ACTAS DEL VIII CONGRESO
DR. ANTONIO A. R. MONTEIRO
(2005), Páginas 121–128

CÁLCULO DE LA MULTIPLICIDAD DE FACTORES IRREDUCIBLES

JORGE VARGAS

RESUMEN. En esta nota presentamos una somera descripción de resultados y métodos utilizados en el área de representaciones de álgebras de Lie para el cálculo de la multiplicidad de un submódulo irreducible.

1. NOTACION

k denota un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.
$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ denota, respectivamente, el cuerpo de los números complejos, reales, racionales.
$\mathbb{Z}$ denota el anillo de los números enteros.
V^r denota un espacio vectorial de dimensión finita r sobre el cuerpo k.
$U(\mathfrak{k})$ denota el álgebra universal envolvente del álgebra de Lie $\mathfrak{k}$.
$(.,.)$ es un producto interno en el dual de la subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$ el cual es invariante por la acción del grupo de Weyl. Para las álgebras clásicas se tiene que salvo constante $(X,Y) = \text{tra}(XY)$.

2. REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES DE DIMENSIÓN FINITA

E. Cartan clasificó, salvo equivalencia, el conjunto de representaciones irreducibles de dimensión finita de un álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$. Para su descripción, es necesario el concepto de subálgebra de Cartan y de sistemas de raíces, en lugar de desarrollar una teoría general, puntualizamos para los cuatro ejemplos de álgebras de Lie clásicas, subálgebras de Cartan de las mismas y su sistema de raíces. Para esto, fijamos un espacio vectorial V sobre k de dimensión finita mayor o igual a dos. Las álgebras de Lie clásicas son:

$$\mathfrak{sl}(V) := \{A \in End_k(V) : \text{tra}(A) = 0\}.$$

Sea b una forma bilineal no degenerada en V, para b simétrica, denotamos por

$$\mathfrak{so}(V,b) := \{A \in End_k(V) : b(Av,w) + b(v,Aw) = 0, \ \forall v,w \in V\}.$$

Cuando b es antisimétrica, escribimos

$$\mathfrak{sp}(V,b) := \{A \in End_k(V) : b(Av,w) + b(v,Aw) = 0, \ \forall v,w \in V\}.$$

Estas álgebras son simples salvo $\mathfrak{so}(V,b)$ cuando $\dim V \in \{2,4\}$. A continuación construímos una subálgebra de Cartan para cada una de ellas y su conjunto de raíces. Esencialmente, fijada una base ordenada conveniente de V, una subálgebra de Cartan asociada a esta base consiste de todos los operadores en el álgebra en cuestión cuya matriz es diagonal en la base. Más precisamente, fijamos una base ordenada $B := \{v_1, \ldots, v_n\}$ del espacio vectorial V.

Una subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{sl}(V)$ es el conjunto de operadores lineales cuya matriz en la base B es diagonal y de traza nula.

Recordemos que para una forma antisimétrica no degenerada b existe una base ordenada $B := \{v_1, \cdots, v_{2n}\}$ de V de modo que b se representa en dicha base por $\sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i \wedge \alpha_{2n-(i-1)}$ donde α_i es la base dual de B.

Una subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{sp}(V)$ son los operadores en $\mathfrak{sp}(V)$ cuya matriz en la base B es diagonal.

Para el caso de b simétrica sólo consideramos el caso $\dim V$ par. Nuevamente, tenemos la existencia de una base ordenada $B := \{v_1, \ldots, v_{2n}\}$ de V cuya base dual denotamos por α_j, de modo que $b = \sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i \cdot \alpha_{2n-(i-1)}$. Se demuestra que los operadores lineales en $\mathfrak{so}(V)$ cuya matriz en la base V es diagonal constituyen una subÃąlgebra de Cartan $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{so}(V)$.

Las raíces de un álgebra de Lie simple $\mathfrak{g}$ es un conjunto finito $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ de funcionales lineales en una subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$. Para las álgebras clásicas y la subálgebra de Cartan construida en el párrafo anterior, se demuestra:

Para $\mathfrak{sp}(V)$ existe una base ordenada $e_1, \ldots, e_n$ del dual $\mathfrak{t}^\star$ de modo que el conjunto de raíces es

$$\Phi(\mathfrak{sp}(V), \mathfrak{t}) := \{e_i - e_j, i \neq j, \pm(e_i + e_j), i, j = 1, \ldots, n\}.$$

Para $\mathfrak{so}(V^{2n+1})$ existe una base ordenada $e_1, \cdots, e_n$ del dual $\mathfrak{t}^\star$ de modo que el conjunto de raíces es

$$\Phi(\mathfrak{so}(V^{2n+1}), \mathfrak{t}) = \{\pm(e_i \pm e_j), i \neq j, \pm e_i, i, j = 1, \ldots, n\}.$$

Para $\mathfrak{so}(V^{2n})$ existe una base ordenada $e_1, \cdots, e_n$ del dual $\mathfrak{t}^\star$ de modo que el conjunto de raíces es

$$\Phi(\mathfrak{so}(V^{2n}), \mathfrak{t}) = \{\pm(e_i \pm e_j), i \neq j, i, j = 1, \ldots, n\}.$$

Para $\mathfrak{sl}(k^n)$ existe una base ordenada $e_1, \cdots, e_n$ del dual del subespacio de matrices diagonales en k^n de modo que el conjunto de raíces es

$$\Phi(\mathfrak{sl}(k^n), \mathfrak{t}) = \{e_i - e_j, i \neq j\}.$$

Lo maravilloso de la subálgebra de Cartan y las raíces es que uno puede calcular muchísimas cosas utilizando el conjunto Φ. Por ejemplo describir las representaciones irreducibles de dimensión finita.

Para parametrizar las clases de equivalencia de representaciones irreducibles de dimensión finita de una álgebra de Lie simple $\mathfrak{g}$ fijamos una subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$ y calculamos su conjunto de raíces $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$. Se demuestra que existe un elemento $X \in \mathfrak{t}$ de modo que $\alpha(X) \in \mathbb{Q}\, y\, \alpha(X) \neq 0, \forall \alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$. En los ejemplos $X = (c_1, \cdots, c_n) : c_1 > \cdots > c_n > 0$. Este X aísla

$$\Psi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) : \alpha(X) > 0\}.$$

Por último, marcamos el conjunto de pesos dominantes con respecto a Ψ. Este es,

$$P := \{\lambda \in \mathfrak{t}^\star : 2\frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \forall \alpha \in \Psi\}.$$

Un teorema de E. Cartan afirma que el conjunto de clases de equivalencia de representaciones irreducibles de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ está en correspondencia biyectiva con P. Como consecuencia de esta biyección se tiene que cuando (π_λ, V_λ) corresponde a $\lambda \in P$, entonces

$$\dim V_\lambda = \frac{\prod_{\alpha\in\Psi}(\lambda + \rho, \alpha)}{\prod_{\alpha\in\Psi}(\rho, \alpha)},$$

donde $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Psi}\alpha$.

Para realizar explícitamente la representación V_λ recurrimos a una construcción algebraica que deriva de la cohomología de variedades complejas. Esta manera de realizar las representaciones irreducibles fue obtenida formalizada por [5]. A continuación presentamos una descripción de dicha construcción.

Para álgebras de Lie $\mathfrak{s} \supseteq \mathfrak{r}$.

Consideremos la categoría de representaciones $C(\mathfrak{s},\mathfrak{r})$ cuyos objetos son las representaciones (π, V) de del álgebra de Lie $\mathfrak{s}$ tal que para cada $v \in V$ se tiene que $\pi(U(\mathfrak{r}))v$ es un subespacio de V de dimensión finita. En [12], [5] se presenta una demostración de que esta categoría es abeliana con suficientes módulos inyectivos y proyectivos.
En particular, $C(\mathfrak{s},\mathfrak{s})$ consiste de la categoría de representaciones de $\mathfrak{s}$ que resultan de calcular las representaciones infinitesimales de las representaciones del cubrimiento universal del grupo Adjunto de $\mathfrak{s}$.

Para la inclusión de álgebras de Lie, $\mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{k} \supseteq \mathfrak{l}$, Zuckerman definió un funtor

$$\Gamma_{\mathfrak{l},\mathfrak{k}} : C(\mathfrak{g},\mathfrak{l}) \longrightarrow C(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$$

por la regla

$$\Gamma_{\mathfrak{l},\mathfrak{k}}(V) = \{v \in V : \dim_k(\text{subs. gen}(\pi(U(\mathfrak{k}))v) < \infty\}.$$

Es fácil verificar que $\Gamma_{\mathfrak{l},\mathfrak{k}}$ es un funtor exacto a izquierda y contravariante. Por consiguiente, sus funtores derivados a derecha $\Gamma^q, q = 0, 1, \ldots$ están definidos. Por medio del complejo de Koszul y “representaciones coinducidas” se calculan los módulos $\Gamma^q(V)$. Para detalles, consultar [13], [4].

A continuación, a partir de $\mathfrak{g}, \mathfrak{t}, \Psi, P, \Gamma$ construímos las representaciones irreducibles de dimensión finita del álgebra de Lie simple $\mathfrak{g}$. Al conjunto de raíces Ψ se le asocia de modo natural una subálgebra soluble maximal $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$, denominada subálgebra de Borel. Para nuestros ejemplos, el modo estándar de selección de $\mathfrak{b}$ es fijar $\mathfrak{b}$ igual a la intersección del álgebra de matrices triangulares superiores con $\mathfrak{g}$.

Fijemos $\lambda \in \mathfrak{t}^\star$. Como $\mathfrak{t}$ es un álgebra abeliana, $\lambda : \mathfrak{t} \to k$ es una representación unidimensional k_λ de $\mathfrak{t}$. Si extendemos λ a la subálgebra $\mathfrak{b}$ definiendo $\lambda(Y) = 0$ para cualquier matriz nilpotente en $\mathfrak{b}$, puesto que $[\mathfrak{t},\mathfrak{b}] \subset [\mathfrak{b},\mathfrak{b}] \subset$ *matrices nilpotentes en* $\mathfrak{b}$, resulta que k_λ es una representación de álgebras de Lie. Fijamos la estructura de $(\mathfrak{g},\mathfrak{b})$ bi-módulo en $U(\mathfrak{g})$ por multiplicación a izquierda por $U(\mathfrak{b})$ y a derecha por $U(\mathfrak{g})$. Sea

$$H(k_\lambda) := Hom_{U(\mathfrak{b})}(U(\mathfrak{g}), k_\lambda)$$

en el cual, multiplicación a derecha por $U(\mathfrak{g})$ en la variable independiente origina una estructura de $U(\mathfrak{g})$-módulo. Denotamos por

$$H(k_\lambda) := Hom_{U(\mathfrak{b})}(U(\mathfrak{k}), k_\lambda)[\mathfrak{t}]$$

el subespacio de elementos w tal que la dimensión del subespacio generado por $U(\mathfrak{t})w$ es finita. Este subespacio resulta un $U(\mathfrak{g})$-submódulo. Es un teorema que este módulo es de dimensión infinita. Para una demostración [12], [8]. En la jerga de representaciones de álgebras de Lie se lo denomina el módulo producido por k_λ. Se demuestra que $H(k_\lambda)$ es un elemento de $C(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$. Además, $H(k_\lambda)$ es un elemento de $C(\mathfrak{g},\mathfrak{b})$. Se tiene,

Teorema 1. *Cuando* $\lambda \in P$,

$$\Gamma^j_{\mathfrak{b},\mathfrak{g}}(H(k_\lambda)) = 0 \textit{ para } j \neq S := \dim(\mathfrak{b}/\mathfrak{t}),$$

$$\Gamma^S_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}(H(k_\lambda))$$

es una representación de dimensión finita e irreducible de $\mathfrak{g}$.

Un teorema denominado Teorema de Bott–Borel–Weil–Kostant establece que, de este modo, se obtiene salvo equivalencia todas las representaciones irreducibles de $\mathfrak{g}$. Para una demostración, consultar [5], [8].

3. Fórmula de Kostant–Heckman

Sea $\mathfrak{k}$ un álgebra de Lie simple de dimensión finita sobre k. Fijemos una representación (π, V) irreducible de dimensión finita de $\mathfrak{k}$. Además, fijamos una subálgebra simple $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{k}$. Ejemplos de pares $(\mathfrak{k}, \mathfrak{l})$ interesantes son: $(\mathfrak{sl}(k^{2n}), \mathfrak{sp}(k^{2n}))$; $(\mathfrak{sl}(k^n), \mathfrak{so}(k^n))$; $(\mathfrak{sl}(k^n), \mathfrak{sl}(k^{n-1}))$; $(\mathfrak{so}(k^n), \mathfrak{so}(k^{n-1}))$. Los dos últimos ejemplos se obtienen extendiendo por cero un operador lineal en k^{n-1}. Por ser V un espacio de dimensión finita, la restricción de π a $\mathfrak{l}$ posee una serie decomposición finita. Es un teorema de E. Cartan que, en realidad, la restricción de π a $\mathfrak{l}$ es completamente reducible.

El objeto de esta sección es para cada representación irreducible (τ, W) de $\mathfrak{l}$ calcular su multiplicidad en la serie de Jordan–Hölder de π restricta a $\mathfrak{l}$. Para esto usaremos la teoría de peso máximo desarrollada en la sección anterior.

Con este fin, marcamos $\mathfrak{t}_1 \subset \mathfrak{t}$ subálgebras de Cartan de $\mathfrak{l}$ y $\mathfrak{k}$ respectivamente. En ambas subálgebras de Cartan construimos sistemas de raíces positivas Ψ_1, Ψ de modo que resulten compatibles. Para su construcción, consideramos

$$\Phi_0 := \{\alpha \in \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) : \alpha(\mathfrak{t}_1) = 0\}$$

y denotemos por

$$q : \mathfrak{t}^\star \to \mathfrak{t}_1^\star$$

la aplicación restricción. Por tanto, $q(\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) - \Phi_0)$ es un conjunto finito de funcionales lineales no nulas en $\mathfrak{t}_1$. Se satisface que $q(\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) - \Phi_0) \supseteq \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}_1)$. Se demuestra que existe un vector $X_0 \in \mathfrak{t}_1$ de modo que ningún elemento de $q(\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) - \Phi_0)$ toma el valor cero en X_0 y además el valor es un número racional. A partir de esto definimos

$$\Psi_1 = \{\alpha \in \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}_1) : \alpha(X_0) > 0\}.$$

Escojamos un vector X_1 en $\mathfrak{t}$ de modo que ninguna raíz en Φ_0 toma el valor cero en X_1 y además dicho valor es un número racional. El sistema de raíces positivas en $\mathfrak{t}$ que utilizamos es

$$\Psi := \{\alpha \in \Phi_0 : \alpha(X_1) > 0\} \cup \{\alpha \in \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) - \Phi_0 : \alpha(X_0) > 0\}.$$

Por último, denotamos por A el "multiset"

$$A := q(\Psi - \Phi_0) - \Psi_1.$$

Esto es, si por ejemplo $q(\alpha) = q(\beta)$ entonces $q(\alpha)$ lo pensamos repetido en A. El conjunto subyacente en A está contenido en un semiespacio abierto, por ende la función de partición p_A está bien definida. Recordemos que para $\mu \in \mathfrak{t}_1^\star$,

$$p_A(\mu) = \#\{(n_\alpha)_{\alpha \in A} : \mu = \sum_{\alpha \in A} n_\alpha \alpha,\ n_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

Sean

$$\rho := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Psi}\alpha,\ \ \rho_1 := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Psi_1}\alpha,\ \ \rho_0 := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Psi\cap\Phi_0}\alpha,$$

y

$$D_0(\gamma) := \prod_{\alpha_0\in\Phi_0\cap\Psi}\frac{(\gamma,\alpha)}{(\rho_0,\alpha)}.$$

Por la sección anterior, (π,V) (resp. (τ,W)) corresponden a $\lambda\in\mathfrak{t}^\star$ (resp. $\mu\in\mathfrak{t}_1^\star$) dominante con respecto a Ψ (resp. a Ψ_1). La fórmula de Kostant–Heckman establece

Teorema 2. *La multiplicidad de (τ,W) en la restricción de (π,V) a $\mathfrak{l}$ está dada por*

$$m_\mu(\lambda) := \sum_{w\in W_{G,H}}\varepsilon(w)D_0(w(\lambda+\rho))p_A(qw(\lambda+\rho)-(\mu+\rho_1)).$$

Aquí, $W_{G,H}$ es un conjunto de representantes, convenientemente elegidos, del cociente del grupo de Weyl de Φ por el grupo de Weyl de Φ_0.

Demostraciones de la fórmula de Kostant–Heckman se encuentran en [6], [9], [12]. La demostración en [12] es de destacar ya que sólo utiliza cohomología de álgebras de Lie. Para pares particulares $(\mathfrak{k},\mathfrak{l})$ la fórmula ha sido simplificada notablemente, para detalles consultar [14]. Otro caso particular aparece en [1] y referencias allí puntualizadas.

Paradan ha obtenido una demostración de la fórmula de Kostant–Heckman utilizando recursos de geometría simpléctica. De modo más preciso, a (π,V) se le asocia la órbita codadjunta O_λ por el grupo adjunto de $\mathfrak{k}$ aplicado a λ. O_λ posee una estructura de variedad hamiltoniana $Ad(\mathfrak{k})$-invariante. Por tanto es una variedad simpléctica hamiltoniana sobre $Ad(\mathfrak{l})$ cuya aplicación momento es la aplicación restringir funcionales de $\mathfrak{k}$ a $\mathfrak{l}$. Usando ideas de cuantización de Guillemin-Stenberg se obtiene la fórmula de Kostant–Heckman [10].

4. SERIE DISCRETA DE UN GRUPO DE LIE SEMISIMPLE

Sea G un grupo de Lie semisimple conexo. Denotemos por $\mathfrak{g}_0$ el álgebra de Lie de G y por $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_0\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ su complexificación. Por ejemplo, $G = SO(2p,2q)_0$ el grupo conexo de operadores lineales en $\mathbb{R}^{2p+2q}$ que preservan una forma cuadrática de signatura $(2p,2q)$, entonces $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(\mathbb{C}^{2p+2q})$. Fijemos un subgrupo maximal compacto K de G, denotemos por $\mathfrak{k}_0$ su álgebra de Lie y por $\mathfrak{k}$ la complexificación de $\mathfrak{k}_0$. Para el ejemplo, $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(\mathbb{C}^{2p})\oplus\mathfrak{so}(\mathbb{C}^{2q})$.

De ahora en más suponemos que $\mathfrak{k}$ contiene una subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{g}$.

Fijemos un sistema de raíces positivas Ψ en $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$. Por consiguiente, disponemos de los módulos $H(k_\lambda)$ y del funtor de Zuckerman

$$\Gamma_{\mathfrak{t},\mathfrak{k}} : C(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) \longrightarrow C(\mathfrak{g},\mathfrak{k}).$$

Teorema 3. *Cuando λ es dominante integral y regular*[1] *con respecto a Ψ, entonces*

$$\Gamma^j_{\mathfrak{t},\mathfrak{k}}(H(k_\lambda)) = 0 \ \ \textit{para}\ j\neq S := \dim((\mathfrak{b}\cap\mathfrak{k})/\mathfrak{t}),$$

$$D_{\mathfrak{g},\lambda} := \Gamma^S_{\mathfrak{t},\mathfrak{k}}(H(k_\lambda))$$

es una representación irreducible e infinitesimalmente unitarizable de $\mathfrak{g}$.

[1] $(\lambda,\alpha)>0$, $\forall\alpha\in\Psi$

Definimos como la *serie discreta asociada a* λ igual al módulo del Teorema 3. Para una demostración consultar [13].

5. FÓRMULA DE BLATTNER

Esta fórmula es similar a la de Kostant–Heckman, la única diferencia es que ahora se calcula la multiplicidad de un submódulo de dimensión finita en una representación de dimensión infinita. Para su descripción denotemos por W el grupo de Weyl de $\mathfrak{t}$ en $\mathfrak{k}$. Debido a que $\mathfrak{t}$ está contenido en $\mathfrak{k}$ el espacio raíz asociado a cada raíz α está contenido en $\mathfrak{k}$ o el ortogonal $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{k}$ en $\mathfrak{g}$ (ortogonal con respecto a la forma de Killing, en los ejemplos, con respecto a la forma $\mathrm{tra}(XY)$). Denotemos por Ψ_n el conjunto de raíces en Ψ cuyo espacio raíz está contenido en $\mathfrak{s}$. Definimos

$$\rho_n := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Psi_n}\alpha, \ \ \rho_c := \rho - \rho_n = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Psi-\Psi_n}\alpha.$$

Sea (τ_μ, W_μ) una representación irreducible de dimensión finita de $\mathfrak{k}$ determinada por el parámetro $\mu \in \mathfrak{t}^\star$ dominante e integral con respecto a $\Psi_c := \Psi - \Psi_n$. Entonces, la fórmula de Blattner, demostrada por [7], es

Teorema 4. *La multiplicidad de* (τ_μ, W_μ) *en la restricción a* $\mathfrak{k}$ *de* $D_{\mathfrak{g},\lambda}$ *está dada por*

$$m_\mu(\lambda) := \sum_{w\in W}\varepsilon(w)p_{\Psi_n}(w(\mu+\rho_c)-(\lambda+\rho_n)).$$

Se dispone de otras demostraciones de dicha fórmula, por ejemplo en [2], [10], [12], todas ellas muy diferentes ya que utilizan ingredientes de distintas áreas. En efecto, la prueba de [2] utiliza el lenguaje de la geometría simpléctica y medidas de Liouville; la demostración en [10] utiliza el lenguaje de cuantización de Guillemin-Stenberg-Kostant, y la construida por [12] recurre a cohomología de álgebras de Lie.

6. MULTIPLICIDAD DE RESTRICCIÓN DE SERIES DISCRETAS A SUBGRUPOS SEMISIMPLES

En los últimos años, Duflo y quien redactó esta nota nos hemos dedicado a dar una respuesta a los dos problemas siguientes:

Dada una serie discreta $D_{\mathfrak{g},\lambda}$ y una subálgebra semisimple $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, encontrar condiciones suficientes (en lo posible que resulten necesarias) para que la restricción de $D_{\mathfrak{g},\lambda}$ a $\mathfrak{h}$ resulte una representación admisible. Esto es, el $U(\mathfrak{g})$-módulo $D_{\mathfrak{g},\lambda}$ pensado como $U(\mathfrak{h})$-módulo es suma de una familia numerable de $U(\mathfrak{h})$-submódulos irreducibles $Z_i, i = 0,1,2,\ldots$, de manera que $\#\{i : Z_i \equiv Z_s\}$ es finito para cada $s = 0,1,2,\ldots$.

¿Es posible encontrar fórmulas del tipo Kostant–Heckman–Blattner para la multiplicidad de cada Z_s?

Para la segunda pregunta, el siguiente teorema muestra que una respuesta positiva es posible.

Teorema 5. *Supongamos que* $D_{\mathfrak{g},\lambda}$ *restricta a* $\mathfrak{h}$ *admite una subrepresentación irreducible* Z*. Entonces,* Z *es equivalente a una serie discreta* $D_{\mathfrak{h},\mu}$.

Para una demostración consultar [11].

A continuación formulamos resultados para asegurar admisibilidad de la restricción de $D_{\mathfrak{g},\lambda}$.

Para esto suponemos que $\mathfrak{h}$ es el conjunto de puntos fijos de un automorfismo involutivo σ de $\mathfrak{g}$. Cada $\lambda \in \mathfrak{t}^\star$ se extiende a un elemento de $\mathfrak{g}^\star$, también denotado por λ, por cero en el complemento ortogonal de $\mathfrak{t}$ con respecto a la forma de Killing. Sea O_λ la órbita coadjunta de λ en $\mathfrak{g}^\star$. Esto es, $O_\lambda = Ad(\mathfrak{g}_0)\lambda$. Sea

$$p : O_\lambda \to \mathfrak{h}_0^\star$$

la aplicación restricción. Se tiene

Teorema 6. *p es una aplicación propia si y sólo si $D_{\mathfrak{g},\lambda}$ es admisible como $U(\mathfrak{h})$-módulo.*

Este teorema permite aplicar técnicas elaboradas en [2] para estudiar cuáles $D_{\mathfrak{h},\mu}$ ocurren como submódulos de la restricción. Para detalles, ver [3].

A seguir, describimos otro criterio de fácil aplicación para asegurar admisibilidad. Para tal fin, escogemos $\mathfrak{t}_1 \subset \mathfrak{t}$ subálgebras de Cartan de "compactas" en $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{g}$ respectivamente. En $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ fijamos un sistema de raíces positivas y consideramos λ regular y dominante con respecto a Ψ. Sea

$$\Phi_0 := \{\alpha \in \Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) : \alpha(\mathfrak{t}_1) = 0\}.$$

Denotemos por

$$q : \mathfrak{t}^\star \to \mathfrak{t}_1^\star$$

la aplicación restricción.

Teorema 7. *Si para cada w en el grupo de Weyl $W := W(G,T)$ el multiset*

$$q(w\Psi_n) \cup q(\Psi_c - \Phi_0) - \Phi(\mathfrak{h},\mathfrak{t}_1)$$

está contenido en un semiespacio abierto, entonces $D_{\mathfrak{g},\lambda}$ tiene restricción admisible a $\mathfrak{h}$.

Debido a que existe una clasificación de las álgebras de Lie simples, aplicando este criterio hemos encontrado ejemplos de $D_{\mathfrak{g},\lambda}$ que admiten restricción admisible a $\mathfrak{h}$. Lamentablemente, la condición del criterio no es necesaria; sin embargo, los ejemplos que poseemos donde no es necesaria están relacionados con el criterio.

En base al criterio es posible calcular la multiplicidad de los submódulos irreducibles del modo siguiente. Por simplicidad de exposición suponemos que $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1$. En este caso, la aplicación q es la identidad y $\Phi_0 = \emptyset$. Definimos para $\mu \in \mathfrak{t}^\star$,

$$p_{\Psi-\Phi(\mathfrak{h})}(\mu) = \#\left\{(n_\alpha)_{\alpha\in\Psi-\Phi(\mathfrak{h})} : \mu = \sum_{\alpha\in\Psi-\Phi(\mathfrak{h})} n_\alpha \alpha,\ n_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\right\}.$$

Sean

$$\rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Psi-\Phi(\mathfrak{h},\mathfrak{t}_1)} \alpha.$$

Teorema 8. *Supongamos que la hipótesis del Teorema 7 es válida. Entonces, la multiplicidad de $D_{\mathfrak{h},\mu}$ en la restricción de $D_{\mathfrak{g},\lambda}$ a $\mathfrak{h}$ está dada por*

$$m_\mu(\lambda) := \sum_{w\in W} \varepsilon(w) p_{\Psi-\Phi(\mathfrak{h})}(\mu - w\lambda - \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}).$$

Para una demostración consultar [3].

AGRADECIMIENTOS

Estas notas son una versión extendida de la conferencia pronunciada con motivo del VIII Congreso Monteiro. Deseo aprovechar esta oportunidad para agradecer la invitación a dictar esta conferencia y para felicitar a los organizadores del congreso por la calidad de los cursos, exposiciones, ambiente matemático y organización del que tuvimos la suerte de participar.

REFERENCIAS

[1] Cagliero, L., Tirao, P., A closed formula for weight multiplicities of representations of $Sp_2(\mathbb{C})$, Manuscripta Math. **115**, 2004, 417–426.
[2] Duflo, M., Heckman, G., Vergne, M., Projection d'orbits, formule de Kirilov et formule de Blattner, Mem. Soc. Math. France **15**, 65–128 (1984).
[3] Duflo, M., Vargas, J., Proper maps and multiplicities, preprint, 60 páginas.
[4] Duflo, M., Vergne, M., Sur le foncteur de Zuckerman, C.R.Acad. Sc. Paris, t. 304, Serie I, Num 16, 1987, 467–469.
[5] Enright, T. and Wallach, N., Notes on homological algebra and representations of Lie algebras, Duke Math. J. **47** (1980), 1–15.
[6] Heckman, G., Projections of orbits and asymptotic behavior of multiplicities for compact, connected Lie groups, Invent. Math. **67** (1982), 333–356.
[7] Hecht, H., Schmid, W., A proof of Blattner's conjecture, Invent. Math. **31**, 1975, 129–154.
[8] Knapp, T., Lie algebra cohomology, Princeton Univ. Press, 1999.
[9] Lusztig, G., Singularities, character formulas and a q-analog of weight multiplicities, *Analysis and topology on singular spaces, II, III (Luminy, 1981)*, Asterisque 101–102, Soc. Math. France, Paris, 1983, 208–299.
[10] Paradan, E., Spin^c-quantization and the K-multiplicities of the discrete series, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 36 (2003), no. 5, 805–845.
[11] Vargas, J., Restrictions of some unitary representations of $SU(n,1)$ to $U(n-1,1)$ Journal of Funct. Anal. 103, (1992), 352–371.
[12] Vogan, D., Representations of real reductive Lie groups, Birkhäuser, 1979.
[13] Wallach, N., Real reductive groups I, Academic Press, 1991.
[14] Zelobenko, D.P., Compact Lie groups and their representations, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 40. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1973.

FAMAF, UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA, CIUDAD UNIVERSITARIA, 5000 CÓRDOBA, ARGENTINA
E-mail: `vargas@famaf.unc.edu.ar`