GEOMETRÍA

Generadores y relaciones para el álgebra de coordenadas cuántica

Rodrigo Iglesias
Departamento de Matemática, Universidad nacional del Sur.
Av. Alem 1253, (8000) Bahía Blanca, Argentina.
riglesia@criba.edu.ar

El álgebra de coordenadas cuántica se define como cierta subálgebra del dual del álgebra envolvente cuántica asociada a una matriz de Cartan de tipo finito. Damos un esquema de cómo obtener una presentación de estas álgebras.

El álgebra de coordenadas cuántica $\mathcal{F}_q(G)$ es una cuantización o deformación del álgebra de funciones "polinómicas" sobre un grupo complejo semisimple, más precisamente, el álgebra generada por aquellas funciones sobre el grupo que son coeficientes matriciales de ciertas representaciones del grupo G. Esta cuantización se define de un modo bastante indirecto: el álgebra envolvente $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G admite la bien conocida cuantización $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ que "preserva" la estructura de álgebra de Hopf así como la teoría de representaciones de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, siendo $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ el caso límite $q \to 1$. El álgebra $\mathcal{F}_q(G)$ se define entonces como la subálgebra del dual $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})^*$ (pues tiene estructura natural de álgebra) generada por los coeficientes matriciales de ciertas representaciones de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$.

En ciertos casos (por ejemplo para la representación canónica de $\mathcal{U}_q(sl_n)$) se conocen explícitamente las reglas de conmutación entre los coeficientes y es posible dar una presentación del álgebra $\mathcal{F}_q(G)$. Nuestro propósito es describir un método para obtener una presentación y una base de $\mathcal{F}_q(G)$ que funciona en el caso general para $\mathfrak{g}$ semisimple. El método se basa en una descomposición del tipo Peter-Weyl de $\mathcal{F}_q(G)$ y la aplicación de la teoría de bases cristalinas de Kashiwara que permite observar el comportamiento de $\mathcal{F}_q(G)$ cuando $q \to 0$. Cuando $q \to 0$, $\mathcal{F}_q(G)$ adquiere una simplicidad extraordinaria que puede ser aprovechada para obtener resultados para un q genérico.

Nonholonomic Systems with Symetry

Hernán Cendra
Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253
(8000) Bahia Blanca, Argentina, and CONICET.
uscendra@riba.edu.ar

Problems in nonholonomic mechanics are typified by those involving velocity dependent constraints, such as problems in robotics, wheeled vehicular dynamics and motion generation. These problems involve important engineering issues, such as path planning, dynamics stability and control. Despite the long history of nonholonomic mechanics, the establishment of productive links with corresponding problems in holonomic mechanics, such as reduction theory, stability theory, etc, has taken some time to develop.

The main purpose of this communication will be to give a brief description of some recent developments on reduction of Lagrangian systems with nonholonomic constraints. These results include the introduction of a category of vector bundles, the *Lagrange-Poincaré bundles*, and subbundles of them, to obtain intrinsic formulas in terms of appropriate covariant derivatives. Some recent calculations by a student with the example of the snakeboard will be available in the poster of Sebastian Pueblas.

It would be interesting to find generalizations of this kind of approach, using Lagrange-Poincaré bundles, to include more cases of interest, like the case of affine constraints.

Sobre la geometría del espacio de fase

Roberto Germán Ovejero
Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Salta.
Av. Bolivia 5150, (4400) Salta, Argentina.
ovejero@unsa.edu.ar

Es bien sabido que el espacio de fase se construye como producto cartesiano de los espacios de configuración y de impulsos. Sin embargo, es sorprendente que aparentemente, hasta la fecha, nadie haya observado que dichos espacios no están constituidos por elementos homogéneos, ya que sus vectores pertenecen a espacios duales, puesto que si como es tradicional, se considera a los vectores del espacio de configuración como contravariantes, los del espacio de impulsos deben ser covariantes, ya que sus derivadas temporales, las fuerzas, tienen esa varianza.

Por consiguiente, antes de realizar el producto cartesiano, corresponde homogeneizar la varianza de los espacios que contribuyen a ese producto.

La modelización de los vectores de esos espacios sobre espacios proyectivos, muestra que, para el caso bidimensional, a las componentes de los vectores contravariantes corresponden coordenadas de punto, mientras que para sus duales covariantes, corresponden las proyectivamente duales coordenadas de recta, y el proceso de homogeneización para llevarlas a un mismo tipo de coordenadas introduce naturalmente una reticulación sobre dicho plano donde la conservación de las áreas de las celdas del retículo es compatible con su estructura simpléctica. Este reticulado posee también una unidad natural de área, lo cual es compatible con la cuantización de ese plano, si se elige una escala en la cual esa unidad de área represente a la constante de Planck.

Adicionalmente, si en el plano proyectivo sobre el cuerpo de los reales donde se modeliza a los vectores del plano de fase, se superpone otra estructura proyectiva sobre el cuerpo de la clase de restos módulo tres, que da cuenta en virtud de su discretitud, del carácter discreto de los fenómenos de la física, se obtiene una posibilidad de visualizar el porqué del principio de exclusión de Pauli, como así también del porqué de los diferentes tipos de estadística.

Todo esto lleva a mostrar la compatibilidad de la mecánica cuántica con la mecánica hamiltoniana, descartada por Dirac cuando anatematiza la compatibilidad de la misma con la existencia del espacio de fase (Cf. P.M. Dirac, Quantum Mechanics, 3^a ed. Oxford U.P 1947, p.132),donde dice "...in view that phase space has no meaning in quantum mechanics, there being no possibility of assigning numerical values to the q's and p's."

Relativistic Lagrange Formulation

Robert Geroch
G. Nagy
Oscar Reula
FAMAF–Universidad Nacional de Córdoba and CONICET.
FAMAF, Ciudad Universitaria, (5000) Córdoba, Argentina.
reula@fis.uncor.edu

It is well-known that the equations for a simple fluid can be cast into what is called their Lagrange formulation. We introduce a notion of a generalized Lagrange formulation, which is applicable to a wide variety of systems of partial differential equations. These include numerous systems of physical interest, in particular, those for various material media in general relativity. There is proved a key theorem, to the effect that, if the original (Euler) system admits an initial-value formulation, then so does its generalized Lagrange formulation.

Non-supersymmetric vacua and minimum length vectors

Gustavo Dotti
FAMAF–Universidad Nacional de Córdoba and CONICET.
FAMAF, Ciudad Universitaria, (5000) Córdoba, Argentina.
gdotti@fis.uncor.edu

One interesting feature of gauge theories with $\mathcal{N}=1$ supersymmetry is the existence of multiple, inequivalent supersymmetric vacua. These are zeroes of the scalar potential $V=D+F$. Here $F=(dW,dW)$ is the square norm of the differential of a G invariant polynomial W on $\mathbb{C}^n$ (the superpotential), G a compact subgroup of $U(n)$, and $D(z)=\sum_A |(z,T_A z)|^2$, where $T_A, A=1,...,d_G$ is an orthonormal basis of Lie(G). The $D=0$ condition signals minimum length vectors in closed orbits of the complexified group G^c [Kemp-Ness], thus the space of G orbits of $D=0$ points agrees with the algebraic quotient $\mathbb{C}^n//G^c$ [Procesi-Schwarz]. Supersymmetric vacua (sv) are $F=D=0$ points, and the space of G orbits of sv, named moduli space of sv, is an algebraic subset of $\mathbb{C}^n//G^c$. In this work [Dotti] we study non-supersymmetric vacua (nsv), that is, local minima of $V=D+F$. It is found that a number of physically relevant theories, such as SQED and $N_F=1$ SQCD, have the property that, for arbitrary superpotentials, all stationary points of V are G^c related to minimum length vectors. It is also shown that for non-gauge supersymmetric theories with a global symmetry G (for which $V = F$), given any z there is a lower energy point z_0 in the closed G^c orbit that lies in the boundary of $G^c z$.

References:
[Kemp-Ness]: G.Kempf and L.Ness, Lect.Notes Math 732(1978),232.
[Procesi-Schwarz]: C.Procesi and G.Schwarz, Phys.Lett.B161 (1985)117.
[Dotti]: G.Dotti, Nuc. Phys. B558 (1999), 573.

Hyperkähler torsion structures on homogeneous manifolds

Laura Barberis
FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba.
Ciudad Universitaria, (5000) Córdoba, Argentina.
barberis@mate.uncor.edu

On any hermitian manifold there is a distinguished connection (the Bismut connection), which arises, for instance, in N=2 supersymmetry under the presence of the Wess-Zumino term. Physicists call such a connection a KT-connection (KT stands for Kähler torsion). In case the manifold is hyperhermitian there is an analogous connection, called HKT-connection, which may or may not exist, but in case it exists it is unique. There are two types of HKT-structures on manifolds, strong and weak, depending on whether the torsion of the corresponding connection is closed or not. It is the aim of this work to present a procedure for constructing weak HKT structures on homogeneous manifolds.

Second Order Connections and Stochastic Horizontal Lifts

Pedro Catuogno
Departamento de Matemática. FCEYN. Universidad Nacional de Mar del Plata.
Funes 3350. (7600) Mar del Plata (BA) Argentina.
pedrojc@mdp.edu.ar

In this paper we develop a theory of second order connections with a view towards the Stochastic Calculus. Connections in principal fiber bundles are defined as sections of the tangent space of second order differential operators. These are shown to be the same as the holonomic connections of order two of C. Ereshmann. We will give a proof of the existence and the uniqueness of stochastic horizontal lift of semimartingales respect to this connections. As to the classical connections, this connections induces operators of covariant derivative in the associated vector bundles, we study the parallel transport along of semimartingales on the base space.

Cálculo y reconocimiento de Desenvolvimientos Universales.

Paola Andrea Bonfili
Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco.
López y Planes 482, Trelew, Chubut, Argentina.
binfili@infovia.com.ar

En este trabajo tratamos con desenvolvimientos universales del germen g, de codimensión finita, perteneciente a $\mathcal{E}^m_{x,\lambda}$. En primer lugar damos un método sistemático que nos permite encontrar un desenvolvimiento universal de g. También respondemos la siguiente pregunta: Sea $G(x, \lambda, \alpha)$ un desenvolvimento de un germen g. ¿Es G un desenvolvimiento universal de g?

Density for Frénet's curves in riemannian spaces of constant curvature and for null Frénet curves in L^n.

Graciela Silvia Birman
NUCOMPA. Universidad del Centro de la Provincia de Buenos Aires.
Pinto 399, (7000) Tandil, Provincia de Buenos Aires, Argentina.
gbirman@exa.unicen.edu.ar

In Integral Geometry the measure of a set of geometrical objects X in some determined space is defined as the integral over the group of motion which acts on X of a differential form $w = f(x)dx$ (provided this integral exists). The function $f(x)$ must satisfy that the measure $m(X)$ be invariant under the group of motions in the space. Such a differential w is called *density for the set* X.
From the generalized definition of Frénet curves in Riemannian spaces of constant curvature given by Muñoz Masqué and Rodríguez Sánchez, we show the *density for Frénet curves in Riemannian spaces of constant curvature* and an integral formula applying the result to the Poincaré's formula.
Also, from the definition of null Frénet curves in n-dimensional Lorentzian spaces given by Birman and Desideri, we show the density for *null Frénet curves in* L^n in terms of its $\frac{1}{2}\{n^2 - 3n + 6\}$ linear independent curvatures.

The Geometry of the Euclidean Hamiltonian Trajectories on $\sqrt[n]{1}$ Points

Blanca I. Niel
Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur.
Av. Alem 1253, (8000) Bahía Blanca, Argentina.
biniel@criba.edu.ar