ACTAS DEL IX CONGRESO
DR. ANTONIO A. R. MONTEIRO
(2007), Páginas 23–32

SOBRE LÓGICAS FUZZY BASADAS EN T-NORMAS Y LOS RESULTADOS DE MONTEIRO SOBRE LAS ÁLGEBRAS DE HEYTING SIMÉTRICAS

FRANCESC ESTEVA AND LLUÍS GODO

RESUMEN. In the setting of logical systems associated to residuated lattices, Ono defined in [20] (see also [7]) the weak contractive systems corresponding to pseudo-complemented residuated lattices. Intuitionistic logic (associated to Heyting algebras) and the infinitely-valued Gödel logic (associated to linear Heyting algebras) are remarkable examples of weak contractive systems. In these systems, the definable negation $\neg\varphi$ as $\varphi \to 0$ is not involutive (it is in fact Gödel negation over linearly ordered algebras). In this setting, it makes sense to study the issue of adding an involutive negation to weak contractive systems. This is in fact what Monteiro did in his excellent monograph [18] for the case of Heyting algebras, the resulting structures being called Symmetric Heyting algebras, and paying special attention to the linear case. In this short paper, after a general presentation of the t-norm based (fuzzy) logics as pre-linear extensions of Höhle's Monoidal logic [15] or Ono's FL_{ew}, we will study similar expansions for any (prelinear) weak contractive fuzzy logic, following the line of the paper [9] where the authors studied the expansions obtained by adding an involutive negation to SBL, Gödel and Product logics. This line has been further investigated in [4] and [11]. We show that some of Monteiro's results are also valid in the general setting of prelinear pseudocomplemented residuated lattices and lead to new axiomatic presentations.

1. LÓGICAS MULTIVALUADAS RESIDUADAS FUZZY (BASADAS EN T-NORMAS)

Tal como dice Hájek en su monografía [12] las lógicas multivaluadas constituyen el núcleo de lo que se conoce como lógica fuzzy en sentido estricto siguiendo la distinción que hizo Zadeh en [24] y que transcribimos a continuación:

The term Fuzzy Logic has two different meanings: wide and narrow. In a narrow sense it is a logical system which aims a formalization of approximate reasoning. In this sense it is an extension of multi-valued logic.However the agenda of Fuzzy logic is quite different from that of traditional multi-valued logic. Such key concepts in FL as the concept of linguistic variable, fuzzy if-then rule, fuzzy quantification and defuzzification, truth qualification, the extension principle, the compositional rule of inference and interpolative reasoning, among others, are not adressed in traditional systems. In its wide sense, FL, is fuzzily synonimous with the fuzzy set theory of classes of unsharp boundaries. FST is much broader than FL and includes the later as one of its branches.

Pero, ¿cuáles son estas lógicas multivaluadas? En los trabajos semánticos realizados en la década de 1980–90 (véase, por ejemplo, [1, 23]) se habían estudiado las operaciones sobre el intervalo real $[0,1]$ que eran candidatas idóneas para ser funciones de verdad asociadas a las conectivas conjunción y disyunción aditivas y multiplicativas así como a las implicaciones y negaciones. Si las conectivas de conjunción y disyunción aditivas es evidente que tienen asociadas el máximo y el mínimo de forma natural, como operación asociada a la conjunción multiplicativa se eligió una t-norma cualquiera lo que ya conlleva una diversidad de lógicas fuzzy dependiendo de cuál sea la t-norma elegida.

Recordemos que las normas triangulares (t-normas) fueron introducidas por Schweizer y Sklar en [22] en el marco de los espacios métricos probabilísticos y se definen como operaciones sobre $[0,1]$ que son commutativas, asociativas, no decrecientes en las dos variables y que tienen 1 como neutro y 0 como absorbente. Sus propiedades, no cabe duda, casan bien con las que parece razonable que cumpla una conjunción. De ahí que su uso se generalizara sin demasiados problemas. Además, las lógicas infinito-valuadas de Lukasiewicz y Gödel tienen como funciones de verdad de la conjunción multiplicativa las t-normas de Lukasiewicz ($x * y = \text{máx}(0, x+y-1)$) y del mínimo ($x * y = \text{mín}(x,y)$) respectivamente.

La elección de la función correspondiente a la implicación llevó un cierto debate pero fundamentalmente se han utilizado dos generalizaciones de la implicación clásica. La primera viene dada como la generalización de la ley clásica $p \to q = \neg p \vee q$, es conocida como S-implicación y requiere la definición previa de una negación involutiva[1] y la disyunción multiplicativa (de hecho se puede decir que viene definida por la negación ya que la disyunción multiplicativa se suele definir por dualidad a partir de la conjunción multiplicativa y la negación cuando ésta es involutiva). La segunda generalización de implicación es la residuada, definida por la extensión de la propiedad de residuación clásica a partir de la conjunción multiplicativa mediante la equivalencia

$$x \leq y \Rightarrow_* z \text{ si, y sólo si } x * y \leq z$$

y que equivale a que la implicación se defina a partir de la conjunción multiplicativa de la forma

$$x \Rightarrow_* y = \text{máx}\{z \mid z * x \leq y\}.$$

Ésta es la implicación que usa Hájek en [12] y justifica su preferencia a la S-implicación debido a sus propiedades lógicas: su comportamiento relacionado con el orden ($x \Rightarrow_* y = 1$ si y sólo si $x \leq y$) y su buena relación con el Modus Ponens que la propiedad de residuación expresa ($x * (x \Rightarrow_* y) \leq y$). De ahí que Hájek proponga como cálculo asociado a la lógica fuzzy el definido sobre el intervalo $[0,1]$ por una t-norma ($*$), su residuo ($\Rightarrow_*$) , la negación asociada ($\neg x = x \Rightarrow_* 0$) y las operaciones $\text{máx}, \text{mín}$ definidas por el orden usual de los reales. De hecho Hájek lo define para las t-normas continuas para las que siempre existe el residuo. Recordamos aquí las propiedades que cumplen las t-normas continuas y su residuo que guiaron la definición de la lógica BL en [12],

(relación con el orden):	$x \leq y$ if and only if $x \Rightarrow_* y = 1$
(Transitividad):	$(x \Rightarrow_* y) * (y \Rightarrow_* z) \leq x \Rightarrow_* z$
(Prelinealidad):	$(x \Rightarrow_* y) \vee (y \Rightarrow_* x) = 1$
(definibilidad del máx):	$\text{máx}(x,y) = \text{mín}(((x \Rightarrow_* y) \Rightarrow_* y), ((y \Rightarrow_* x) \Rightarrow_* x)))$
(divisibilidad)	$x \wedge y = x * (x \Rightarrow_* y)$.

El lenguaje proposicional de la lógica BL viene definido por un conjunto numerable de variables proposicionales, las constantes $\overline{0}$ y $\overline{1}$ y las conectivas binarias & y $\to$. Los axiomas originales de Hàjek para BL son,

[1] Lo que se conoce como una *función de negación fuerte* en la literatura fuzzy.

(A1) $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$
(A2) $\varphi \,\&\, \psi \to \varphi$
(A3) $\varphi \,\&\, \psi \to \psi \,\&\, \varphi$
(A4) $\varphi \,\&\, (\varphi \to \psi) \to \psi \,\&\, (\psi \to \varphi)$
(A5a) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \,\&\, \psi) \to \chi)$
(A5b) $((\varphi \,\&\, \psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$
(A6) $((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)$
(A7) $\overline{0} \to \varphi$

y su única regla de inferencia es el Modus Ponens. Cintula demostró posteriormente [3] que el axioma (A3) era redundante.

Otros conectivos usualmente utilizados en estas lógicas son $\neg$, $\wedge$ y $\vee$ y son definibles en estos sistemas de la forma:

$$\begin{array}{rcl} \neg\varphi & es & \varphi \to \overline{0} \\ \varphi \wedge \psi & es & \varphi \,\&\, (\varphi \to \psi) \\ \varphi \vee \psi & es & ((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi) \end{array}$$

Hájek definió las *BL-álgebras* como retículos residuados (acotados, conmutativos e integrales) $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, *, \Rightarrow, 0, 1)$ que cumplen además las condiciones de:

(Prelinealidad): $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1$
(Divisibilidad): $x \wedge y = x * (x \Rightarrow y)$

Demostró que estas álgebras forman una variedad generada por las linealmente ordenadas y que constituyen la semántica algebraica equivalente a la lógica BL. Además conjeturó que BL era la lógica de las t-normas continuas, conjetura que fue demostrada en dos pasos en los trabajos [13, 5]. Algebraicamente, lo que se demuestra es que la familia de las llamadas BL-álgebras estándar, es decir, las BL-álgebras sobre el intervalo real $[0,1]$, y que vienen definidas unívocamente por t-normas continuas y sus residuos, y que denotaremos como $[0,1]_* = ([0,1], \text{máx}, \text{mín}, *, \Rightarrow_*, 0, 1)$ para cada t-norm continua $*$ genera la variedad de las BL-álgebras. Lógicamente lo que dice es que las fórmulas probables en BL coinciden con las tautologías comunes a todas las álgebras estandard (definidas por las t-normas continuas y sus residuos). Además, el resultado conocido de que toda t-norma continua es suma ordinal de las t-normas del producto, del mínimo y de Lukasiewicz (véase [19, 16]) da a las lógicas correspondientes a estas tres t-normas (estudiadas en [14, 6, 21] respectivamente) un papel prominente en el marco de las lógicas basadas en t-normas. De hecho sus correspondientes lógicas, que llamaremos respectivamente Producto, Gödel y Lukasiewicz, son lógicas que son completas respecto a una única álgebra estándar, la definida por la t-norma producto, la t-norma mínimo y la t-norma de Lukasiewicz respectivamente, y se pueden definir a partir de BL como las extensiones axiomáticas siguientes:

(i) la lógica Producto es la extensión de BL con los axiomas,

$$\neg\neg\varphi \to (((\varphi \,\&\, \psi) \to (\varphi \,\&\, \chi)) \to (\psi \to \chi)$$
$$\varphi \wedge \neg\varphi \to \overline{0}$$

(ii) la lógica de Gödel es la extensión de BL con el axioma

$$\varphi \to (\varphi \,\&\, \varphi)$$

(iii) finalmente la lógica de Lukasiewicz es la extensión de BL con el axioma,

$$\neg\neg\varphi \to \varphi$$

Citemos para finalizar este repaso a las extesiones axiomáticas de BL que en [10] se estudian las lógicas residuadas L_* asociadas a cada t-norma continua $*$ en particular, es decir, las lógica L_* que son completas cada una con respecto a la álgebra estándar definida por $*$ y su residuo. Se demuestra que todas estas lógicas son finitamente axiomatizables y se da un algoritmo para hallar un sistema finito de axiomas que las caracteriza como extensiones axiomáticas de BL.

Poco después de la introducción de BL, la observación de que una t-norma tiene residuo si y sólo si es continua por la izquierda llevó a los autores a definir en [8] la lógica que se conoce como MTL (Monoidal t-norm based logic) cuyo lenguaje es el mismo que el de BL con la diferencia de que en este caso el conectivo $\wedge$ no es definible puesto que las t-normas continuas por la izquierda no satisfacen la divisibilidad[2]. Los axiomas de MTL son,

(A1) $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$
(A2) $\varphi \,\&\, \psi \to \varphi$
(A3) $\varphi \,\&\, \psi \to \psi \,\&\, \varphi$
(A4) $\varphi \wedge \psi \to \varphi$
(A5) $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$
(A6) $\varphi \,\&\, (\varphi \to \psi) \to \varphi \wedge \psi$
(A7a) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \,\&\, \psi \to \chi)$
(A7b) $(\varphi \,\&\, \psi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$
(A8) $((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)$
(A9) $\overline{0} \to \varphi$

y la única regla de inferencia continúa siendo el Modus Ponens.

Comparando con BL, los nuevos axiomas son el (A4) y (A5) (de introducción de $\wedge$) y se ha cambiado el (A6) dado que no se cumple la divisibilidad. Las conectivas definibles se reducen a $\vee$ y $\neg$ (que se definen igual que en BL). La contrapartida algebraica de esta lógica la constituyen las MTL-álgebras, que son retículos residuados (acotados, conmutativos e integrales) prelineales, forman una variedad y son la semántica algebraica equivalente a la lógica MTL. La completud de esta lógica respecto a la clase de MTL-álgebras estándar, las definidas sobre $[0,1]$ por las t-normas continuas por la izquierda y su residuo, fue demostrada por Jenei y Montagna en [17]. La demostración pasa por ver que toda MTL-cadena numerable es sumergible en una MTL-cadena estándar. Desde el punto de vista lógico, ello prueba la completud fuerte para cualquier teoría (sea o no finita), cosa que no es cierta para BL y sus extensiones axiomáticas para las cuales sólo vale la completitud fuerte para teorías finitas (con la única excepción de Gödel que sí tiene la completitud fuerte).

Es interesante observar que en general una lógica L extensión de MTL (excepción hecha de Gödel) sólo cumple el siguiente teorema local de la deducción:

$$\varphi \vdash_L \psi \text{ si y solo si existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \vdash_L (\varphi)^n \to \psi$$

donde $(\varphi)^n$ es un abreviación de $\varphi \& \overset{n}{\ldots} \& \varphi$ y el exponente n depende de φ y ψ.

Como extensión axiomática de MTL mediante el axioma de involución ($\neg\neg\varphi \to \varphi$) se obtiene la lógica IMTL (Involutive MTL) y como extensión de BL (resp. MTL) mediante

[2] De hecho una t-norma continua por la izquierda es continua si y sólo si satisface la propiedad de la divisibilidad.

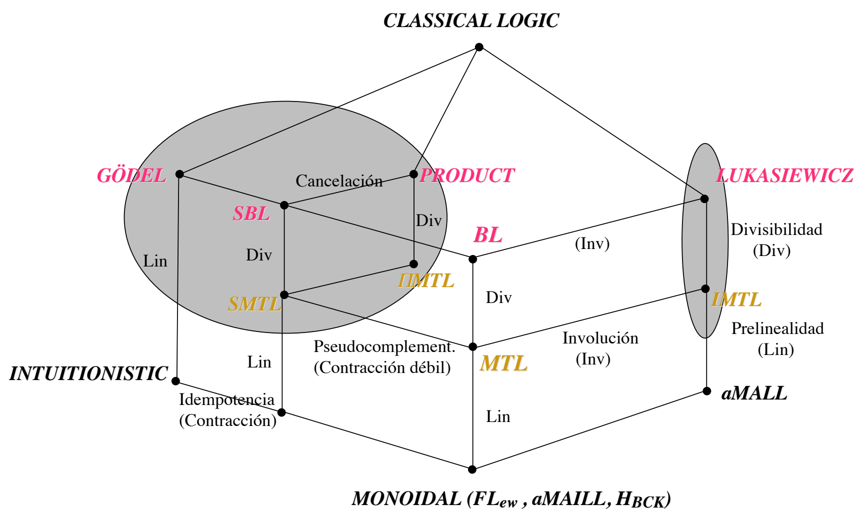

FIGURA 1. Jerarquía de lógicas.

el axioma de pseudo-complementación ($\varphi \wedge \neg\varphi = \overline{0}$) se obtiene la llamada lógica SBL (resp. SMTL). Es interesante observar que en toda cadena de la variedad SBL (o SMTL) la negación viene definida como la llamada negación de Gödel ($n(x) = 0$ para todo $x \neq 0$ y $n(0) = 1$). El esquema de la Fig. 1 nos muestra la jerarquía de estas lógicas a las que hemos añadido la Monoidal o FL$_{ew}$ correspondiente a la variedad de los retículos residuados y la Intuicionista correspondiente a las álgebras de Heyting.

Observemos que en la Figura 1 se han destacado por una parte las lógicas que tienen negación involutiva (Lukasiewicz y IMTL) y por otra las débilmente contractivas, es decir, las que cumplen la pseudo-complementación (SMTL, ΠMTL, SBL, Producto y Gödel). En la siguiente sección trataremos de la expansión de estas lógicas introduciendo como nueva conectiva una negación involutiva.

Pero antes de ello, y para finalizar esta sección, comentaremos las expansiones de MTL y sus extensiones axiomáticas con el operador unario Δ. La semántica intuitiva de este operador sobre el intervalo real $[0,1]$ es que una fórmula del tipo $\Delta\varphi$ es booleana, en el sentido de que toma el valor 1 si φ toma también el valor 1, y toma el valor 0 en cualquier otro caso (i.e. cuando el valor de φ es menor que 1). Este operador, que ya fue introducido por Monteiro en el contexto de las álgebras de Heyting [18], fue introducido en el marco de las lógicas fuzzy por Baaz en el contexto de la lógica de Gödel [2] y depués por Hájek en el contexto de BL [12]. Si L es una extensión axiomática de MTL, entonces la lógica L_Δ se obtiene al añadir al lenguaje de L el operador unario Δ junto con estos axiomas y regla de inferencia adicionales:

(Δ1) $\Delta\varphi \vee \neg\Delta\varphi$
(Δ2) $\Delta(\varphi \vee \psi) \to (\Delta\varphi \vee \Delta\psi)$
(Δ3) $\Delta\varphi \to \varphi$
(Δ4) $\Delta\varphi \to \Delta\Delta\varphi$
(Δ5) $\Delta(\varphi \to \psi) \to (\Delta\varphi \to \Delta\psi)$

Regla de necesitación para Δ: de φ se deriva $\Delta\varphi$.

Resulta que la lógica expandida L_Δ preserva la completud de L respecto de sus L-álgebras y de sus L-cadenas (las correspondientes L_Δ-algebras siempre se pueden descomponer en producto subdirecto de cadenas) y respecto de sus L-cadenas sobe $[0,1]$ en caso de que L tuviera completud estándar.

2. Algebras de Heyting simétricas y lógicas residuadas con involución

La presente sección se basa en resultados de Monteiro contenidos en su excelente monografía [18] y su comparación con los resultados de [9, 4]. Se demuestra que muchos de los resultados contenidos en los trabajos de lógicas fuzzy citados no son más que la *generalización* a MTL-álgebras de los resultados de Monteiro sobre álgebras de Heyting prelineales. Para poderlo estudiar adecuadamente resumimos a continuación los resultados de estos dos trabajos.

2.1. Añadiendo una negación involutiva a las SMTL. Las lógicas que son extensiones axiomáticas de SMTL, entre las que figuran las SBL, la Producto y la de Gödel, tienen en común como ya hemos dicho que la negación asociada es una negación *clásica*, en el sentido de que sobre cadenas la función de verdad asociada es la negación de Gödel definida por $n(x) = 0$ si $x \neq 0$ y $n(0) = 1$, es decir, la imagen de n es $\{0,1\}$. En estos casos esta negación no sirve ni para definir por dualidad una disyunción multiplicativa ni para definir la S-implicación. Por ello, en [9] los autores definen y estudian las lógicas resultantes de añadir una negación involutiva a las lógicas SBL, Gödel y Producto. Cintula et al. extendieron en [4] esta línea de trabajo a SMTL y demostraron nuevos resultados sobre estas lógicas. Flaminio y Marchioni han estudiado [11] la lógica resultante de añadir una negación involutiva a MTL y algunas de sus extensiones axiomáticas.

En el primer trabajo se define *SBL*$_\sim$, la expansión de SBL con una nueva conectiva (la negación involutiva $\sim$), de la siguiente forma. Los axiomas de SBL$_\sim$ son los de SBL más

(∼1) $(\sim\sim\varphi) \equiv \varphi$ *(Involución)*
(∼2) $\neg\varphi \to \sim\varphi$
(∼3) $\Delta(\varphi \to \psi) \to \Delta(\sim\psi \to \sim\varphi)$ *(Inversión del orden)*
(Δ1) $\Delta\varphi \vee \neg\Delta\varphi$
(Δ2) $\Delta(\varphi \vee \psi) \to (\Delta\varphi \vee \Delta\psi)$
(Δ5) $\Delta(\varphi \to \psi) \to (\Delta\varphi \to \Delta\psi)$

donde $\Delta\varphi$ significa $\neg\sim\varphi$. Las reglas de inferencia de SBL$_\sim$ son el modus ponens y la necesitacion para Δ (de φ se deduce $\Delta(\varphi)$).

Con esta definición se puede probar que *SBL*$_\sim$ y todas sus extensiones axiomáticas (por ejemplo $G_\sim$ y $\Pi_\sim$) son algebrizables y que las correspondientes álgebras son productos subdirectos de cadenas. Estos resultados permiten probar que $SBL_{\sim}$ es completa respecto a las cadenas de la variedad de las $SBL_{\sim}$-álgebras y que es fuertemente completa respecto a las mismas cadenas para teorías finitas. En el caso de Gödel y del Producto se puede llegar más lejos y probar que los resultados de completitud continuan siendo ciertos si nos restringimos a las cadenas estándar (las definidas sobre $[0,1]_G$ y $[0,1]_\Pi$ respectivamente). Finalmente se prueba que en el caso de Gödel nos podemos restringir a una sola cadena, la cadena estándar definida sobre $[0,1]_G$ al añadirle la involución $\sim x = 1-x$. Respecto a esta cadena $G_{\sim}$ es fuertemente completa incluso para teorías infinitas. Para $\Pi_{\sim}$ los resultados son diferentes. Se prueba que son necesarias todas las cadenas estándar (de hecho todas las posibles negaciones involutivas sobre $[0,1]$ que dan estructuras $[0,1]_{\Pi_{\sim}}$ no isomorfas) para generar la variedad, y sólo es fuertemente completa para la familia de las cadenas estándar para teorías finitas.

Cintula et al. en [4] definen $SMTL_{\sim}$ como la extensión axiomática de SMTL con una negación involutiva de la misma forma y con los mismos axiomas y reglas de inferencia que en el caso de SBL antes citado. Pero demuestran que sólo tres de los axiomas son necesarios; en efecto, $SMTL_{\sim}$ (resp. $SBL_{\sim}$) se puede definir como la expansión de SMTL con una negación involutiva, con los axiomas de SMTL (resp. SBL) más,

(~ 1) $(\sim\sim\varphi) \equiv \varphi$
(~ 2) $(\neg\varphi) \to \sim\varphi$
(~ 3) $\Delta(\varphi \to \psi) \to \Delta(\sim\psi \to \sim\varphi)$

y con las mismas reglas de inferencia, es decir, el Modus Ponens y la necesitación para Δ.

2.2. Las álgebras de Heyting simétricas. Muchos años antes, en 1980, Monteiro había publicado en [18] la magnífica monografía “Sur les algèbres de Heyting symètriquesçon la que había ganado el premio Gulbenkian de Ciencia y Tecnología el año 1978. La monografía contiene un acurado estudio de las álgebras de Heyting expandidas con una negación involutiva, a las que Monteiro llama *álgebras de Heyting simétricas*. Las álgebras de Heyting son las álgebras asociadas a la lógica intuicionista y son retículos residuados pseudocomplementados donde la conjunción multiplicativa es idempotente (y colapsa con el ínfimo reticular). Una álgebra de Heyting simétrica es una estructura $(H,\wedge,\vee,\Rightarrow,\neg,\sim,0,1)$ donde $(H,\wedge,\vee,\Rightarrow,\neg,0,1)$ es una álgebra de Heyting y tal que se satisfacen las dos condiciones siguientes:

(~ 1) $\sim\sim x = x$
(dm) $\sim(x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$ *(Ley de De Morgan)*

El estudio de Monteiro se basa en el estudio de los filtros primos de las dos estructuras que conviven en las álgebras de Heyting simétricas. En efecto, si $(H,\wedge,\vee,\to,\neg,\sim,0,1)$ es una álgebra de Heyting simétrica entonces $(H,\wedge,\vee,\to,\neg,0,1)$ es una álgebra de Heyting y $(H,\wedge,\vee,\sim,0,1)$ es una álgebra de De Morgan. Los resultados que obtiene se basan en la idea de compatibilidad entre estas dos estructuras a través del estudio de sus filtros primos, realizado en la primera parte de la memoria. Monteiro define que las dos estructuras son compatibles cuando la transformada de Bialiniki-Birula y Rasiowa (tal como se define sobre las álgebras de De Morgan) de los filtros primos del álgebra de Heyting, $\Phi(F) = C(\sim(F))$ donde C es el complemento conjuntista, es comparable con el filtro inicial. Y esta propiedad la utiliza para ver en qué casos una álgebra de Heyting lineal simétrica es producto subdirecto de cadenas.

Monteiro demuestra que las dos condiciones de arriba (~ 1) y (dm) (incluso añadiendo la linealidad) no son suficientes para que la descomposición en cadenas se preserve. Por ello define las *álgebras de Heyting simétricas lineales* añadiendo la condición de prelinealidad

$$(lin) \quad (x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1$$

y las *álgebras de Heyting simétricas totalmente lineales* añdiendo a las álgebras de Heyting simétricas lineales la condición

$$(tlin) \quad \neg x \leq \sim x$$

Estas últimas álgebras son las que continúan siendo producto subdirecto de cadenas como lo eran las álgebras de Heyting lineales [3], es decir antes de introducir la negación involutiva. De hecho Monteiro demuestra este resultado pasando por la demostración de que las álgebras de Heyting simétricas son totalmente lineales si y sólo si satisfacen la condición de Kleene

$$(Kleene) \quad x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y$$

y viendo que es cuando las dos estructuras, la de Heyting y la de De Morgan, son compatibles cuando esta descomposición se da.

Para (ejemplificar) ver la sutileza de este resultado fijémonos en el álgebra de Boole de 4 elementos (sobre $\{0,a,b,1\}$ donde $0 \leq a \leq 1$ y $0 \leq b \leq 1$) y definamos sobre ella la negación involutiva $\sim$ definida por $\sim a = a$, $\sim b = b$ and $\sim 0 = 1$. Es evidente que esta álgebra es una álgebra de Heyting simétrica que es lineal pero no totalmente lineal (ni, por tanto, de Kleene). En ella los filtros primos de Boole y De Morgan no son compatibles. Si tomamos por ejemplo, el filtro de Boole primo $F = \{a,1\}$ su transformado por la transformación de Bianiliky-Birula y Rasowa, $\Phi(F) = C(\sim F) = C(\{0,a\} = \{1,b\}$ (siendo C el complemento conjuntista) no es comparable con F.

3. Los resultados de Monteiro y las SMTL con involución

Los resultados de Monteiro descritos en la sección precedente se pueden extender a las expansiones de SMTL con una negación involutiva. La variedad $\text{SMTL}^*_\sim$ de las álgebras que se obtienen de las SMTL añadiendo una negación involutiva y cumpliendo las ecuaciones de SMTL más ($\sim$1), (dm) y ($tlin$) coincide con la variedad de las $\text{SMTL}_\sim$ definida en [4]. De hecho el Teorema 4.10 de la monografía de Monteiro demuestra la equivalencia entre la condición (~ 3) de la definición de Cintula et al. y la propiedad ($tlin$) de Monteiro, y la demostración continúa siendo válida para toda $SMTL$ con una negación involutiva satisfaciendo (~ 1) y (dm). Obviamente en las álgebras de la variedad $\text{SMTL}^*_\sim$ se puede definir el operador Δ como $\Delta x = \neg \sim x$ y se puede ver que en las álgebras de Heyting simétricas totalmente lineales y en las SMTL$\sim$ se cumplen las condiciones de Baaz $(\Delta 1) \ldots (\Delta 5)$ (véase final de la Sección 1). De hecho Monteiro las demuestra en su monografía en el Teorema 3.7 del Capítulo III, y la demostración continúa siendo válida para $\text{SMTL}^*_\sim$. Un ejercicio

[3] Las llamadas álgebras de Gödel en el campo de la lógica fuzzy

interesante que dejamos para el lector es el de ver qué propiedades de la Δ se cumplen en la álgebras de Heyting simétricas lineales. Es intersante ver cómo las propiedades de prelinealidad y la $(tlin)$ se reflejan en la propiedades de Δ.

Debemos confesar, como consecuencia de lo expuesto, que los trabajos [9, 4] se podrían haber reescrito utilizando los resultados previamente obtenidos por Monteiro. De hecho el estudio que presentamos en este artículo del trabajo de Monteiro demuestra que en las SMTL álgebras se puede introducir una negación involutiva (manteniendo la descomposición en producto subdirecto de cadenas) añadiendo una nueva operación $\sim$ que satisfaga las propiedades

$$\begin{array}{ll} (\sim 1) & \sim\sim x = x \\ (dm) & \neg(x \vee y) \leq \neg x \wedge \neg y \\ (tlin) & \neg x \leq \sim x. \end{array}$$

Desde el punto de vista lógico lo que nos dice es que la lógica que obtenemos añadiendo los axiomas correspondientes a laas propiedades algebraicas expresadas por (~ 1), (dm) y $(tlin)$ a los de SMTL coincide con $\text{SMTL}_{\sim}$. En esta lógica, como hace Monteiro para las álgebras de Heyting simétricas, se puede definir el operador Δ y se puede demostrar que satisface las propiedades de Baaz. Otra cosa son los resultados del trabajo [11] puesto que cuando salimos del marco de las SMTL y pasamos al marco general de las MTL la noción de compatibilidad entre los filtros primos de las álgebras iniciales (antes de introducir la involución) y los de las álgebras de De Morgan que se obtienen con las operaciones reticulares al introducir la involución se complica considerablemente.

Agradecimientos. Los autores agradecen el apoyo del proyecto español MULOG2 (TIN-2007-68005-C04-01) y del convenio bilateral hispano-argentino CSIC-CONICET ref. 2005-AR0092.

REFERENCIAS

[1] C. ALSINA, E. TRILLAS AND L. VALVERDE. On some logical connectives for Fuzzy Set Theory, *J. Math. An. and Appl.* 93 (1983) 15–26.

[2] M. BAAZ. Infinite-Valued Gödel Logic with 0-1-Projections and Relativisations. In *Gödel'96: Logical Foundations of Mathematics, Computer Science, and Physics*, Lecture Notes in Logic 6 (P. Hájek ed.), Springer-Verlag, 23–33, 1996.

[3] P. CINTULA. Short note: on the redundancy of axiom (A3) in BL and MTL. *Soft Comput.* 9(12): 942-942 (2005)

[4] P. CINTULA, E.P. KLEMENT, R. MESIAR, AND M. NAVARA.Residuated logics based on strict triangular norms with an involutive negation *Mathematical Logical Quarterly* 52(3): 269-282 (2006).

[5] R. CIGNOLI, F. ESTEVA, L. GODO AND A.TORRENS. Basic fuzzy logic is the logic of continuous t-norms and their residua. *Soft Computing*, 4: 106–112, 2000.

[6] M. DUMMET. A propositional calculus with denumerable matrix. *Journal of Symbolic Logic*, 24: 97-106, 1959.

[7] N. GALATOS, P. JIPSEN, T. KOWALSKI AND H. ONO *Residuated Lattices: An Algebraic Glimpse at Substructural Logics*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 151, Elsevier, 2007.

[8] F. ESTEVA AND L. GODO. Monoidal t-norm based logic: Towards a logic for left-continuous t-norms. *Fuzzy Sets and Systems*, 124: 271–288, 2001.

[9] F. ESTEVA, L. GODO, P. HÁJEK, M. NAVARA. Residuated fuzzy logics with an involutive negation. *Archive for Mathematical Logic*, 39(2): 103–124, 2000.

[10] F. ESTEVA, L. GODO AND F. MONTAGNA. Equational characterization of the subvarieties of BL generated by t-norm algebras, *Studia Logica* 76: 161–200, 2004

[11] T. FLAMINIO AND E. MARCHIONI. T-norm based logics with an independent involutive negation. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(4): 3125–3144, 2006.

[12] P. HÁJEK. *Metamathematics of Fuzzy Logic*, volume 4 of *Trends in Logic-Studia Logica Library*. Dordrecht/Boston/London, 1998.

[13] P. HÁJEK. Basic fuzzy logic and BL algebras *Soft Computing*, 2: 124-128, 1998.

[14] P. HÁJEK, L. GODO, F. ESTEVA. A complete many-valued logic with product conjunction. *Archive for Mathematical Logic*, 35: 191-208, 1996.

[15] U. HÖHLE. Commutative, residuated l-monoids. In: U. Höhle and E.P. Klement eds., Non-Classical Logics and Their Applications to Fuzzy Subsets, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995, 53-106.

[16] C. M. LING. Representation of associative functions, *Publ. Math. Debrecen* 12 (1965) 189–212.

[17] S. JENEI AND F. MONTAGNA. A proof of standard completeness for Esteva and Godo's logic MTL. *Studia Logica*, 70:183–192, 2002.

[18] A. MONTEIRO. Sur les algèbres de Heyting symétriques, *Portugalia Mathematica* 39, Fasc. 1-4: 1-237, 1980.

[19] P. S. MOSTERT AND A. L. SHIELDS. On the structure of semigroups on a compact manifold with boundary, *Annals of Math.* 65 (1957) 117–143

[20] H. ONO. Logic without contraction rule and residuated lattices I. Manuscript.

[21] A. ROSE AND J.B. ROSER. Fragments of many-valued statement calculi. *Tansactions of the A.M.S.*, 87: 1-53, 1958.

[22] B. SCHWEIZER AND A. SKLAR. Statistical metric spaces, *Pacific J. Math.* 10 (1960) 313–334.

[23] E. TRILLAS AND L. VALVERDE. On some functionally expressable implications for fuzzy set theory, *Proc. of the 3rd International Seminar on Fuzzy Set Theory 1981*, Linz, 173–190.

[24] L.A. ZADEH. Preface in *Fuzzy Logic Technology and Applications* (R.J. Marks-II Ed.), IEEE Thecnical Activities Board, 1994.

IIIA - CSIC, 08193 BELLATERRA, ESPAÑA
E-mail: {esteva,godo}@iiia.csic.es