_{n+1}$.

Recíprocamente, teniendo en cuenta el teorema 17, si A y B son subconjuntos del espacio S tales que

$$S = A \cup B,\ \text{Ind } A \leqslant n,\ \text{Ind } B \leqslant 0,$$

entonces

$$\text{Ind } S \leqslant n+1.$$

COROLARIO 9. $\mathit{Ind}\ (A \cup B) \leqslant \mathit{Ind}\ A + \mathit{Ind}\ B + 1$, *donde A y B son subconjuntos cualesquiera del espacio S.*

Demostración. Se sigue de inmediato, descomponiendo A y B en subconjuntos de dimensión cero usando el teorema anterior.

COROLARIO 10. *Sea* $n \geqslant 0$, *S un espacio métrico.*

$$\mathit{Ind}\ S = n \Rightarrow S = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\ , \quad \mathit{Ind}\ A_i \leqslant 0.$$

§ 7. EQUIVALENCIA ENTRE IND Y DIM.

Para probar la equivalencia de la dimensión inductiva fuerte y la dimensión por cubrimientos, necesitamos algunos resultados. El que sigue, fue probado por C. H. Dowker 20 para espacios normales y juega un papel destacado en al teoría de la dimensión para espacios métricos generales (Cf. Definición 10).

TEOREMA 37. *$\dim S \leq n$ si y sólo si para cualquier cubrimiento abierto localmente finito $\mathcal{U}$ de S existe un cubrimiento abierto $\mathcal{B}$ localmente finito oon*

$$ORD\ \mathcal{B} \leq n+1 , \qquad \mathcal{B} \ll \mathcal{U} .$$

Demostración. (Suficiencia) Recordemos que el orden de $\mathcal{U}$ es el número de $U \in \mathcal{U}$ que contienen p, y se lo indica con $\mathrm{ORD}_p\ \mathcal{U}$; además $\mathrm{ORD}\ \mathcal{U} = \sup\{\mathrm{ORD}_p\ \mathcal{U} \mid p \in S\}$.

El resultado se sigue entonces de la definición de dimensión por cubrimientos (ver página 44).

(Necesidad). Sea $\dim S \leq n$ y $\mathcal{U} = \{U_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. Como $\mathcal{U}$ es localmente finito, cada punto $x \in S$ se puede cubrir con una bola

$$B_\varepsilon(x), \ \varepsilon = \varepsilon(x,\mathcal{U}),$$

de forma tal que solo un número finito de los U intersequen $B_\varepsilon(x)$. Sea

$$G = \{B_\varepsilon(x) \mid x \in S\}.$$

Por la paracompacidad de S, existe un refinamiento abierto localmente finito de G, $\mathcal{B}_0$.

Del teorema 26, página 51, se sigue que existe un cubrimiento abierto C tal que

$$(*) \qquad \overline{C} \ll \mathcal{B}_0 .$$

Sea

$$(\circ) \qquad \overline{C} =: F = \{F_\nu \mid \nu < \tau\},$$

con τ transfinito.

Si eliminamos elementos que ya aparecieron en el listado de $\mathcal{F}$, y tenemos en cuenta que

$$\mathcal{F} \ll \mathcal{B}_0 \ll \mathcal{G}$$

resulta que $\mathcal{F}$ tiene las tres propiedades siguientes:

1) $\mu \neq \tau \Rightarrow F_\mu \neq F_\tau$, $\cup F_\nu = S$.

2) F_ν intersecta un número finito de elementos de $\mathcal{U}$ a lo sumo.

3) $\dim F_\nu \leqslant n$.

Esta última propiedad se sigue inmediatamente utilizando el punto 2) del teorema 18, pues $F_\nu = \overline{F_\nu}$. Entonces, basta suponer que $\mathcal{F}$ es una familia como en (o), con τ un número de segunda especie, que satisface $\mathcal{F} \ll \mathcal{B}_0$, 1), 2) y 3).

Definimos a continuación, por inducción transfinita, una sucesión de cubrimientos, $\mathcal{U}_\mu$, $\mu < \tau$, abiertos y localmente finitos:

$$\mathcal{U}_\mu = \{U_{\mu,\gamma} \mid \gamma \in \Gamma\}$$

(**) $\quad U_{o,\gamma} = U_\gamma$; si $\mu < \nu$, $U_{\mu,\gamma} \supset U_{\nu,\gamma}$

y cada punto de F_μ está contenido en, a lo sumo, n+1 miembros de $\mathcal{U}_\mu$.

Si $\mathcal{U}_\mu$ está determinado para $\mu < \nu$, definimos:

(1) $\quad U^*_{\nu,\gamma} = \bigcap_{\mu < \nu} U_{\mu,\gamma}$, $\quad \gamma \in \Gamma$;

$\mathcal{U}_\nu$ se obtendrá de

$\mathcal{U}^*_\nu = \{U^*_{\nu,\gamma} \mid \gamma \in \Gamma\}$ con $U_{\nu,\gamma} \subset U^*_{\nu,\gamma}$, para cualquier γ,

y tanto $\mathcal{U}_\nu$ como $\mathcal{U}^*_\nu$ serán cubrimientos abiertos localmente finitos. Supuesto esto por un momento veamos el proceso para obtener $U_{\nu,\gamma}$.

Restrigimos $\mathcal{U}_\nu^*$ a F_ν. Sólo un número finito de sus elementos, que forman una familia A_ν:

$$A_\nu = \{U^*_{\nu,\gamma_1}, \ldots\ldots, U^*_{\nu,\gamma_n}\}$$

intersectan a F_ν , pues $U_\gamma \supset U^*_{\nu,\gamma}$.

De 3) se sigue que existe un cubrimiento abierto A'_ν de F_ν que es un refinamiento abierto de cubrimiento finito A_ν:

$$A'_\nu = \{W_{\gamma_i} \mid i=1,2,\ldots,n\}$$

tal que ORD $\{W_{\gamma_i}\} \leqslant n+1$ y verificando

(2) $$W_{\gamma_i} \subset U^*_{\nu,\gamma_i} .$$

En efecto, esto es consecuencia de 2), Teorema 18.

Definamos:

(3) $$U_{\nu,\gamma_i} = (U^*_{\nu,\gamma_i} \setminus F_\nu) \cup W_{\gamma_i} \quad , \ i=1,2,\ldots n;$$

si el paso inductivo es realizable, entonces:

$$\mathcal{B} = \{U^*_{\tau,\gamma} \mid \gamma \in \Gamma\}$$

será el refinamiento buscado.

Para demostrar que $\mathcal{U}_\nu$ es un cubrimiento abierto localmente finito será suficiente demostrar esto mismo para $\mathcal{U}_\nu^*$, como se ve del proceso de construcción, especialmente de la definición de A'_ν.

Para demostrar que $\mathcal{U}_\nu^*$ es abierto sólo debemos tratar el caso $\nu \in$ 2a. especie.

Dado $x \in S$, hay un entorno $D(x)$, bola de radio bastante pequeño, tal que para todo j,

$$F_j \cap D(x) = \phi \quad \text{ó} \quad x \in F_j,$$

pues la familia F es localmente finita.

Por esta misma razón, pero aplicada a U, podemos suponer que:

$$(\star) \qquad x \in U_\gamma \Rightarrow D(x) \subset U_\gamma.$$

Además, $\# \{j \mid F_j \ni x\} < \infty$. Sean

$$N = \{F_{\chi_1}, \ldots, F_{\chi_n}\} \quad , \quad \chi_i < \chi_{i+1},$$

los F que contienen a x y tales que $\chi_i < \nu$. Si $x \in U^*_{\nu,\gamma}$, entonces para preservar $(\star)$, D(x) fué modificada a lo sumo en los pasos $\chi_1, \ldots, \chi_n$ del proceso inductivo, quedando finalmente una bola $D'(x) \subset \mathbf{D}(x)$, contenida en todo $U_{\mu,\gamma}$, con

$$\chi_n < \mu < \nu.$$

O sea, por definición de $U^*_{\nu,\gamma}$, será

$$U^*_{\nu,\gamma} \supset D'(x), \text{ y por lo tanto, } U^*_{\nu,\gamma} \text{ es abierto.}$$

Sea ahora $x \in S$, $F_{\chi_1}, \ldots, F_{\chi_N}$, $\chi_1 < \ldots < \chi_N$, los F que contienen a x, y sea $x \in U_\gamma$. Entonces:

$$x \in U_{\mu,\gamma}$$

para $\mu < \chi_1$, pues el proceso no modifica esta pertenencia en este caso y algún $x \in U_{\nu,\gamma_i}$ para $\nu = \chi_1$ (Cf. (3)).

Siguiendo así, vemos que $x \in S$ está cubierto por algún $U_{\mu,\gamma'}$ para todo $\mu > \chi_N$. Luego, $x \in U^*_{\tau,\gamma'}$.

En consecuencia, todos los U^*_ν, $\nu \leqslant \tau$, son cubrimientos de S, abiertos.

$\mathcal{U}_\nu^*$ es localmente finito pues

$$U^*_{\nu,\gamma} \subset U_{o,\gamma} = U_\gamma$$

y $\{U_\gamma\}$ lo es. ■

<u>NOTA</u>. La demostración de la necesidad es básicamente la dada en J.Nagata [12].El resultado es atribuido a H. de Vries, sin cita bibliográfica. Se han incorporado varias aclaraciones, que no sabemos si fueron las sugeridas por de Vries.

<u>COROLARIO 11</u>. *Sea S un espacio métrico. dim S $\leqslant n$ si y sólo si para cualquier cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de S existe un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{B}$ de $\mathcal{U}$ tal que*

$$ORD\ \mathcal{B} \leqslant n+1.$$

<u>Demostración</u>. Hay que observar simplemente que todo cubrimiento abierto de S tiene un refinamiento abierto localmente finito, ya que S es paracompacto.

<u>TEOREMA 38</u>. *Sea $\{U_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ una familia abierta localmente finita en el espacio S con dim $\leqslant n$ y $\{F_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ una familia cerrada tal que $F_\gamma \subset U_\gamma$.*

Existen familias abiertas

$$\{V_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} \quad y \quad \{W_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$$

tales que

$$F_\gamma \subset V_\gamma \subset \overline{V_\gamma} \subset W_\gamma \subset U_\gamma,$$

$$ORD\ \{W_\gamma \setminus \overline{V_\gamma} | \gamma \in \Gamma\} \leqslant n$$

$$ORD\ \{\overline{V_\gamma} \setminus V_\gamma | \gamma \in \Gamma\} \leqslant n.$$

<u>Demostración</u>. Indiquemos con $\mathcal{U}_\gamma$ el cubrimiento binario

$$\{U_\gamma, S\setminus F_\gamma\}.$$

Siendo $\{U_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ localmente finito,

$$\Lambda \{ \mathcal{U}_\gamma \mid \gamma \in \Gamma \}$$

es un cubrimiento abierto.

(Recordemos que

$$\Lambda \{\mathcal{U}_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} = \{\cap\{U'_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} \; U'_\gamma \in \mathcal{U}_\gamma \text{ para cada } \gamma \in \Gamma\}$$

Podemos encontrar entonces, por el Corolario 11 al Teorema 37, un cubrimiento abierto localmente finito:

$$\mathcal{N} = \{N_\delta \mid \delta \in \Delta\}$$

tal que

$$\mathcal{N} \leqslant \Lambda \{U_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$$

$$\mathrm{ORD}\; \mathcal{N} \leqslant n+1.$$

Observemos que todo N_δ intersecta a lo sumo un número finito de los conjuntos de la familia

$$\{F_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$$

Teniendo en cuenta el Teorema 26, podemos construir un cubrimiento cerrado

$$\{K_\delta \mid \delta \in \Delta\}$$

con $K_\delta \subset N_\delta$.

Para cada N_δ y todo F_γ que intersecta N_δ, definimos un abierto $N_\delta(F_\gamma)$ tal que

(1) $$K_\delta \subset N_\delta(F_\gamma) \subset \overline{N_\delta(F_\gamma)} \subset N_\delta$$

y además se cumple

(2) $$\overline{N_\delta(F_\gamma)} \subset N_\delta(F_{\gamma'})$$

o la inclusión inversa para $\gamma \neq \gamma'$.

(Observemos que cada N_δ corta solamente un número finito de F_γ y por lo tanto es fácil construir $N_\delta(F_\gamma)$).

Sea

$$V_\gamma = \cup \{N_\delta(F_\gamma) \mid \delta \in \Delta\};$$

se sigue de $N_\delta \cap F_\gamma \neq \phi$, que

$$F_\gamma \subset V_\gamma \subset \overline{V_\gamma} \subset U_\gamma,$$

ya que

$$N_\delta \cap F_\gamma \neq \phi \Rightarrow \overline{N_\delta(F_\gamma)} \subset N_\delta \subset U_\gamma.$$

Para probar que

$$\mathrm{ORD}\ \{\overline{V_\gamma} \setminus V_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} \leqslant n.$$

suponemos lo contrario, es decir

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} (\overline{V_{\gamma_i}} \setminus V_{\gamma_i}) \neq \phi$$

para distintos γ_i, $i=1,2,\ldots,n+1$.

Entonces deben existir $N_{\delta_i}(F_{\gamma_i})$, $i = 1,2,\ldots,n+1$ tales que

$$(3) \qquad \bigcap_{i=1}^{n+1} (\overline{N_{\delta_i}(F_{\gamma_i})} \setminus N_{\delta_i}(F_{\gamma_i})) \neq \phi.$$

Si $\delta_i = \delta_j$ e $i \neq j$, entonces de (2) obtenemos

$$(\overline{N_{\delta_i}(F_{\gamma_i})}) \setminus N_{\delta_i}(F_{\gamma_i})) \cap (\overline{N_{\delta_j}(F_{\gamma_j})} \setminus N_{\delta_j}(F_{\gamma_j})) = \phi$$

que contradice (3).

Por lo tanto (3) implica que δ_i, $i = 1,2,\ldots,n+1$ son distintos uno de otro. Sea

$$(4) \qquad p \in \bigcap_{i=1}^{n+1} (\overline{N_{\delta_i}(F_{\gamma_i})} \setminus N_{\delta_i}(F_{\gamma_i}));$$

De (1) se sigue que

(5) $$p \notin \bigcup_{i=1}^{n+1} K_{\delta_i}.$$

Como $\{K_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ cubre S, existen K_δ que contienen a p. Por lo tanto, (5) implica

$$\delta \neq \delta_i, \qquad i=1,2,\ldots,n+1.$$

Por otra parte, por (1) y (4) tenemos

$$p \in \bigcap_{i=1}^{n+1} N_{\delta_i}.$$

De aquí

$$p \in K_\delta \cap [\bigcap_{i=1}^{n+1} N_{\delta_i}] \subset N_\delta \cap [\bigcap_{i=1}^{n+1} N_{\delta_i}],$$

que contradice la afimación

$$\mathrm{ORD}\ \mathcal{N} \leqslant n+1.$$

Podemos entonces concluir que

(6) $$\mathrm{ORD}\ \{\overline{V_\gamma} \setminus V_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} \leqslant n.$$

Siendo $\{U_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ localmente finito, podemos construir un cubrimiento $\mathcal{M}$ abierto localmente finito, tal que

$$\mathcal{M} \leqslant \Lambda\ \{\mathcal{U}'_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$$

donde $\mathcal{U}'_\gamma = \{U_\gamma, S \setminus \partial(V_\gamma)\}$.

En virtud de la finitud local de $\{U_\gamma\}$, $\{\overline{V_\gamma} \setminus V_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ es una familia localmente finita satisfaciendo (6) y se puede construir $\mathcal{M}$ de forma tal que para cada punto $p \in S$ (página 47), la estrella de $S(p,\mathcal{M})$ intersecta a lo sumo n miembros

$$\{\overline{V_\gamma} \setminus V_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$$

Haciendo

$$W_\gamma = \overline{V_\gamma} \setminus S(\partial(V_\gamma), M),$$

obtenemos los abiertos W_γ buscados.

TEOREMA 39. *Sea $\{U_\gamma \mid \gamma \in \Gamma_i\}$, i 1,2,...una familia abierta localmente finita en S, con dim $S \leqslant n$ y $\{F_\gamma \mid \gamma \in \Gamma_i\}$ i 1,2...., familias cerradas tales que $F_\gamma \subset U_\gamma$. Existen entonces conjuntos abiertos V_γ para*

$$\gamma \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$$

satisfaciendo $\qquad F_\gamma \subset V_\gamma \subset \overline{V_\gamma} \subset U_\gamma$,

$$\mathrm{ORD}\ \{\overline{V_\gamma} \setminus V_\gamma \mid \gamma \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\} \leqslant n.$$

Demostración. Usando el teorema anterior, podemos definir abiertos

V_γ^1 , W_γ^1 para todo $\gamma \in \Gamma_1$

V_γ^2 , W_γ^2 para todo $\gamma \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

....

V_γ^j , W_γ^j para todo $\gamma \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_j$.

....

de forma tal que

$$F_\gamma \subset V_\gamma^j \subset \overline{V_\gamma^j} \subset W_\gamma^j \subset U_\gamma,$$

$$\overline{V_\gamma^j} \subset V_\gamma^{j+1} \ ; \ W_\gamma^{j+1} \subset W_\gamma^j$$

$$\mathrm{ORD}\ \{W_\gamma^j \setminus V_\gamma^j \mid \gamma \in \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_j\} \leqslant n.$$

De aqui se sigue que los

$$V_\gamma = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_\gamma^j \qquad \text{para } \gamma \in \Gamma_i,$$

son los abiertos buscados.

<u>TEOREMA 40</u>. *Si existe una base abierta σ-localmente finita del espacio S tal que*

$$ORD\ (\mathcal{B}) \leqslant n.$$

Entonces $Ind\ S \leqslant n$.

<u>Demostración</u>.

1) El caso $n=0$ resulta del teorema 28.

2) Para $n>0$, sea $\mathcal{B} = \{V_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$.

Entonces

$$\mathcal{B}_\gamma = \{\partial(V_\gamma) \cap V_{\gamma'} \mid \gamma' \in \Gamma\},$$

es una base σ-localmente finita de abiertos de $\partial(V_\gamma)$ tal que

$$\text{ORD } \{\partial_{\partial(V_\gamma)}(V) \mid V \in \mathcal{B}_\gamma\} \leqslant n-1.$$

Utilizando la hipótesis de inducción, se tiene:

$$\text{Ind } \partial(V_\gamma) \leqslant n-1.$$

Por lo tanto, del teorema 34, página 60, se sigue nuestra afirmación.

Ahora estamos en condiciones de probar el

<u>TEOREMA 41</u>. *Para cualquier espacio métrico S*

$$dim\ S = Ind\ S.$$

<u>Demostración</u>.

1) Sea $\text{Ind } S \leqslant n$. Usando el teorema de descomposición, podemos representar a S como

$$S = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \quad , \text{ Ind } A_i \leqslant 0.$$

Sea ahora

$$\mathcal{U} = \{U_j \mid j = 1,2,\dots,k\}$$

un cubrimiento abierto de S. Consideremos un A_i para un i fijo. Existe un cubrimiento abierto

$$\{V_j \mid j = 1,2,\dots,k\}$$

de A_i tal que

(1) $$\text{ORD } \{V_j \mid j = 1,2,\dots,k\} \leqslant 1, \qquad V_j \subset U_j.$$

En efecto, elijamos un cubrimiento $\{V_j \mid j=1,2,\dots,k\}$ de clopens disjuntos de A_i tal que (Teoremas 19 y 18)

$$V_j \subset U_j.$$

Para todo punto $x \in V_j$ determinemos $\varepsilon(x) > 0$ tal que

$$S_{\varepsilon(x)} \cap A_i \subset V_j$$

$$S_{\varepsilon(x)}(x) \subset U_j.$$

Sea

$$W_j = \cup \{S_{\frac{1}{2}\varepsilon(x)}(x) \mid x \in V_j\}.$$

Entonces,

$$\mathcal{B}_i = \{W_j \mid j = 1,2,\dots,k\}$$

es una familia abierta disjunta que cubre A_i.

Se tiene

$$W_j \subset U_j$$

por construcción y

$$\text{ORD } \mathcal{B}_i \leqslant 1.$$

Tomando

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{B}_i$$

se tiene un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ de orden puntual $\leq n+1$.

Por lo tanto

$$\dim S \leq n.$$

Hemos probado así que: $\dim S \leq \operatorname{Ind} S$.

2) Vamos a probar ahora que: $\operatorname{Ind} S \leq \dim S$.

Supongamos que $\dim S \leq n$. Usando la paracompacidad de S podemos elegir una sucesión de cubrimientos abiertos localmente finitos

$$\mathcal{U}_i = \{U_\gamma \mid \gamma \in \Gamma_i\} \qquad i=1,2,\ldots.$$

tales que:

$$\lim_{i \to \infty} (\text{norma } \mathcal{U}_i) = 0.$$

Usando el Teorema 26, podemos construir cubrimientos cerrados

$$\mathcal{F}_i = \{F_\gamma \mid \gamma \in \Gamma_i\} \qquad i=1,2,\ldots$$

satisfaciendo

$$F_\gamma \subset U_\gamma.$$

Teniendo en cuenta el teorema 39 obtenemos abiertos

$$V_\gamma \text{ para } \gamma \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$$

tales que

$$F_\gamma \subset V_\gamma \subset \overline{V_\gamma} \subset U_\gamma$$

$$\operatorname{ORD} \{\overline{V_\gamma} \setminus V_\gamma \mid \gamma \in \cup \Gamma_i\} \leq n,$$

Pero $\mathcal{B} = \{V_\gamma \mid \gamma \in \cup \Gamma_i\}$

es una base σ-localmente finita (partimos de cubrimientos abiertos localmente finitos), y por el teorema 40, resulta

$$\operatorname{Ind} S \leq n.$$

EJEMPLO 16. [6]. En este trabajo, P. Roy da un ejemplo de un espacio métrico S para el cual

$$\operatorname{ind} S = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{Ind} S = 1,$$

y resolvió así por la negativa el problema de equivalencia entre ambas nociones para espacios métricos generales.

El ejemplo es sumamente complicado. Hace uso del Teorema 18 y del resultado conocido que $\operatorname{Ind} S = 0 \Rightarrow \dim S = 0$.

§ 8. CUBRIMIENTOS Y EL TEOREMA DE INMERSION.

Veamos ahora dos resultados que son necesarios para la demostración del teorema de inmersión.

LEMA 4. *Sean V y W subconjuntos de R y S respectivamente. Se tiene*

$$\partial_{R\times S}(V \times W) = \partial_R(V) \times \overline{W} \cup \overline{V} \times \partial_S(W).$$

Demostración. Supongamos que $(p,q) \notin \partial_R(V) \times \overline{W} \cup \overline{V} \times \partial_S(W)$.

Entonces $(p \in R, q \in S)$,

1) $\quad p \notin \partial_R(V) \quad$ ó $\quad q \notin \overline{W}$

2) $\quad p \notin \overline{V} \quad$ ó $\quad q \notin \partial_S(W)$.

Como $q \notin \overline{W}$ ó $p \notin \overline{V}$ implica $(p,q) \notin \partial_{R\times S}(V \times W)$, supongamos que $q \in \overline{W}$, $p \in \overline{V}$. Esto implica, de 1) y 2) que :

$$p \notin \partial_R(V) \quad , \quad q \notin \partial_S(W).$$

Por lo tanto,

$$p \in \mathrm{Int}_R\,(V) \quad , \; q \in \mathrm{Int}_S\,(W),$$

donde $\mathrm{Int}_R\,(V)$ para un subconjunto V de R significa el interior de V en R. Entonces,

$$(p,q) \in \mathrm{Int}_{R\times S}\,(V \times W),$$

y, por lo tanto,

$$(p,q) \notin \partial_{R\times S}\,(V \times W).$$

De aquí resulta la inclusión

$$\partial_{R\times S}\,(V \times W) \subset \partial_R\,(V) \times \overline{W} \cup \overline{V} \times \partial_S\,(W).$$

La desigualdad contraria es inmediata y el lema está probado.

TEOREMA 42. (Teorema del producto). *Sean R y S dos espacios, de los cuales uno por lo menos no es vacío. Entonces*

$$Ind\ (R \times S) \leqslant Ind\ R + Ind\ S.$$

Demostración. Sean Ind R = n, Ind S = m. Vamos a probar el teorema por inducción sobre el número n+m.

1) Si n+m = -1. la desigualdad es evidente.

2) Sabemos que existen bases abiertas σ-localmente finitas

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$$

de R, tales que

a) $$\text{Ind } \partial_R(V) \leqslant n-1 \quad , \quad \text{para todo } V \in \mathcal{B},$$

$$\mathcal{G} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{G}_j$$

de S, tal que

b) $$\text{Ind } \partial_S(W) \leqslant m-1 \quad , \quad \text{para todo } W \in \mathcal{G},$$

donde $\mathcal{B}_i$ y $\mathcal{G}_j$ son familias abiertas localmente finitas de R y S, respectivamente.

Hagamos

$$\mathcal{B}_i \times \mathcal{G}_j = \{ V \times W \mid V \in \mathcal{B}_i, W \in \mathcal{G}_j \}.$$

Entonces:

$\mathcal{B}_i \times \mathcal{G}_j$ es una familia abierta localmente finita de R $\times$ S. Por lo tanto

$$\bigcup_{i,j=1}^{\infty} \mathcal{B}_i \times \mathcal{G}_j$$

es una base abierta σ-localmente finita de R $\times$ S.

Por otra parte, se sigue de a) y b) combinada con la hipótesis inductiva que:

$$\text{Ind } \partial_R(V) \times \overline{W} \leqslant n+m-1,$$
$$\text{Ind } \overline{V} \times \partial_S(W) \leqslant n+m-1,$$

para todo $V \in \mathcal{B}$ y $W \in \mathcal{G}$. Como (del lema)

$$\partial_{R\times S}(V \times W) = \partial_R(V) \times \overline{W} \cup \overline{V} \times \partial_S(W)$$

del teorema 32 de la suma se tiene: (cf. página 57),

$$\text{Ind } \partial_{R\times S}(V \times W) \leqslant n+m-1$$

para todo

$$V \times W \in \bigcup_{i,j=1}^{\infty} \mathcal{B}_i \times \mathcal{G}_j.$$

Entonces,

$$\text{Ind } (R \times S) \leqslant n+m. \qquad \text{(Teorema 34).}$$

Cualquier subconjunto del espacio euclídeo es separable, métrico y de dimensión finita. ¿Es el recíproco cierto?

Probaremos que todo espacio métrico separable S de dimensión menor o igual que n puede ser sumergido topológicamente en R^{2n+1}.

Un ejemplo debido a Antonio Flores [18], muestra que este número 2n+1 no puede mejorarse, es decir, no es posible sumergir un espacio n dimensional en un espacio euclídeo de dimensión 2n.

<u>LEMA 5</u>. *Sea S un espacio métrico y M un subconjunto de S, con dim M $\leqslant$ 0. Sean U_1 y U_2 abiertos en S que cubren M. Existen dos abiertos V_1 y V_2 que cubren M y tales que*

$$V_1 \subset U_1, \quad V_2 \subset U_2$$

$$V_1 \cap V_2 = \phi.$$

<u>Demostración</u>.

a) Es claro si M = ϕ.

b) Supongamos que M es cero-dimensional. Supongamos que

$$S = U_1 \cup U_2$$

(De otro modo podemos reemplazar S por la unión). Entonces:

1) $$C_1 = S \setminus U_2 \quad , \; C_2 = S \setminus U_1$$

son cerrados disjuntos.

Como ind M = Dim M = 0 aplicando el Teorema 8, página 21, encontramos un B cerrado que separa C_1 y C_2 y $B \cap M = \phi$. Existen entonces abiertos V_1 y V_2 tales que

2) $$V_1 \supset C_1 \quad , \quad V_2 \supset C_2$$

3) $$V_1 \cap V_2 = \phi$$

4) $$S \setminus B = V_1 \cup V_2.$$

De 1), 2) y 3) se sigue que

$$V_1 \subset U_1 \quad , \quad V_2 \subset U_2,$$

y de 4) y de $B \cap M = \phi$, resulta

$$V_1 \cup V_2 \supset M.$$

<u>LEMA 6</u>. *Sea $M \subset S$ separable, dim $M \leqslant 0$ y $U_1,\ldots,U_r$ abiertos que cubren M. Existen abiertos $V_1,\ldots,V_r$ que cubren M tales que*

$$V_i \subset U_i \quad , \; i = 1, 2, \ldots, r$$

$$V_i \cap V_j = \phi, \; i \neq j.$$

<u>Demostración</u>. La demostración es por inducción sobre el número de conjuntos U_i.

Es claro si hay un solo U_i.

Supongamos que el número de U_i es r y que vale el lema 6 para r-1. Pongamos:

$$U'_{r-1} = U_{r-1} \cup U_r.$$

Consideremos el cubrimiento de M formado por los r-1 conjuntos abiertos,

$$U_1, U_2, \ldots, U_{r-2}, U'_{r-1}.$$

Por la hipótesis de inducción, existe un cubrimiento

$$V_1, V_2, \ldots, V_{r-2}, V'_{r-1}$$

de M tal que

$$V_1 \subset U_1, \ldots, V_{r-2} \subset U_{r-2},\ V'_{r-1} \subset U'_{r-1}$$

y los $V_1, \ldots, V_{r-2}$, y V'_{r-1} mutuamente disjuntos.

$V'_{r-1} \cap M$ tiene dimensión $\leqslant 0$ (cf. Teorema 35) y U_{r-1} y U_r cubren

$$V'_{r-1} \cap M.$$

Por el Lema 5, existen abiertos V_{r-1} y V_r que cubren $V'_{r-1} \cap M$ y satisfacen:

$$V_{r-1} \subset U_{r-1} \quad , \quad V_r \subset U_r$$

$$V_{r-1} \cap V_r = \phi \ .$$

Entonces:

$$V_1, \ldots, V_{r-2}, V_{r-1}, V_r \ ,$$

satisface el lema.

Del lema 6), podemos deducir el:

<u>TEOREMA 43</u>. *Sea S métrico compacto o A finita. Sea $\dim S \leqslant n$ y A un cubrimiento abierto de S. Existe un refinamien*

to abierto finito $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ de orden $\leqslant n$.

Demostración. Es obvio si $n = \infty$. Supongamos entonces que n es finito. Por el teorema de descomposición

$$S = A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}$$

y tal que cada sumando A_i tiene dimensión $\leqslant 0$.

Como $\mathcal{A}$ es un cubrimiento de cada A_i, podemos aplicar el lema 6) y obtener $n+1$ colecciones finitas $\mathcal{B}^i$ de abiertos

$$\mathcal{B}^i = \{V_1^i, \ldots, V_{r(i)}^i\}, \qquad i=1,2,\ldots,n+1$$

tal que

$$\mathcal{B}^i \text{ es un cubrimiento de } A_i$$

y

$$(*) \qquad V_j^i \cap V_k^i = \phi \qquad \text{si } j \neq k .$$

Sea $\mathcal{B} = \cup \{V_j^i \ , \ i=1,\ldots,n+1;\ j=1,\ldots,r(i)\}$.

Entonces:

$$\text{ord } \mathcal{B} \leqslant n.$$

En efecto, si tratamos de hacer la intersección de $n+2$ miembros de $\mathcal{B}$, cualquier elección contiene dos miembros de uno de los subcubrimientos $\mathcal{B}^i$. Y la relación (*) nos dice que esa intersección es vacía.

COROLARIO 12. *Sea S un espacio métrico compacto, dim $S \leqslant n$. Entonces, se pueden encontrar cubrimientos finitos abiertos de orden $\leqslant n$ de diámetro arbitrariamente pequeño.*

¶. BIBLIOGRAFIA.

[1] BROUWER, F.: Über den natürlichen Dimensionsbegriff. Journ. f. Math. 142 (1913), pp. 146-152.

[2] ERDÖS, P.: The dimension of rational points in Hilbert spaces. Ann. Math. 41 (1940), pp. 734-736.

[3] HUREWICZ, W.; WALLMAN, H.: Dimension Theory. Princeton University Press, (1948).

[4] KATĚTOV, M.: On the dimension of metric spaces. Dokl. Akad. Nauk SSSR (N,S.) 79 (1951), pp. 189-191.

[5] ALEXANDROFF, P.: The present state of the theory of dimension. Uspehi Math. Nauk (N.S.) (6) 45 (1951), pp. 43-68.

[6] ROY, P.: Failure of equivalence of dimension concepts for metric spaces. Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 68, n° 6 (1962), pp. 609-613.

[7] STONE, A. H.: Paracompactness and product spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), pp. 977-982.

[8] DIEUDONNE, J.: Une généralisation des espaces compacts. J. Math. Pures et Appl. 23, (1944),pp. 65-76.

[9] NAGATA, J.: On a necessary and sufficient condition for metrizability. I. Inst. Polytech. Osaka City Univ. I, (1950), pp. 93-100.

[10] MORITA, K.: Normal families and dimension theory for metric spaces. Math. Ann. 128 (1954), pp. 350-362.

[11] KATĚTOV, M.: On the dimension of non-separable spaces. I. (R.E.) Czech. Math. J. 2 (1952), pp.333-368.

[12] NAGATA, J.: Modern dimension theory. North Holland Pub. Co. Amsterdam (1965).

[13] KURATOWSKI, C.: Sur les théorémes de "plongement" dans la théorie de la dimension. Fund. Math. 28, (1927), pp. 336-342.

[14] SZPILRAJN, E.: La dimension et la mesure. Fund. Math. 28 (1927), pp. 81-87.

[15] TUCKEY, J. W.: Convergence and uniformity in general topology. Ann. of Math. Studies, n° 2, Princeton, (1940)

[16] RUDIN, M. E.: A new proof that metric spaces are paracompact. Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 20, n° 2, (1969), pp.603-606.

[17] DUGUNDJI, J.: Topology. Allyn & Bacon. (1966).

[18] FLORES, A.: Über n-dimensionale Komplexe die im R^{2n+1} absolut sellstverschlungen sind. Ergeb. eines math. Kolloquiums 6 (1933-4), pp. 4-7.

[19] EDGARD, G.: Measure, topology and fractal geometry. Springer. (1990).

[20] DOWKER, C. H.: Mapping theorems for non-compact spaces. Amer. J. Math. 69, (1947), 200-242.

[21] POINCARE, H.: Pourquoi l'espace a trois dimensions. Rev. Métaphys. et Morale 20, (1912), pp. 483-504.

Bahía Blanca, 31 de Diciembre de 1993.